几何学辞典

问题解法

问题解法　几何学辞典

问 题 解 法

几 何 学 辞 典

〔日〕笹部貞市郎 编

高清仁 舒玉兴 胡广春 陈传理
陈秉跃 方福昌 淺見笘久世 译

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 30.5 插页 4 字数 1,682,000
1984 年 8 月第 1 版 1984 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—60,800 本

统一书号：17150·7 定价：(精) 5.60 元

出 版 说 明

自明治维新以后，日本为了学习西方科学技术，在中小学数学教育上也刻意输入，大量地翻译了欧美有影响的课本．以后又自编教材和各种初等数学读物，逐渐地在初等数学教育的取材、编排、题选上形成了自己的特点．根据国内外的情况，日本数学教育也迭经改革，但仍然有着不同于欧美、苏联的地方．为了从一个方面了解这种特点，我们组织翻译了这一套题解辞典．

这几本辞典的题目及解答远不是数学教育的全部，但是由于它的写作年代较近，作者在编选题目时又比较注意立足于日本的教育情况，兼顾传统与未来，所以确实从比较宽广的角度反映了日本中学数学教育所注重的东西．这些都可以供我国的数学教师了解借鉴．这几本辞典选择的题目有相当部分是初等数学所必需的基础训练题，当然更可以作为教学中的参考材料．

需要说明的是，这几本辞典卷帙浩大，各册各章的编写质量并不一致．错误、重复之处多有发现，我们在组织翻译时只纠正了发现的错误，删去各册中的数学小史和一些数表，如对数表，三角函数表等，在《三角学辞典》中删去了一些明显重复的题目以及球面三角的题目，其他未作改动．希望读者能在使用中注意．

旧版 序　言

作者不揣冒昧，早在十一年前，即大正十四年期间，就打算编纂几何学辞典.

当时，并没有什么特别周详的计划，只是自己在遇到难解的几何问题时，没有合适的辞典查阅，感到很不方便. 我想与我同感的人也是不少的. 因此，如果编纂一本大而全的几何学辞典，也许能给读者带来些方便. 但是，当与前辈和朋友一起谈论此事时，总是带着担忧的心情. 因为对这些极为千变万化且种类繁多的几何学问题，要想把它们系统地归纳整理，看来是十分困难的，纵然能够做到，但出版所需的经费必然很多，究竟采取什么办法合适，也实在难于预料. 因此，计划的付诸实施就完全处于无可奈何的状况之中.

这样一来，一时甚至想将计划编纂的念头打消. 但是，一想到古人说的"有志者事竟成"的名言，又几次重作新的计划，梦寐以求完成. 昭和四年春，适逢我迁居东京，这样，得到了搜集问题和研究解法的极好机会，促使我最后下定决心，排除万难，去完成很久以来的宿愿. 当时搜集问题主要参考下列各书:

(1) 现行中等学校几何学教科书十余种.

(2) 大正十年以后的高等学校入学试题.

(3) 文部省对教员甄别考试的试题.

(4) 康布罗斯(コンブルス)、尼希逊(ニキソン)、肖伯里(ショビネー)、凯基(ケーシー)、威尔逊(ウイルソン)的几何学以及彼德逊(ペテルセン)、亚历山大罗夫(アレキサンドロフ)的作图问题.

(5) 其他各种杂志以及图书中的少见的问题.

然而这些问题，不仅种类的数量十分可观，而且难易程度的差别也非常悬殊. 因此，为了方便起见，将收集的问题分为两部分. 上面(3)、(4)中的反演，非调和比，对合及其他如近世几何学中的有关问题，与中学教科书关系不大的问题，属于一些特殊难题以及立体几何学的问题，汇集起来，收录于另卷，作为续编. 本书是以中学生、各高等专科学校入学的考生、文部省考查的受试者等为读者对象，主要搜集与中学教科书有关的问题，加进了一部分反演、极和极线、非调和比等方面的问题. 本书汇集问题的总数达三千

六百余题.

其次,在编纂中最大的困难是问题的分类方法. 具有同一内容的问题,在甲的书中归于证明问题,可是,在乙的教科书中却归于轨迹问题,而在丙的考试问题中,则又归于作图问题或计算问题. 若要将其一一列举出来,则需要很庞大的版面. 因此,为了方便起见,把其中的大部分归于证明问题.轨迹问题,只选择有代表性的,并限制其数量. 这个分类法和目录的形式是仿效现有的几何学书按一般易于理解的类别安排的. 只要看出问题的大体系统,就一定能容易地查到解答. 对特殊的问题,为了查找方便,以总结式分类方法,决定在卷末附上问题的索引表.

以上是编纂本书的动机和过程及其内容概要.

虽然现在本书已付印问世,而我却深感能力很低,书中未达到预期目的的地方甚多,内心很是惭愧. 编者衷心希望各位学者、读者不吝指教,以利于不断加以修订,使本书能逐步趋于完善,成为学习上一本较好的工具书.

最后,谨向恩师笹川临风先生、挚友森本清吾博士、柳元吉次教授等诸位先生对本书所写的序文和忠言,深表感谢. 同时,有关本书的缺点,渴望大家给予斧正。

笹部貞市郎

昭和十二年一月(1937年)

初版 序　言

拙著几何学辞典，最初发行于昭和十二年春．根本没想到为世人认可，也从未想到销售得这样快．当初由于没有别的同类书，学习几何学的人，为寻求难题的解法，费尽了许多心血．所以，从我的恳切愿望出发，不管怎样，为给同行爱好者提供一点方便而把拙著出版了．没料到它会受到广大读者的欢迎，一再重版，到昭和十七年冬，共印刷了三十九次．但因当时大战，出版机构全部瘫痪，以至在一段时间里不得不停止发行．由于战事日趋激烈，以致纸型连同出售的书店全部烧毁，再版已是不可能了．因此，到了完全绝望的地步．后承蒙同行朋友，一再慰嘱将本书重排，才下决心作出本书再出版的计划．

然而，旧版自发行以来，业已经历了二十年的光景，各方面都有了很大变化，今日的学校体制也起了根本变化，考虑到依照旧版原样付印不能适合当前的情况．因此，有必要对全书作新的设想加以修订．除旧版的平面几何内容外，要增加解析几何和立体几何的主要问题，吸收最近大学入学考试的试题和现行高级中学教科书中有代表性的问题，总计收录五千余题，并将它们一一作出解答．

这样一来，总的修订轮廓虽然作出来了，但是当着手解答时，遇到了意想不到的一些费工夫的事情，困难也接踵而来，修订的进度缓慢．正在焦急之时，又于去年二月突然患脑溢血，半身不遂，卧于床上，与病魔作斗争达二百余天，让手稿白白地埋没在尘埃之中，修订工作完全处于无望的深渊．但是，想不到病势幸有好转，逐渐能够重新执笔，再次鼓起勇气，将旧稿整理，渐渐地迎来了完成它的日期，这对我来讲，实在是感慨万分的．

现将本书的内容略述如下：

(1) 为了使查阅方便，问题的分类大部分依照旧的分类方法．

(2) 解析几何，虽以现行教科书和大学入学试题为基准，但为了便利读者，也吸收了部分难度稍大的题目，并作了解答．

(3) 立体几何的问题很多，解法大多数是相当困难的，但因版面有限，所以只能收进主要问题，不必要的，全部删略．

(4) 虽然依据目录，能够容易判别大部分问题的分类，为了慎重起见，在卷末，以总结的方式，列举了问题的分类表，以便查阅．

最后，由于我的精力不足，在本书内容方面考虑不周之处和种种谬误、误排都是有的，这会给诸位读者带来很多的麻烦，不胜畏惧．恳切地希望读者把觉察到的地方，都能提出批评指正。

笹部貞市郎

昭和三十一年九月(1956年)

第二版 序　　言

如在旧版序言中所述，笹部贞市郎先生于大正末年，就有了编纂几何学辞典的想法，他以平时研究几何学的笔记为基础，经过十多年的艰苦努力，于昭和十二年，出版了«新编几何学辞典»．在战后，先生又以手边存有的原版本作基础，准备进行修订出版，并且决定增加当时数学教育变化的内容，这就是在昭和三十一年，我们所见到的修订本，«几何学辞典——问题解法»（初版）问世了．这期间，先生身患重病，既要与疾病作斗争，同时又要完成修订辞典这项艰难工作．先生的坚韧意志，真是令人敬佩．尽管如此，修订本仍顺利地出版，到昭和四十七年，共印二十次之多．这时候，先生本想将辞典再次修订，但因年事已高，病魔缠身，竭自己的力量进行工作已是不可能了．因而就筹划下述诸点，授意作为先生旧友（前弟子）的我，着手进行修订．我欣然受命这一信托．

(1) 随着战后数学教育的变化，大学入学考试中代数几何的综合性问题增多．这些虽曾有所收录，但很难做到十分完整，对不足之处应予增补．对一些形式上看来似乎不同，但内容上却是相同的问题，也应作调整．

(2) 最近，特别是向量和复数方面的有关问题正在出现，希望增添这方面的基本内容．

(3) 为了加深读者的理解，以前解答显得稍微冗长的地方还不少，如有简洁解答，应该更换．

(4) 因为别解多（先生很爱别解，凡是他所知道的不列入书中，就感到内疚），所以在原题的解和别解中，应该选出简明的发表．

(5) 在几何问题中，使用另一题的结果来解答的很多，象这样的有联系的问题，若在解答中指出参照某题，将对读者有所帮助，所以希望增加这样的提示．

(6) 附录的几何学史①，由于原版本是再录于杂志上发表的文章的片断，所以要全面地改写，使其内容上连贯一气．

正当按先生筹划的各点专心进行修订的过程中，先生不幸逝世，终于未

---

① 几何学小史没有译出．——译者注

看到这一工作的完成，深感遗憾. 我虽学识水平不高，又无所成就，然而值得告慰先生的，尽管我做得不够完善，但总算完成了先生的遗愿，这是托先生的福.

最后，向执笔“几何学小史”的岩田至康先生、归纳整理“重要定理、公式”的内田虎雄先生以及有关编辑工作的，特别是以倉本熊雄先生为首的诸位先生所给予的大力帮助，深表谢意.

小出一郎

昭和五十一年九月(1976年)

旧版 序　　文

人们常常可以听到一种说法，初等几何问题最难解了．这大概是由于它的解法比较零散，因此比较难于找到门道．我自己也是在动手做了许多题目之后，才较为纯熟的．我想，如果只想解那些不费力就能解决的简单问题作用不大，所以解题需要用比较多的时间就不奇怪了．此种劳动对学生来说，也许是一种练习，但如果把它当作每天必需的课题，对人们来说完全是无意义的浪费．因此，为了弥补这一点，编出一本完整的几何问题的辞典，实属必要．这大概也是得到很多人重视的问题所在．有那么多的人重视它，或寄希望于它，可是对于从事编纂它的作者的困难，恐怕人们一点也不了解．我们可以想象到，那些原来一个个分散的、变化繁多的初等几何问题，仅把它们逐一分类，也就相当困难了，几乎是难于完成的，再加上出版的困难，一般人连着手的勇气都没有了．

笹部先生设想作这番事业是很早的事了．他和我最初从接受甄别考试时就相识为朋友，特别是同住东京，我们的工作相同，所以更是亲密无间．他弃职去东京的主要目的，就是为了完成编写辞典的工作．后来，他虽有很多方面的活动，但无论何时，都不忘这个最初的打算，一有空闲，就孜孜不倦地按原计划进行工作，持之以恒十余年，终于完成了现在所见到的这个本子．我除了对他的热情和坚强毅力表示敬佩之外，又对他终于实现了最初夙愿表示衷心的祝贺．

本书当然不能讲是完美无缺了．然而，敢于去从事别人都犹豫的事，而且不顾多年的劳苦是否有效，决心去达到目的，仅就这种勇气，也不得不使人敬佩．如果要进一步苛求的话，那是无止境的，只能是愿望．无论何时，如果踌躇不决，这样的事情，永远也是无法开头的．现在，我们不仅看到他的工作完成了，书的体系又安排得这样好，而且又将看到这本书能被充分的利用．这是他十余年来苦心的结晶，也是必然的结果．作为最初的尝试，可以说是非常成功的．

我欣然作此序文，以祝贺他的成功．

理学博士　森本清吾

昭和十二年一月(1937年)

初版序　　文

初等几何学，从其发展史来看，是数学诸分支中最古老的，也是已经成熟的学科．然而，不仅由于问题种类繁多，而且解法也很多样，所以，初学者往往把它看作很难的学科，常常有敬而远之之感．

有一种说法，只要把基本定理大致了解了，那么一切问题就能够解决．事实绝不是如此，如作辅助线、寻找特殊点、图形的变换等都需要有相当的技巧．谁也别想一见到几何题就会解出或能将它全部谙记．因此，把这些问题作出系统的分类，并一一给出解答要领，编纂成一部查阅方便的辞典，对于读者，将提供极大的方便，这也是所有关心本门学科的人的希望．

本书编者笹部先生，是位热心研究初等几何学难得的一位笃学之士．以前的《新编几何学辞典》曾博得大家的好评，这次进行修订增补，给我看了校样，确实象他的序文所述，不仅保存旧版中的平面几何，而且增补了立体几何、解析几何、投影画法，还增加了几何学发展史部分，总数达五千余题，并且给出了解答，是一部庞大的著作．我由于无暇一一拜读每个解法是否恰当，纵然不能保证都很完善，但对于他独立完成这部巨著，我不吝用美好的语言来表示衷心的赞赏．

事实上，不难设想，象这样的大部头学术书籍，仅靠一人编写，要求达到完满的境地是没有道理的．我想，无论如何，只要众多同行好友，不惜时间，通力合作，补其弱点，改正其错误，一定能使它达到完善的地步．

理学博士　小倉　金之助

昭和三十一年九月(1956年)

目　　录

第一编　绪　　论

第二编　证　明　题

第一章　直　线　形

第二章　圆

第三章　面　　积

第四章　比　　例

第三编 轨 迹

第四编 作 图 题

第一章 求点的位置

第二章 直线的作图

第三章 棱锥、棱柱、多面体

第四章 旋转体的表面积和体积

第五章 曲 面 体

第六章 投 影 画 法

第七编 近世几何问题

第八编 解 析 几 何

第一章 直 线

第二章 圆

第三章 抛 物 线

第四章 椭 圆

第五章 双 曲 线

第六章 坐标轴的平移和旋转

第七章 参 数 方 程

第八章 极 坐 标 方 程

第九章　空间坐标(点、直线、平面、球面)

第十章　复数、矢量在初等几何里的应用

附　录

第一编 绪 论

1．几何学是研究什么的学科．

解 我们周围的物体，都是由一定的物质组成的，并占有空间的一部分．这些物体都具有颜色、重量、硬度和气味等．这样，一切物体都具有构成它的物质的特性，物理学和化学就是研究这些物质特性的．

如果不考虑构成物体的物质，只研究物体的形状、大小和位置，就形成关于物体形状的相同和不同、大小相等和不等，或者两个物体距离的远近等等关系．象这样，完全抛开物体的物质特性，只考虑物体的形状、大小和位置，我们称之为物体的空间性质或称为图形性质．几何学就是研究物体的空间性质的学科．

2．什么是公理．

解 几何学虽是研究图形性质的学科，但学习几何学的目的不仅是为了研究图形性质，而且要培养有条理地处理事物，即培养逻辑思维能力，所以一定要以正确的推理作为学习几何学的侧重点．

一般来说，对“三角形内角的和等于两直角”或“相似三角形面积的比等于其对应边的平方的比”等等，如果不阐明它的理由，这是谁都不会立即承认的．但对“整体大于部分”、“过两点 A、B 只能作一条直线”，这是任何人也不会有异议的．这样，以人们无条件地承认的事实，作为推理的根据，我们称它为公理．

公理有通用于数学各科的**一般公理**，有仅用于几何学的**几何公理**两种．

下列十条为欧几里得公理．

一般公理

(1) 与同一个量相等的两个量相等．

(2) 等量加等量，其和相等．

(3) 等量减等量，其差相等．

(4) 整体大于部分．

几何学公理

(5) 完全重合的图形相等(合同公理)．

(6) 过两定点能作且只能作一条直线(直线公理)．

(7) 线段(有限直线)可以无限延长．

(8) 以任意一点为圆心，可作半径等于任意长的圆(圆公理)．

(9) 直角都相等(角公理)．

(10) 在一个平面内，过直线外一点，有且只有一条直线和已知直线平行(平行线公理)．

以这些公理作基础所建立的几何学，称为**欧几里得几何学**．

可是，在这里我们要指出一个麻烦的问题，即对上述公理 (1)～(9) 大家是没有疑义的，但对(10)平行线公理，有些学者却持有异议．

十八世纪初，萨开里认为平行线公理，在我们周围的狭小范围内是正确的，但在广阔的空间、离开直观而进行探讨时，就有疑义了．到了十九世纪初，罗巴切夫斯基和鲍耶两位学者，以“在平面内，过已知直线外一点，能够作无穷多条直线和这条已知直线平行”作为公理，分别建立了**非欧几何学**．另一方面，几何学大师黎曼，从另一角度提出“过已知直线外任一点的直线都与已知直线相交”作为公理，建立了另一种非欧几里得几何学，这就是**黎曼几何学**．近代对爱因斯坦所开创的相对论原理的研究中，也完全证实了黎曼几何学．

不过，本书的内容，完全不涉及非欧几何学，因此不去论述非欧几何．我们只用欧几里得公理作为依据来研究几何学．

但是，欧几里得公理除了上面提到的问题外，也还可以指出种种不完备之处．现在，本书所采用的公理，是参考希尔伯特的“几何学基础”中所列举的公理，对它进行认真修饰而成的．我们将以这些公理为根据，推导各个定理．这里的点、直线、平面为不定义的概念．关于平行的定义说成“在同一平面内，如果两条直线不相交，则称它们是互相平行的”．

(1) 关于平面、直线、点的公理

1) 过不同的两点，可作而且只能作一条直

线.

2) 过不在一条直线上的三点，可作而且只能作一个平面.

3) 连结同一平面内的两点的直线在这个平面内.

4) 若两平面有一个公共点，则它们至少还有另一个公共点.

(2) 关于图形移动的公理

5) 图形可以移动到任意位置上，而不改变它的形状和大小.

6) 图形可以移动到其对称位置上，而不改变它的形状和大小.

(3) 关于平行线公理

7) 在同一平面内，过直线外一点，能作且只能作一条直线与这条直线平行.

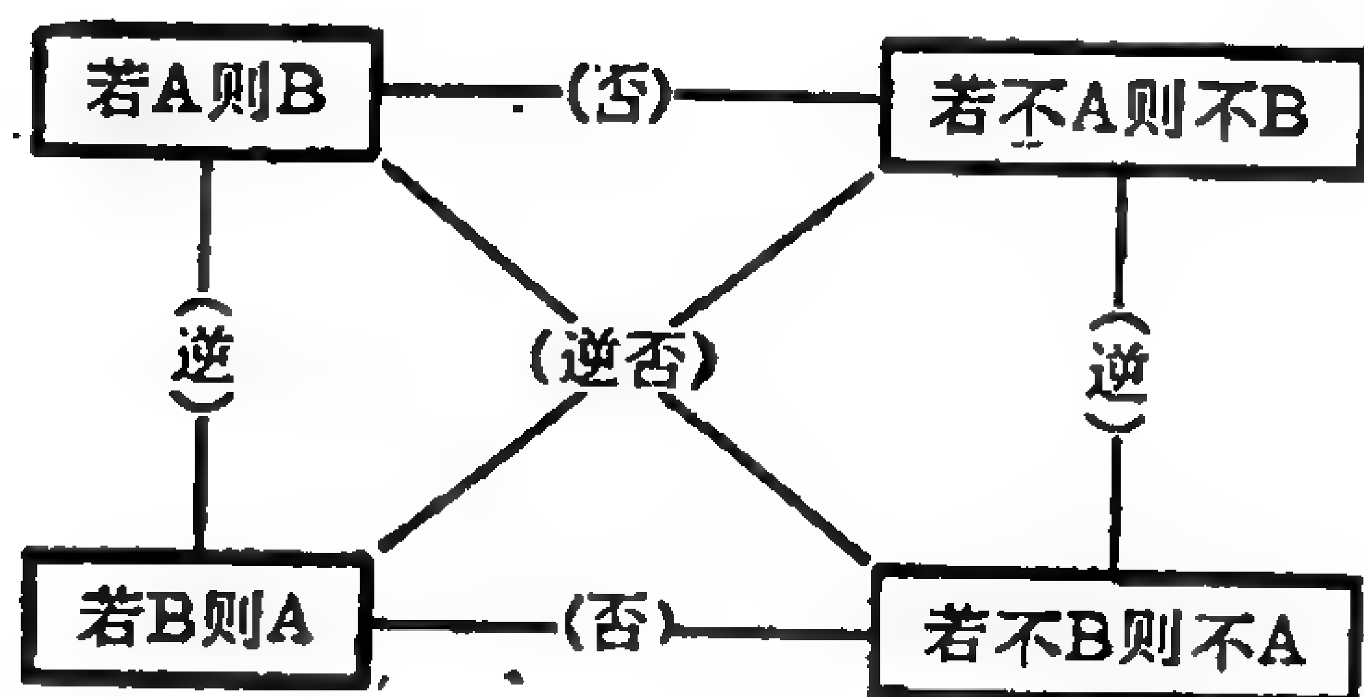
3. 什么是命题、定理以及逆命题、否命题、逆否命题.

解 所谓命题，一般用判断语句来表达. 命题有正确的和不正确的. 在几何学中，普遍使用"若……则……"形式的条件命题.

例如，"在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=AC$，则 $\angle B=\angle C$"，阐明了由某一假设条件可得出什么样的结论，就是命题. 条件命题，就是由假设条件和结论两部分组成的.

根据公理来论证某一命题是正确的，叫做证明. 已证明是正确的命题叫做定理. 上面所举的命题例子，能根据公理得到证明，所以是定理.

下面再说明命题的逆命题、否命题、逆否命题. 设某命题为"若 A，则 B"，A 为假设条件，B 为结论. 原命题和它的逆命题、否命题、逆否命题之间的关系如下图所示:



如果命题"若 A 则 B"正确，它的逆否命题一定正确，但逆命题不一定正确. 因而，在逆命题和逆否命题之间的关系是互否的，所以不一定正确.

例 "正方形的四条边相等"是正确的，但不能反过来说"四条边相等的四边形是正方形"(因为它可能是菱形).

但是，逆否命题"四条边不等的四边形不是正方形"则一定正确.

4. 举例说明什么是"必要条件"、"充分条件"和"充分必要条件".

解 如果说命题"若 A 则 B"是正确的，那么称 B 为 A 成立的必要条件，A 为 B 成立的充分条件. 因为命题"正方形的四条边相等"是正确的，所以"四条边相等"是"正方形"的必要条件，而"正方形"是"四条边相等"的充分条件.

可是，如果命题"若 A 则 B"和它的逆命题"若 B 则 A"同时正确，于是就有 B 为 A 成立的必要条件，同时 B 又为 A 成立的充分条件，所以称 B 为 A 成立的充分必要条件. 因此，象下面的命题，"正方形的四条边相等，且四个角为直角"，它的逆命题也成立，所以"四条边相等，且四个角为直角"就是"正方形"的充分必要条件.

5. 定理的证明方法.

解 定理的证明方法，有直接证法和间接证法两种.

(1) **直接证法** 在假设的基础上，根据公理或已证过的定理，通过正确的推导而得出结论的方法叫做直接证法. 它是最常用的证明方法.

(2) **间接证法** 用直接证法有困难时采用间接证法. 间接证法可分为归谬法(或反证法)、轮换法和同一法.

(i) **归谬法(反证法)** 假定结论不成立，在推导过程中，得出与公理、已证的定理或与假设条件相矛盾的结论，从而肯定原命题正确的证明方法叫做归谬法. 实际上，这是采用证明它的逆否命题正确的方法.

例 证明"过一点 P 只能作一条直线垂直于直线 AB". 假定结论不成立，即过点 P 可作两条直线 PQ、PR 垂直于直线 AB，于是便得出 $\triangle PQR$ 的内角之和大于两直角，而这是不可能的. 所以过点 P 只能作一条直线垂直于 AB.

(ii) **轮换法** 轮换法可以看成是归谬法的一种证明方法，常用于对逆定理的证明.

今有已证明过的一串定理，这些定理的条件能穷尽使某一事项成立的所有情形。而且这些定理的结论又是互不相同的，则这个定理的逆定理一定成立。

例 在 $\triangle ABC$ 中，两边 AB、AC 之间有下列三种情形：$AB=AC$，或 $AB>AC$，或 $AB<AC$；$\angle B$、$\angle C$ 之间有三种情况 $\angle B=\angle C$，或 $\angle B<\angle C$，或 $\angle B>\angle C$。

若 $AB=AC$，则 $\angle B=\angle C$；

若 $AB>AC$，则 $\angle B<\angle C$；

若 $AB<AC$，则 $\angle B>\angle C$。

如果这是正确的，往往可以证明下述事项是正确的，即在 $\triangle ABC$ 中，

若 $\angle B=\angle C$，则 $AB=AC$；

若 $\angle B<\angle C$，则 $AB>AC$；

若 $\angle B>\angle C$，则 $AB<AC$。

因为当 $\angle B=\angle C$ 时，若 $AB\neq AC$，则 $AB>AC$ 或 $AB<AC$ 两种情况中有一种成立。若 $AB>AC$，则 $\angle B<\angle C$，若 $AB<AC$，则 $\angle B>\angle C$，这都与条件 $\angle B=\angle C$ 相矛盾。所以，若 $\angle B=\angle C$，则 $AB=AC$。同样，$\angle B<\angle C$ 时，则 $AB>AC$；$\angle B>\angle C$ 时，则 $AB<AC$。 象这样，这些条件已穷尽所有的情况，结论互不相同，则逆定理成立就可用归谬法证明。这里就省略了用归谬法来一一证明，只是简单地表示为“这样的定理，它的条件已包括所有的情况并且结论互不相同”，然后推导其逆定理成立的证法，就称为**轮换法**。

(iii) 同一法 当原命题的题设和结论所指的事项都唯一存在时，原命题和逆命题是等效的。根据这个道理，证明逆命题的方法称为同一法。

例 “等腰三角形顶角的平分线，垂直平分底边”。在这个定理中，顶角的平分线是唯一的，底边的垂直平分线也是唯一的，所以，这个定理的逆定理“等腰三角形底边的垂直平分线一定平分顶角”也是正确的。

因此，要证明定理“等腰三角形顶角的平分线，垂直平分底边”，可以用证明定理“等腰三角形底边的垂直平分线一定平分顶角”来代替。象这样，在证明某个命题，有时不用直接证法，而能用证它的逆命题来解决，我们把这种推导方法称为同一法。但是，这里必须注意，在任何情况下，都应首先辨别命题中的题设和结论所含的事项是否唯一存在，否则，滥用这个方法，在逆命题不成立时，就会导致彻底失败，所以必须弄清问题的性质以后，再着手解题。

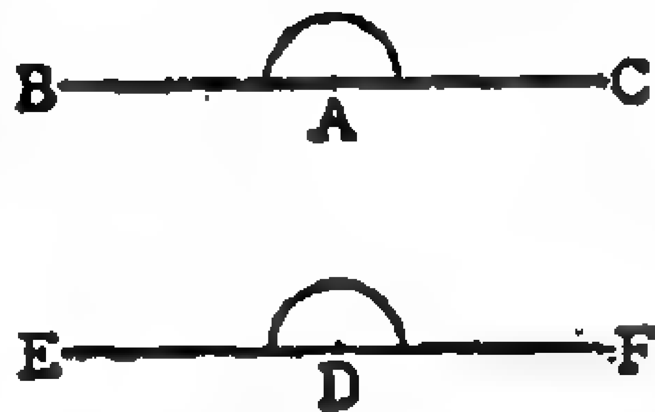
第二编 证 明 题

第一章 直 线 形

1. 角，平行线

6. 证明：凡平角都相等.

解 设有两个平角 BAC, EDF. 因为 AB、AC 的夹角为平角，所以 AB、AC 成一直线. 同理，DE、DF 亦成一直线. 于是将顶点 A 和顶点 D 重合，使直线 BAC 放在直线 EDF 上. 并使 B 与 E 在 D 的同侧，或 C 与 F 在 D 的同侧. 则在任何情况下平角 BAC 和平角 EDF 都完全重合. 所以平角都相等.



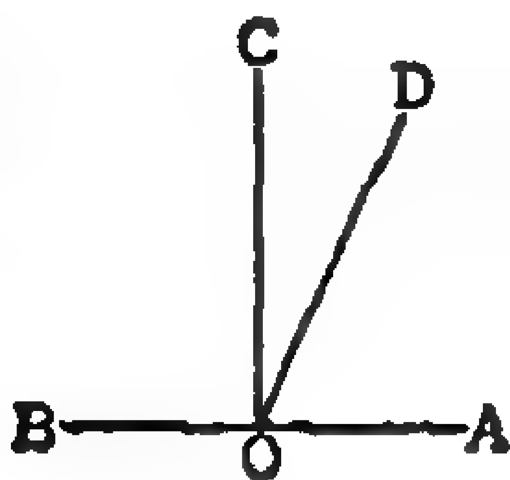
7. 过直线 AB 上的一点 O 且垂直于 AB 的直线只有一条.

解 引直线 OC 等分平角 AOB，则相邻两角 COA、COB 都是直角. 所以 $CO\perp AB$.

若过 O 还可作 AB 的垂线 DO，则 $\angle DOA=\angle R$ (直角). 可是

$$\angle COA=\angle R.$$

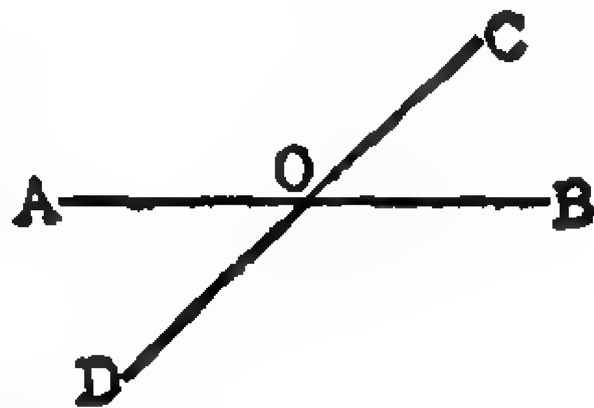
$$\therefore\quad \angle DOA=\angle COA.$$



因此，DO 与 CO 重合，所以过点 O 只能有一条直线垂直于 AB.

8. 凡对顶角都相等. 即两条直线 AB、CD 相交于点 O 时，有

$$\angle AOC=\angle BOD,$$
$$\angle AOD=\angle BOC.$$



解 由 COD 是一条直线，有

$$\angle AOC+\angle AOD=2\angle R.$$

又 AOB 也是一条直线，有 $\angle AOD+\angle BOD=2\angle R$.

$$\therefore\quad \angle AOC+\angle AOD=\angle AOD+\angle BOD.$$

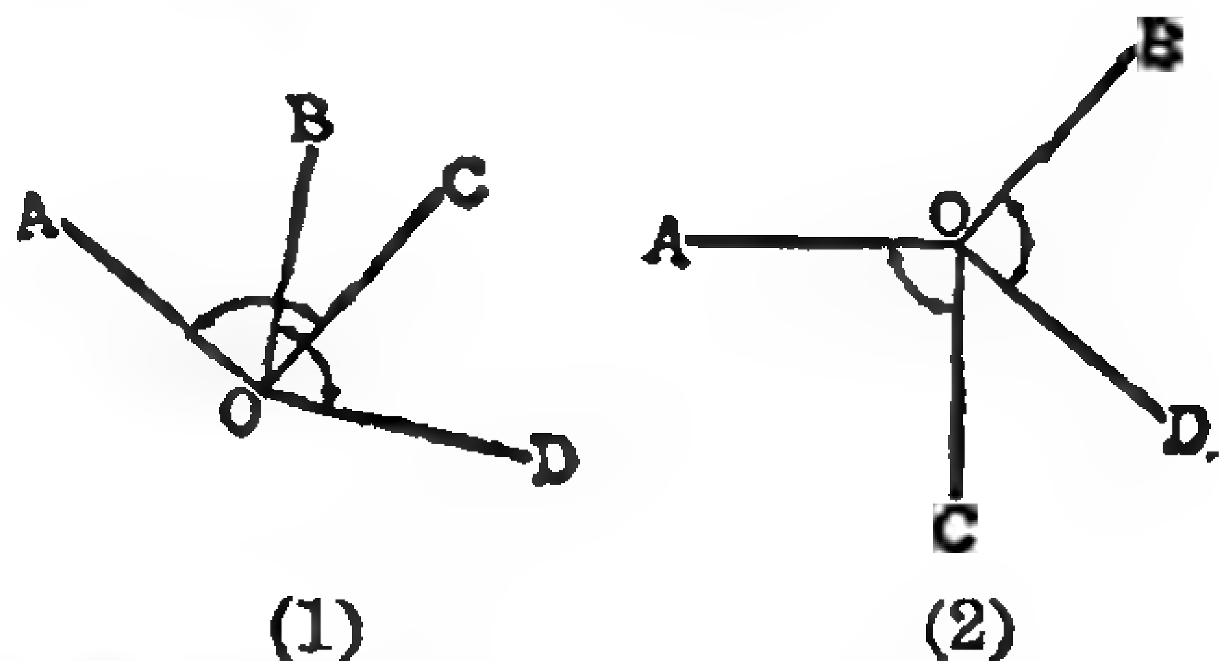
$$\therefore\quad \angle AOC=\angle BOD.$$

同理 $\angle AOD=\angle BOC$.

注 这个定理简称为"对顶角相等".

9. 设有公共顶点的两个角 AOB、COD，$AO\perp CO$、$BO\perp DO$，则 $\angle AOB=\angle COD$ 或 $\angle AOB+\angle COD=2\angle R$.

解 如图(1)所示，$\because$ $\angle AOC=\angle BOD=\angle R$，所以从 $\angle AOC$、$\angle BOD$ 中分别减去 $\angle BOC$，得 $\angle AOB=\angle COD$.



(1) (2)

如图(2)所示，

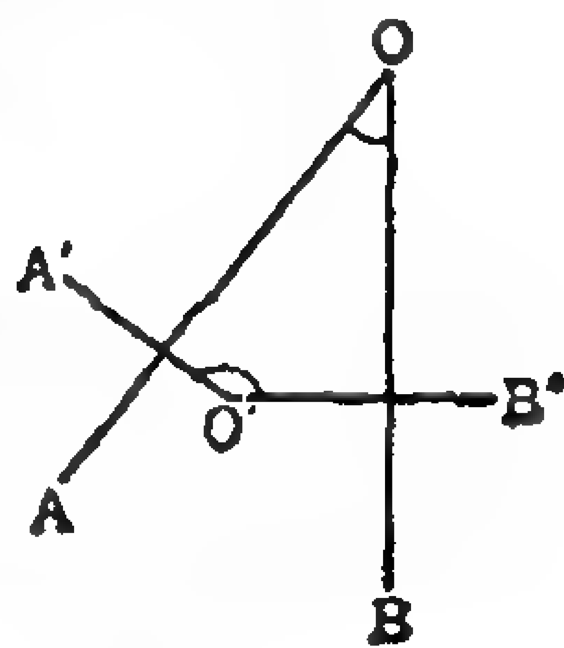
$$\because\quad \angle AOB+\angle BOD+\angle DOC+\angle AOC=4\angle R,$$

又 $\angle AOC=\angle BOD=\angle R$,

$$\therefore\quad \angle AOB+\angle COD=2\angle R.$$

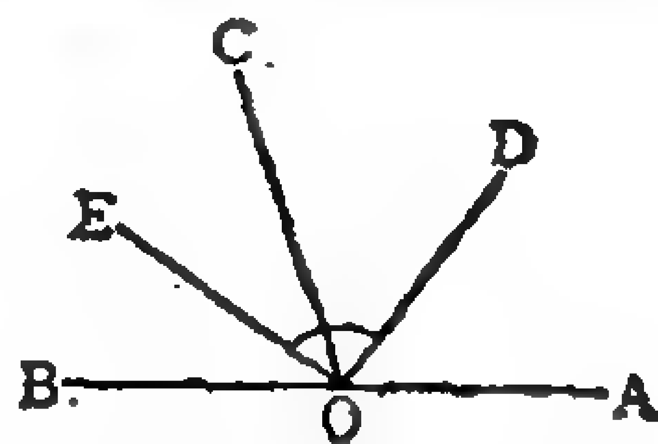
10. 下面的命题是否正确？两边分别垂直的两个角相等.

解 不正确. 如右图所示，当 $OA\perp O'A'$, $OB\perp O'B'$ 时，有 $\angle O$ 与 $\angle O'$ 互为补角.



注 若两角之和等于两直角，则称这两个角互补；两角之和等于直角，则称这两个角互余.

11. 设相邻两个角 AOC、COB 互补，且 $\angle AOC$、$\angle COB$ 的平分线分别为 OD、OE，则 $OD\perp OE$.



解 因为互为邻补角的 $\angle AOC$ 与 $\angle COB$

之和是两直角，所以每个角的一半之和为直角，即

$\angle DOC+\angle COE=\angle R$. ∴ $OD\perp OE$.

12. 设邻角$\angle AOB$、$\angle BOC$的平分线分别为OM、ON，且$OM\perp ON$，则OA、OC成为一条直线。

解 根据题意，得

$\angle AOM=\angle MOB$, $\angle BON=\angle NOC$,
$\angle MON=\angle R$.

∴ $\angle MOB+\angle BON=\angle R$.

∴ $(\angle AOM+\angle MOB)+(\angle BON+\angle NOC)=2\angle R$,

$\angle AOB+\angle BOC=2\angle R$,

即 $\angle AOC=2\angle R$.

所以AO、OC成为一条直线。

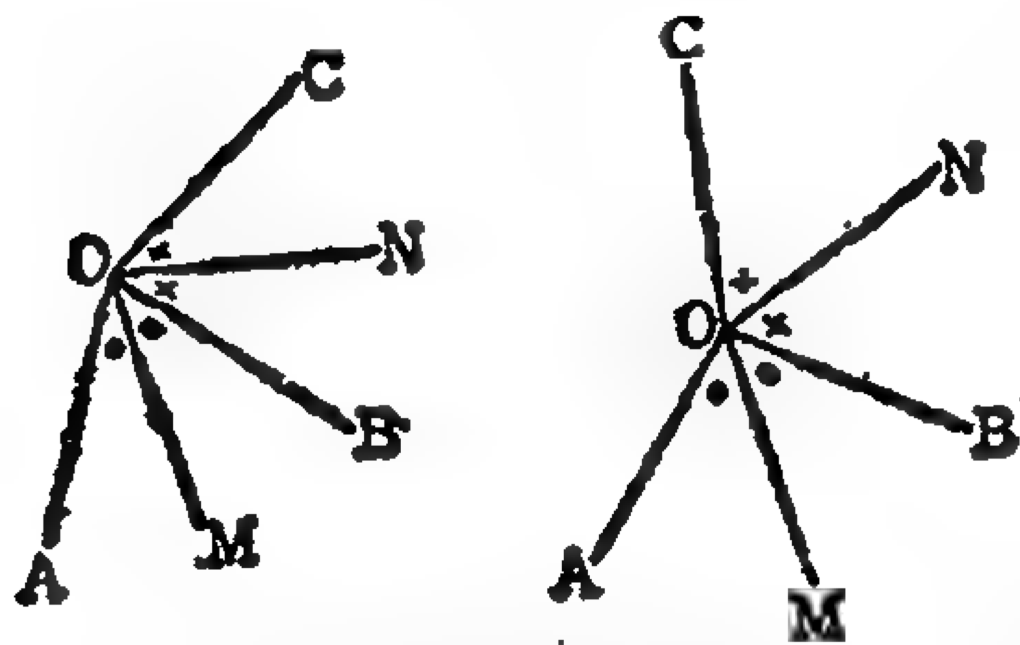
13. 设邻角$\angle AOB$、$\angle BOC$的平分线分别为OM、ON，则

$$\angle MON=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC).$$

解 $\angle MON=\angle MOB+\angle BON$. 而$MO$是$\angle AOB$的平分线，$NO$是$\angle BOC$的平分线，所以

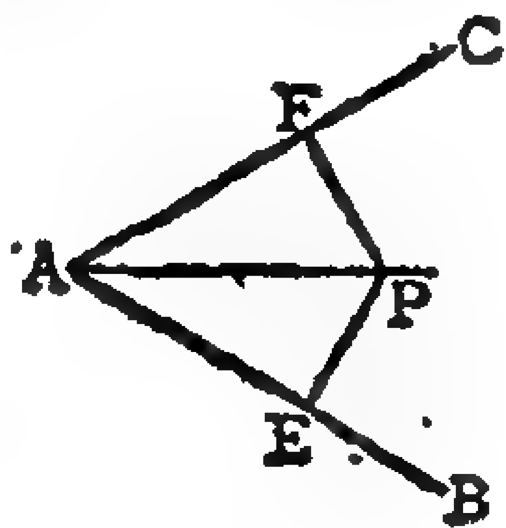
$$\angle MOB=\frac{1}{2}\angle AOB,\ \angle BON=\frac{1}{2}\angle BOC.$$

$$\therefore\ \angle MON=\frac{1}{2}\angle AOB+\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC).$$



14. $\angle BAC$的平分线上的点P到两边AB、AC等距离。

解 过点P分别向AB、AC作垂线PE、PF. 在$\triangle AEP$、$\triangle AFP$中，AP为两三角形的公共边，



$\angle EAP=\angle FAP$,

$\angle AEP=\angle AFP=\angle R$.

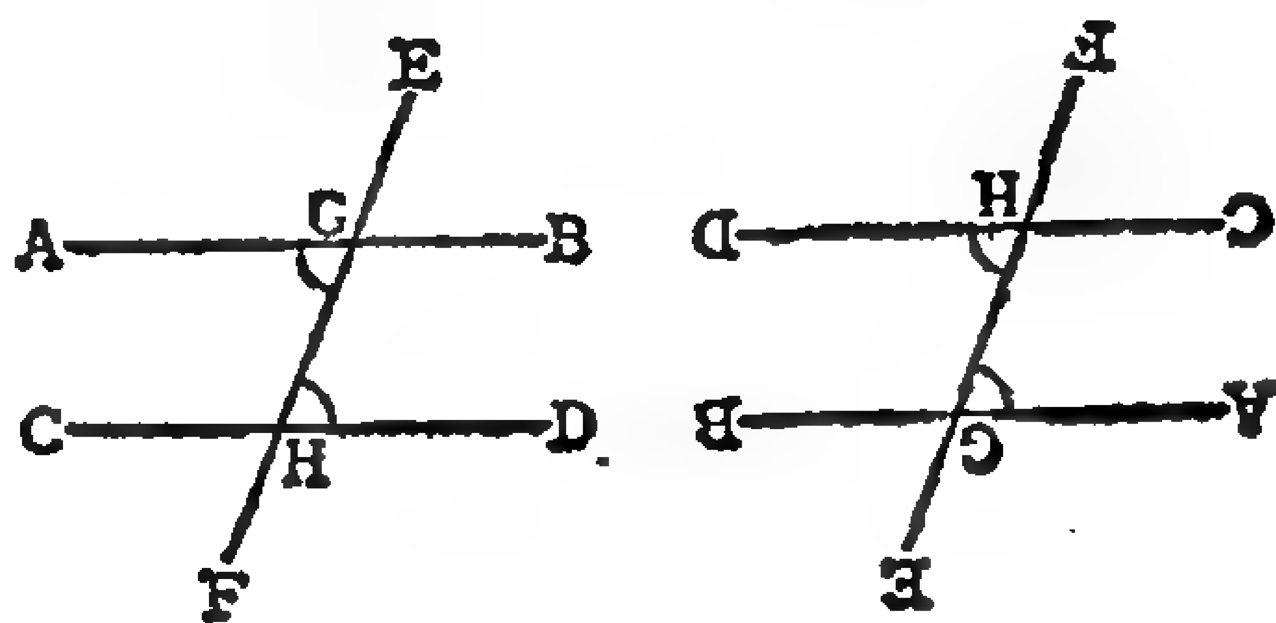
∴ $\triangle AEP\cong\triangle AFP$. ∴ $PE=PF$.

因此点P到两边AB、AC等距离。

15. 若两条直线与另一直线相交，其一组内错角相等，则这两条直线互相平行。

[平行线定理]

解 设两条直线AB、CD与一条直线EF分别相交于G、H，当一组内错角$\angle AGH=\angle GHD$时，证明$AB\parallel CD$.



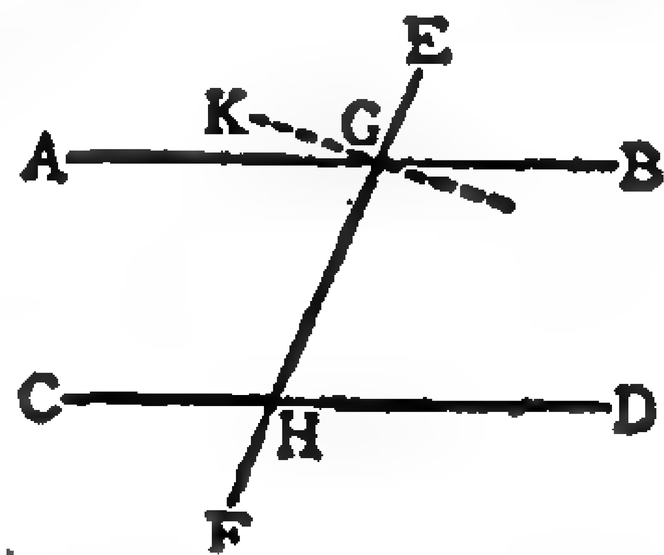
∵ $\angle AGH=\angle GHD$,

∴ $\angle GHC=\angle BGH$.

旋转图(1)成图(2)的形式，再将图(2)重合在图(1)上，使HD与GA重合，GB与HC重合。因此，如果AB和CD在EF的同侧，设在B、D一侧相交，则与图(1)重合的图(2)中的GA、HC部分也相交，所以图(1)中的GA, HC也相交。这样结论是AB和CD在EF的两侧都相交。因为两条直线相交于两点是不合理的。从而可得AB与CD不相交，即$AB\parallel CD$.

16. 若两条平行直线与另一条直线相交，则同位角相等或内错角相等，同旁内(外)角互补。　　[平行线定理]

解 设$AB\parallel CD$,直线AB、CD与直线EF分别相交于G、H，且点A、C在EF的同侧。如果一组内错角$\angle AGH$与$\angle GHD$不等，则过G作角$\angle HGK$等于$\angle GHD$.



这时，KG与CD由内错角相等而平行。这样，过AB上一点G有两条直线AB、KG平行于直线CD. 这与平行公理相矛盾。所以$\angle AGH=\angle GHD$.

同理，一组同位角若不相等，同旁内(外)角，不能互补，从而内错角也不相等，这是不对的。所以一条直线与两条平行直线相交时，内错角相等，同位角相等或同旁内(外)角

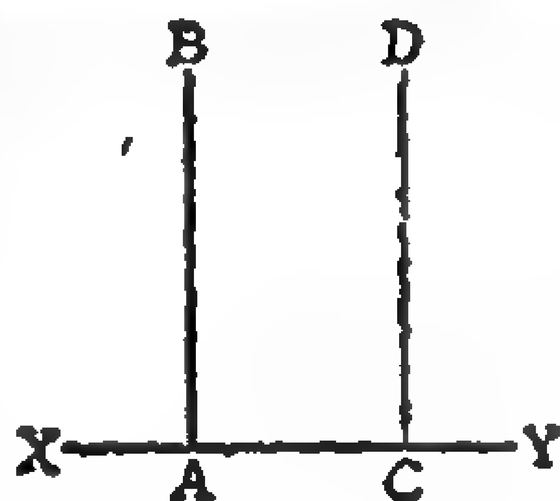
互补。

17. 设在一平面内有三条直线 a、b、c，且 $a\parallel b$、$a\parallel c$，则 $b\parallel c$。

解 如果 b 与 c 不平行，那么在平面内不平行的两条直线必相交。设其交点为 P。根据假定，点 P 必不在直线 a 上。所以过点 P 有两条直线 b、c 平行于直线 a。这与平行公理相矛盾。因此，直线 b 与 c 不能相交，即

$$b\parallel c.$$

18. 垂直于同一条直线的两条直线互相平行。



解 设 AB、CD 都垂直于直线 XY，其交点分别为 A 与 C。

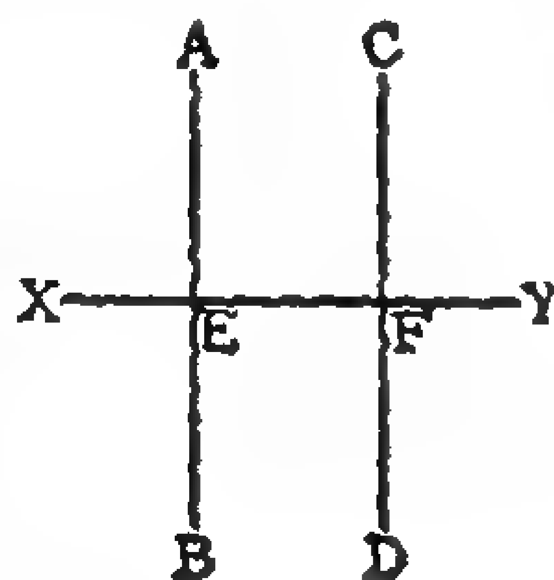
设 B 与 D 在 XY 的同侧，则由

$AB\perp XY$，有 $\angle BAY=\angle R$。

又由 $CD\perp XY$，有 $\angle DCY=\angle R$。

因而同位角相等。$\therefore AB\parallel CD$。

19. 直线 XY 与平行线 AB、CD 中一直线 CD 垂直时，也必与另一条直线 AB 垂直。



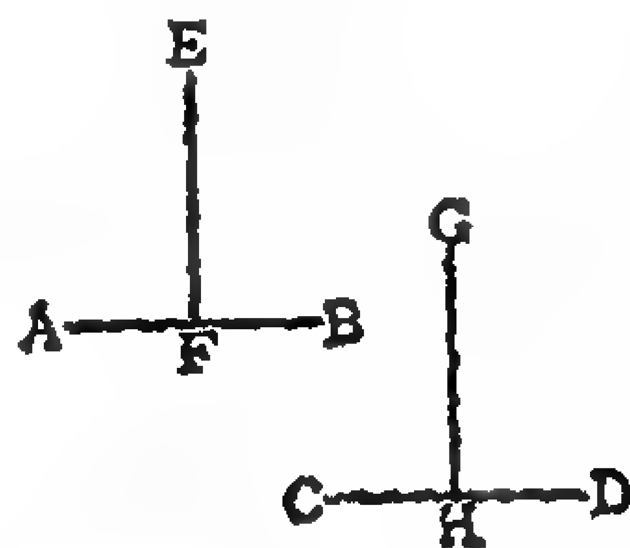
解 已知 $AB\parallel CD$。设直线 XY 与 CD 垂直相交于点 F，则 XY 也与 AB 相交，设交点为 E。因而同位角

$$\angle AEX=\angle CFE,$$

且 $\angle CFE=\angle R$。

$\therefore\ \angle AEX=\angle R$。$\therefore\ AB\perp XY$。

20. 分别垂直于两条平行线 AB、CD 的两条直线 EF、GH 互相平行。



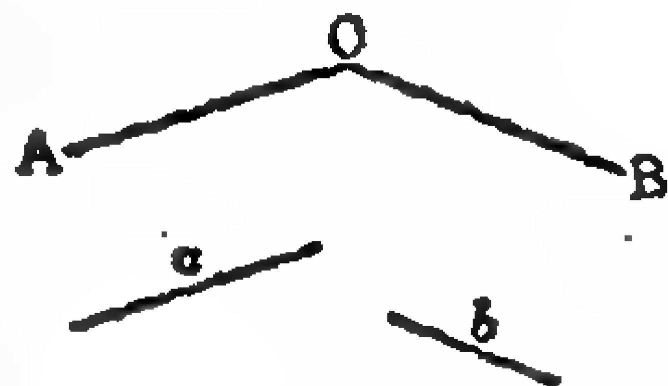
解 由 $GH\perp CD$，$CD\parallel AB$，有

$GH\perp AB$。(问题 19)

又 $EF\perp AB$。$\therefore\ GH\parallel EF$。(问题 18)

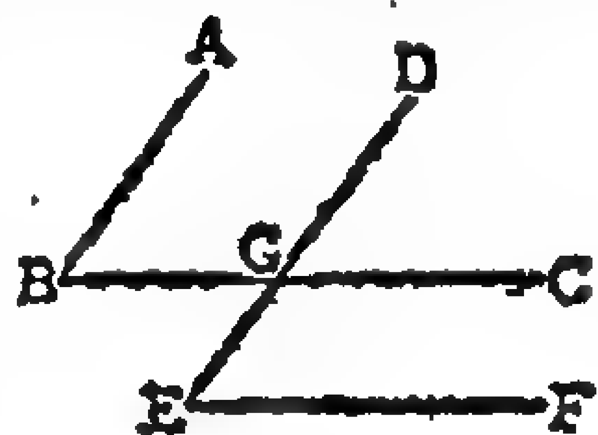
21. 在平面内，与相交的两条直线分别平行的两条直线必相交。

解 设两直线 OA、OB 交于点 O，$a\parallel OA$，$b\parallel OB$。如果 a 与 b 不相交，即设 $a\parallel b$。由于一直线平行于两条平行线之一时，也必与另一条直线平行，因此有 $a\parallel OB$。这样过点 O 有两条直线 OA、OB 都平行于直线 a。这与平行公理相矛盾。所以直线 a 与 b 不平行，即 a 与 b 必相交。



22. $\angle ABC$ 的两边 AB、BC 分别与 $\angle DEF$ 的两边 DE、EF 同向或异向平行时，则

$$\angle ABC=\angle DEF.$$



解 当两角的两边分别同向平行时，设 DE 与 BC 的交点为 G，则 $\angle DEF=\angle DGC$（同位角）。

而 $AB\parallel DE$。

$\therefore\ \angle ABC=\angle DGC$（同位角）。

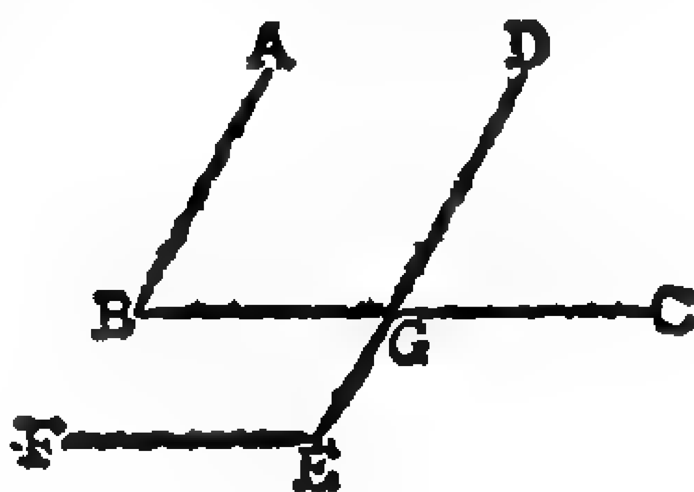
$\therefore\ \angle ABC=\angle DEF$。

当两边异向平行时，$\angle ABC=\angle EGC$（同位角），$\angle EGC=\angle DEF$（内错角）。

$\therefore\ \angle ABC=\angle DEF$。

23. 已知 $\angle ABC$、$\angle DEF$，若 AB 和 DE 同向平行，BC 和 EF 异向平行，则

$$\angle ABC+\angle DEF=2\angle R.$$



解 设 DE 与 BC 的交点为 G，则

$\angle ABC=\angle BGE$（内错角）。

又由 $BC\parallel EF$，有

$\angle BGE+\angle DEF=2\angle R$（同旁内角互补）。

$\therefore\ \angle ABC+\angle DEF=2\angle R$。

24. 若直线 EF 截平行线 AB、CD 时，则内错角的平分线平行，且同位角的平分线也平行。

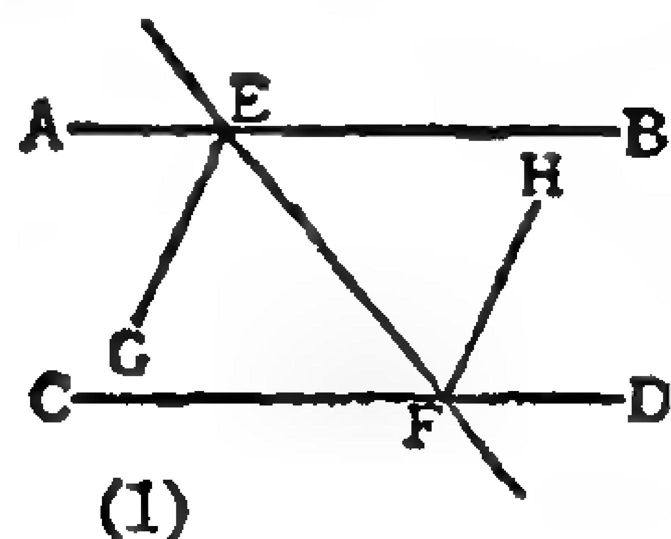
解 在图(1)中，$\angle AEF=\angle EFD$，

$$\therefore\ \frac{1}{2}\angle AEF=\frac{1}{2}\angle EFD,$$

即 $\angle GEF=\angle EFH$。

$\therefore\quad EG \parallel FH.$

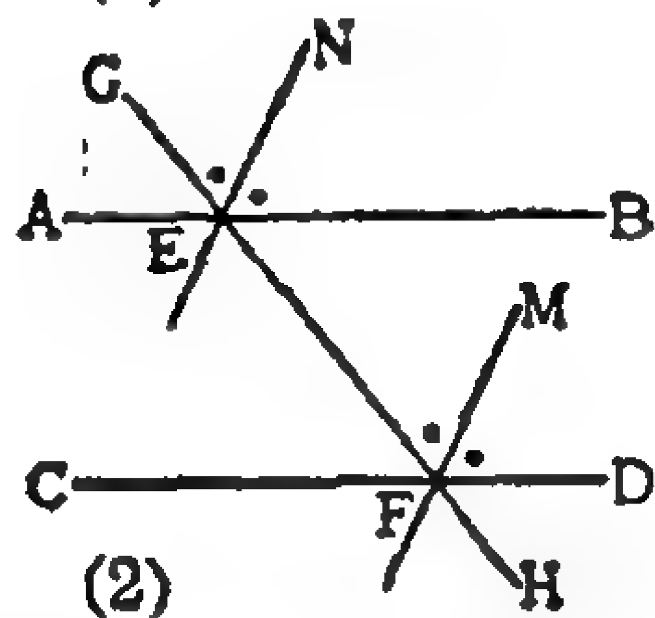
在图(2)中，



$\angle GEB=\angle GFD,$

$\therefore\quad \frac{1}{2}\angle GEB=\frac{1}{2}\angle GFD.$

即

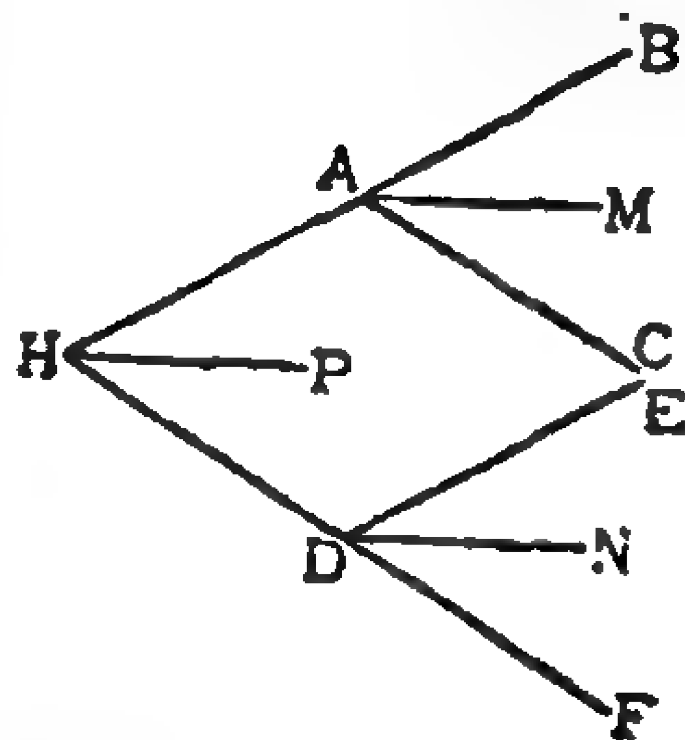


$\angle GEN=\angle GFM.$

$\therefore\quad EN \parallel FM.$

25. 若$\angle BAC$的两边AB、AC分别与$\angle EDF$的两边DE、DF平行，则两个角的平分线AM、DN互相平行或互相垂直。

解 (1) 设AB、AC与DE、DF分别同向平行，那么BA、FD的延长线必相交，设交点为H. $\angle AHD$的平分线为HP. 由$FH \parallel CA$，有



$\angle BAC=\angle AHD.$

$\therefore\quad \angle BAM=\angle AHP.$

$\therefore\quad AM \parallel HP.$

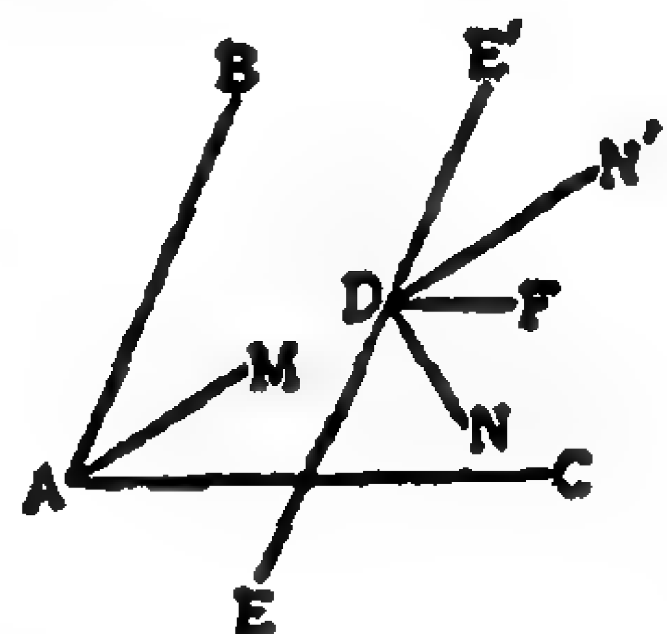
同理，$\angle EDF=\angle AHD,$

$\therefore\quad \angle FDN=\angle DHP.\quad \therefore\quad DN \parallel HP.$

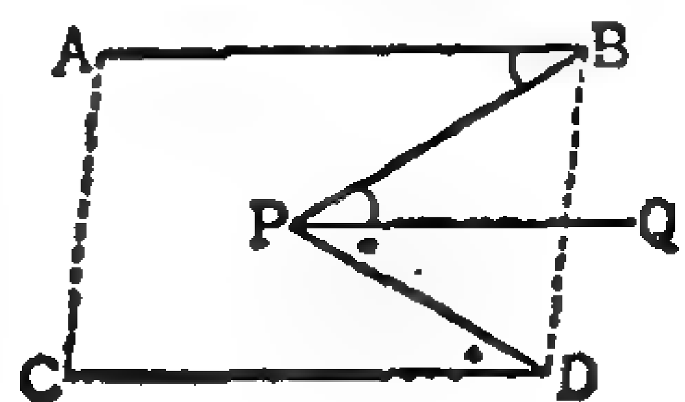
因此，$\quad AM \parallel DN.$

同理可证得，在$\angle BAC$的两边和$\angle EDF$的两边分别反向平行时，结论也成立。

(2) 设AB、DE，AC、DF中有一组是反向平行的。取$\angle FDE$的补角$\angle FDE'$，由于$\angle BAC$和$\angle E'DF$的两边都是同向平行的，所以$\angle E'DF$的平分线DN'和AM平行。但是$DN' \perp DN$，所以DN垂直于与DN'平行的直线AM。



26. 若两线段AB、CD同向平行，P为AB、CD之间一点，则



$$\angle ABP+\angle CDP=\angle BPD.$$

解 在$\angle BPD$内，引直线PQ平行于AB或CD，

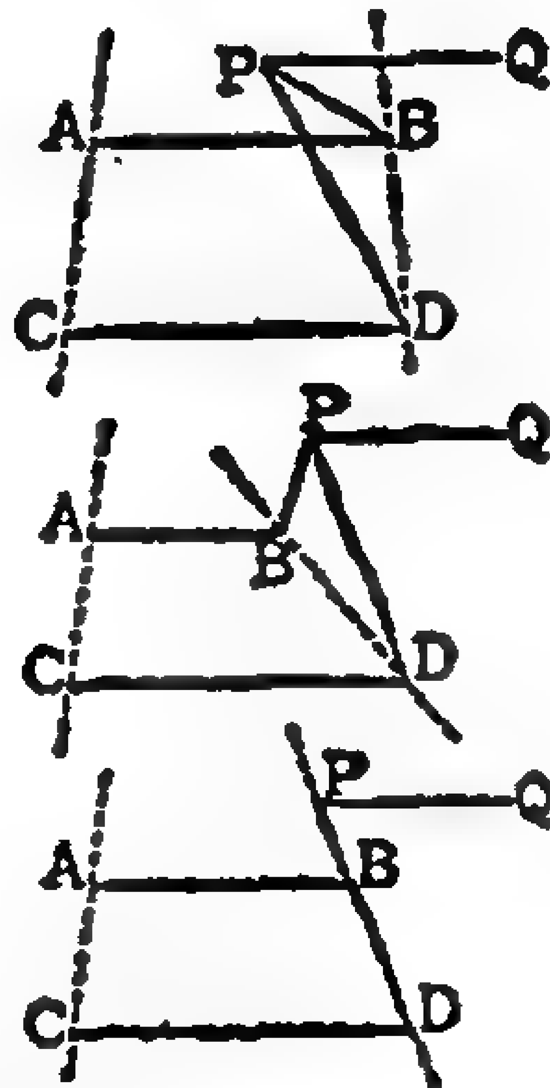
$\because\quad AB \parallel PQ,\quad \therefore\quad \angle ABP=\angle BPQ.$

又$\quad CD \parallel PQ,\ \therefore\quad \angle CDP=\angle DPQ.$

$\therefore\quad \angle ABP+\angle CDP=\angle BPQ+\angle DPQ=\angle BPD,$

即$\quad \angle ABP+\angle CDP=\angle BPD.$

27. 若两线段AB、CD同向平行，P为AB、CD外一点，则



$$\angle ABP \sim \angle CDP=\angle BPO.$$

解 (1) 设P、AB在CD的同侧时，从P作与AB同向的平行线PQ，则有

$\angle BPQ=\angle ABP,$

$\angle DPQ=\angle CDP.$

于是，当$\angle DPQ>\angle BPQ$时，

$\angle DPQ-\angle BPQ=\angle BPD.$

$\therefore\quad \angle CDP-\angle ABP=\angle BPD.$

当$\angle DPQ<\angle BPQ$时，

$\angle BPQ-\angle DPQ=\angle BPD.$

$\therefore\quad \angle ABP-\angle CDP=\angle BPD.$

当$\angle DPQ=\angle BPQ$时，PB、PD重合，

$\angle BPD=0.$

所以这时也有

$\angle BPQ-\angle DPQ=0=\angle BPD.$

$\therefore\quad \angle ABP-\angle CDP=\angle BPD.$

综上所述，$\angle ABP \sim \angle CDP=\angle BPD$成立。

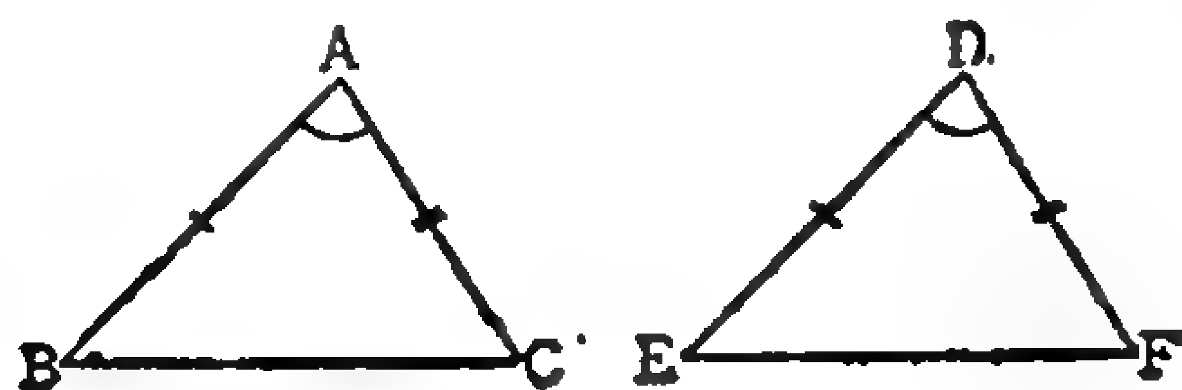
(2) 设P、CD在AB同侧时，可仿(1)同理证明。

2. 三角形

(1) 全等三角形

28. 两边及其夹角对应相等的两个三角形全等。　　［两边夹角全等］

解 设$AB=DE$，$AC=DF$，$\angle A=\angle D$，证明$\triangle ABC \cong \triangle DEF$。将$A$放在$D$上，$B$放在$E$上，$C$放在$DE$的对面与$F$同侧，则$AC$重合于$DF$（$\because \angle A=\angle D$），$C$重合于



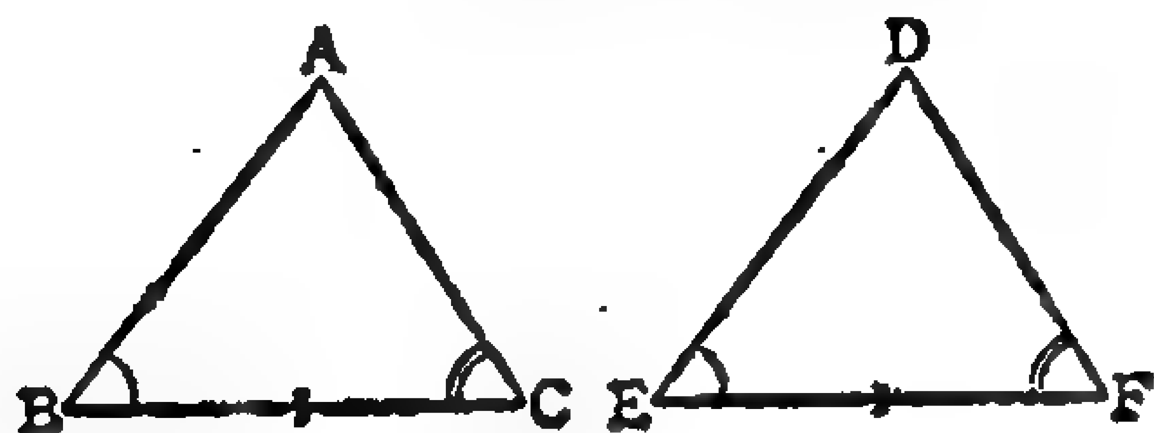
F。从而 BC 重合于 EF.

$\therefore\quad \triangle ABC \cong \triangle DEF$.

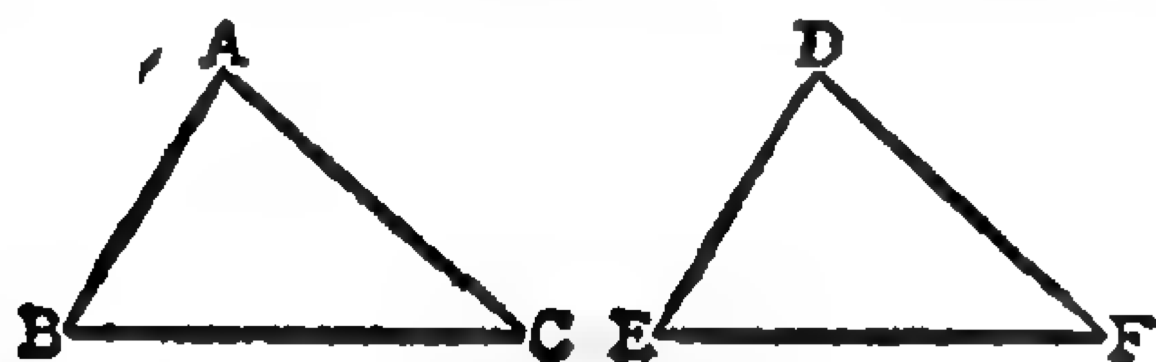
29. 两角夹一边对应相等的两个三角形全等。 [两角夹边全等]

解 设 $BC=EF$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$, 证明 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$。将 B 放在 E 上, C 放在 F 上, A 放在 EF 的对面 D 的同侧, 则 BA 重合于 ED ($\because \angle B=\angle E$), CA 重合于 FD ($\because \angle C=\angle F$)。因而 A 与 D 重合.

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle DEF$.



30. 三边对应相等的两个三角形全等. [三边全等]



解 在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中, 设 $AB=DE$, $BC=EF$, $AC=DF$.

如图把 E 放在 B 上, F 放在 C 上, D 放在 BC 所对 A 的异侧 D' 上, 于是

$AB=D'B$,

$\therefore\quad \angle BAD'=\angle BD'A$;

$AC=D'C$,

$\therefore\quad \angle CAD'=\angle CD'A$.

$\therefore\quad \angle BAD'+\angle CAD'$

$=\angle BD'A+\angle CD'A$,

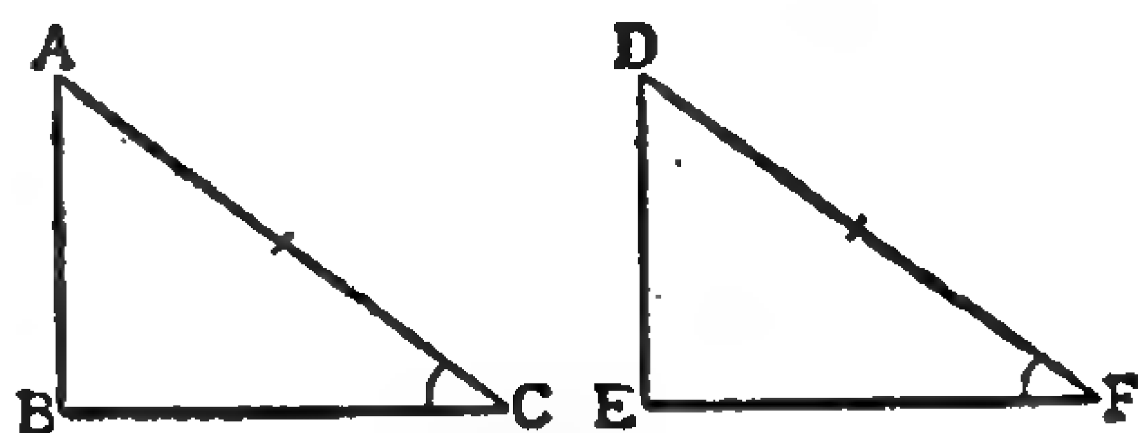
即 $\quad \angle BAC=\angle BD'C=\angle EDF$.

$\because\quad AB=DE,\ AC=DF,\ \angle A=\angle D$,

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle DEF$.

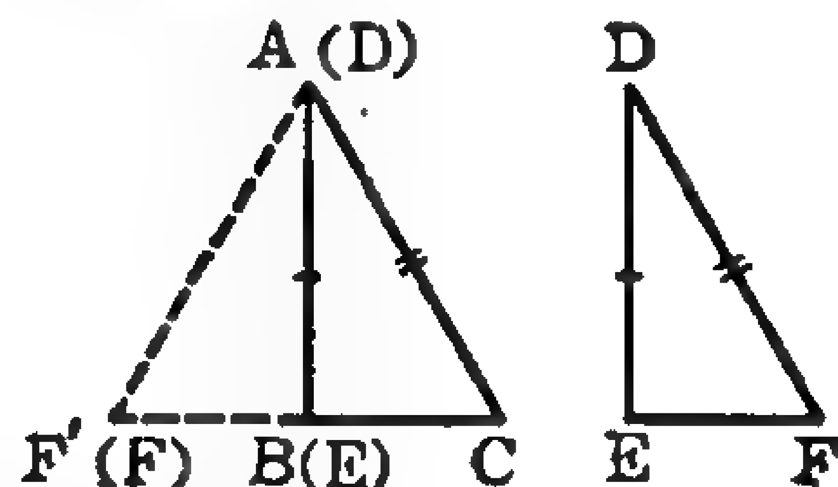
31. 斜边及一个锐角对应相等的两直角三角形全等.

解 在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中, 设 $\angle B=\angle E$ $=\angle R$, $AC=DF$, $\angle ACB=\angle DFE$。将 D 放在 A 上, F 放在 C 上, B 与 E 放在 AC 的同侧, 则由 $\angle C=\angle F$, 有 FE 与 CB 重合, AB 与 DE 重合。[点 A 公共, 因为 $CB\perp AB$, $FE\perp DE$]



$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle DEF$.

32. 斜边及一条直角边对应相等的两个直角三角形全等.



解 在以 B、E 为直角顶的直角三角形 ABC、DEF 中, 设 $AC=DF$, $AB=DE$。放 D 于 A 上, E 于 B 上, F 放在 AB 所对 C 的异侧 F' 上, 则 BC、BF' 成一条直线, $AC=AF'$, $\angle C=\angle F'$, 从而 $\angle C=\angle F$. 所以由上题知两三角形全等.

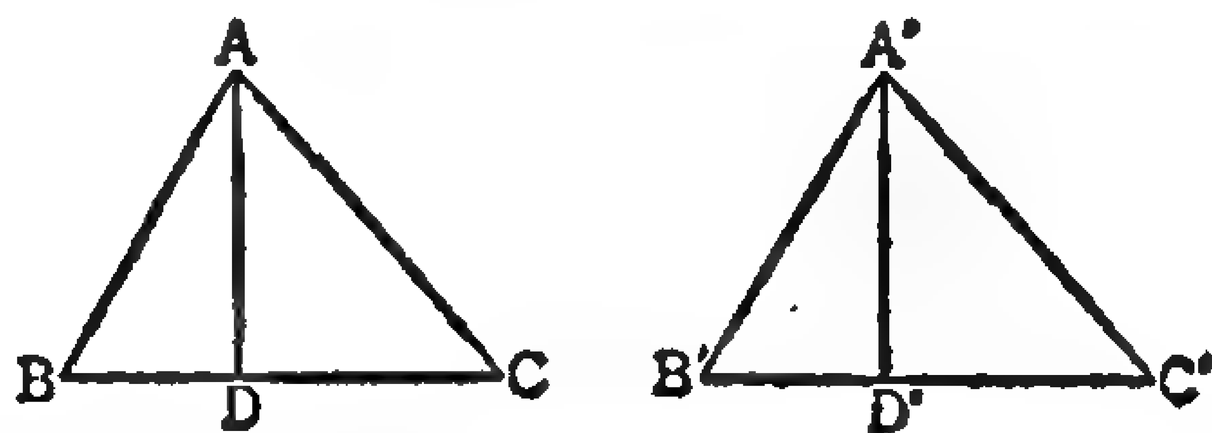
33. 底边、顶角及底上的高对应相等的两个三角形全等.

解 在 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中, 设

$BC=B'C'$,

高 $AD=A'D'$, $\angle BAC=\angle B'A'C'$. 现在放 B' 于 B 上, C' 于 C 上, A、A' 于 BC 的同侧. 因为 $AD=A'D'$, 所以, 若 A 和 A' 重合时, 显然有 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. 若 A、A' 不重合时, 则有 $AA'\parallel BC$; 由 $\angle A=\angle A'$, 知 B, C, A, A' 在同一圆周上. 因而由 $AA'\parallel BC$ 知 $AB=A'C'$, $AC=A'B'$,

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle A'C'B'$.



34. 两边及两边间的中线对应相等的两个三角形全等.

解 在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中, 设 $AB=DE$, $AC=DF$, 中线 $AP=$ 中线 DQ. 在 AP、DQ

的延长线上分别取 $PA'=PA$, $QD'=QD$。连结 BA'、ED', 则有

$$\triangle PBA'\cong\triangle PCA \quad (\text{两边夹角}),$$
$$\triangle QED'\cong\triangle QFD \quad (\text{两边夹角}).$$
$$\therefore\ A'B=AC,\ D'E=DF.$$

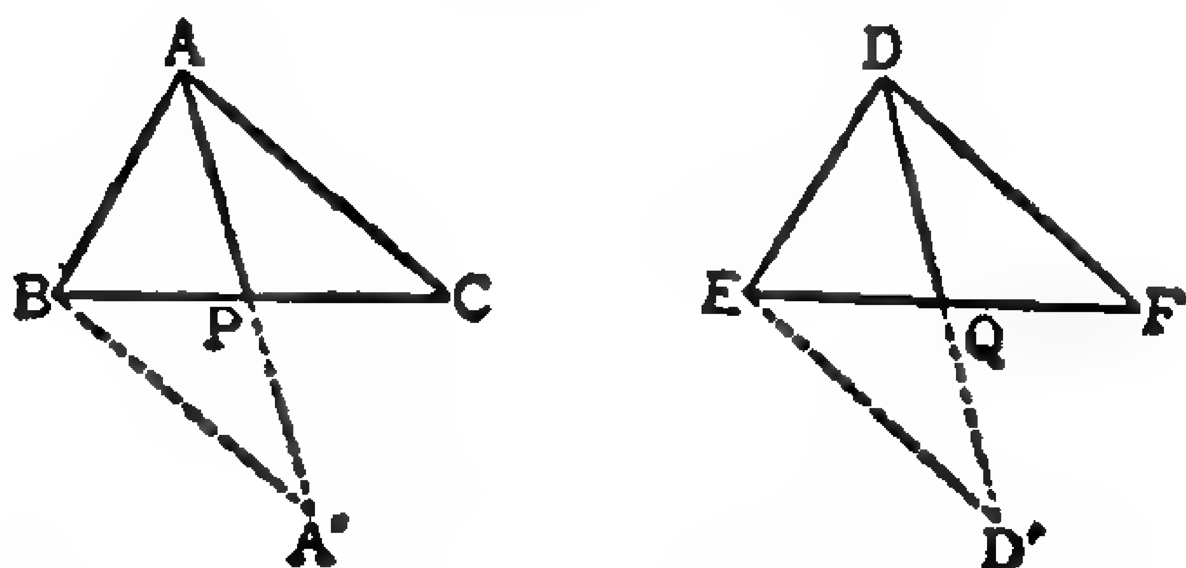
这时，在 $\triangle ABA'$, $\triangle DED'$ 中，$AB=DE$, $A'B=D'E$, $AA'=DD'$, 因而

$$\triangle ABA'\cong\triangle DED'.$$

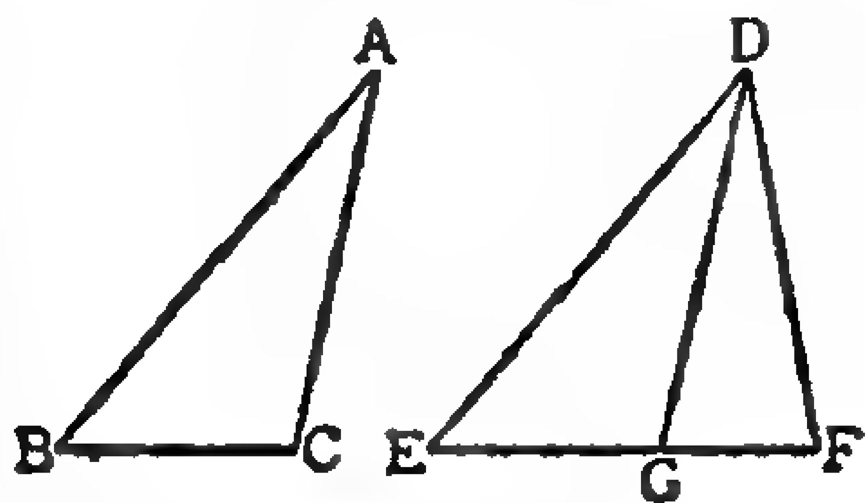
所以 $\angle ABA'=\angle DED'$.

又因 $\angle BAC$、$\angle EDF$ 分别为 $\angle ABA'$、$\angle DED'$ 的补角，它们相等。所以 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中的两边及其夹角对应相等。从而

$$\triangle ABC\cong\triangle DEF.$$



35. 在两个三角形中，若一个三角形的两边分别等于另一三角形的两边，且一组等边所对的角相等时，则另一组等边所对的角相等或互补。在前一种情况两个三角形全等。



解 在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中，$AB=DE$, $AC=DF$, $\angle B=\angle E$ 时，那么 $\angle C$ 与 $\angle F$ 相等吗?又与其补角如何?

放 $\triangle ABC$ 于 $\triangle DEF$ 上，使 A 在 D 上，AB 与 DE 重合，C 与 F 在 DE 的同侧。设 B 与 E 重合时边 BC 在 EF 上。如果点 C 与 F 重合时，那么 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$, $\angle C=\angle F$; 如果点 C 与 F 不重合而落在 EF 上的点 G 处，那么有 $AC=DG=DF$ 与 $\angle F=\angle DGF$。所以

$$\angle ACB=\angle DGE=(180°-\angle F).$$

即 $\angle G$ 与 $\angle F$ 互为补角。

36. 在 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中，设 $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $\angle A=\angle A'$。如果这两个三角形还满足下列条件之一时，那么它们是否全等。

(1) $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 为钝角三角形，

(2) $\angle C$ 为直角，

(3) $BC>AB$,

(4) AC、$A'C'$ 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 的最大边，

(5) $AB>AC$; $A'B'>A'C'$.

解 设两个三角形的两组对应边与其中等边所对的角相等，则另一组等边所对的角相等或互补。所以

(1) 若另一组等边所对的角互补，因互补的两角之一为钝角，另一为锐角，这两个三角形必不全等。

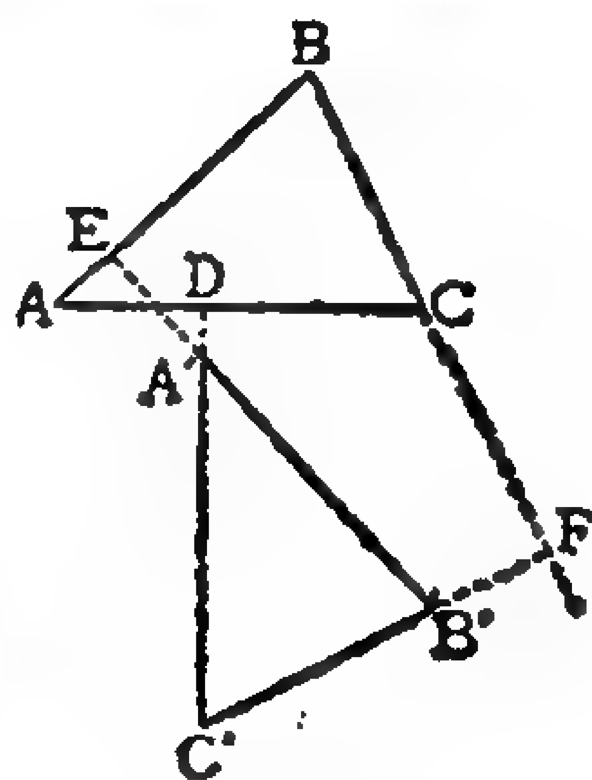
(2) 成为补角的两个角，其中之一为直角，另一角也是直角，这时两三角形全等。

(3) 由于 BC 的长大于 AB 的长有 $\angle A>\angle C$, $B'C'>A'B'$, 因此 $\angle A'>\angle C'$。所以 $\angle C$、$\angle C'$ 的补角都不是锐角，因此两三角形全等。

(4) 假定 AC, $A'C'$ 分别是三角形的最大边，$\angle B$ 与 $\angle B'$ 是最大角，但是 $\angle C$ 和 $\angle C'$ 的补角不小于直角，所以这两个三角形全等。

(5) 由上题知，这两个三角形不可能总是全等。

37. 在两个全等三角形 ABC、$A'B'C'$ 中，若两组对应边 AB 和 $A'B'$、AC 和 $A'C'$ 互相垂直，则另一组对应边 BC 和 $B'C'$ 也互相垂直。(但当 $\angle A$、$\angle A'$ 是直角时例外)

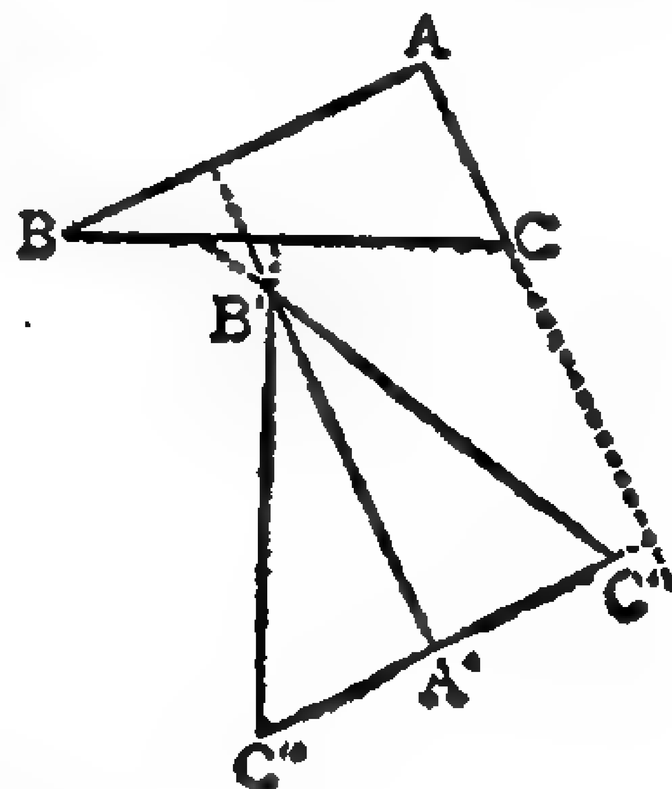


解 如图，设 $A'C'$ 与 AC、$A'B'$ 与 AB、$B'C'$ 与 BC 的交点分别为 D、E、F。由假设

$$AC\perp A'C',$$
$$AB\perp A'B',$$

得

$$\angle ADC'=\angle R,$$
$$\angle AEB'=\angle R.$$



又由

$$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C',$$

得

$$\angle C=\angle C'.$$

因此 $CDC'F$ 是圆内接四边形，从而 $\angle F=\angle ADC'=\angle E$.

$$\therefore\quad BC\perp B'C'.$$

注　在图中，如果 $\angle A'$ 与 $\angle A$ 是直角时，作 $\triangle A'B'C''\cong\triangle B'A'C'$，那么

$$B'C''\perp BC.$$

因而 $B'C'$ 与 BC 不可能垂直.

(2) 边、角的大小

38.　若三角形的两边不等，则其大边所对的角大于小边所对的角.

解　在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB>AC$，证明 $\angle ACB>\angle ABC$.

在边 AB 上作 $AD=AC$，由于 $AB>AC$，所以点 D 在 AB 上．连结 CD，则有

$$\angle ADC=\angle ACD.$$

然而 $\angle ADC$ 是 $\triangle DBC$ 的一个外角，所以

$$\angle ADC>\angle ABC.$$

即　$$\angle ACD>\angle ABC.$$

而　$$\angle ACB>\angle ACD.$$

$$\therefore\quad \angle ACB>\angle ABC.$$

39.　若三角形的两个角不等，则其大角所对的边大于小角所对的边.

解　在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle B>\angle C$，证明 $AC>AB$.

应用反证法．如果 $AC=AB$，就有 $\angle B=\angle C$，这与假设条件相矛盾，所以 $AC\neq AB$．又如果 $AC<AB$，根据问题 **38**，有 $\angle B<\angle C$．这也与假设条件相矛盾．这样，AC 与 AB 既不能相等，AC 也不能小于 AB，

$$\therefore\quad AC>AB.$$

40.　一个三角形的两边分别与另一三角形的两边相等，当这两边所夹的角不等时，则大角所对的边大于小角所对的边.

解　在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中，$AB=DE$，$AC=DF$，当 $\angle BAC>\angle EDF$ 时，则 $BC>EF$．这是因为：当把 D 放在 A 上，E 放在 B 上，且两三角形都在 AB 的同侧时，设 F 落在点 G 处．由 $\angle EDF<\angle BAC$，有

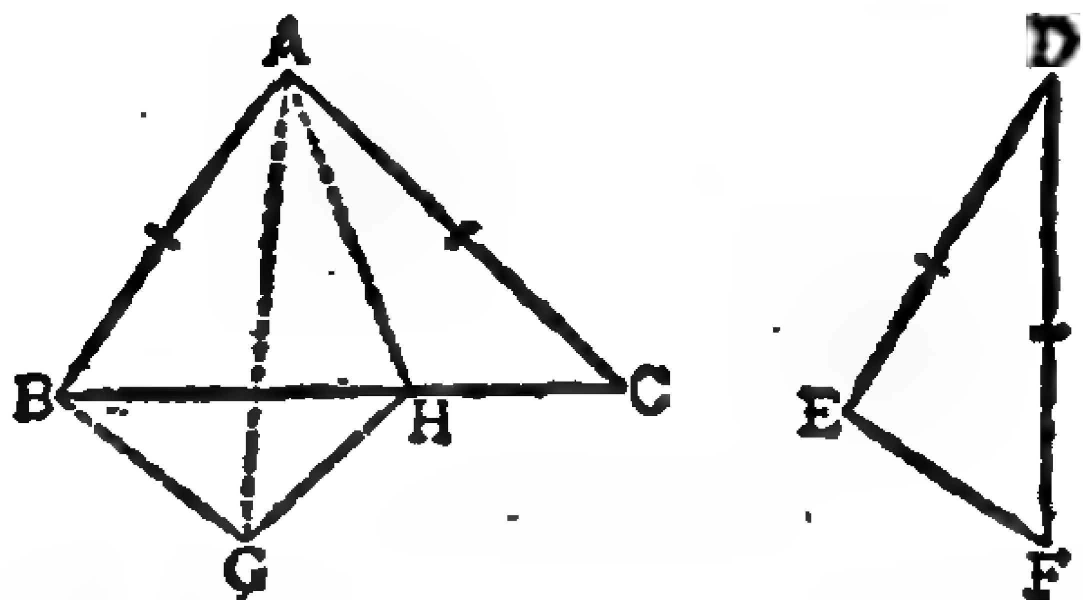
$$\angle BAG<\angle BAC.$$

从而 AG 在 $\angle BAC$ 内．作 $\angle GAC$ 的平分线交 BC 于 H，连结 HG，由两边夹角分别相等，两三角形 GAH，CAH 全等．所以 $HG=HC$．因为 $BH+HG>BG$，而

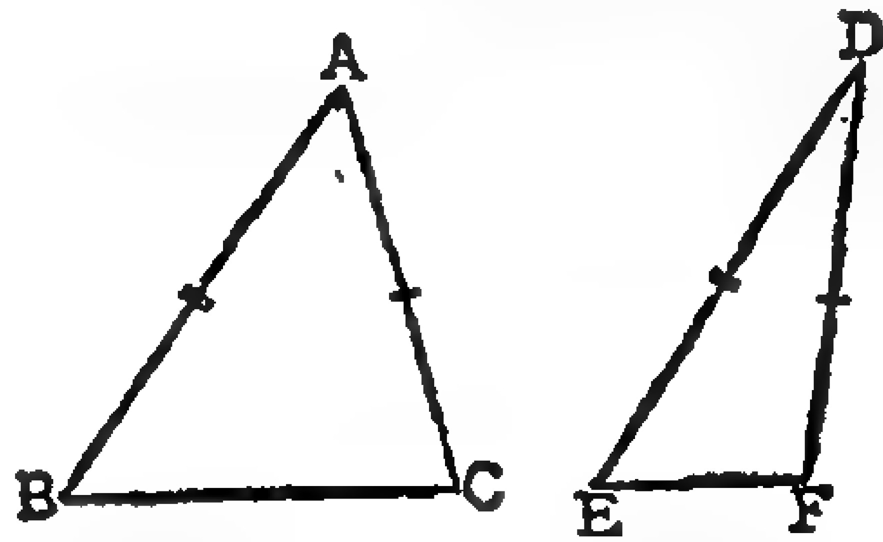
$$BH+HG=BH+HC=BC,$$

且　$$BG=EF,$$

$$\therefore\quad BC>EF.$$



41.　若一个三角形的两边分别与另一个三角形的两边相等，第三边不等，则大边所对的角大于小边所对的角.



解　在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中，$AB=DE$，$AC=DF$，$BC>EF$．如果 $\angle A=\angle D$，则两三角形因两边夹角相等而全等．因此 $BC=EF$．这与假设条件矛盾．所以 $\angle A\neq\angle D$.

又如果 $\angle A<\angle D$，由问题 **41**，知 $BC<EF$，这也与假设条件矛盾.

$$\therefore\quad \angle A>\angle D.$$

42.　三角形的两边之和大于第三边．三角形的两边之差小于第三边.

解　延长 BA 到 D 使

$$AD=AC,$$

连结 DC，则 $\angle D=\angle ACD$.

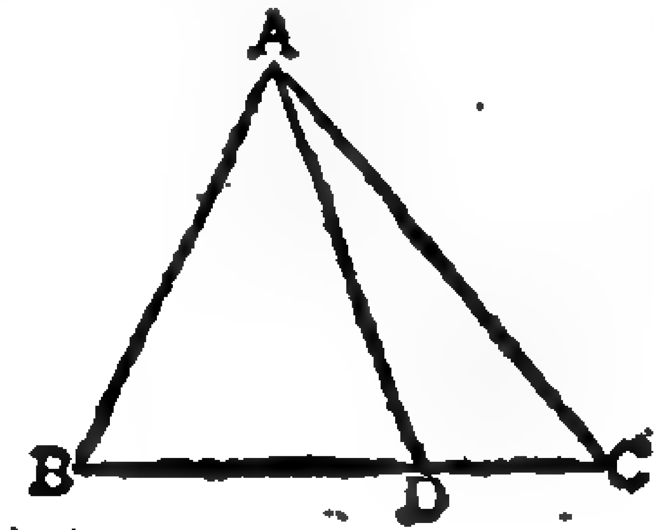
$$\therefore\quad \angle DCB>\angle D.\quad \therefore\quad BD>BC.$$

$$\therefore\quad AB+AC>BC.$$

即两边之和大于第三边．由这个关系即可得到

$$BC\sim AC<AB.$$

43.　若在 $\triangle ABC$ 中，$AC>AB$，D 为 BC 上任一点，连结 AD，则 $AD<AC$.



解　$\because AC>AB$, $\therefore \angle B>\angle C$.
但是 $\angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的外角,

$$\angle ADC>\angle B. \therefore\ \angle ADC>\angle C.$$

从而　$AC>AD$.

44. 设 P、Q 是 $\triangle ABC$ 的内部或边上的任意两点，试证：线段 PQ 的长不超过三角形的最大边长。

解　设三边长为

$$AB\geqq BC\geqq CA,$$

延长 AP 与 BC 交于 R.
由问题 43 知　$AB\geqq AR\geqq AP$.
同理,　$AB\geqq BS\geqq BP$,

$$AB\geqq BC\geqq CT\geqq CP.$$

所以 AP, BP, CP 都不超过 AB.

设 Q 在 $\triangle APC$ 内，同理有 PQ 不超过 $\triangle APC$ 的最大边长．而 $\triangle APC$ 的最大边长不超过 AB,

$$\therefore\ PQ\leqq AB.$$

45. 若在 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上分别取点 D、E、F，则有

$$3(AD+BE+CF)<5(AB+BC+CA).$$

解　设边 AB、BC、CA 中最大的为 AB，最小的为 CA，由问题 43，知 $AB>AD$,

$$AB>BE,$$
$$BC>CF.$$
$$\therefore\ 2AB+BC>AD+BE+CF.$$
$$\therefore\ 6AB+3BC>3(AD+BE+CF).\quad ①$$

根据 $AB<BC+CA$，知 $AB<2BC+5CA$. 在此不等式两端同时加上 $5AB+3BC$，得

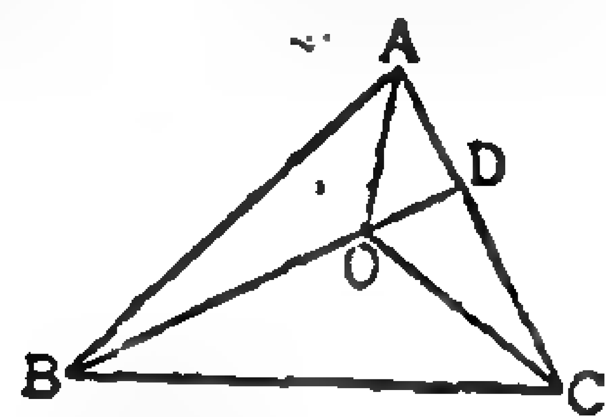
$$6AB+3BC<5AB+5BC+5CA.\quad ②$$

由①、②，得

$$3(AD+BE+CF)<5(AB+BC+CA).$$

46. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内任一点，连结 OB、OC，则

$$AB+AC>OB+OC,$$
$$\angle BOC>\angle A.$$



解　延长 BO 与 AC 交于点 D，在 $\triangle ABD$ 中，有

$$AB+AD>OB+OD.\quad ①$$

在 $\triangle ODC$ 中，有

$$OD+DC>OC.\quad ②$$

①+②,　$AB+AD+DC+OD>OB+OC+OD$,

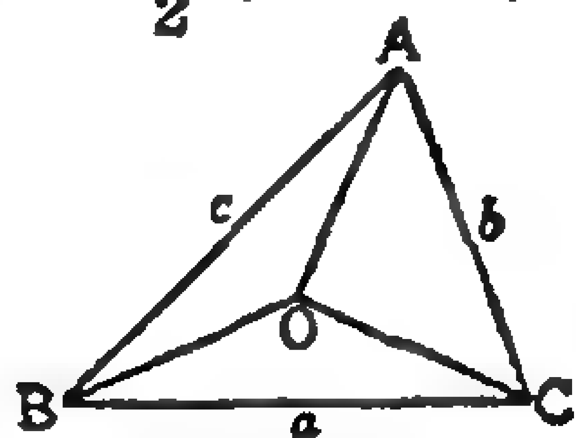
$$\therefore\ AB+AC>OB+OC.$$

因为三角形的外角大于其内对角，所以在 $\triangle ABD$ 中，有 $\angle BDC>\angle A$；又在 $\triangle ODC$ 中，有 $\angle BOC>\angle ODC$.

$$\therefore\ \angle BOC>\angle A.$$

47. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内的任一点，BC、CA、AB 分别记为 a、b、c，则有

$$a+b+c>AO+BO+CO>\frac{1}{2}(a+b+c).$$



解　由问题 46，知

$$b+c>BO+CO,$$
$$c+a>CO+AO,$$
$$a+b>AO+BO.$$
$$\therefore\ 2(a+b+c)>2(AO+BO+CO).$$
$$\therefore\ a+b+c>AO+BO+CO.$$

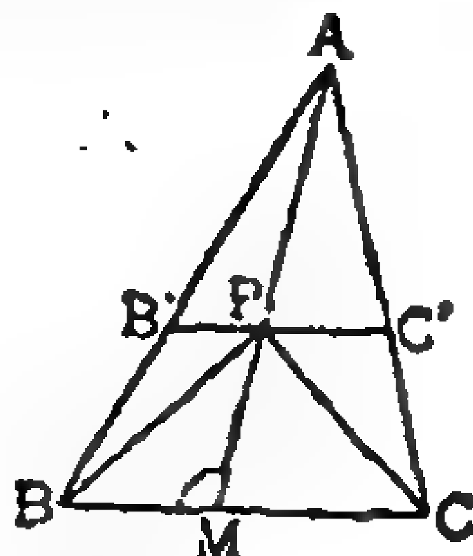
其次，在 $\triangle OBC$ 中，$BO+CO>a$；在 $\triangle OCA$ 中，$CO+AO>b$；在 $\triangle OAB$ 中，$AO+BO>c$.

$$\therefore\ 2(AO+BO+CO)>a+b+c.$$
$$\therefore\ AO+BO+CO>\frac{1}{2}(a+b+c).$$
$$\therefore\ a+b+c>AO+BO+CO>\frac{1}{2}(a+b+c).$$

48. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $BC<AC<AB$，P 为 $\triangle ABC$ 内任一点，连结 AP、BP、CP，延长 AP 交 BC 于 M，则

(1) $AM+BC<AB+AC$,

(2) $AP+BP+CP<AB+AC$.



解　(1) $\angle AMB$ 是 $\triangle AMC$ 的外角,

$$\angle AMB>\angle C.$$

因为　$AB>AC$,

$$\therefore\ \angle B<\angle C.$$
$$\therefore\ \angle B<\angle AMB.$$
$$\therefore\ AB>AM.$$

又因　$AC>BC$,

$$\therefore\ AB+AC>AM+BC.$$

(2) 过 P 引 BC 的平行线 $B'C'$ 分别交 AB、AC 于 B'、C'．根据上面的证明，有

$$AB'+AC'>AP+B'C'.\quad ①$$

又在 $\triangle BPB'$、$\triangle CPC'$ 中，

$$BB'+B'P>BP, \quad ②$$
$$CC'+C'P>PC. \quad ③$$

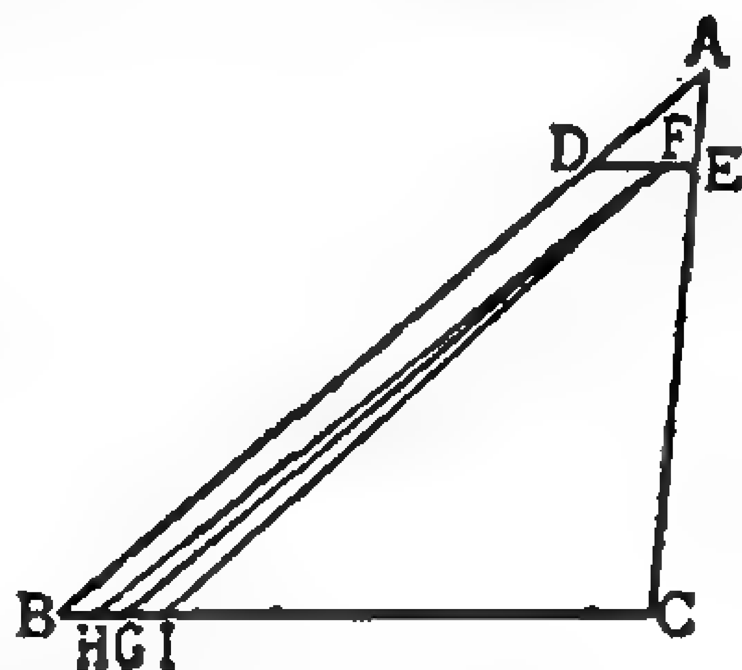
又
$$AB'+BB'=AB,$$
$$AC'+C'C=AC,$$
$$PB'+PC'=B'C'.$$

①+②+③，得

$$AB+AC>AP+BP+CP.$$

49. 在图中，设 $BD=\frac{1}{2}(AB+AC)$，$DE\parallel BC$。在 $\triangle ADE$ 内或 DE 上任取一点 F，过 F 作 AB 的平行线交 BC 于点 G，在 BG、GC 上分别取点 H、I，使 $HG=GI$，则

$$FH+FI>AB+AC.$$



解 当 F 在 DE 上时，$FG=DB$，

$$BD=\frac{1}{2}(AB+AC),$$

从而 $\quad 2BD=AB+AC.$

而 $GH=GI$。根据中线的性质有

$$FH+FI>2FG=2BD,$$

即 $\quad FH+FI>AB+AC.$

当 F 在 $\triangle ADE$ 的内部时，有

$$FH+FI>2FG>2BD.$$
$$\therefore\ FH+FI>AB+AC.$$

50. 下列论述正确吗？

若在 $\triangle ABC$ 的内部任取一点 F，在边 BC 上任取两点 H、I，则不等式

$$AB+AC>FH+FI$$

总能成立。

解 如问题 **49** 假设的 F、H、I，则有

$$FH+FI>AB+AC.$$

所以不等式

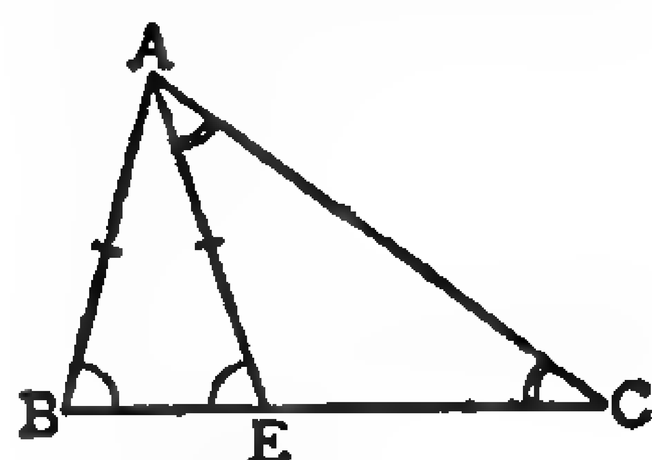
$$AB+AC>FH+FI$$

不可能总成立。

51. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle B=2\angle C$，则 $AC<2AB$.

解 作 $\angle CAE=\angle C$，则 $CE=EA$，

又 $\angle AEB=2\angle C$.



$$\therefore\ \angle B=\angle AEB.$$
$$\therefore\ AB=AE.$$

因此

$$AE+EC=2AB.$$

其次，在 $\triangle AEC$ 中，$AC<AE+EC$.

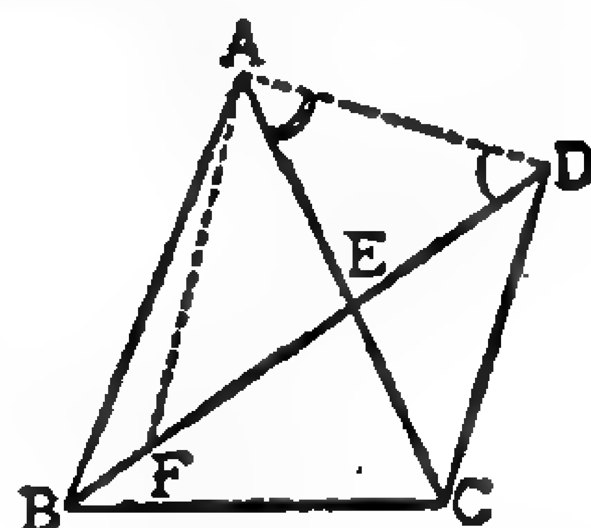
$$\therefore\ AC<2AB.$$

52. 在公共底边 BC 的同侧，作两个三角形 ABC、DBC，使

$$AB+AC=DB+DC,$$

且 $AB=AC$，$DB>DC$，若 DB 与 AC 交于 E，则

$$AE>DE.$$



解 在 DB 上截取 $DF=AC$，则由 $AB+AC=DB+DC$，$DF=AC$，有 $AB=BF+DC$，即

$$AB-BF=DC. \quad ①$$

而在 $\triangle ABF$ 中，

$$AB-BF<AF. \quad ②$$

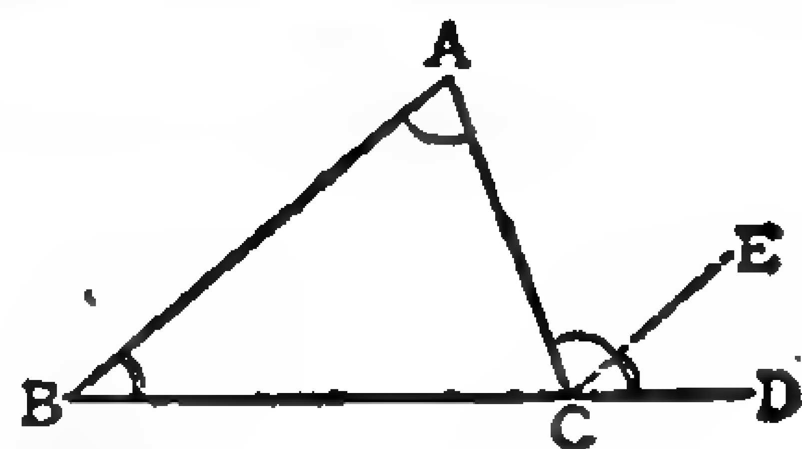
由①、②，有 $AF>DC$。然而在 $\triangle AFD$、$\triangle ACD$ 中 AD 为公共边，$AC=DF$，由 $AF>DC$，有 $\angle ADF>\angle DAC$。所以在 $\triangle AED$ 中 $\angle D>\angle A$。由此可得

$$AE>DE.$$

(3) 两底角的和与差

53. 三角形的内角之和等于两直角。一个外角等于其内对角之和。

解 延长 BC，过 C 引直线 $CE\parallel AB$.



$$\angle A=\angle ACE\ (\text{内错角}),$$
$$\angle B=\angle ECD\ (\text{同位角}).$$
$$\therefore\ \angle A+\angle B=\angle ACE+\angle ECD,$$
$$\therefore\ \angle A+\angle B=\angle ACD.$$

又在此等式两边加上 $\angle BCA$，得

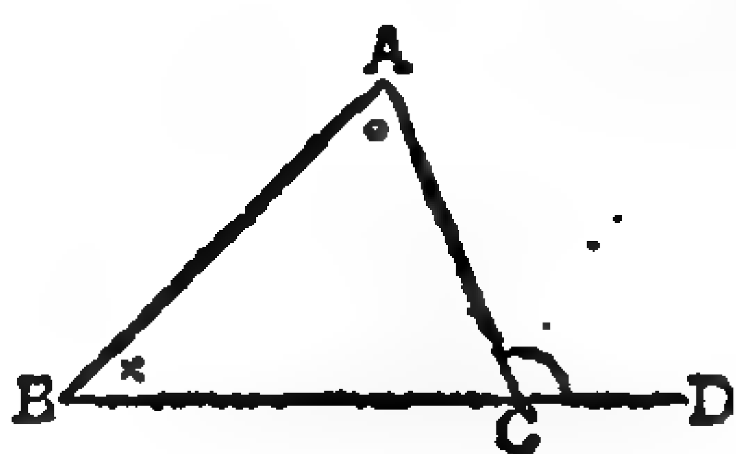
$$\angle A+\angle B+\angle BCA$$
$$=\angle ACD+\angle BCA=2\angle R,$$
$$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C=2\angle R.$$

或 $\quad \angle A+\angle B=2\angle R-\angle C=\angle ACD.$

54. 若延长三角形的任一边，则其外角大于内对角。

解 由问题 **53**，知

$\angle A+\angle B+\angle C$
$=2\angle R$,



但是

$\angle C+\angle ACD$
$=2\angle R$,

$\therefore \quad \angle ACD=\angle A+\angle B$.

因此外角 $\angle ACD$ 大于 $\angle A$ 或 $\angle B$.

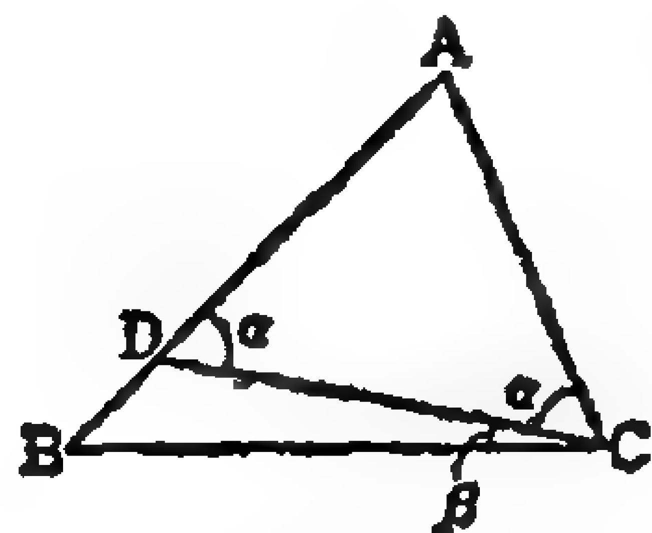
55. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，若在 AB 上截取 $AD=AC$，则

$$\angle ADC=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C),$$

$$\angle BCD=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B).$$

解 由 $AD=AC$，有 $\angle ADC=\angle ACD$.

设 $\angle ADC=\alpha$,
$\angle BCD=\beta$,



则有

$\angle B=\angle ADC-\angle BCD=\alpha-\beta$,

$\angle ACB=\angle ACD+\angle BCD=\alpha+\beta$.

$$\therefore \quad \angle B+\angle C=(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)=2\alpha=2\angle ADC.$$

$$\therefore \quad \angle ADC=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C).$$

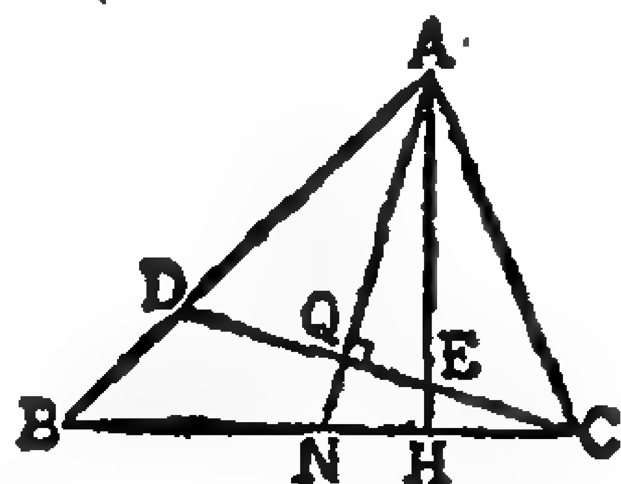
又 $\quad \angle C-\angle B=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=2\beta=2\angle BCD$.

$$\therefore \quad \angle BCD=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B).$$

56. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle A$ 的平分线为 AN，过 A 作 BC 的垂线为 AH，则

$$\angle HAN=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C).$$

解 设 $AB>AC$，在 AB 上截取 $AD=AC$，CD 与 AN、AH 的交点分别为 Q、E，则有



$\angle AQE=\angle R=\angle AHC$.

又 $\quad \angle AEQ=\angle HEC$.

$\therefore \quad \angle QAE=\angle ECH$.

由问题 **55** 可知

$$\angle HAN=\angle DCB=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B),$$

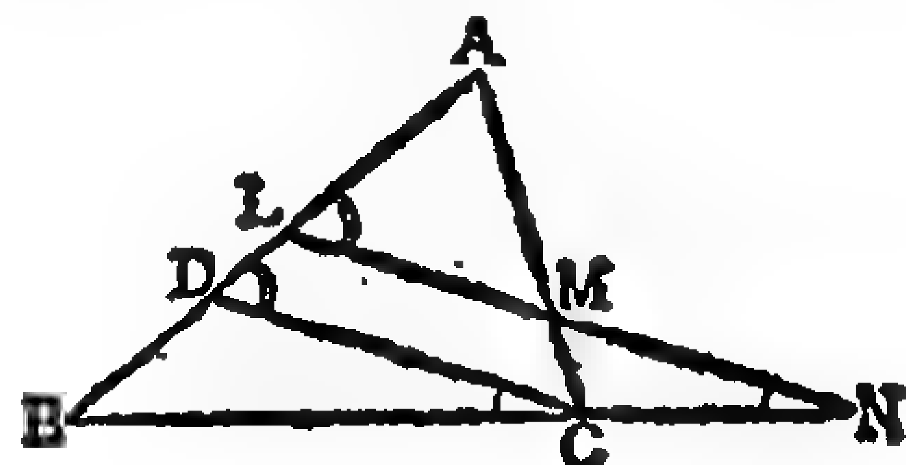
同理，设 $AB<AC$，则有

$$\angle HAN=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C).$$

因此，一般地有

$$\angle HAN=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C).$$

57. 作直线 LMN 分别交 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 于 L、M，交 BC 的延长线于 N，且 $\angle ALM=\angle AML$，则有



$$\angle ALM=\frac{1}{2}(\angle C+\angle B),$$

$$\angle LNB=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B).$$

解 设 $AB>AC$，过 C 作 $CD\parallel LM$。由 $AM=AL$，可知 $AC=AD$. 因此由问题 **55**，得

$$\angle DCB=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B),$$

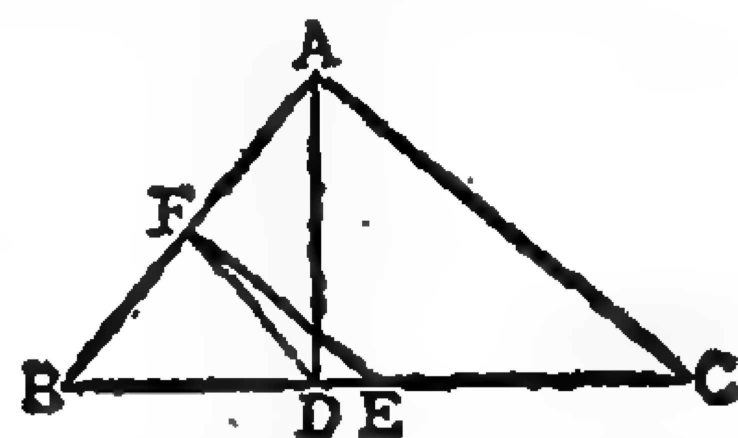
$$\angle ADC=\frac{1}{2}(\angle C+\angle B).$$

又因 $ML\parallel DC$，所以

$$\angle N=\angle DCB=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B),$$

$$\angle ALM=\angle ADC=\frac{1}{2}(\angle C+\angle B).$$

58. 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 向对边 BC 引垂线 AD，若边 BC、AB 的中点分别为 E、F，则



$\angle DFE=\angle B\sim\angle C$.

解 当 $\angle B>\angle C$ 时，$\angle DFE=\angle BDF-\angle BEF$，而 F 是直角三角形 ADB 斜边 AB 的中点，所以 $FD=FB$.

$\therefore \quad \angle B=\angle BDF$.

又因 $EF\parallel AC$,

$\therefore \quad \angle C=\angle BEF$.

$$\therefore \quad \angle DFE=\angle BDF-\angle BEF=\angle B-\angle C.$$

当 $\angle B<\angle C$ 时，同理有

$$\angle DFE=\angle C-\angle B.$$

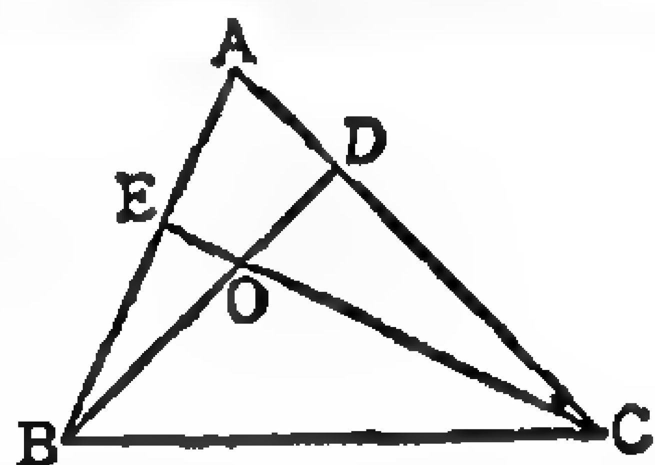
因此一般地有

$$\angle DFE=\angle B\sim\angle C.$$

(4) 垂线

注 有关三角形垂心等问题参考第二章圆的部分。

59. 从锐角三角形的两个顶点向对边引垂线，则其夹角与顶角互补。

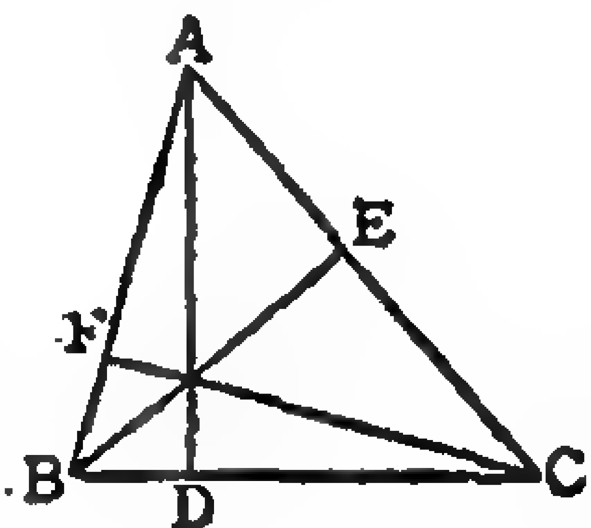


解 在锐角$\triangle ABC$中，从点B、C分别向对边引垂线BD、CE，设其交点为O，则四边形$ADOE$的四个内角之和为$4\angle R$，其中$\angle E$、$\angle D$为直角。

$$\therefore \quad \angle A+\angle EOD=\angle A+\angle BOC=2\angle R.$$

注 点O叫垂心。

60. 三角形的三条高之和小于三边之和。



解 $\triangle ABC$的三条高AD、BE、CF，如图所示，则有

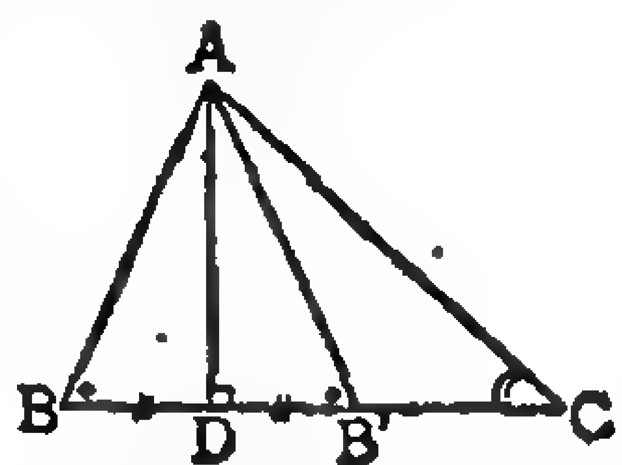
$$AD<AB,\ BE<BC,\ CF<AC.$$

$$\therefore \quad AD+BE+CF<AB+BC+AC.$$

61. 在$\triangle ABC$中，设$AC>AB$，过A向BC作垂线AD，则有

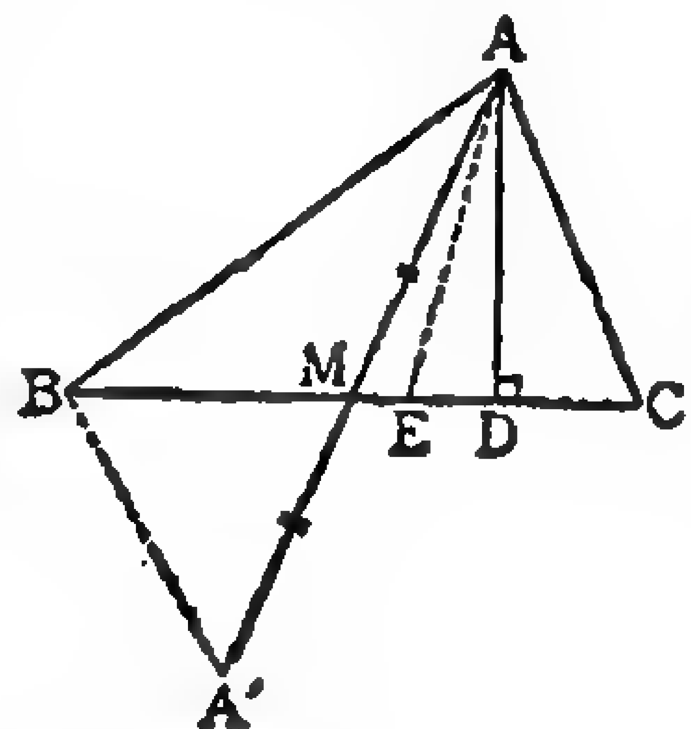
$$\angle DAC>\angle DAB$$

及 $$DC>DB.$$



解 因为$AD\perp BC$，$\angle DAB$、$\angle DAC$分别为$\angle B$、$\angle C$的余角。又因$AB<AC$，有$\angle C<\angle B$。因此，$\angle DAC>\angle DAB$。从而等于$\angle DAB$的$\angle DAB'$在$\angle DAC$内。由此可知，点B'在DC上，$BD=DB'$。且有$DC>DB'$，即$DC>DB$。

62. $\triangle ABC$顶角A的平分线AE在中线AM与高AD的中间。



解 设$AB>AC$，在AM的延长线上取$MA'=AM$，则有$\triangle AMC\cong\triangle A'MB$（两边夹角）。因而

$$AC=A'B,$$

$$\angle BA'M=\angle CAM.$$

由$AB>AC$有$AB>A'B$。

$$\therefore \quad \angle BA'M>\angle BAM.$$

$$\therefore \quad \angle CAM>\angle BAM.$$

所以$\angle A$的平分线AE在AM与AC之间。又$AB>AC$有$\angle B<\angle C$，从而$\angle BAD>\angle DAC$。所以AE在AD与AB之间。由此可得AE在AM与AD之间。

63. 三角形的一个角平分线的长小于夹此角两边的等差中项。

解 设$AB>AC$，延长中线AM至A'，使$A'M=AM$，连结BA'，则

$$AA'<AB+BA'.$$

又由问题**62**，知

$$BA'=AC.$$

$$\therefore \quad 2AM<AB+AC.$$

因此

$$AM<\frac{1}{2}(AB+AC). \quad ①$$

但由问题**62**，知$\angle A$的平分线AE在中线AM与高AD之间，从而$AE<AM$，所以由①得

$$AE<\frac{1}{2}(AB+AC).$$

64. 从$\triangle ABC$的两顶点B、C分别向对边AC、AB引垂线，设其垂足分别为E、F，则线段EF的中点与边BC的中点的连线垂直于EF。

解 设BC、EF的中点分别为Y、X，连结YE、YF，则Y为直角三角形BEC的斜边BC的中点，

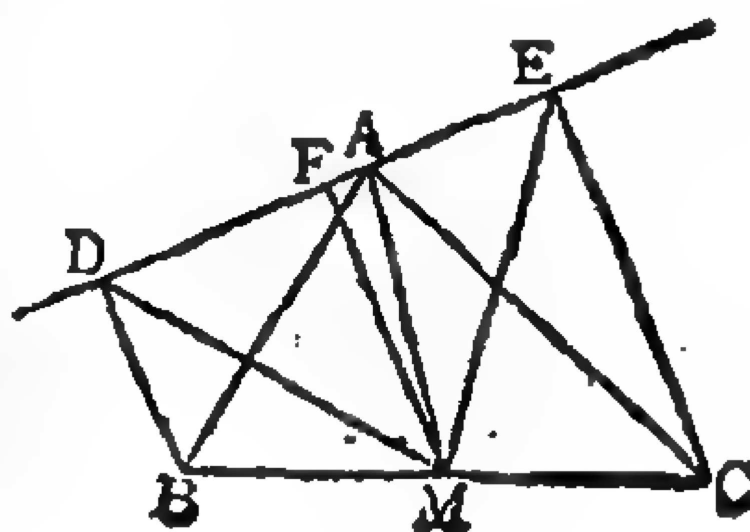
$$BY=YE.$$

同理，$BY=YF$，

$$\therefore \quad YE=YF.$$

因此$\triangle YEF$为等腰三角形，X为底边EF的中点。所以$YX\perp EF$。

65. 若过$\triangle ABC$的顶点A任作一直线，过B、C再分别作此直线的垂线，其垂足分别为D、E，则这两个垂足到BC的中点等距。



解　作 $MF\perp DE$，则 $BD\parallel MF\parallel CE$。$M$ 是 BC 的中点，因而 $DF=EF$，于是可知点 M 在线段 DE 的垂直平分线上。

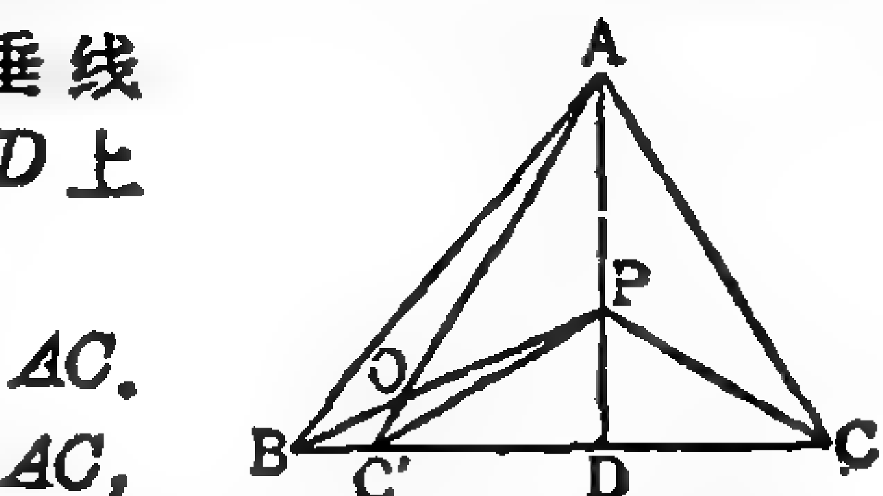
$$\therefore\quad MD=ME.$$

注　本题证明了梯形的一个性质：

$$BD+CE=2MF.$$

66.　在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，由顶点 A 向对边 BC 作垂线 AD，设 P 为 AD 上的任一点，则有

$$PB-PC>AB-AC.$$



解　由 $AB>AC$，有 $BD>CD$。因此在 BD 上取点 C'，使

$$DC'=DC,$$

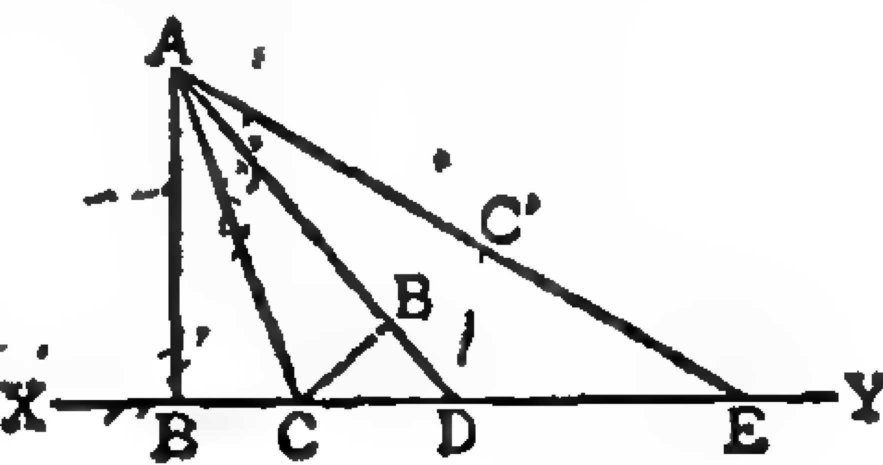
则有 $AC'=AC$，$PC'=PC$。又设 BP 与 AC' 相交于点 O，则

$$OA+OB>AB,$$
$$OP+OC'>PC'.$$
$$AC'+PB>AB+PC'.$$
$$PB-PC'>AB-AC'.$$
$$PB-PC>AB-AC.$$

67.　从直线 XY 外一点 A 向 XY 作垂线 AB，且在同侧作斜线 AC、AD、AE 张成相等的角：

$$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE,$$

则　　$$BC<CD<DE.$$



解　因为 AB 为 XY 的垂线，AC、AD、AE 为 XY 的斜线，所以

$$\angle R>\angle ACB>\angle ADC.$$

因此　$$\angle R<\angle ACD<\angle ADE.$$

设　$$\angle ACB=\angle ACB',$$
$$\angle ADC=\angle ADC',$$

则边 CB'、DC' 分别在角 $\angle ACD$，$\angle ADE$ 内。且

$$\triangle ACB\cong\triangle ACB',$$
$$\triangle ADC\cong\triangle ADC',$$
$$\angle CB'D>\angle ADC,$$
$$\angle DC'E>\angle E.$$

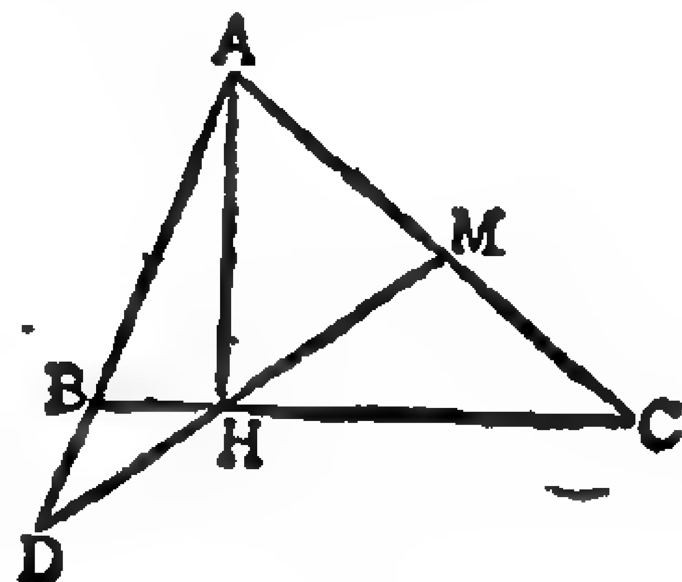
由此 $CD>CB'$，$DE>DC'$。

$$\therefore\quad BC<CD<DE.$$

68.　在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$ 时，$AH\perp BC$，若延长 AB 至 D 使 $BD=BH$，则 DH 的延长线必经过边 AC 的中点 M。

解　$\because BD=BH,$

$$\therefore\quad \angle BDH=\angle BHD=\frac{1}{2}\angle ABC=\angle C.$$



但是

$$\angle BHD=\angle MHC,$$
$$\therefore\quad \angle MHC=\angle C.$$
$$\therefore\quad MC=MH.$$

因而在 $\triangle AHC$ 中，

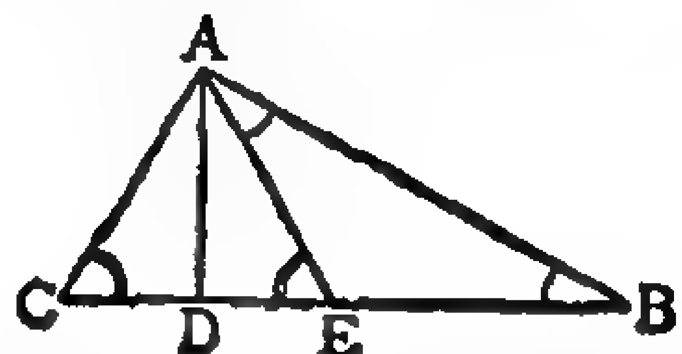
$$\angle AHC=\angle R,$$

从而 $\angle AHM$、$\angle HAM$ 都是 $\angle C$ 的余角，

$$\therefore\quad MH=MA.\quad\therefore\quad MA=MC.$$

即点 M 是边 AC 的中点。

69.　若在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=2\angle B$，从 A 向 BC 所作垂线为 AD，则 DB 与 DC 之差等于 AC。



解　在 DB 上作 $DE=CD$，则

$$AE=AC.$$

$$\therefore\quad \angle AEC=\angle C=2\angle B=\angle B+\angle EAB.$$
$$\therefore\quad \angle EAB=\angle EBA.$$
$$\therefore\quad AE=EB.$$

即 $AC=EB$。又 $CD=DE$。

$$\therefore\quad DB-DC=DB-DE=EB=AC.$$

70.　若从锐角 $\triangle ABC$ 的顶点 B、C 各向对边作垂线，在这两条垂线(或其延长线)上分别取 $BP=CA$、$CQ=BA$，再过 P、Q 作 $PP'\perp BC$、$QQ'\perp BC$，则

A　P　Q　B　D　Q'　P'　C

$$PP'+QQ'=BC.$$

解　设 $AD\perp BC$，则在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CQQ'$ 中，$\angle BAD=\angle QCQ'$(都是 $\angle B$ 的余角)，

$$\angle ADB=\angle CQ'Q=\angle R,$$

且 $AB=CQ$，

$$\therefore\quad \triangle ABD\cong\triangle CQQ'.$$
$$\therefore\quad BD=QQ'.$$

同理，　$$\triangle ADC\cong\triangle BP'P.$$
$$\therefore\quad CD=PP'.$$

因此有

$$PP'+QQ'=CD+BD=BC.$$

71.　在 $\triangle ABC$ 中，由 A、B 各向对边作

垂线，设垂足分别为 D、E，AB 的中点为 F，则

$$\angle EDF=\angle C.$$

解 设 AD 与 BE 交于点 H，则 $\angle C$ 与 $\angle EHD$ 互为补角.

$$\therefore\quad \angle C=\angle AHE. \qquad ①$$

但 $\angle AHE=\angle HDE+\angle HED.$

因此由①，有

$$\angle C=\angle HDE+\angle HED. \qquad ②$$

但 $\angle AEB=\angle ADB=\angle R.$

所以，点 A、B、D、E 在同一圆周上.

$$\therefore\quad \angle HED=\angle FAD.$$

又 F 是直角三角形 ABD 的斜边上的中点. 由此可得，$\angle FAD=\angle FDA$. 所以由②，有

$$\angle C=\angle HDE+\angle FDA=\angle EDF.$$

72. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B>\angle C$，若从 B、C 分别向对边 AC、AB 作垂线 BD、CE，则 $CE>BD$.

解 延长 BD、CE，使 $DB'=BD$，$EC'=CE$. 则 $\triangle BCB'$、$\triangle CBC'$ 都为等腰三角形，$BC'=BC=CB'$. 由此可得 $\angle CBC'=2\angle B$，$\angle BCB'=2\angle C$. 然而由假设 $\angle B>\angle C$，有

$$\angle CBC'>\angle BCB'.$$

因此在 $\triangle BCB'$、$\triangle CBC'$ 中，$CB'=C'B$，BC 公有，$\angle CBC'>\angle BCB'$，

$$\therefore\quad CC'>BB'.$$

又

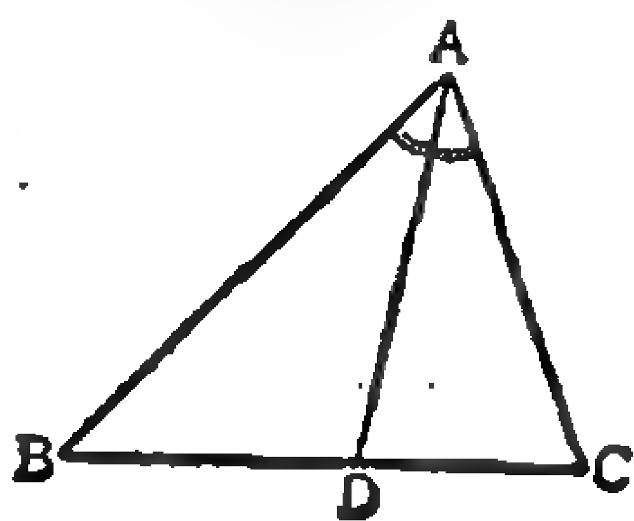
$$\because\quad BD=\frac{1}{2}BB',\ CE=\frac{1}{2}CC',$$

$$\therefore\quad CE>BD.$$

(5) 角平分线

注 关于内心、旁心问题参考第二章圆的部分.

73. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle A$ 的平分线与边 BC 交于点 D，则有 $AB>BD$，$AC>CD$.



解 $\angle ADB=\angle C+\angle DAC.$

而

$$\angle DAC=\angle BAD.$$

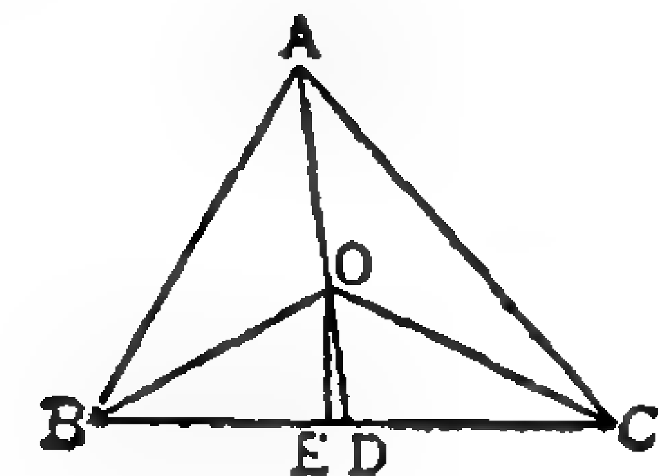
由此可得 $\angle ADB>\angle BAD.$

$$\therefore\quad AB>BD.$$

同理，$AC>CD.$

74. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$、$\angle C$ 平分线的交点，延长 AO 与 BC 交于 D，从 O 向 BC 作垂线 OE，则

$$\angle BOE=\angle COD.$$



解

$$\angle COD=\angle CAO+\angle ACO$$
$$=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C. \qquad ①$$

由 $\angle BEO=\angle R$，知

$$\angle BOE=\angle R-\frac{1}{2}\angle B.$$

又

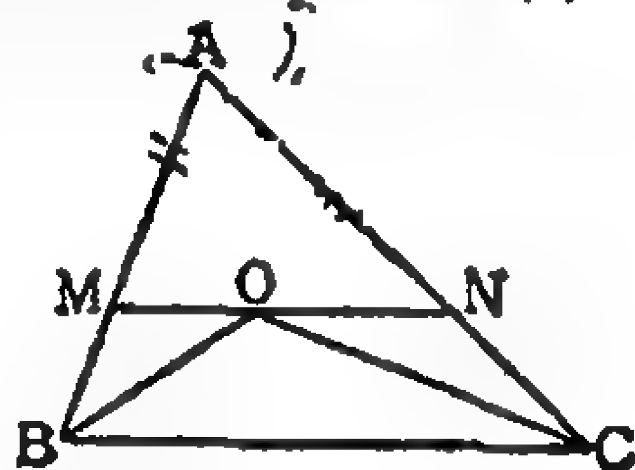
$$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=\angle R.$$

$$\therefore\quad \angle BOE=\angle R-\frac{1}{2}\angle B$$
$$=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C.$$

故由①、②，得

$$\angle BOE=\angle COD.$$

75. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线交于点 O，过 O 作平行于 BC 的直线与 AB、AC 分别交于 M、N，则 $MN=MB+NC$.



解 $MN\parallel BC$，

$$\therefore\quad \angle MOB=\angle OBC.$$

但 $\angle OBC=\angle MBO,$

$$\therefore\quad \angle MOB=\angle MBO.$$

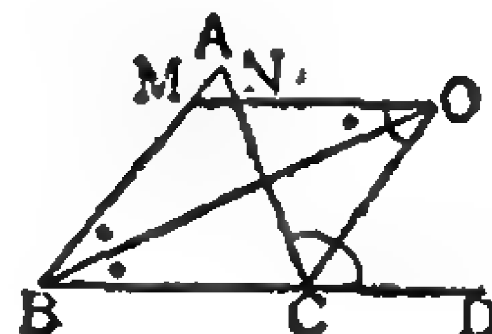
$$\therefore\quad MO=MB.$$

同理，$NO=NC.$

因此 $MO+NO=MB+NC.$

即 $MN=MB+NC.$

注 O 为 $\triangle ABC$ 的内心(参考问题 **429**).



76. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 平分线与外角 ACD 的平分线交于点 O，过 O 作平行于 BC 的直线与 AB、AC 分别交于 M、N，则

$$MN=MB\sim NC.$$

解 由 $NO\parallel CD$,

$$\therefore\ \angle NOC=\angle OCD.$$

但 $\angle NCO=\angle OCD.$

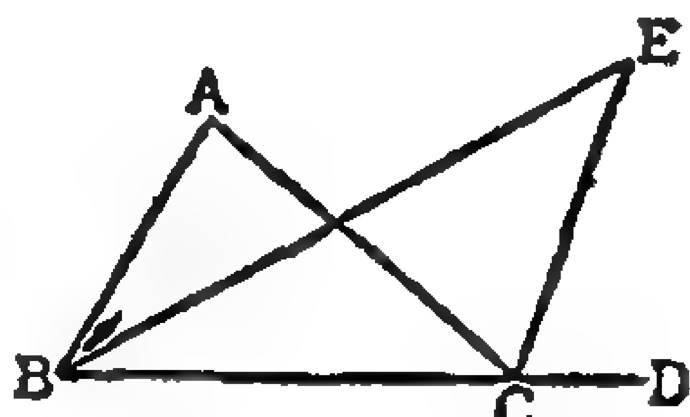
$$\therefore\ \angle NOC=\angle NCO.$$

$$\therefore\ NO=NC.$$

同理, $MO=MB.$

$$\therefore\ MN=MO\sim NO=MB\sim NC.$$

77. $\triangle ABC$的$\angle B$的平分线与它的外角平分线的夹角等于$\angle A$的一半。



解 设$\angle ACD$为$\triangle ABC$的外角，则

$$\angle ACD=\angle A+\angle ABC,$$

又$\angle ECD$是$\triangle EBC$的外角，因而有

$$\angle ECD=\angle E+\angle EBC.$$

但 $\angle ECD=\frac{1}{2}\angle ACD.$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle ABC=\angle E+\angle EBC.$$

两边同时减去等角$\frac{1}{2}\angle ABC=\angle EBC$，得

$$\angle E=\frac{1}{2}\angle A.$$

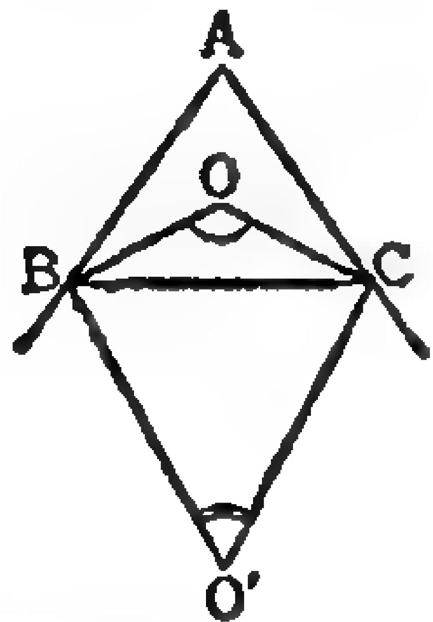
注 E为$\triangle ABC$的$\angle B$内的旁心(参考问题**430**)。

78. 下面的论述正确吗?

三角形顶角的平分线与对边垂直平分线的交点在三角形的外部。

解 一般地，三角形的顶角平分线与其对边的垂直平分线过三角形外接圆周上的同一点。但在等腰三角形时，这两条直线重合，所以这个论述不一定正确。

79. 设$\triangle ABC$的$\angle B$、$\angle C$的平分线交于点O，则



$$\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A.$$

设与$\angle B$、$\angle C$邻补角的平分线交于点O'，则

$$\angle BO'C=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A.$$

解 在$\triangle BOC$中，

$$\angle BOC+\angle OBC+\angle OCB=2\angle R.$$

即

$$\angle BOC+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=180^\circ.\quad ①$$

又 $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=90^\circ.$

即 $\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A.$

代入①，得

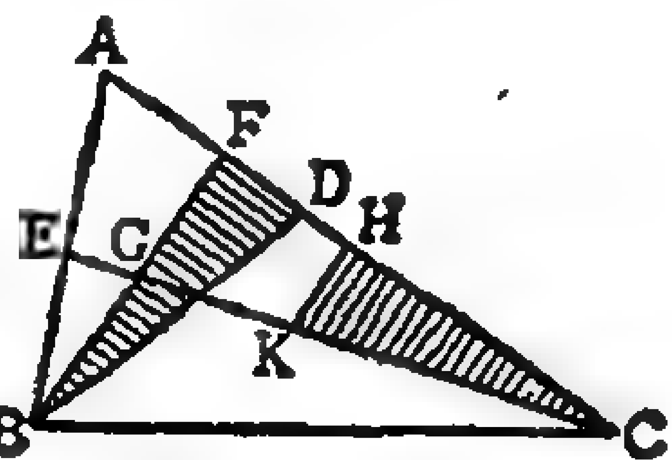
$$\angle BOC+90^\circ-\frac{1}{2}\angle A=180^\circ.$$

$$\therefore\ \angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A.$$

又$\angle OBO'=\angle R=\angle OCO'$，四边形$OBO'C$是圆内接四边形。

$$\therefore\ \angle BO'C=180^\circ-\angle BOC$$
$$=180^\circ-\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle A\right)$$
$$=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A.$$

80. 设在$\triangle ABC$中，$\angle B>\angle C$，则$\angle B$的平分线BD小于$\angle C$的平分线CE。

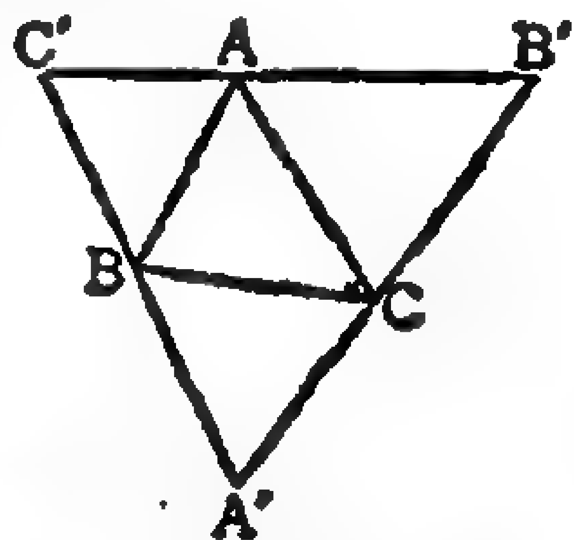


解 因为$\angle B>\angle C$，有$\angle ABD>\angle ACE$。所以在$\angle ABD$内可作$\angle DBF=\angle ACE$。在$\triangle FBC$中，由于$\angle FBC>\angle FCB$，有$FB<FC$，所以在CF上可取$CH=BF$。设过H作FB的平行线交CE于K。则在$\triangle BFD$、$\triangle CHK$中，$BF=CH$，$\angle BFD=\angle CHK$，$\angle FBD=\angle HCK$，

$$\therefore\ \triangle BFD\cong\triangle CHK,$$

$$\therefore\ BD=CK<CE.$$

81. $\triangle ABC$的每个外角的平分线作成$\triangle A'B'C'$，对$\triangle A'B'C'$的每个外角的平分线又作成$\triangle A''B''C''$，继续对新三角形的每个外角的平分线作成三角形，则其极限为正三角形。



解 由问题**79**，有

$$\angle A'=\angle R-\frac{1}{2}\angle A.$$

同理，　$\angle B'=\angle B-\frac{1}{2}\angle B$.

因此　$\angle A'\sim\angle B'=\frac{1}{2}(\angle A\sim\angle B)$.

这就告诉我们，第一个新三角形的两角之差等于对应的原三角形的两角差之半．同理第二个新三角形 $A''B''C''$ 有

$$\angle A''\sim\angle B''=\frac{1}{2}(\angle A'\sim\angle B')$$

$$=\frac{1}{4}(\angle A\sim\angle B).$$

一般地，第 n 次新三角形 $A_nB_nC_n$ 有

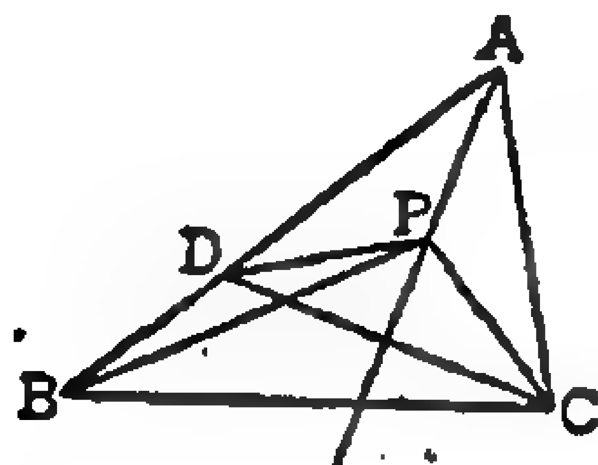
$$\angle A_n\sim\angle B_n=\frac{1}{2^n}(\angle A\sim\angle B).$$

其中 n 为正整数，当 n 充分大时，$\frac{1}{2^n}$ 就任意地小．因此，当 n 无限增大时，$\frac{1}{2^n}$ 的极限为零．所以 $\frac{1}{2^n}(\angle A\sim\angle B)$ 的极限是零．因而，当 n 充分大时，有 $\angle A_n=\angle B_n$．同理 $\angle B_n=\angle C_n$．所以 $\triangle A_nB_nC_n$ 的极限为正三角形．

82. 设 P 为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线上任一点，且 $AB\neq AC$，则

$$AB\sim AC>PB\sim PC.$$

解　设 $AB>AC$ 时，在 AB 上截取 $AD=AC$，连结 DC，则



$$\triangle ADP\cong\triangle ACP.$$

$$\therefore\ PD=PC,$$

$$\therefore\ AB-AC=AB-AD=DB.$$

又　$PB-PC=PB-PD$.

但是在 $\triangle PBD$ 中，$DB>PB-PD$.

$$\therefore\ AB-AC>PB-PC.$$

设 $AB<AC$ 时，同理有

$$AC-AB>PC-PB.$$

所以一般地

$$AB\sim AC>PB\sim PC.$$

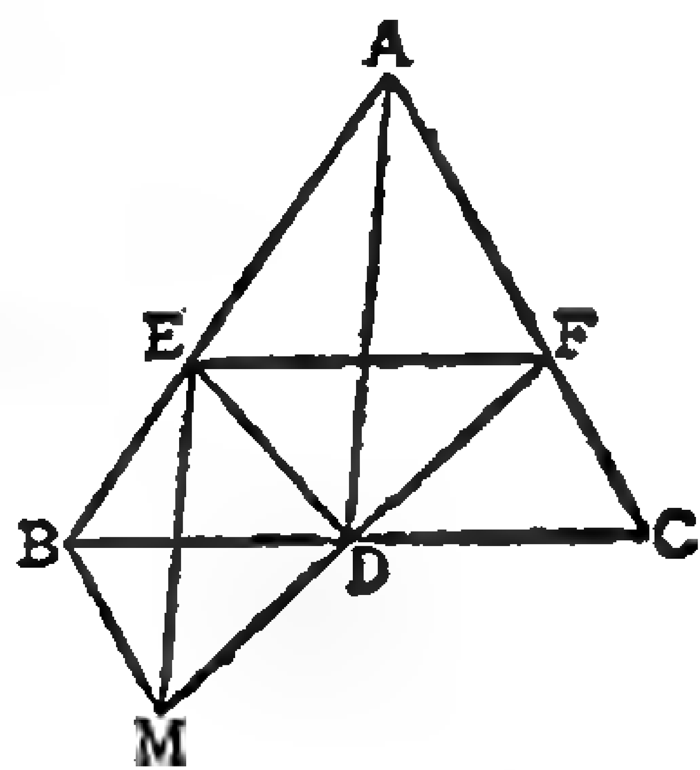
83. 设 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点为 D，$\angle ADB$、$\angle ADC$ 的平分线分别与 AB、AC 相交于 E、F，则 $EF<BE+CF$.

解　延长 FD 至 M，使 $DM=FD$，根据两边及其夹角对应相等，有

$$\triangle BDM\cong\triangle CDF,$$

因此　$BM=CF$.

又



$$\angle EDF=\angle R,$$

$$MD=DF,$$

所以 DE 是 MF 的垂直平分线．

$$\therefore\ EM=EF.$$

但是，在 $\triangle BME$ 中，

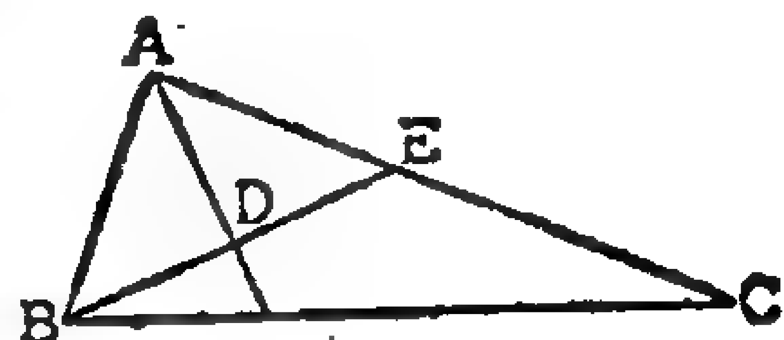
$$BE+BM>EM.$$

$$\therefore\ EF<BE+CF.$$

84. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=3\angle C$ 时，从 B 向 $\angle A$ 的平分线引垂线 BD，则

$$BD=\frac{1}{2}(AC-AB).$$

解　设 BD 的延长线与 AC 交于 E，则



$$AB=AE.$$

由问题 55，有 $\angle EBC=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

但是　$\angle B=3\angle C$.

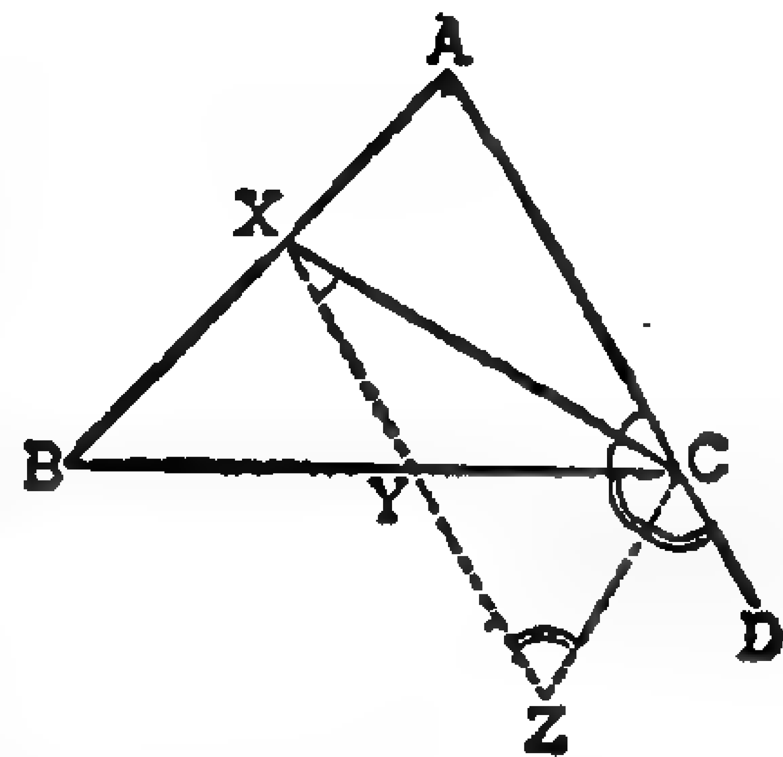
$$\therefore\ \angle EBC=\frac{1}{2}(3\angle C-\angle C)=\angle C.$$

$$\therefore\ EC=EB.$$

故　$BD=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}EC$

$$=\frac{1}{2}(AC-AB).$$

85. $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 的平分线与边 AB 相交于 X，过 X 作平行于 AC 的直线分别与边 BC 及 $\angle C$ 的外角平分线交于 Y、Z，则



$$XY=YZ.$$

解　设 $\angle C$ 的平分线为 CX．又因为 $XZ\parallel AC$，则有

$$\angle ACX=\angle BCX=\angle CXY.$$

所以 $\triangle YXC$ 为等腰三角形．从而

$$XY=CY.$$

其次，延长 AC 至 D，

$$\angle YCZ=\angle DCZ=\angle CZY.$$

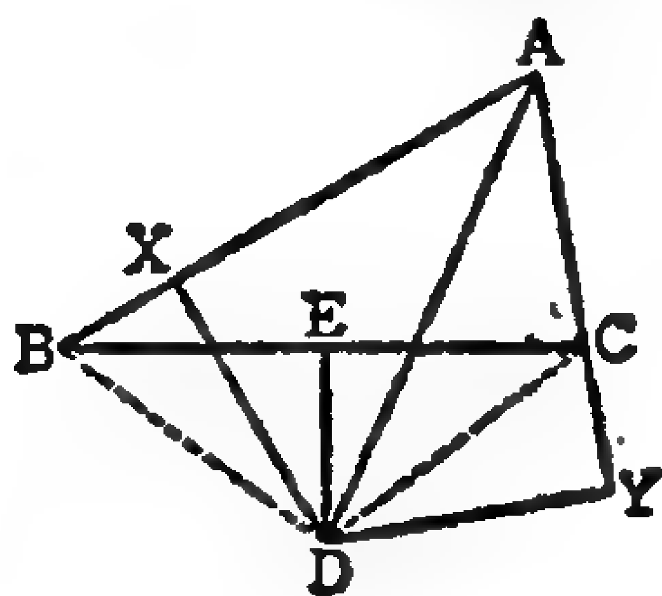
$\therefore\quad CY=YZ.$

因此　　　$XY=YZ.$

86. 设$\triangle ABC$的$\angle A$的平分线与边BC的垂直平分线交于点D，过D分别作AB、AC延长线的垂线DX、DY，则

$AX=AY$，

$BX=CY$。



解 设BC的中点为E，直角三角形ADX、ADY的公共斜边为AD。又

$$\angle DAX=\angle DAY,$$

$$\therefore\quad \triangle ADX\cong\triangle ADY.$$

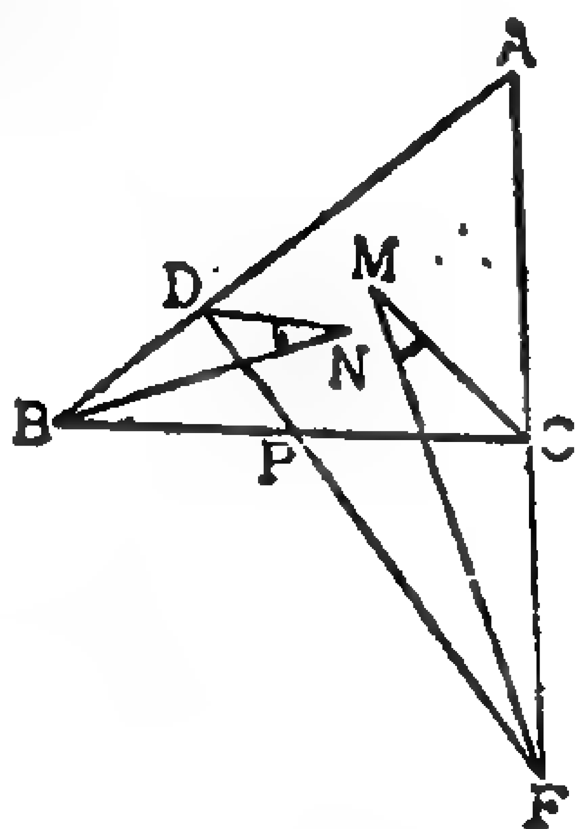
因此，　$AX=AY$，$DX=DY$。

又ED是BC的垂直平分线，有$DB=DC$，因此直角三角形DBX与DCY全等。

$$\therefore\quad BX=CY.$$

87. 在$\triangle ABC$的边AB上任取一点D，AC的延长线上任取一点F，连结DF。若$\angle ADF$的平分线与$\angle ABC$的平分线交于N，$\angle AFD$的平分线与$\angle ACB$的平分线交于M，则

$\angle BND=\angle CMF$。



解 N是$\triangle DPB$的旁心，有$\angle N=\frac{1}{2}\angle DPB$（问题77）。又$M$是$\triangle CPF$的旁心，有

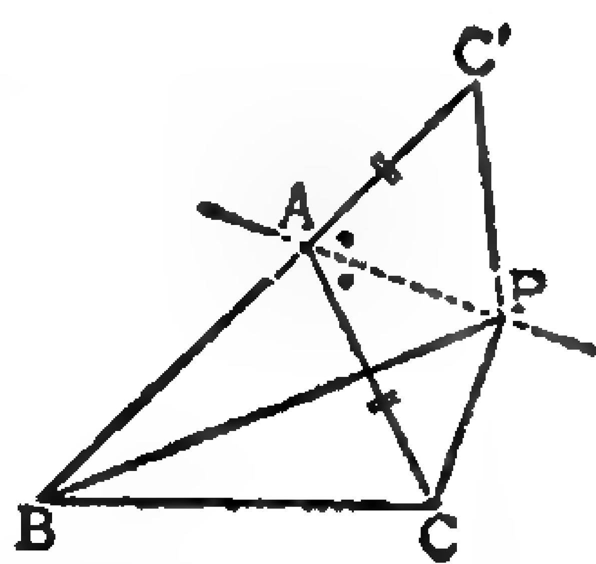
$$\angle M=\frac{1}{2}\angle CPF.$$

但是　　　$\angle DPB=\angle CPF$。

$$\therefore\quad \angle CMF=\angle BND.$$

88. 设P为$\triangle ABC$的$\angle A$的外角平分线上异于A的任一点，则

$BP+PC>AB+AC$。



解 延长BA截取$AC'=AC$，则

$$\triangle ACP\cong\triangle AC'P\ (\text{两边夹角}),$$

$$\therefore\quad CP=C'P,$$

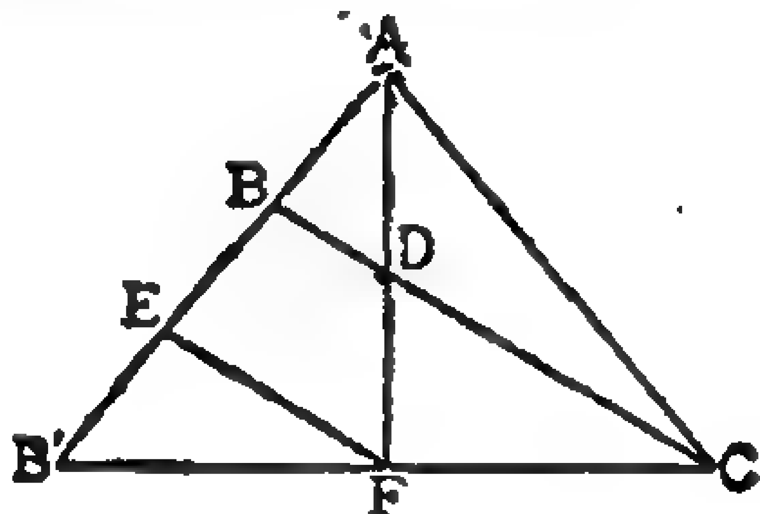
$$\therefore\quad BP+PC=BP+PC'>BC'$$

$$=AB+AC.$$

即　　　$BP+PC>AB+AC$。

89. 若$\triangle ABC$的边$AB=\frac{1}{3}AC$，从C向$\angle A$的平分线AD作垂线CF，则

$AD=DF$。



解 设CF的延长线与AB的延长线交于B'，则有$CF=FB'$。设过F作BC的平行线与AB'交于E，则由$B'F=FC$，有$BE=EB'$，因而由假设$AB=\frac{1}{3}AC$，有

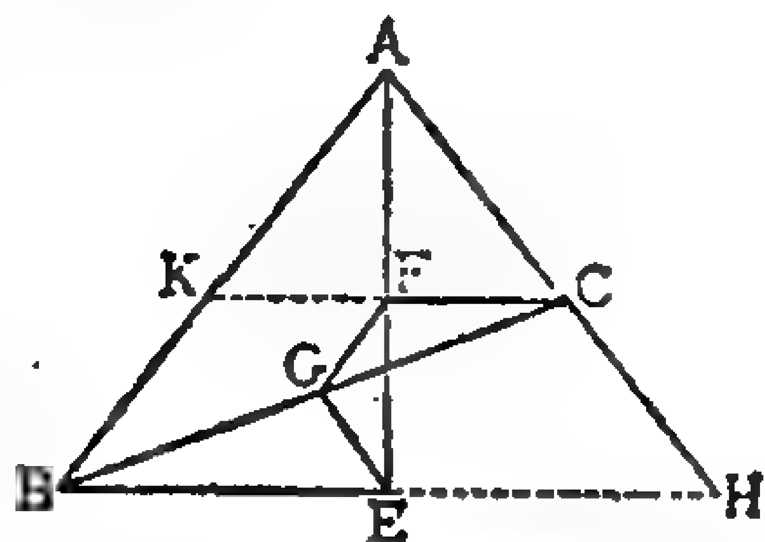
$$AB=\frac{1}{3}AB',$$

$$\therefore\quad AB=BE=EB'.$$

又$BD\parallel EF$，

$\therefore\quad AD=DF$。

90. 从$\triangle ABC$的顶点B、C分别向$\angle A$的平分线作垂线BE、CF，设BC的中点为G，则$\triangle GEF$为等腰三角形。



解 设延长BE与AC延长线交于H，延长CF与AB交于K，则有

$$AE\perp BH,\ AF\perp CK.$$

因而，E、F分别为BH、CK的中点。

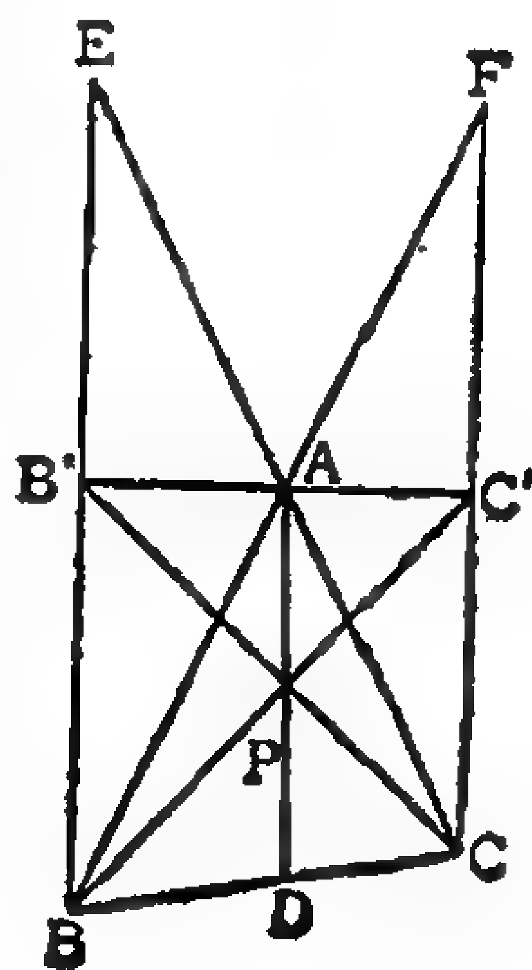
$$\therefore\quad GE=\frac{1}{2}CH,\ GF=\frac{1}{2}KB.$$

但是　　$AB=AH$，$AK=AC$。

$$\therefore\quad BK=CH,\ GE=GF,$$

即$\triangle GEF$为等腰三角形。

91. 设从$\triangle ABC$的顶点B、C分别向$\angle A$的外角平分线所作的垂线为BB'、CC'，$\angle A$的平分线为AD，则三线BC'、CB'、AD共点。



解 设BB'与CA的延长线交于E，由AB'为$\angle EAB$的平分线且

$AB'\perp EB$，

得

$$B' \text{为} BE \text{的中点}. \qquad ①$$

又 AD 是 $\angle A$ 的平分线，AB' 是 $\angle A$ 的外角平分线，有 $\angle B'AD=\angle R$. 又 $BB'\perp AB'$.

$$\therefore \quad BE \parallel AD.$$

设 $B'C$ 与 AD 交于点 P，由 ① 知 P 为 AD 的中点，即 CB' 过 AD 的中点 P. 同理，BC' 也过 AD 的中点 P. 所以 AD, BC', CB' 共点.

92. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线交于点 O，从 A 向 BO、CO 引垂线，其垂足分别为 D、E，则 $DE\parallel BC$.

解 设 BD、CE 分别为 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线，$AD\perp BD$, $AE\perp CE$. 延长 AD、AE 与 BC 分别交于 X、Y，则 $AD=DX$, $AE=EY$.

$$\therefore \quad DE\parallel XY.$$

即 $$DE\parallel BC.$$

93. 在 $\triangle ABC$ 中，若从点 A 向 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线作垂线，其垂足分别为 P、Q，则

$$PQ=\frac{1}{2}(AB+AC-BC).$$

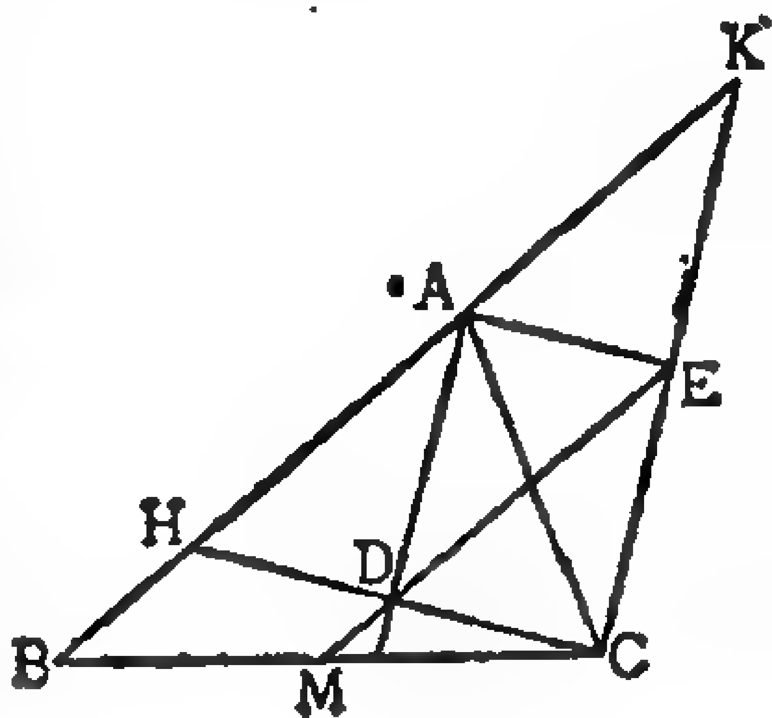
解 设延长 AP、AQ 与 BC 分别交于 D、E，则有 $AP=PD$, $AQ=QE$.

$$\therefore \quad PQ=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}(BD+CE-BC).$$

但是 AD、AE 分别为 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线的垂线，有 $BD=AB$, $CE=AC$.

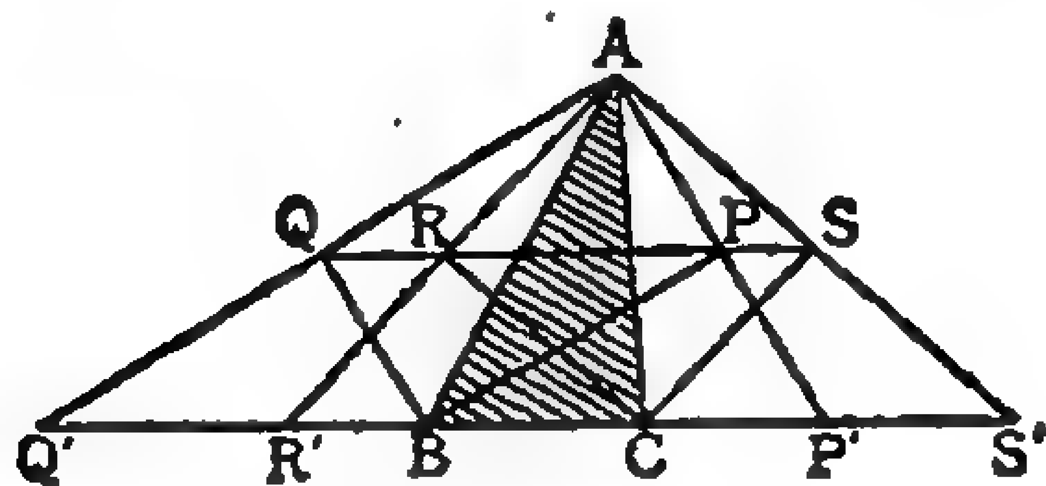
$$\therefore \quad PQ=\frac{1}{2}(AB+AC-BC).$$

94. 在 $\triangle ABC$ 中，由顶点 C 向 $\angle A$、外角 CAK 的平分线分别作垂线 CD、CE，设其垂足分别为 D、E，M 为边 BC 的中点，则三点 M, D, E 共线.



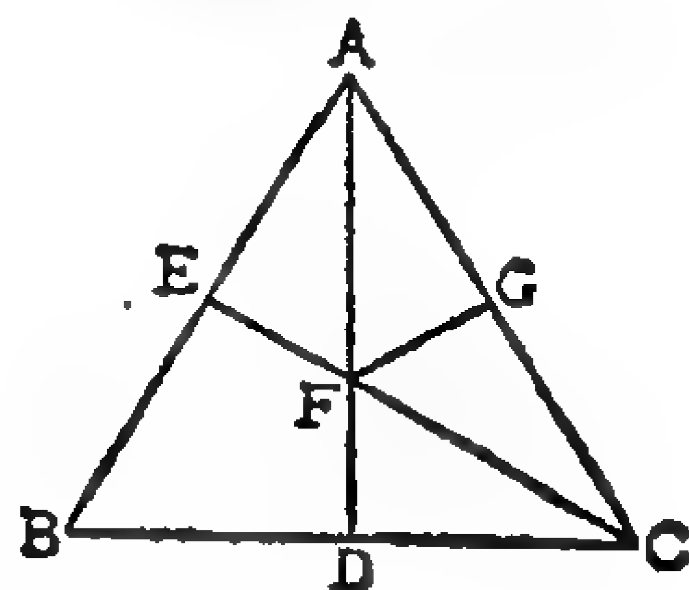
解 设延长 CD、CE 与 AB 的交点分别为 H、K，则 CH 的中点为 D，CK 的中点为 E. 所以，CB、CH、CK 的中点 M、D、E 在平行于 KB 的直线上.

95. 在 $\triangle ABC$ 中，由顶点 A 向 $\angle B$、$\angle C$ 以及外角 ABQ'、ACS' 的平分线分别作四条垂线，则其垂足 P、Q、R、S 共线.



解 设由 A 向外角 ACS' 的平分线作垂线为 AS，延长 AS 与 BC 的延长线交于 S'，则有 $AS=SS'$. 同理，对其余三条垂线 AP、AQ、AR 与 BC 的延长线分别交于 P'、Q'、R'，则 P、Q、R 分别为 AP'、AQ'、AR' 的中点. 因为 S'、P'、Q'、R' 在直线 BC 上，所以 P、Q、R、S 在平行于 BC 的直线上.

96. 设 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=60°$，$\angle A$、$\angle C$ 的平分线与 BC、AB 分别交于 D、E，则 $CD+AE=AC$.



解 由问题 **79**，$\angle B=60°$，则有

$$\angle AFC=120°.$$

$$\therefore \quad \angle CFD=60°.$$

作 $\angle AFC$ 的平分线 FG，则有

$$\triangle CFD\cong\triangle CFG,$$

因此 $CG=CD$. 同理 $AG=AE$.

$$\therefore \quad CD+AE=AC.$$

(6) 边的中点、中线、重心

97. 设 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点为 D，则

(1) $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$;

(2) $AD>\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

解 (1) 延长 AD，使 $AD=DE$，则 $ABEC$ 为平行四边形，$AC=BE$. 因此

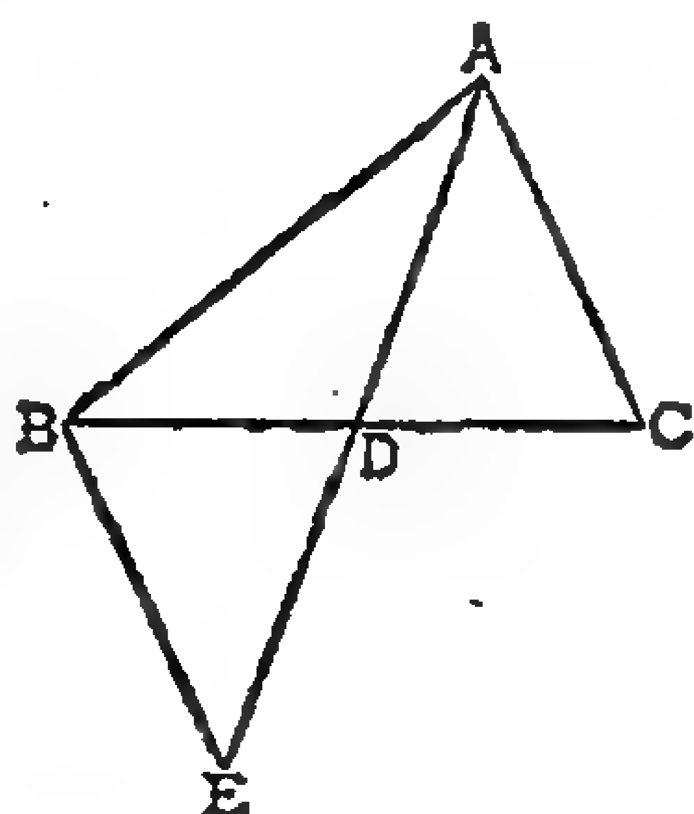
$$AB+AC=AB+BE.$$

但是 $$AB+BE>AE,$$

即 $AB+BE>2AD$.

$\therefore$ $AB+AC>2AD$.

即 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$.



(2) 根据三角形两边之差小于第三边，有

$$AD>AB-BD,$$
$$AD>AC-CD.$$
$$\therefore\ 2AD>AB+AC-(BD+DC).$$

但 $BD+DC=BC$.

$$\therefore\ 2AD>AB+AC-BC.$$

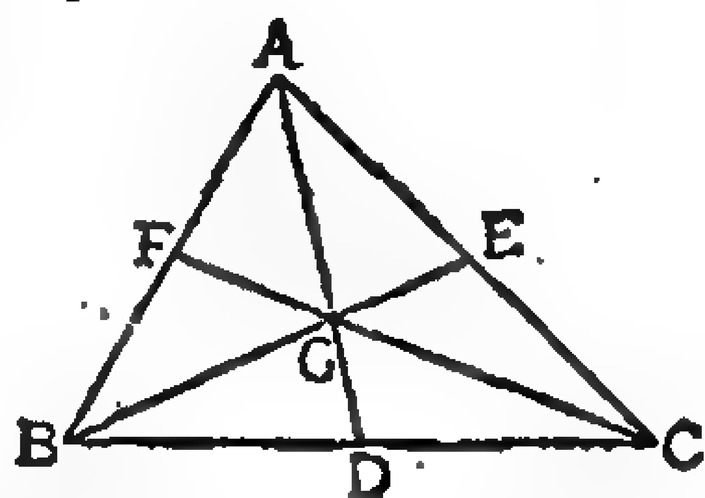
即 $AD>\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

98. 设$\triangle ABC$的三条中线分别为AD、BE、CF，则

$$\frac{1}{2}(AB+BC+CA)<AD+BE+CF<AB+BC+CA.$$

解 根据问题97(1)，有

$$AB+AC>2AD,$$
$$AB+BC>2BE,$$
$$AC+BC>2CF.$$



这三个不等式的两边分别相加且除以2，得

$$AB+BC+CA>AD+BE+CF. \quad ①$$

其次，根据问题97(2)，有

$$AB+AC-BC<2AD,$$
$$AB+BC-CA<2BE,$$
$$AC+BC-AB<2CF.$$

这三个不等式的两边分别相加，得

$$AB+BC+CA<2(AD+BE+CF),$$
$$\therefore\ \frac{1}{2}(AB+BC+CA)<AD+BE+CF. \quad ②$$

综合①、②，有

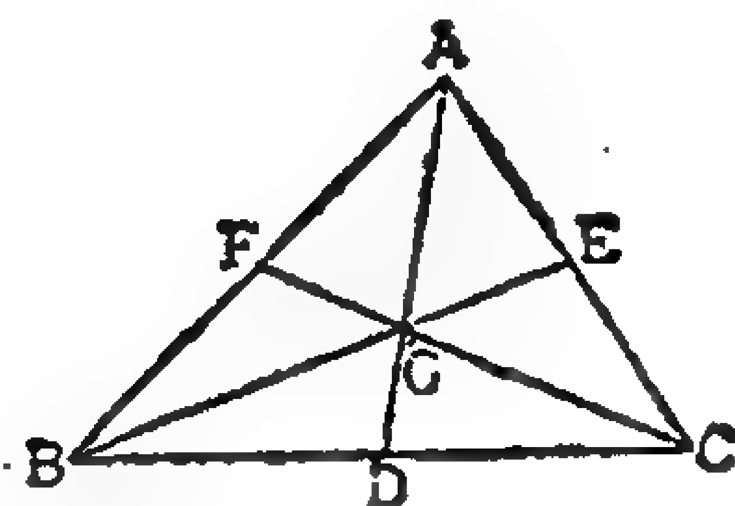
$$\frac{1}{2}(AB+BC+CA)<AD+BE+CF<AB+BC+CA.$$

99. 设$\triangle ABC$的三条中线AD、BE、CF的交点为G，则

$$AD+BE+CF<AB+BC+CA<2(AG+BG+CG).$$

解 根据问题97有

$$AD<\frac{1}{2}(AB+AC), \quad ①$$
$$BE<\frac{1}{2}(AB+BC), \quad ②$$
$$CF<\frac{1}{2}(AC+BC). \quad ③$$



①+②+③，得

$$AD+BE+CF<AB+BC+CA.$$

其次，在$\triangle BGC$中，

$$BC<BG+CG. \quad ④$$

同理可得

$$CA<CG+AG, \quad ⑤$$
$$AB<AG+BG. \quad ⑥$$

④+⑤+⑥，得

$$AB+BC+CA<2(AG+BG+CG).$$

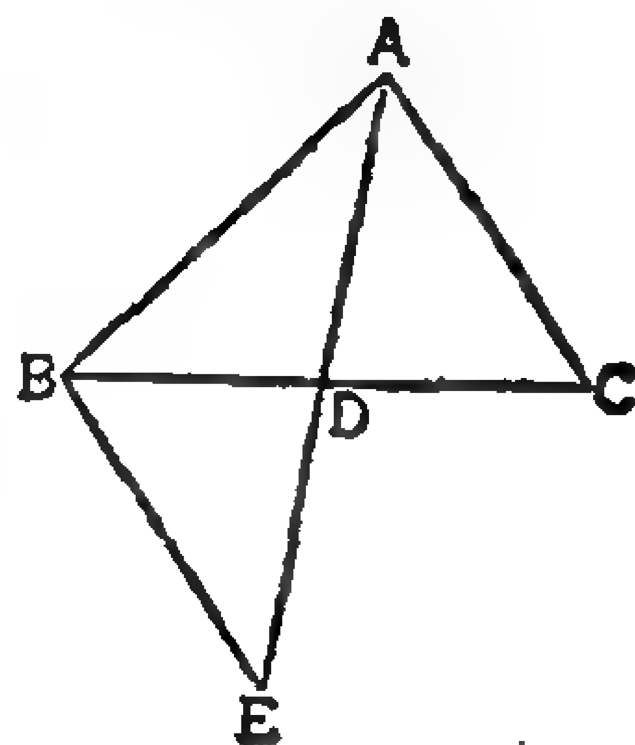
因此 $AD+BE+CF<AB+BC+CA<2(AG+BG+CG)$.

100. 若在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，AD为中线，则

$$\angle BAD<\angle CAD.$$

解 在右图中，设 $BE \mathbin{\underline{\parallel}} AC$，则$AE$经过点$D$. 由此可得

$$\angle CAD=\angle E. \quad ①$$



但$BE<AB$. 有

$$\angle BAD<\angle E. \quad ②$$

由①、②，有

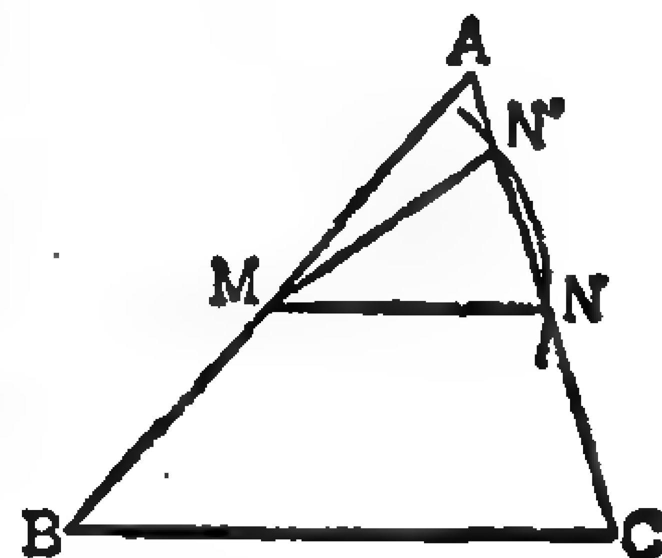
$$\angle BAD<\angle CAD.$$

101. 下列论述正确吗？

$\triangle ABC$的边AB的中点为M，过M作直线与边AC交于点N，且使

$$MN=\frac{1}{2}BC,$$

则 $MN\parallel BC$.



解 在$\triangle ABC$中，边AB的中点为M，AC的中点为N，则有

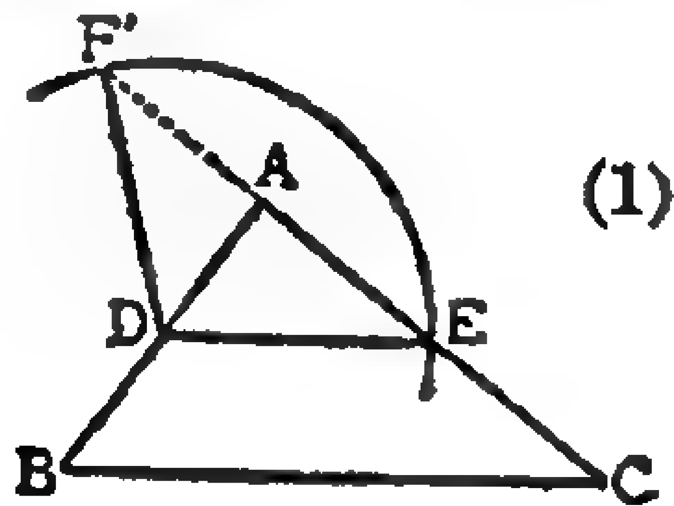
$$MN=\frac{1}{2}BC,$$

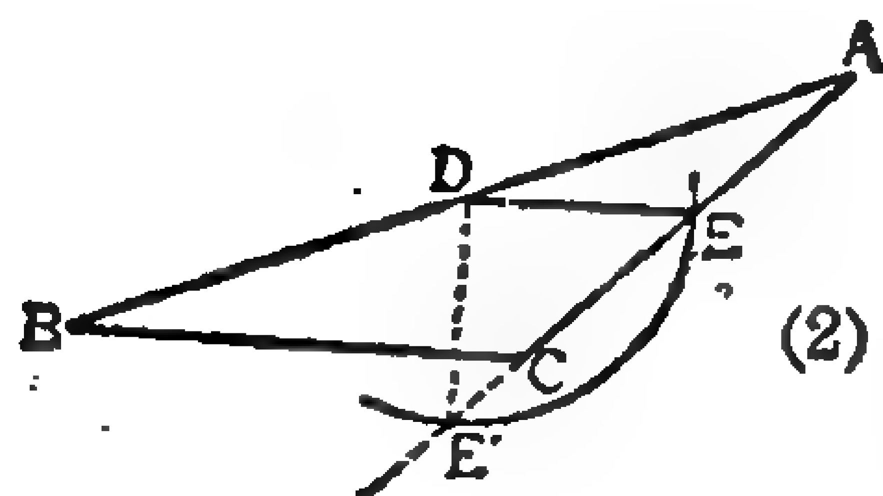
$$MN \parallel BC.$$

但是，以点 M 为圆心，$\frac{1}{2}BC$ 为半径画圆，一般地与边 AC 相交于两点．如只相交于一点就不能不附加上特殊的条件(参考问题 **102**)．这样，当这个交点是 AC 的中点时，就有 $MN \parallel BC$，不是 AC 的中点时(上图中的 N')，MN 就不能平行于 BC．

102. 在 $\triangle ABC$ 中，设边 AB 的中点为 D，以 D 为圆心，$\frac{1}{2}BC$ 为半径画圆与边 AC 相交于两点或一点，试证明之．并求出只相交于一点的条件．

解 与问题 **101** 一样，以 D 为圆心，$\frac{1}{2}BC$ 为半径画圆，一般地与边 AC 相交于两点．其中一点必为 AC 的中点．而与 AC 只相交于唯一点的情况是，以 D 为圆心、$\frac{1}{2}BC$ 为半径的圆在点 E 处与 AC 相切，或者另一个交点在 AC 的延长线上．因而 E 是这个圆的切点时的条件是 $\angle C=\angle R$，第二个交点在边 AC 的延长线上的条件





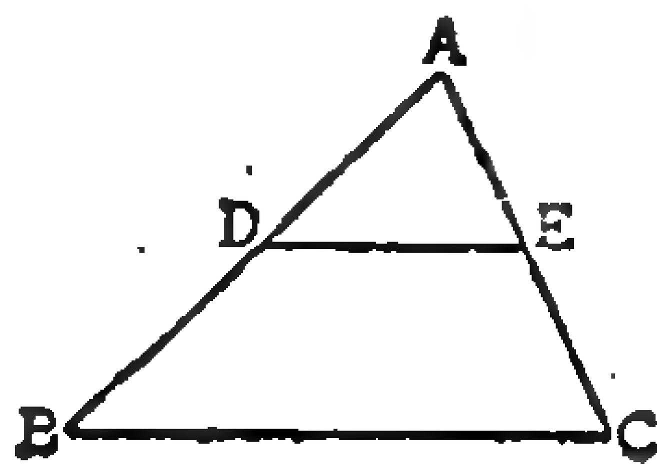
$$AD<DE<DC,\ (\text{图 }1).$$

或 $$AD>DE>DC.\ (\text{图 }2),$$

即 $$AD<\frac{1}{2}BC<DC,$$

或 $$AD>\frac{1}{2}BC>DC.$$

103. 在 $\triangle ABC$ 中，设 D 为 AB 的中点，则连结 D 与 AC 中点 E 的线段长等于 $\frac{1}{2}BC$．叙述它的逆命题，并求出逆命题成立的条件．



解 定理的逆命题是：

在 $\triangle ABC$ 中，设 AB 的中点为 D，连结 D 与 AC 上的点 E，使线段 $DE=\frac{1}{2}BC$ 时，则 E 为边 AC 的中点．

逆命题成立的条件是(问题 **102**)：

$$\angle C=\angle R,$$

$$AD<\frac{1}{2}BC<CD$$

或 $$AD>\frac{1}{2}BC>CD.$$

104. 证明：三角形的三条中线交于一点，且这一点到顶点的距离等于中线长的 $\frac{2}{3}$．

解 设 $\triangle ABC$ 的两条中线 BD、CE 相交于点 G，延长 AG 与边 BC 相交于点 M．下面证明点 M 为 BC 的中点．

过 B 作 GE 的平行线与 AM 的延长线相交于点 F，因为 E 为 AB 的中点，所以 G 为 AF 的中点．

又 $AD=DC$，$AG=GF$ 有 $GD \parallel FC$．因为 $BF \parallel GC$，$BG \parallel FC$，所以 $BFCG$ 为平行四边形．因此它的对角线 GF、BC 的交点 M 是 BC 的中点．故三条中线 AM、BD、CE 相交于一点 G．

其次，由 $AG=GF$，$GM=MF$ 有

$$AG=2GM.$$

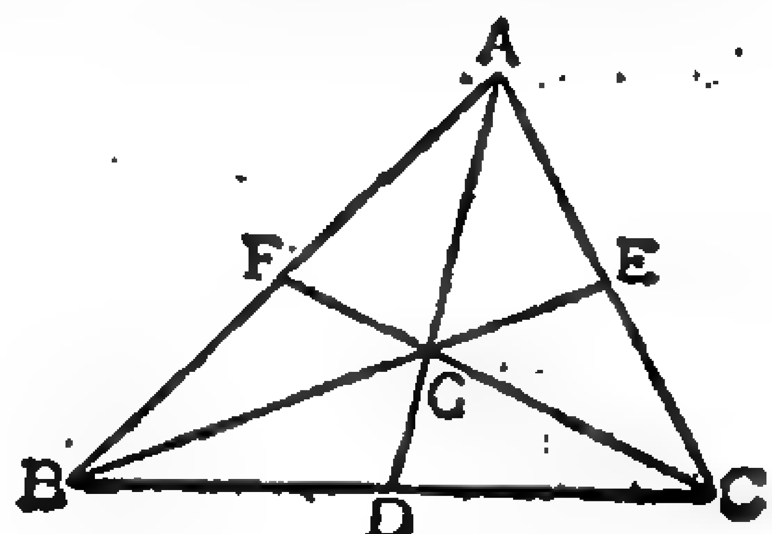
即 $$AG=\frac{2}{3}AM.$$

同理 $$BG=\frac{2}{3}BD,\ CG=\frac{2}{3}CE.$$

注 G 叫做三角形的重心．

105. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB>AC$，则中线 BE 大于中线 CF．

解 作第三条中线 AD，设 $\triangle ABC$ 的重心为 G，在 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 中，AD 公用，



$$BD=DC,\ AB>AC.$$

$$\therefore\ \angle ADB>\angle ADC.$$

其次，在$\triangle GBD$、$\triangle GCD$中，GD公用，

$$\angle GDB>\angle GDC,$$

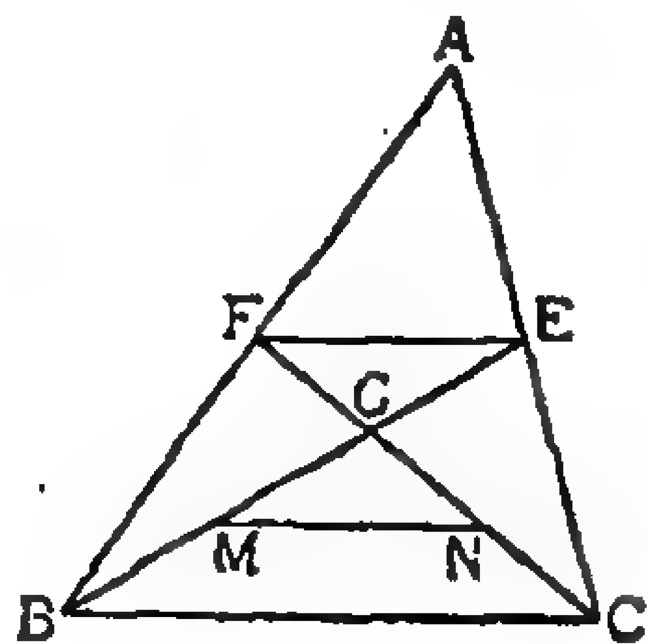
$$\therefore\ BG>CG.$$

但是G为$\triangle ABC$的重心，有

$$BG=\frac{2}{3}BE,\ CG=\frac{2}{3}CF,$$

$$\therefore\ BE>CF.$$

106. 在$\triangle ABC$的边AB、AC上，分别取点F、E，BE、CF交于点G，若$2GE=GB$，$2GF=GC$，则G为$\triangle ABC$的重心。



解 设M、N分别为GB、GC的中点，有 $MN=\frac{1}{2}BC$，

且 $MN \parallel BC$.

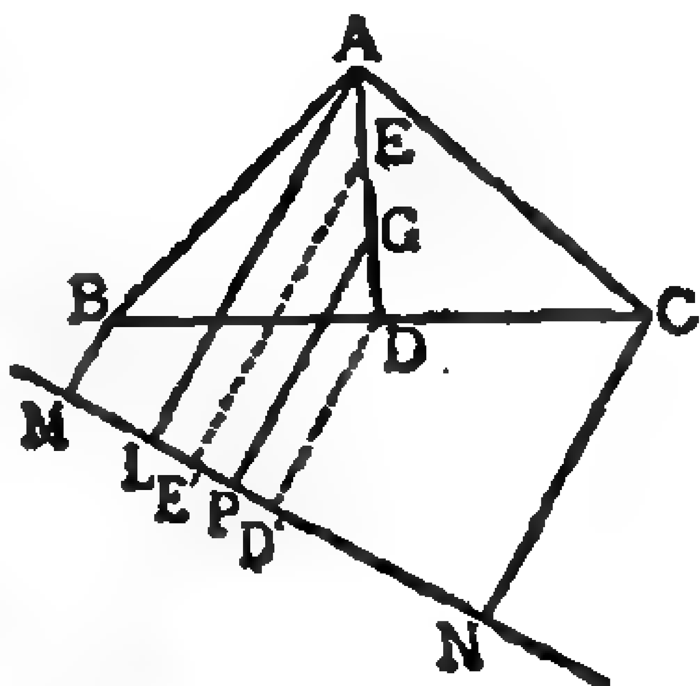
但是根据假设$GB=2GE$，$GC=2GF$有

$$GM=GE,\ GN=GF.$$

$$\therefore\ EF \underline{\parallel} MN.$$

因此，EF平行于BC且等于BC的一半。所以E、F分别为AC、AB的中点。因而BE、CF是$\triangle ABC$的中线，其交点G为$\triangle ABC$的重心。

107. 从$\triangle ABC$的每个顶点向三角形外的一条直线作垂线AL、BM、CN，则三条垂线长之和等于三角形重心G向这条直线所作垂线GP长的三倍。



解 设BC的中点为D及AG的中点为E，由D、E向MN作垂线DD'、EE'，则有

$$AL+GP=2EE', \quad ①$$

$$BM+CN=2DD', \quad ②$$

$$2EE'+2DD'=4GP. \quad ③$$

①+②+③，得

$$AL+BM+CN=3GP.$$

108. 过$\triangle ABC$的重心G引直线XY，使A与B、C在XY的异侧，从顶点A、B、C向这条直线作垂线，设垂足分别为A'、B'、C'，则$AA'=BB'+CC'$.

解 设延长AG与BC交于点M，则M为BC的中点。从M向XY作垂线MM'，

则有 $BB' \parallel MM' \parallel CC'$，

且

$$BB'+CC'=2MM'. \quad ①$$

设AG的中点为E，从E向XY作垂线EE'，则有$2EE'=AA'$。因为$GE=GM$，所以

$$MM'=EE',$$

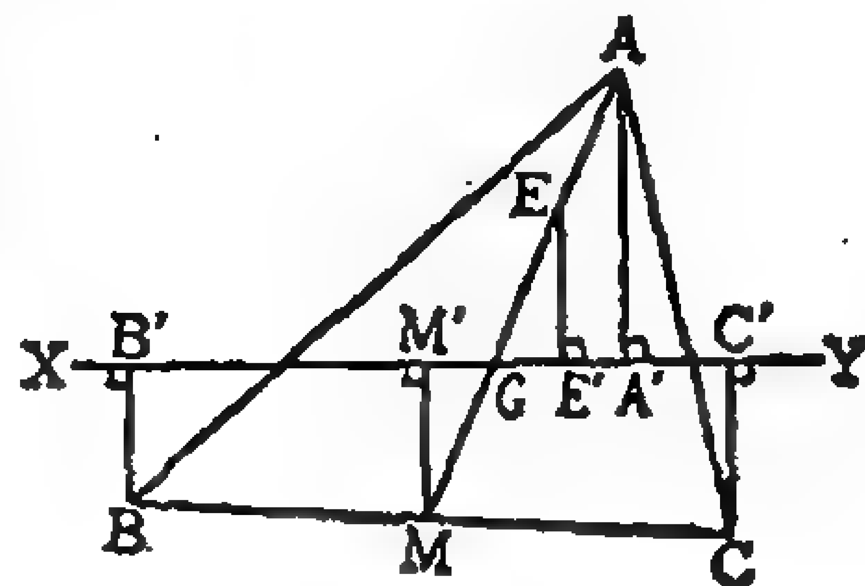
从而

$$2MM'=AA'. \quad ②$$

由①、②，得

$$BB'+CC'=AA'.$$

109. 在直线XY的同侧有两点B、C，另一侧有一点A，若点B、C至XY的距离之和等于点A至XY的距离，则直线XY过$\triangle ABC$的重心。



解 设$AA'=BB'+CC'$，$\triangle ABC$的中线AM与直线XY的交点为G，证明G为$\triangle ABC$的重心。

从M向XY作垂线MM'，则有

$$2MM'=BB'+CC',$$

$$\therefore\ AA'=2MM'. \quad ①$$

从AG的中点E向XY作垂线EE'，

$$AA'=2EE'. \quad ②$$

由①、②有$MM'=EE'$，

$$\therefore\ GM=GE=AE=\frac{1}{3}AM.$$

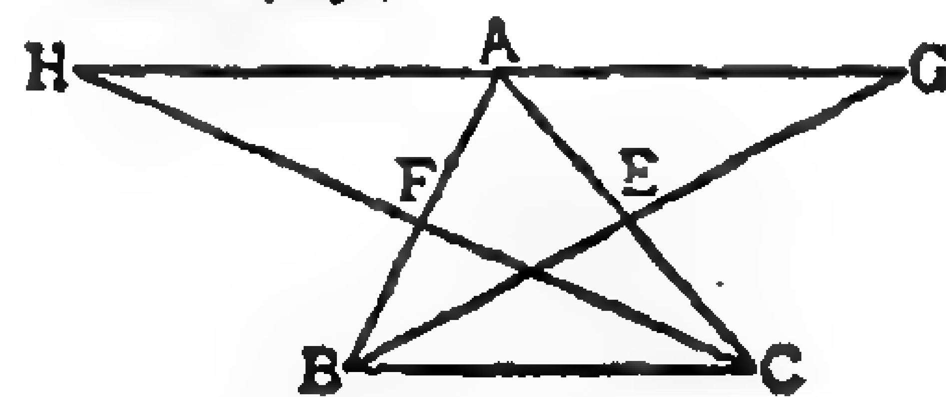
因为AM是$\triangle ABC$的中线，所以点G是$\triangle ABC$的重心。

110. 已知$\triangle ABC$的中线BE、CF，若延长BE至G，CF至H，使

$$BE=EG,$$

$$CF=FH,$$

则G、A、H三点共线。



解 在$\triangle AEG$和$\triangle CEB$中，$AE=EC$，

$EG=EB$, $\angle AEG=\angle CEB$.

$\therefore\ \triangle AEG\cong\triangle CEB$,

$\therefore\ \angle EAG=\angle ACB$.

同理，$\triangle AFH\cong\triangle BFC$,

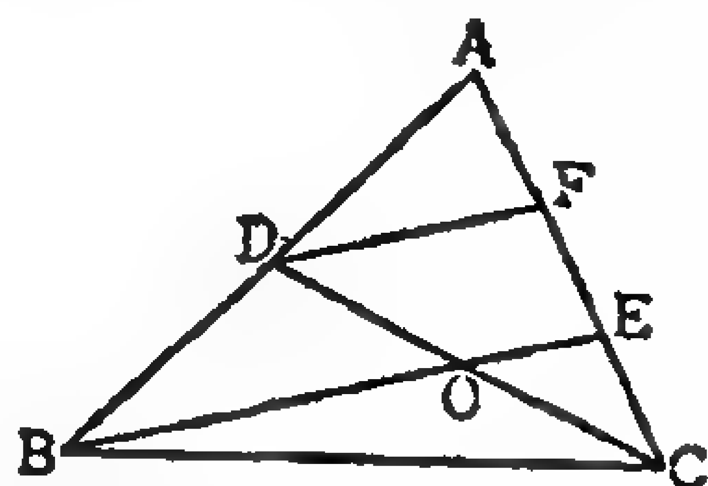
$\therefore\ \angle FAH=\angle AFC$.

$$\therefore\ \angle EAG+\angle FAH+\angle BAC$$
$$=\angle ACB+\angle ABC+\angle BAC$$
$$=2\angle R.$$

因此，AG 与 AH 是同一条直线. 所以三点 G, A, H 共线.

111. 若$\triangle ABC$的边AB的中点为D，在边AC上截取AE等于$\frac{2}{3}AC$，CD与BE交于点O，则

$BE=4OE$.



解 设AE的中点为F，$AF=FE=EC$，且$AD=DB$.

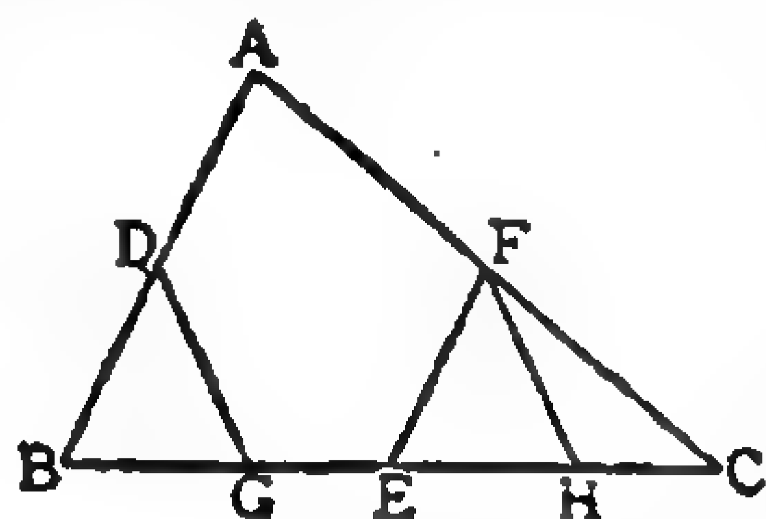
$\therefore\ DF\parallel BE$, $BE=2DF$.

又$DF\parallel OE$, $FE=EC$, $\therefore DF=2OE$.

$\therefore\ BE=2DF=4OE$.

112. 设$\triangle ABC$的三边AB、BC、CA的中点分别为D、E、F，从D、F以任意方向引平行线DG、FH分别与BC相交于G、H，则

$BG=EH$.



解 因为E、F分别为BC、AC的中点，

$$EF=\frac{1}{2}AB=BD,\ \angle B=\angle FEH,$$

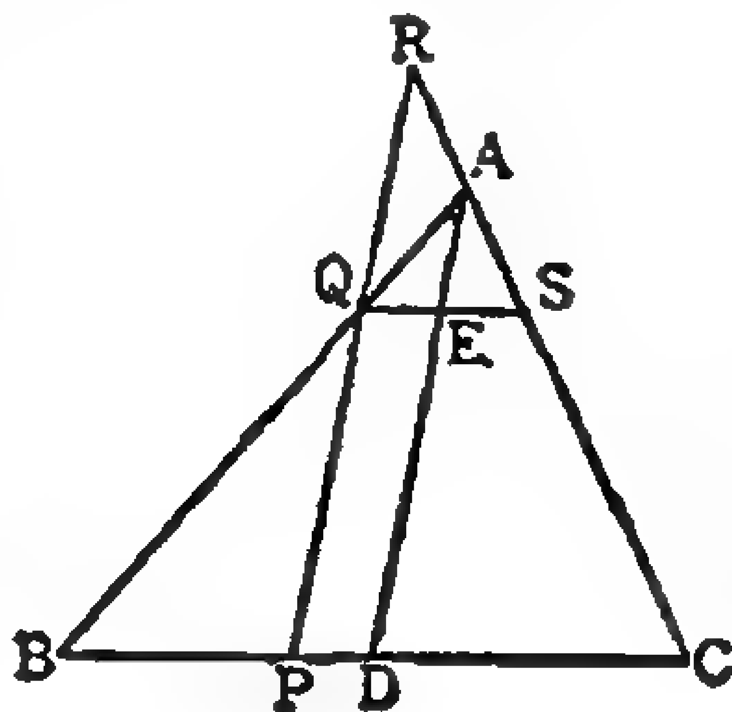
$$\angle BDG=\angle EFH$$

$(\because\ BD\parallel EF,\ DG\parallel FH)$.

$\therefore\ \triangle DBG\cong\triangle FEH$,

$\therefore\ BG=EH$.

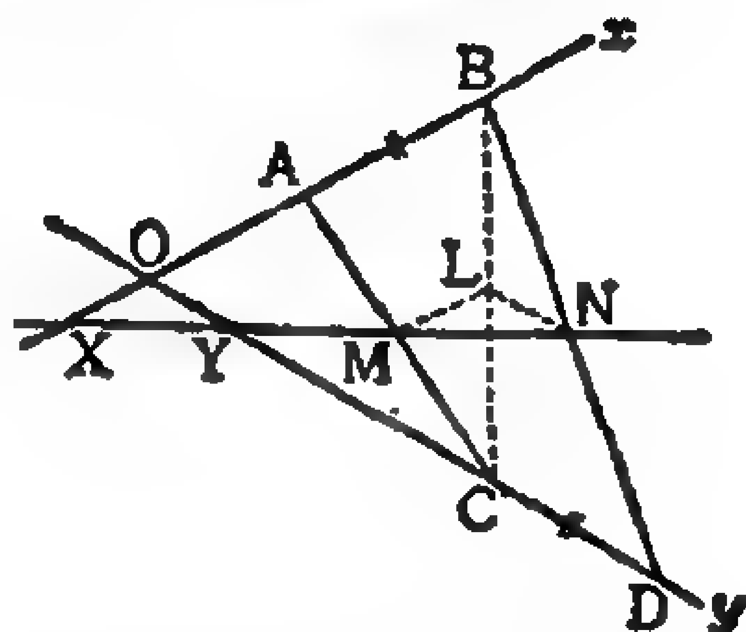
113. 作$\triangle ABC$的中线AD，过边BC上任一点P引平行于AD的直线，设此直线与AB、AC或其延长线的交点分别为Q、R，则不论点P的位置如何，$PQ+PR$为定值.



解 设过点Q引BC的平行线分别与AD、AC交于点E、S，因为D是BC的中点，所以E为QS的中点. 又因$AE\parallel RQ$所以$RQ=2AE$. 又$PQ=DE$,

$$\therefore\ PQ+PR=2PQ+QR$$
$$=2ED+2AE$$
$$=2AD（定值）.$$

114. 在相交于点O的两条直线上，分别取线段$AB=CD$. 设AC、BD的中点分别为M、N，证明MN是与AB、CD无关的定向直线.



解 设相交在点O的两定直线x、y，在x上取AB，y上取CD，MN与x、y的交点分别为X、Y，BC中点为L，则有

$$ML\parallel AB$$

且
$$ML=\frac{1}{2}AB,$$

$$LN\parallel CD$$

且
$$LN=\frac{1}{2}CD.$$

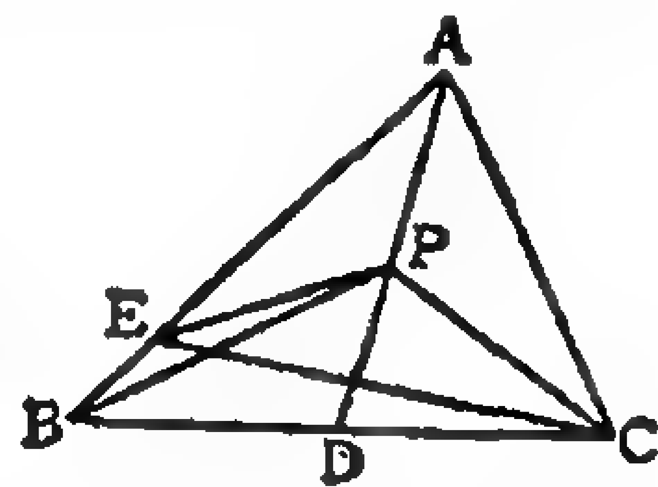
由$AB=CD$，知$ML=LN$.

$\therefore\ \angle LMN=\angle LNM$.

因此 $\angle OXY=\angle OYX$.

所以直线XY平行于x、y夹角的平分线，即MN是与AB、CD无关的定向直线.

115. 在$\triangle ABC$中，设$AB>AC$，P为中线AD上任意一点，则有$AB-AC>PB-PC$.



解 在AB上截取$AE=AC$，连结EC、EP，由于AD是中线，$\angle BAD<\angle CAD$,

$\therefore\ PE<PC$.

但是在$\triangle PBE$中，有

$$BE>PB-PE>PB-PC,$$

$\therefore\ AB-AC>PB-PC$.

116. 在$\triangle ABC$中，设BC的中点为M，延长中线AM使$MD=BC$，若$\angle AMC=60°$，则$BD\perp BC$.

解 设MD的中点为E，$ME=MB$,

$\angle BME=\angle AMC$
$=60°$,

因此 $\triangle BEM$ 是正三角形. 所以

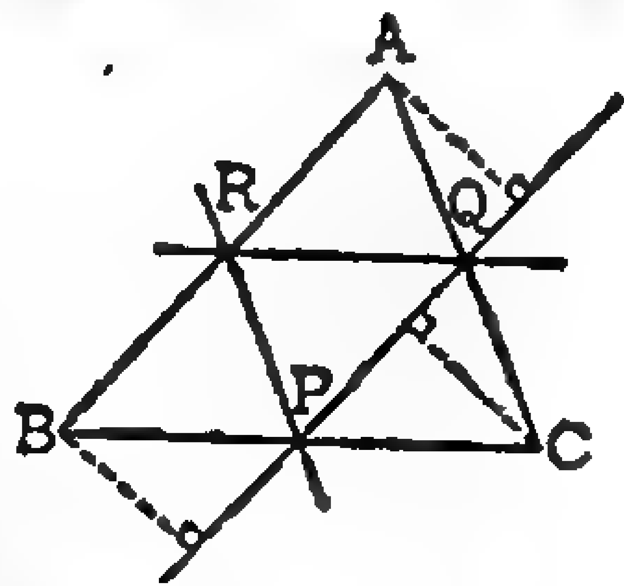
$$EM=EB=ED,$$

从而

$$\angle DBM=\angle R$$

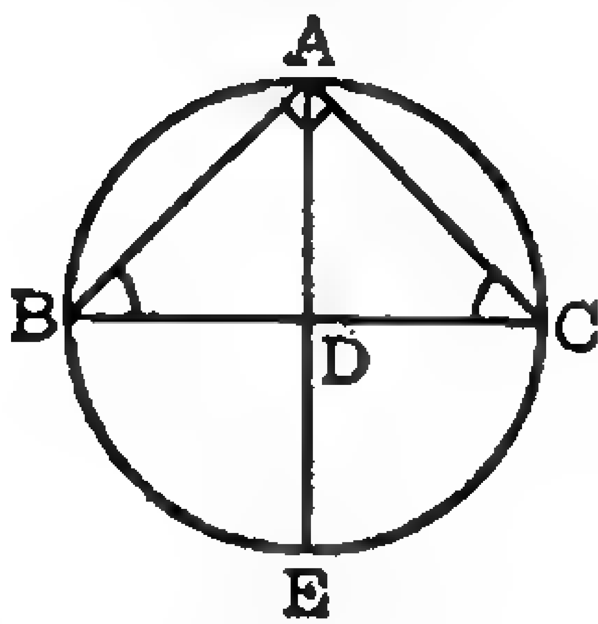
(参考问题 **120**).

即 $BD\perp BC$.



117. 在 $\triangle ABC$ 所在的平面上，到此三角形的三个顶点等距离的直线有几条？并表出其方向.

解 设边 BC、CA、AB 的中点分别为 P、Q、R, 则到点 B、C 成等距离的直线过点 P. 又到点 C 与点 A 成等距离的直线过点 Q, 从而过两点 P、Q 的直线是到点 A、B、C 成等距离的直线. 同理，过点 Q、R 及 R、P 的直线，也是到点 A、B、C 成等距离的直线. 因此到三点 A、B、C 成等距离的直线有三条.



118. 如果 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点为 D, 且

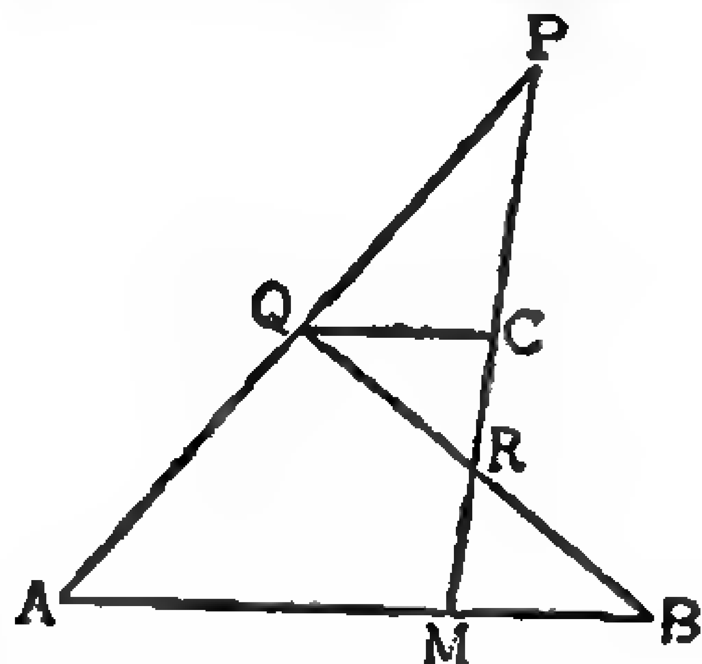
$$\angle ABD+\angle DAC=\angle R.$$

那么 $\triangle ABC$ 是什么样的三角形?

解 作 $\triangle ABC$ 的外接圆，过 A、D 引弦 AE, 由条件 $\angle ABD+\angle DAC=\angle R$, 知

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{EC}=\text{半圆周}.$$

所以 AE 是这个圆的直径. 因此 D 是此圆的圆心，且有 $AD\perp BC$. 所以 $\triangle ABC$ 是 $\angle A$ 为直角的三角形，或是 $AB=AC$ 的等腰三角形.



119. 设有两定点 A、B 及动点 P, AP 的中点为 Q, BQ 的中点为 R, 证明 PR 必过 AB 上的定点.

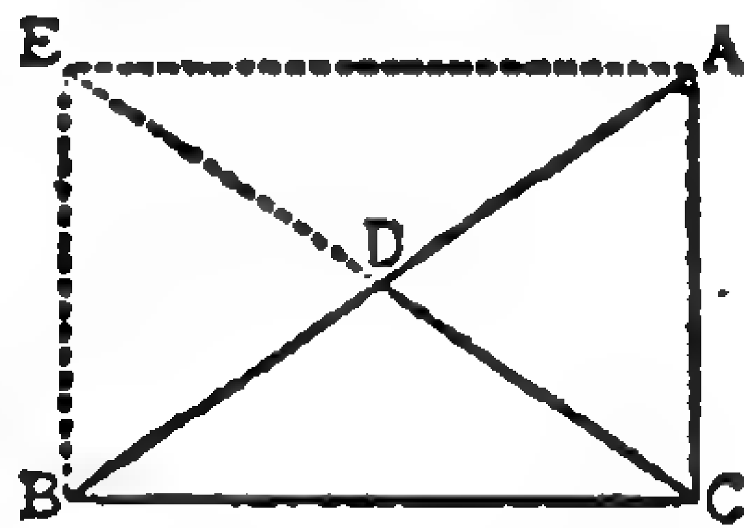
解 设 PR 与定线段 AB 的交点为 M, 引 $QC\parallel AB$ 与 PM 交于点 C, 因为 $AQ=QP$, 所以在 $\triangle PAM$ 中，

$$QC=\frac{1}{2}AM,$$

且 $\triangle RBM\cong\triangle RQC$, 从而

$$QC=MB.$$

故 M 是在 AB 上且使 $AM:MB=2:1$ 的分点. 定点与动点 P 的位置无关，即 PR 总通过 AB 上的定点 M.



(7) 直角三角形

120. 设直角三角形 ABC 的直角顶点为 C, 斜边 AB 的中点为 D, 则

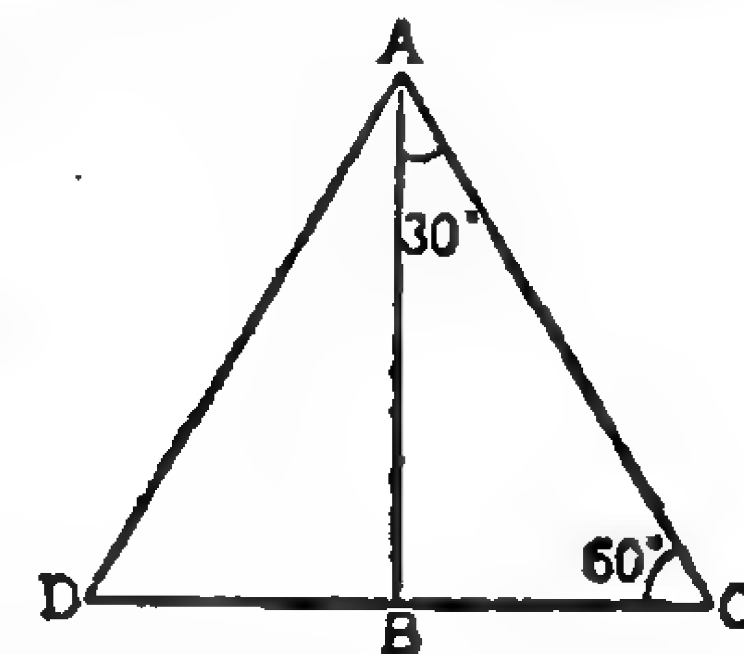
$$CD=\frac{1}{2}AB.$$

解 延长 CD, 使 $CD=DE$, 则有

$$DA=DB,\ DC=DE,\ \angle C=\angle R.$$

所以 $ACBE$ 是矩形.

$$\therefore\ CE=AB,\ \therefore\ CD=\frac{1}{2}AB.$$



121. 在直角三角形 ABC 中，若 $\angle C=60°$, $\angle A=30°$, 则斜边 AC 等于边 BC 的两倍.

解 延长 CB 使

$$BD=CB,$$

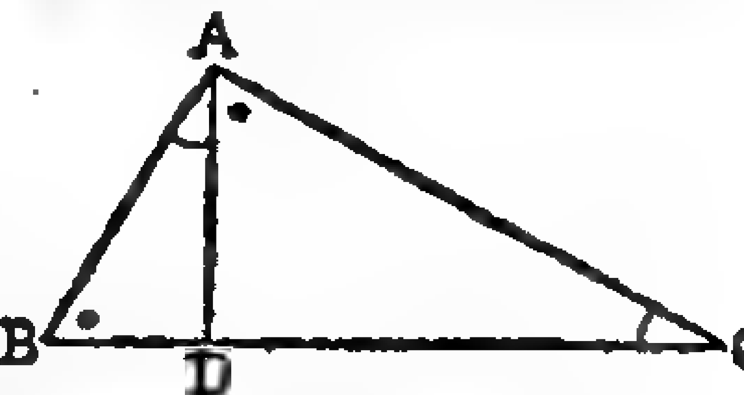
则有

$$\triangle ABD\cong\triangle ABC.$$

$$\therefore\ \angle D=\angle C=60°.$$

从而 $\triangle ADC$ 为正三角形，所以 $AC=AD$. 但 $DC=2BC$.

$$\therefore\ AC=2BC.$$



122. 若从直角三角形 ABC 的直角顶点 A 向斜边 BC 作垂线 AD, 则

$$\angle C=\angle BAD,\ \angle B=\angle CAD.$$

解 由 $\angle BAC=\angle R$, 知

$$\angle BAD+\angle CAD=\angle R. \quad ①$$

又由 $AD\perp BC$, 知

$$\angle BAD+\angle B=\angle R. \quad ②$$

所以由①、②可知

$$\angle B=\angle CAD.$$

同理，

$$\angle C=\angle BAD.$$

123. 设直角三角形 ABC 的直角 A 的平分线与过斜边 BC 中点 M 的垂线交于点 D，则

$$MA=MD.$$

解 由 A 引 BC 的垂线 AE，则有

$$\angle BAE=\angle C\ (\text{参考问题 } \mathbf{122}).$$

又因 $$MA=\frac{1}{2}BC=MC,$$

$$\therefore\ \angle MAC=\angle C.$$

而 $\angle BAE=\angle MAC$，又 $\angle BAD=\angle CAD$，

$$\therefore\ \angle DAE=\angle DAM.$$

又由 $AE\parallel DM$，知 $\angle DAE=\angle ADM$，

$$\therefore\ \angle DAM=\angle ADM.$$

从而 $$MA=MD.$$

124. 由直角三角形 ABC 的直角顶点 A 向斜边 BC 作垂线 AD，则有

$$AD+BC>AB+AC.$$

解 在 BC 上取 $CE=AC$，过 E 向 AC、AB 作垂线，设垂足分别为 F、G，则有

$$\triangle ADC\cong\triangle EFC,$$

$$\therefore\ AD=EF=AG. \qquad ①$$

又

$$EC=AC, \qquad ②$$

由 $\angle BGE=\angle R$，有

$$BE>BG. \qquad ③$$

①+②+③，得

$$AD+EC+BE>AG+BG+AC,$$

$$\therefore\ AD+BC>AB+AC.$$

125. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 的延长线上取 $BD=AB$，连结 DC，若 E 为 BC 的三等分点中靠近点 B 的一个分点，且

$$AE=\frac{1}{3}CD,$$

证明 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

解 在 $\triangle ADC$ 中，B 为 AD 中点，由 $CE=2BE$，知点 E 为 $\triangle ADC$ 的重心。所以延长 AE 与 DC 交于 M，则 M 为 DC 的中点，且由 E 是 $\triangle ADC$ 的重心，有

$$AE=\frac{2}{3}AM. \qquad ①$$

但根据假设

$$AE=\frac{1}{3}DC. \qquad ②$$

所以由①、②，有

$$AM=\frac{1}{2}DC,$$

因此 $$MD=MA=MC.$$

所以 $$\angle DAC=\angle R,$$

即 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

126. 由直角三角形 ABC 的直角顶点 A 向边 BC 作垂线 AH，在 $\triangle ABH$、$\triangle ACH$ 内分别作内接正方形，其中正方形的两边在 AH、BC 上，则两个正方形的边长之和等于高 AH.

解 在图中，$EFHK$，$PHQS$ 为内接正方形，有

$$\angle EHK=45^\circ=\angle PHS,$$

$$\therefore\ \angle EHS=90^\circ. \qquad ①$$

又

$$\angle EAS=90^\circ. \qquad ②$$

所以，点 A、E、H、S 在同一圆周上。因

$$\angle EHA=\angle AHS,$$

所以它们所对的弧 AE 与弧 AS 相等，它们所张的弦 AE 与 AS 也相等。所以，在 $\triangle AEK$ 与 $\triangle SAP$ 中，

$$AE=SA,$$

$$\angle AEK=\angle B=\angle SAP,$$

$$\angle AKE=\angle R=\angle SPA.$$

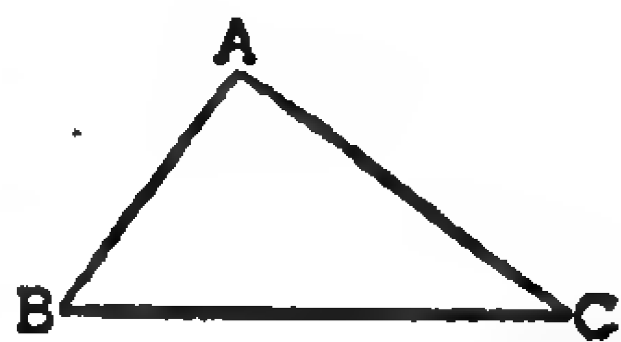
$$\therefore\ \triangle AEK\cong\triangle SAP,$$

$$\therefore\ EK=AP.$$

又 $PS=PH$，

$$\therefore\ EK+PS=AP+PH=AH.$$

127. 在右图的直角三角形 ABC 中，设 $\angle A$ 为直角。由 A 向底边 BC 作垂线 AD，$\angle B$ 的平分线交 AC 于 E，过 E 作 BC 的垂线



EF，设 AD 与 BE 相交于点 G，证明：

(1) 四边形 $AEFG$ 为菱形；

(2) $\triangle ABG$ 和 $\triangle BDE$ 的面积相等。

解 (1) $\triangle ABE \cong \triangle FBE$，

$\therefore\ AE=FE$。

又

$\triangle ABG \cong \triangle FBG$，

$\therefore\ AG=FG$。

$\angle AGE=\angle BAG+\angle ABG$

$=\angle ACB+\angle EBC=\angle AEG$，

$\therefore\ AG=AE$，

故四边形 $AEFG$ 为菱形。

(2) 因为 $GD \parallel EF$，有

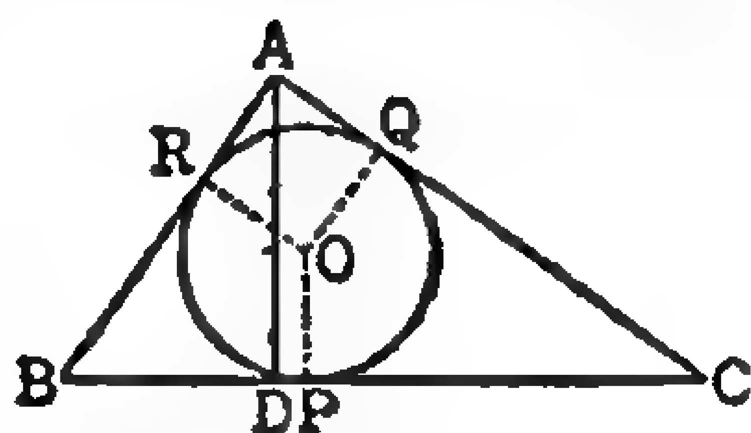
$$S_{\triangle EGD}=S_{\triangle FGD},$$

$$\therefore\ S_{\triangle BDE}=S_{\triangle FBG}.$$

而　　$\triangle ABG \cong \triangle FBG$，

所以　　$S_{\triangle ABG}=S_{\triangle BDE}$。

128. 从直角三角形 ABC 的直角顶点 A 作斜边的垂线 AD，证明三角形 ABC、ABD、ACD 的各内切圆直径之和等于 $2AD$。



解 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 O 在 BC、CA、AB 上的切点为 P、Q、R。

$$AQ=AR,\ BP=BR,\ CP=CQ.$$

$$\therefore\ AB+AC-BC=2AQ,$$

因为四边形 $AROQ$ 是正方形，有

$$AQ=OR.$$

因此，设 $\triangle ABC$ 的内切圆直径为 d_1，则

$$d_1=AB+AC-BC.$$

同理，设 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内切圆直径为 d_2、d_3，则有

$$d_2=AD+BD-AB,$$

$$d_3=AD+CD-AC.$$

$$\therefore\ d_1+d_2+d_3=2AD.$$

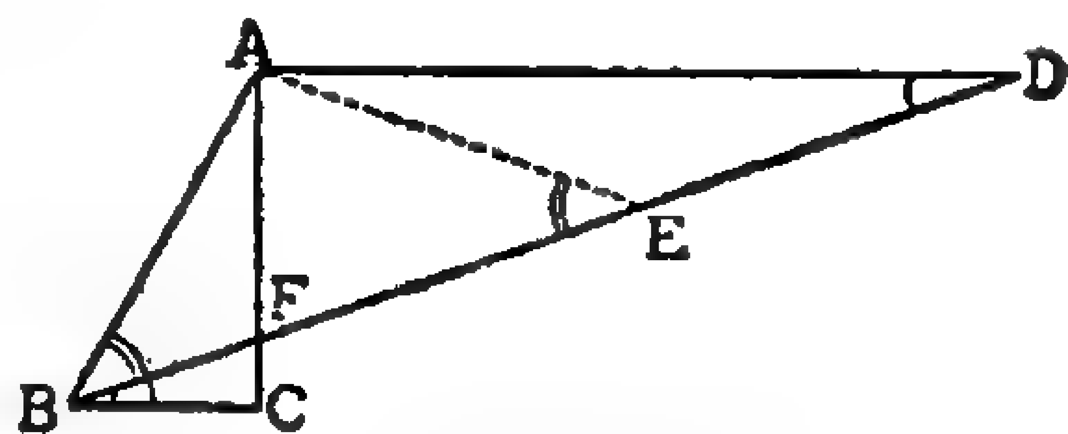
129. 从 $\angle C$ 为直角的 $\triangle ABC$ 的顶点 A 引 BC 边的平行线 AD，设边 AC 与 BD 交于 F，且使 $FD=2AB$，则

$$\angle ABF=2\angle FBC.$$

解 设 $\angle ACB=\angle R$，$AD \parallel BC$，

$$\therefore\ \angle DAF=\angle R.$$

设直角三角形 DAF 的斜边 DF 的中点为 E，有 $EA=ED=EF$，$\angle ADE=\angle DAE$，



$$\therefore\ \angle AEF=2\angle D.$$

根据假设　　$FD=2AB$，

$$\therefore\ AE=AB.$$

$$\therefore\ \angle ABE=\angle AEB=2\angle D. \quad ①$$

因为 $AD \parallel BC$，有

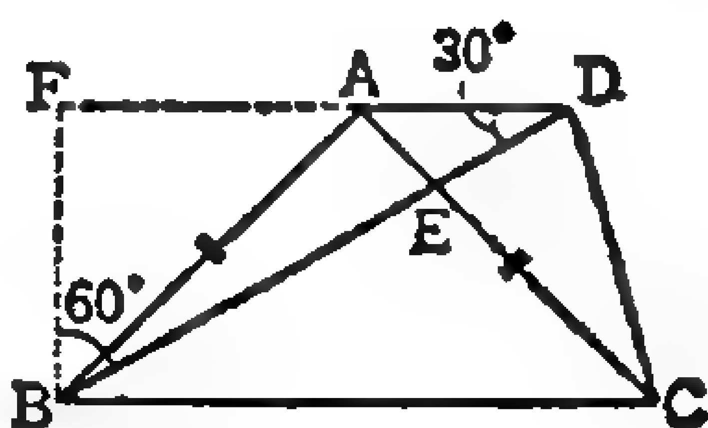
$$\angle DBC=\angle D,$$

因此由①，有

$$\angle ABE=2\angle DBC,$$

即　　$\angle ABF=2\angle FBC$。

130. 由直角等腰三角形 ABC 的顶点 A 引斜边 BC 的平行线，在其上取点 D 使



$$BD=BC,$$

设 BD 与 AC 相交于 E，则有 $CD=CE$。

解 从 B 向 DA 的延长线作垂线 BF，因 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，有

$$BF=\frac{1}{2}BC.$$

又 $BD=BC$，有 $BD=2BF$ 且

$$\angle F=\angle R.$$

$$\therefore\ \angle FBD=60^\circ,\ \angle FDB=30^\circ.$$

因此在等腰三角形 DBC 中，

$$\angle DBC=\angle FDB=30^\circ,$$

$$\angle BDC=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ.$$

又　　$\angle DEC=\angle EBC+\angle BCE$

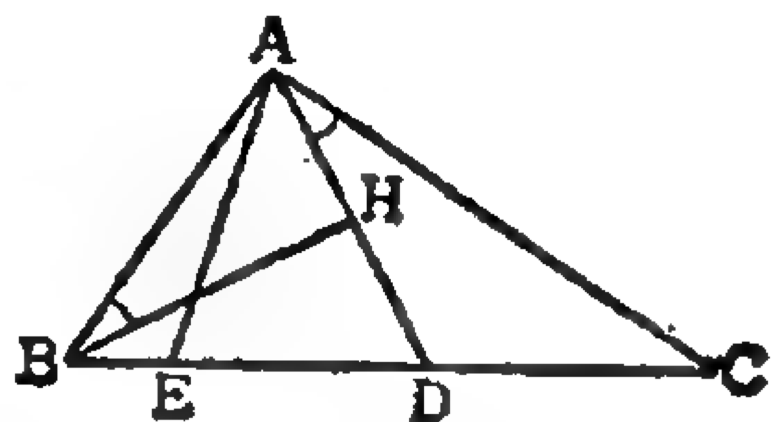
$=30^\circ+45^\circ=75^\circ$，

$$\therefore\ \angle BDC=\angle DEC,$$

即　　$\angle CDE=\angle CED$。

$\therefore\ CD=CE$。

131. 若在直角三角形 ABC 的斜边 BC 上，取两点 D、E 使



$$BD=AB,\ CE=AC,$$

则　　$\angle CAD=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle ACB.$$

解 由 B 向 AD 作垂线 BH，由 $AB=BD$，有

$$\angle ABH=\frac{1}{2}\angle B. \qquad ①$$

根据假设 $\angle BAC=\angle R$，有

$$\angle CAD+\angle BAH=\angle R. \qquad ②$$

又

$$\angle ABH+\angle BAH=\angle R. \qquad ③$$

由①、②、③，有

$$\angle CAD=\angle ABH=\frac{1}{2}\angle B.$$

同理，$\qquad \angle BAE=\frac{1}{2}\angle C.$

132. 从直角三角形 ABC 的直角顶点 B 向边 AC 引垂线 BE 与 $\angle A$ 的平分线 AD 交于点 F，过 F 引 AC 的平行线与 BC 交于点 G，则

$$BF=BD=GC.$$

解 $\angle BDF=\angle C+\angle CAD$
$=\angle ABE+\angle BAD$
$=\angle BFD$，

$\therefore\ BF=BD.$

其次，从 F 引 BC 的平行线与 AC 交于点 H，则有

$$\angle HFD=\angle FDB=\angle BFD,$$

$\therefore\ \angle AFH=\angle AFB.$

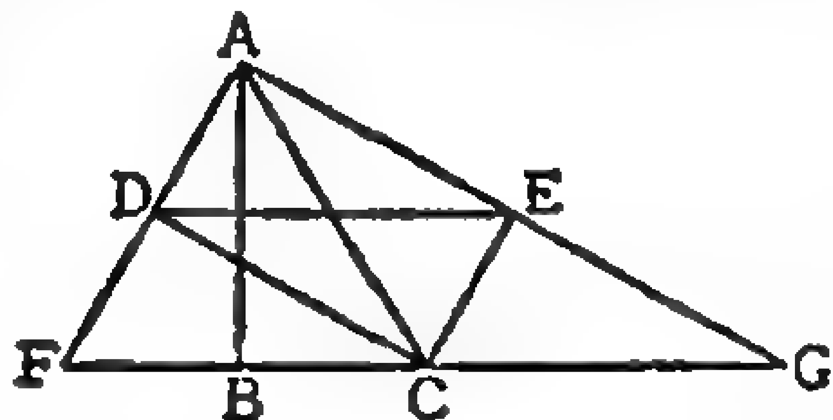
从而 $\qquad \triangle AFH\cong\triangle AFB,$

因此 $\qquad FH=BF=BD.$

又 $FGCH$ 为平行四边形，有 $FH=GC$，

$\therefore\ BF=BD=GC.$

133. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 为直角，从 A 向 $\angle C$ 的平分线及其外角的平分线作垂线，设垂足分别为 D、E，则 DE 是 AB 的垂直平分线。



解 AD 与 CB 的延长线交于点 F，则

$$\triangle ACD\cong\triangle FCD,$$

所以 D 为 AF 的中点。同理 E 为 AG 的中点。

$\therefore\ DE\parallel FG,\ DE\parallel BC.$

因此 DE 过 AB 的中点。又由 $AB\perp BC$ 有

$$DE\perp AB.$$

故知 DE 是 AB 的垂直平分线。

134. 在等腰直角三角形 ABC（$\angle C=\angle R$）内取一点 D，使 $AD=AC$，$\angle CAD=30°$，则

$$BD=DC.$$

解 $AD=AC,$
$\angle CAD=30°,$

有 $\qquad \angle ACD=75°.$

从而 $\qquad \angle DCB=15°.$

取点 A 关于 DC 的对称点 A'，则有

$$\angle DCA'=75°,$$

得 $\qquad \angle BCA'=60°,$

且 $\qquad A'C=AC,$

$\therefore\ A'C=BC.$

因此，$\triangle BCA'$ 为正三角形。又

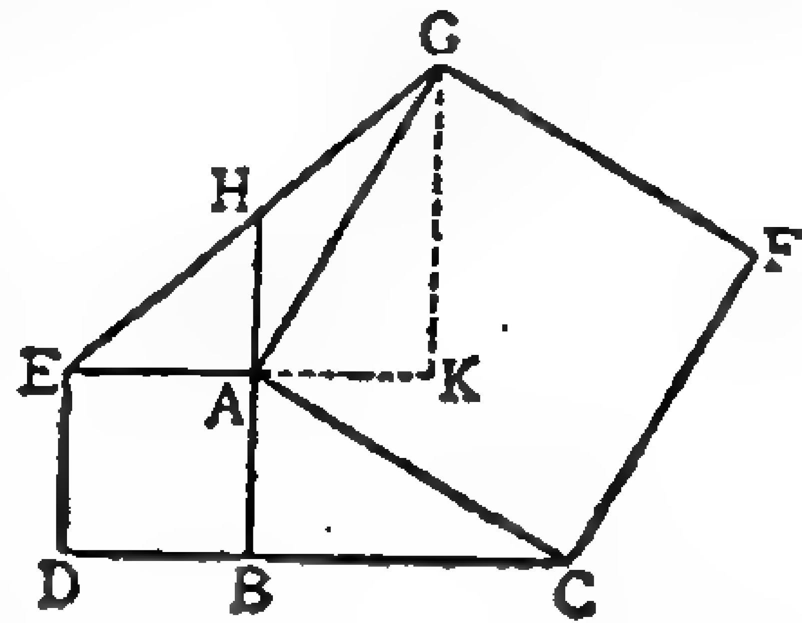
$$\angle CA'D=\angle DAC=30°,$$

有 $A'D$ 是 $\angle CA'B$ 的平分线，即 $A'D$ 是 BC 的垂直平分线。

$\therefore\ BD=DC.$

135. 以直角三角形 ABC（$\angle B$ 为直角）的两边 AB、AC 为边向外侧作正方形 $ABDE$、$ACFG$，延长 BA 交 EG 于 H，则

$$BC=2AH.$$



解 在 EA 的延长线上取 $AK=AB$，连结 KG，$AC=AG$，$AB=AK$，$\angle BAC=\angle GAK$（都是 $\angle CAK$ 的余角），

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle AKG$，$\therefore\ KG=BC.$

又在 $\triangle EKG$ 中，$GK\parallel AH$，A 是 EK 的中点。

$\therefore\ KG=2AH,$

从而 $\qquad BC=2AH.$

136. 从等腰直角三角形 ABC 的斜边 AC 上任取一点 P，向 AB、BC 引垂线 PD、PE，由 P 向 DE 引垂线 PF，则 PF 总过定点。

解 设 AC 的中点为 O，BO 与 FP 交于点 G，则由

$\angle DPE=\angle R$，

$PF\perp DE$，

有

$\angle FPE=\angle PDE$

$=\angle DPB$

（$\because$ $DBEP$ 是长方形），

$\angle DPA=45°=\angle EPC$。

$\therefore$ $\angle BPA=\angle FPC=\angle APG$，

$\therefore$ $\triangle PBO\cong\triangle PGO$，$BO=OG$。

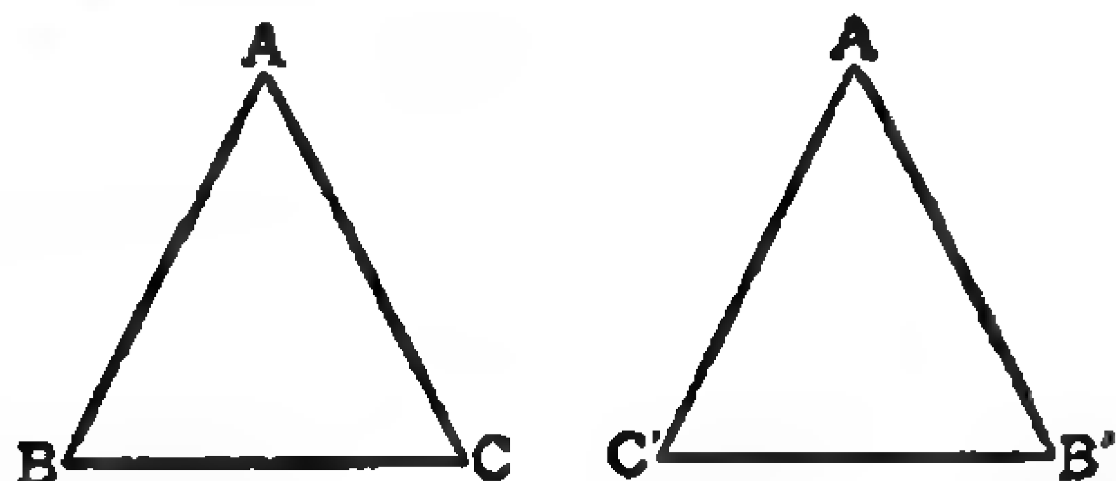
因此 $ABCG$ 是正方形，G 为定点。所以 FP 过定点 G。

(8) 等腰三角形

137. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=AC$，则

$$\angle B=\angle C。$$

其逆命题也成立。



解 由假设 $AB=AC$，考虑给出 $\triangle ABC$ 的反向 $\triangle AC'B'$，使

$\triangle ABC\cong\triangle AC'B'$（三边相等）。

$\therefore$ $\angle B=\angle C'$，$\angle C=\angle B'$。

但是 $\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，

$\therefore$ $\angle B=\angle C$。

反之，设 $\angle B=\angle C$，则

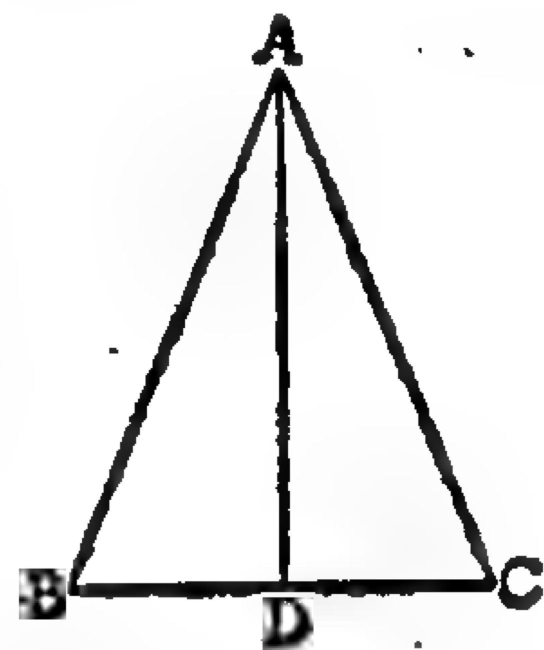
$\triangle ABC\cong\triangle AC'B'$（两角夹边相等）。

$\therefore$ $AB=AC'$，$AC=AB'$。

但是 $AB=AB'$，$AC=AC'$，

$\therefore$ $AB=AC$。

138. 设 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的平分线 AD 垂直于底边 BC，则此三角形为等腰三角形。



解 在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中，

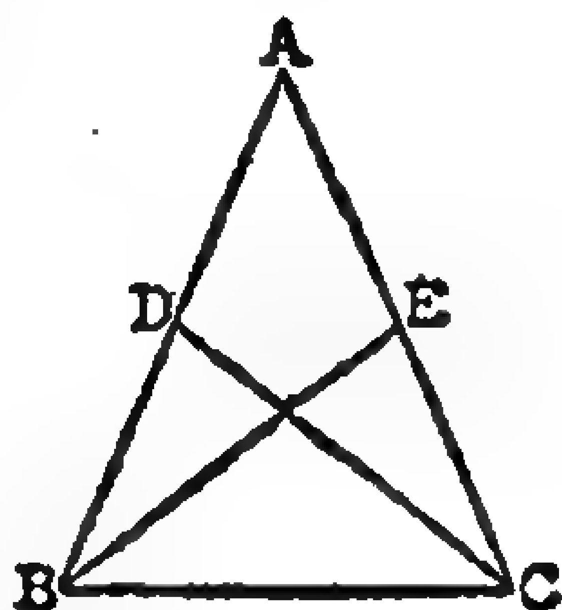
$\angle BAD=\angle CAD$，

$\angle ADB=\angle ADC=\angle R$，

AD 公共，$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$，

故 $AB=AC$。

139. 等腰三角形两腰上的中线相等。



解 设等腰三角形 ABC 的两腰 AB、AC 上的中点分别为 D、E，在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 中，

$AB=AC$，$AE=AD$，

$\angle A$ 公共，$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle ACD$，

因此 $BE=CD$。

140. 从等腰三角形的两底角顶点向对边所引垂线的交点与顶点的连线平分该顶角。

解 从 B、C 向对边引垂线 BD、CE，设其交点为 O。在 $\triangle ABD$、$\triangle ACE$ 中，

$\angle ADB=\angle AEC=\angle R$，

$AB=AC$，$\angle A$ 公共。

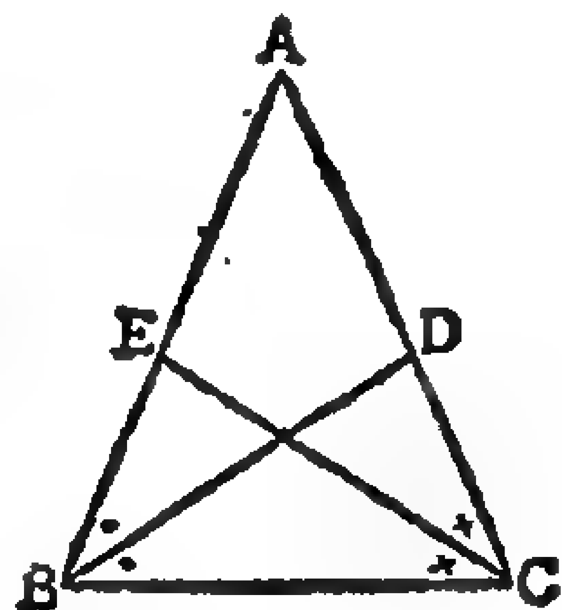
$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle AEC$。

从而 $AD=AE$。又在 $\triangle AOD$、$\triangle AOE$ 中，斜边 AO 公共，$AD=AE$。

$\therefore$ $\triangle AOD\cong\triangle AOE$。

因此 $\angle OAD=\angle OAE$。

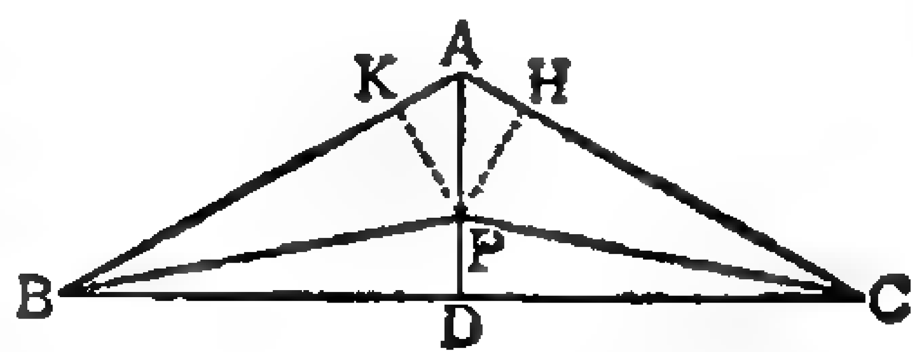
141. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle B$ 及 $\angle C$ 的平分线 BD、CE 相等，则此三角形为等腰三角形。



解 由问题 **80**，如果 $\angle B>\angle C$，则有 $BD<CE$。如果 $\angle B<\angle C$，则有 $BD>CE$。此都与假设条件矛盾。所以由 $BD=CE$，有

$$\angle B=\angle C。$$

142. 设等腰三角形 ABC 的顶角 A 为 $120°$，在 A 向 BC 所作的垂线 AD 上任取一点 P，连结 PB、PC，证明



$$AP+BP+CP>AB+AC。$$

解 从 P 向 AB、AC 作垂线 PK、PH，

因为 $AB=AC$, $\angle BAP=\angle CAP$。所以在直角三角形 APK、APH 中，

$$\angle PAK=\angle PAH=60^\circ,$$

$$AK=\frac{1}{2}AP,\ AH=\frac{1}{2}AP.$$

因此

$$AP=AK+AH. \quad ①$$

其次，在 $\triangle PBK$、$\triangle PCH$ 中，

$$\angle PKB=\angle PHC=\angle R,$$

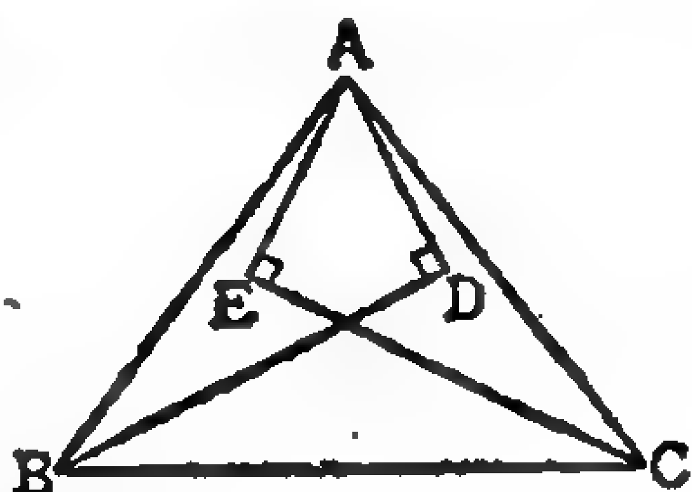
有

$$BP>BK,\ CP>CH. \quad ②$$

由①、②，有

$$AP+BP+CP>AK+AH+BK+CH$$
$$=AB+AC.$$

143. 从等腰三角形的顶点向两底角平分线所作的垂线相等。

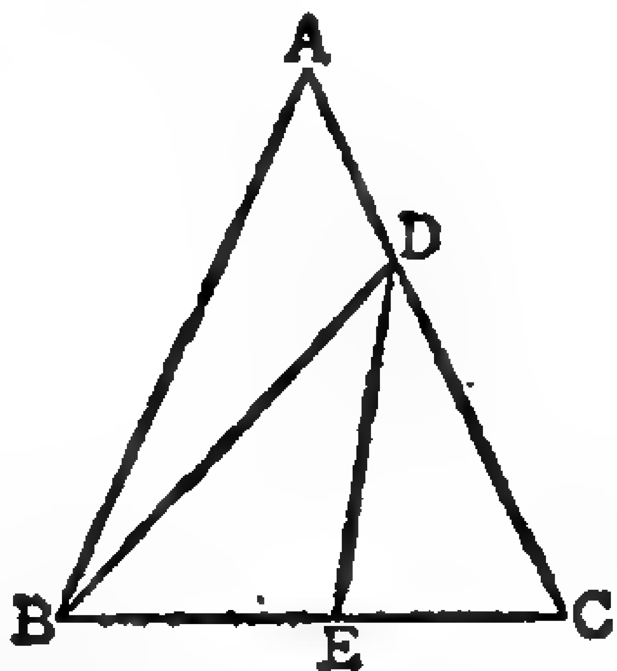


解 设从顶点 A 向等腰三角形 ABC 的两底角平分线 BD、CE 所作的垂线为 AD、AE，则在两个直角三角形 ADB 与 AEC 中，斜边 $AB=AC$, $\angle ABD=\angle ACE$.

$$\therefore\ \triangle ADB\cong\triangle AEC,$$

故 $AD=AE$.

144. 若等腰三角形 ABC 的底边 BC 的一端 B 与 AC 上任一点 D 的连线为 BD，点 D 与 BC 上任一点 E 的连线为 DE，则



$$BD>DE.$$

解 $\angle ABC>\angle DBE$, $\angle ABC=\angle ACB$,

所以 $\angle ACB>\angle DBE$.

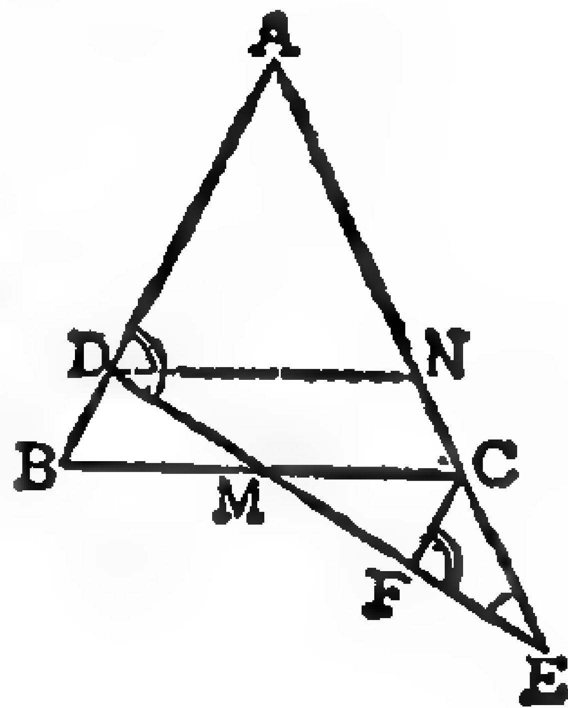
但是 $\angle DEB$ 是 $\triangle DEC$ 的外角，有

$$\angle DEB>\angle ACB.$$

由此 $\angle DEB>\angle DBE$,

$$\therefore\ DB>DE.$$

145. 设等腰三角形 ABC 的底边 BC 的中点为 M，过点 M 的直线与边 AB 交于 D，与边 AC 的延长线交于 E，则



$$AB+AC<AD+AE.$$

解 设过 C 作 AB 的平行线交 DE 于 F，M 为 BC 的中点，则

$$\triangle BDM\cong\triangle CFM.$$

$$\therefore\ BD=CF. \quad ①$$

由 $CF\parallel AD$，有

$$\angle CFE=\angle ADM>\angle B.$$

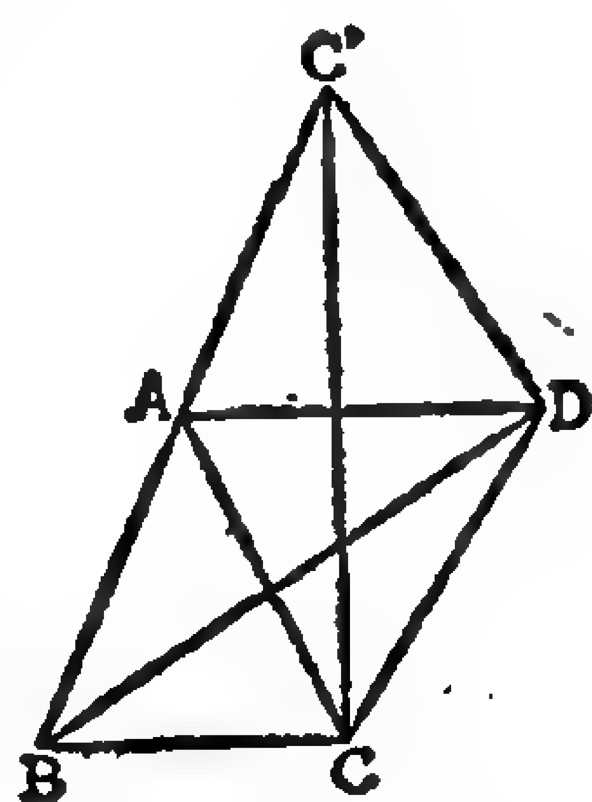
又 $\angle ACB$ 是 $\triangle MEC$ 中 $\angle MCE$ 的外角，$\angle E<\angle C$，而 $\angle B=\angle C$. 由以上两个关系有 $\angle CFE>\angle E$,

$$\therefore\ FC<CE. \quad ②$$

由①与②，有

$$AB+AC<AD+AE.$$

146. 设有公共底边 BC 的两个三角形 ABC、DBC, $AD\parallel BC$，且 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，则 $\triangle ABC$ 的周长小于 $\triangle DBC$ 的周长。



解 在 BA 的延长线上取

$$AC'=AC,$$

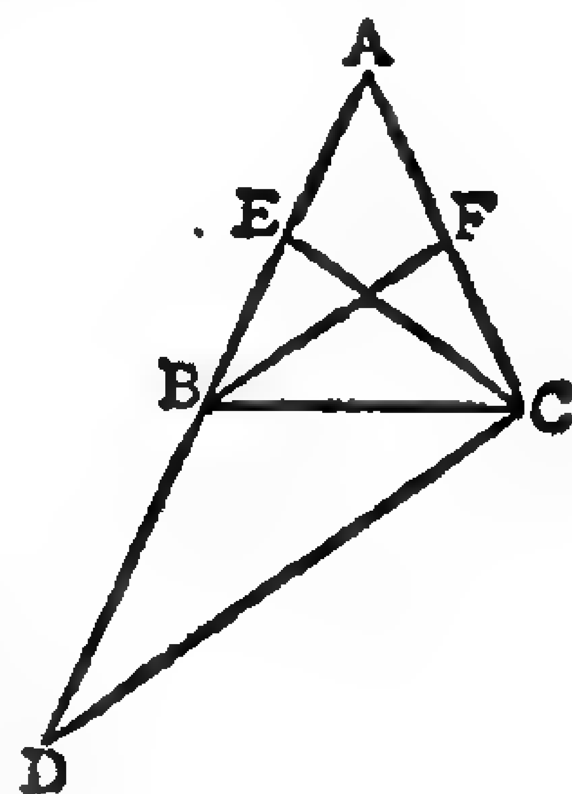
连结 $C'D$、$C'C$，因为 $AD\parallel BC$，所以是 $\angle CAC'$ 的平分线，又是 CC' 的垂直平分线。因此，$CD=C'D$. 在 $\triangle BDC'$ 中，

$$BC'<BD+C'D$$

即 $AB+AC<BD+CD$.

$$\therefore\ AB+AC+BC<BD+CD+BC.$$

147. 设等腰三角形 ABC 的底边为 BC，延长 AB 至 D，使



$$BD=AB,$$

AB 的中点为 E，则

$$CD=2CE.$$

解 设 F 为 AC 的中点，而等腰三角形的两腰上的中线相等，即

$$CE=BF.$$

但是 $CD=2BF$

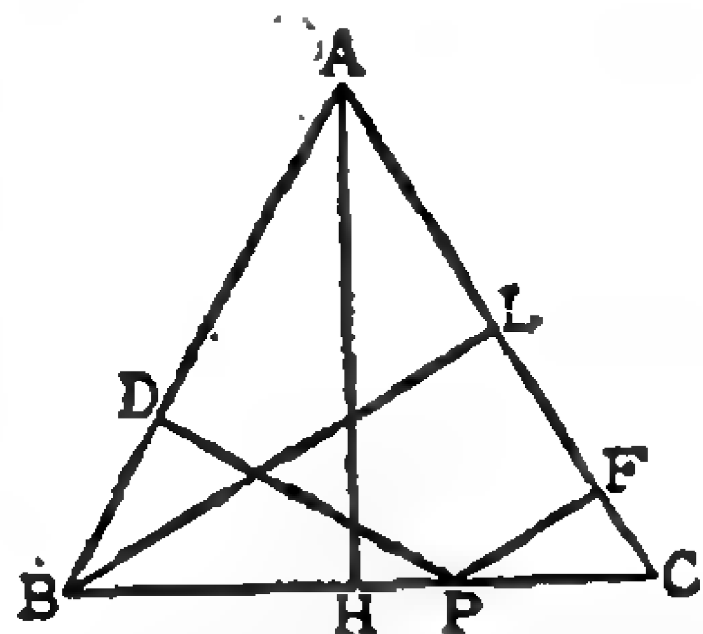
$$(\because\ AB=BD,\ AF=FC),$$

$$\therefore\ CD=2CE.$$

148. 若从等腰三角形 ABC 一边上的任一点 P，向其他两边所作垂线 PD、PF 之和等于高 AH，则此三角形为正三角形。

注 本题点 P 在 $\triangle ABC$ 的边上任意位

置．首先考虑点 P 在底边 BC 上，或在腰 AB（或 AC）上的情况，只考虑一种情况解答是不完备的．



解　(1) 点 P 在底边 BC 上时，设从 P 向 AB、AC 作垂线 PD、PF，从 B 向 AC 作垂线 BL．由 $AB=AC$，有（参考问题 **150**）

$$PD+PF=BL.$$

又根据假设

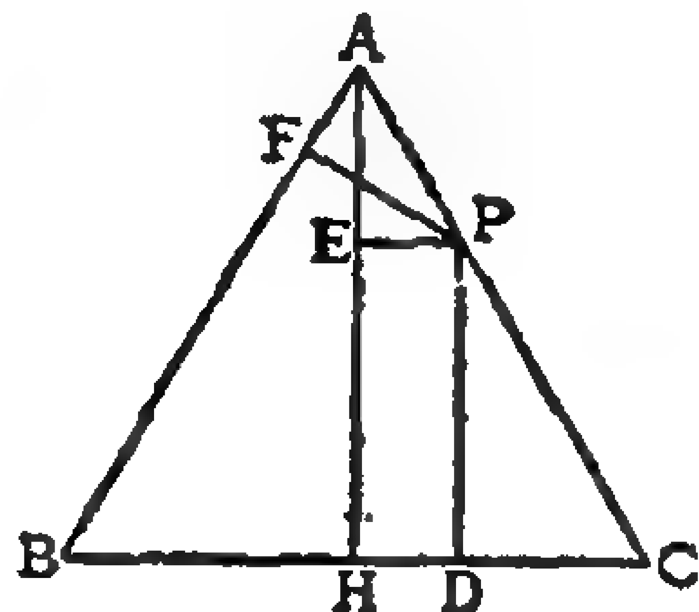
$$PD+PF=AH,$$

$$\therefore\quad BL=AH,$$

$$\therefore\quad BC=AC,$$

因此　　$AB=BC=AC$，

故 $\triangle ABC$ 是正三角形．



(2) 点 P 在 AC 上时，由 P 向 BC、AB 作垂线 PD、PF，由 P 向高 AH 作垂线 PE，

$$PD=EH. \qquad ①$$

由假设

$$AH=PD+PF. \qquad ②$$

由①、②，有 $AE=PF$．在 $\triangle AFP$、$\triangle PEA$ 中，AP 公共，$PF=AE$，

$$\angle AFP=\angle PEA=\angle R.$$

$$\therefore\quad \triangle AFP\cong\triangle PEA.$$

因此　　$\angle FAP=\angle APE=\angle C$．

但是　　$\angle B=\angle C$，

$$\therefore\quad \angle A=\angle B=\angle C,$$

所以 $\triangle ABC$ 是正三角形．

149． 从等腰三角形 ABC 的底边 BC 上的任一点 P，引 BC 的垂线与其他两边 AB、AC 或延长线分别交于 Q、R，若等式 $PQ+PR=BC$ 成立，则 $\angle A=\angle R$．

解　由 A 作 BC 的垂线 AM，作 QR 的垂线 AN，有 $AMPN$ 为长方形，

$$\therefore\quad PN=AM. \qquad ①$$

而 $\triangle BPQ$、$\triangle RPC$ 为直角三角形，

$$\angle B=\angle C,\ \therefore\quad \angle AQR=\angle ARQ,$$

又 $AN\perp QR$，

$$\therefore\quad NR=NQ. \qquad ②$$

由①、②，

$$PQ+PR=2PN=2AM.$$

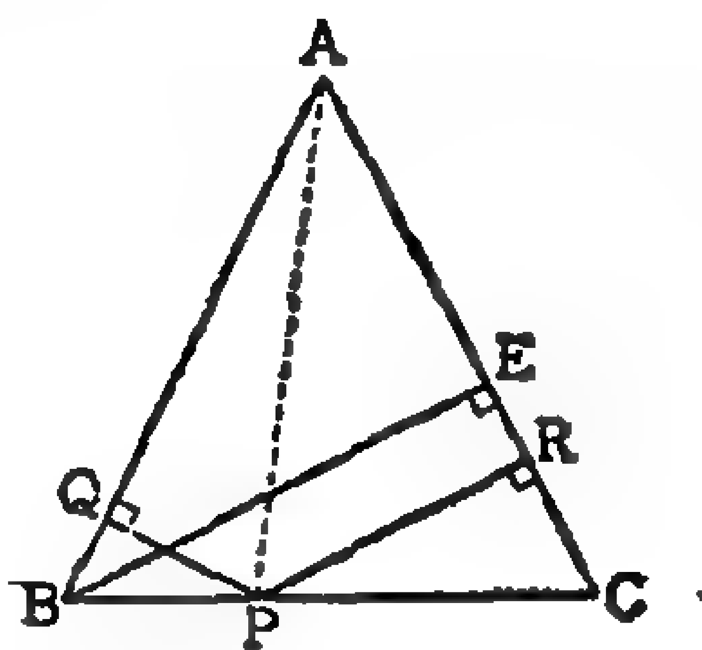
但是由假定 $PQ+PR=BC$，于是有

$$2AM=BC.$$

因此　　$BM=AM=CM$，

所以 A 是以 M 为圆心，BC 为直径的圆周上的点，从而 $\angle A$ 是直角．

150． 设 P 为等腰三角形 ABC 底边 BC 上的任意一点，由 P 向 AB、AC 引垂线 PQ、PR，则 $PQ+PR$ 为定值．



解　连结 AP，作 $\triangle ABC$ 的高 BE，则

$$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot PQ,$$

$$S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}AC\cdot PR,$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BE.$$

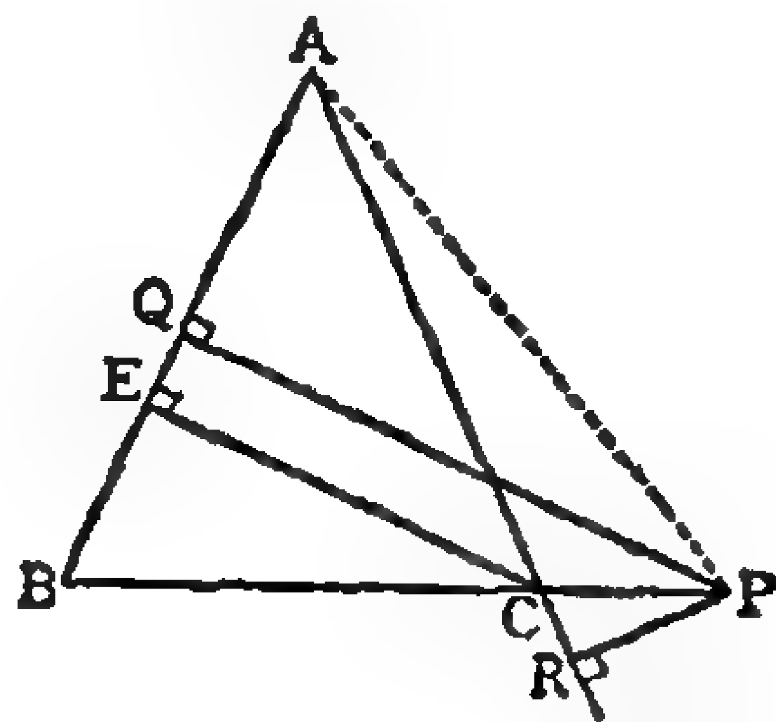
而 $AB=AC$，因此

$$\frac{1}{2}AC\cdot PQ+\frac{1}{2}AC\cdot PR=\frac{1}{2}AC\cdot BE.$$

两边同除以 $\frac{1}{2}AC$，得

$$PQ+PR=BE\ (\text{定值}).$$

151． 在等腰三角形 ABC 的底边 BC 的延长线上任取一点 P，从 P 向其他两边或延长线引垂线 PQ、PR，则 $PQ-PR$ 为定值．



解　连结 AP，作 $\triangle ABC$ 的高 CE，则

$$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot PQ,$$

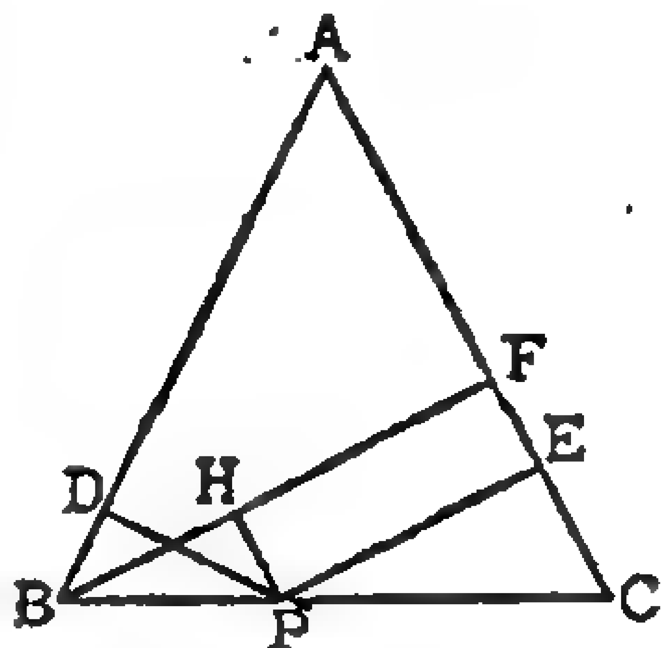
$$S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AC\cdot PR,$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}-S_{\triangle ACP}$$
$$=\frac{1}{2}AB(PQ-PR)$$
$$(\because\quad AB=AC).$$

又 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE,$$

$$\therefore\quad PQ-PR=CE\ (定值).$$

注 P 在 CB 的延长线上时，有 $PR>PQ$.



152. 从等腰三角形 ABC 底边 BC 上的任一点 P，向 AB、AC 作垂线分别为 PD、PE，则 $AD+AE$ 为定值.

解 设从 B 向 AC 作垂线 BF，从 P 向 BF 作垂线 PH，则有

$$BF\parallel PE,\ HP\parallel FE,$$

且 $\angle F=\angle R$，由此 $HPEF$ 是矩形.

$$\therefore\quad EF=PH.\qquad ①$$

又 $\triangle BPD\cong\triangle PBH$ ($\because\ \angle D=\angle H=\angle R$, BP 公共，$\angle B=\angle C=\angle HPB$)，

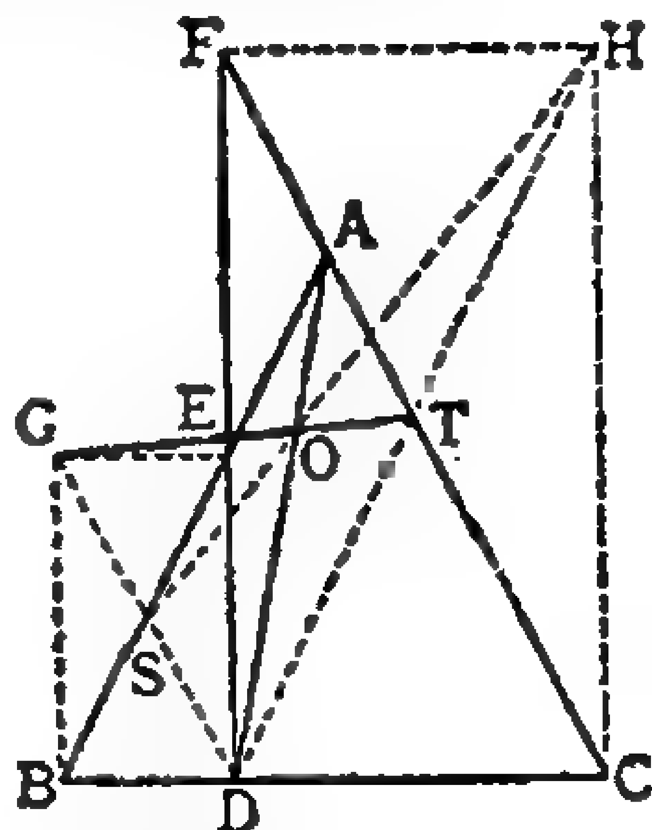
$$\therefore\quad PH=BD.\qquad ②$$

由①、②，

$$AD+AE=AB+AF.$$

但是在给定三角形 ABF 中，$AB+AF$ 是定值，不论点 P 在 BC 上怎样的位置，$AD+AE$ 总等于 $AB+AF$(定值).

153. 在等腰三角形 ABC 的底边 BC 上取一点 D，过 D 引 BC 的垂线与 AB、AC 或其延长线上的交点分别为 E、F. 作长方形 $EDBG$、$FDCH$，设 DG、DH 的中点分别为 S、T，则 GT、HS 的交点 O 在连结 AD 的直线上.



解 由题意知，$GD\parallel AC$，$DH\parallel AB$，

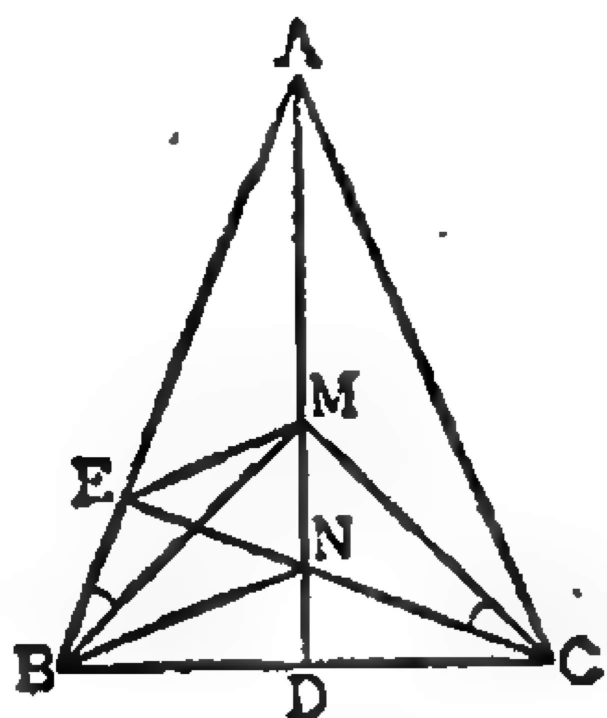
$$\therefore\quad AT\perp\!\!\!\!=SD,\ \therefore\quad 2AT\perp\!\!\!\!=GD,$$

所以 GT 通过把 AD 分成 1:2 的分点 O. 同理，$AS\perp\!\!\!\!=DT$，

$$\therefore\quad 2AS\perp\!\!\!\!=DH,$$

所以 HS 通过把 AD 分成 1:2 的分点 O. 因此 GT、HS 的交点在 AD 上.

154. 把等腰三角形 ABC 的 $\angle B$ 三等分，设其两条分角线与底边 BC 上的高 AD 的交点分别为 M (靠近 A 点)、N，直线 CN 与边 AB 的交点为 E，则直线 EM 平行于直线 BN.



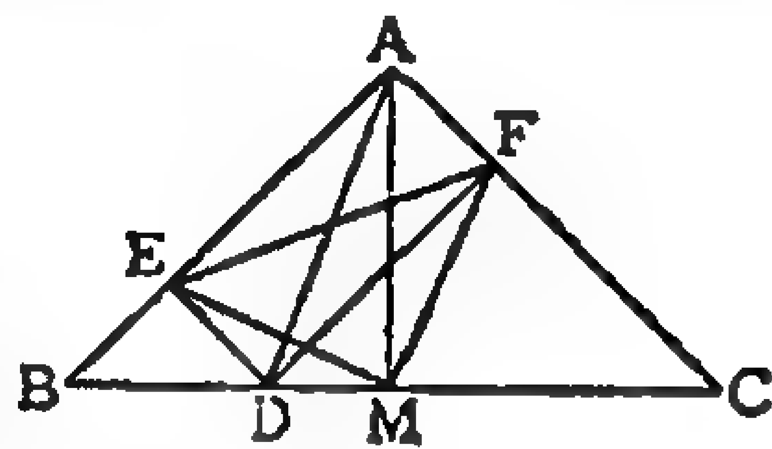
解 因为 AD 是等腰三角形 ABC 的对称轴，BM、BN 是 $\angle B$ 的三等分角线，所以 CM、CN 也是 $\angle C$ 的三等分角线. 即

$$\angle ECM=\frac{1}{3}\angle C.$$

而 $\angle B=\angle C$ 有 $\angle ABM=\angle ECM$，因此 B、C、M、E 在同一圆周上.

$$\therefore\quad \angle EMB=\angle ECB=\frac{1}{3}\angle B$$
$$=\angle MBN,$$
$$\therefore\quad EM\parallel BN.$$

155. 在等腰直角三角形 ABC 的斜边 BC 上任取一点 D，设从 D 向两边 AB、AC 引的垂线分别为 DE、DF，BC 的中点为 M，则 $\triangle EMF$ 还是等腰直角三角形.



解 由题意，$AF=ED=BE$，$AM=BM$，

又 $$\angle B=\angle MAF=45°,$$

$$\therefore\quad \triangle AFM\cong\triangle BME\ (两边夹角).$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\angle BME=\angle AMF, & ①\\ EM=MF. & ②\end{cases}$$

由①，有

$$\angle EMF=\angle BMA=\angle R,\qquad ①'$$

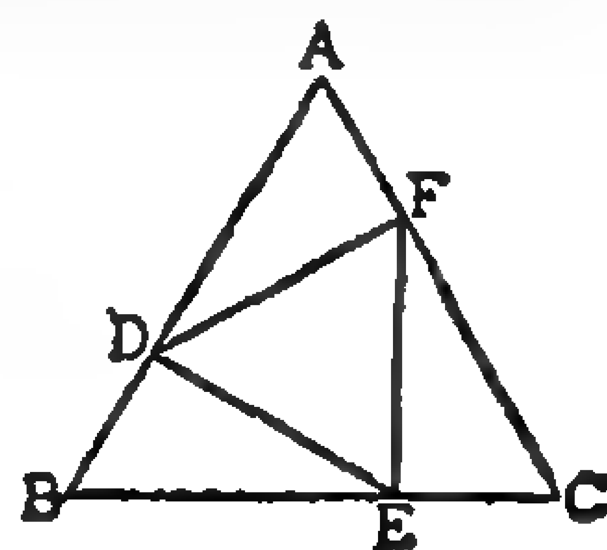
根据①′、②知 $\triangle EMF$ 是等腰直角三角形.

(9) 正三角形

156. 设在正三角形 ABC 的各边上分别取 D、E、F，使

$$AD=BE=CF,$$

则 $\triangle DEF$ 也是正三角形.



解 因为 $\triangle ABC$ 是正三角形，有

$$AB=BC=CA.$$

而 $$AD=BE=CF,$$

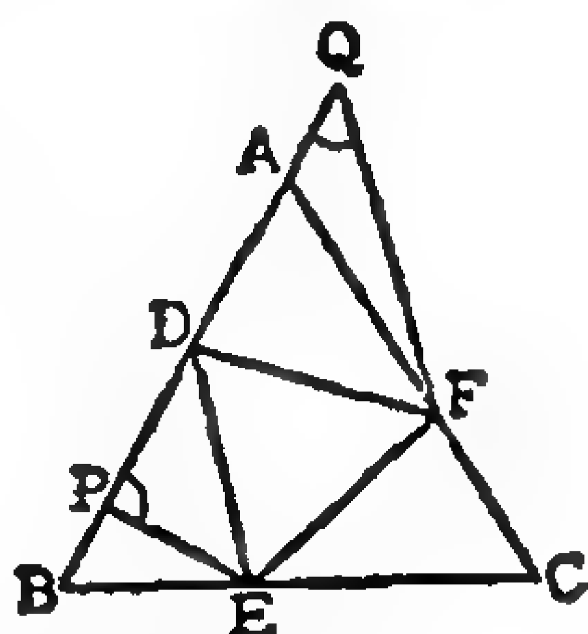
$$\therefore\ DB=EC=FA.$$

又 $\angle A=\angle B=\angle C$，所以 $\triangle ADF$、$\triangle BED$、$\triangle CFE$ 都是由两边夹角相等而全等的三角形。

$$\therefore\ DE=EF=FD.$$

因此 $\triangle DEF$ 是正三角形。

157. 在 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 上分别取 $AD=BE=CF$，若 $\triangle DEF$ 是正三角形，则 $\triangle ABC$ 也是正三角形。



解 如果 AB、BC、CA 中有两条边 AB 与 AC 相等，则

$$AF=BD$$

$(\because\ CF=AD)$。

又 $$AD=BE,\ FD=DE,$$

$$\therefore\ \triangle AFD\cong\triangle BDE,$$

$$\therefore\ \angle A=\angle B.$$

但 $AB=AC$，有 $\angle B=\angle C$，

$$\therefore\ \angle A=\angle B=\angle C$$

即 $\triangle ABC$ 是正三角形。

若 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 各不相等，则这三个角中至少有一个角大于 $60°$，一个角小于 $60°$。设 $\angle A>60°$，$\angle B<60°$，在 BA 及其延长线上分别取点 P、Q，使

$$\angle DPE=60°,\ \angle AQF=60°,$$

因 $\triangle DPE$ 的三内角之和等于

$$\angle ADF+\angle FDE+\angle EDP,$$

其中 $$\angle DPE=60°=\angle FDE,$$

有 $$\angle DEP=\angle ADF.$$

在 $\triangle QDF$、$\triangle PED$ 中，$\angle DQF=\angle EPD$，$\angle QDF=\angle DEP$，$DF=DE$，从而

$$\triangle QDF\cong\triangle PED,$$

$$\therefore\ DQ=PE. \quad ①$$

因为 $\angle BPE$ 是钝角，有 $BE>PE$。所以由①有

$$BE>DQ. \quad ②$$

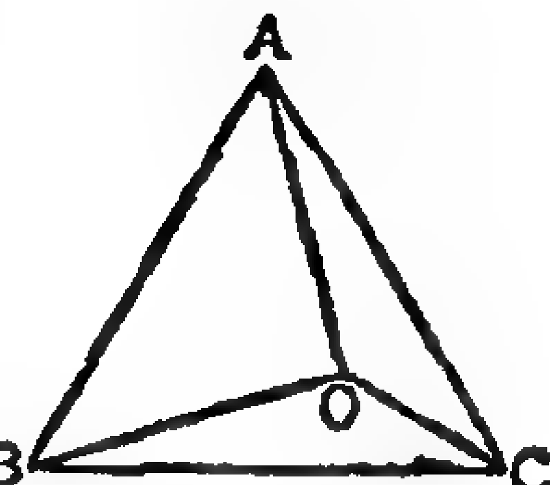
但由假设 $BE=DA$，知②不成立。

综合以上两种情况的讨论，当 $\triangle ABC$ 的三边中有两边相等时另一边也与之相等，所以 $\triangle ABC$ 是正三角形。当三边不相等时，本问题不成立。故 $\triangle ABC$ 必为正三角形。

158. 设 O 为正三角形 ABC 内一点，且

$$\angle BAO>\angle CAO,$$

则 $\angle BCO>\angle CBO$。



解 在 $\triangle ABO$、$\triangle ACO$ 中，$AB=AC$，AO 公共，$\angle BAO>\angle CAO$。

$$\therefore\ OB>OC,$$

$$\therefore\ \angle OCB>\angle CBO.$$

159. 设 C 为定长线段 AB 的内分点，在 AC、BC 上作正三角形 ACP、CBQ，则其高 PP'、QQ' 之和为定值。又外分点的情况如何？

解 设 AP、BQ 的延长线交于点 R，作 $QS\parallel AB$，QS 与 AR 交点为 S，则 $PCQR$ 为平行四边形，所以

$$PC=QR.$$

同理， $$AC=SQ,$$

从而

$$\triangle PAC\cong\triangle RSQ. \quad ①$$

设 R 到 AB 的垂足为 R'，RR' 与 SQ 交于点 D，由①有 $RD=PP'$，

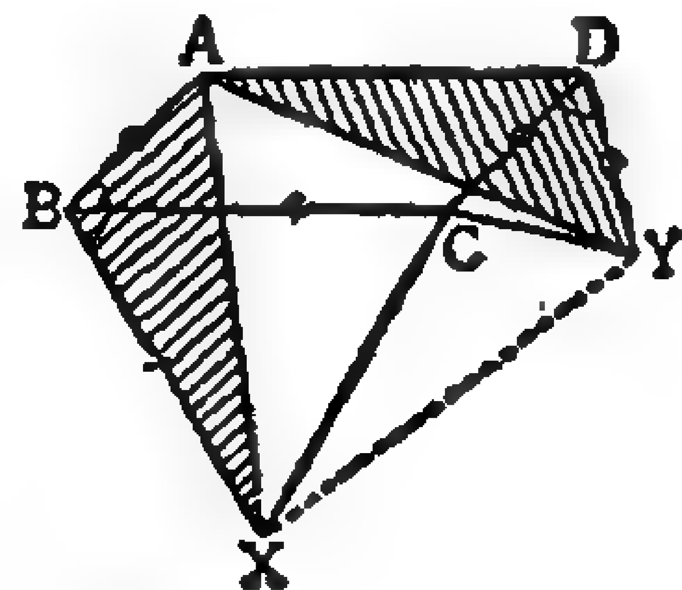
$$\therefore\ PP'+QQ'=RD+DR'=RR'.$$

但是，因为 AB 是定线段，$\triangle RAB$ 是正三角形，所以 RR' 是定值，因此，$PP'+QQ'$ 为定值。

在外分点的情况时，完全类似于上面的论证，有

$$PP'\sim QQ'=RR'.$$

160. 设以平行四边形 $ABCD$ 的两边 BC、CD 分别为底，向外侧作两个正三角形 BCX 与 CDY，则 $\triangle AXY$ 是正三角形。



解 在 $\triangle ABX$ 和 $\triangle YDA$ 中，

$$AB=YD,\ BX=AD,$$

又由 $$\angle ABC=\angle ADC,$$

$$\angle CBX=60°=\angle CDY,$$

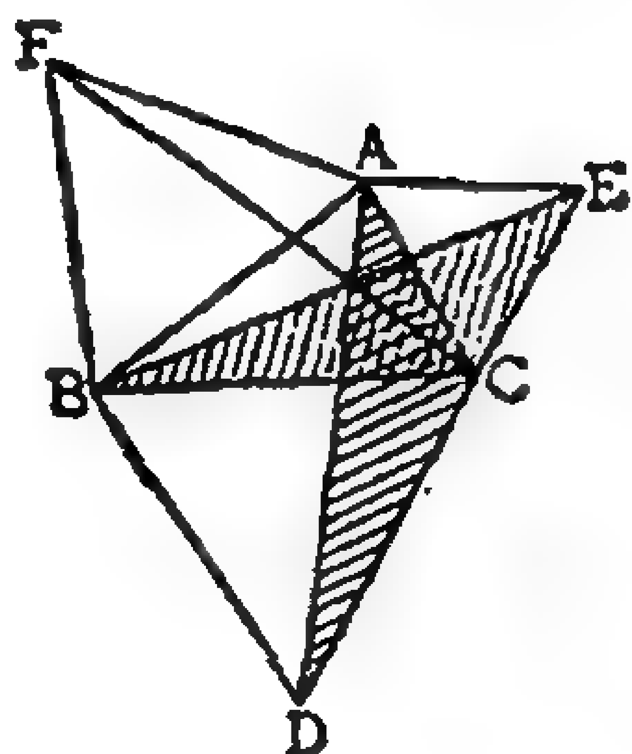
知 $$\angle ABX=\angle YDA,$$

因此 $$\triangle ABX\cong\triangle YDA,$$

$$\therefore\ XA=AY,$$

且这两个全等三角形是正向全等（不是反向

全等)。因为对应边 AD 与 BX 的夹角为 60°，有对应边 AY 与 AX 的夹角也是 60°，所以 $\triangle AXY$ 是正三角形。



161. 在 $\triangle ABC$ 的各边上，分别向外侧作正三角形 BCD、CAE、ABF，则线段 AD、BE、CF 相等。

解 在 $\triangle BCE$、$\triangle DCA$ 中，$CE=CA$，$BC=DC$，

$$\angle BCE=(60^\circ+\angle ACB)=\angle DCA.$$

$$\therefore \quad \triangle BCE\cong\triangle DCA,$$

$$\therefore \quad BE=DA.$$

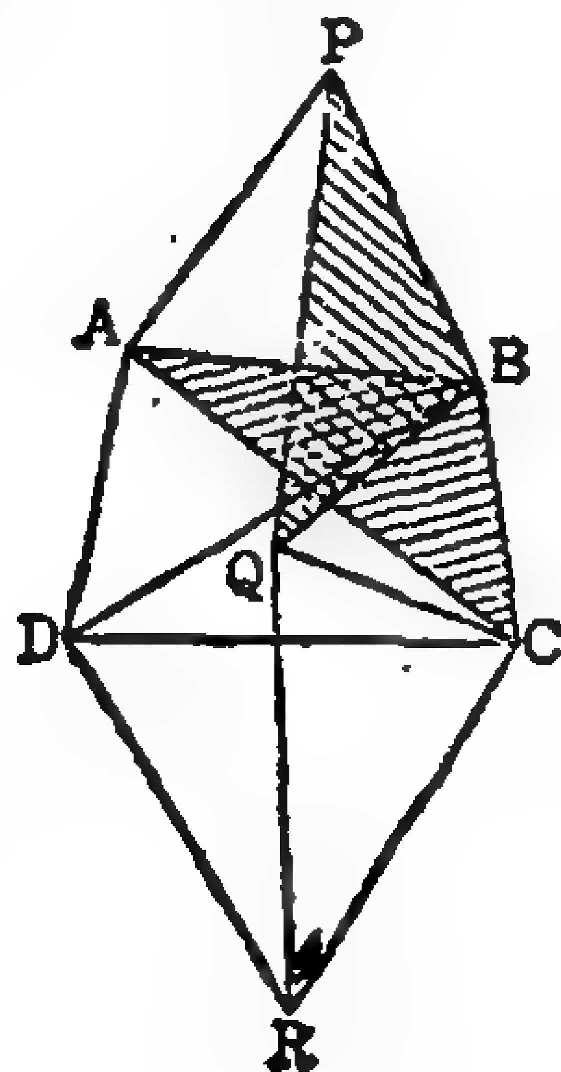
同理，
$$\triangle FBC\cong\triangle ABD,$$

$$\therefore \quad FC=AD,$$

$$\therefore \quad AD=BE=CF.$$

162. 设在四边形 $ABCD$ 的对边 AB、CD 上，分别向外侧作正三角形 ABP 与 CDR，其次在边 BC 上向内侧作正三角形 BCQ，则

$PQ=AC$，$QR=BD$.



解 在 $\triangle PBQ$、$\triangle ABC$ 中，$PB=AB$，$BQ=BC$，

$$\angle PBQ=60^\circ+\angle ABQ$$
$$=\angle ABC.$$

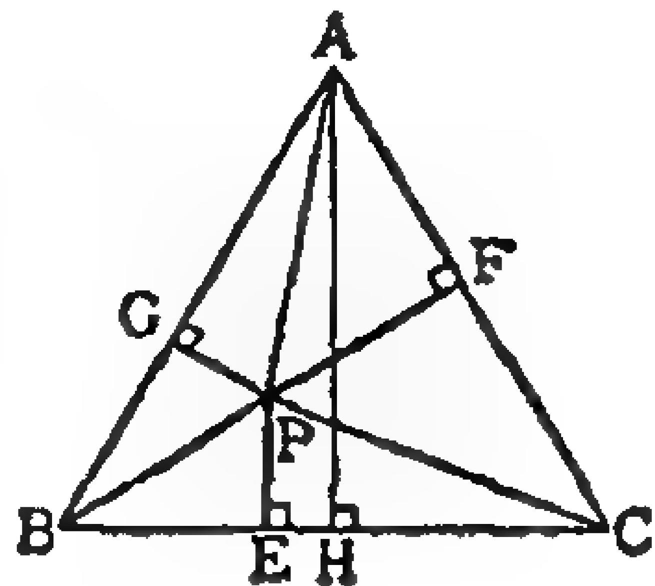
$$\therefore \quad \triangle PBQ\cong\triangle ABC,$$

$$\therefore \quad PQ=AC.$$

同理，
$$\triangle QCR\cong\triangle BCD,$$

$$\therefore \quad QR=BD.$$

163. 从正三角形 ABC 内任一点 P，向三边 BC、CA、AB 作的垂线之和 $PE+PF+PG$ 为定值。当点 P 在三角形外部时如何?



解 连结 PA、PB、PC。

$$\because \quad S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}AB\cdot PG+\frac{1}{2}BC\cdot PE+\frac{1}{2}CA\cdot PF.$$

在这个等式中，令

$$AB=BC=CA=a,$$

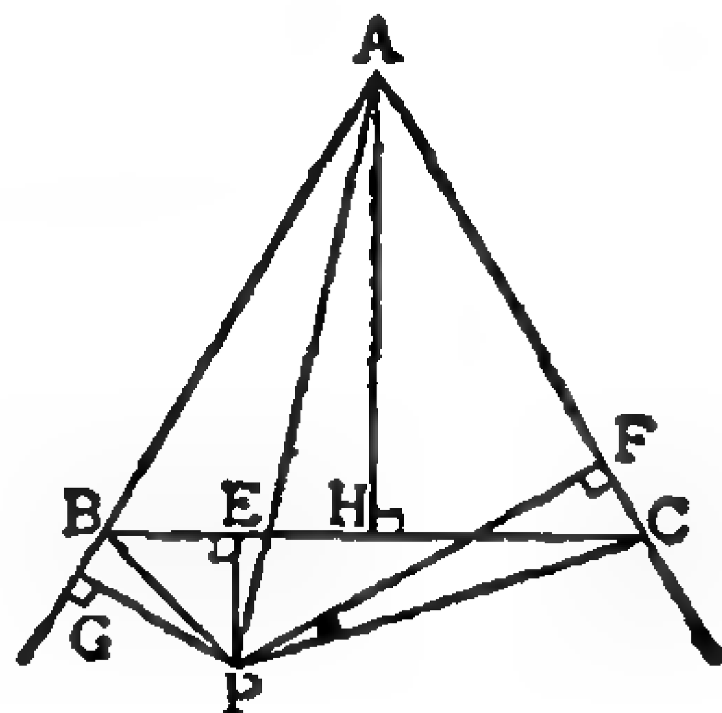
则上式为

$$\frac{1}{2}a\cdot AH=\frac{1}{2}a\cdot PG+\frac{1}{2}a\cdot PE+\frac{1}{2}a\cdot PF,$$

$$\therefore \quad PG+PE+PF=AH \text{ (定值)}.$$

当点 P 在 $\triangle ABC$ 外部时，

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APB}+S_{\triangle APC}-S_{\triangle BPC},$$

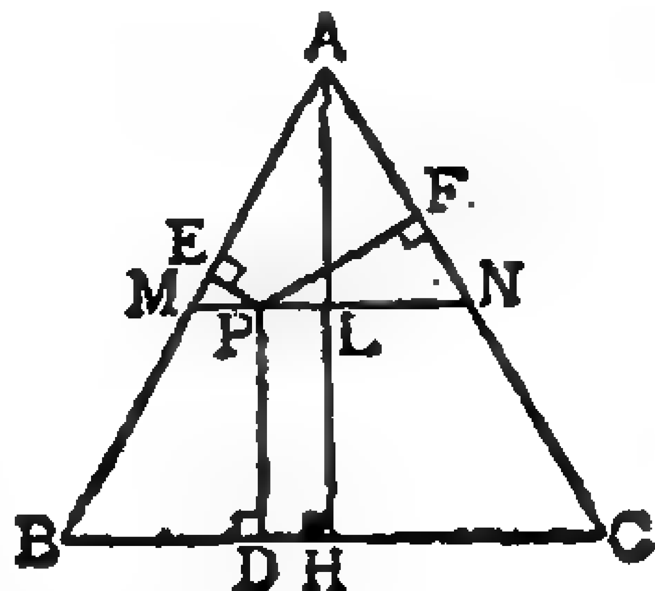


$$\therefore \quad \frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}AB\cdot PG+\frac{1}{2}AC\cdot PF-\frac{1}{2}BC\cdot PE.$$

但是 $BC=AC=AB$,

$$\therefore \quad PG+PF-PE=AH \text{ (定值)}.$$

164. 设 P 为正三角形 ABC 内任一点，由 P 向三边 BC、CA、AB 所作垂线分别为 PD、PF、PE。



(1) 若点 P 在 AB、AC 中点的连线上，则

$$PD=PE+PF.$$

(2) 点 P 在什么范围内，以 PD、PE、PF 为三边能够作出三角形?

解 (1) 由问题 **163**，有

$$PD+PE+PF=AH.$$

设 AH 与 MN 交于 L，M、N 是 AB、AC 的中点，有

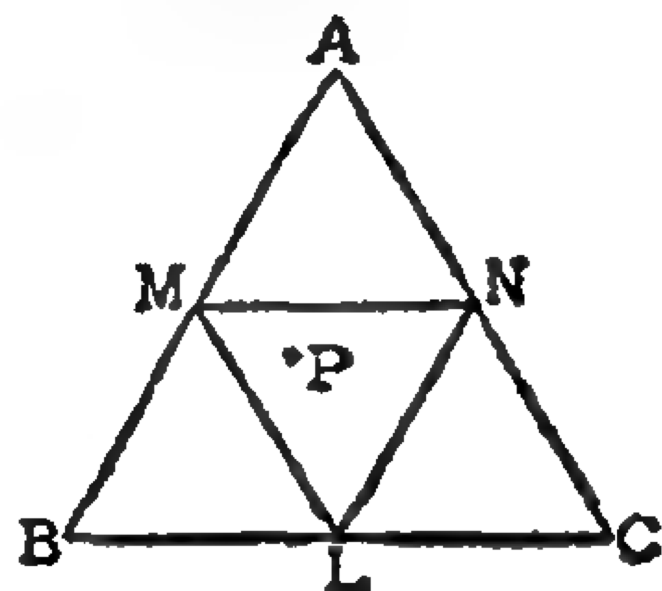
$$AL=LH.$$

又 $LH=PD$,

因此

$$PE+PF=AL,$$

$$\therefore \quad PD=PE+PF.$$



(2) 设以 PD、PE、PF 为边的三角形已作出，则

$$PD<PE+PF,$$
$$PF<PD+PE,$$

$$PE<PD+PF.$$

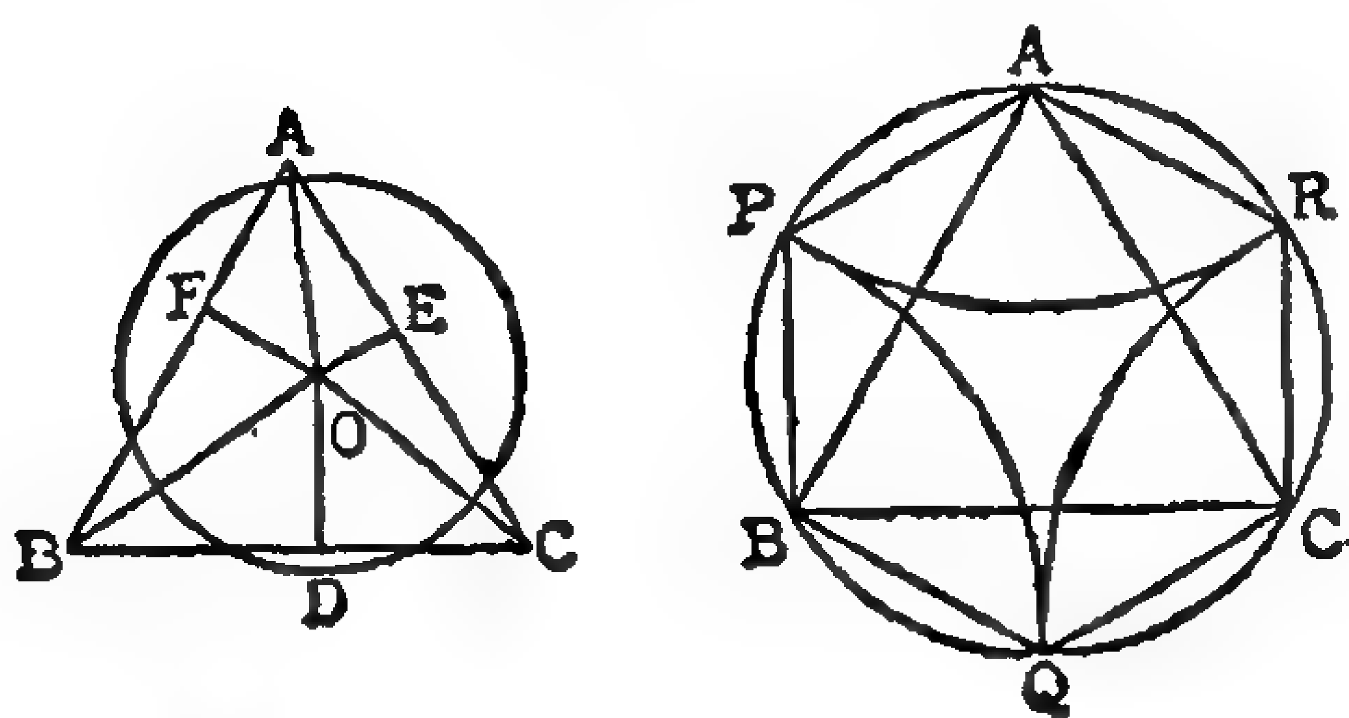
成立的必要且充分条件是 P 必须在正三角形 ABC 的边 AB、AC、BC 的中点 M、N、L 为顶点的 $\triangle MNL$ 内.

165. 若圆与已知正三角形的每边都相交(而与边的延长线不相交)，试用图形表示该圆的圆心所在的范围．并指出边界线是怎样的曲线.

解 根据圆与正三角形各边相交而与延长线不相交这个条件，则因与边 BC 相交的圆，其圆心必在分别过 B、C 且垂直于 BC 的两条直线之间．同理，与 AB 相交的圆的圆心也必在分别过 A、B 且垂直于 AB 的两条直线之间，与 AC 相交的圆的圆心必在分别过 A、C 且垂直于 AC 的两条直线之间．因此与边 AB、BC、CA 相交的圆心，显然是不能超出上图中的正六边形 $APBQCR$ 之外.

其次，任意作与三边都相交的圆，设其圆心为 O，从 O 向 BC、CA、AB 作垂线 OD、OE、OF，圆 O 的半径为 r 时，则必有

$$OA\geqq r\geqq OD,$$
$$OB\geqq r\geqq OE,$$
$$OC\geqq r\geqq OF.$$

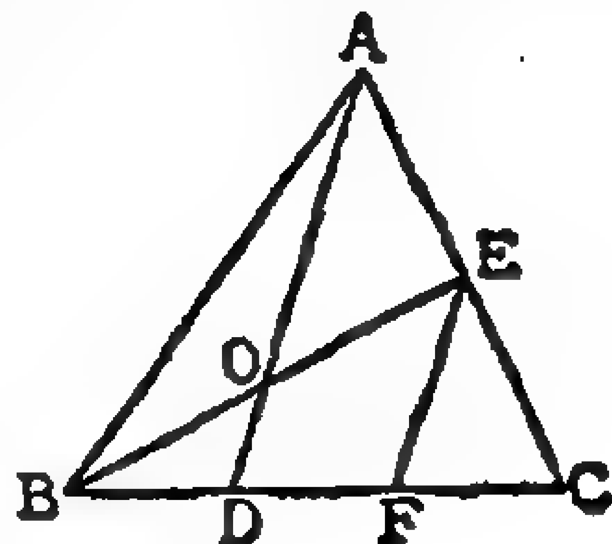


但是，使 $OD=AO$ 的点 O 的轨迹是以 A 为焦点 BC 为准线的抛物线，由 $OA\geqq OD$，点 O 所在的范围是关于这条抛物线来说在点 A 的异侧.

同理，分别作以 B 为焦点、AC 为准线的抛物线，以 C 为焦点、AB 为准线的抛物线，这样，这三条抛物线两两的交点就是前面指出的六边形的顶点 P、Q、R，因此这三条抛物线所围的部分就是圆心所在的范围．(参考第八篇第三章抛物线 2)

(10) 三角形杂题

166. 设 D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA 上的点，且 $BD=\frac{1}{2}DC$，$CE=EA$，则 AD 平分 BE.



解 设 DC 的中点为 F，连结 FE，E 为 AC 的中点，有

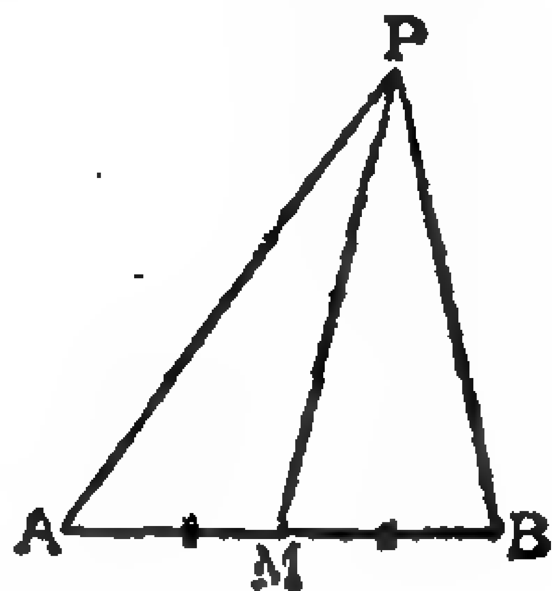
$$EF\parallel AD,$$

又

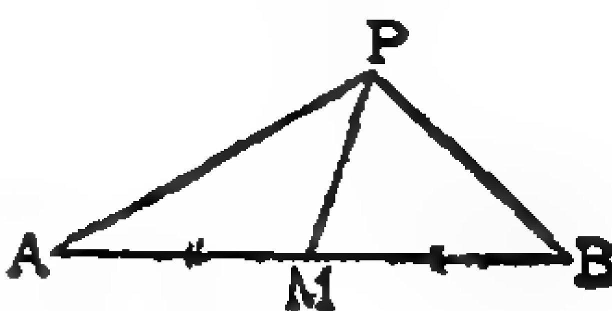
$$BD=\frac{1}{2}DC=DF.$$

所以，设 AD、BE 的交点为 O，则 O 是 BE 的中点，$BO=OE$.

167. (1) 设线段 AB 的中点为 M，连结点 M 与这条直线外一点 P，若 $MP<MA$，则 $\angle APB$ 是多大的角?若 $MP>MA$ 时又如何?叙述其理由.



(2) 证明直角三角形的三顶点到其斜边中点等距离.



解 (1) 由 $MP<MA$，有

$$\angle PAM<\angle APM,$$

由 $MP<MB$ 有 $\angle PBM<\angle BPM$,

$$\therefore\ \angle PAB+\angle PBA<\angle APB,$$
$$\angle APB>\angle R.$$

当 $MP>MA$ 时，与上面相反，故有

$$\angle APB<\angle R.$$

(2) 设直角三角形 PAB 的斜边 AB 的中点为 M.

当 $MP<MA$，则

$$\angle APB>\angle R,$$

设 $MP>MA$，则

$$\angle APB<\angle R,$$

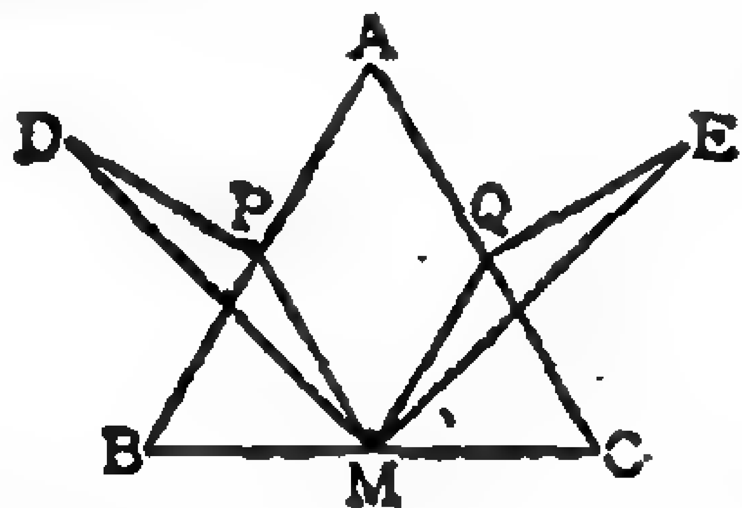
它们都与假设矛盾,

$$\therefore\ MP=MA.$$

168. 设 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 的中点为 P 及 Q，过 P、Q 分别向三角形外侧引垂线 PD、QE，若 $PD=\frac{1}{2}AB$，$QE=\frac{1}{2}AC$，则连结 D、E 与边 BC 的中点 M 的线段

DM、EM垂直且相等.

解 设Q、M分别是边AC、BC的中点，有



$$QM=\frac{1}{2}AB,$$

但由假设

$$PD=\frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore\quad QM=PD. \qquad ①$$

同理，

$$QE=PM. \qquad ②$$

又由$QM \parallel AB$，有

$$\angle MQC=\angle A,\ \angle CQE=\angle R,$$

$$\therefore\quad \angle MQE=\angle A+\angle R.$$

同理，$\angle DPM=\angle A+\angle R,$

$$\therefore\quad \angle MQE=\angle DPM. \qquad ③$$

由①、②、③，有

$$\triangle MQE\cong\triangle DPM,$$

$$\therefore\quad EM=DM.$$

而由$QM \parallel AB$，$AB\perp PD$，有

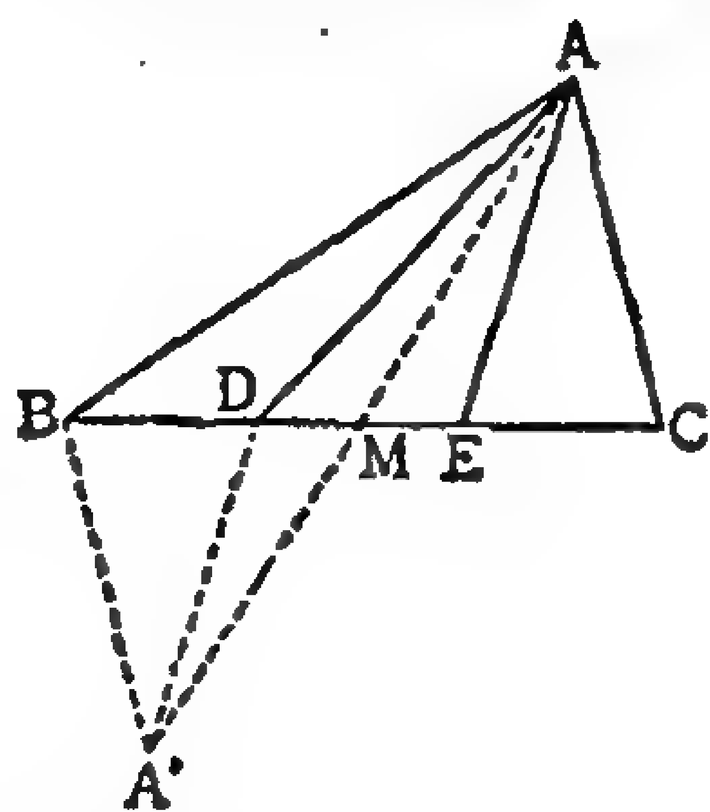
$$QM\perp PD.$$

同理，$QE\perp PM,$

$$\therefore\quad DM\perp ME.$$

169. 在$\triangle ABC$中，设边BC的三等分点为D、E，则有

$$AB+AC>AD+AE.$$



解 设BC的中点为M，则M也是DE的中点，因此延长AM，使

$$AM=MA'$$

时，有

$$AC=BA',\ AE=A'D.$$

$$\therefore\quad AB+AC=AB+BA',$$

$$AD+AE=AD+DA'.$$

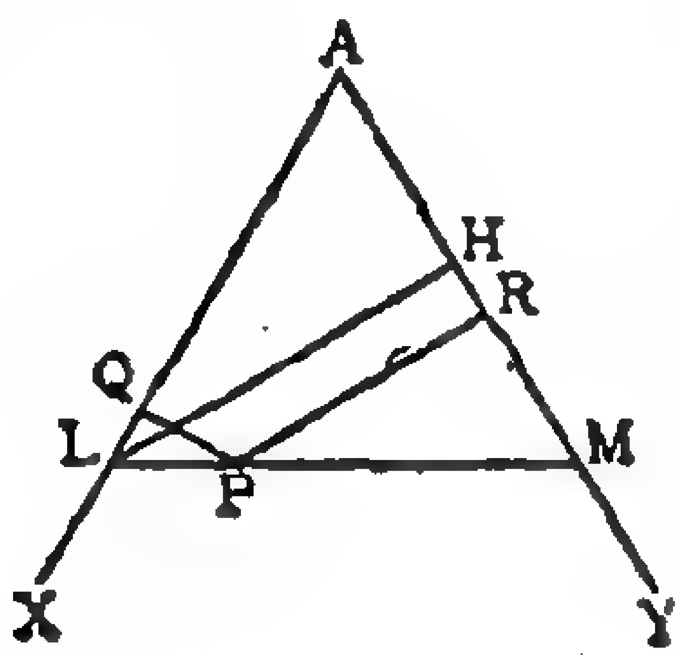
但是 $AB+BA'>DA+DA'$（问题**46**），

$$\therefore\quad AB+AC>AD+AE.$$

170. 从给定的$\angle XAY$内一点P，向AX、AY作垂线PQ、PR，使

$$PQ+PR=m,$$

则点P在定线段上。其中m是正的常数。



解 过点P引直线LPM，使它与AX、AY的夹角相等，设直线LPM与AX、AY的交点分别为L、M，由L向AY作垂线LH，根据问题**150**，有

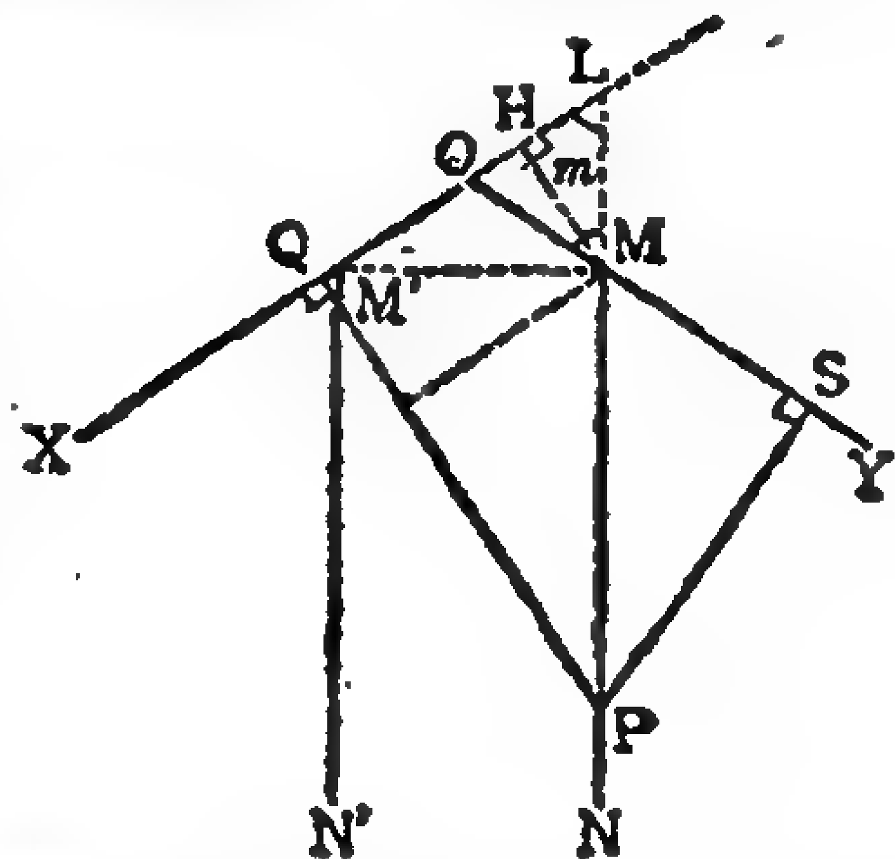
$$PQ+PR=LH.$$

可是由假设 $PQ+PR=m,$

所以 $LH=m,$

且LH为定长．因此L的位置被确定，所以等腰三角形ALM是定三角形，底LM是定线段，故点P在此定线段上.

171. 设两条半射线OX、OY相交于点O，从$\angle XOY$内一点P向OX、OY引垂线，其垂足分别为Q、S，则使PS与PQ之差为一常数m的点P在定直线上.

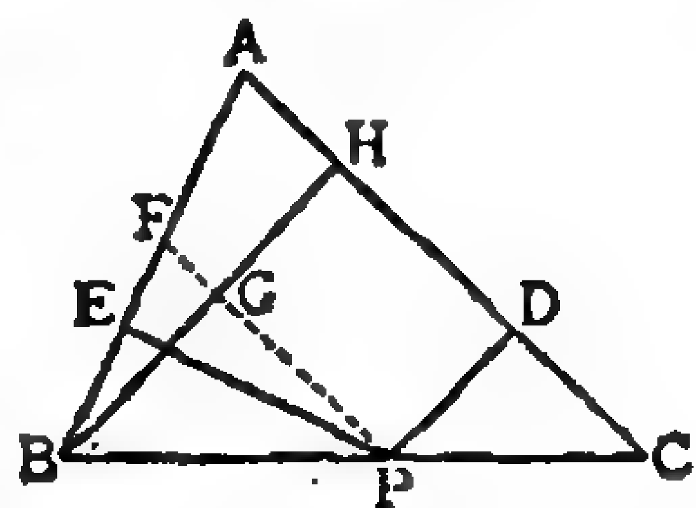


解 过P引直线PML，使它与XO的延长线、YO的夹角相等．设直线PML与XO、YO的交点分别为L、M，由M向OL作垂线MH，根据问题**151**有

$$PQ-PS=MH=m\ (\text{定值}).$$

因此，引到OX距离为m的平行线，点M的位置被确定．所以等腰三角形OLM是定三角形，点P在定线段LM的延长线的半射线MN上．或者给出YO的延长线，关于$\angle XOY$的平分线与直线MN对称的半直线$M'N'$的情况.

172. 在$\triangle ABC$中，设$AC>AB$，从B向对边作垂线BH，从BC上一点P向AB、AC作垂线分别为PE、PD，则有$PD+PE>BH$.



解 从P引AC的平行线分别交AB、BH于F、G，在$\triangle FBP$中，

$$FB<FP\ (\because\ AB<AC)$$

且 $PE\perp BF,\ BG\perp PF.$

$$\therefore\quad PE>BG,$$

$$\therefore\quad PE+PD>BG+GH,$$

即 $PD+PE>BH.$

173. 设两条直线相交于点 Q，在其中一条上取三点 A、B、C，使

$$QA=AB=BC;$$

在另一条上取三点 L、M、N，使

$$LQ=QM=MN,$$

则三条直线 AL、BN、CM 相交于一点 P。

解 设 CM 与 BN 相交于点 P。因为

$$QA=AB,\ QM=MN,$$

所以 $\qquad AM \parallel BN$。

又因为 $\qquad AB=BC$，

$$\therefore\ CP=PM.$$

这样，在 $\triangle LCM$ 中，CQ 是中线，且

$$CA=\frac{2}{3}CQ.$$

所以 A 是 $\triangle LCM$ 的重心，故 LA 过 CM 的中点 P。

174. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC>AB$，若在 CA 上取 $CD=AB$，E、F 分别为 AD、BC 的中点，连结 FE 并延长与 BA 的延长线相交于点 G，则

$$AE=AG.$$

解 设 H 为 BD 的中点，则

$$EH \parallel AB,$$

$$EH=\frac{1}{2}AB,$$

$$HF \parallel CD,$$

$$HF=\frac{1}{2}CD.$$

由假设 $\qquad AB=CD$，

$$\therefore\ HE=HF,$$

$$\therefore\ \angle HEF=\angle HFE.$$

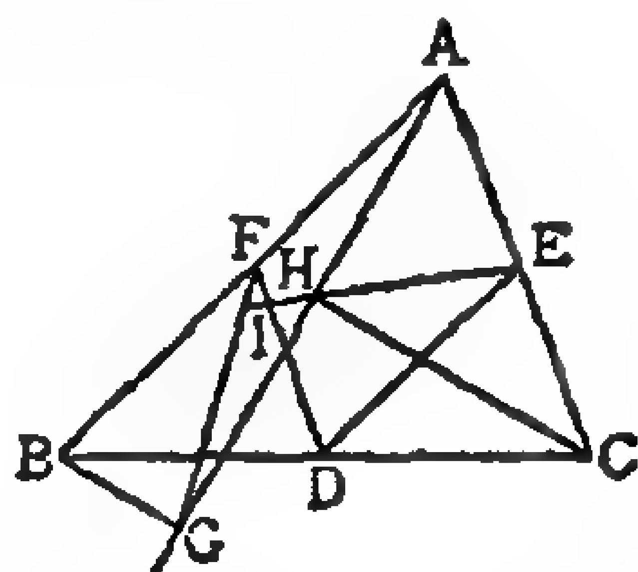
又因为 $\quad \angle G=\angle HEF$ (同位角)，

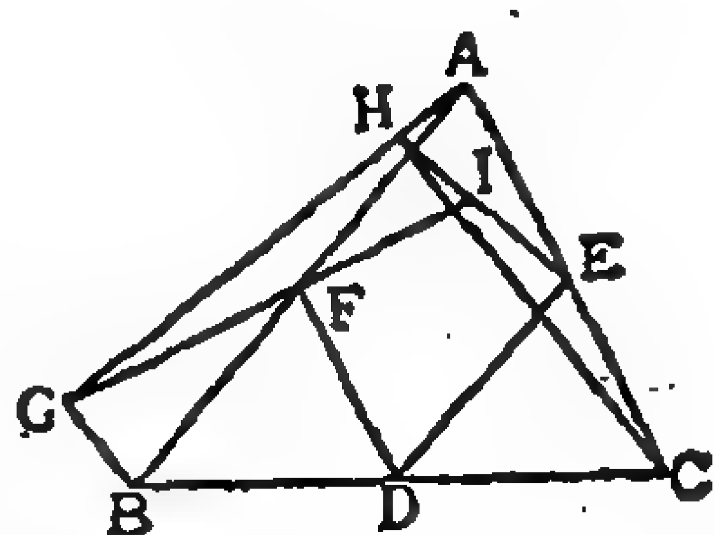
$\qquad\qquad \angle AEG=\angle HFE$ (同位角)。

$$\therefore\ \angle G=\angle AEG,$$

$$\therefore\ AE=AG.$$

175. 设 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点，又从 B、C 向过顶点 A 的任意直线作垂线，其垂足分别为 G、H，EH、FG 或其延长线的交点为 I，则 $\angle EIF$ 与 $\angle EDF$ 相等或互补。





解 在直角三角形 ABG、ACH 中，因为 F、E 都是斜边的中点，

$$\therefore\ \angle FGA=\angle FAG. \qquad ①$$

$$\angle AHE=\angle CAH,$$

故

$$\angle IHG=\angle CAH \qquad ②$$

$$(或\ \angle IHG=2\angle R-\angle CAH).$$

若取 ①、② 之和或差，则

$$\angle EIF=\angle A \quad 或 \quad 2\angle R-\angle A.$$

但因为 $AFDE$ 是平行四边形，

$$\therefore\ \angle EDF=\angle A.$$

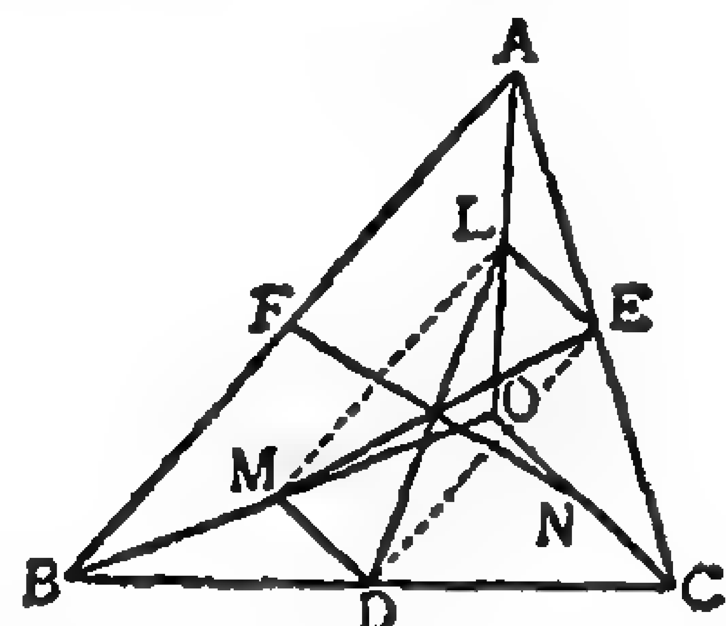
故 $\qquad \angle EIF=\angle EDF$

或 $\qquad 2\angle R-\angle EDF$，

即 $\qquad \angle EIF=\angle EDF$

或 $\qquad 2\angle R-\angle EIF=\angle EDF$.

176. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，L、M、N 分别是 AO、BO、CO 的中点，D、E、F 为各边 BC、CA、AB 的中点，则直线 DL、EM、FN 相交于一点。



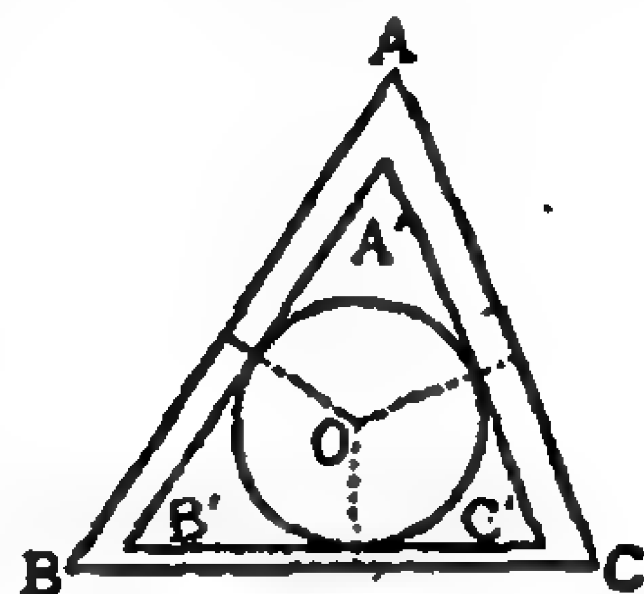
解 在 $\triangle AOC$ 中，因为 L、E 分别为 AO、AC 的中点，

$$\therefore\ LE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}OC,$$

同理，$\qquad MD \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}OC.$

故 $LMDE$ 是平行四边形，所以 EM 过 DL 的中点。

同理，$DNLF$ 也是平行四边形，所以 FN 也过 DL 的中点。故 DL、EM、FN 相交于一点。



177. 设在三角形内部有一个圆，证明三角形的周长大于圆

周长.

解 设在$\triangle ABC$内有一个圆O，从圆心O向边BC、CA、AB作垂线，过这些垂线与圆周的交点引圆O的切线形成的三角形为$A'B'C'$，则$\triangle A'B'C'$在$\triangle ABC$内部，故

$$AB+BC+CA>A'B'+B'C'+C'A'. \quad ①$$

设圆O的半径为r，显然

$$\pi r^2<\frac{1}{2}r(A'B'+B'C'+C'A'),$$

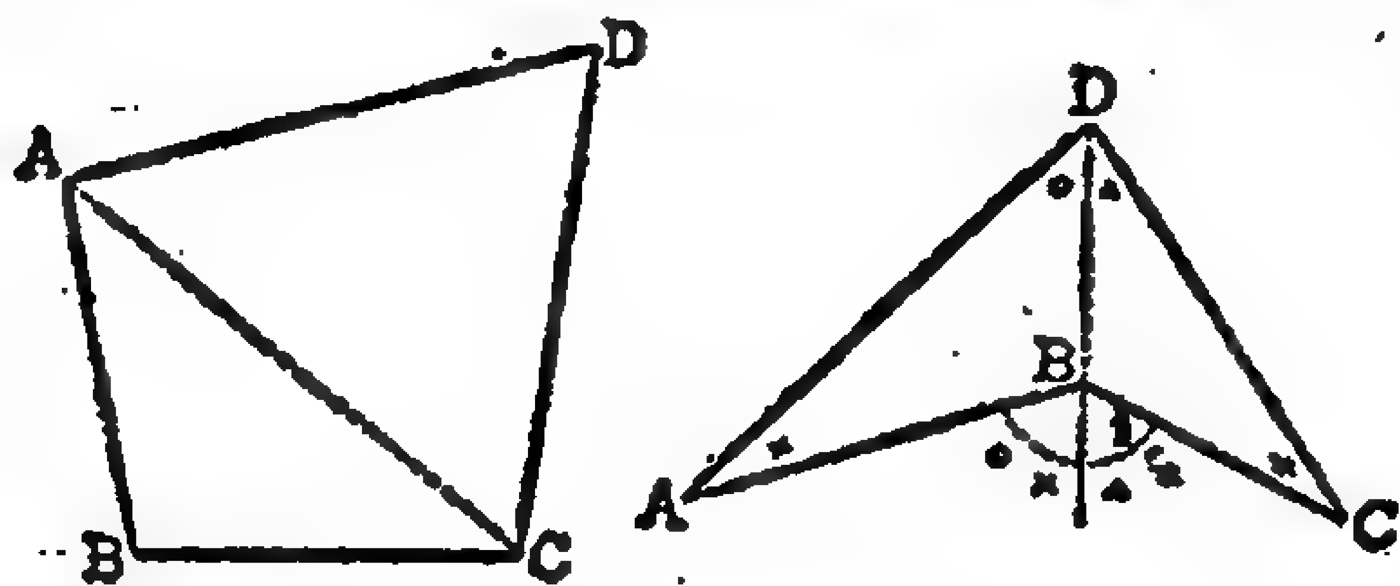
$$\therefore \quad 2\pi r<A'B'+B'C'+C'A'.$$

由①，得 $2\pi r<AB+BC+CA$.

3. 四边形、多边形

(1) 四边形

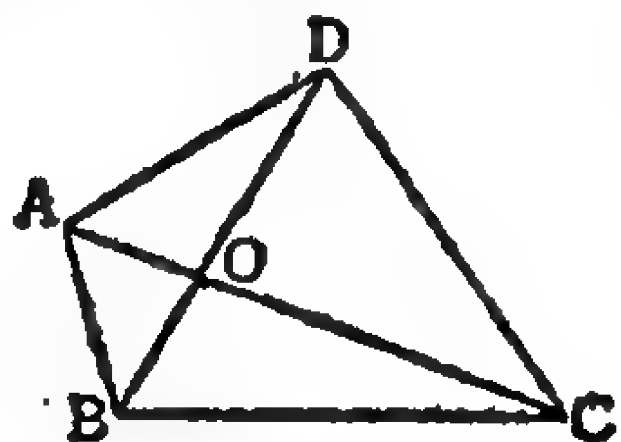
178. 四边形的内角和等于四直角.



解 在四边形$ABCD$中，引对角线AC把四边形分成两个三角形：$\triangle ABC$、$\triangle ADC$. 由于三角形的内角和等于$2\angle R$，这两个三角形的内角和即为四边形$ABCD$的内角和，所以四边形$ABCD$的内角和等于$4\angle R$.

本题对凹四边形显然也成立，如图.

179. 四边形的周长大于两条对角线之和，小于对角线之和的两倍.



解 设四边形为$ABCD$，引对角线AC、BD，则有

$$BD<AB+AD,\ BD<BC+CD,$$
$$AC<AD+CD,\ AC<AB+BC.$$

$$\therefore \quad 2(AC+BD)$$
$$<2(AB+BC+CD+DA),$$

即 $AC+BD<AB+BC+CD+DA$.

又设AC、BD的交点为O，则

$$AB<AO+BO,\ BC<BO+CO,$$
$$CD<DO+CO,\ AD<DO+AO.$$

$$\therefore \quad AB+BC+CD+DA$$
$$<2(AO+BO+CO+DO),$$

即 $AB+BC+CD+DA<2(AC+BD)$,

故 $AC+BD<AB+BC+CD+DA$
$$<2(AC+BD).$$

180. 关于四边形的四组条件写在下面，对应于每组右边的条件，如果左边条件是充分必要条件用A表示，如果是必要条件而不是充分条件用B表示，如果是充分条件而不是必要条件用C表示，如果既不是必要条件又不是充分条件用D表示.

(1)	是梯形	内接于圆
(2)	对角线互相平分	是长方形
(3)	是等腰梯形	对角线长相等
(4)	对角线长相等的平行四边形	是长方形

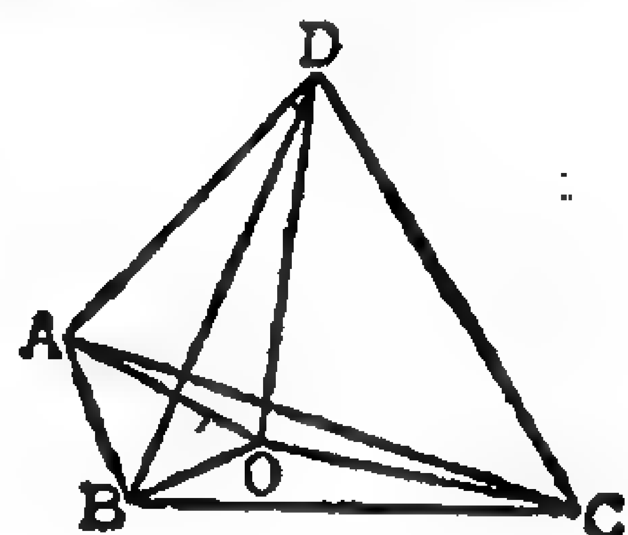
解 (1) 虽然四边形是梯形，但也不一定是内接于圆；而内接于圆的四边形也不一定都是梯形，所以是D.

(2) 对角线互相平分的四边形，虽然是平行四边形，但也不一定就是长方形；而长方形是平行四边形中的一种，对角线互相平分，所以是C.

(3) 等腰梯形的对角线相等，但对角线相等的四边形不一定是等腰梯形，所以是B.

(4) 这个条件是A.

181. 若$ABCD$为任意四边形，点O是异于对角线交点的任意一点，则四个线段OA、OB、OC、OD之和大于对角线AC、BD之和.



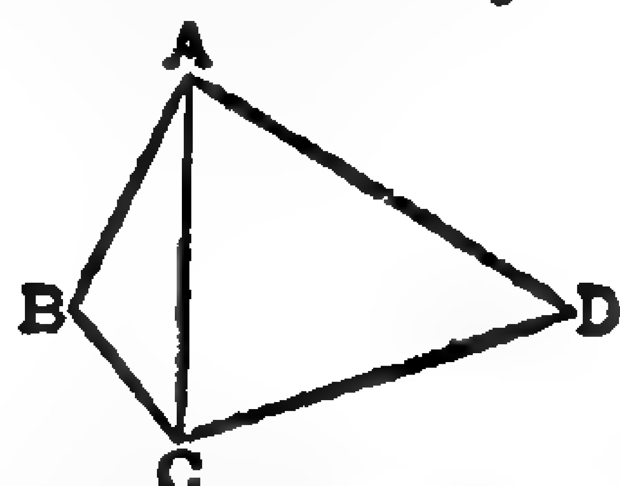
解 如图，

$$AO+CO>AC,\ BO+DO>BD,$$

$$\therefore \quad AO+BO+CO+DO>AC+BD.$$

182. 在四边形$ABCD$中，设边AD最大，边BC最小，则

$$\angle BCD>\angle BAD,$$
$$\angle ABC>\angle ADC.$$



解 在四边形$ABCD$中，因为边AD最大，

$\therefore\quad AD>CD,$

故　$\angle DCA>\angle DAC.$

又因为边 BC 最小，

$\therefore\quad AB>BC,$

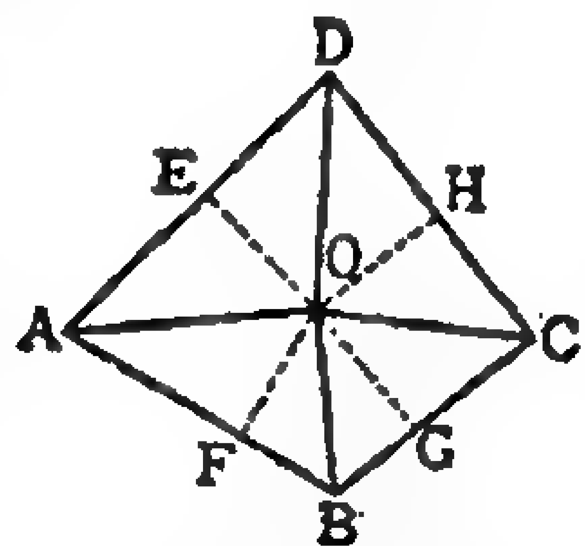
故　$\angle BCA>\angle BAC.$

因此　$\angle DCA+\angle BCA$
$>\angle DAC+\angle BAC,$

即　$\angle BCD>\angle BAD.$

同理，$\angle ABC>\angle ADC.$

183. 若四边形各角的平分线交于同一点，则其一组对边之和等于另一组对边之和。



解 设四边形 $ABCD$ 的各角平分线交于一点 O，从 O 向 AD、AB、BC、CD 作垂线 OE、OF、OG、OH，则在 $\triangle OAE$、$\triangle OAF$ 中，因为 $\angle OAE=\angle OAF$，斜边 OA 公共。

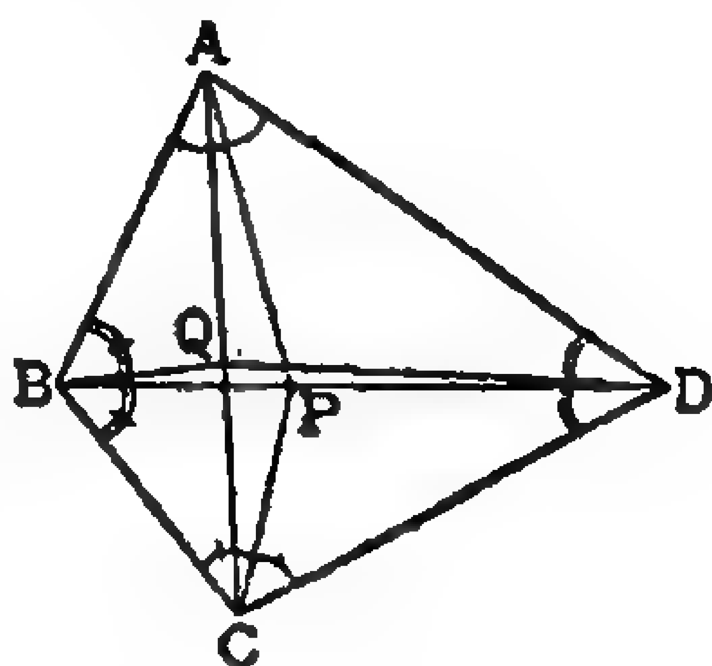
$\therefore\quad AE=AF.$

同理，$BF=BG$，$CG=CH$，$DH=DE$.

$\therefore\quad AE+DE+BG+CG$
$=AF+BF+DH+CH,$

即　$AD+BC=AB+CD.$

184. 在四边形 $ABCD$ 中，设 $\angle A$、$\angle C$ 的平分线的交点在对角线 BD 上，证明 $\angle B$、$\angle D$ 的平分线的交点在对角线 AC 上。



解 若 $\angle A$、$\angle C$ 的平分线的交点 P 在 BD 上，则

$$AB:AD=BP:PD=BC:CD.$$

$$\therefore\quad AB:BC=AD:CD. \qquad ①$$

若 $\angle B$ 的平分线与 AC 相交于点 Q，则

$$AB:BC=AQ:QC,$$

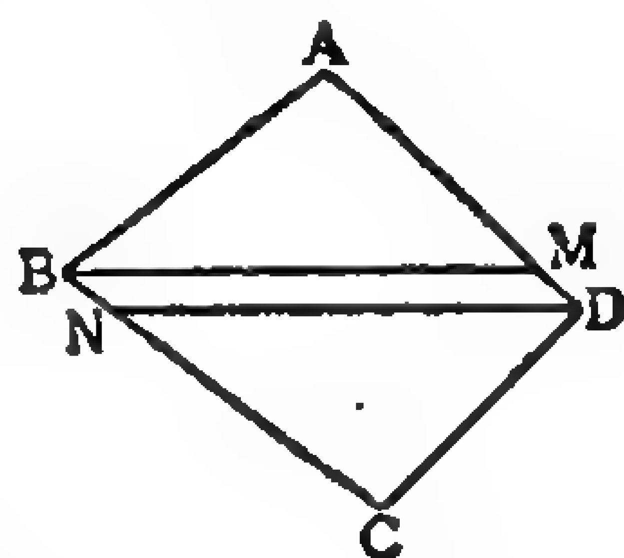
故由①，有

$$AD:CD=AQ:QC.$$

所以 DQ 平分 $\angle D$，即 $\angle B$、$\angle D$ 的平分线的交点在 AC 上。

185. 在四边形 $ABCD$ 中，若对角 $\angle A$ 与 $\angle C$ 相等，则另一组对角 $\angle B$ 与 $\angle D$ 的平分线相互平行。

解 如图，设 BM、DN 分别为 $\angle B$、$\angle D$ 的平分线。在四边形 $ABCD$ 中，



$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D$
$=4\angle R,$

又　$\because\quad \angle A=\angle C,$

$\therefore\quad 2\angle A+\angle B+\angle D$
$=4\angle R.\qquad ①$

因为 BM 是 $\angle B$ 的平分线，所以在 $\triangle ABM$ 中，

$$\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\angle AMB=2\angle R,$$

$$\therefore\quad 2\angle A+\angle B+2\angle AMB=4\angle R. \qquad ②$$

由①、②，有

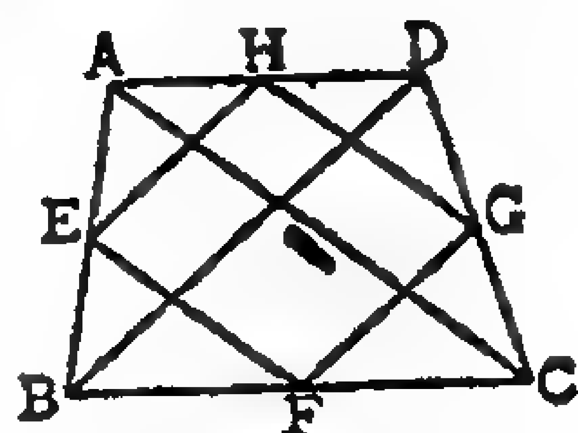
$$\angle D=2\angle AMB,$$

但是　$2\angle ADN=\angle D,$

$\therefore\quad \angle AMB=\angle ADN.$

故　$BM\parallel DN.$

186. 试证顺次连结四边形各边中点的直线形是平行四边形，其周长等于原四边形的对角线之和。



解 设 E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点，由于 EF 是 $\triangle ABC$ 的两边 AB、BC 中点的连线，

$$\therefore\quad EF=\frac{1}{2}AC.$$

同理　$GH=\frac{1}{2}AC,$

$$FG=\frac{1}{2}BD,$$

$$EH=\frac{1}{2}BD.$$

$\therefore\quad EF=GH,\ FG=EH.$

故 $EFGH$ 是平行四边形。

又　$EF+GH=AC$，$FG+EH=BD$，

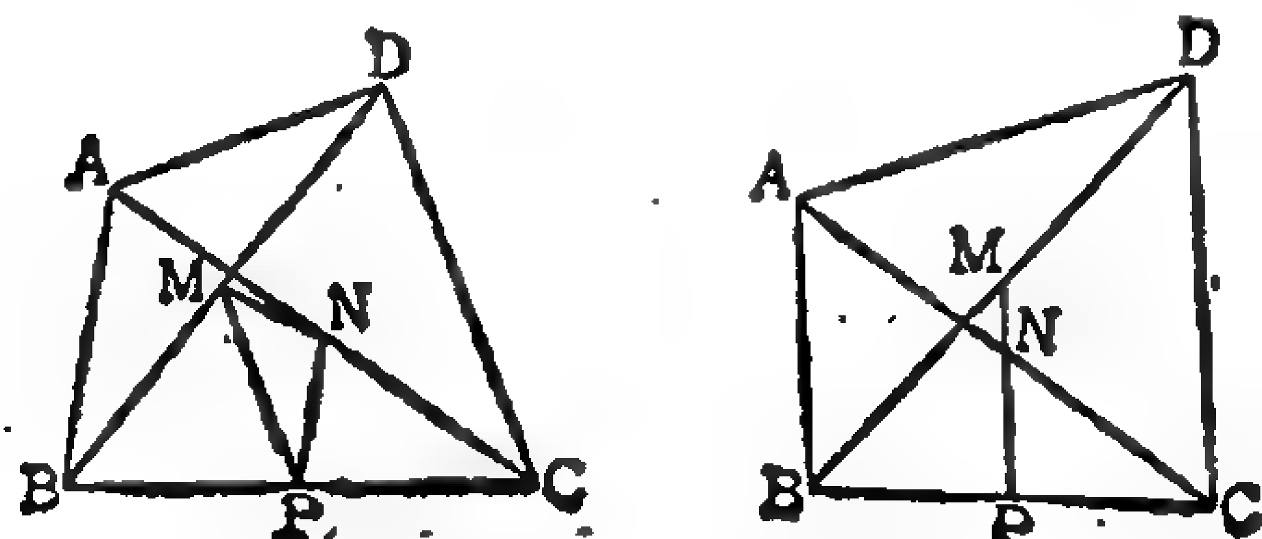
$\therefore\quad EF+GH+FG+EH=AC+BD.$

187. 连结四边形 $ABCD$ 的两对角线 BD、AC 中点的线段 MN，不小于相对两边的差之半。

解 设 P 为 BC 的中点，连结 PM、PN，则

$$PM=\frac{1}{2}CD,\ PN=\frac{1}{2}AB.$$

在 $\triangle PMN$ 中，



$$PM \sim PN < MN$$

即 $\frac{1}{2}(CD \sim AB) < MN$.

同理，设 P 为 AB 的中点，则有

$$\frac{1}{2}(AD \sim BC) < MN.$$

若 $AB \parallel DC$，则 M、N、P 在一条直线上，有

$$PM = \frac{1}{2}DC,\ PN = \frac{1}{2}AB.$$

$$\therefore\ MN = PM - PN = \frac{1}{2}(DC - AB).$$

同理，若 $AD \parallel BC$，则

$$MN = \frac{1}{2}(AD - BC).$$

188. 若四边形 $ABCD$ 的两边 AB、CD 相等，则延长它们与另两边 BC、AD 的中点连线所夹的角也相等。

解 设 M、N 为 AD、BC 的中点，MN 的延长线与 BA、CD 的延长线分别相交于 P、Q. 又 E 为 BD 的中点，连结 EM、EN，则

$$EM = \frac{1}{2}AB,\ EN = \frac{1}{2}CD.$$

$$\therefore\ EM = EN\ (\because\ AB = CD),$$

$$\therefore\ \angle EMN = \angle ENM.$$

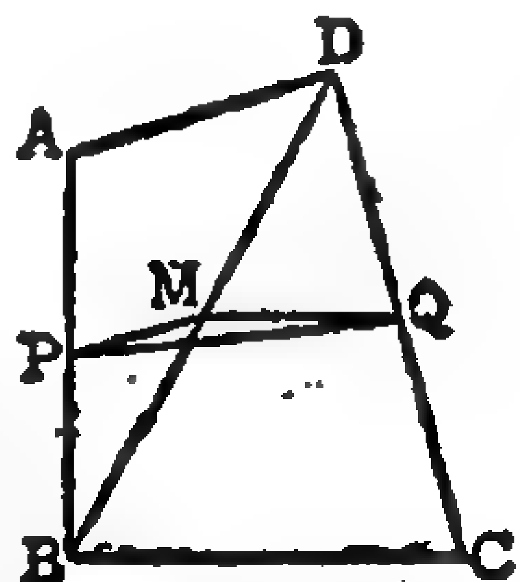
由于 $EM \parallel AB$，$EN \parallel CD$，因此

$$\angle P = \angle EMN,$$

$$\angle Q = \angle ENM,$$

$$\therefore\ \angle P = \angle Q.$$

189. 连结四边形对边中点的线段不大于另两边的和之半。若该线段等于其和之半，则这个四边形是梯形。



解 设四边形 $ABCD$ 的对边 AB、CD 的中点分别为 P、Q，BD 的中点为 M，则有

$$PM = \frac{1}{2}AD,\ MQ = \frac{1}{2}BC.$$

又在 $\triangle MPQ$ 中，

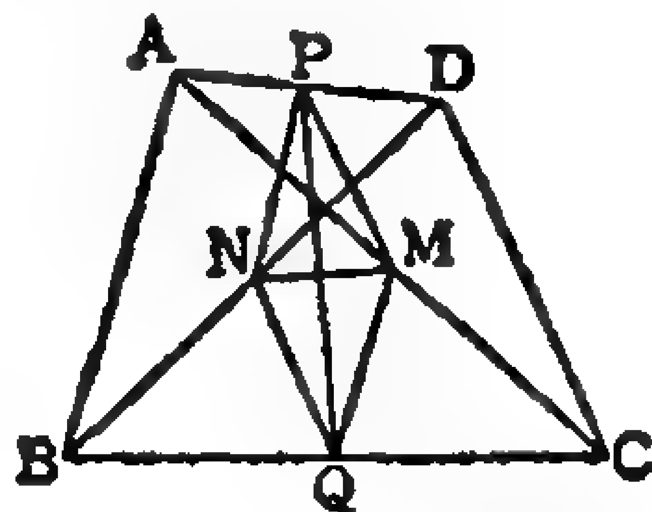
$$PQ < PM + MQ,$$

即 $PQ < \frac{1}{2}(AD + BC)$.

若 $PQ = PM + MQ$,

则 M 在 PQ 上，从而 AD、BC 都平行于 PQ，所以四边形 $ABCD$ 为梯形。

190. 在四边形 $ABCD$ 中，设 $AB = CD$，P、Q 分别是 AD、BC 的中点，M、N 分别是对角线 AC、BD 的中点，证明 PQ 与 MN 互相垂直。



解 由于 P、M 是 AD、AC 的中点，Q、N 是 BC、BD 的中点，

$$\therefore\ PM = QN = \frac{1}{2}DC,$$

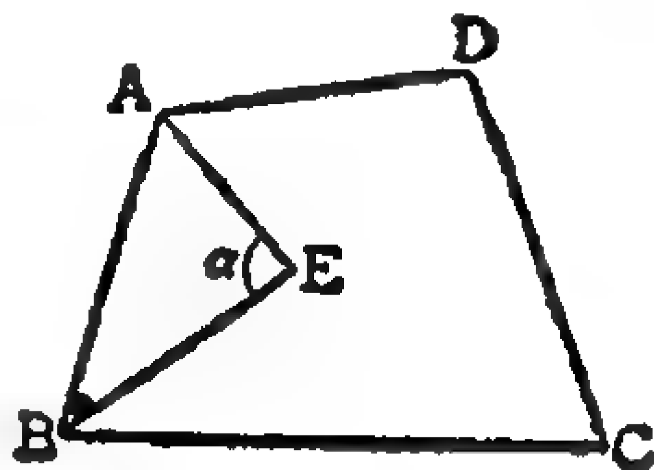
同理 $PN = QM = \frac{1}{2}AB$.

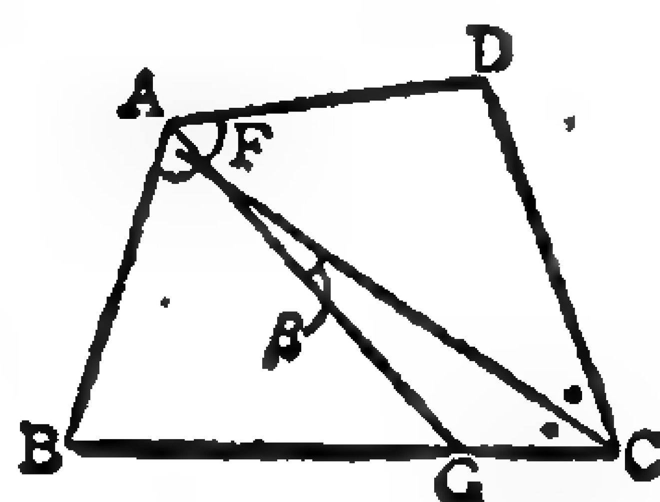
又因为 $AB = CD$，所以四边形 $PMQN$ 的四边都相等，故为菱形。

$$\therefore\ PQ \perp MN.$$

191. 在四边形 $ABCD$ 中，设 α 为 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的平分线的交角，β 为 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的平分线的交角，则

$$\alpha = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D),\ \beta = \frac{1}{2}(\angle B \sim \angle D).$$





解 在 $\triangle ABE$ 中，

$$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \alpha = 2\angle R. \quad ①$$

又因为四边形内角和等于 $4\angle R$,

$$\therefore\ \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 2\angle R. \quad ②$$

由①、②，得

$$\alpha = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D).$$

又　$\beta=\angle AGB-\frac{1}{2}\angle C$

$=2\angle R-\left(\frac{1}{2}\angle A+\angle B\right)-\frac{1}{2}\angle C$

$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)$

$-\left(\frac{1}{2}\angle A+\angle B\right)-\frac{1}{2}\angle C$

$=\frac{1}{2}(\angle D-\angle B)$。

192. 若四边形各角的平分线相交形成第二个四边形，证明

(1) 第二个四边形的对角之和为两直角；

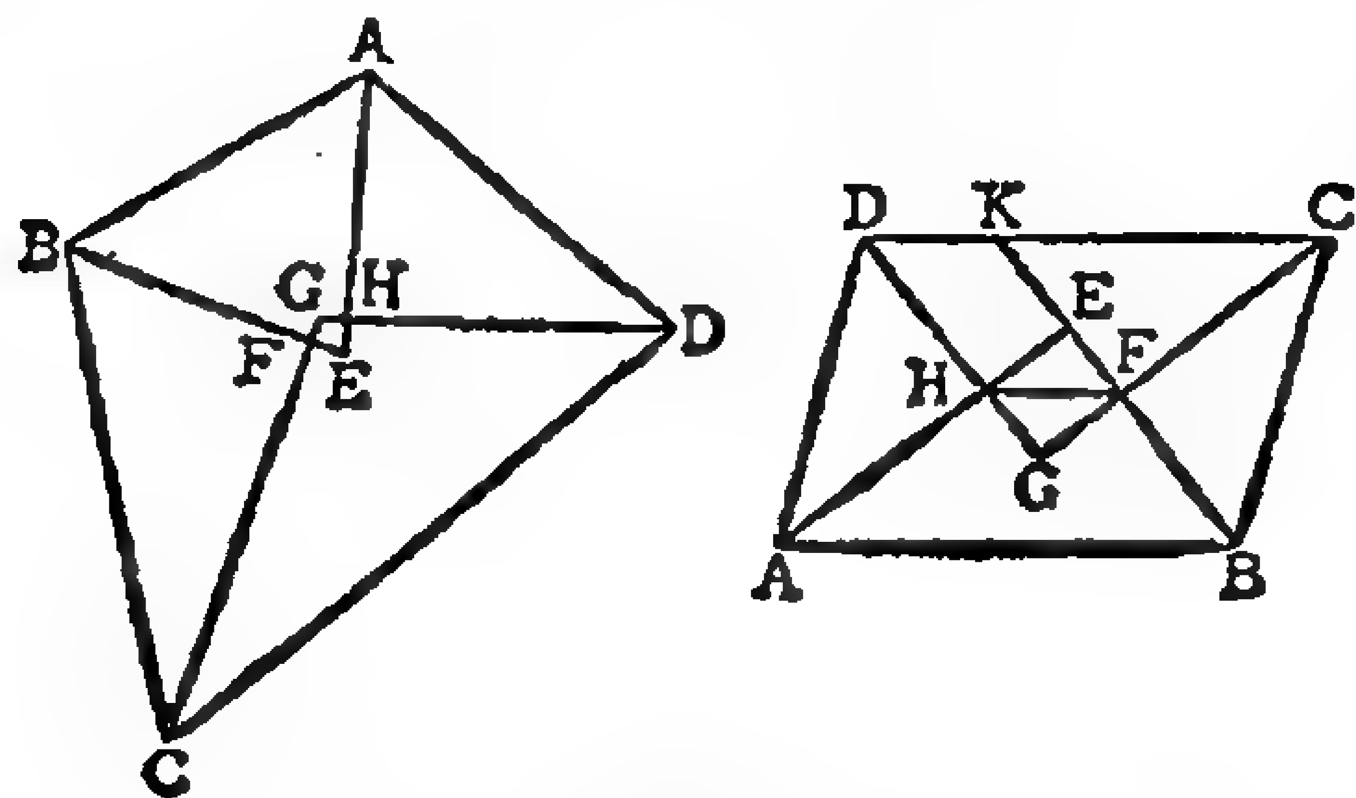
(2) 若第一个四边形是平行四边形，则第二个是长方形，其两条对角线平行于第一个四边形的各边，并等于其两邻边之差；

(3) 若第一个是长方形，则第二个是正方形。

解 (1) 设 AH、BE、CF、DG 为四边形 $ABCD$ 各角的平分线，其交点依次为 E、F、G、H，则

$$\angle BAE+\angle ABE+\angle DCG+\angle CDG=2\angle R,$$

故　　$\angle HEF+\angle HGF=2\angle R$。



(2) 当 $ABCD$ 为平行四边形时，因为

$$\angle DAB+\angle CBA=2\angle R,$$

所以　　$\angle EAB+\angle EBA=\angle R$，

故　　$\angle HEF=\angle R$。

同理，在以 F、G、H 为顶点的角也为直角。所以 $EFGH$ 是矩形。

并且在 $\triangle ADH$、$\triangle BCF$ 中，

$\because$　$AD=BC$，$\angle DAH=\angle BCF$，

$\angle ADH=\angle CBF$，

$\therefore$　$\triangle ADH\cong\triangle BCF$，

$\therefore$　$DH=BF$。

又因为 CF 是 $\angle C$ 的平分线，

$\therefore$　$BF=FK$。

故　　$DH=FK$，

并且　　$DH\parallel FK$，

$\therefore$　$HF\parallel DC$。

同理，$EG\parallel DA$。又因为 $EFGH$ 是矩形，

$\therefore$　$EG=HF=DK=DC-CK$

$=DC-CB$。

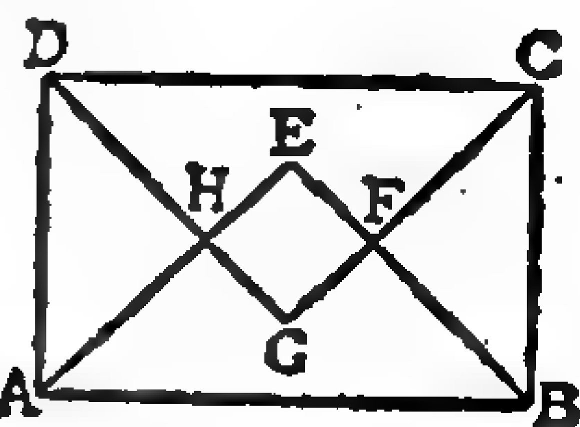
(3) 当 $ABCD$ 是矩形时，由于

$\angle EAB=\angle EBA$

$=45°$。

$\therefore$　$EA=EB$，

且　$\angle E=\angle R$。



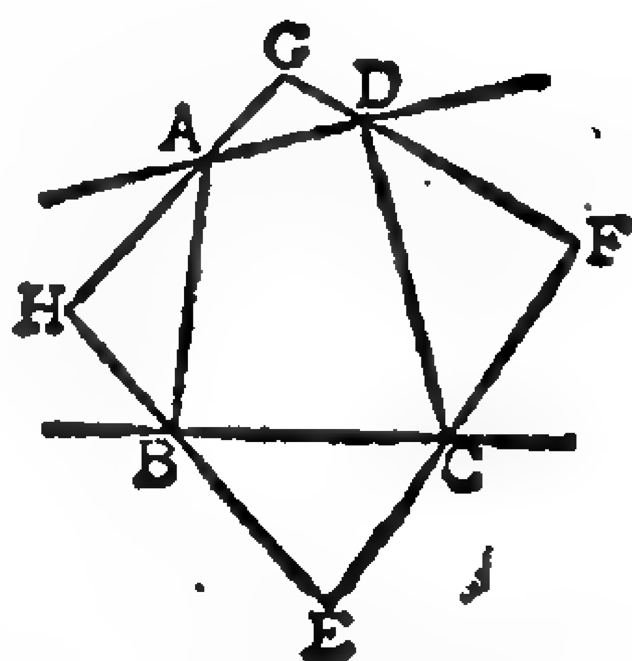
因为 $\triangle DAH$、$\triangle CBF$ 是全等的等腰直角三角形，有

$AH=FB$，

$\therefore$　$EH=EF$。

故 $EFGH$ 是正方形。

193. 以四边形外角平分线作成的四边形的对角互补。



解 设由四边形 $ABCD$ 的外角平分线作成的四边形为 $EFGH$。由于四边形 $ABCD$ 的外角之和为 $4\angle R$，所以每个角之半的和为 $2\angle R$。即

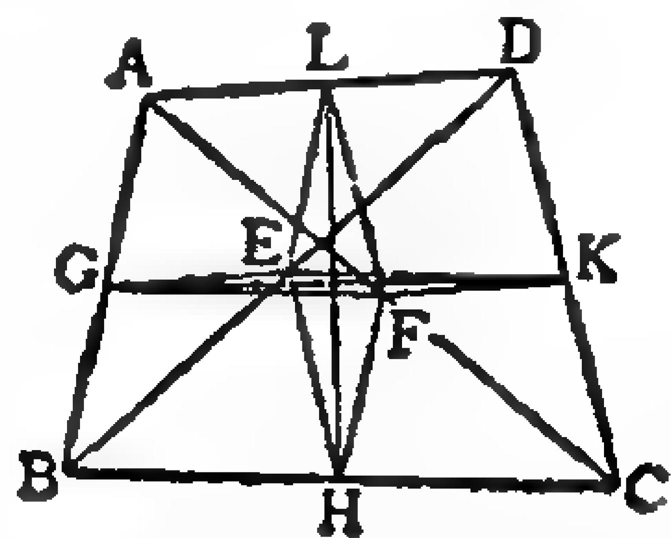
$$\angle HAB+\angle HBA+\angle FCD+\angle FDC=2\angle R。$$

但由于 $\triangle HAB$ 与 $\triangle FCD$ 的内角和是 $4\angle R$，

$\therefore$　$\angle H+\angle F=2\angle R$。

同理，$\angle E$ 与 $\angle G$ 互补。

194. 四边形两组对边中点的连线，相交于两对角线中点连线的中点。



解 设 G、K、L、H 分别为四边形 $ABCD$ 的两组对边 AB、CD 及 AD、BC 的中点，F、E 为对角线 AC、BD 的中点。由于 G、E，K、F 分别为 BA、BD，CD、CA 的中点。有 $GE\parallel AD$，$FK\parallel AD$，且

$$GE=\frac{1}{2}AD，FK=\frac{1}{2}AD。$$

从而　　$GE \mathrel{\underline{\parallel}} FK$，

因此四边形 $GEKF$ 为平行四边形，故 GK 过

EF 的中点。同理，若 L、H 分别为 AD、BC 的中点，则 $LEHF$ 是平行四边形，因此 LH 过 EF 的中点。所以 LH、GK 过 EF 的中点。

(2) 平行四边形

195. 平行四边形的对角相等，对边也相等。

解 作对角线 AC。因为

$$AD \parallel BC,$$
$$AB \parallel DC,$$

$$\therefore \quad \angle DAC = \angle ACB,$$
$$\angle BAC = \angle ACD \text{ (内错角)},$$

$$\therefore \quad \angle DAC + \angle BAC = \angle ACB + \angle ACD,$$

即 $$\angle BAD = \angle DCB.$$

同理， $$\angle B = \angle D.$$

又在 $\triangle ABC$、$\triangle CDA$ 中，AC 公共，其两端的两个角分别相等，因此这两三角形全等。

$$\therefore \quad AD = BC,$$
$$AB = DC.$$

196. 四边形 $ABCD$ 为平行四边形的充分必要条件是：对于四边形内任意一点 P，有

$$S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \square ABCD$$

的面积。

解 (1) 必要性

若 $ABCD$ 是平行四边形，过点 P 引 AB 的平行线与 AD、BC 分别交于 E、F，则 $ABFE$、$CDEF$ 都是平行四边形，所以有

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \square ABFE \text{ 的面积},$$

$$S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \square EFCD \text{ 的面积}.$$

$$\therefore \quad S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \square ABCD \text{ 的面积}.$$

(2) 充分性 若

$$S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \square ABCD \text{ 的面积},$$

则 $ABCD$ 是平行四边形。由点 P 作 AB 的平行线 EF 时，不论点 P 在 EF 上的何处，因为 $AB \parallel EF$，所以 $\triangle PAB$ 的面积一定。

但是，由假设

$$S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PCD}$$
$$= \frac{1}{2} \square ABCD \text{ 的面积(一定)}.$$

所以 $\triangle PCD$ 的面积总是一定，因此有

$$EF \parallel CD.$$
$$\therefore \quad AB \parallel CD.$$

同理，$AD \parallel BC$，故 $ABCD$ 是平行四边形。

197. 若在平行四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上，分别取点 P、Q、R、S，使

$$AP = BQ = CR = DS,$$

则 $PQRS$ 是平行四边形。

解 由于 $ABCD$ 是平行四边形，有

$$AD = BC.$$

而 $$DS = BQ,$$

$$\therefore \quad AS = CQ.$$

又 $$AP = CR, \ \angle A = \angle C,$$

$$\therefore \quad \triangle APS \cong \triangle CRQ,$$
$$\therefore \quad PS = QR.$$

同理， $$\triangle BPQ \cong \triangle DRS,$$
$$\therefore \quad PQ = RS.$$

故 $PQRS$ 是平行四边形。

198. 若平行四边形 $PQRS$ 的各顶点在另一个平行四边形 $ABCD$ 的各边上，则这两个平行四边形的对角线过同一点。

解 在 $\triangle APS$ 与 $\triangle CRQ$ 中，$PS = QR$，

$$\angle APS = \angle CRQ$$
$$(\because \ AP \parallel CR, \ PS \parallel QR).$$

又 $$\angle ASP = \angle CQR$$
$$(\because \ AS \parallel CQ, \ PS \parallel QR),$$

$$\therefore \quad \triangle APS \cong \triangle CRQ,$$
$$\therefore \quad AS \mathrel{\underline{\parallel}} CQ.$$

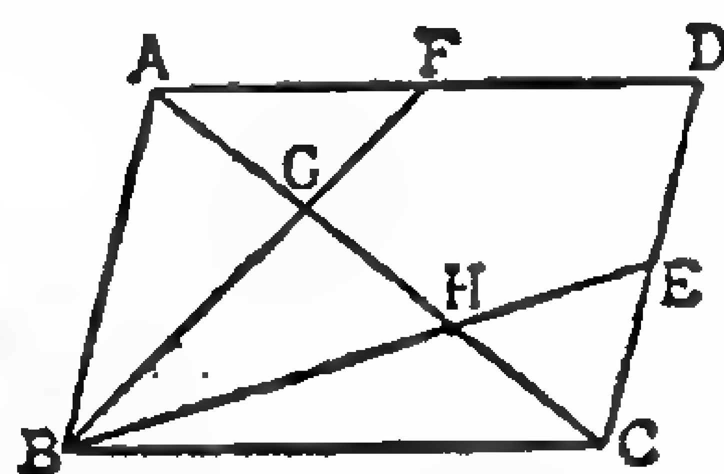
从而 $AQCS$ 是平行四边形。所以它的对角线 SQ 过 AC 的中点 M。同理，PR 也过 AC 的中点 M。但 BD、AC 相交于点 M，所以 AC、BD、PR、SQ 过同一点。

199. 若平行四边形 $ABCD$ 的对边 AB、DC 的中点分别为 E、F，则 DE、BF 三等分对角线 AC。

解 由于 $ABCD$ 是平行四边形，有

$$AB \perp\!\!\!= DC.$$

又 E、F 分别是 AB、DC 的中点，有



$$BE \perp\!\!\!= DF.$$

因此 $EBFD$ 是平行四边形，从而

$$ED \parallel BF.$$

但是在 $\triangle ABH$ 中，

$$BH \parallel EG,\ AE=BE,$$

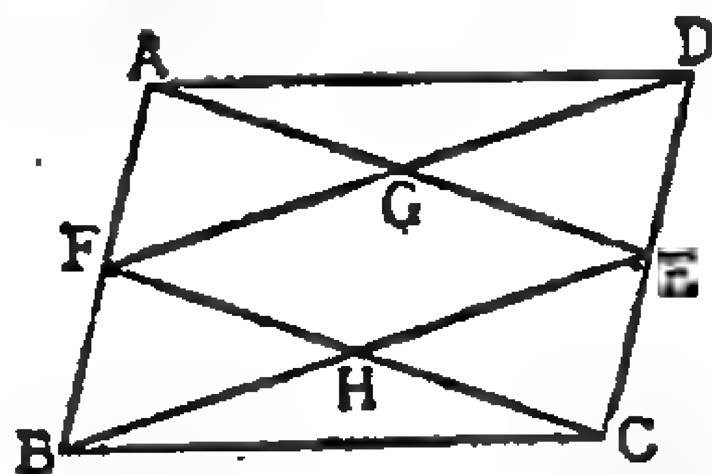
所以 G 是 AH 的中点，即

$$AG=GH.$$

同理，$$CH=GH,$$

$$\therefore\ AG=GH=HC.$$

200. 若平行四边形 $ABCD$ 的边 CD、AD 的中点分别为 E、F，则 BE、BF 三等分 AC。



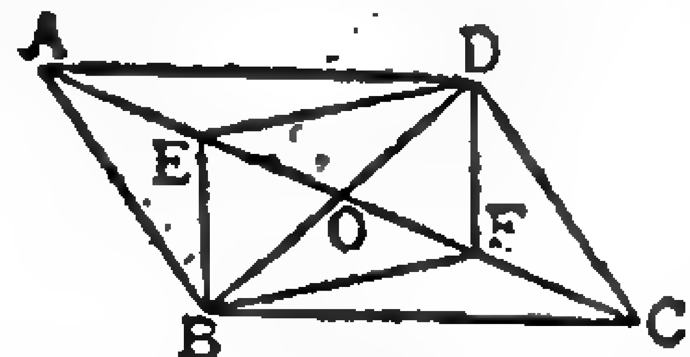
解 设 BF、BE 与 AC 的交点分别为 G、H，则根据上题有

$$AH=2HC,$$

同理，$$GC=2AG.$$

故 G、H 是 AC 的三等分点。

201. 设平行四边形 $ABCD$ 的对边 AB、CD 的中点分别为 F、E，AE 与 FD 交于 G，BE 与 CF 交于 H，则 $FHEG$ 为平行四边形。

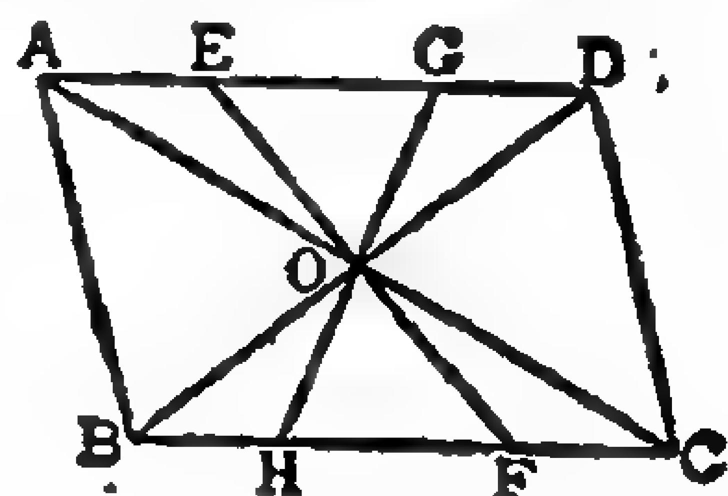


解 因为 $AB \perp\!\!\!= CD$，所以 $AF \perp\!\!\!= EC$。因此 $AECF$ 是平行四边形，

$$\therefore\ AE \parallel FC.$$

同理 $FD \parallel BE$，所以 $GEHF$ 是平行四边形。

202. 若在平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上取两点 E、F，使 $AE=CF$，则 $BEDF$ 也是平行四边形。



解 设 O 为 BD、AC 的交点。因为 $ABCD$ 是平行四边形，所以

$$AO=CO.$$

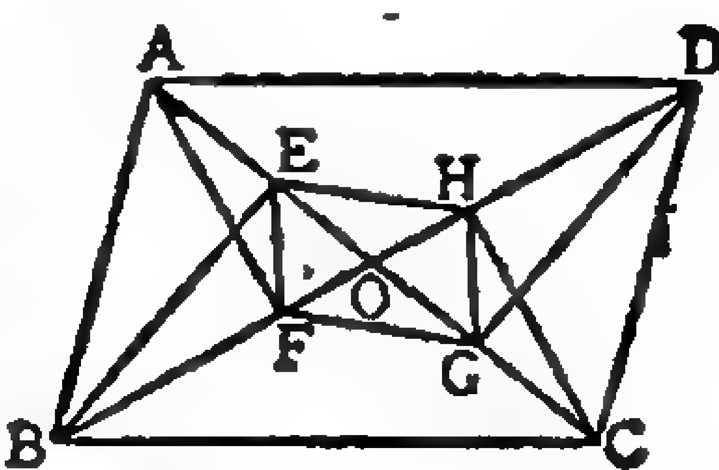
又 $$AE=CF,$$

故 $$EO=FO,$$

而 $$BO=DO,$$

所以 $BEDF$ 是平行四边形。

203. 若过平行四边形两对角线的交点引两条直线，则它们在平行四边形一组对边或其延长线上截得的线段相等。



解 设过点 O 引两条直线 EF、GH 与 AD、BC 的交点分别为 E、G、F、H。在 $\triangle OEG$、$\triangle OFH$ 中，

$$\angle EOG=\angle FOH,$$

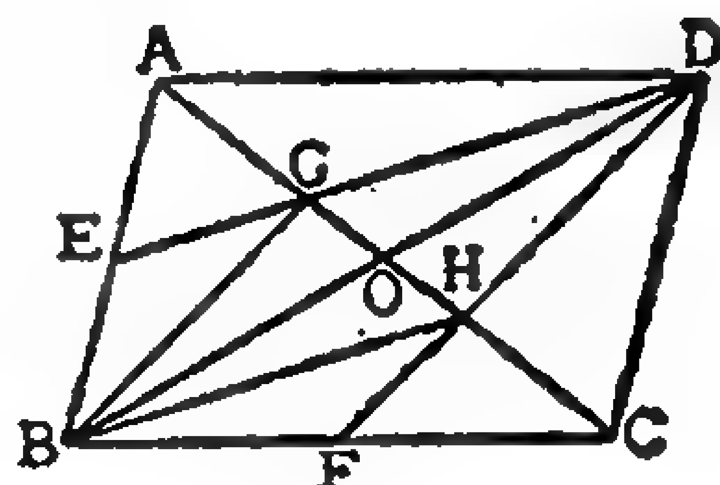
又 $$OE=OF,\ OG=OH$$

$$(因为 \triangle ODE \cong \triangle OBF,$$
$$\triangle ODG \cong \triangle OBH).$$

故 $$\triangle OEG \cong \triangle OFH,$$

$$\therefore\ EG=FH.$$

204. 若从平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A、B、C、D 向对角线引垂线，其垂足分别为 F、E、H、G，则四边形 $EFGH$ 是平行四边形。



解 设对角线的交点为 O。因为 $ABCD$ 是平行四边形，所以

$$AO=OC.$$

在 $\triangle AOF$、$\triangle COH$ 中，

$$AO=CO,$$
$$\angle AFO=\angle R=\angle OHC,$$
$$\angle AOF=\angle HOC.$$
$$\therefore\ \triangle AOF \cong \triangle COH,$$
$$\therefore\ OF=OH.$$

同理，由 $$\triangle BEO \cong \triangle DGO,$$

有 $$OE=OG.$$

因此由于四边形 $EFGH$ 的对角线互相平分，所以为平行四边形。

205. 设 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC 的中点分别为 E、F，在 AC 上取两点 G、H，使

$$AG=GH=HC,$$

若 EG 与 FH 的交点为 D，则 $ABCD$ 是平行四边形。

A D G E O H B F C

解 因为 E、G 是 $\triangle ABH$ 的边 AB、AH

的中点，

$$\therefore\quad EG \parallel BH.$$

同理，$FH \parallel BG$.

因此 $BGDH$ 是平行四边形．若假设 BD、AC 的交点为 O，则

$$OG=OH.$$

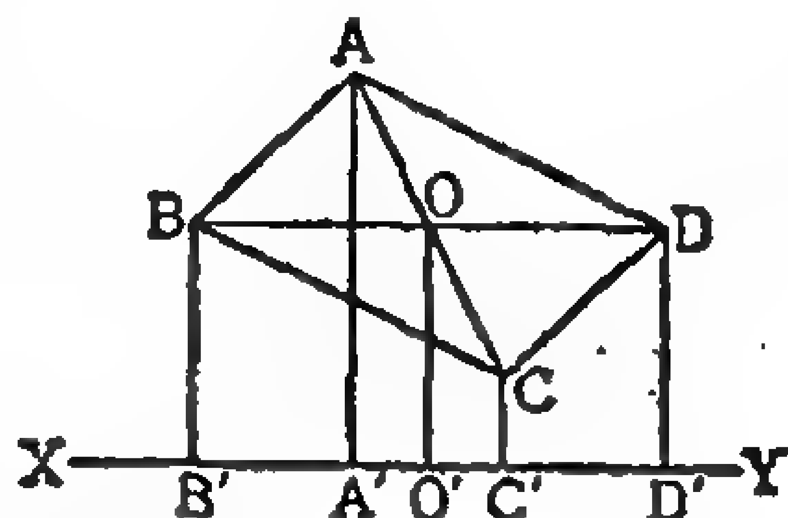
从而 $OA=OC$,

又 $OB=OD$,

故 $ABCD$ 是平行四边形．

206. 在平行四边形 $ABCD$ 中，

$$2AB=AD,$$



把 AB 向两边延长并在其上取点 E、F，使

$$AE=AB=BF,$$

设 EC、FD 的交点为 G，则

$$\angle EGF=\angle R.$$

解 因为 $AD=2AB$, $AB=BF$,

$$\therefore\quad AD=AF,$$

$$\therefore\quad \angle ADF=\angle AFD.$$

又 $AF \parallel DC$,

$$\therefore\quad \angle FDC=\angle AFD,$$

$$\therefore\quad \angle ADF=\angle FDC.$$

同理，$\angle BCE=\angle ECD$,

且 $AD \parallel BC$.

$$\therefore\quad \angle GDC+\angle GCD=\angle R,$$

从而 $\angle DGC=\angle R$,

即 $\angle EGF=\angle R$.

207. 从平行四边形 $ABCD$ 的两顶点 A 和 C，向四边形外的一条直线 XY 所引垂线之和等于另两顶点 B 和 D 向 XY 所引垂线之和．

解 设 AC、BD 的交点为 O，从 A、B、C、D、O 到直线 XY 的垂足分别为 A'、B'、C'、D'、O'，因为 O 是 AC 的中点，

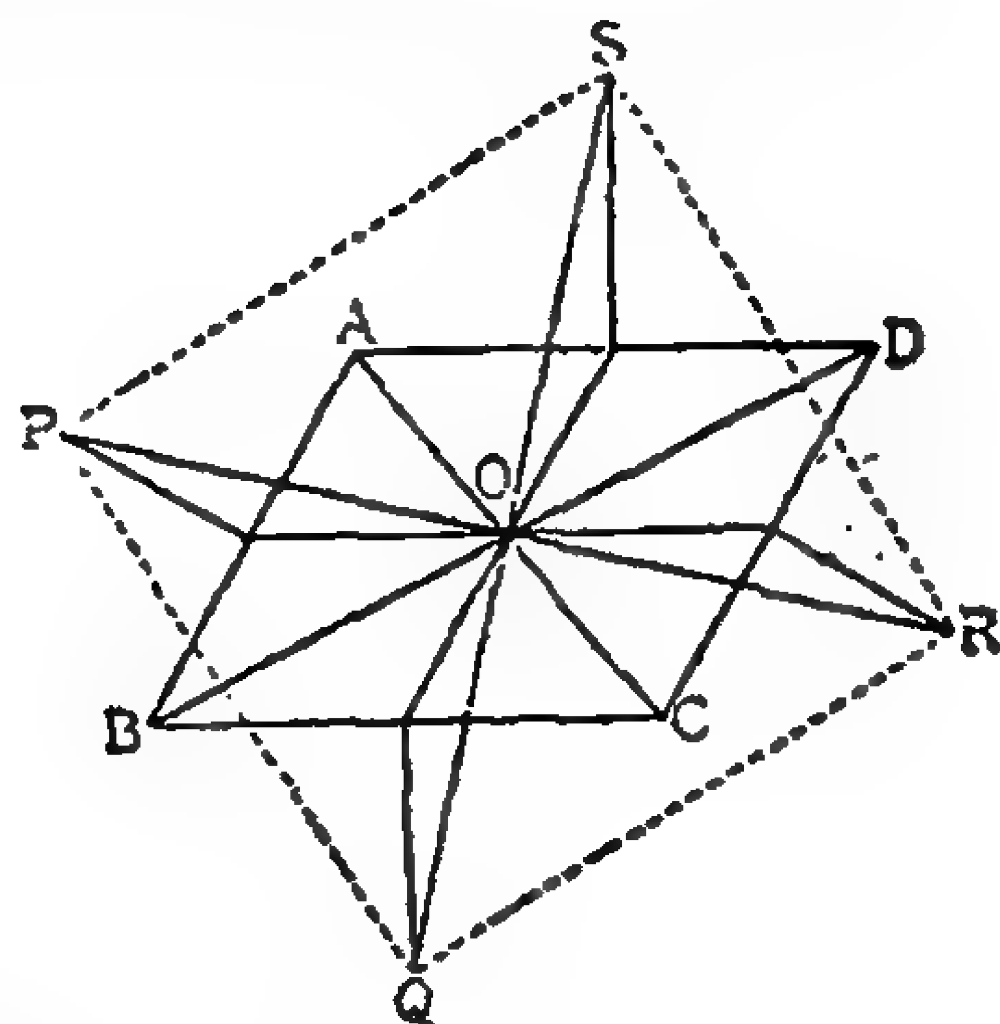
$$AA' \parallel OO' \parallel CC',$$

$$\therefore\quad AA'+CC'=2OO'.$$

同理 $BB'+DD'=2OO'$.

$$\therefore\quad AA'+CC'=BB'+DD'.$$

208. 若在平行四边形 $ABCD$ 的各边上向外侧作正方形，则以四个正方形的中心为



顶点组成一个正方形．

解 如图，设 P、Q、R、S 为四个正方形的中心，O 为 AC、BD 的交点，因为 $ABCD$ 是平行四边形，所以 O 是 AC、BD 的中点．因此在 $\triangle ABC$ 中，将 AB、BC 上的正方形中心 P、Q 与 AC 的中点连结，则

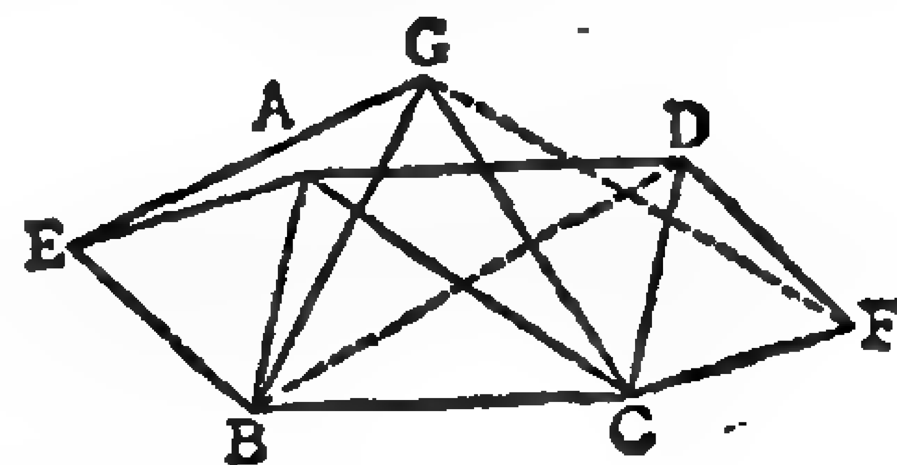
$$PO=QO,\ PO\perp QO\ (参考问题\ \mathbf{168}).$$

同理，$QO=RO$，且 $QO\perp RO$，及 $OR=OS$，且 $OR\perp OS$，$OS=OP$ 且 $OS\perp OP$.

$$\therefore\quad OP=OQ=OR=OS,$$

OP、OR 及 OQ、OS 分别成为一条直线，且互相垂直．因此 $PQRS$ 是正方形．

209. 若在平行四边形 $ABCD$ 的两边 AB、CD 的外侧，分别作正三角形 ABE、CDF，在 BC 上与四边形同侧作正三角形 GBC，则



$$EG=AC,\ FG=BD.$$

解 在 $\triangle EBG$、$\triangle ABC$ 中，

$$EB=AB,\ BG=BC,$$

$$\angle EBG=\angle ABC\ (都是\ 60^\circ+\angle ABG).$$

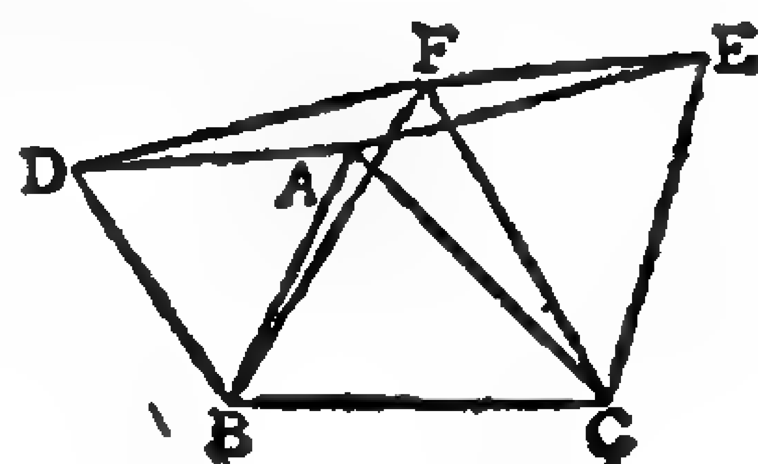
$$\therefore\quad \triangle EBG\cong\triangle ABC,$$

$$\therefore\quad EG=AC.$$

同理，由 $\triangle DBC\cong\triangle FGC$，有

$$FG=BD.$$

210. 若在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，向外侧作正三角形 ABD、ACE，在边 BC 上与顶点 A 的同侧作正三角形 BCF，则四边形



$AEFD$ 是平行四边形.

解　在 $\triangle DBF$、$\triangle ABC$ 中,

$$BD=BA,\ BF=BC,$$
$$\angle DBA=60^\circ=\angle FBC.$$
$$\therefore\ \angle DBF=\angle ABC,$$
$$\therefore\ \triangle DBF\cong\triangle ABC,$$

因此

$$DF=AC. \quad ①$$

而 $\triangle EAC$ 为正三角形,所以

$$AC=AE.$$

因此由 ① 有

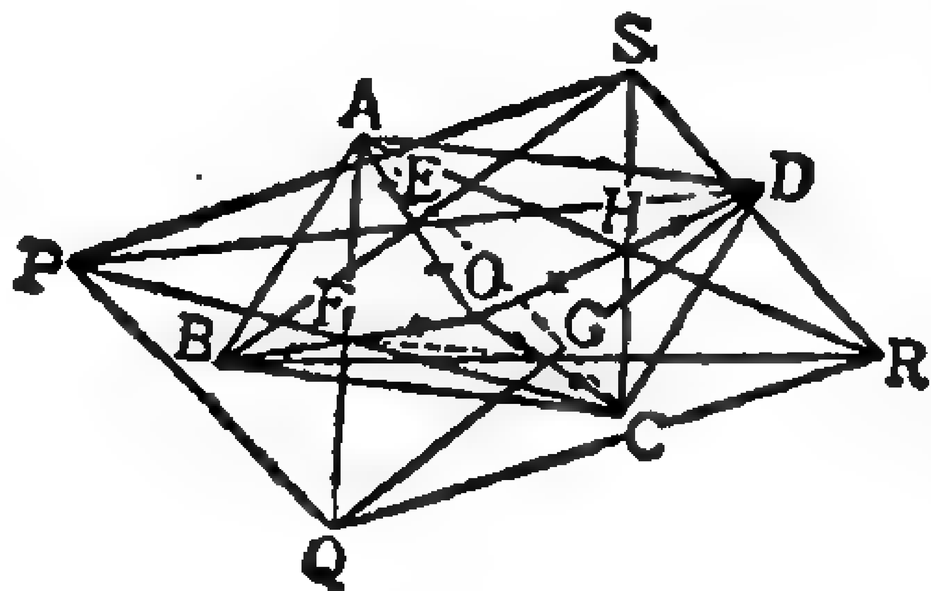
$$DF=AE. \quad ②$$

同理　$\triangle FCE\cong\triangle BCA$,

$$\therefore\ FE=AB=AD. \quad ③$$

由 ②、③, 知 $DAEF$ 是两组对边相等的四边形,所以是平行四边形.

211.　从平行四边形 $ABCD$ 内任一点 O 引 OA、OB、OC、OD, 设其中点分别为 E、F、G、H, 若 DE、CF 的交点为 P; AF、DG 的交点为 Q; AH、BG 的交点为 R; BE、CH 的交点为 S, 则四边形 $PQRS$ 是平行四边形.



解　连结 FG, 由于 F、G 分别是 OB、OC 的中点,所以有 $FG\parallel BC$ 且

$$FG=\frac{1}{2}BC.$$

因此 $AD\parallel FG$ 且

$$FG=\frac{1}{2}AD.$$

由此知 F 是 AQ 的中点. 同理, F 是 CP 的中点. 故

$$PQ\perp\!\!\!\!=AC,$$

同理,　$RS\perp\!\!\!\!=AC,$

故　$PQ\perp\!\!\!\!=RS.$

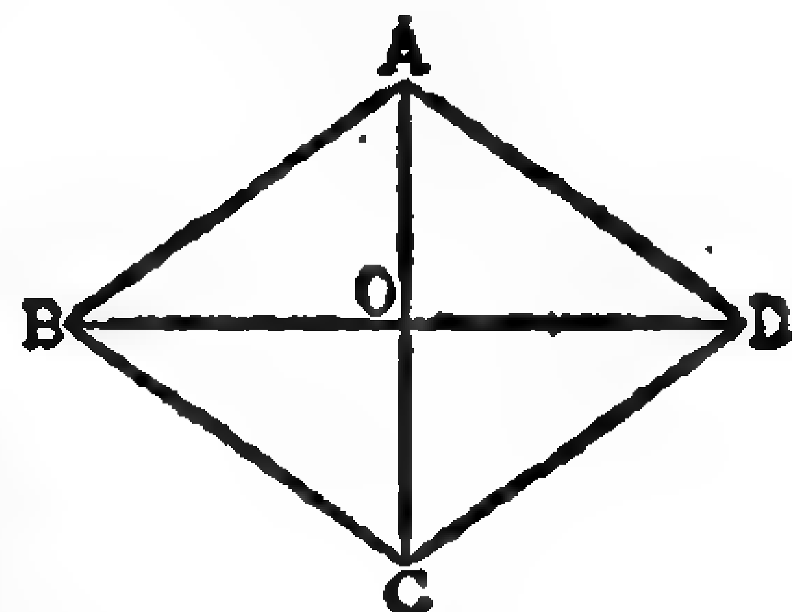
所以 $PQRS$ 是平行四边形.

(3) 长方形、菱形

212.　长方形的对角线相等.

解　设长方形 $ABCD$, 引对角线 AC、BD. 因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 的两边及夹角分别相等,这两三角形全等,

$$\therefore\ AC=BD.$$



213.　菱形两对角线互相垂直且平分各角.

解　设 O 为菱形 $ABCD$ 两对角线的交点, 则　$\triangle ABD\cong\triangle CBD$ (三边相等).

$$\therefore\ \angle ABD=\angle DBC,$$

$\angle ADB=\angle BDC.$ 所以 BD 平分 $\angle B$ 及 $\angle D$. 同理, AC 平分 $\angle A$ 及 $\angle C$.

又因为 BO 是等腰 $\triangle BAC$ 的顶角平分线,所以它垂直于 AC.

214.　在凸四边形 $ABCD$ 中, 若 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$, $AB=BC$, 则该四边形是菱形.

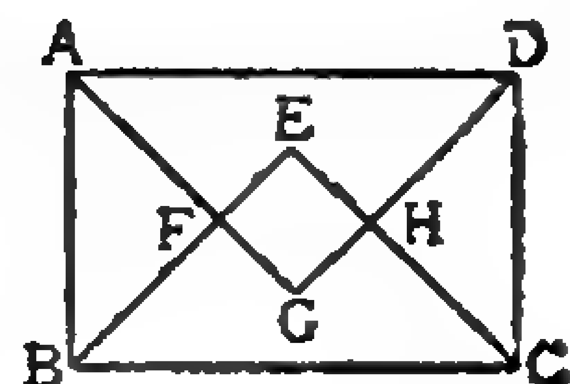
解　因为四边形的内角和为 360°, 由 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$, 有

$$\angle A+\angle B=180^\circ,$$

所以 $AD\parallel BC$. 同理, $AB\parallel CD$, 故 $ABCD$ 是平行四边形. 在这个四边形中, $AB=BC$, 所以四条边都相等, 故四边形 $ABCD$ 是菱形.

215.　设长方形 $ABCD$ 的四个角 A、B、C、D 的平分线的交点为 F、E、H、G, 则四边形 $EFGH$ 是正方形.

解　因为 $\triangle AGD$、$\triangle BEC$ 都是等腰直角三角形, $AD=BC$, 它们全等.



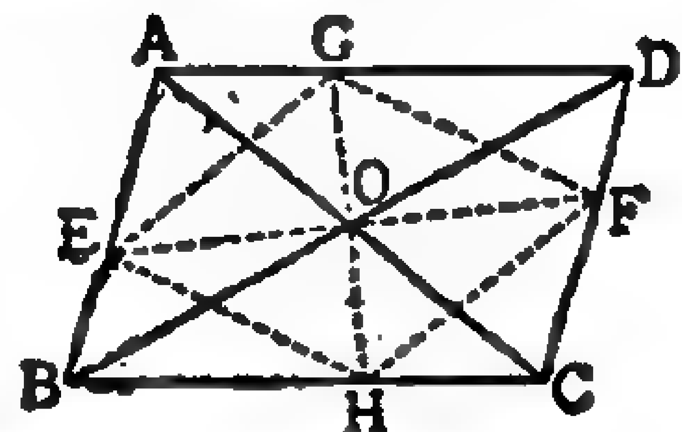
$$\therefore\ GA=GD=EB=EC.$$

又 $\triangle FAB$ 与 $\triangle HDC$ 也是全等的等腰直角三角形.

$$\therefore\ FA=FB=HD=HC,$$
$$\therefore\ EF=FG=GH=HE.$$

因而 $FEHG$ 是四边相等的长方形,所以是正方形.

216.　过平行四边形对角线的交点, 引相互垂直的两条直线, 顺次连结这两直线与各边的交点所形成的四边形是菱形.



解 设过点 O，引相互垂直的两条直线与 AB、CD、AD、BC 的交点分别为 E、F，G、H。在 $\triangle GOD$、$\triangle HOB$ 中，$OD=OB$，

$$\angle GDO=\angle OBH,\ \angle GOD=\angle BOH.$$

$$\therefore\quad \triangle GOD\cong\triangle HOB,$$

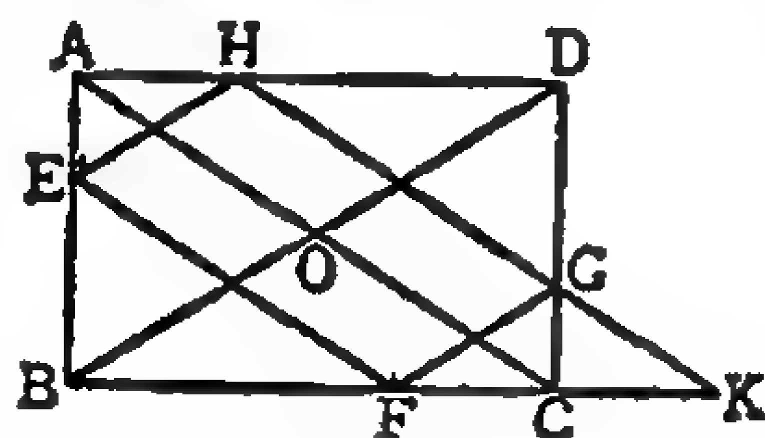
$$\therefore\quad OG=OH.$$

同理，$\qquad \triangle EOB\cong\triangle FOD,$

$$\therefore\quad OE=OF.$$

因为四边形 $GEHF$ 的对角线互相垂直平分，所以它是菱形。

217. 若在给定的长方形 $ABCD$ 中内接一平行四边形 $EFGH$，它的各边平行于长方形的对角线，则其周长为定值。



解 延长 HG，交 BC 的延长线于点 K，

$$\angle K=\angle OCB=\angle OBC=\angle GFK,$$

$$\therefore\quad GF=GK.$$

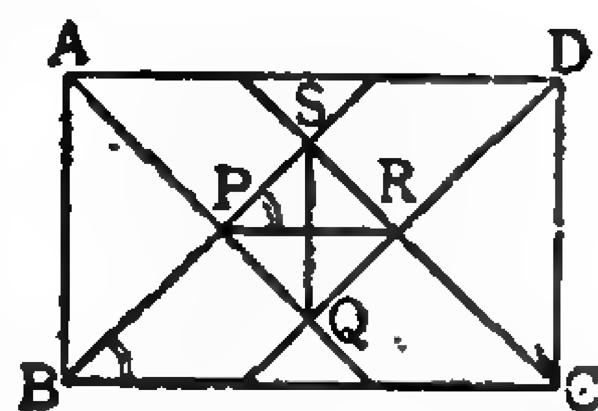
因为 $ACKH$ 是平行四边形，有

$$HK=AC,$$

而 $\qquad HG+GF=AC,$

因此平行四边形 $EFGH$ 的周长等于 AC 长的两倍，所以是定值。

218. 长方形的对角线大于夹在两对边间的任意线段。



解 设 EF 为夹在长方形 $ABCD$ 的对边 AB、DC 间的任意线段，作 $AG\parallel EF$。因为 $\angle AGC$ 是钝角，所以

$$AC>AG.$$

又因为 $AEFG$ 是平行四边形，

$$AG=EF,$$

$$\therefore\quad AC>EF.$$

219. 为使四边形的各角平分线相交所成的四边形是正方形，那么原四边形应是怎样的形状？

解 设四边形 $ABCD$ 的各角平分线相交作出的四边形为 $PQRS$。若 $PQRS$ 是正方形，则

$$\angle P=\angle R,\ \angle PAB+\angle PBA=\angle R.$$

因为 PA、PB 分别是 $\angle A$、$\angle B$ 的平分线，从而 $\angle A+\angle B=2\angle R$，

$$\therefore\quad AD\parallel BC.$$

又因为 $\angle Q$ 也是直角，同理，

$$AB\parallel CD.$$

因此 $ABCD$ 应是平行四边形。而 P、R 是夹在线段 AD、BC 之间的线段的中点，有

$$PR\parallel BC.$$

$$\therefore\quad \angle SPR=\angle PBC.$$

但是由于 $PQRS$ 是正方形，有

$$\angle SPR=45^\circ,$$

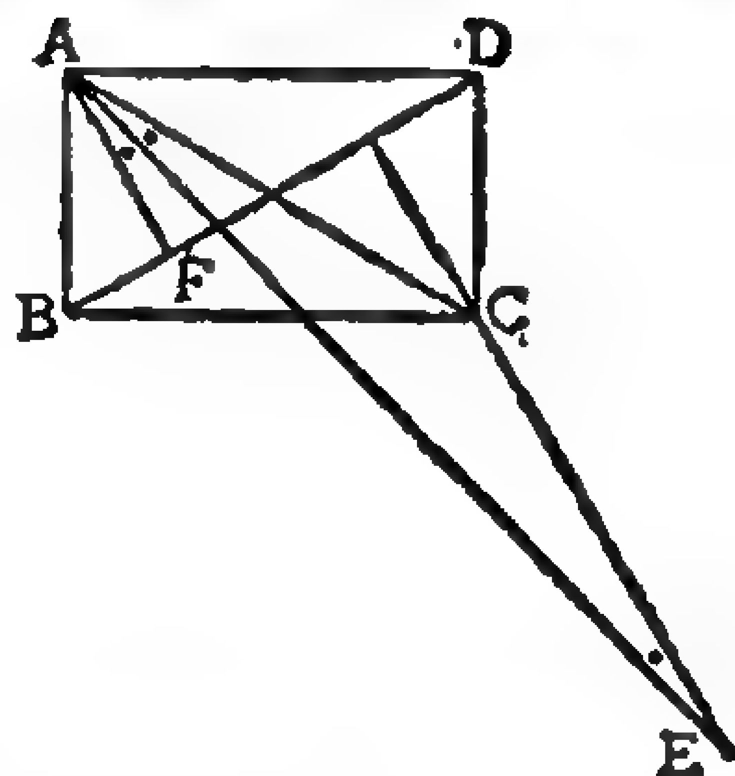
$$\therefore\quad \angle PBC=45^\circ,$$

$$\therefore\quad \angle ABC=\angle R.$$

即平行四边形的一个角是直角，所以原四边形是长方形。

220. 若从长方形 $ABCD$ 的顶点 C 引对角线 BD 的垂线，与 $\angle BAD$ 的平分线相交于点 E，则

$$AC=CE.$$



解 设从 A 向 BD 作垂线 AF，则有

$$\angle E=\angle FAE.$$

但是 $\qquad \angle BAF=\angle ADB=\angle DAC,$

且 $\qquad \angle BAE=\angle DAE.$

$$\therefore\quad \angle FAE=\angle EAC,$$

$$\therefore\quad \angle E=\angle EAC,$$

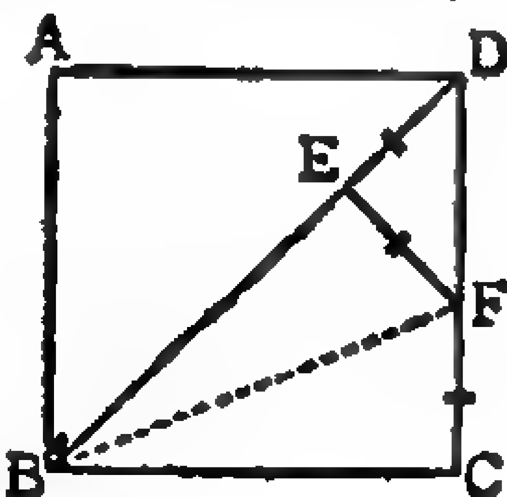
$$\therefore\quad AC=CE.$$

(4) 正方形

221. 在正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上，取 $BE=AB$，若过 E 作 BD 的垂线与 CD 的交点为 F，则

$$CF=ED.$$

解 连结 BF，在 $\triangle BEF$ 与 $\triangle BCF$ 中，BF 公共，



$$BC=BE,$$

$$\angle C=\angle E=\angle R,$$

$$\therefore\quad \triangle BEF\cong\triangle BCF.$$

$$\therefore\quad CF=EF.\quad ①$$

又因为 $ABCD$ 是正方形，有

$$\angle EDF=\frac{1}{2}\angle R.$$

但是 $\qquad \angle DEF=\angle R,$

$\therefore\ ED=EF.$　　②

由①、②，得

$$CF=ED.$$

222. 若在正方形 $ABCD$ 的边 DC 上取一点 G，在 CG 上向原正方形的外侧作正方形 $GCEF$，则

$$DE\perp BG,$$
$$DE=BG.$$

解 因为 $\triangle CBG$ 与 $\triangle CDE$ 的两边和夹角对应相等，这两个三角形全等.

$$\therefore\ BG=DE.$$

又因在全等三角形 BCG、DCE 中，两组对应边相互垂直，即

$$BC\perp DC,\ CG\perp CE,$$

所以第三组对应边也互相垂直，即

$$BG\perp DE.$$

223. 从正方形 $ABCD$ 相对的顶点 A、C，向过另一顶点的任一直线作垂线，设其垂足分别为 A'、C'，则

$$AA'=BC'.$$

解 在直角三角形 $AA'B$ 与 $BC'C$ 中，

$$AB=BC,$$

又

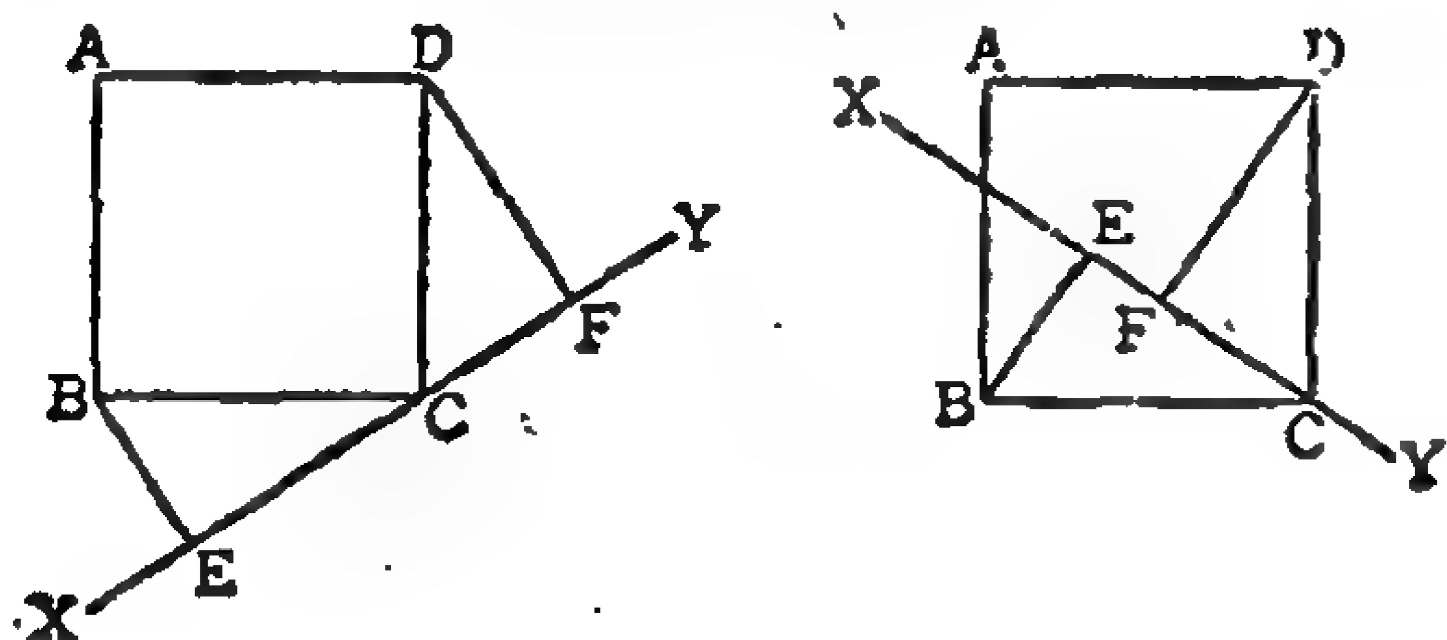
$$\angle BAA'+\angle ABA'=\angle R,$$
$$\angle C'BC+\angle ABA'=\angle R.$$
$$\therefore\ \angle BAA'=\angle CBC',$$
$$\therefore\ \triangle AA'B\cong\triangle BC'C,$$
$$\therefore\ AA'=BC'.$$

224. 从正方形 $ABCD$ 的顶点 B、D，向过顶点 C 的任意直线 XY 作垂线 BE、DF，则有

$$DF+BE=EF,$$

或

$$DF\sim BE=EF.$$



解 设 B、D 在直线 XY 的同侧时，则

$$\triangle BCE\cong\triangle CDF\ (\text{斜边及一锐角}).$$
$$\therefore\ BE=CF,\ DF=CE.$$
$$\therefore\ BE+DF=CE+CF=EF.$$

又设 B、D 在直线 XY 的异侧时，同理，

$$BE\sim DF=CE\sim CF=EF.$$

225. 在正方形 $ABCD$ 的对边 AB、CD 上，分别取点 E、F，过 EF 内任一点作垂直于 EF 的任意直线，与 AD、BC 或其延长线的交点分别为 H、G，则

$$EF=HG.$$

解 设过 H、F 向 BC、AB 作垂线，其垂足分别为 L、K，则在 $\triangle HGL$、$\triangle FEK$ 中，

$$HL=FK,\ \angle K=\angle L=\angle R,$$

且 $\angle H=\angle F$ ($HG\perp EF$, $HL\perp KF$).

$$\therefore\ \triangle HGL\cong\triangle FEK,$$
$$\therefore\ HG=EF.$$

226. 连结正方形 $ABCD$ 的顶点 A 与边 BC 上的任意点 E，设 $\angle EAD$ 的平分线与边 CD 的交点为 F，则 DF 等于 AE 与 BE 之差.

解 在 EB 的延长线上取点 H，使 $BH=DF$，则

$$\triangle ABH\cong\triangle ADF,$$

$\therefore\ \angle H=\angle F.$　　①

且　$\angle HAB=\angle FAD=\angle FAE$

(AF 是 $\angle DAE$ 的平分线)，

$\therefore\ \angle HAE=\angle BAF.$　　②

又因为 $AB\parallel DF$，

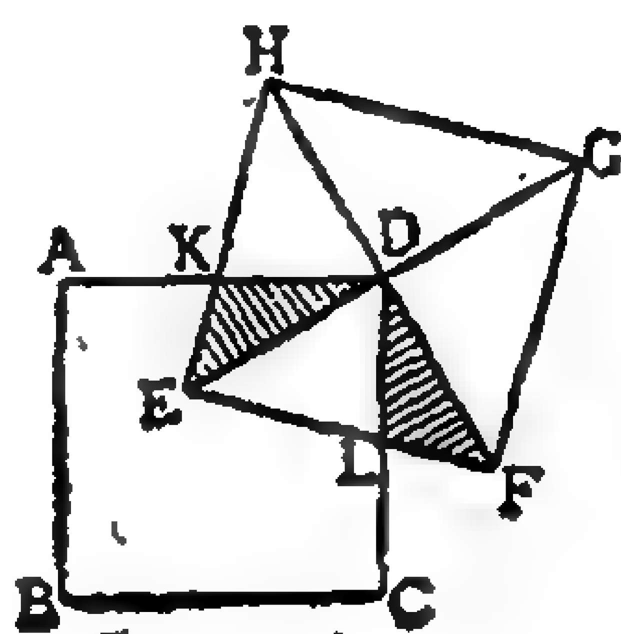
$\therefore\ \angle F=\angle BAF.$　　③

由①、②、③，有

$$\angle H=\angle HAE,$$
$$\therefore\ HE=AE.$$

故

$$AE-BE=HE-BE$$
$$=BH=DF.$$



227. 设有两张大小相同的正方形纸片，如使一张纸片的中心放

在另一张纸片的顶点上转动时，则它们重合部分的面积如何变化？

解 设两个正方形为 $ABCD$、$EFGH$，$EFGH$ 的中心与 D 重合(如图)．AD 与 EH 的交点为 K，CD 与 EF 的交点为 L，则因 $EFGH$ 是正方形有

$$DE=DF. \qquad ①$$

又 $\angle KDC=\angle R=\angle EDF$，

$$\therefore\ \angle KDE=\angle LDF. \qquad ②$$

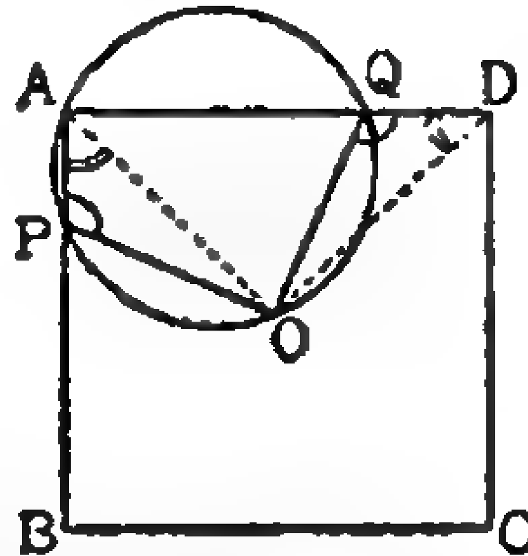
$$\angle KED=45^\circ=\angle LFD. \qquad ③$$

由①、②、③，有

$$\triangle DKE\cong\triangle DLF.$$

因此，重合部分 $KELD$ 的面积 $=S_{\triangle DEL}+S_{\triangle DLF}=S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}$ 正方形 $ABCD$ 的面积．不论正方形 $EFGH$ 在怎样的位置时，上述证明都是成立的，故两正方形重合部分的面积一定．

228． 过正方形 $ABCD$ 的中心 O 与顶点 A 所作的圆与边 AB、AD 的交点分别为 P、Q，若 P、Q 不在边的延长线上，则 $AP+AQ$ 等于正方形的边长．



解 连结 OA、OD、OP、OQ．在 $\triangle AOP$、$\triangle DOQ$ 中，因为

$$\angle APO+\angle AQO=180^\circ,$$

$$\therefore\ \angle APO=\angle DQO.$$

又因为 O 是正方形的中心，

$$\therefore\ \angle PAO=\angle QDO=45^\circ,\ OA=OD.$$

因此 $\triangle AOP\cong\triangle DOQ$，

从而 $AP=DQ$，

$$\therefore\ AP+AQ=DQ+AQ=AD.$$

229． 以 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 为边向外侧作正方形 $ABDM$、$ACEN$，若从顶点 D、E 向边 BC 作垂线为 DF、EG，则

$$BC=DF+EG,$$

且 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BFD}+S_{\triangle CGE}$．

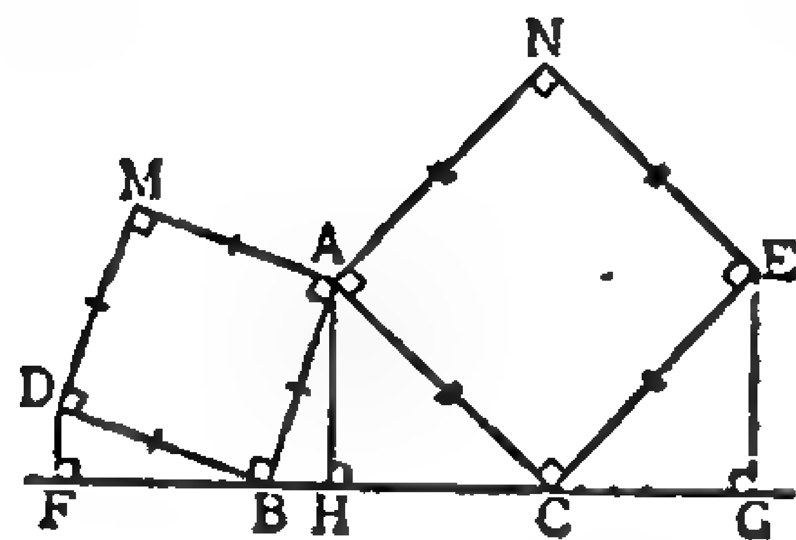
解 作 $AH\perp BC$．在 $\triangle AHB$、$\triangle BFD$ 中，

$$AB=BD,\ \angle ABD=\angle R,$$

$\angle ABH$、$\angle BDF$ 都是 $\angle DBF$ 的余角，

$$\angle ABH=\angle BDF,$$

$$\therefore\ \triangle AHB\cong\triangle BFD,$$



从而 $BH=DF$．

同理，$\triangle AHC\cong\triangle CGE$，

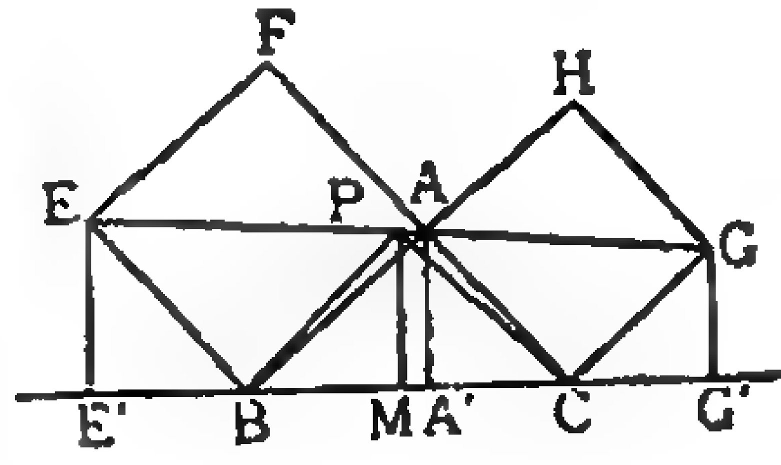
$$\therefore\ CH=EG,$$

因此 $BC=BH+CH=DF+EG$．

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AHB}+S_{\triangle AHC}$

$$=S_{\triangle BFD}+S_{\triangle CGE}.$$

230． 若以 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 为边在此三角形的外侧作正方形 $ABEF$、$ACGH$，以 BC 为斜边在 $\triangle ABC$ 的同侧作等腰直角三角形 BCP，则 E、P、G 在一条直线上，且 $EP=PG$．



解 由点 A、E、G 分别向 BC 或其延长线作垂线 AA'、EE'、GG'，由上题知

$$EE'=BA',\ GG'=CA',$$

$$EE'+GG'=BC, \qquad ①$$

且

$$E'B=CG'=AA'. \qquad ②$$

又 $\triangle BPC$ 是等腰直角三角形，从 P 向 BC 作垂线 PM，则点 M 是 BC 的中点，从而由②知 M 是 $E'G'$ 的中点，且

$$PM=\frac{1}{2}BC.$$

于是由①有

$$PM=\frac{1}{2}(EE'+GG').$$

其次，取 EG 的中点 P'，根据问题 **251**，有

$$P'M=\frac{1}{2}(EE'+GG'),$$

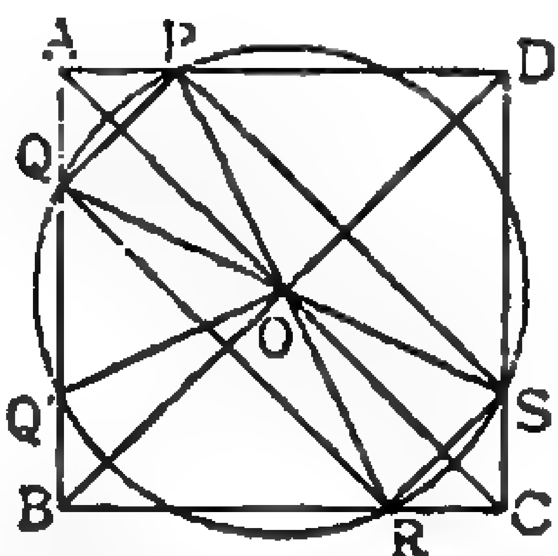
所以 P 与 P' 重合．故 P 点在 EG 上，且

$$EP=PG.$$

231． 若长方形 $PQRS$ 内接于正方形 $ABCD$，则长方形的各边平行于正方形的对角线．

解 正方形 $ABCD$ 中心与长方形的中心 O 相重合．设 P 在 AD 上，以 O 为圆心，OP 为半径的圆与 AB 相交于 Q、Q'，则这两点之

一必是内接于正方形的长方形的顶点。若取Q'为长方形的一个顶点，则因



$$\triangle OAP \cong \triangle OBQ'$$

有 $\angle POQ'=\angle B$,

此时内接图形变成了正方形，与题设矛盾；若取Q为长方形的一个顶点，则由

$$\triangle OAP \cong \triangle OAQ$$

知Q与P是关于OA的对称点。

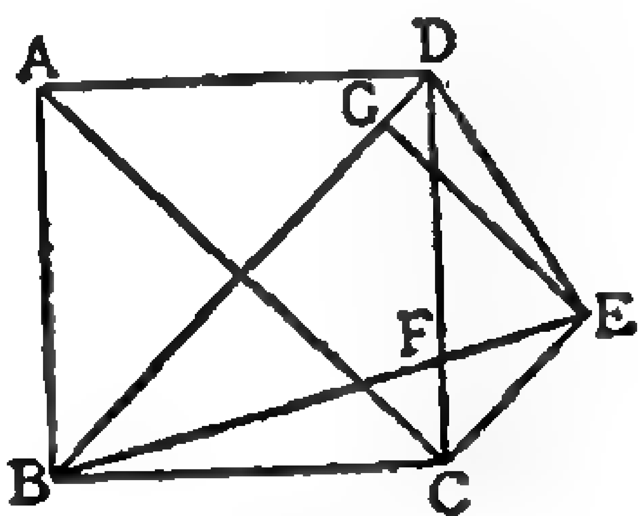
$$\therefore\quad PQ \parallel BD.$$

同理，其他各边也是平行于AC或BD。

232. 若在正方形$ABCD$的对角线BD上，取

$$BE=BC,$$

从CE上的任意点P分别向BD、BC作垂线PF、PG，则



$$PF+PG=\frac{1}{2}BD.$$

解 因为$\triangle BCE$是等腰三角形，所以$PF+PG$一定，它等于从点C向BD作的垂线CH长（问题150）。又因$\triangle CBD$是等腰直角三角形，

$$\therefore\quad CH=\frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore\quad PF+PG=\frac{1}{2}BD.$$

233. 从正方形$ABCD$的一个顶点C，作CE平行于BD，使$BE=BD$，若BE、CD的交点为F，则

$$DE=DF.$$

解 若从E引BD的垂线EG，则有

$$EG=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}BE.$$

因此由问题130，有

$$\angle EBD=30^\circ,$$

从而 $\angle BDE=\angle BED$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ.$$

又 $\angle DFE=\angle DBF+45^\circ=75^\circ$,

$$\therefore\quad \angle DFE=\angle DEF,$$

故 $DE=DF$.

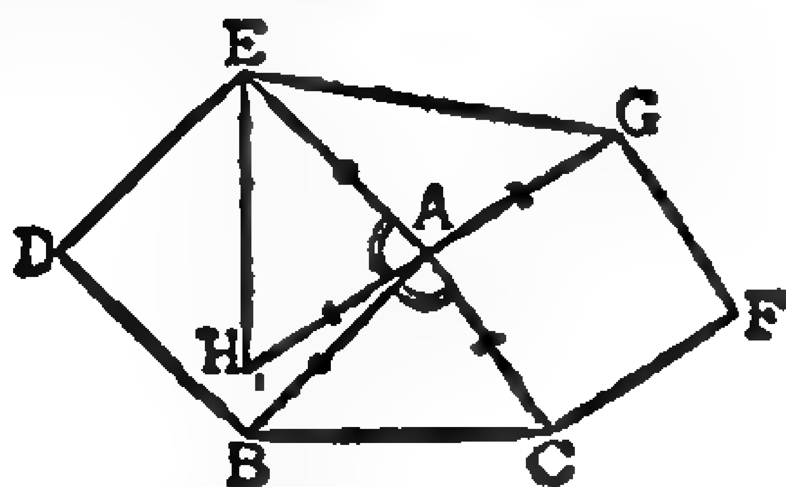
234. 若以$\triangle ABC$的边AB、AC为边，向三角形的外侧作正方形$ABDE$、$ACFG$，则$\triangle AEG$与$\triangle ABC$等积。

解 若在GA的延长线上取$AH=GA$，连结EH，则$\triangle AEG$与$\triangle AEH$等积。但由于$\angle HAE=\angle CAB$（都是$\angle EAG$的补角），

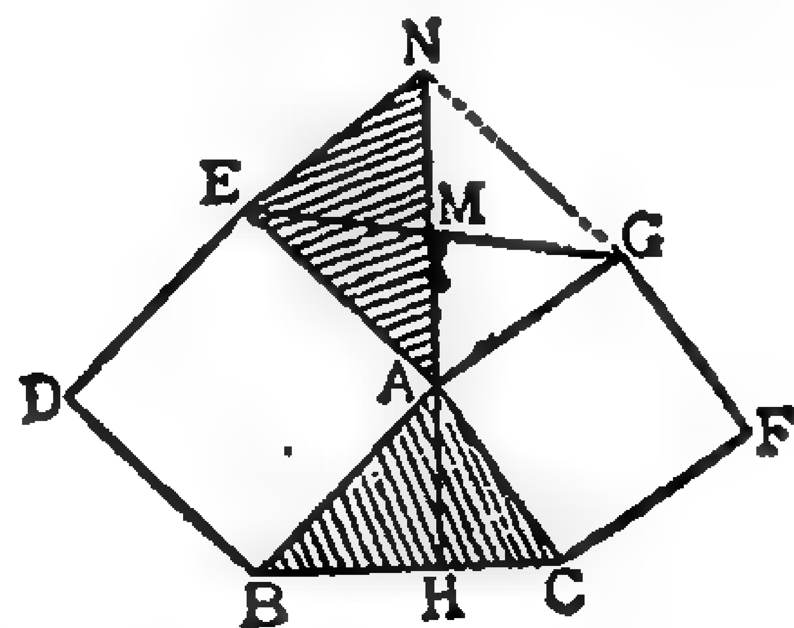
又 $AE=AB,\ AH=AC$,

$$\therefore\quad \triangle AEH \cong \triangle ABC.$$

故$\triangle AEG$与$\triangle ABC$等积。



235. 分别以$\triangle ABC$的边AB、AC为边，在$\triangle ABC$的外侧作正方形$ABDE$、$ACFG$，从A引BC的垂线AH，若延长HA与EG的交点为M，则M是EG的中点。



解 延长AM，在其上取$AN=BC$，在$\triangle ABC$、$\triangle EAN$中，

$$AB=AE, \quad ①$$

$$AN=BC, \quad ②$$

$$\angle ABC=\angle EAN\ (\text{都是}\angle BAH\text{的余角}). \quad ③$$

由①、②、③，有

$$\triangle ABC \cong \triangle EAN,$$

$$\therefore\quad EN=AC=AG.$$

同理， $\triangle ABC \cong \triangle GNA$,

$$\therefore\quad GN=AB=AE.$$

因此四边形$NEAG$是两组对边相等，所以它是平行四边形。故AN、EG的交点M是EG的中点。

236. 设$\triangle ABC$的边AB的中点为M，分别以BC、CA为边向$\triangle ABC$的外侧作正方形$BCDE$、$ACFG$，则$CM=\frac{1}{2}DF$，并垂直于DF。

解 延长CM，在其上取$MN=CM$，在

$\triangle CAN$、$\triangle FCD$ 中，$AN=CD$

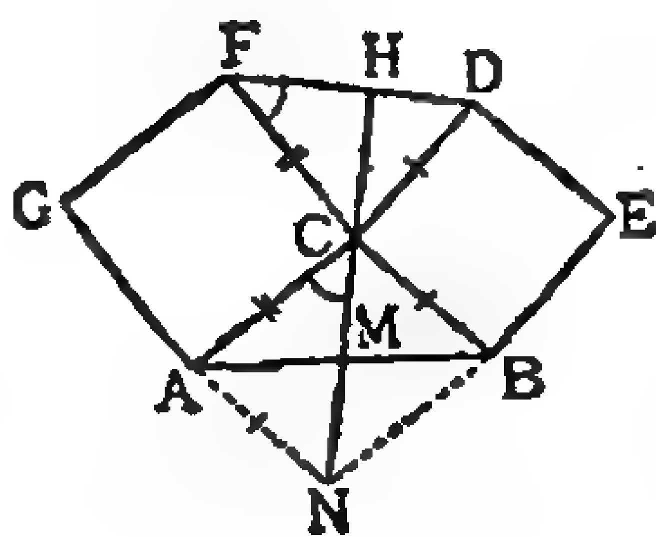
($\because CD=CB$

$=AN$)，

$CA=FC$,

$\angle NAC=\angle DCF$

(都是 $\angle ACB$ 的补角)。



$$\therefore\ \triangle CAN\cong\triangle FCD,$$

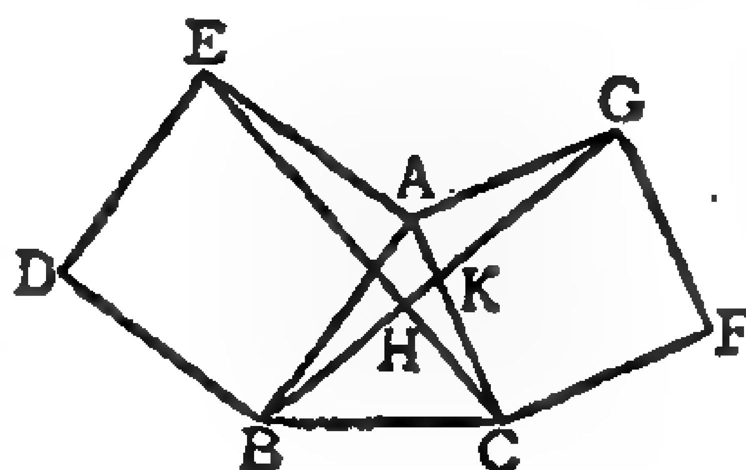
因此　$DF=NC=2CM$.

又　$\angle ACN=\angle CFD$,

而　$\angle ACN+\angle FCH=\angle R$,

$$\therefore\ CH\perp FD.$$

237. 若分别以$\triangle ABC$的边AB、CA为边，在$\triangle ABC$的外侧作正方形$ABDE$、$ACFG$，则



$BG=EC$,

$BG\perp EC$.

解 在$\triangle ABG$与$\triangle AEC$中，

$$AB=AE,\ AG=AC,$$

$$\angle BAG=\angle EAC=90^\circ+\angle BAC.$$

$$\therefore\ \triangle ABG\cong\triangle AEC,$$

$$\therefore\ BG=EC.$$

其次，若BG与EC、AC的交点分别为H、K，则在$\triangle AKG$与$\triangle HCK$中，

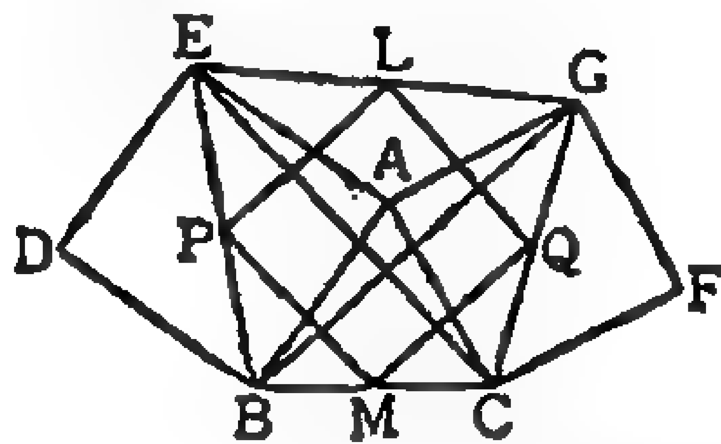
$\angle AGK=\angle KCH$ ($\because \triangle AEC\cong\triangle ABG$)，

又　$\angle AKG=\angle CKH$,

$$\therefore\ \angle CHK=\angle GAK=\angle R,$$

即　$BG\perp EC$.

238. 分别以$\triangle ABC$的边AB、AC为边，在$\triangle ABC$的外侧作正方形$ABDE$、$ACFG$，正方形的中心分别为P、Q，EG、BC的中点分别为L、M，则L、P、M、Q为正方形的顶点.



解 在$\triangle AEC$、$\triangle ABG$中，

$$AE=AB,\ AC=AG,$$

$$\angle EAC=\angle BAG=\angle R+\angle BAC.$$

$$\therefore\ \triangle EAC\cong\triangle BAG.$$

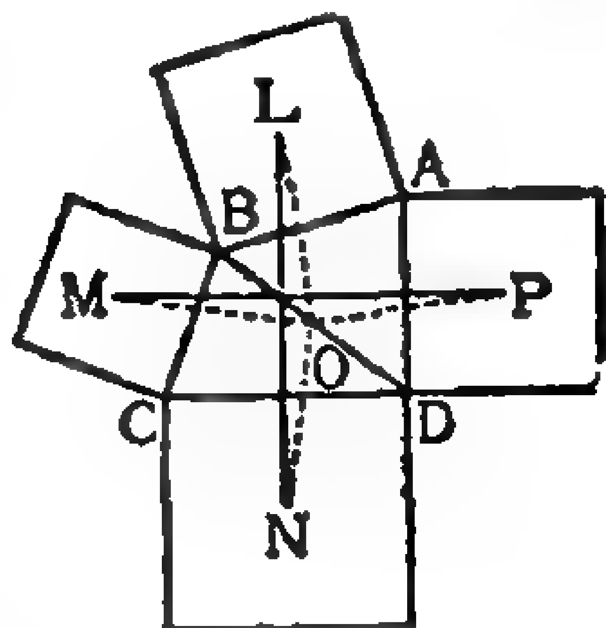
因此$EC=BG$，且$EC\perp BG$. 又因为P、M、Q、L是四边形$EBCG$各边的中点，所以

$$PM \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}EC \perp\!\!\!\!= LQ,$$

$$MQ \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BG \perp\!\!\!\!= PL.$$

而$EC=BG$，且$EC\perp BG$，因而$PMQL$的各边相等、各角为直角，所以$LPMQ$是正方形.

239. 以凸四边形$ABCD$的边AB、BC、CD、DA为边，在该四边形的外侧分别作正方形，设其中心分别为L、M、N、P，则LN与PM相等且互相垂直.



解 设BD的中点为O，则在$\triangle LNO$与$\triangle PMO$中，根据问题168，有

$$LO=PO,\ NO=MO,$$

$$LO\perp PO,\ NO\perp MO,$$

$$\therefore\ \angle NOL=\angle MOP,$$

$$\therefore\ \triangle LNO\cong\triangle PMO,$$

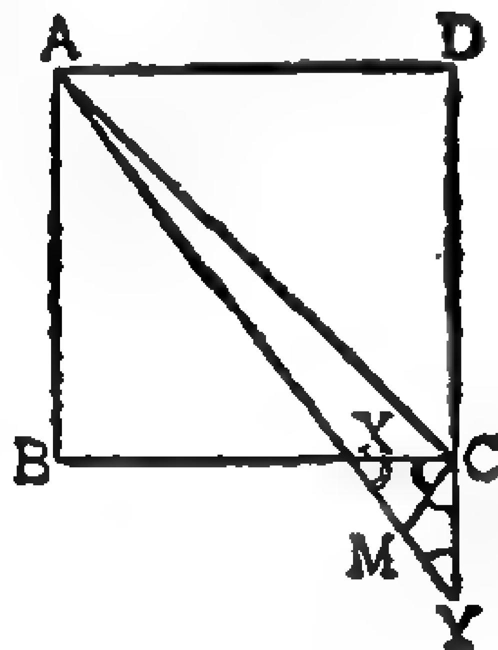
$$\therefore\ LN=PM.$$

而　$OL\perp OP$, $ON\perp OM$,

$$\therefore\ LN\perp PM.$$

240. 若从正方形$ABCD$的顶点A引直线与BC交于X，与DC的延长线交于Y，则

$$AX+AY>2AC.$$



解 设XY的中点为M，则

$$AX+AY=2AM.$$

因为　$AB>BX$,

$$\therefore\ \angle AXB>\angle BAX,$$

但是　$\angle MCX=\angle MXC=\angle AXB$,

$$\angle MCY=\angle Y=\angle BAX,$$

$$\therefore\ \angle MCX>\angle MCY,$$

$$\therefore\ \angle ACM>90^\circ,$$

$$\therefore\ AM>AC,$$

$$\therefore\ AX+AY>2AC.$$

241. 若以$\triangle ABC$的边AB为边，在$\triangle ABC$的外侧(或内侧)作正方形$ABDE$，从A向BC作垂线AF，并延长在外侧(或内侧)取$AG=BC$，则$BG=CD$.

解 如图，在$\triangle BDC$、$\triangle ABG$中，

$$AB=BD,\ AG=BC,$$

$$\angle ABF=(\angle BAF\text{ 的余角})=\angle EAG,$$

$\therefore\quad \angle DBC=\angle BAG.$

因此 $\triangle BDC\cong\triangle ABG,$

从而 $BG=CD.$

如右图，在 $\triangle ABG$、$\triangle BDC$ 中，

$$AB=BD,\ BC=AG,$$

$\angle DBC=\angle BAG$（都是 $90^\circ-\angle ABC$）.

$$\therefore\quad \triangle ABG\cong\triangle BDC,$$

知 $BG=CD.$

242. 设在正方形 $ABCD$ 的边 AD 上取一点 E，使

$$BE=DE+DC,$$

又 M 为 AD 的中点，则

$$\angle EBC=2\angle ABM.$$

解 设在 ED 的延长线上取 $DK=DC$，则有 $EK=EB$.

$$\therefore\quad \angle K=\angle EBK. \qquad ①$$

又 $DK\parallel BC,$

$$\therefore\quad \angle K=\angle FBC. \qquad ②$$

故 $\angle EBC=2\angle FBC.$

因为 $BC\perp DK$，$\therefore F$ 是 DC 的中点，又 M 是 AD 的中点，故有 $AM=CF$，从而

$$\triangle ABM\cong\triangle CBF.$$

由此得 $\angle ABM=\angle CBF$

$=\angle FBE,$

$$\therefore\quad \angle EBC=2\angle ABM.$$

243. 设有任意直线平行于正方形 $ABCD$ 的对角线 AC，与边 AB、BC 的交点为 E、F，在 DA 的延长线上取点 G 使 $AG=AD$，若 EG 与 DF 的交点为 H，则 AH 等于正方形 $ABCD$ 的边长.

解 由假设 $CA\parallel EF$，有 $AE=FC$. 又

$$AG=DC,\ \angle GAE=\angle B=\angle C,$$

因此 $\triangle AGE\cong\triangle CDF.$

但因 $AG\perp DC,\ AE\perp CF,$

$$\therefore\quad GE\perp DF,$$

而 $\angle GHD=\angle B,$

又 A 是直角三角形 GHD 的斜边 GD 的中点，

$$\therefore\quad AH=AD.$$

244. 引 BE 平行于正方形 $ABCD$ 的对角线 AC，在 BE 上取点 F，使

$$AF=AC,$$

若作菱形 $CAFE$，则 AE 及 AF 三等分

$$\angle BAC\left(=\frac{1}{2}\angle B\right).$$

解 从 F 作 AC 的垂线 FK，设 AC、BD 的交点为 O，则

$$FK=BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AF,$$

且 $FK\perp AC.$

$$\therefore\quad \angle FAK=30^\circ,$$

而 $\angle CAE=\angle FAE,$

$$\therefore\quad \angle CAE=\angle FAE=15^\circ,$$

又 $\angle BAC=45^\circ,$

$$\therefore\quad \angle CAE=\angle EAF=\angle FAB.$$

245. 从正方形 $ABCD$ 的顶点 A，在 B、C 的同侧引对角线 DB 的平行线 AE，并在其上取点 E，使 $BE=BD$，若 EB 与 AD 的延长线的交点为 F，则 $DF=DE$.

解 从 B 向 AE 引垂线 BG，则在直角三角形 BGE 中，

$$BG=AO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}BE,$$

$$\therefore\quad \angle GEB=30^\circ.$$

又 $BD=BE,\ BD\parallel AE,$

$\therefore ED$ 平分 $\angle AEB$，即 $\angle DEB=15^\circ.$

$$\therefore\quad \angle DBF=30^\circ,$$

从而 $\angle CBF=15^\circ.$

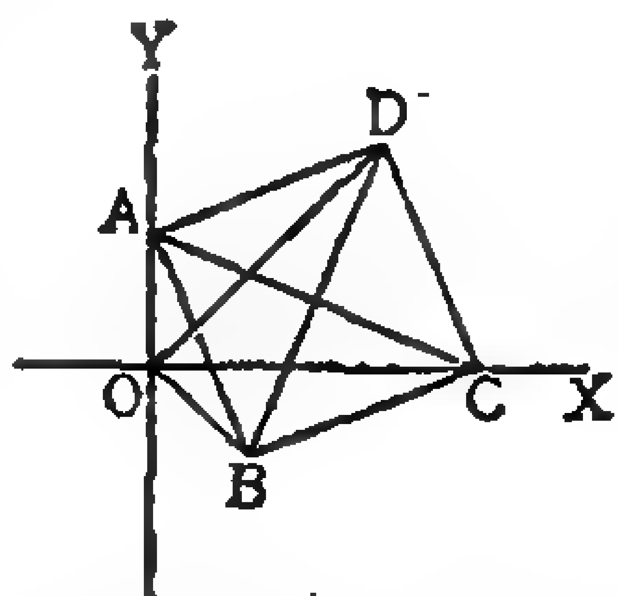
因为 $CB\parallel DF,$

$\therefore \quad \angle F=\angle CBF=15°,$

$\therefore \quad \angle DEB=\angle F,$

$\therefore \quad DF=DE.$

246. 设有两条互相垂直的直线 X、Y，若作一个正方形，使其一组相对顶点分别在直线 X、Y 上，则另外两个顶点总在两条定直线上.



解 设正方形为 $ABCD$，顶点 A 在直线 Y 上，C 在直线 X 上. 若两直线 X、Y 的交点为 O，连结 OD，则在四边形 $AOCD$ 中，

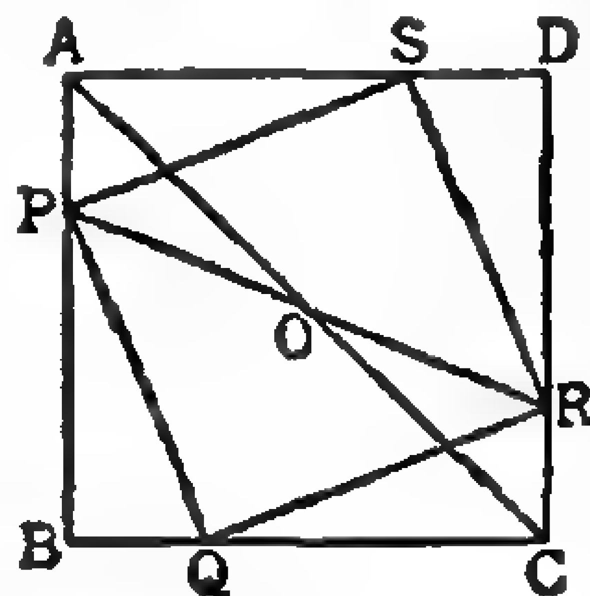
$$\angle AOC=\angle ADC=\angle R,$$

因此 A、O、C、D 共圆.

$$\therefore \quad \angle COD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle R.$$

由此，OD 平分 $\angle O$，于是 D 在方向确定的直线 OD 上. 又四点 A、O、B、C 也在同一圆周上，所以点 B 是在过点 O 且与 OD 垂直的定直线上.

247. 有四个动点 P、Q、R、S 分别从正方形 $ABCD$ 的顶点 A、B、C、D 同时出发，沿着 AB、BC、CD、DA 以同样的速度向点 B、C、D、A 移动时，



(1) 证明 四边形 $PQRS$ 总是正方形；

(2) 求四边形 $PQRS$ 的面积及面积最大、最小时的位置；

(3) 证明 PR 总过定点.

解 (1) 由于 $AP=BQ=CR=DS$，从而

$$BP=CQ=DR=AS.$$

又 $\quad \angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle R,$

$$\therefore \quad \triangle ASP\cong\triangle BPQ\cong\triangle DRS\cong\triangle CQR,$$

$$\therefore \quad PQ=QR=RS=SP.$$

又由 $\angle BPQ=\angle ASP$ 有

$$\angle BPQ+\angle APS$$

$$=\angle ASP+\angle APS=\angle R,$$

$$\therefore \quad \angle SPQ=\angle R,$$

故 $PQRS$ 是正方形.

(2) 由 $\angle PBQ=\angle R$，有

$$PQ^2=BP^2+BQ^2$$

$$=BP^2+AP^2 \quad (\because BQ=AP)$$

$$=\frac{1}{2}[(BP+AP)^2+(BP-AP)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[AB^2+(BP-AP)^2],$$

所以当 $BP=AP$，即 P、Q、R、S 分别是各边中点时，PQ^2 为最小，其最小值为 $\frac{1}{2}AB^2$；当 P、Q、R、S 在顶点 A、B、C、D 上时，PQ^2 为最大，其最大值为 AB^2.

(3) 设 AC、PR 的交点为 O，因为 $AP \mathrel{\underline{\parallel}} RC$，所以 $APCR$ 是平行四边形，O 是 AC 的中点，即 PR 总是过 AC 的中点，亦即总是过 $ABCD$ 的中心.

(5) 梯形

248. 等腰梯形两底角相等，对角互补.

解 从 $AB=CD$ 的梯形顶点 D 作平行于 AB 的直线 DE，则由 $ABED$ 是平行四边形有

$$AB=DE.$$

但是 $\quad AB=DC,$

$$\therefore \quad DE=DC,$$

$$\therefore \quad \angle DEC=\angle C,$$

而 $\quad \angle B=\angle DEC, \therefore \quad \angle B=\angle C.$

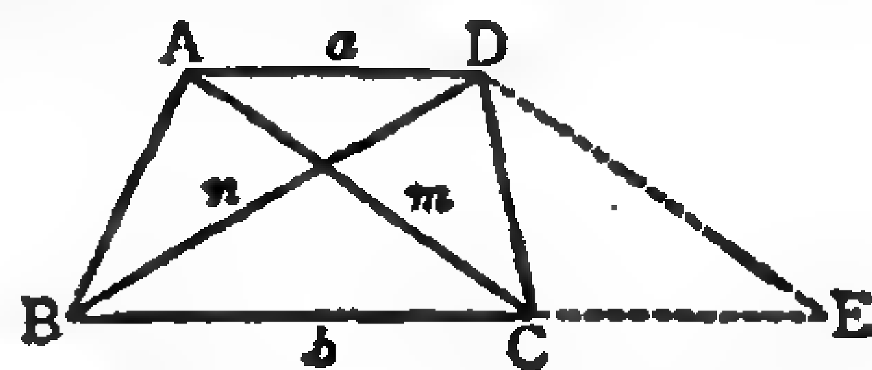
又 $\quad AD\parallel BC,$

所以 $\quad \angle A+\angle B=2\angle R,$

$$\therefore \quad \angle A+\angle C=2\angle R.$$

249. 已知两底 a、b 及对角线 m、n，试证使其作成梯形必须满足

$$m+n>a+b>m\sim n.$$



解 在梯形 $ABCD$ 中，底边 $AD=a$，$BC=b$，对角线 $AC=m$，$BD=n$. 引 $DE\parallel AC$，设与 BC 的交点为 E，则四边形 $ACED$ 是平行四边形，有

$$DE=AC=m, \; CE=AD=a.$$

这样要能作梯形 $ABCD$，只要作出 $\triangle BDE$ 就可以了. 为此，要

$$BD+DE>BE>BD-DE,$$

即 $m+n>a+b>m\sim n$ 为所求的条件.

250. 若在凸四边形 $ABCD$ 中，

$$\angle B=\angle C,\ AB=CD,$$

则四边形是等腰梯形。

解 过 A 引 $AE\parallel CD$，知同位角

$$\angle AEB=\angle DCE.$$

由假设条件 $\angle B=\angle C$，有

$$\angle AEB=\angle ABC,$$

从而 $AB=AE$.

又 $AB=CD$,

有 $AE \underline{\parallel} CD$.

因此 $AECD$ 是平行四边形，有

$$AD\parallel CE,$$

所以 $ABCD$ 是 $AB=CD$ 的梯形，即为等腰梯形。

251. 连结梯形两腰中点的线段平行于底边且等于两底和之半。

解 设梯形 $ABCD$(底为 BC, AD)的两边 AB、CD 的中点为 M、N，延长 AN、BC 交于点 E，因 $DN=NC$, $AD\parallel CE$.

$$\therefore\ \triangle AND\cong\triangle ENC,$$

$$\therefore\ AN=NE,\ AD=CE.$$

但是 $AM=MB$,

$$\therefore\ MN\parallel BE.$$

且 $MN=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

252. 连结梯形 $ABCD$ 的两对角线 AC、BD 的中点 Q、P 的线段 PQ，等于两底边的差之半。

解 假设延长 AP 与 BC 的交点为 E，则

$$AP=PE,$$
$$AD=BE.$$

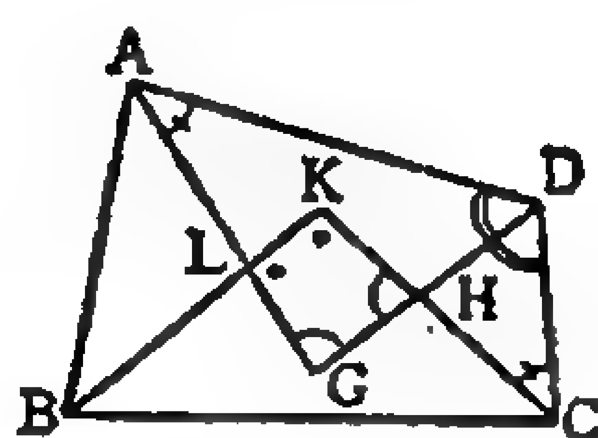
从而 $EC=BC-AD$.

又因为 P、Q 分别是 AE、AC 的中点，所以有

$$PQ=\frac{1}{2}EC=\frac{1}{2}(BC-AD).$$

253. 在四边形 $ABCD$ 中，若 $\angle A=\angle C$，则各角平分线相交成等腰梯形。

解 在图中，设 $LGHK$ 是由四边形 $ABCD$ 的各角平分线相交作成的四边形，则在 $\triangle AGD$、$\triangle HCD$ 中，



$$\angle GAD=\angle HCD$$
$$(\because\ \angle A=\angle C),$$
$$\angle ADG=\angle HDC,$$
$$\therefore\ \angle AGD=\angle DHC=\angle KHG. \quad ①$$

又在 $\triangle ABL$、$\triangle BKC$ 中，

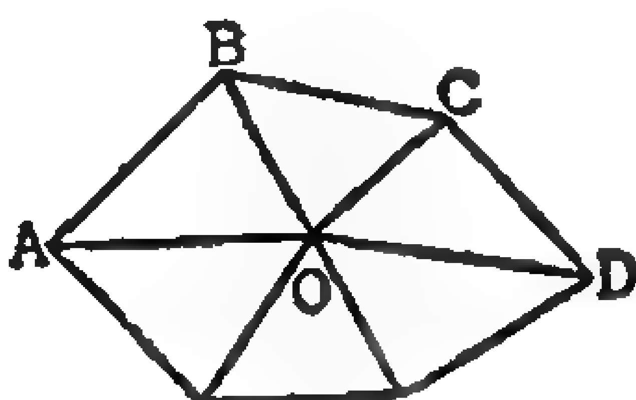
$$\angle BAL=\angle BCK\ (\because\ \angle A=\angle C),$$
$$\angle ABL=\angle KBC,$$
$$\therefore\ \angle ALB=\angle GLK=\angle HKL. \quad ②$$

由①、②，知四边形 $LGHK$ 是等腰梯形。

(6) 多边形

254. 凸 n 边形的内角和等于 $(2n-4)$ 直角。

解 在 n 边形 $ABCD\cdots$ 内任取一点 O，连结点 O 与各顶点作成 n 个三角形，这些三角形的内角和为

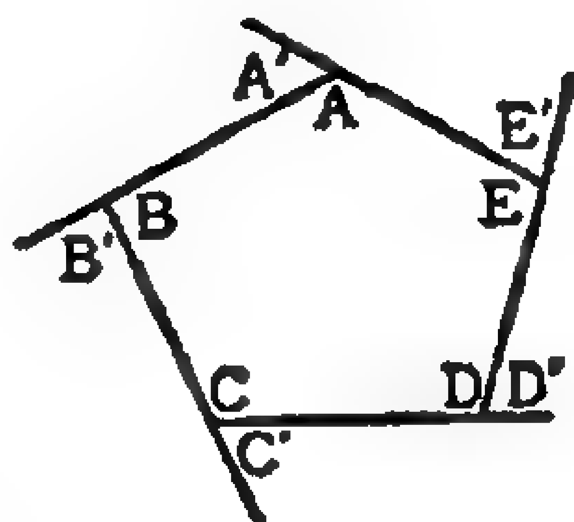


$$2\angle R\times n=2n\angle R.$$

但是多边形的内角和等于这些三角形的内角和减去点 O 的周角 $4\angle R$，即

$$2n\angle R-4\angle R=(2n-4)\angle R.$$

255. 顺次延长凸多边形的各边所形成的外角和等于 $4\angle R$。



解 设 A'、B'、C'、D'、E'、$\cdots$ 为凸多边形 $ABCDE\cdots$ 的外角，则在各顶点上的内角与外角之和为 $A+A'$, $B+B'$, $\cdots$ 等，且每个内、外角之和均等于 $2\angle R$。因此凸 n 边形内角的和加上外角的和等于 $2n\angle R$。由上题知内角和为 $(2n-4)\angle R$，即外角和等于

$$2n\angle R-(2n-4)\angle R=4\angle R.$$

256. 求凸 n 边形的对角线的总数。

解 因为从边数为 n 的凸多边形的一个顶点，能引出 $(n-3)$ 条对角线，所以从 n 个顶点引的对角线总数为 $n\cdot(n-3)$ 条。但因为这些对角线都重复了一次，故所求的对角线总数为

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}.$$

257. 凸多边形的内角是锐角的不多于三个.

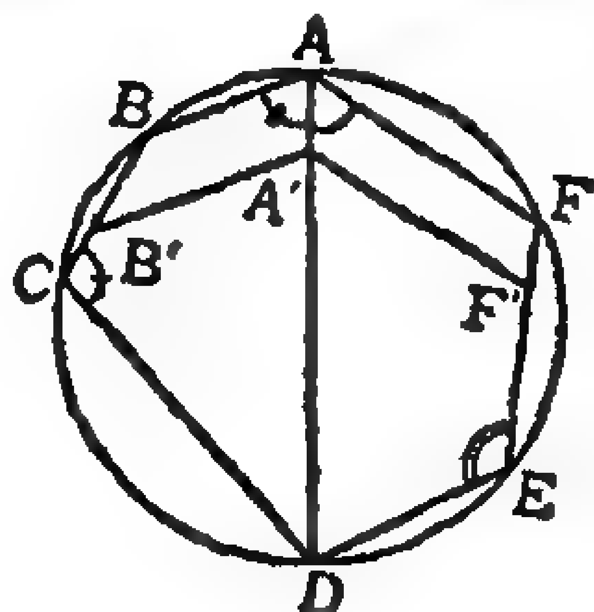
解 当内角为锐角时，其邻补角是钝角. 但是凸多边形的外角和，不论边数如何都是$4\angle R$. 所以外角能为钝角的最多有三个，从而凸多边形的内角为锐角的最多有三个.

258. 试述多边形能够内接于圆的充分必要条件，并证明之.

解 设内接于圆的多边形为$ABCD\cdots$，连结顶点A、B、C、D、$\cdots$与外接圆圆心O，由$OA=OB=OC=OD=\cdots$，知点O是AB、BC、CD、$\cdots$的垂直平分线的交点. 因此，多边形各边的垂直平分线相交于一点，是多边形能够内接于圆的必要条件.

反之，若多边形各边的垂直平分线相交于一点O，则有$OA=OB=OC=OD=\cdots$，即点O与A、B、C、D、$\cdots$的距离相等，所以O是多边形外接圆的圆心，即这个多边形内接于圆. 因此，多边形各边的垂直平分线相交于一点是该多边形内接于圆的充分条件.

综上所述，多边形各边的垂直平分线相交于一点，是多边形内接于圆的充分必要条件.



259. 圆内接六边形的每隔一角的内角之和相等. 其逆命题是否成立?

解 设$ABCDEF$为圆内接六边形，连结AD，则得两个内接圆的四边形$ABCD$、$AFED$，有

$$\left.\begin{array}{l}\angle FAD+\angle E=2\angle R,\\ \angle BAD+\angle C=2\angle R,\end{array}\right\}$$

$$\therefore\ \angle A+\angle E+\angle C=4\angle R.$$

同理，$\angle B+\angle D+\angle F=4\angle R$，

所以每隔一角的内角之和相等.

逆命题不成立，如图，作$A'B'\parallel AB$，$A'F'\parallel AF$，则虽然有$A'B'CDEF'$的各角等于原六边形各角，但不能内接于圆.

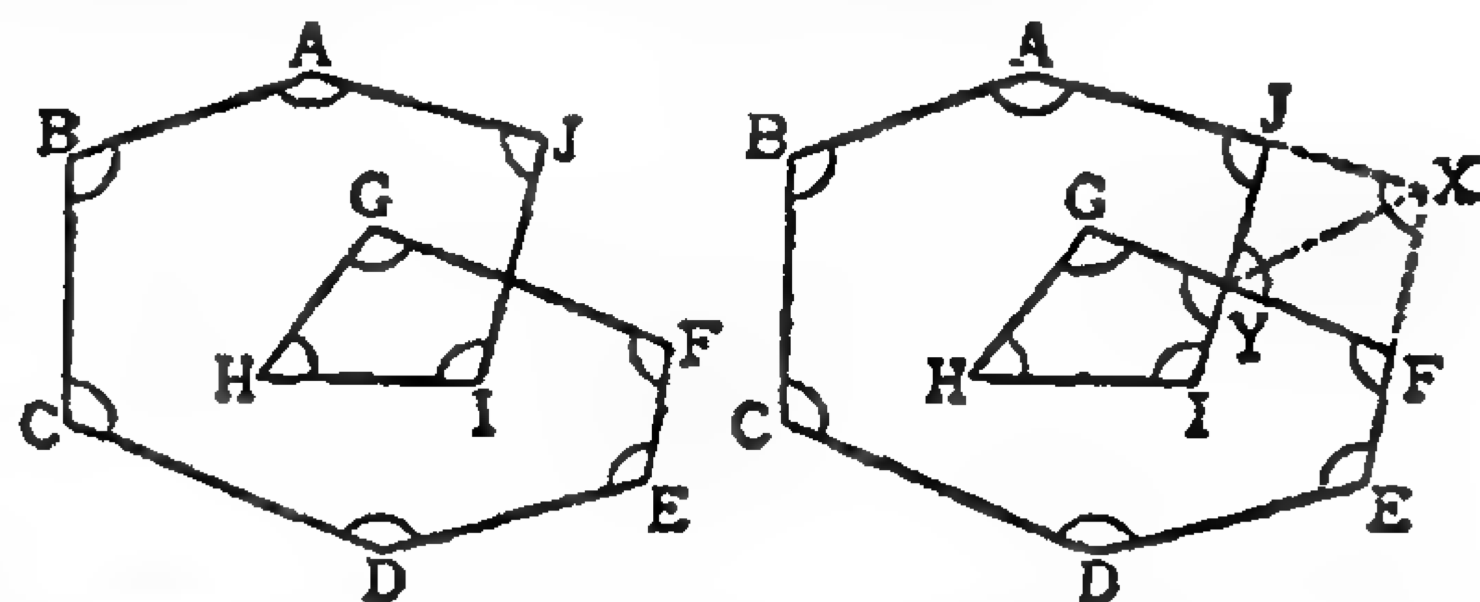
260. 正n边形的一个内角等于$\left(2-\frac{4}{n}\right)\times\angle R$，一个外角等于$\frac{4}{n}\angle R$.

解 因为正n边形的内角和等于$(2n-4)\times\angle R$，所以一个内角等于

$$\frac{(2n-4)}{n}\angle R=\left(2-\frac{4}{n}\right)\angle R.$$

又其外角和等于$4\angle R$，所以一个外角等于$\frac{4}{n}\angle R$.

261. 如图，连起来的十条线段形成的平面图形，其相邻两线段的夹角(图中用弧表示)A，B，$\cdots$，J的和是多少?



解 设延长AJ与EF的交点为X，GF、IJ的交点为Y，则有

$$\angle YXF+\angle XYF=\angle YFE,$$
$$\angle JYX+\angle JXY=\angle AJY.$$

在右图中，有

$$\angle X+\angle Y=\angle J+\angle F. \quad ①$$

又由于六边形$ABCDEX$的内角和为

$$A+B+C+D+E+X=8\angle R. \quad ②$$

四边形$GHIY$的内角和为

$$G+H+I+Y=4\angle R. \quad ③$$

把①代入②+③，得

$$A+B+C+D+E+F+G+H+I+J$$
$$=12\angle R.$$

262. 若两个边数不同的正多边形的内角之比等于其边数之比，则这两个正多边形的边数为6与3.

解 设边数分别为m、n的两个正多边形中，其内角大小分别为

$$\frac{1}{m}(2m-4)\angle R=\left(2-\frac{4}{m}\right)\angle R,$$

$$\frac{1}{n}(2n-4)\angle R=\left(2-\frac{4}{n}\right)\angle R.$$

根据假设，有

$$\left(2-\frac{4}{m}\right):\left(2-\frac{4}{n}\right)=m:n,$$

整理，得

$$mn(n-m)=2(n-m)\cdot(n+m),$$

由假设，知$n\neq m$，有

$$mn=2n+2m,$$

即　$$m=\frac{2n}{n-2}=2+\frac{4}{n-2}.$$

因为 m、n 是多边形的边数，所以有 $m\geqq 3$，$n\geqq 3$ 的整数。因此

$$\frac{4}{n-2}\geqq 1,\ 6\geqq n\geqq 3,$$

且 $n-2$ 必须是 4 的约数。由 $m\neq n$，除去 $m=4$，$n=4$，于是得 $m=6$，$n=3$ 或者 $m=3$，$n=6$。即这两个正多边形是正三角形与正六边形。

263. 三个正多边形环绕一点既不重迭又无间隙的排列，若它们的边数为 p、q、r，试证下面等式成立，并求当 $p=3$ 时，q、r 的值（在 p、q、r 中 p 最小）。

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}.\ (3\leqq p\leqq 6)$$

解　因为边数为 n 的正多边形的一个角的大小为

$$\frac{2n-4}{n}\angle R=\left(2-\frac{4}{n}\right)\angle R,$$

所以正 p 边形，正 q 边形，正 r 边形环绕一点既不重迭又无间隙排列时，则有

$$\left(2-\frac{4}{p}\right)\angle R+\left(2-\frac{4}{q}\right)\angle R+\left(2-\frac{4}{r}\right)\angle R=4\angle R,$$

即

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}. \qquad ①$$

但由于 $360°\div 3=120°$，知当 $p=q=r$ 时，则三个正多边形都是正六边形；当 p、q、r 大小不等时，其最小的 p 是 $3\leqq p\leqq 6$。当 $p=3$ 时，其中一个内角是 60°，另外两个正多边形各取一个内角的和是 $360°-60°=300°$。但因凸多边形的一个内角不可能超过 180°，所以这两个内角都大于 120°。因此 $q>6$，$r>6$。

在 ① 式中，设 $p=3$，有

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2},$$

将 q 用 r 表示

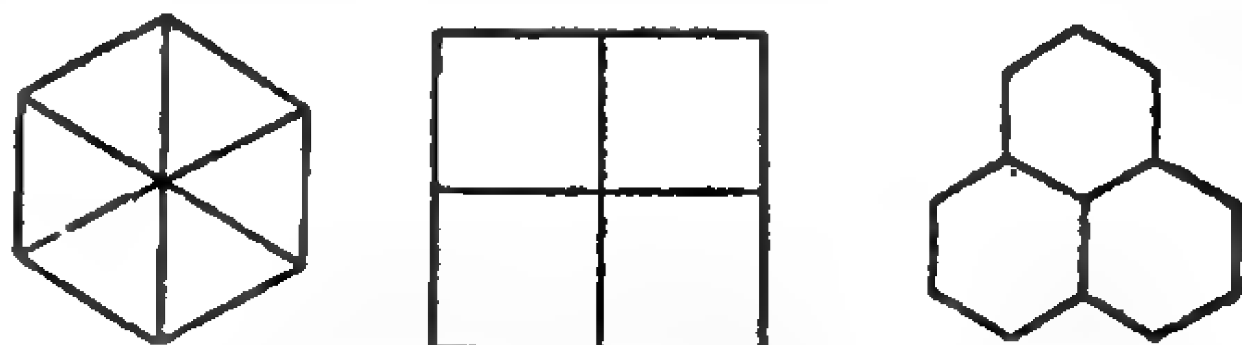
$$q=\frac{6r}{r-6}=6+\frac{36}{r-6}.$$

因为 q 是大于 6 的整数，所以 $r-6$ 是 36 的正约数，于是取 $r-6=1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36$，从而得

$$\left.\begin{matrix}q=42\\r=7\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}24\\8\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}18\\9\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}12\\10\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}10\\12\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}9\\18\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}8\\24\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}7\\42\end{matrix}\right\}.$$

264. 若使大小一定的正多边形的砖无间隙地铺满地，则这些正多边形是正三角形，正方形，正六边形中之一种。

解　适合题意的正多边形，其顶角的大小必须是整除 360° 的角，象这样的顶角只有是正三角形的一角为 60°，正方形的一角为 90°，正六边形的一角为 120°。因此能够用同样形状的多边形铺满地面，只有正三角形、正方形、正六边形中的一种。



265. 等角多边形必为凸多边形。

解　设等角多边形的边数为 n，其内角和为 $(2n-4)\angle R$。因此一个内角为

$$\frac{2n-4}{n}\angle R=2\angle R-\frac{4}{n}\angle R,$$

且小于 $2\angle R$。所以等角多边形必为凸多边形。

266. 若凸多边形的边数增加一边时，则其内角和增加两直角。

解　因为凸 n 边形内角和等于 $(2n-4)\angle R$，因此增加一边时的 $(n+1)$ 边形的内角和等于 $[2(n+1)-4]\angle R$。而

$$[(2n+1)-4]\angle R-(2n-4)\angle R=2\angle R,$$

所以边数增加一边时，内角和增加 $2\angle R$。

267. 分别以三角形的各边为一边，向其外侧作正多边形（边数各为 p, q, r），若这些正多边形的外接圆在三角形内一点 O 处相交，试证下式成立

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1.$$

解　设 BC 为一边的边数为 p 的正多边形的中心为 O_1，则

$$\angle BO_1C=\frac{360°}{p},$$

弧 BC 上所张的圆周角是 $\frac{180°}{p}$。象这样三个圆在三角形内一点 O 处相交时，则由

$\angle BOC$ 是 $\frac{180°}{p}$ 的补角，有

$$\angle BOC=180°\times\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

同理，
$$\angle COA=180°\times\left(1-\frac{1}{q}\right),$$
$$\angle AOB=180°\times\left(1-\frac{1}{r}\right).$$

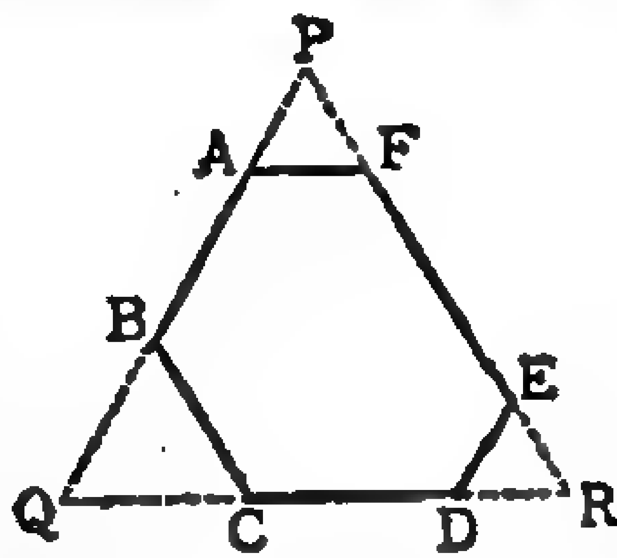
由 $\angle BOC+\angle COA+\angle AOB=360°$，有

$$180°\left(1-\frac{1}{p}\right)+180°\left(1-\frac{1}{q}\right)+180°\left(1-\frac{1}{r}\right)=360°.$$

$$\therefore\quad\left(1-\frac{1}{p}\right)+\left(1-\frac{1}{q}\right)+\left(1-\frac{1}{r}\right)=2,$$

$$\therefore\quad\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1.$$

268. 在等角六边形中，两邻边之和等于相对的两邻边之和。



解 设 $ABCDEF$ 为等角六边形，则各角是 $120°$。若延长各边作成如图的 $\triangle PQR$，则 $\triangle PQR$ 是正三角形。从而这个六边形的对边互相平行，有

$$AQ=FR.\qquad ①$$

又 $\triangle BQC$、$\triangle EDR$ 是正三角形，有

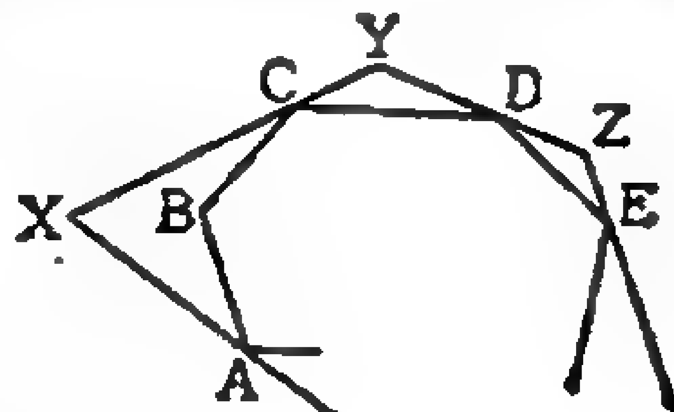
$$AB+BC=AB+BQ=AQ,$$
$$FE+ED=FE+ER=FR.\qquad ②$$

由①、②，有

$$AB+BC=EF+ED.$$

同理可证，其他相对的两邻边之和也相等。

269. 星形五角形各顶点上的五个角 A'、B'、C'、D'、E' 之和等于两直角。



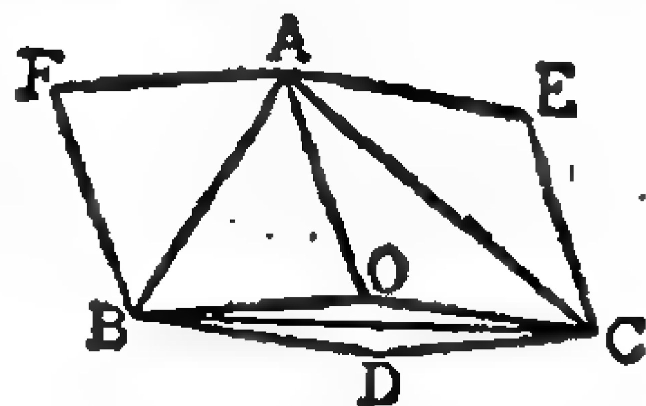
解 由于 $\angle EDE'$ 是 $\triangle A'C'D$ 的外角，有

$$\angle A'+\angle C'=\angle EDE'.$$

同理，
$$\angle B'+\angle D'=\angle E'ED,$$
$$\angle E'=\angle EE'D.$$

$$\therefore\quad\angle A'+\angle B'+\angle C'+\angle D'+\angle E'$$
$$=\angle E'ED+\angle EDE'+\angle EE'D$$
$$=2\angle R\quad(\triangle EDE'\text{ 的内角和}).$$

270. 连结 $\triangle ABC$ 的顶点与外心，从各顶点作这些连线的平行线组成一个六边形，则此六边形的各边相等，相对的两角相等，且分别等于三角形的各顶角的两倍。



解 设外心为 O，引 BF、CE 平行于 AO，AF、CD 平行于 BO，AE、BD 平行于 CO，形成六边形 $AFBDCE$。由于 O 为外心，知 $AO=BO=CO$。而六边形的每两边分别等于 AO、BO、CO，因此六条边都相等。

其次，由 $AF\parallel BO$，$AE\parallel CO$，因此

$$\angle EAF=\angle BOC.$$

由于 $\angle BAC$ 是圆周角，知

$$\angle BOC=2\angle BAC.$$

又 $BOCD$ 是平行四边形，有

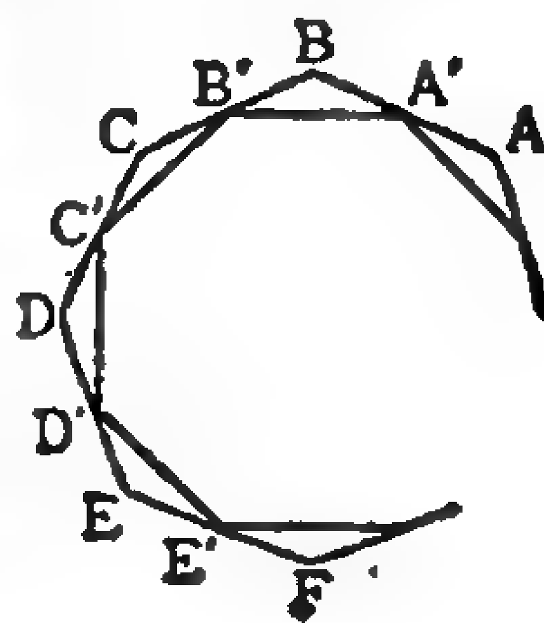
$$\angle BOC=\angle BDC,$$

从而
$$\angle EAF=\angle BDC=\angle BOC=2\angle BAC.$$

同理，
$$\angle FBD=\angle AEC=2\angle ABC,$$
$$\angle DCE=\angle AFB=2\angle ACB.$$

即六边形的相对两个角相等，且分别等于三角形的各顶角的两倍。

271. 凸多边形的周长小于包围它的任意多边形的周长。



解 设 S 表示凸多边形 $ABCDE\cdots$ 的周长，S' 表示包围它的任意多边形 $AXYZ\cdots$ 的周长，则有

$$AB+BC<AX+XC,$$
$$CD<CY+YD,$$
$$DE<DZ+ZE,\ \cdots$$

因此
$$AB+BC+CD+\cdots<AX+XY+YZ+\cdots,$$

即
$$S<S'.$$

272. 若在正多边形的各边上，依次从顶点起以相同的方向截取等距离的点，连结这些点，则得到边数与原多边形相同的第二个正多边形。

解 若在正多边形 $ABCD\cdots$ 的各边上顺次取

$$AA'=BB'=CC'=DD'=\cdots$$

则在 $\triangle A'BB'$、$\triangle B'CC'$ 中，

$$AB=BC,\ AA'=BB'.$$

$$\therefore\quad A'B=B'C,$$

又 $BB'=CC'$ 而 $\angle B=\angle C$，

$$\therefore\quad \triangle A'BB'\cong\triangle B'CC'.$$

同理，　$\triangle B'CC'\cong\triangle C'DD'\cong\cdots$，

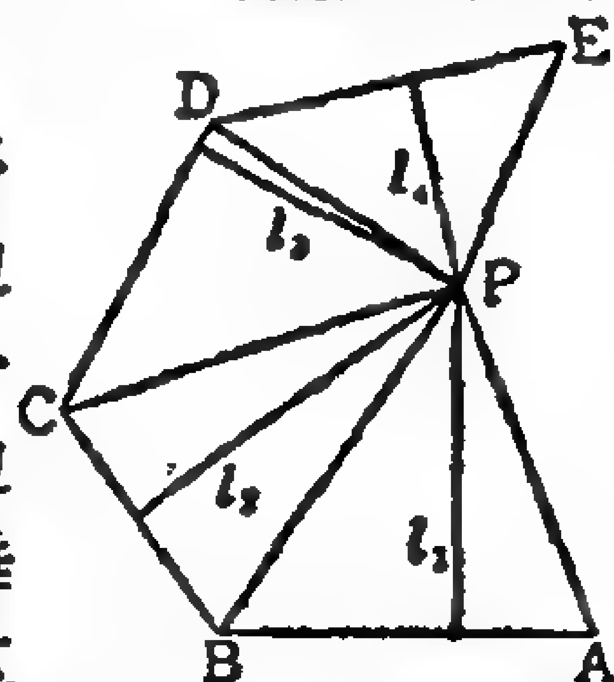
因此　$A'B'=B'C'=C'D'=\cdots$。

又　$\angle BA'B'=\angle CB'C'=\angle DC'D'=\cdots$，

及　$\angle BB'A'=\angle CC'B'=\angle DD'C'=\cdots$，

$$\therefore\quad \angle A'B'C'=\angle B'C'D'=\angle C'D'E'=\cdots.$$

故 $A'B'C'D'\cdots$ 是与 $ABCD\cdots$ 边数相同的正多边形。



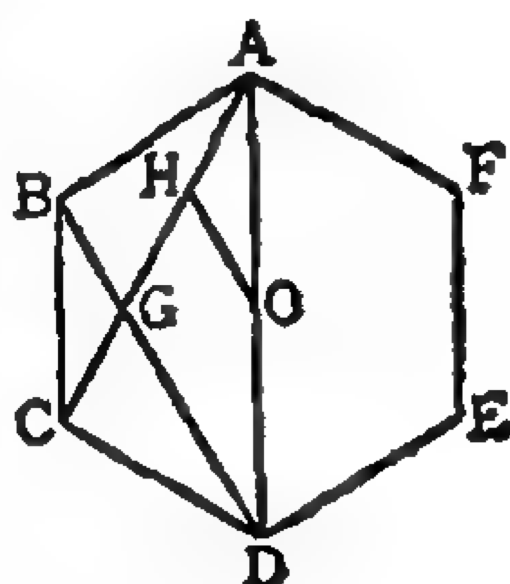
273. 试证从正多边形内的任一点向各边作垂线，垂线的和是一定的。又当点在正多边形外面时，只要给定垂线的正负号，就可使这些垂线的代数和也是一定的，问这些符号如何确定才好呢？

解 设 $l_1, l_2, l_3\cdots$ 是从正多边形 $ABCD\cdots$ 内一点 P 向 AB、BC、CD、$\cdots$ 作的垂线，若正多边形的边长为 a，面积为 S，则

$$S=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}a(l_1+l_2+l_3+\cdots).$$

因为 S、a 是一定的，所以 $l_1+l_2+l_3+\cdots$ 是一定的。当点 P 关于 AB 与多边形在同侧时，取 l_1 为正；在异侧时为负。当点 P 关于 BC 与多边形在同侧时，取 l_2 为正，在异侧时为负，对于 l_3、l_4 等也作同样考虑时，则 l_1、l_2、l_3、$\cdots$ 等代数和与前面一样是一定的。



274. 若正六边形 $ABCDEF$ 的两条对角线 AC、BD 的交点为 G，则

$$AG=2CG.$$

解 设 O 为 AD 的中点，作

$$OH\parallel BD,$$

则　$HO\parallel BG$。

又 $OA \underline{\parallel} BC$，得

$$\triangle HOA\cong\triangle GBC.$$

$$\therefore\quad AH=GC.$$

又 $AO=OD$ 有

$$AH=HG,$$

因此　$AG=2CG$。

别解 因为 $ABCDEF$ 是正六边形，有

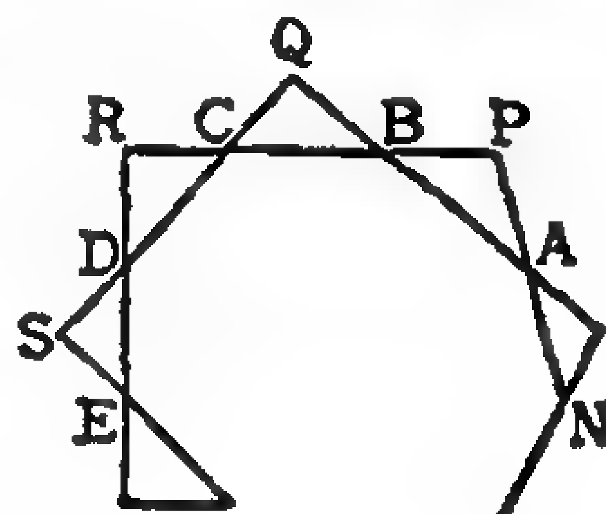
$$BC\parallel AD,$$

因此　$\triangle GBC\backsim\triangle GAD$.

$$\therefore\quad \frac{GC}{BC}=\frac{AG}{AD}.$$

但是　$AD=2BC$，

$$\therefore\quad AG=2CG.$$



275. 凸 n 边形 $ABCD\cdots$ 的各边延长相交所生成的 n 个角之和等于 $2(n-4)\angle R$。(其中 $n\geqq5$)

解 因为凸多边形的外角和为 $4\angle R$，在图中，$\triangle PAB$，$\triangle QBC\cdots$ 等小三角形的各底角之和为 $8\angle R$，这些小三角形的内角总和为 $2n\angle R$。

$$\therefore\quad \angle P+\angle Q+\angle R+\cdots$$

$$=2n\angle R-8\angle R=2(n-4)\angle R.$$

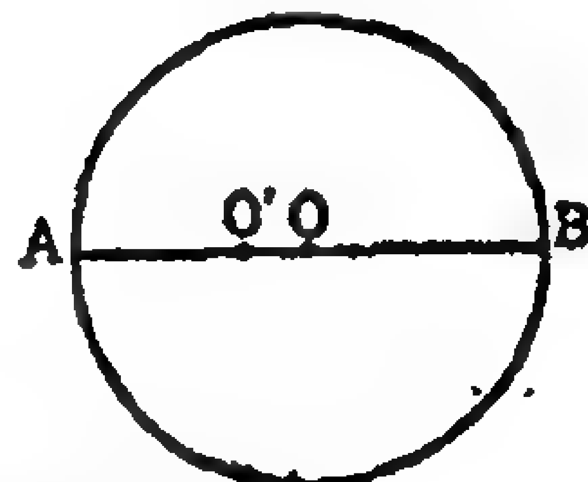
第二章　圆

1. 圆的基本性质

276. 圆心只有一个。

解 设除圆心 O 外，还有一个圆心 O'，延长 OO' 与圆周的交点为 A、B，因为 O 是圆心，

$$\therefore\quad AO=BO.$$



又因为 O' 也是圆心，

$$\therefore\quad AO'=BO',$$

因此

$$AO-OO'=BO+OO',$$

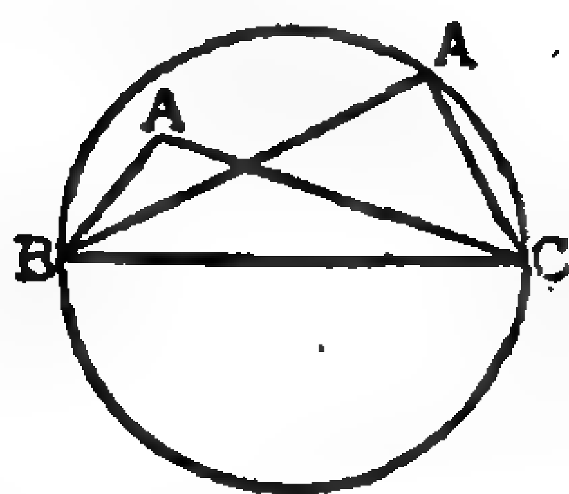
$$\therefore\quad 2OO'=0.$$

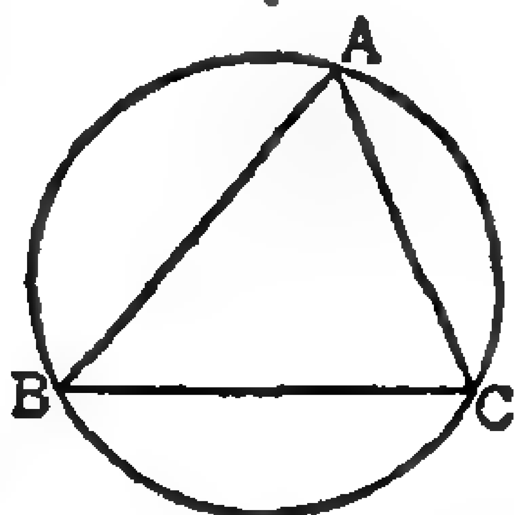
即 O' 与 O 重合，所以圆心只有一个。

277. 已知 $\triangle ABC$，问包含 $\triangle ABC$ 的半

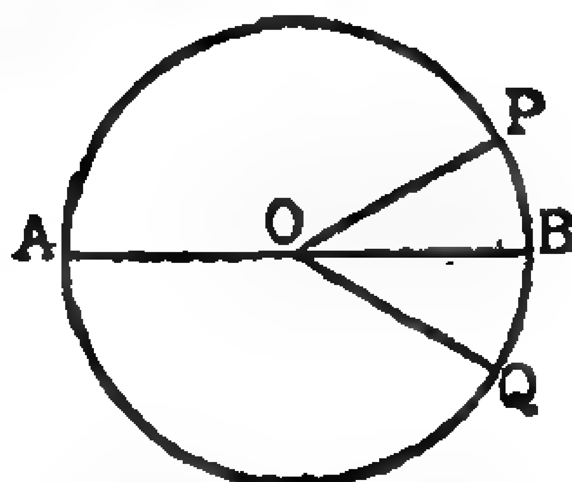
径最小的是怎样的圆?

解 要使三角形的三个顶点在圆内或圆周上，而且这个圆最小，只要使这个三角形的第三个顶点，能在通过最大边的两端点的圆内或圆周上就行了.



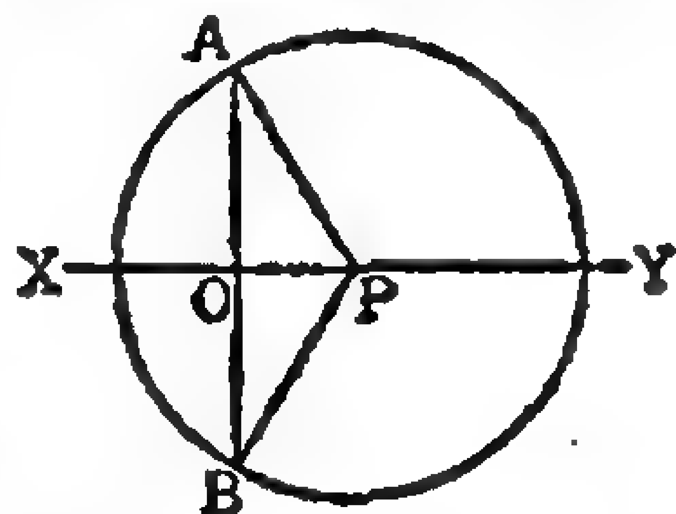


设 BC 为三角形的最大边. 若 $\angle A$ 为钝角，则点 A 在以 BC 为直径的圆内；若 $\angle A$ 为直角，则点 A 在以 BC 为直径的圆周上. 因此在这两种情况下，所求的圆就是以 BC 为直径的圆. 其次，若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $\triangle ABC$ 的外接圆就是所求的最小圆.



278. 圆的任一直径都把该圆分成全等的两部分，且直径为该圆的对称轴.

解 设圆的直径为 AB，在 $\overparen{AB}$ 上任取一点 P，连结 OP，在弧 APB 关于直径 AOP 的异侧作半径 OQ，使 OQ 与 OB 的夹角 BOQ 等于 $\angle BOP$. 把 APB 沿 AB 折过来与 AQB 重合在同一平面上，由 $\angle BOP=\angle BOQ$ 知 OP 与 OQ 重合，又由 $OP=OQ$ 知点 P 与点 Q 重合. 类似地由折迭可知，$\overparen{APB}$ 上各点与 $\overparen{AQB}$ 上各点都重合. 反之也一样. 所以图形 APB 与图形 AQB 全等，从而 AB 为该圆的对称轴.



279. 过两定点 A、B 的所有圆的圆心，都在连结这两点的线段的垂直平分线上.

解 设 AB 的中点为 O，直线 XOY 垂直于线段 AB，设过点 A、B 的任意圆的圆心为 P，因 $PA=PB$，所以 $\triangle PAB$ 是等腰三角形，从而

$$PO\perp AB.$$

由此可知点 P 在 XY 上，故过点 A、B 的一切圆的圆心在 XY 上.

280. 证明下述各点:

(1) 圆内含有的正方形，其周长小于该圆的周长;

(2) 正方形内含有的圆，其周长小于该正方形的周长.

(1)

解 在图 (1) 中，正方形 $ABCD$ 的面积小于圆 O 的面积. 设圆的半径为 r，则

$$AB=\sqrt{2}r,$$

$$\therefore\quad 2r^2<\pi r^2,\quad \therefore\quad 4r<2\pi r,$$

从而正方形 $ABCD$ 的周长小于圆 O 的周长.

又，圆 O 的面积小于正方形 $PQRS$ 的面积，即

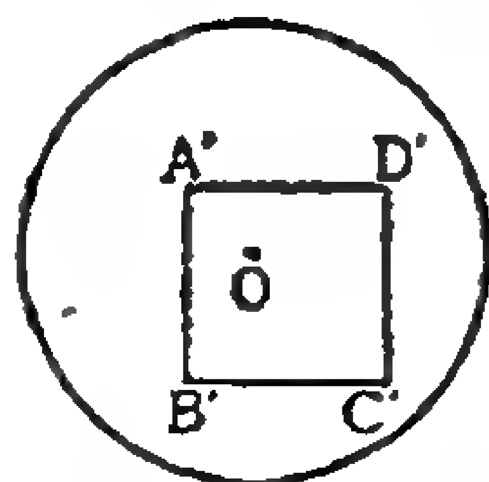
$$\pi r^2<4r^2,$$

$$\therefore\quad 2\pi r<8r,$$

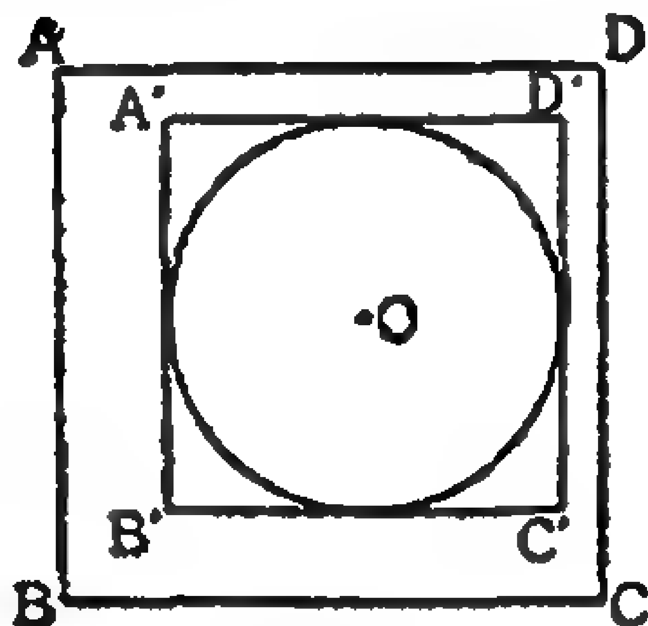
从而圆 O 的周长小于正方形 $PQRS$ 的周长.

利用上面的原理，

(1) 在图 (2) 中，作正方形 $A'B'C'D'$ 的外接圆 O'，则正方形 $A'B'C'D'$ 的周长小于圆 O' 的周长，所以正方形 $A'B'C'D'$ 的周长小于圆 O 的周长.

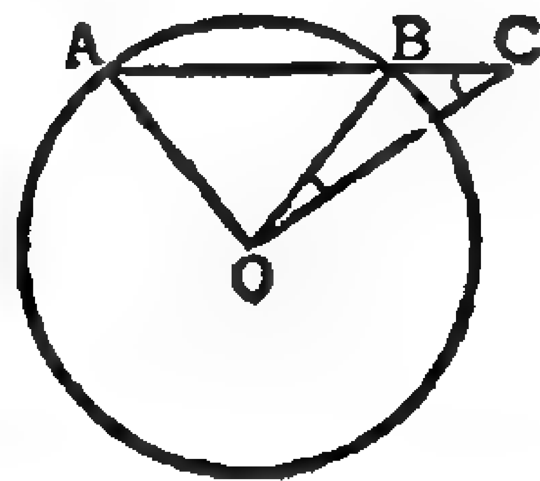


(2)



(3)

(2) 在图 (3) 中，如图作圆 O 的外切正方形 $A'B'C'D'$. 因为圆 O 的周长小于正方形 $A'B'C'D'$ 的周长，所以圆 O 的周长小于正方形 $ABCD$ 的周长.



281. 直线与圆周相交不能多于两点，因此圆周上的三点不在一直线上.

解 设圆 O 与直线相交于 A、B、C 三点，则

$$AO=BO=CO.$$

所以 $\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle AOC$ 都是等腰三角形，于是

$$\angle OAB=\angle OBA=\angle BOC+\angle OCB.$$

又因 $\angle OAB=\angle OCB$,

$\therefore\ \angle BOC+\angle OCB=\angle OCB$,

$\therefore\ \angle BOC=0$.

即 B 和 C 重合，所以圆和直线的交点不能多于两个.

282. 圆环的内侧圆的半径是外侧圆的半径的一半，当圆环在直线上无滑动的旋转一周时，问内侧圆怎样旋转，并且滑动多少？

解 在图中，设内侧圆 B 的半径为 r，外侧圆 A 的半径为 $2r$。设圆 A 从点 P 旋转一周到 P' 的位置时，圆心 O 的位置移动到 O' 的位置.



则线段 $PP'=4\pi r$，其中 PP' 等于圆 A 的周长.这时在图中，

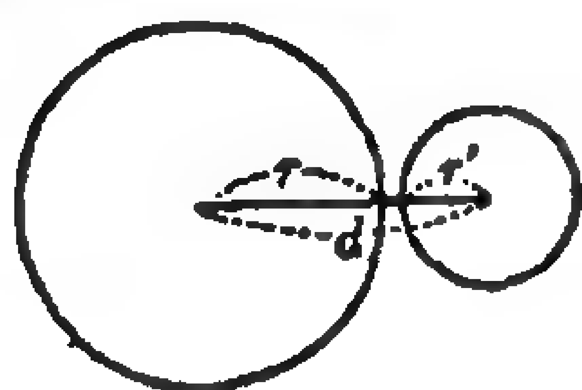
$QQ'=PP'=$ 圆 A 的周长 $=4\pi r$,

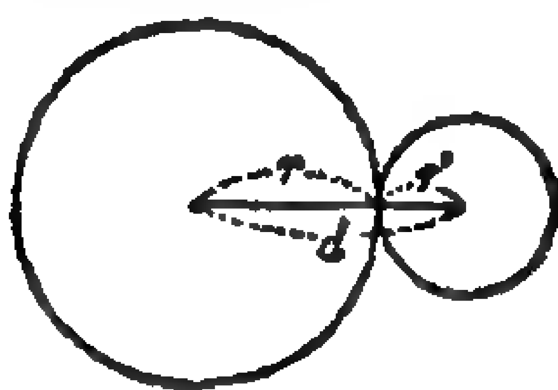
又 圆 B 的周长 $=2\pi r$.

小圆 B 随大圆 A 旋转一周而旋转一周。由于圆 B 旋转一周只移动 $2\pi r$，所以小圆 B 只滑动 $4\pi r-2\pi r=2\pi r$.

283. 试将半径为 r、$r'(r>r')$，圆心距为 d 的两圆的各种位置关系的图画出来，并建立 r、r'、d 间的关系式.

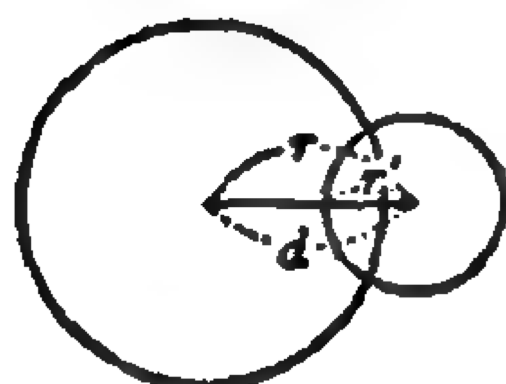
解 两圆相离 外切

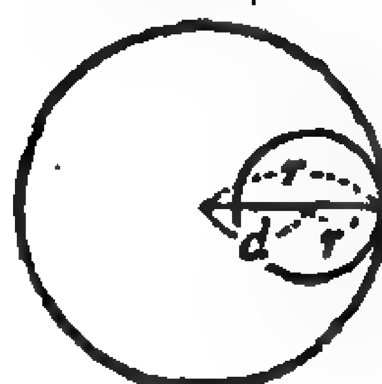


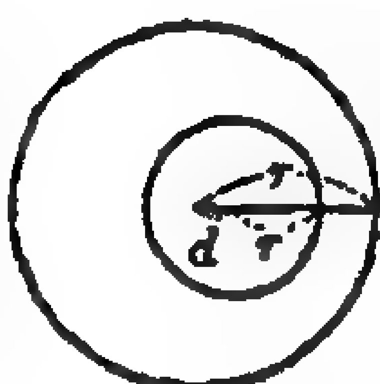


$r+r'<d$ $r+r'=d$

相交 内切 内含







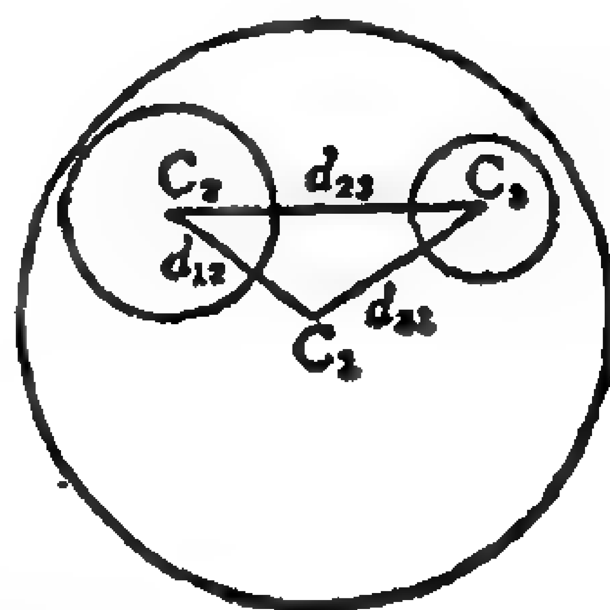
$r+r'>d>r-r'$ $r-r'=d$ $r-r'>d$

284. r_1、r_2、r_3 分别是三个圆 C_1、C_2、C_3 的半径，d_{23}, d_{31}, d_{12} 分别是 C_2 和 C_3, C_3 和 C_1, C_1 和 C_2 的圆心距.假定它们之间有关系

$d_{12}+r_2<r_1$, $d_{31}+r_3<r_1$,

$r_2+r_3<d_{23}$

成立，问三个圆相互间的位置有怎样的关系？



解 因 $d_{12}+r_2<r_1$,

即 $r_1-r_2>d_{12}$.

所以圆 C_2 在圆 C_1 中.

因 $d_{31}+r_3<r_1$,

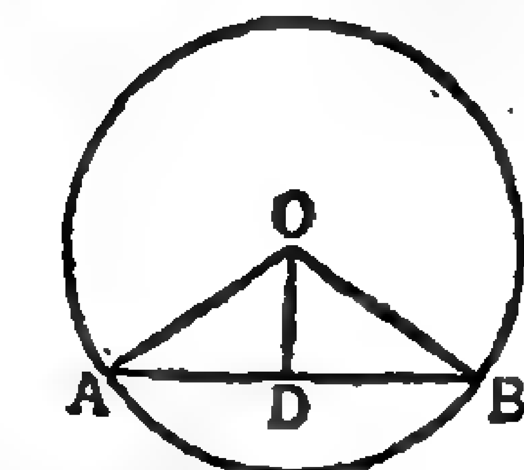
即 $r_1-r_3>d_{31}$.

所以圆 C_3 在圆 C_1 中。因

$r_2+r_3<d_{23}$,

所以圆 C_2 和 C_3 外离。故三圆 C_1、C_2、C_3 的位置如图.

285. 在圆 O 中，圆心与弦的中点的连线，垂直于此弦.



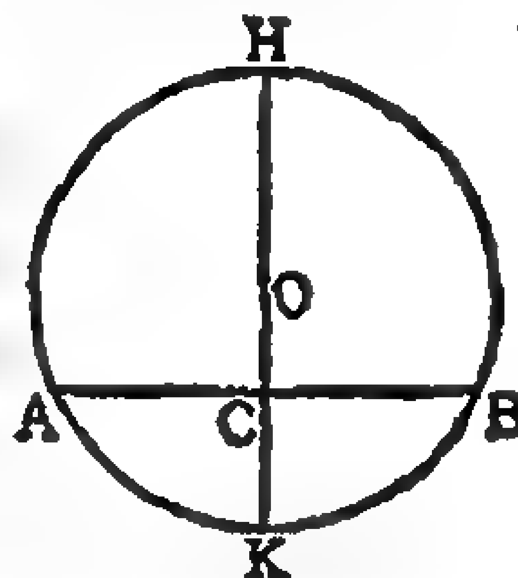
解 在圆 O 中，设 D 是弦 AB 的中点，若连结 OD，则

$\triangle OAD\cong\triangle OBD$ (三边相等).

$\therefore\ \angle ODA=\angle ODB=\angle R$,

从而 $OD\perp AB$.

286. 在同圆中，从圆心 O 向弦 AB 所作的垂线，平分该弦所对的优弧和劣弧.



解 若从圆心 O 向弦 AB 作垂线 OC，且向两边延长交圆周于 H、K，由于 $HK\perp AB$，所以如果沿直线 HK 折迭时，A 和 B 重合、$\overset{\frown}{AH}$ 和 $\overset{\frown}{BH}$ 重合、$\overset{\frown}{AK}$ 和 $\overset{\frown}{BK}$ 重合，

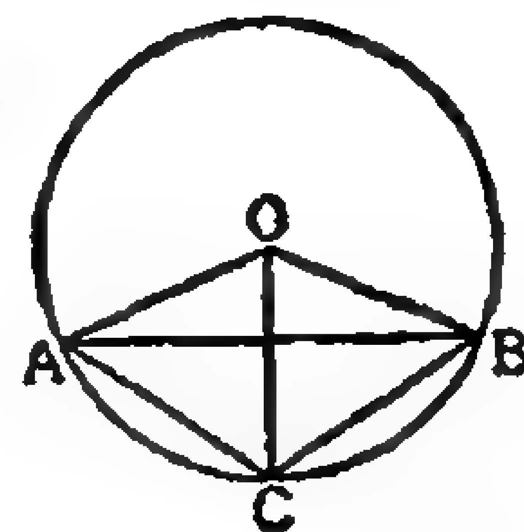
$\therefore\ \overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{BH}$, $\overset{\frown}{AK}=\overset{\frown}{BK}$.

故直径 HK 平分优弧 AHB 和劣弧 AKB.

287. 设 AB 为圆 O 的弦，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，则

$\angle CAB=\angle CBA$,

且 OC 是 AB 的垂直平分线.



解 因 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,

$\therefore\ \angle AOC=\angle BOC$

即 OC 是等腰三角形 OAB 的顶角 O 的平分线。所以 OC 垂直平分 AB，因此

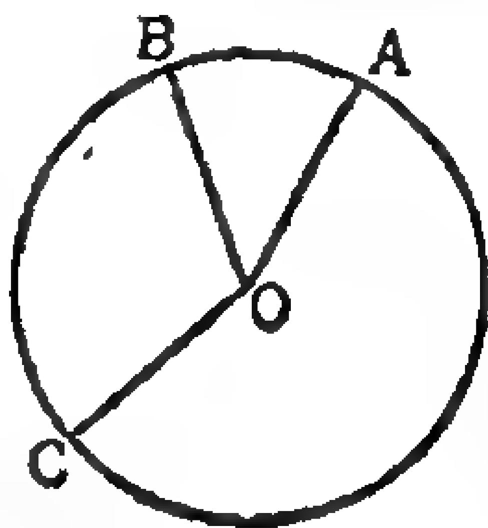
$AC=BC$,

$\therefore\ \angle CAB=\angle CBA$.

288. 设 O 为圆内一点，A、B、C 是圆周上三点，若

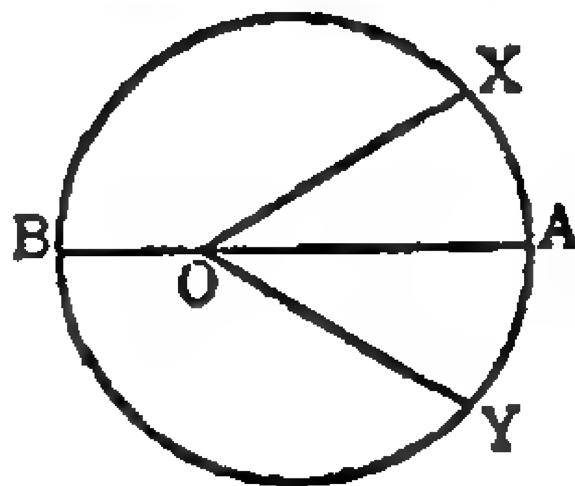
$$OA=OB=OC,$$

则 O 是该圆的圆心。



解 因 $OA=OB$，所以点 O 在 AB 的垂直平分线上。根据问题 **279**，该圆心必在此垂直平分线上。同样，因 $OB=OC$，该圆心必在 BC 的垂直平分线上。所以这两条垂直平分线的交点 O 就是该圆的圆心。

289. 设点 O 在直径 AB 上，由点 O 向直径的两侧作等角的两射线 OX、OY 和圆周相交于 X、Y，则



$$\therefore\quad OX=OY.$$

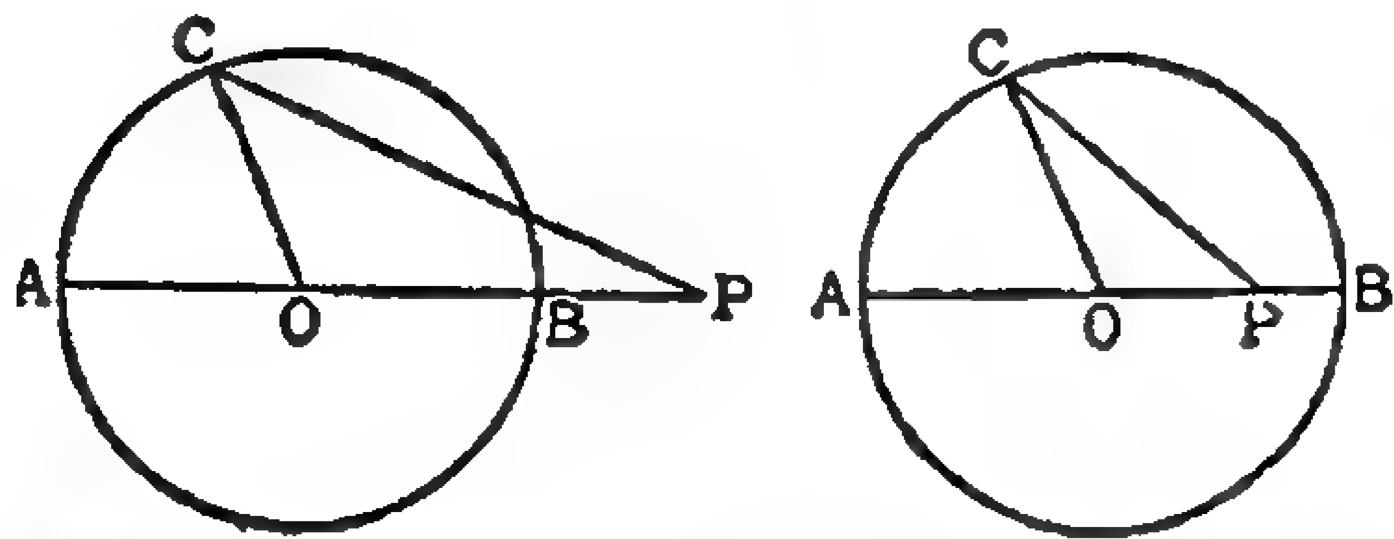
解 把半圆 BXA 沿 AB 对折落在半圆 BYA 上，由 AB 是对称轴，且

$$\angle AOX=\angle AOY;$$

可知点 X 重合于点 Y 上，

$$\therefore\quad OX=OY.$$

290. 除去圆心外，一点 P 到圆周上的最近点和最远点，是过点 P 的直径的两个端点。



解 设不在圆心上的定点 P 和圆心 O 连结的直径为 AB，点 B 和 P 在点 O 的同侧，点 A 和 P 在点 O 的异侧。设点 C 是圆周上的任一点，连结 PC，OC，则在 $\triangle POC$ 中，

$$PO+OC>PC>PO\sim OC.$$

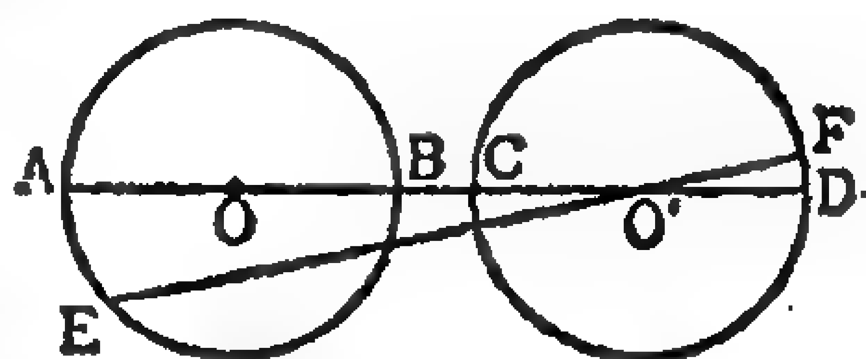
又因 $$OA=OB=OC,$$

$$\therefore\quad PO+OA>PC>PO\sim OB,$$

即 $$AP>PC>BP.$$

所以线段 AP 是连结点 P 到圆周上一切点的线段中最长的，BP 是一切线段中最短的。

291. 若线段的两端点分别取在相离两圆的圆周上，则诸线段中最长的或最短的都在两圆的连心线上。



解 在连心线 OO' 和两圆周的交点中，取外侧两点所连结的线段 AD 最长，取内侧两点所连结的线段 BC 最短。因为在圆 O 的圆周上除 A 点外，任取一点 E，作圆 O' 的圆周上最长的线段 $EO'F$，由上题知

$$O'A>O'E,$$

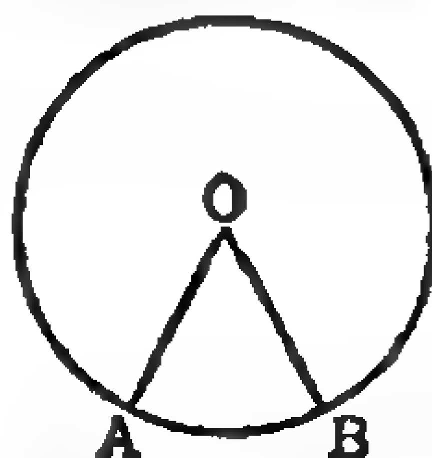
$$\therefore\quad O'A+O'D>O'E+O'F,$$

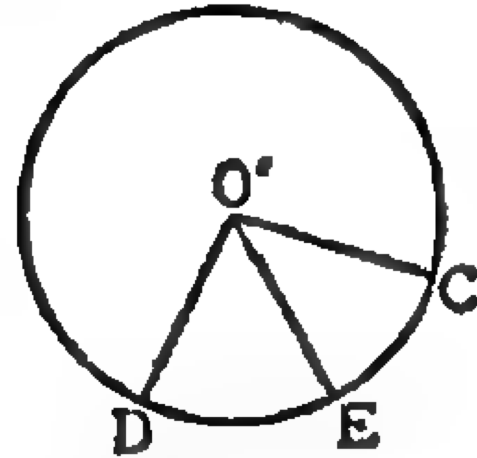
即 $AD>EF$。所以 AD 比从(A 点以外)任意点所作圆 O' 的最长的线段都长，故 AD 是最长的。同样可证 BC 是最短的。

2. 圆心角、圆周角

292. 在半径相等的两圆中，等弧所对的圆心角相等；大弧所对的圆心角大于小弧所对的圆心角。

解 在半径相等的两圆 O、O' 中，设 $\widehat{AB}=\widehat{DE}$。把圆 O 与 O' 迭合，使圆心 O 落在圆心 O' 上，则两圆就完全重合。





设 O' 为圆心，使半径 OA 迭合在半径 $O'D$ 上，若翻转圆 O，使点 B 和 E 在 $O'E$ 的同侧，由 $\widehat{AB}=\widehat{DE}$，可知 A 与 D 重合；同时，B 与 E 重合，因此 OB 与 $O'E$ 重合。

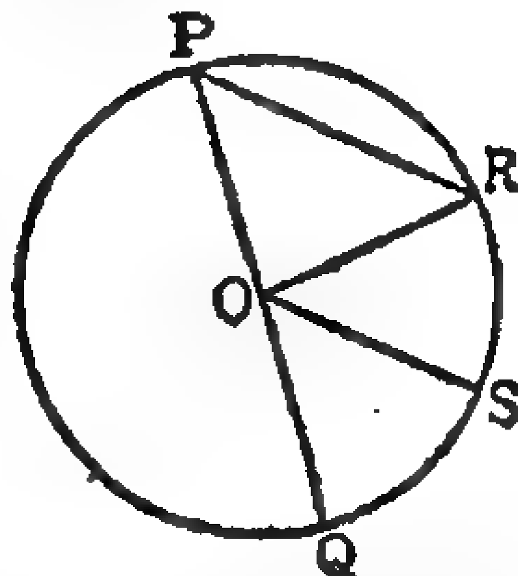
$$\therefore\quad \angle AOB=\angle DO'E.$$

其次，当 $\widehat{AB}>\widehat{DE}$ 时，和上面一样，两圆重合时，使 OA 与 $O'D$ 重合；且 OB 到 $O'C$ 的位置，于是 $O'E$ 在 $O'D$ 和 $O'C$ 之间。

$$\therefore\quad \angle DO'C>\angle DO'E,$$

即 $\angle AOB>\angle DO'E$.

293. 设 PQ、PR 分别是过圆周上一点 P 的直径和弦，若半径 OS 平行于 PR，则 OS 平分 $\widehat{QR}$.



解 设圆心为 O。因为半径 OS 平行于弦 PR，连结 OR，所以 $\triangle OPR$ 是等腰三角形，从而

$$\angle OPR=\angle ORP.$$

但是　　　$OS \parallel PR,$

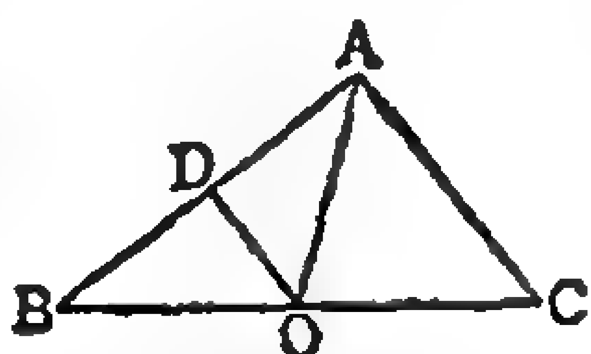
$\therefore\ \angle QOS=\angle OPR;\ \angle SOR=\angle ORP.$

$$\therefore\ \angle QOS=\angle SOR,$$

$$\therefore\ \widehat{QS}=\widehat{SR},$$

即 OS 平分 $\widehat{QR}$。

294. 直角三角形的三个顶点，在以斜边为直径的圆周上。



解　在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle A$ 为直角，O 为斜边 BC 的中点，从点 O 作 AC 的平行线 OD 和 AB 相交于 D，则 D 是 AB 的中点，而且

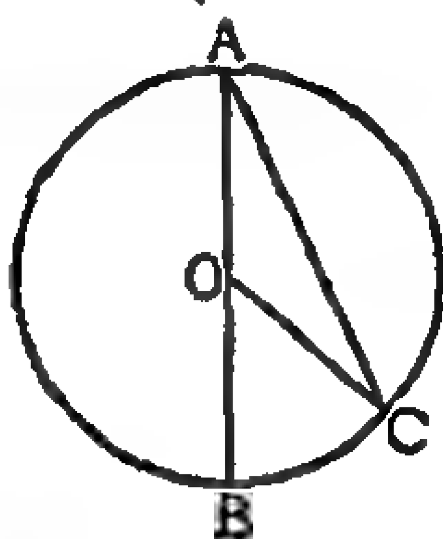
$$\angle ODB=\angle BAC=\angle R.$$

因此，DO 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore\ OA=OB.$$

所以，以 O 为圆心，OA 为半径的圆必过 A，B 及 C。

295. 在圆内同弧上的圆周角等于其圆心角的一半。



解　在圆 O 中，设 $\widehat{BC}$ 上的圆周角为 $\angle BAC$。当圆心 O 在 $\angle BAC$ 的边 AB 上时，因

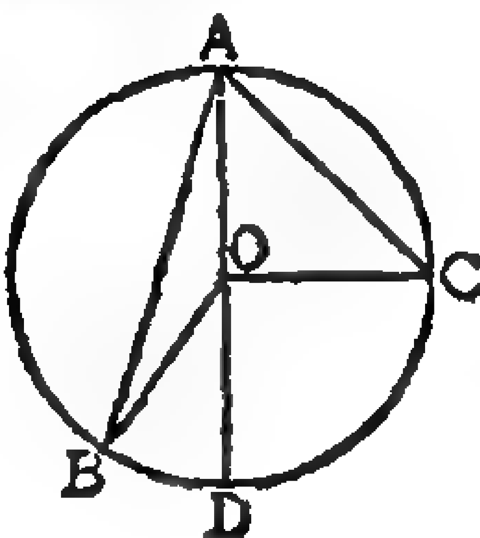
$$OA=OC,$$

$$\therefore\ \angle OCA=\angle OAC.$$

但是　　$\angle OAC+\angle OCA=\angle BOC,$

$$\therefore\ \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC.$$

当圆心 O 在 $\angle BAC$ 内时，连结 AO，并延长交圆 O 于 D，象上面一样，



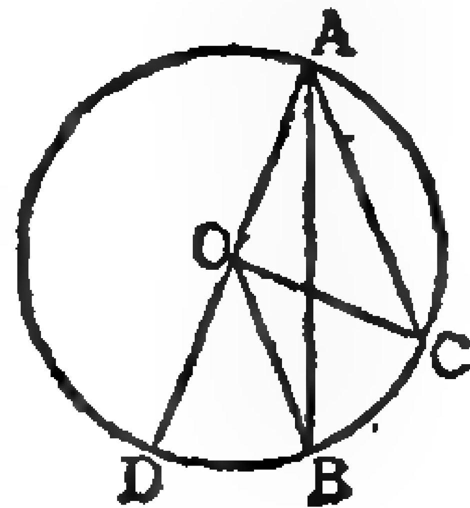
$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD,$$

$$\angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC.$$

$\therefore\ \angle BAD+\angle DAC$

$$=\frac{1}{2}(\angle BOD+\angle DOC),$$

即　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC.$



当圆心 O 在 $\angle BAC$ 外时，象上面一样，连结 AO，并且延长与圆周相交于 D，

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD,$$

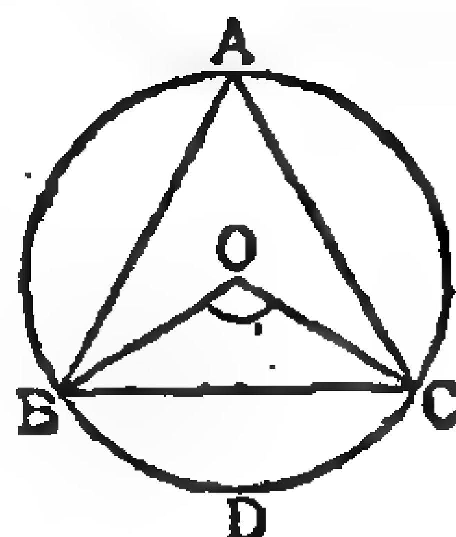
$$\angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC.$$

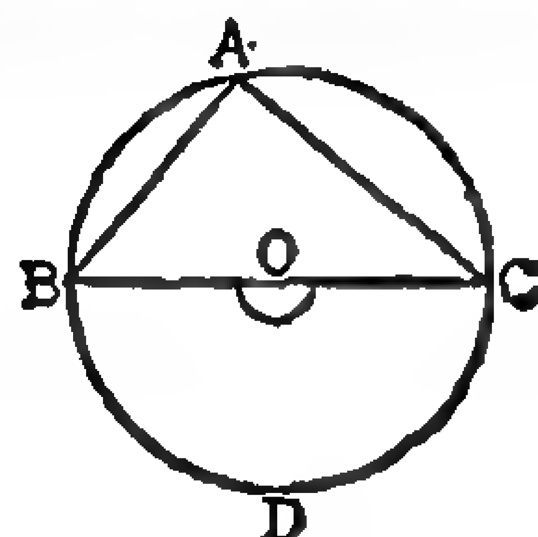
$\therefore\ \angle DAC-\angle BAD$

$$=\frac{1}{2}(\angle DOC-\angle BOD),$$

即　　　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC.$

296. 若弓形大于半圆或等于半圆或小于半圆，则它的弓形角是锐角或是直角或是钝角。





解　设 O 为圆心。当弓形 BAC 大于半圆时，则 $\widehat{BDC}$ 小于半圆，

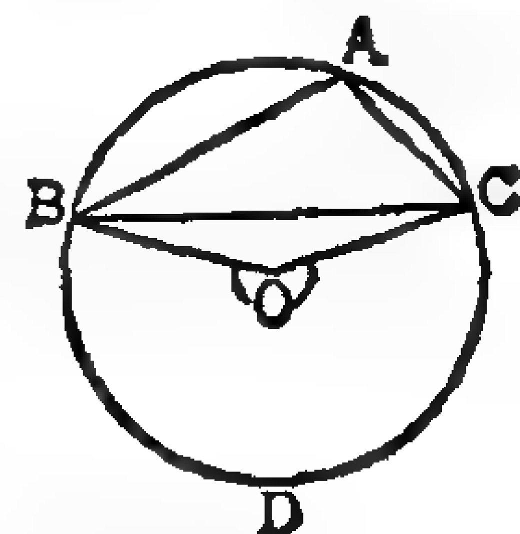
$$\therefore\ \angle BOC<2\angle R,$$

$$\angle BAC<\angle R.$$

当弓形 BAC 等于半圆时，则 $\widehat{BDC}$ 等于半圆。

$\therefore\ \angle BOC=2\angle R,$

$\angle BAC=\angle R.$



当弓形 BAC 小于半圆时，则 $\widehat{BDC}$ 大于半圆，

$\therefore\ \angle BOC>2\angle R,$

$\angle BAC>\angle R.$

注　这个定理的逆命题也成立。若

$$\angle BAC<\angle R,$$

则弓形 BAC 大于半圆，这是因为：当弓形 BAC 不大于半圆时，则弓形 BAC 等于半圆或者弓形 BAC 小于半圆，因此

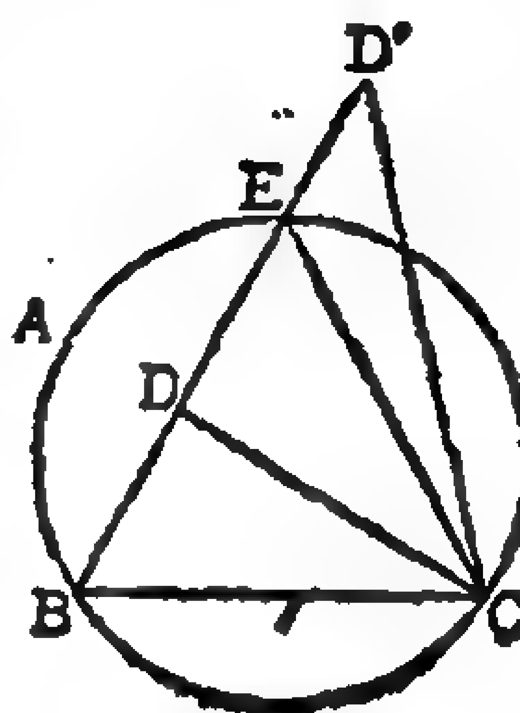
$$\angle BAC=\angle R,$$

或者　　　$\angle BAC>\angle R.$

这与假定矛盾。所以，如果 $\angle BAC<\angle R$，弓形 BAC 一定大于半圆。

其他两种情况，可以同样证明。

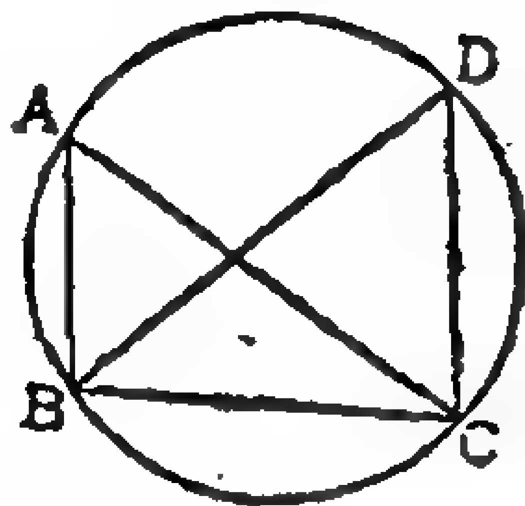
297. 从弓形弦所对弓形弧同侧内的一点向弓形弦的两端作两条射线所成之角，若点在弓形内部，则它大于弓形角；若



点在弓形外部，则它小于弓形角。

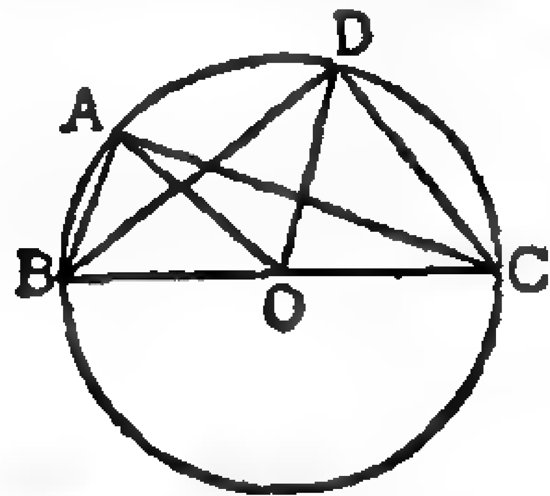
解　设点D在弓形BAC内，延长BD交弓形弧于E，连结EC，则$\triangle DEC$的外角$\angle BDC$大于内对角$\angle DEC$。即$\angle BDC$大于弓形BAC的角$\angle BEC$。设点D'在弓形BAC的外面时，假定BD'和弓形弧相交于E，则$\angle BD'C$小于弓形BAC的$\angle BEC$，这一结论同样可以证明。

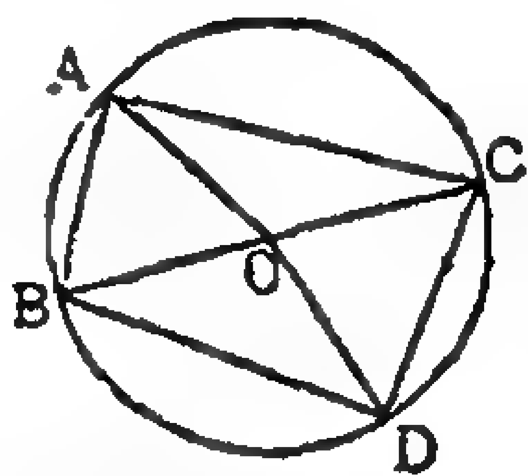
298.　若在底边BC的同侧，有两个顶角相等的三角形ABC、DBC，则这两个三角形内接于同一个圆。



解　设$\triangle DBC$的顶点D不在$\triangle ABC$的外接圆圆周上，由上题知，$\angle D$大于$\angle A$或小于$\angle A$，这与$\angle A=\angle D$矛盾。所以点D在圆周上，于是两个三角形内接于同一个圆。

299.　具有相同斜边的两个直角三角形的顶点，必在同一圆周上。



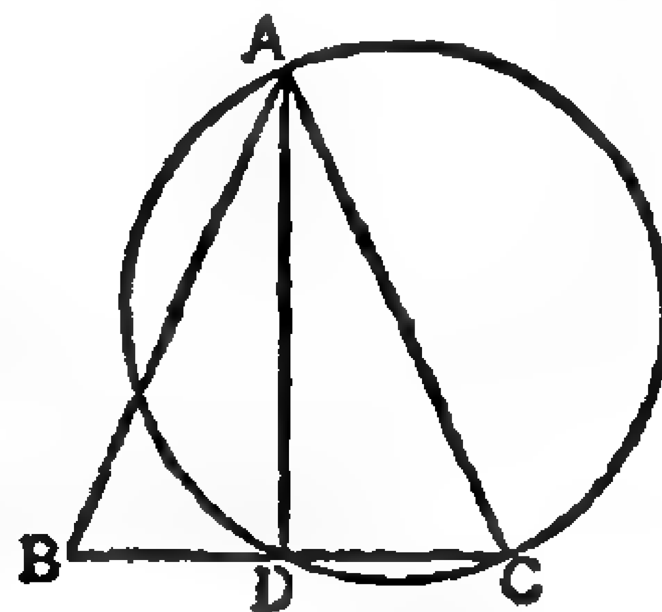


解　设直角三角形ABC与DBC具有相同的斜边BC。因为顶点到斜边的中点等距，即

$$OB=OA=OC=OD.$$

所以，以O为圆心，以$\frac{1}{2}BC$为半径的圆，必过点A、B、C、D。

300.　同一弧上的一切圆周角的平分线必过一定点。



解　设$\widehat{AB}$上的任一圆周角为$\angle APB$。若PM是$\angle APB$的平分线，它与$\widehat{AB}$相交于点M，则

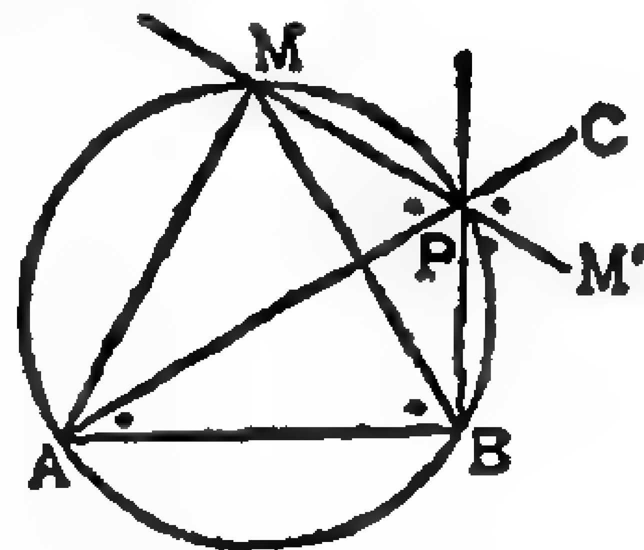
$$\angle APM=\angle BPM,$$

$$\therefore\ \widehat{AM}=\widehat{BM}.$$

于是M是$\widehat{AB}$的中点，它是定点，故$\angle APB$的平分线必过定点M。

301.　弓形角的外角平分线必过该弧的中点。

解　若弓形角APB的外角CPB的平分线MM'与圆周相交于点M，则



$\angle ABM=\angle APM$，

从而四边形$MABP$为圆内接四边形，

$\therefore\ \angle MAB=\angle M'PB.$

然而

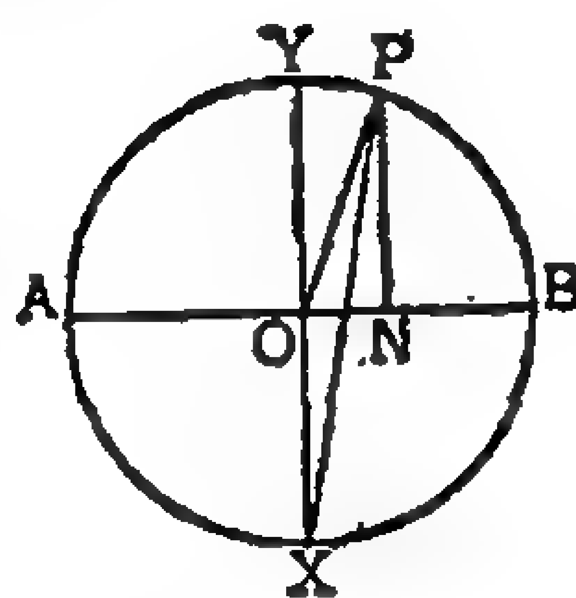
$$\angle M'PB=\angle M'PC=\angle APM,$$

$$\therefore\ \angle ABM=\angle MAB,$$

$$\therefore\ \widehat{AM}=\widehat{BM}.$$

于是M是$\widehat{AB}$的中点。

302.　从圆心为O的圆周上任意一点P作定直径AB的垂线PN，则$\angle OPN$的平分线必过两定点中的一个。



解　设直径XY垂直于直径AB，并设点X与P在AB的异侧，连结PX，则

$$PN\parallel OX,$$

$$\therefore\ \angle OXP=\angle NPX,$$

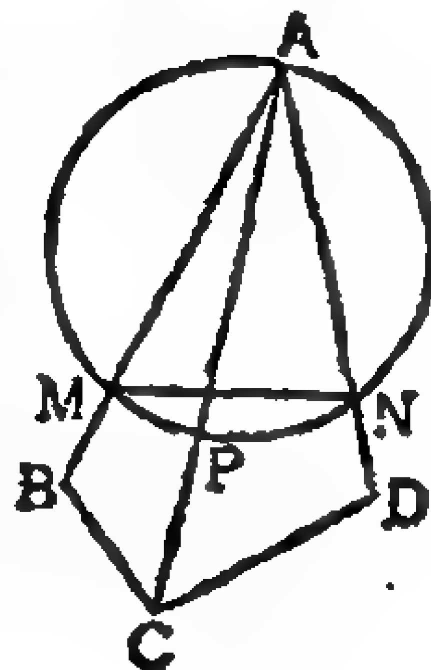
又
$$OX=OP,$$

$$\therefore\ \angle OXP=\angle OPX,$$

$$\angle NPX=\angle OPX,$$

于是PX是$\angle OPN$的平分线。同理，当点Y与P在AB的异侧时，则PY是$\angle OPN$的平分线，所以$\angle OPN$的平分线必过定点X、Y中的一个。

303.　以等腰三角形ABC的一腰AC为直径的圆周必过底边BC的中点。

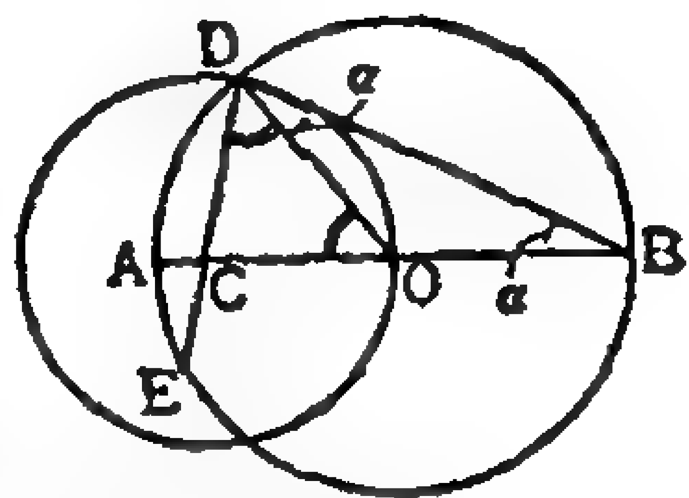


解　设以AC为直径的圆周与底边BC相交于点D，则$\angle ADC$是半圆所对的圆周角，所以$\angle ADC=\angle R$，AD是由顶点A到底边的垂线，故D是底边BC的中点。

304.　形状一定的任意四边形$ABCD$，移动邻边AB、AD，使它们分别过点M、N，则对角线AC必过一定点。

解 四边形 $ABCD$ 的形状一定，所以，四个角及 $\angle BAC$ 的大小是一定的，要使 AB、AD 分别过定点 M、N，就需移动四边形的顶点 A，但点 A 总在以 MN 为弦的弓形角为 $\angle BAD$ 的弓形弧上．设 AC 或其延长线与这个弓形弧的共轭弧相交于点 P，由于 $\angle BAC$ 一定，弧 MP 的大小是一定的．因而 P 是定点，所以对角线 AC 过定点 P．

305． 设 AB 是圆 O 的任意直径，取半径 AO 的中点与 A 之间的一点 C，若以 C 为圆心，以 CO 为半径的圆与圆 O 相交于 D，DC 的延长线与圆 O 相交于 E，则



$$\widehat{BE}=3\widehat{AD}.$$

解 $\because\ OB=OD$，

$$\therefore\ \angle OBD=\angle ODB=\alpha,$$

又 $$CO=CD,$$

$$\therefore\ \angle COD=\angle CDO.$$

然而 $\angle COD$ 是 $\triangle OBD$ 的外角，

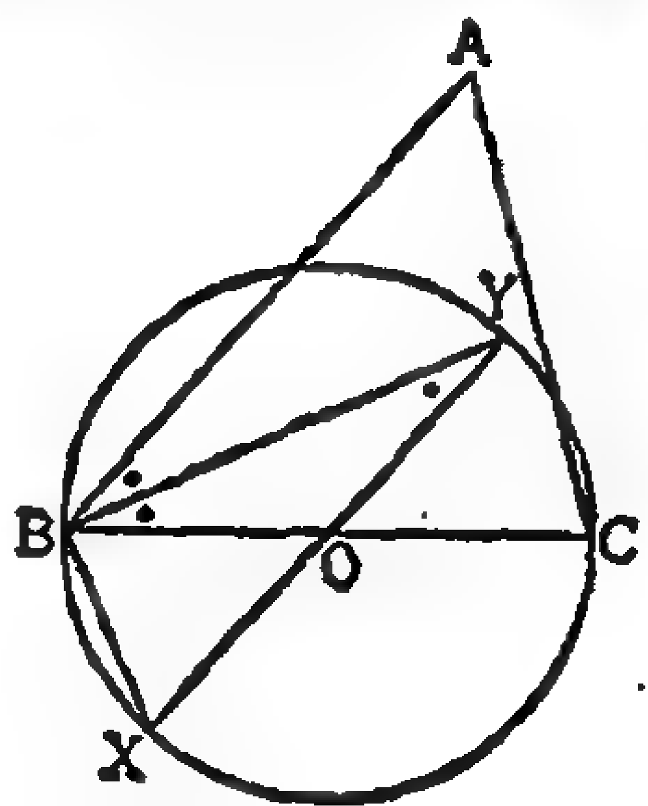
$$\therefore\ \angle COD=\angle OBD+\angle ODB=2\alpha,$$

从而 $$\angle BDC=\alpha+2\alpha=3\alpha$$

即 $$\angle BDE=3\angle ABD,$$

$$\therefore\ \widehat{BE}=3\widehat{AD}.$$

306． 若以 $\triangle ABC$ 的边 BC 为直径画圆，作直径 XY 平行于 AB，则 XB、YB 分别是 $\angle B$ 的外角及内角的平分线．



解 $\because\ AB\parallel XY$，

$\therefore\ \angle ABY=\angle BYX$．

又 $OY=OB$，

$$\therefore\ \angle BYX=\angle YBO,$$

因此 $$\angle ABY=\angle YBO.$$

所以 BY 是 $\angle B$ 的平分线，而

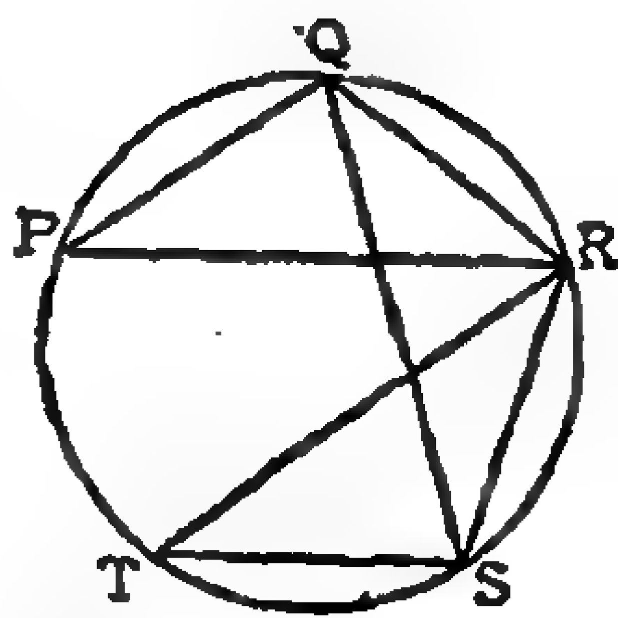
$$\angle XBY=\angle R,$$

所以 BX 是 $\angle B$ 的外角的平分线．

3．弧、弦

307． 若 PQ、QR、RS、ST 是同圆中相等的弦，则

$$PR=QS=RT.$$



解 因为弦

$PQ=QR=RS=ST$，

$\therefore\ \widehat{PQ}=\widehat{QR}=\widehat{RS}=\widehat{ST}$，

从而

$$\widehat{PR}=\widehat{QS}=\widehat{RT},$$

故弦 $$PR=QS=RT.$$

308． 在等圆或同圆中，大劣弧所对的弦大于小劣弧所对的弦．反之，大弦所对的劣弧大于小弦所对的劣弧．

解 设 $\widehat{AB}<\widehat{CD}$，

则 $$\angle AOB<\angle COD.$$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

$$AO=CO,\ BO=DO,\ \angle AOB<\angle COD.$$

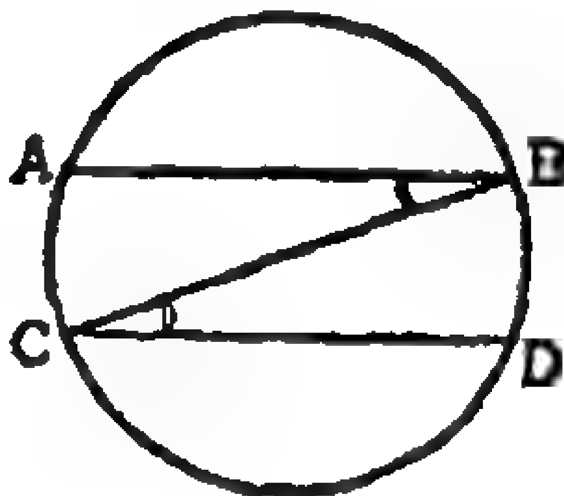
$$\therefore\ AB<CD.$$

反之，设 $AB<CD$，则在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

$$OA=OC,\ OB=OD,\ \angle AOB<\angle COD.$$

$$\therefore\ \widehat{AB}<\widehat{CD}.$$

309． 若圆中两弦 AB、CD 平行，则它们所截取的弧 AC、BD 相等．



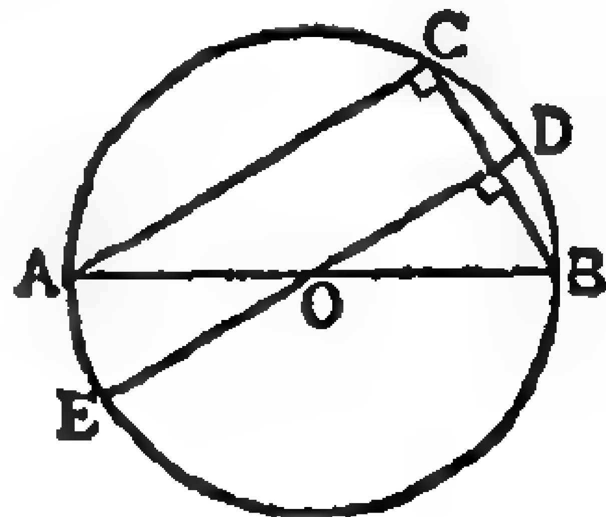
解 连结 BC，因为 $AB\parallel CD$，

$$\therefore\ \angle B=\angle C.$$

即圆周角 ABC 和圆周角 BCD 相等，

$$\therefore\ \widehat{AC}=\widehat{BD}.$$

310． 画出 $\triangle ABC$（$\angle C$ 为直角）的外接圆，若由弧 BC 的中点 D 作 BC 的垂线与外接圆的第二个交点为 E，则弧 AE 是弧 BC 的一半．



解 由 $\angle C=\angle R$，$DE\perp BC$，

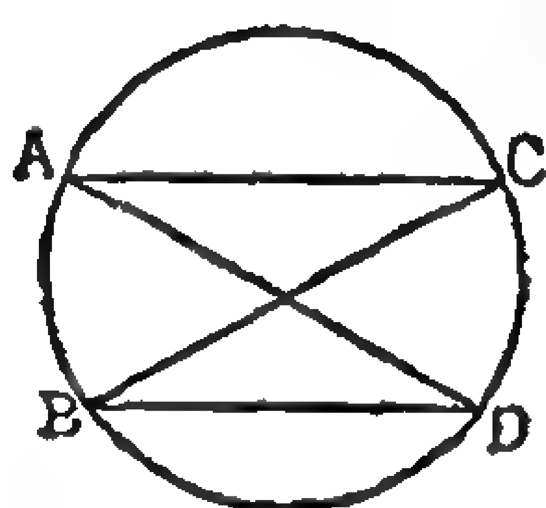
$$\therefore\ AC\parallel DE.$$

从而由上题知，

$$\widehat{AE}=\widehat{DC}=\frac{1}{2}\widehat{BC}.$$

311． 在圆内连结等弧 AB、CD 端点的

弦是相等的或平行的.



解　因$\widehat{AB}=\widehat{CD}$,

$\therefore\ \widehat{CAB}=\widehat{DCA}$,

因此

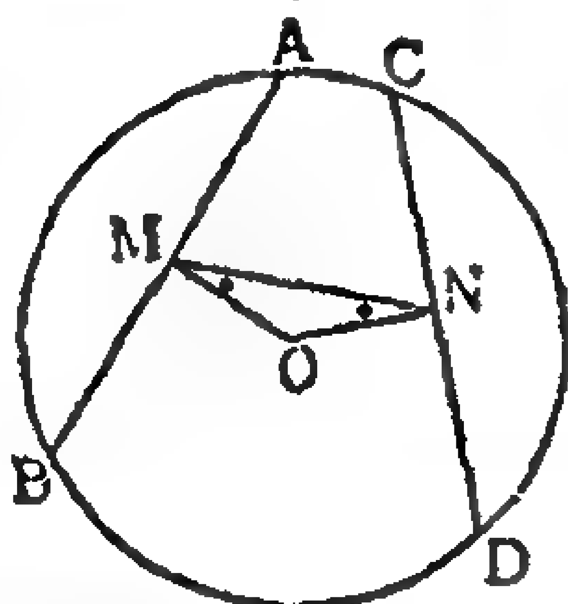
弦 $BC=$弦 AD.

又因为　$\widehat{AB}=\widehat{CD}$,

$\therefore\ \angle ADB=\angle CAD$,

故　$AC\parallel BD$.

312.　若圆中两弦 AB、CD 的中点分别为 M、N，且 MN 和 AB、CD 所成的角相等，问 AB 与 CD 之间有怎样的关系?



解　(i) 若AB与CD平行，则 MN 和这两条直线垂直，所以形成的角相等.

(ii) 若 AB 与 CD 不平行，则连结圆心 O 与 M、N，得

$$AB\perp OM,\ CD\perp ON.$$

根据题目的条件,

$$\angle AMN=\angle CNM,$$

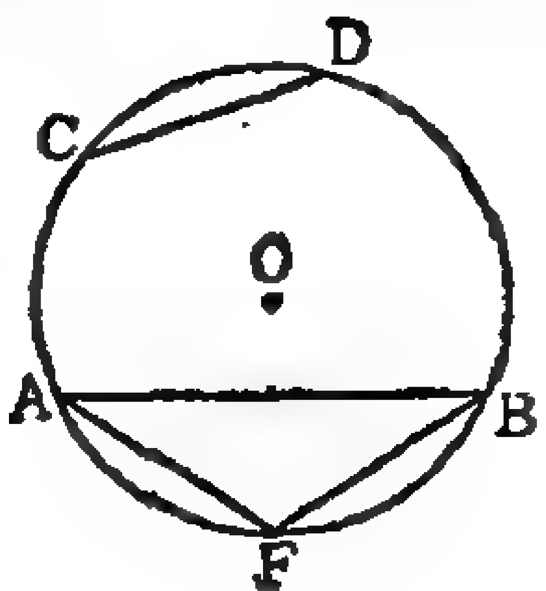
$$\therefore\ \angle OMN=\angle ONM,$$

从而　$OM=ON$.

故 AB、CD 与圆心等距,

$$AB=CD.$$

313.　在同圆中，若弧 AB 是弧 CD 的两倍，则弦 AB 小于弦 CD 的两倍.



解　设圆心为 O，$\widehat{AB}$ 的中点为 F，则

$$\widehat{AF}=\widehat{BF}=\widehat{CD},$$

所以,弦

$$AF=BF=CD.$$

又因 A、F、B 是圆周上的点，因此不在一直线上，所以 $\triangle AFB$ 是等腰三角形.

$$\therefore\ AB<AF+BF,$$

即

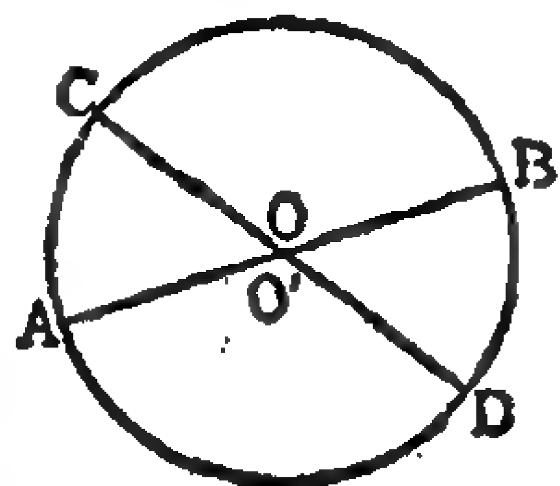
$$AB<2AF.\qquad ①$$

但是

$$AF=FB=CD,$$

由①，得

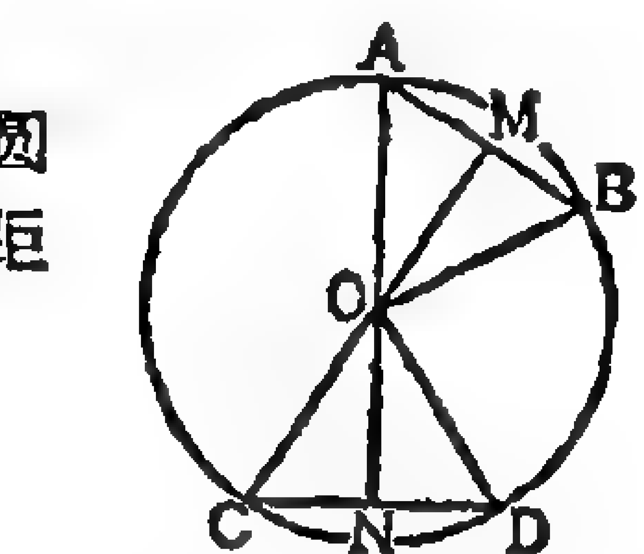
$$AB<2CD.$$



314.　如右图，若圆中相交两弦互相平分，则其交点 O 必是圆心.

解　若 O 不是圆心，设 O' 是圆心，因为连结圆心 O' 与弦的中点 O 的直线，垂直于此弦，所以 $OO'\perp AB$、$OO'\perp CD$. 在 OO' 上过点 O 有两条垂线 AB、CD，显然是不合理的，所以 O 是圆心.

315.　在等圆或同圆中，圆心到相等两弦的距离相等.



解　在圆 O 中，设

弦 $AB=$弦 CD,

$$OM\perp AB,\ ON\perp CD.$$

这时由 $\triangle AOB\cong\triangle COD$，可知

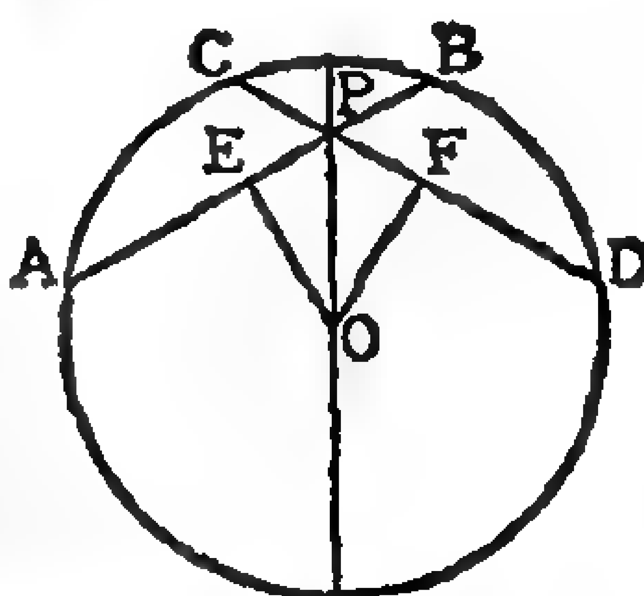
$$\angle OAM=\angle OCN.$$

在 $\triangle OAM$ 和 $\triangle OCN$ 中，斜边和锐角分别相等，所以这两个直角三角形全等，从而

$$OM=ON.$$

同样可证明等圆的情形.

316.　若过圆 O 内一点 P 的两弦 AB、CD 与过点 P 的直径所成的角相等，则此两弦相等.

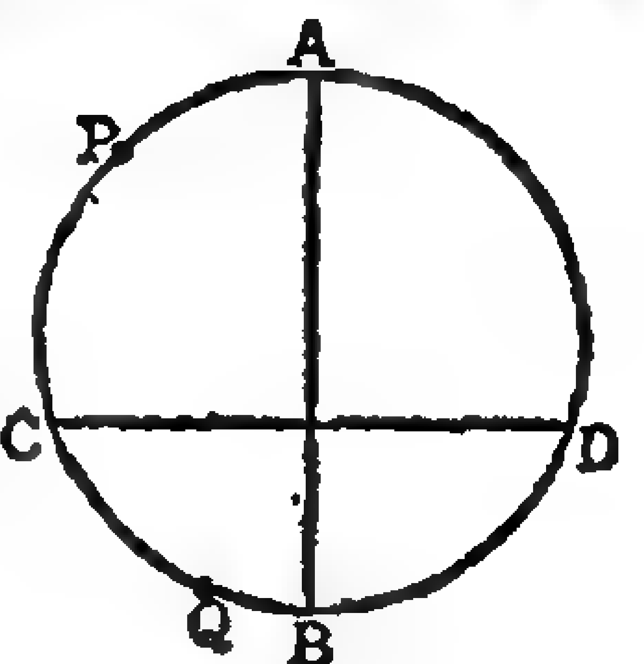


解　若从 O 向 AB、CD 所作垂线分别为 OE、OF，则在 $\triangle OEP$ 与 $\triangle OFP$ 中，斜边及一个锐角分别相等，所以这两个直角三角形全等，从而

$$OE=OF,$$

故　$AB=CD$　(问题 **312**).

317.　如图，已知定圆的定直径 AB 垂直于定弦 CD，设 P、Q 分别为劣弧 AC、BC 上的点，并且过点 C 且平行于 AP 的直线 CL 和 PQ 相交于点 E，AQ 和 CD 相交于点 F. 证明:



(1) AC 是 $\triangle CEQ$ 的外接圆的切线;

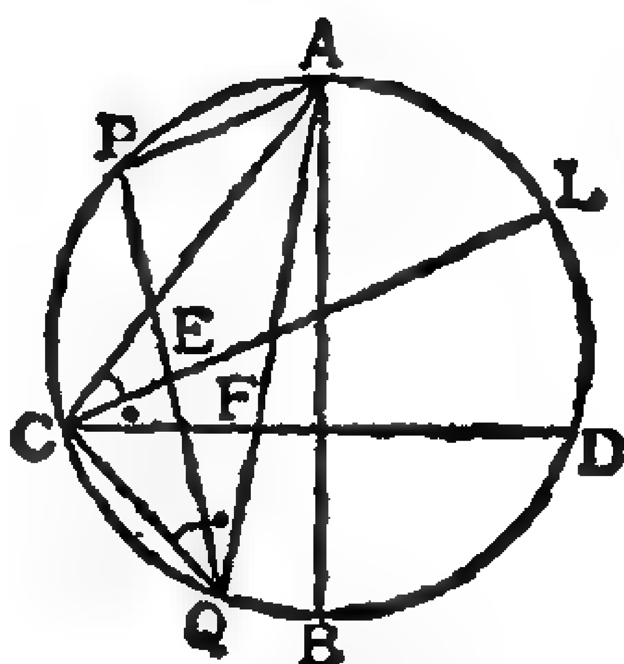
(2) C、E、F、Q 四点共圆;

(3) P 在劣弧 AC 上移动、Q 在劣弧 BC 上移动时，则(2)的圆心在定直线上.

解　(1) $\because\ AP\parallel CL$，$\therefore\ \widehat{PC}=\widehat{AL}$.

从而　$\angle PQC=\angle ACL$,

故 AC 与 $\triangle CEQ$ 的外接圆相切于点 C。



(2) $\because$ $AB\perp CD$,

$AP \parallel CL$,

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$,

$\overset{\frown}{PC}=\overset{\frown}{AL}$.

因而 $\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{LD}$,

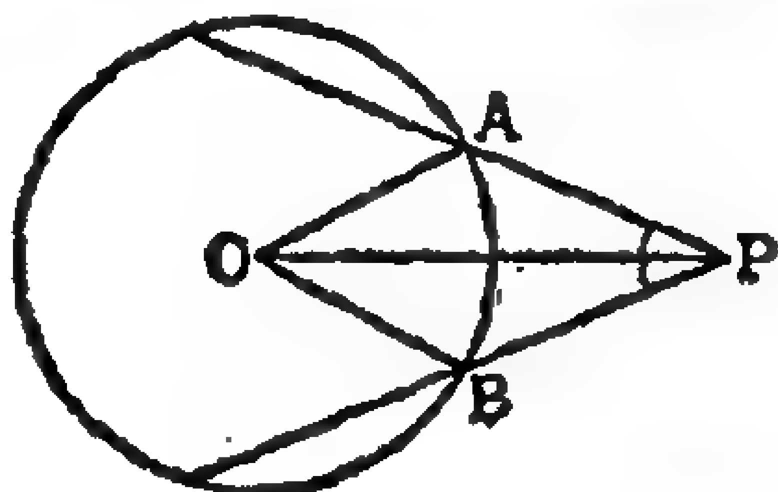
故 $\angle AQP=\angle DCL$.

即 $\angle EQF=\angle ECF$,

所以 C、E、F、Q 四点共圆.

(3) 由 (1), 知 $\triangle CEQ$ 的外接圆与 AC 相切于点 C, 所以这个圆的圆心, 在过定点 C 且垂直于 AC 的直线 CB 上.

318. 从圆 O 外一点 P, 向圆作两条相等的线段 PA、PB, 与圆交于点 A、B, 则 $\angle APB$ 的平分线必过圆心 O.



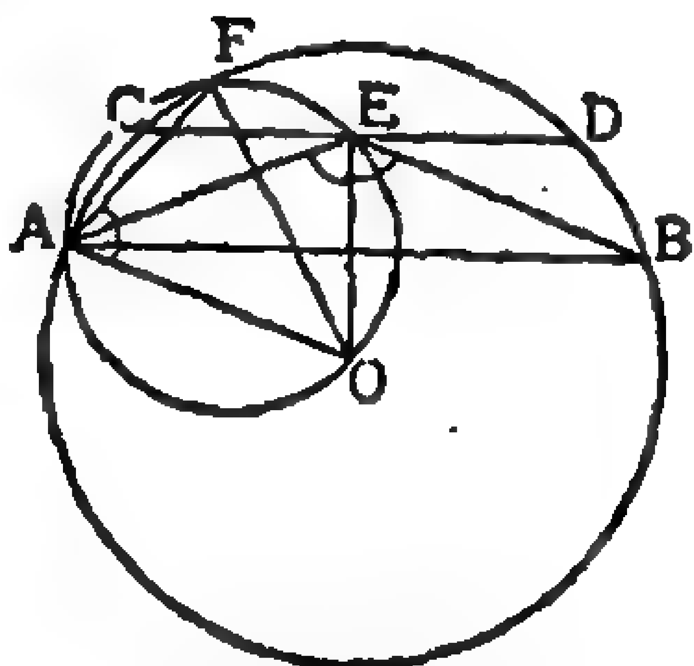
解 连结 OP、OA、OB, 则

$\triangle APO\cong\triangle BPO$ (三边相等).

$\therefore$ $\angle APO=\angle BPO$,

即 PO 是 $\angle APB$ 的平分线, 所以 $\angle APB$ 的平分线必过圆心 O.

319. 在圆 O 中, AB、CD 是平行的两弦, E 为 CD 的中点. 若过 A、O、E 的圆和圆 O 相交于点 F, 则 F、E、B 三点在一直线上.



解 连结 AF、AO、OE、AE. 因为 A、F、E、O 四点共圆,

$\therefore$ $\angle FAO+\angle FEO=2\angle R$. ①

又因为 E 是 CD 的中点, 并且 $CD\parallel AB$,

$\therefore$ $\angle AEO=\angle BEO$. ②

又因为 $OA=OF$,

$\therefore$ $\angle FAO=\angle AFO=\angle AEO$. ③

由②、③, 得

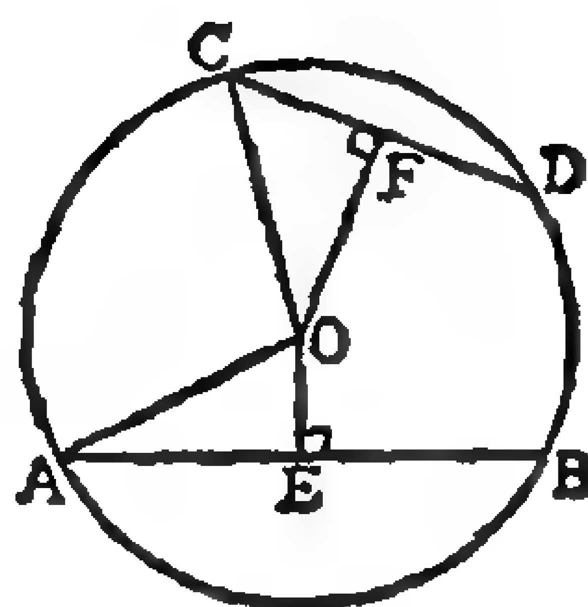
$\angle FAO=\angle BEO$. ④

所以由①、④, 得

$\angle BEO+\angle FEO=2\angle R$,

故 F、E、B 三点在一直线上.

320. 在同圆或等圆中, 若两弦不等, 则大弦比小弦距圆心近.



解 设

$AB>CD$,

AB、CD 的中点分别为 E、F, 则 $AE>CF$, 于是

$OE^2=AO^2-AE^2$,

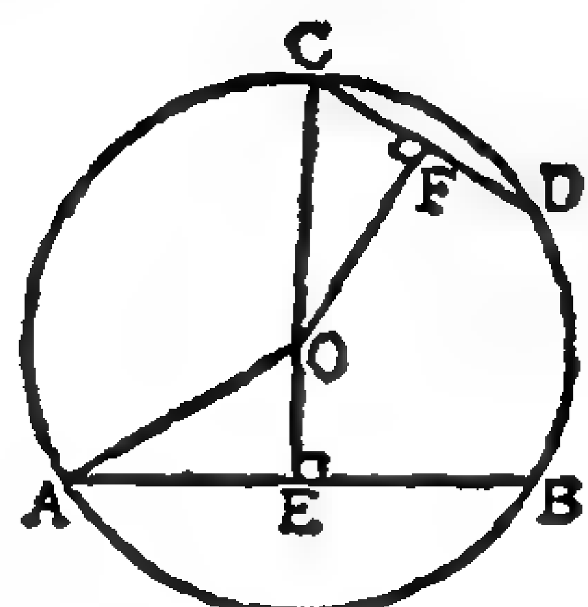
$OF^2=CO^2-CF^2$.

$\because$ $AO=CO$, $AE>CF$,

$\therefore$ $OE^2<OF^2$,

故 $OE<OF$.

321. 在同圆或等圆中, 圆心距不等的两弦中, 距圆心近的弦较大.



解 如图, 已知

$OE\perp AB$,

$OF\perp CD$, $OE<OF$, $AO=CO$,

则由下列等式:

$AO^2=AE^2+OE^2$,

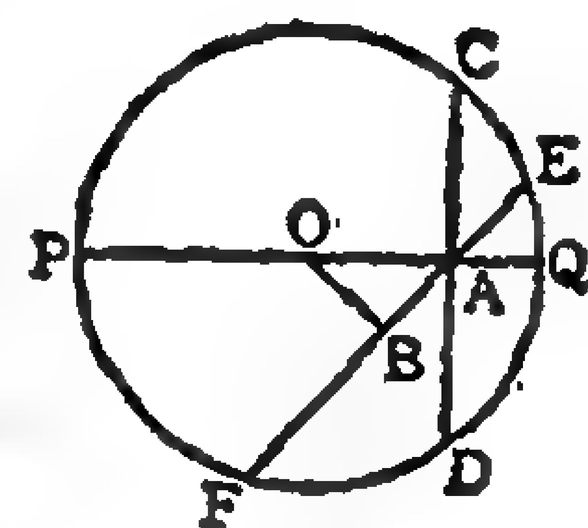
$CO^2=CF^2+OF^2$,

可知 $AE^2>CF^2$.

$\therefore$ $AE>CF$,

故 $AB>CD$.

322. 过圆 O 内一点 A 的所有弦中, 垂直于过点 A 的直径的弦为最短.



解 设过定点 A 的直径为 PQ, 垂直于 PQ 的弦为 CD, 过点 A 的任意弦为 EF. 如果从 O 向 EF 作垂线 OB, 因在 $\triangle OAB$ 中,

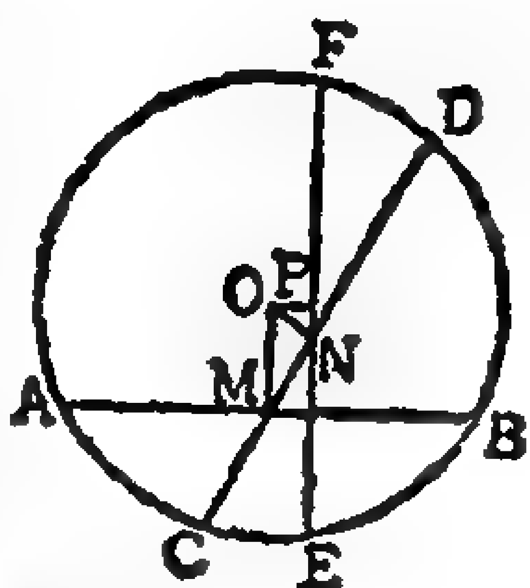
$\angle OBA=\angle R$,

所以 $OA>OB$,

即 EF 比 CD 距圆心近些. 所以

$EF>CD$.

323. 若过圆 O 的弦 AB 的中点 M 作弦 CD, 再过 CD 的中点 N 作任意弦 EF, 如此顺次过弦的中点作新弦, 则这些弦逐步靠近圆心.

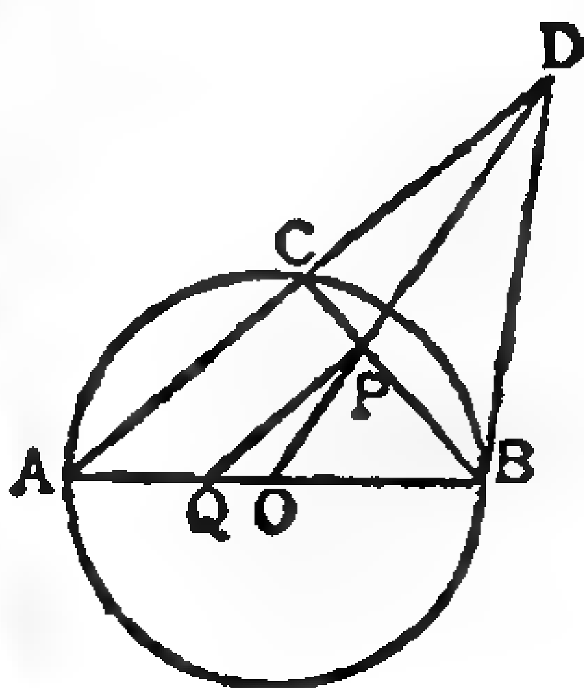


解 因 N 是 CD 的中点, 所以

$\angle ONC=\angle R$,

$$\therefore\quad OM>ON,$$

故弦 CD 比弦 AB 靠近圆心。同样弦 EF 比弦 CD 靠近圆心。所以，如此顺次作下去时，在这些弦中，后一弦比前一弦更靠近圆心。



324. 从圆 O 的直径 AB 的一端点 A 作任意弦 AC，在 AC 的延长线上截取 CD 等于 AC，则 BC、OD 的交点 P 必在定圆上。

解 在 $\triangle DAB$ 中，$CA=CD$、$OA=OB$，所以 BC、DO 都是中线，故 P 是 $\triangle DAB$ 的重心，因此

$$BP=\frac{2}{3}BC.$$

作 $$PQ\parallel AC,$$

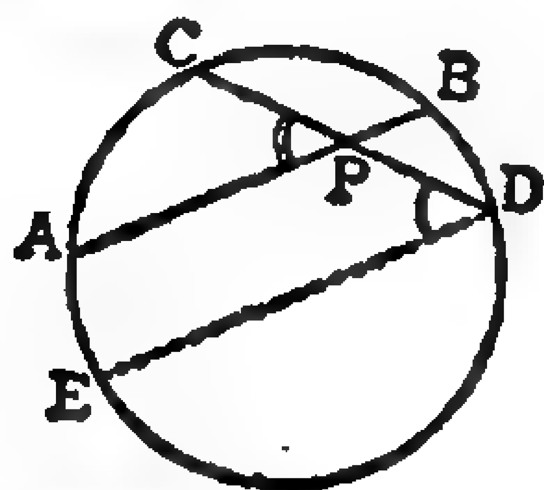
则 $$BQ=\frac{2}{3}BA,$$

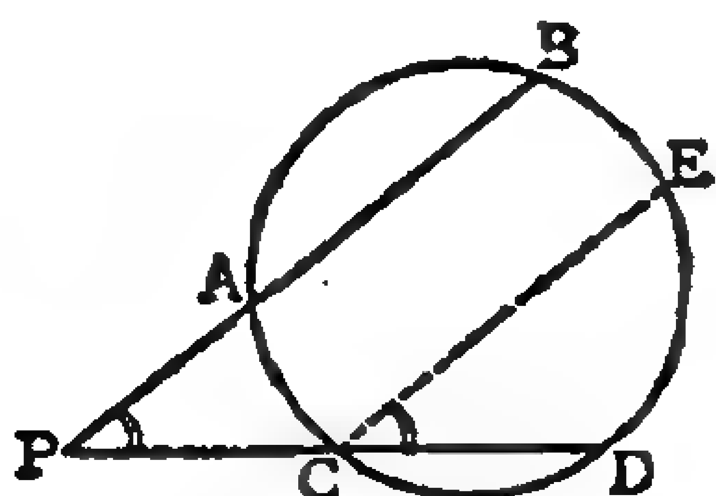
所以 Q 是定点，

$$\angle QPB=\angle C=\angle R.$$

故点 P 在以 BQ 为直径的定圆上。

325. 若弦 AB、CD 在圆内相交于点 P，则 $\angle APC$ 等于弧 AC 与弧 BD 之和上的圆周角；若点 P 在圆外时，则 $\angle APC$ 等于弧 AC 和弧 BD 之差上的圆周角。[阿勒哈森定理]





解 过点 D 作平行于 AB 的弦 DE，则

$$\angle APC=\angle D.$$

又因为 $$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BD},$$

$$\therefore\quad \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CAE}.$$

所以 $\angle APC$ 等于 $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}$，即 $\overset{\frown}{CAE}$ 上的圆周角。

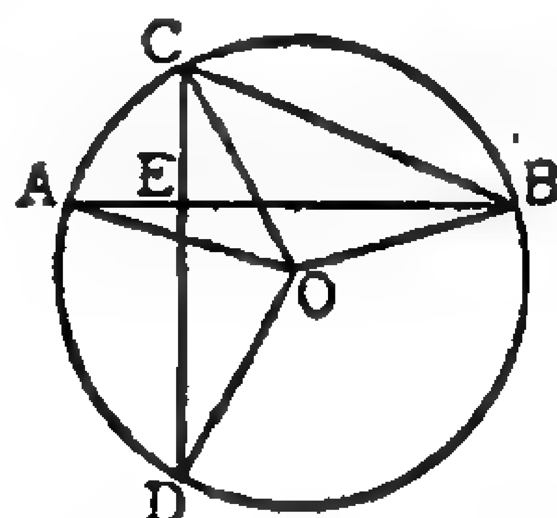
若点 P 在圆外，CE 为平行于 AB 的弦，则

$$\angle P=\angle ECD,$$

并且， $$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BE},$$

所以 $\angle P$ 等于 $\overset{\frown}{BD}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 之差上的圆周角，亦即在 $\overset{\frown}{ED}$ 上的圆周角。

注 在已给曲线上求一点 P，使由两定点 A、B 到 P 的距离之和为最小的问题称为阿勒哈森（Alhazen. A. D, 九世纪）作图问题。这是很著名的问题。



326. 若同圆中两弦 AB、CD 互相垂直，则

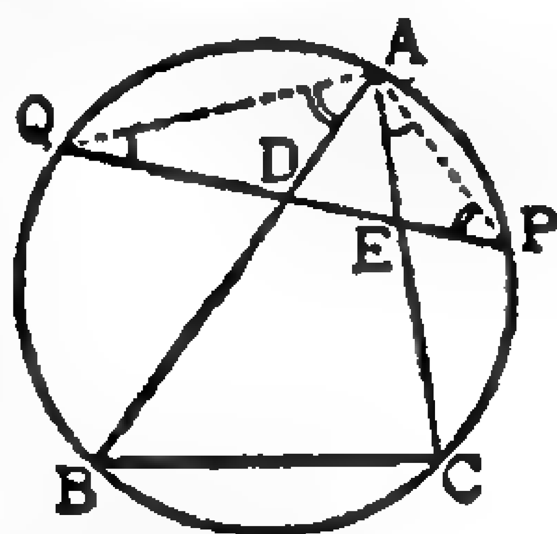
$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}$$
$$=\text{半圆周}.$$

解 设圆心为 O，AB、CD 的交点为 E，则 $\angle AEC=\angle R$，所以

$$\angle AEC=\angle ABC+\angle BCD$$
$$=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle DOB)=\angle R.$$

由此可知，圆心角 AOC、DOB 所对的弧 AC、BD 之和等于圆周的一半，从而 $\overset{\frown}{AD}$、$\overset{\frown}{BC}$ 之和也等于圆周的一半。所以

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=\text{半圆周}.$$



327. 在 $\triangle ABC$ 的外接圆中，若 $\angle B$、$\angle C$ 所对弧的中点分别为 P、Q，则直线 PQ 与两边 AB、AC 相交所构成的 $\triangle ADE$ 为等腰三角形；若 $\triangle ADE$ 为正三角形，则弧 BC 的长等于该圆周长的三分之一。

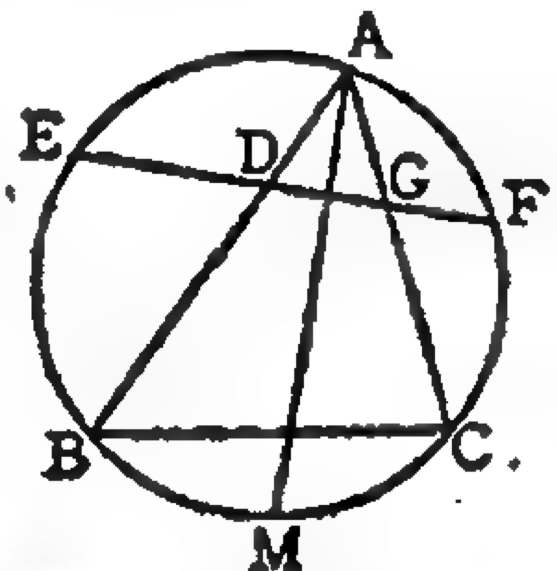
解 连结 AP、AQ，则

$$\angle ADE=\angle AQD+\angle DAQ,$$
$$\angle AED=\angle PAE+\angle APE.$$

但是 $$\overset{\frown}{AQ}=\overset{\frown}{BQ},\ \overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{PC},$$

$$\therefore\quad \angle AQD=\angle PAE,$$
$$\angle DAQ=\angle APE.$$
$$\therefore\quad \angle ADE=\angle AED,$$

因此 $\triangle ADE$ 是等腰三角形。其次，由于 $\triangle ADE$ 是正三角形，所以顶角 $\angle A=60°$，故 $\overset{\frown}{BC}$ 是圆周的三分之一。



328. 若 $\triangle ABC$ 的外接圆弧 AB、BC、CA 的中点分别为 E、M、F，则 EF 和 AM 互相垂直。

解 设 EF 和 AB、AC 的交点分别为 D、G，由上题知 $\triangle ADG$ 是等腰三角形。又 M 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，所以 AM 平分 $\angle DAG$。因而 DG 垂直于 AM，即

$$AM\perp EF.$$

329. 设 AB 是圆的定弦，在被 AB 分开的两弧上分别取点 P、Q，Q 或者 P 是 $\widehat{AB}$ 的中点，PQ 和 AB 的交点为 C. 则

$$PA\cdot PB=PC\cdot PQ.$$

解 (i) 若 P 是 $\widehat{AB}$ 的中点，则

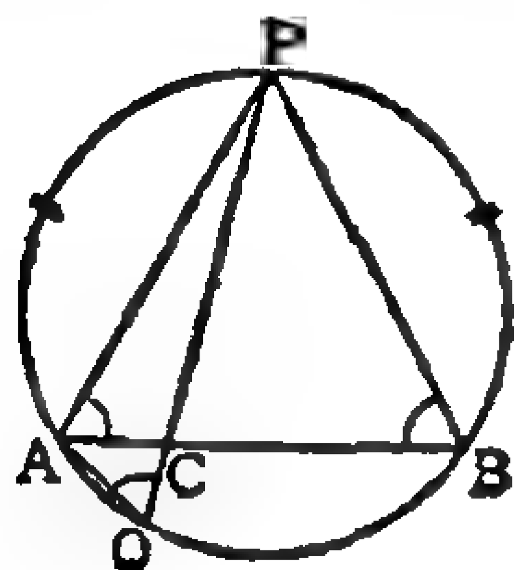
$$\angle PQA=\angle PBA=\angle PAC.$$

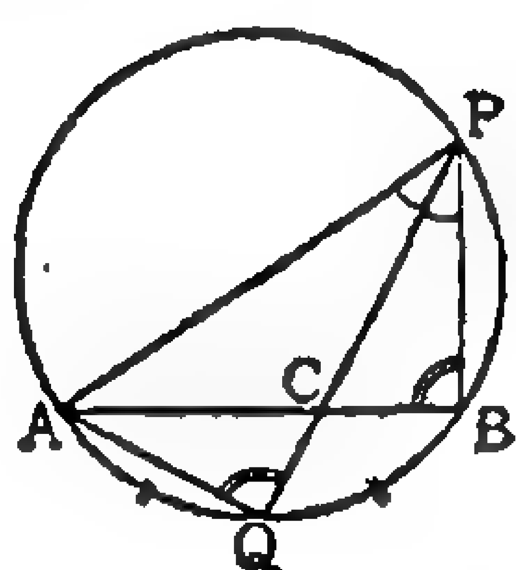
因而 PA 与 $\triangle AQC$ 的外接圆相切于点 A，所以

$$PA^2=PC\cdot PQ,$$

又由于　　$PA=PB$,

$$\therefore\quad PA\cdot PB=PC\cdot PQ.$$





(ii) 若 Q 是 $\widehat{AB}$ 的中点，则

$$\angle APQ=\angle CPB,$$

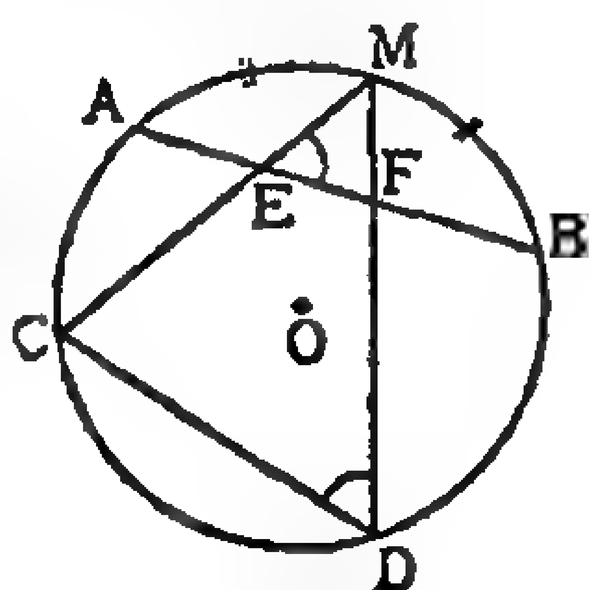
$$\angle AQP=\angle ABP=\angle CBP.$$

$$\therefore\quad \triangle PAQ\backsim\triangle PCB,$$

$$PA:PC=PQ:PB,$$

因此　　$PA\cdot PB=PC\cdot PQ.$

330. 若在圆 O 中，过 $\widehat{AB}$ 的中点 M 作两条弦 MC、MD，与弦 AB 的交点分别为 E、F，则四边形 $CDFE$ 的顶点共圆.



解 因 $\angle MEF$ 等于 $\widehat{AC}$ 与 $\widehat{MB}$ 之和弧上的圆周角，M 是 $\widehat{AB}$ 的中点，

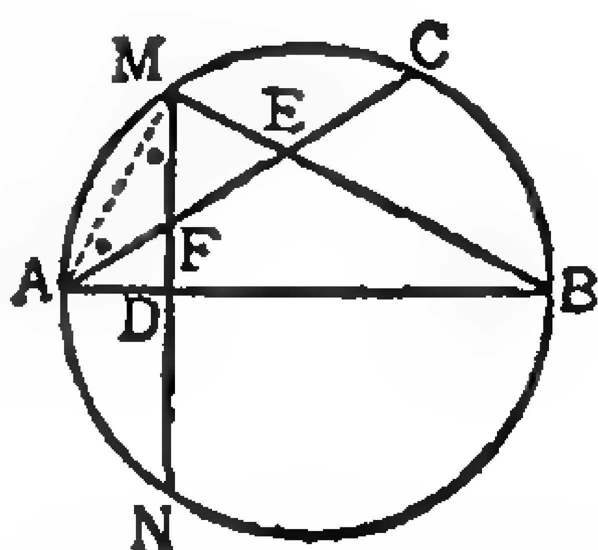
$$\therefore\quad \widehat{AC}+\widehat{MB}=\widehat{AC}+\widehat{AM}.$$

又 $\angle D$ 是 $\widehat{AC}+\widehat{AM}$ 上的圆周角，所以

$$\angle MEF=\angle D,$$

故 C、D、F、E 四点共圆.

331. 由圆的直径 AB 的一个端点 A 作任意弦 AC，再由 $\widehat{AC}$ 的中点 M 作 AB 的垂线 MD，若 AC 与 MB 相交于点 E，则 MD 平分 AE.



解 延长 MD 与圆周相交于点 N，因为 AB 是直径，且

$$MN\perp AB,$$

$$\therefore\quad \widehat{AM}=\widehat{AN}.$$

又　　$\because\quad \widehat{AM}=\widehat{MC},$

$$\therefore\quad \widehat{AN}=\widehat{MC},$$

故

$$\angle AMN=\angle MAC.\qquad ①$$

而 AB 是这个圆的直径，

$$\therefore\quad \angle AMB=\angle R.$$

设 MN 与 AE 的交点为 F，则在直角三角形 MAE 中，由①，知

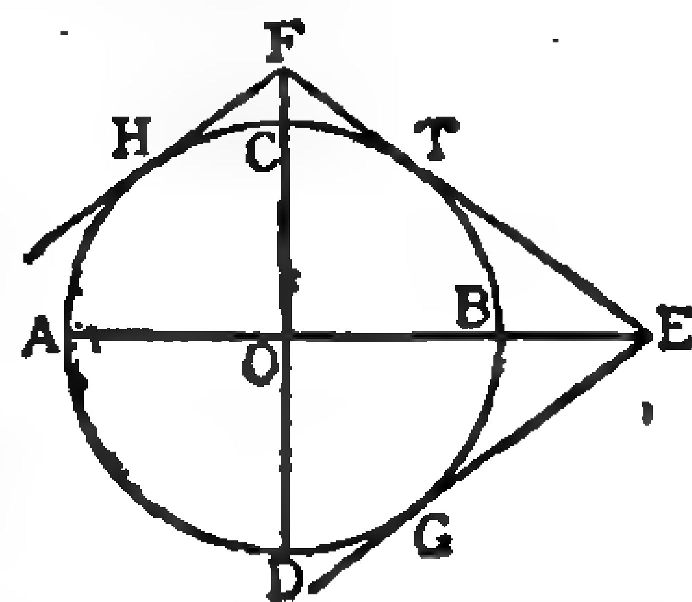
$$\angle AMF=\angle MAF.$$

从而　　$\angle FME=\angle FEM,$

$$\therefore\quad AF=FM=FE,$$

故 MD 过 AE 的中点 F.

332. 延长圆 O 的两条互相垂直的直径与任意切线相交，由交点向圆所作的两条切线必互相平行.



解 延长互相垂直的直径 AOB、COD 与切线 T 分别交于点 E、F，从 E、F 分别作切线 EG、FH，则

$$\angle OFE+\angle OEF=\angle R$$

$$(\because\quad EO\perp FO).$$

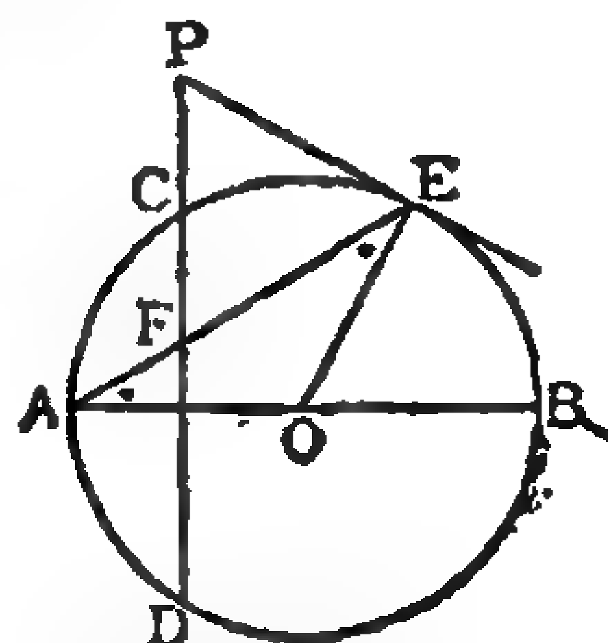
又 OE、OF 是两条切线所构成的 $\angle TEG$、$\angle HFT$ 的平分线，

$$\therefore\quad \angle HFE+\angle FEG=2(\angle OFE+OEF)$$

$$=2\angle R,$$

故　　$FH\parallel EG.$

333. 弦 CD 垂直于直径 AB，在 CD 的延长线上取一点 P，作圆的切线，设其切点为 E. 过 A 与 E 的直线与 CD 或 CD 的延长线相交于点 F，则 $PE=PF$.



解 连结 OE，则 $PE\perp OE$. 因为 $PD\perp AB$，O 为圆心，

$$\therefore\quad \angle OEA=\angle OAE.$$

而且　　$\angle OAE+\angle AFD=\angle R,$

$$\angle OEA+\angle AEP=\angle R,$$

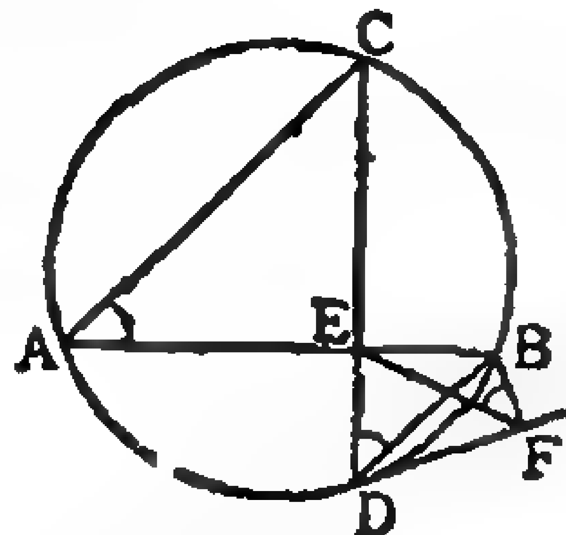
于是　　$\angle AFD=\angle PEF$.

从而　　$\angle PEF=\angle PFE$,

故　$PE=PF$.

334. 若圆的两弦AB、CD在点E相交成直角，由点B作过点D的切线的垂线BF，则

$\angle EFB=\angle CAB$.



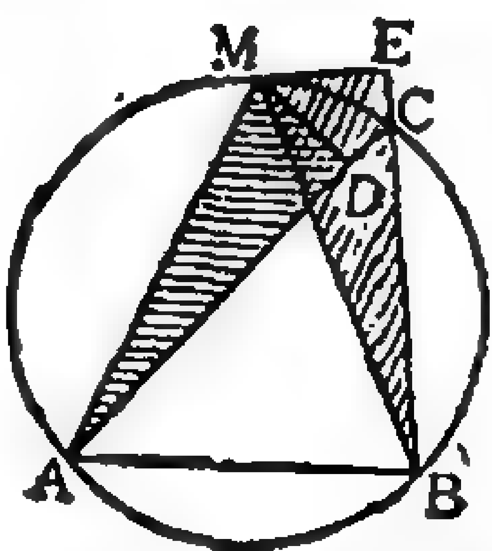
解　因为$\angle DEB=\angle R$，$\angle BFD=\angle R$，所以B、F、D、E四点共圆，于是

$$\angle EFB=\angle EDB=\angle CDB.$$

但是　　$\angle CAB=\angle CDB$,

$$\therefore\quad \angle EFB=\angle CAB.$$

335. 设圆弧AMB的中点为M，弧上任意点为C。由点M作直线AC的垂线MD，其垂足为D，则$AD=\frac{1}{2}(AC+BC)$.



解　由M向BC作垂线ME，因M是$\overset{\frown}{ACB}$的中点，所以CM是$\angle ACE$的平分线，从而

$$MD=ME.$$

又　　$MA=MB$,

$$\angle MDA=\angle MEB=\angle R,$$

$$\therefore\quad \triangle MAD\cong\triangle MBE.$$

于是　　$AD=BE$.

但是

$$AC=AD+DC,\qquad ①$$

$$BC=BE-EC=AD-DC.\qquad ②$$

由①+②，得

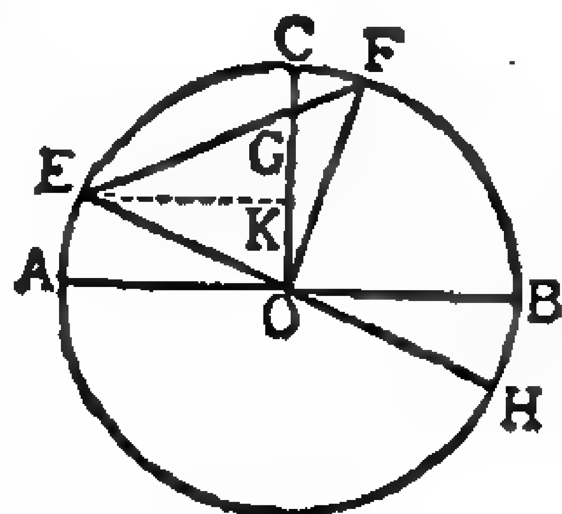
$$AC+BC=2AD,$$

$$\therefore\quad AD=\frac{1}{2}(AC+BC).$$

注　$DC=\frac{1}{2}(AC\sim BC)$.

336. 设圆O的半径OC垂直于直径AB，且与弦EF相交于点G。若$EG=EO$，则

$\angle AOE=\frac{1}{3}\angle BOF$.



解　延长EO与圆交于点H，若作$EK\perp OC$，则

$$EK\parallel AO.$$

因而

$$\angle AOE=\angle OEK.\qquad ①$$

但是$\triangle EOG$是等腰三角形，又因$EK\perp OG$，所以EK是$\angle E$的平分线。因此由①得

$$\angle OEG=2\angle AOE.$$

设　　$\angle AOE=\alpha$,

则　　$\angle FEO=2\alpha$,

$$\therefore\quad \angle F=2\alpha,$$

$$\therefore\quad \angle FOH=\angle FEO+\angle F=4\alpha.$$

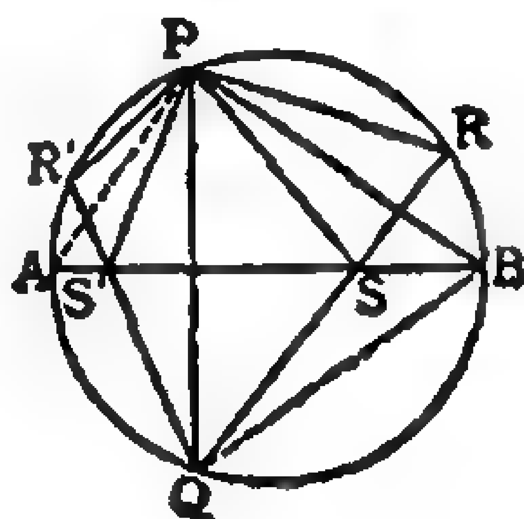
而　　$\angle HOB=\angle AOE=\alpha$,

故　　$\angle BOF=3\alpha$,

即　　$\angle BOF=3\angle AOE$.

337. 在圆O中，弦CD垂直于直径AB，在DC的延长线上取一点E。若AE与圆周的交点为F，则

$\angle AFC=\angle DFE$.



解　因$AFCD$为圆内接四边形，所以

$$\angle EFC=\angle ADC$$

$$=\angle ACD=\angle AFD.$$

在等式的两边加上$\angle DFC$，得

$$\angle AFC=\angle DFE.$$

338. 从圆周上一点P，作弦PQ垂直于直径AB，从点Q作任意弦QR与AB相交于点S。若把R、S、B各与P连结，则PB平分$\angle SPR$或其补角。

P
R'
R
A
S'
S
B
Q

解　连结BQ，则

$$\angle RPB=\angle RQB.\qquad ①$$

又因为AB是直径，且$PQ\perp AB$,

$$\therefore\quad \triangle PSB\cong\triangle QSB\ (\text{三边相等}),$$

于是

$$\angle BPS=\angle BQS.\qquad ②$$

由①、②，得

$$\angle RPB=\angle BPS,$$

即PB是$\angle SPR$的平分线。

设S在S'的位置，和上面完全一样，PA是$\angle S'PR'$的平分线，并且$\angle APB$是直角，所以BP平分$\angle S'PR'$的补角。

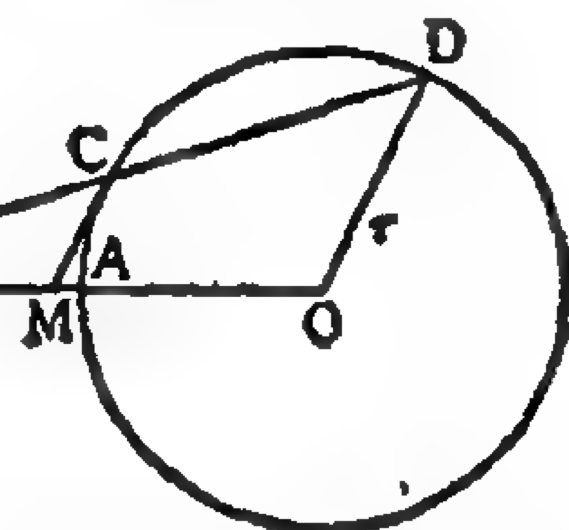
339. 设P为圆O外的一点，OP与圆周的交点为A。若$OP<3AO$，则过P必能作割线，使其圆外的部分与圆内的部分相等。

解　从点P作圆O的割线PCD，设$PC=$

CD, 如果 M 为 PO 的中点,那么

$$MC=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}r\ (r\text{为圆的半径}).$$

所以,以 M 为圆心,以 $\frac{1}{2}r$ 为半径画圆如总能与圆 O 相交,就总可以作割线 PCD, 使 PC 等于 CD. 因此 MA 不能大于 MC, 即 $MA\leq\frac{1}{2}r$ 是必要的.



由假设 $PO<3AO$, 所以 $PO<3r$. 于是

$$MO<\frac{3}{2}r.$$

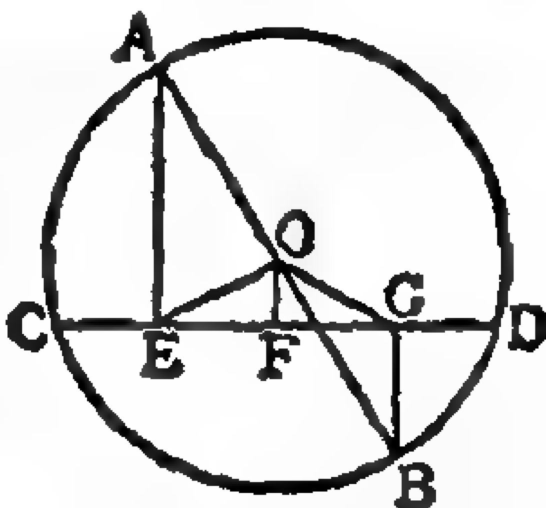
而 $$MA=MO-OA,$$

$$\therefore\ MA<\frac{3}{2}r-r,$$

即 $$MA<\frac{1}{2}r.$$

所以 MA 小于 MC, 于是可以 M 为圆心, $\frac{1}{2}r$ 为半径作圆,设与圆 O 相交于点 C, 作割线 PCD, 则 $PC=CD$.

340. 由圆 O 的直径 AB 的两端向任意弦 CD 或 CD 的延长线作垂线, 设其垂足分别为 E、G, 则 $OE=OG$.



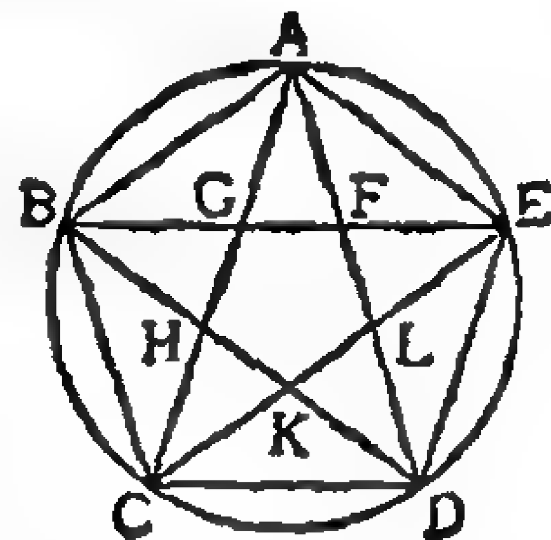
解 由 O 向 CD 作垂线 OF, 则 AE、OF、BG 平行, $OA=OB$,

$$\therefore\ EF=FG.$$

因此 $$\triangle OEF\cong\triangle OGF,$$

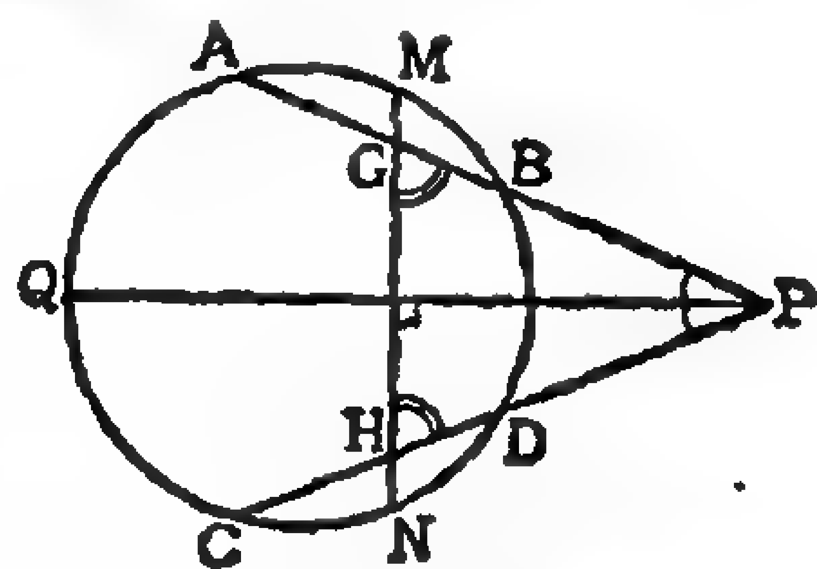
$$\therefore\ OE=OG.$$

341. 正五边形的对角线的交点构成的五边形是等角的.



解 设正五边形为 $ABCDE$, 由对角线的交点作成的五边形为 $FGHKL$, 则 $\angle FGH$ 等于 $\widehat{AB}+\widehat{CDE}$, 即等于圆周的 $\frac{3}{5}$ 的弧所对的圆周角. 同样 $\angle GHK$, $\angle HKL$, $\angle KLF$, $\angle LFG$ 都等于圆周的 $\frac{3}{5}$ 的弧所对的圆周角. 所以五边形 $FGHKL$ 是等角的.

342. 若延长圆的两弦 AB、CD 相交于点 P, 两弦所对的弧 AB 和弧 CD 的中点分别为 M、N, 则交角 P 的平分线垂直于 MN.



解 设 MN 和 AB、CD 的交点分别是 G、H, 则 $\angle BGH$ 等于 $\widehat{AM}+\widehat{BDN}$, 即 $\frac{1}{2}\widehat{AB}+\widehat{BD}+\frac{1}{2}\widehat{CD}$ 上的圆周角.

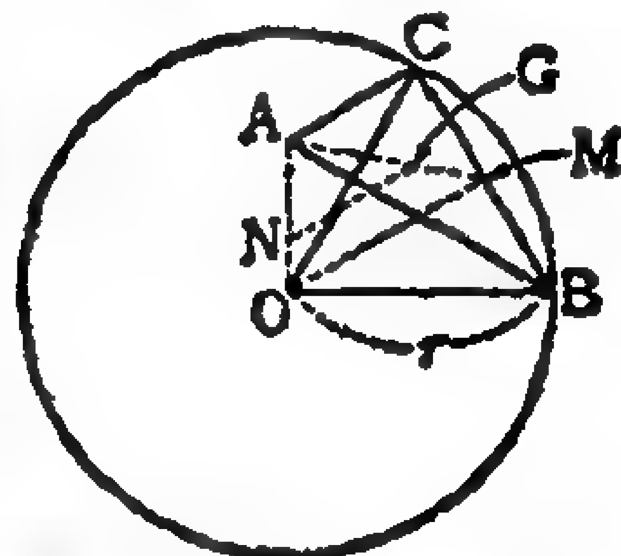
同样地, $\angle DHG$ 也等于 $\frac{1}{2}\widehat{AB}+\widehat{BD}+\frac{1}{2}\widehat{CD}$ 上的圆周角.

$$\therefore\ \angle BGH=\angle DHG.$$

于是 $\triangle PGH$ 为等腰三角形.

从而顶角 P 的平分线垂直于 GH, 即垂直于 MN.

343. 设 A 是半径为 r 的圆 O 内的定点, 若长为 r 的弦 BC 的两端点在圆 O 的圆周上移动.



(1) 若 $\triangle ABC$ 的顶角 A 为 60°, 则 O、A、B、C 四点共圆;

(2) 若 B 在圆 O 的圆周上旋转一周时,则 $\triangle ABC$ 的重心 G 画一定圆, 并求这个圆的圆心与半径.

解 (1) 由 $BC=r$, 知 $\triangle OBC$ 为正三角形.

$$\therefore\ \angle BOC=60^\circ=\angle BAC,$$

并且 A、O 在 BC 的同侧 (A、O 在 BC 的异侧时, $\angle BAC>150^\circ$), 所以 O、A、B、C 四点共圆.

(2) 设 AG 与 BC 的交点为 M, 则 M 是 BC 的中点,所以

$$AG=2GM.$$

又 $$OM=\sqrt{OB^2-BM^2}$$

$$=\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r,$$

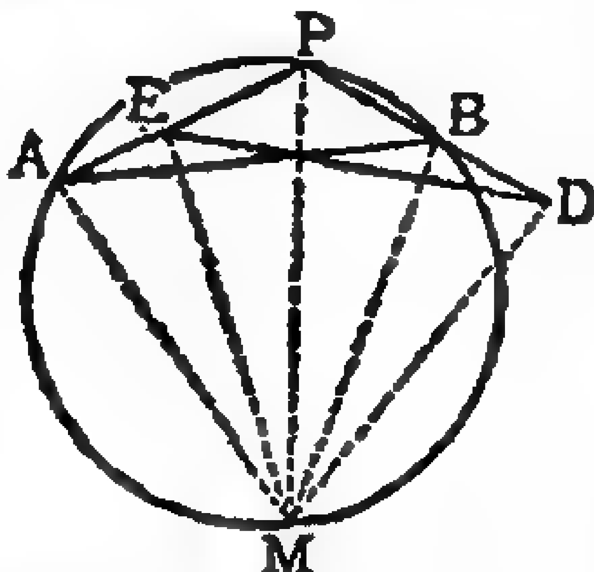
若过 G 作 OM 的平行线和 AO 的交点为 N, 则

$$AN:NO=AG:GM=2:1,$$
$$NG:OM=AG:AM=2:3,$$

$$\therefore \quad NG=\frac{2}{3}OM=\frac{\sqrt{3}}{3}r.$$

从而 G 在以分 AO 为 2:1 的内分点 N 为圆心，以 $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ 为半径的定圆上。

344. 设 A 和 B 是已知圆上的两定点，P 为圆上任意一点，在直线 PB 或 PB 的延长线上取 $PD=PA$，在直线 PA 或 PA 的延长线上取 $PE=PB$，则直线 DE 到弧 APB 的共轭弧的中点的距离是定值.



解 设 $\widehat{APB}$ 的共轭弧的中点为 M，则 PM 是 $\angle APB$ 的平分线. 又因

$$PB=PE,\ PA=PD,$$

于是　$MB=ME,\ MA=MD,$

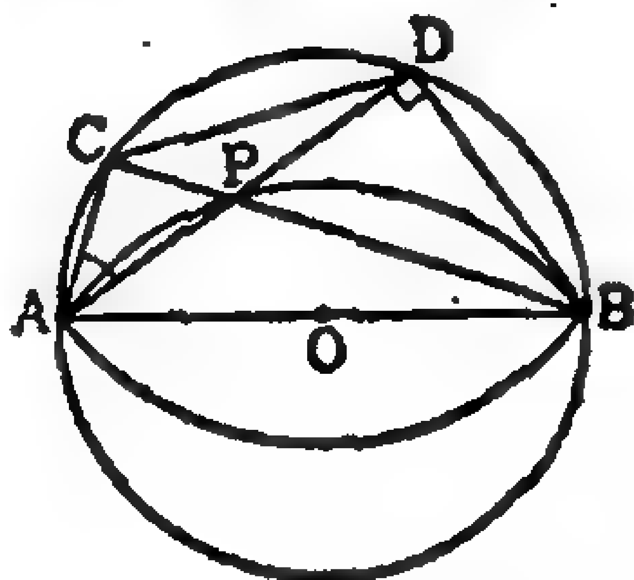
又由　$\triangle PAB \cong \triangle PDE,$

从而　$AB=DE.$

所以　$\triangle MAB \cong \triangle MDE.$

因此，M 到 DE 的距离等于 M 到 AB 的距离. 又因 AB 是定弦，M 是定弧的中点，所以 AB 与 M 的距离是定值. 故 M 到 DE 的距离也是定值.

345. 设 AB 是定圆 O 的定直径，动弦 CD 的长是一定的. AD 与 BC 的交点为 P，试决定点 P 移动的圆弧.



解 设 AD、BC 在圆内相交于点 P，则 $\angle APB$ 等于 $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{CD}$ 之和上的圆周角. 由于 AB 是直径，所以 $\widehat{AB}$ 等于半圆周，又因 CD 是定长的弦，所以 $\widehat{CD}$ 的长也是一定的. 于是 $\widehat{AB}+\widehat{CD}$ 是定值，故 $\angle APB$ 的大小是一定的.

设 $\widehat{DC}$ 上的圆周角为 α，则

$$\angle APB=90^\circ+\alpha.$$

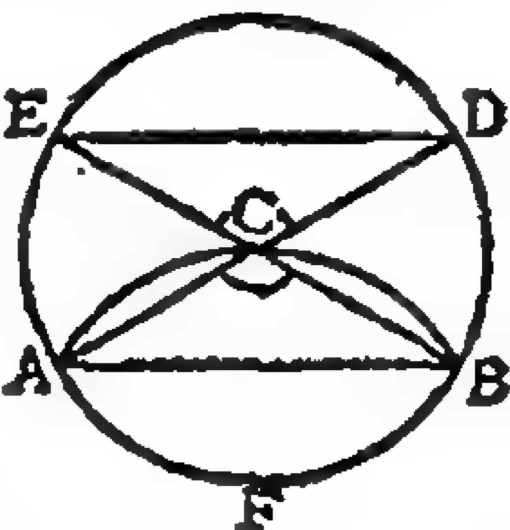
所以，点 P 在以 AB 为弦包含 $90^\circ+\alpha$ 的弓形弧上.

如果交换 D 与 C 的位置，AD 与 BC 的延长线在圆外相交于点 P，那么 $\angle APB$ 等于 $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{DC}$ 之差上的圆周角，所以

$$\angle APB=90^\circ-\alpha,$$

故点 P 在以 AB 为弦包含 $90^\circ-\alpha$ 的弓形弧上.

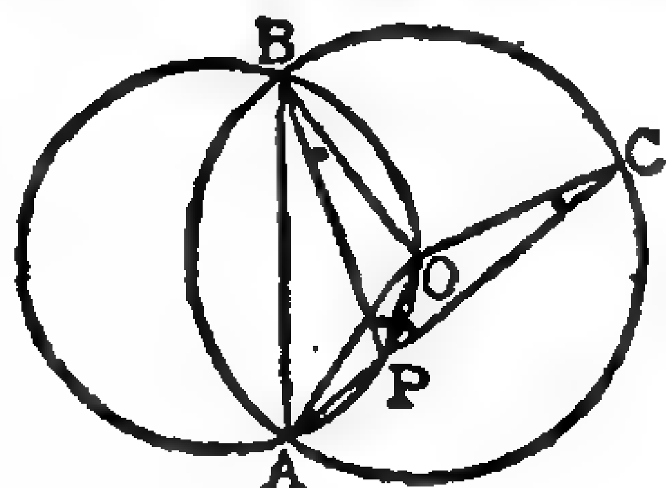
346. 设在弦 AB 上有两个确定的弓形 ACB、ADB，在弧 ACB 上的任意一点为 C，连结 AC、BC，若 AC、BC 或者它们的延长线与弧 ADB 的交点为 D、E，则弦 DE 的长一定.



解 设弧 $AEDB$ 的共轭弧为 BFA，则 $\angle ACB$ 等于 $\widehat{AFB}$ 与 $\widehat{DE}$ 之和上的圆周角，但是弓形角 ACB 是一定的，并且 $\widehat{AFB}$ 也是一定的，所以 $\widehat{DE}$ 的长也是一定的. 故弧 DE 所对的弦 DE 的长也是一定的.

347. 设 A、B 是圆 O 上的两定点，且不是直径的两端点. 若过 A 的任意弦 AC 和过 A、B、O 的圆相交于点 P，则

$$PB=PC.$$



解 在图中，B、A、P、O 四点共圆，

$$\therefore \quad \angle BPO=\angle BAO.$$

但是　$OA=OB,$

$$\therefore \quad \angle ABO=\angle BAO.$$

于是　$\angle BPO=\angle ABO=\angle CPO.$

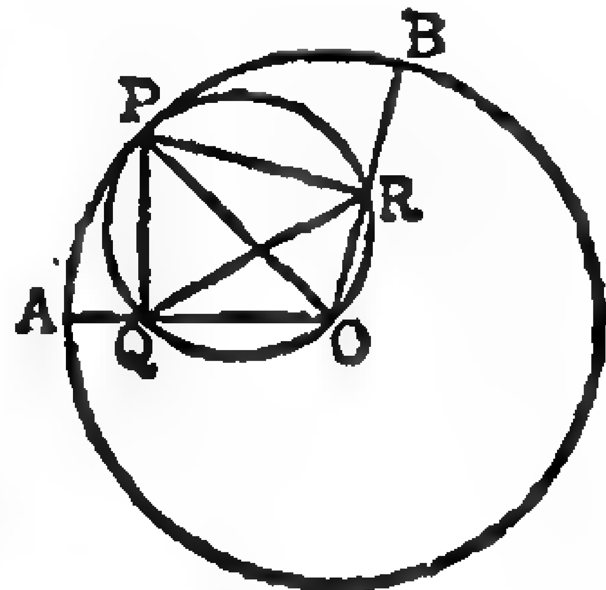
又　$\because \ OA=OB=OC,$

$$\therefore \quad \angle PCO=\angle OAP=\angle PBO.$$

$$\therefore \quad \triangle PCO \cong \triangle PBO,$$

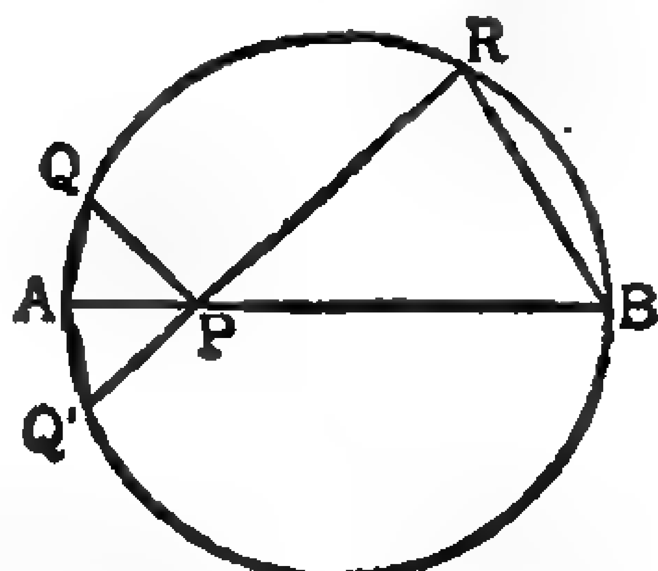
故　$PC=PB.$

348. 从圆 O 上的任意一点 P，向两固定的半径 OA、OB 或者它们的延长线上作垂线 PQ、PR，连结垂足 QR，则线段 QR 的长是定值.



解 因为 $\angle PQO=\angle R=\angle PRO$，所以，以 PO 为直径的圆过点 Q 及 R. 但是 PO 是定圆的半径，所以它是一定的，从而这个圆的大小是一定的. 而 OA、OB 是固定的半径，所以 $\angle QOR$ 是一定的. 故在半径相等的圆中，具有一定大小的圆周角 QOR 所对的弦 QR 的长是定值.

349. 设 P 是圆的直径 AB 上的一点，在 AB 的同侧由 P 到圆周作两条线段 PQ、PR。若



$$\angle APQ=\angle BPR,$$

则 $\triangle APQ$ 与 $\triangle RPB$ 相似。

解 设 Q 关于 AB 的对称点为 Q'，则

$$\triangle AQP\cong\triangle AQ'P.$$

$$\therefore\quad \angle APQ'=\angle APQ=\angle RPB,$$

于是 RPQ' 成一直线。从而

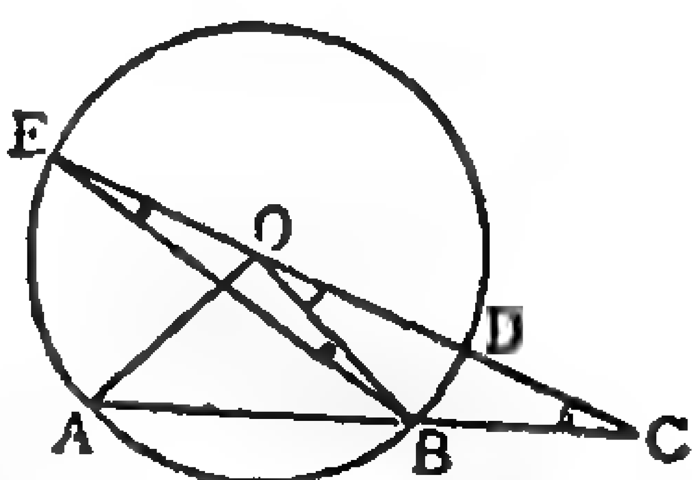
$$\angle RBA=\angle AQ'R=\angle AQP.$$

又由题设，知

$$\angle APQ=\angle BPR,$$

故 $\triangle APQ$ 与 $\triangle RPB$ 相似。

350. 设延长圆的弦 AB 到 C，使 BC 等于半径，过 C 与圆心 O 的直线跟圆的交点为 D、E，则弧 AE 等于弧 BD 的三倍。



解 由假设 $OB=BC$,

$$\therefore\quad \angle BOC=\angle C. \qquad ①$$

而 $\angle OBA$ 是等腰三角形 BOC 的外角，所以

$$\angle OBA=2\angle BOC=2\angle C,$$

从而 $\quad \angle A=\angle OBA=2\angle C.$

又 $\angle EOA$ 是 $\triangle AOC$ 的外角，所以

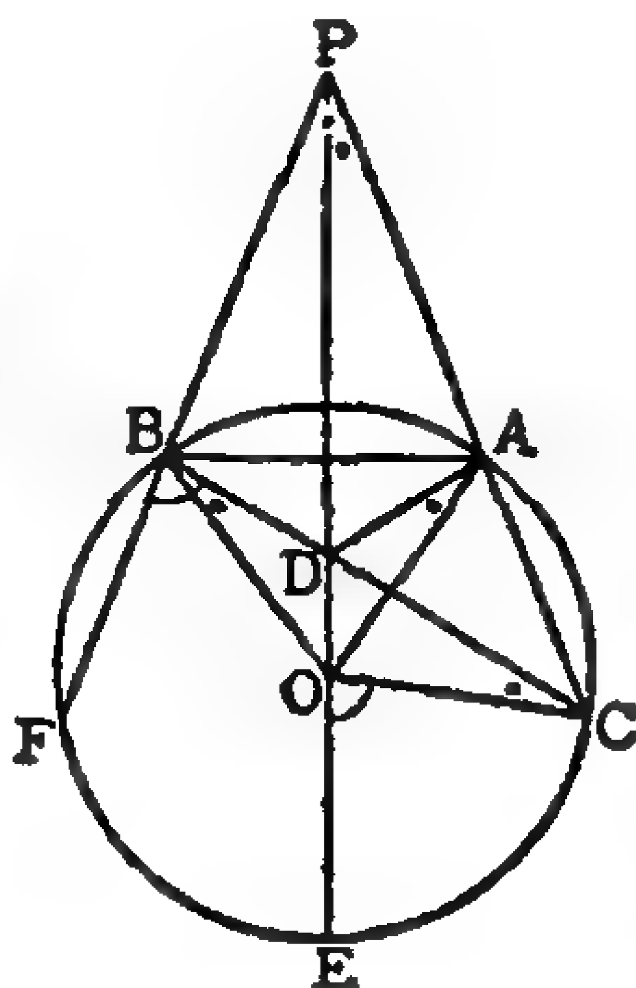
$$\angle EOA=\angle A+\angle C=3\angle C.$$

由①，$\quad \angle EOA=3\angle BOD,$

$$\therefore\quad \widehat{AE}=3\widehat{BD}.$$

351. 在圆心为 O 的圆外有一点 P，设弦 AB 垂直于直线 OP，若直线 PA 和该圆的交点为 C，直线 OP 和 BC 相交于点 D，则

$$OD\cdot OP=OA^2.$$



解 在图中，PO 垂直且平分 AB,

$$\therefore\quad \widehat{EC}=\widehat{EF}.$$

于是 $\quad \angle EOC=\angle FBC,$

从而其补角 $\quad \angle POC=\angle PBC,$

故有 P、B、O、C 四点共圆，

$$\therefore\quad \angle OPC=\angle OBC.$$

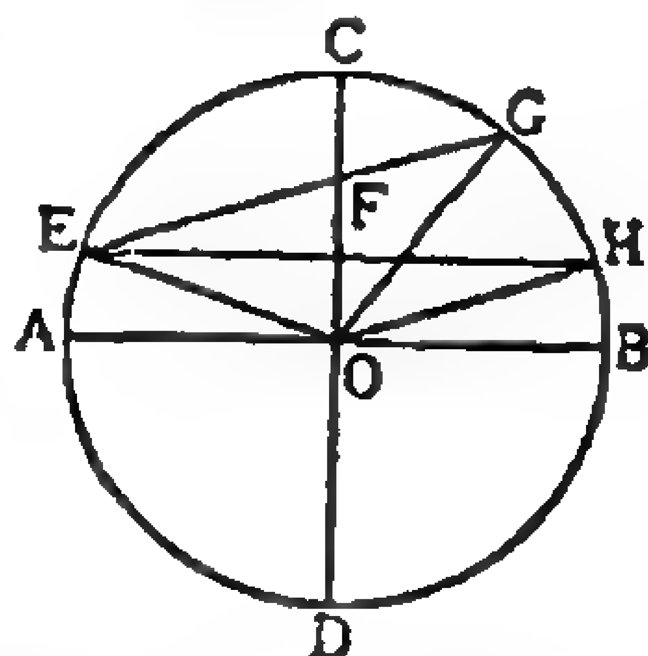
可是 $\quad \angle OBD=\angle OAD,$

因此 $\quad \angle DPA=\angle DAO,$

所以 OA 与 $\triangle PDA$ 的外接圆相切于点 A，

故 $\quad OD\cdot OP=OA^2.$

352. 设 AB、CD 是圆 O 的互相垂直的直径，从弧 AC 上的一点 E 作弦 EG 与 CD 交于点 F，与圆周交于点 G，若 EF 等于半径 EO，则弧 BG 是弧 AE 的三倍。



解 作弦 EH 平行于 AB，则 $\triangle EFO$ 是等腰三角形。因为 $EH\perp OF$，所以 EH 平分 $\angle GEO$，而且

$$\angle OEH=\angle OHE,$$

从而 $\quad \angle GEH=\angle OHE,$

于是 $\quad EG\parallel OH,$

故有 $\quad \angle GOH=\angle EGO.$

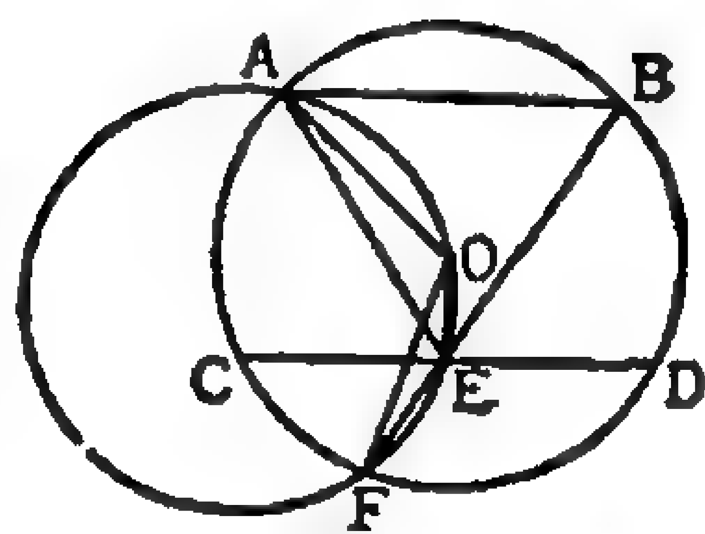
但是 $\quad \angle EGO=\angle GEO=2\angle HEO,$

又 $\quad \angle HEO=\angle EHO=\angle HOB.$

$$\therefore\quad \angle GOH=2\angle HOB,$$

故 $\quad \widehat{BG}=3\widehat{HB}=3\widehat{AE}.$

353. 设 AB、CD 为圆 O 的两平行弦，E 为 CD 的中点，若 BE 的延长线和圆周相交于点 F，则 A、O、E、F 四点共圆。



解 因为 $AB\parallel CD$, $OE\perp CD$,

所以 $EA=EB$，即 $\triangle EAB$ 是等腰三角形，于是

$$\angle AEF=2\angle B.$$

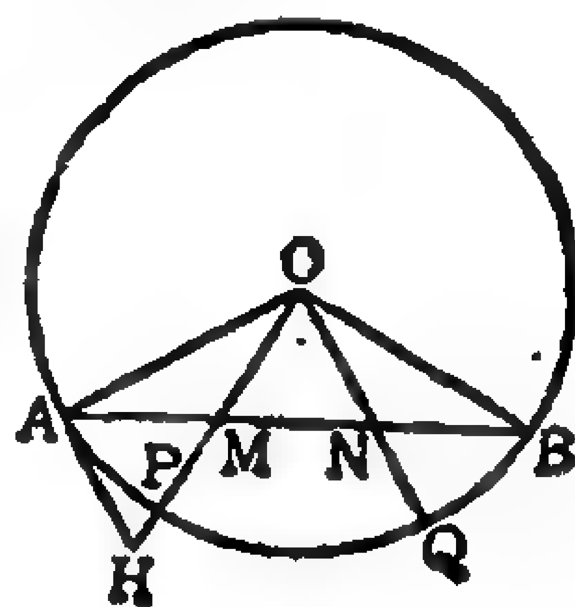
但是在圆 O 内，圆心角 AOF 等于圆周角 ABF 的两倍，即

$$\angle AOF=2\angle B.$$

$$\therefore\quad \angle AOF=\angle AEF,$$

故 A、O、E、F 四点共圆。

354. 在圆 O 中，M、N 为弦 AB 的三等分点，OP、OQ 为过分点 M、N 的半径，试比较三条弧 $\widehat{AP}$、$\widehat{PQ}$、$\widehat{QB}$



的大小。

解 若在OM的延长线上取MH等于OM，则$AH=ON$。但是$OA>ON$，所以$OA>AH$，于是在$\triangle OAH$中，

$$\angle AOH<\angle AHM,$$

而且 $\angle AHM=\angle MON$.

$$\therefore\ \angle AOP<\angle POQ,$$

故 $\overset{\frown}{AP}<\overset{\frown}{PQ}$.

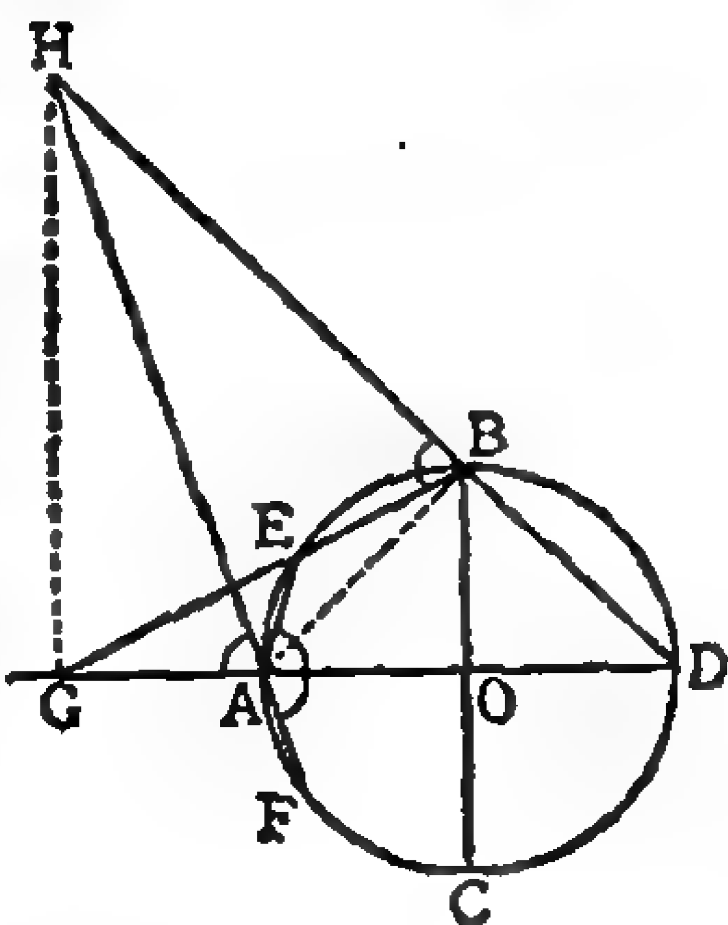
其次， $\triangle AOM\cong\triangle BON$ (两边夹角)，

$$\therefore\ \angle AOP=\angle BOQ,$$

于是有 $\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{BQ}$,

故 $\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{BQ}<\overset{\frown}{PQ}$.

355. 设AD、BC是圆O的互相垂直的直径，E和F分别在劣弧$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CA}$上，若$\overset{\frown}{AE}$和$\overset{\frown}{AF}$相等，直线DA和直线BE的交点为G，直线FA和直线DB的交点为H，则$\angle HGA$是直角。



解 因为$EADB$是圆内接四边形，

$$\therefore\ \angle HBG=\angle EAD.$$

又 $\because\ \overset{\frown}{DBE}=\overset{\frown}{DCF}$,

$$\therefore\ \angle EAD=\angle FAD.$$

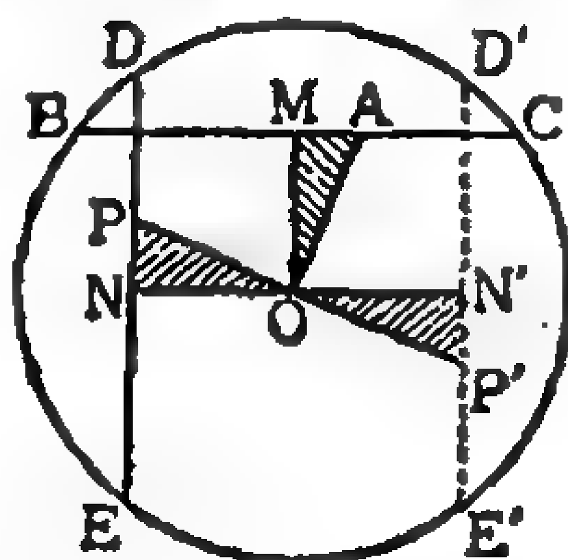
而且 $\angle FAD=\angle HAG$ (对顶角)，

于是 $\angle HBG=\angle HAG$,

所以B、H、G、A四点共圆。

故 $\angle HGA=\angle ABD=\angle R$.

356. 过定圆内的定点A作任意弦BC，再作弦DE垂直且等于BC，证明弦DE必过两定点之一，并且指出这两定点的位置。



解 如图，设DE与$D'E'$都是垂直且等于BC的弦。因为BC、DE、$D'E'$都相等，所以从圆心O向这三条弦作垂线OM、ON、ON'都相等，若过点O作OA的垂线与DE、$D'E'$的交点分别为P、P'，则

$$\angle NOM=\angle R=\angle POA.$$

$$\therefore\ \angle NOP=\angle MOA, \quad ①$$

$$\angle N=\angle R=\angle M, \quad ②$$

$$ON=OM. \quad ③$$

于是 $\triangle PON\cong\triangle AOM$.

从而 $OP=OA$,

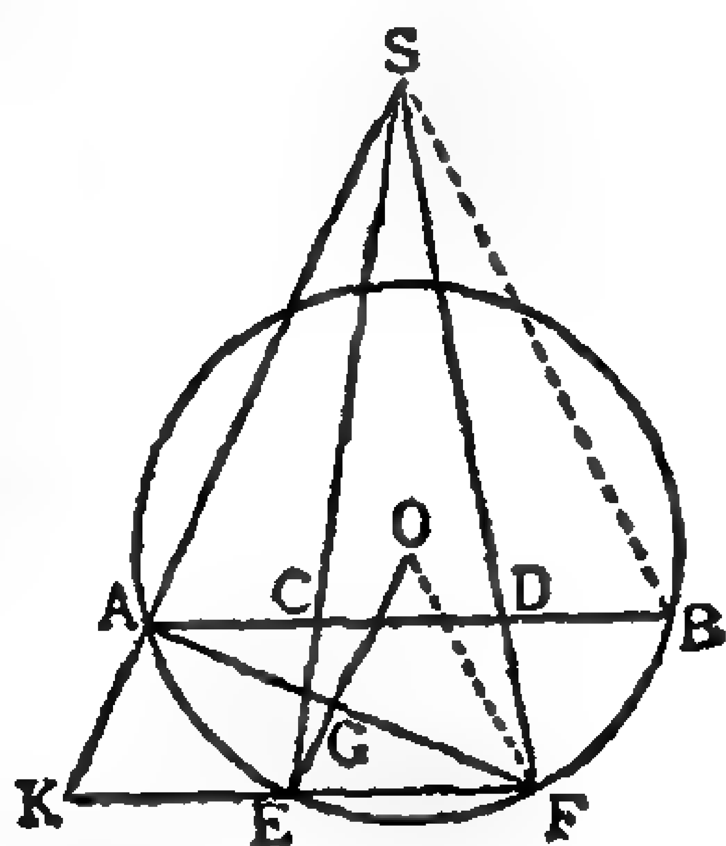
且 $AO\perp OP$.

同样地 $OP'=OA$,

且 $AO\perp OP'$.

故P和P'都是定点，所以DE或者$D'E'$必过两定点P、P'中的一点。

357. 设圆O的弦AB的三等分点为C、D，此弦所对的弧AB的三等分点为E、F，若延长EC、FD相交于点S，则$OE\parallel SA$、$OF\parallel SB$.



解 若SA和FE的延长线相交于点K，则$AD\parallel EF$且$AC=CD$,

$$\therefore\ KE=EF. \quad ①$$

又因为$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}$，所以

$$弦AE=弦EF. \quad ②$$

由①、②，得

$$EK=EF=EA.$$

$$\therefore\ \angle KAF=\angle R. \quad ③$$

设OE和AF的交点为G，因$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}$，所以

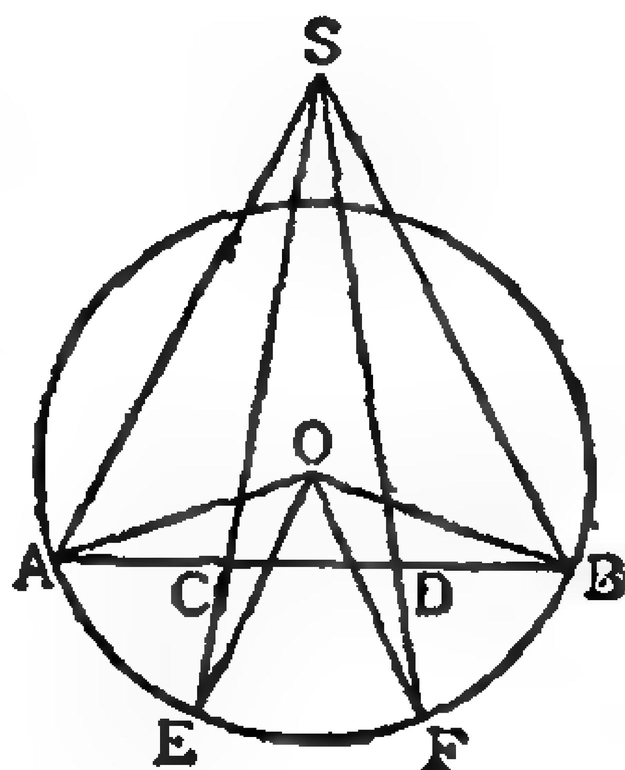
$$OE\perp AF. \quad ④$$

由③、④，得 $SA\parallel OE$,

同样地

$$OF\parallel SB.$$

358. 设圆O的定弦AB的三等分点为C、D，这条弦所对的弧AB的三等分点为E、F，若EC、FD的延长线相交于点S，则



$$\angle ASB=\frac{1}{3}\angle AOB.$$

解 若连结OE、OF，根据问题**357**，有

$$SA\parallel OE,\ SB\parallel OF,$$

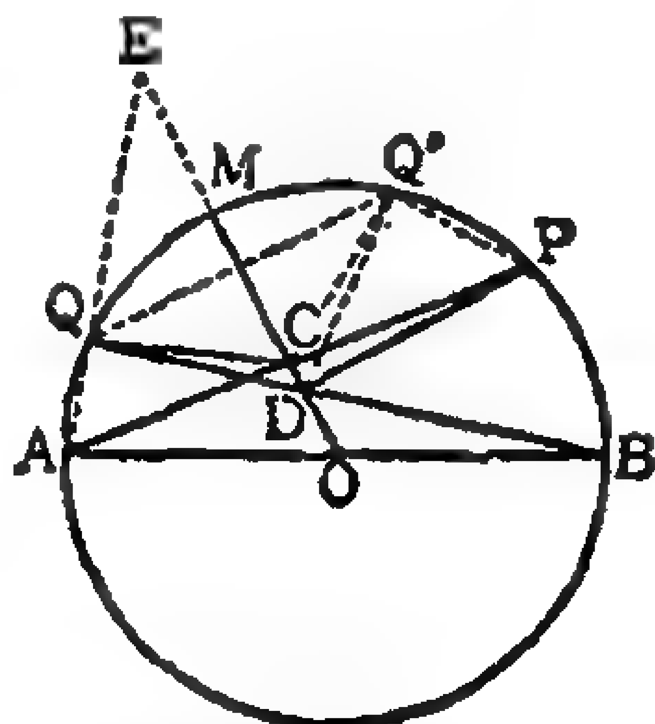
$$\therefore\ \angle ASB=\angle EOF.$$

但是 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FB}$,

$$\therefore\quad \angle EOF=\frac{1}{3}\angle AOB,$$

于是　　$\angle S=\frac{1}{3}\angle AOB.$

359. 在圆 O 中，若直径 AB 的两端点上的任意两弦 AP、BQ，与任意半径 OM 的交点分别为 C、D，则



$\angle APD=\angle BQC.$

解　如果 Q 关于 OM 的对称点为 Q'，那么 Q' 在圆上，

$$\therefore\quad \angle Q'DC=\angle QDM=\angle Q'QE \quad ①$$
$$(\because\quad \angle AQB=\angle R).$$

但四边形 $QAPQ'$ 是圆内接四边形，

$$\therefore\quad \angle Q'QE=\angle Q'PA. \quad ②$$

于是由①、②，得

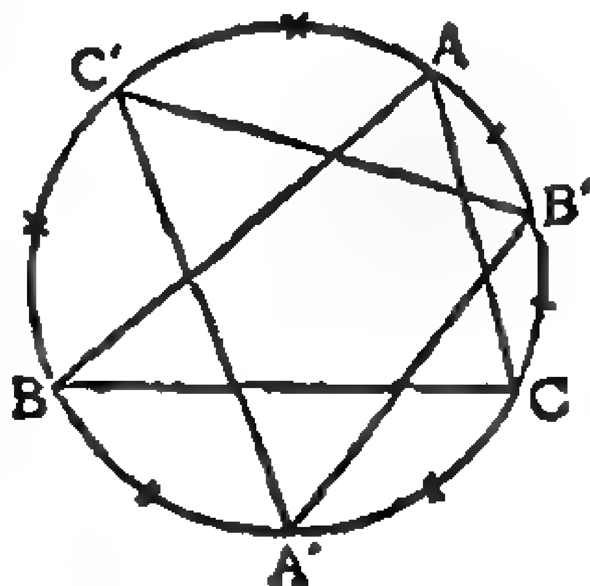
$$\angle Q'PC=\angle Q'DC,$$

从而 Q'、C、D、P 四点共圆，连结 CQ'，则

$$\angle DPC=\angle DQ'C=\angle DQC,$$

$\therefore\quad \angle APD=\angle BQC.$

360. 设圆内接三角形 ABC 的各边 BC、CA、AB 所对弧的中点为 A'、B'、C'，连结它们作成 $\triangle A'B'C'$，则



$$\angle A'\sim\angle B'=\frac{1}{2}(\angle A\sim\angle B).$$

解　因 $\widehat{B'C'}\sim\widehat{C'A'}$

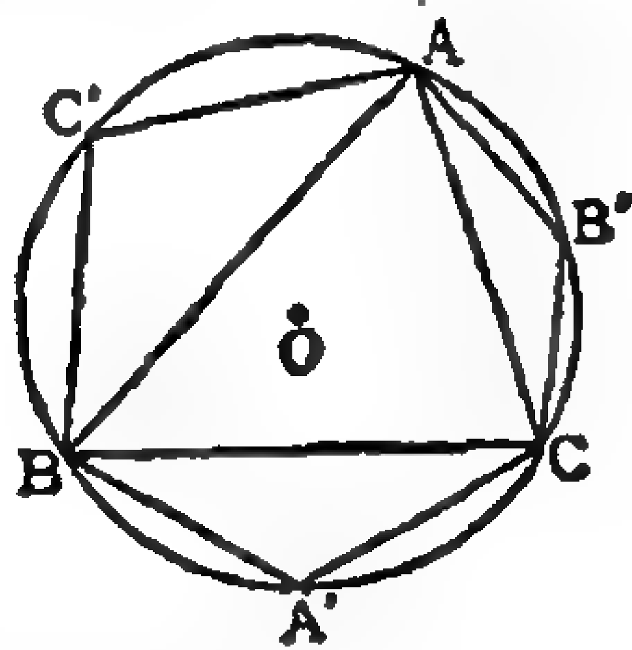
$$=\widehat{B'A}+\widehat{AC'}\sim(\widehat{C'B}+\widehat{BA'})$$
$$=\frac{1}{2}\widehat{CA}+\frac{1}{2}\widehat{AB}$$
$$\sim\left(\frac{1}{2}\widehat{AB}+\frac{1}{2}\widehat{BC}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\widehat{CA}\sim\frac{1}{2}\widehat{BC},$$

$$\therefore\quad \angle A'\sim\angle B'=\frac{1}{2}\angle B\sim\frac{1}{2}\angle A$$
$$=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle A),$$

故　　$\angle A'\sim\angle B'=\frac{1}{2}(\angle A\sim\angle B).$

361. 在下面的问题中，（ ）里面的等号和不等号，不要的去掉，就表示对于那种情况的证明。

设在半径为 R 的圆中，由内接锐角三角形 ABC 各顶点所确定的劣弧 BC、CA、AB 的中点分别为 A'、B'、C'，弦 BC、CA、AB 的长为 a、b、c，六边形 $AC'BA'CB'$ 的面积用 S 表示，则有关系式



$$S\begin{pmatrix}>\\=\\<\end{pmatrix}\frac{R}{2}(a+b+c).$$

同样，设劣弧 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 的中点分别为 A''、B''、C''，弦 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 的长为 a'、b'、c'。若六边形 $A''C'B''A'C''B'$ 的面积用 S' 表示，则有关系式

$$S'\begin{pmatrix}>\\=\\<\end{pmatrix}\frac{R}{2}(a'+b'+c').$$

如果从这两个六边形中去掉 $\triangle A'B'C'$，余下部分的面积有关系式

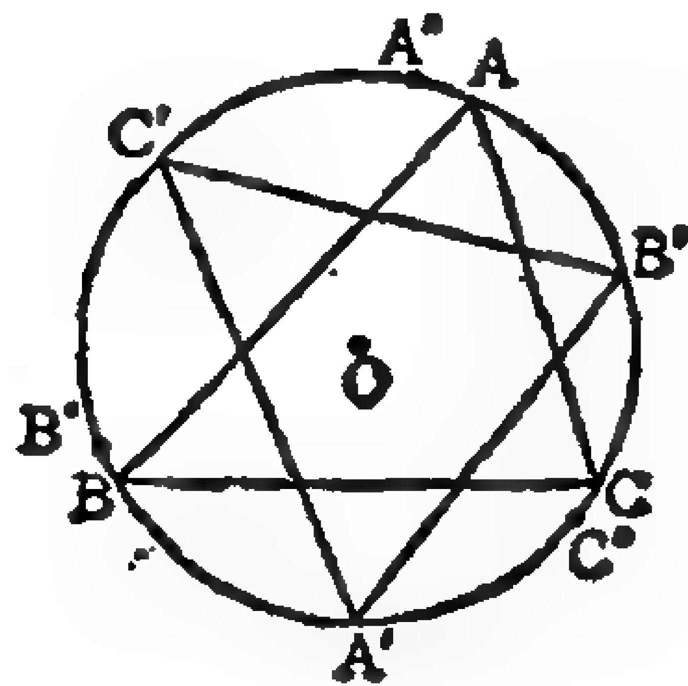
$$S\begin{pmatrix}>\\=\\<\end{pmatrix}S'.$$

所以　　$a+b+c\begin{pmatrix}>\\=\\<\end{pmatrix}a'+b'+c'.$

解　因 A' 是 $\widehat{BC}$ 的中点，所以 $OA'\perp BC$。这时四边形 $OBA'C$ 的面积等于 $\frac{1}{2}BC\cdot OA'$，但是

$OA'=R$，$BC=a$，

所以四边形



$$OBA'C=\frac{1}{2}aR.$$

同样地，四边形

$$OCB'A=\frac{1}{2}bR,$$

四边形　　$OAC'B=\frac{1}{2}cR.$

而六边形 $AC'BA'CB'$ 是这三个四边形的和，所以六边形 $AC'BA'CB'$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}R(a+b+c).$$

同样地，六边形 $A''C'B''A'C''B'$ 的面积

$$S'=\frac{1}{2}R(a'+b'+c').$$

其次,比较$\triangle AB'C'$和$\triangle A''B'C'$,因为A''是$\widehat{B'C'}$的中点,所以

$$\triangle A''B'C'\geqq\triangle AB'C'.$$

同样地，$\triangle B''C'A'\geqq\triangle BC'A'$,

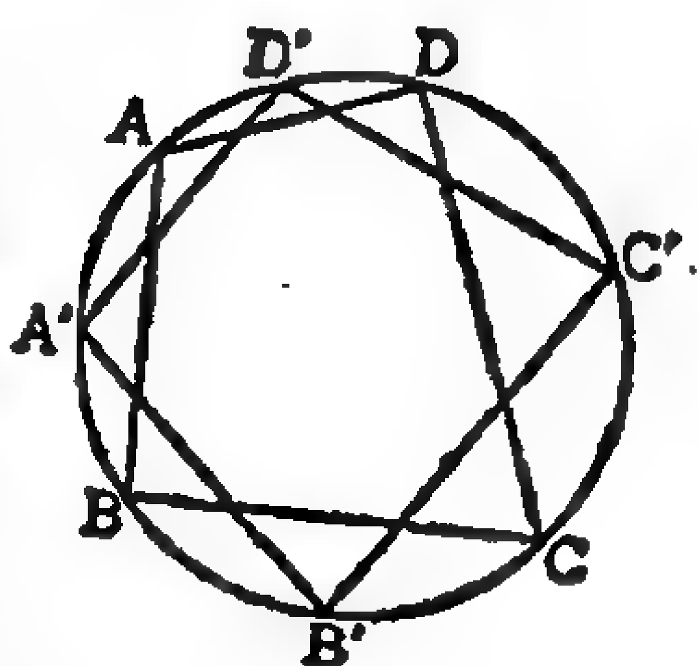
$$\triangle C''A'B'\geqq\triangle CA'B'.$$

S'是这个左边的三个三角形与$\triangle A''B'C'$的和,S是右边的三个三角形与$\triangle AB'C'$的和,所以$S'\geqq S$. 即

$$\frac{1}{2}R(a+b+c)\leqq\frac{1}{2}R(a'+b'+c'),$$

$$\therefore\quad a+b+c\leqq a'+b'+c'.$$

362. 连结圆内接四边形$ABCD$各边所对弧的中点作成四边形$A'B'C'D'$, 顺次这样进行下去，则四边形就逐渐地接近正方形.



解 设$\widehat{AD}<\widehat{AB}<\widehat{BC}<\widehat{CD}$, 则

$$\widehat{A'D'}<\widehat{D'C'}<\widehat{B'C'},$$

且 $$\widehat{A'D'}<\widehat{A'B'}<\widehat{B'C'}.$$

所以$\widehat{A'D'}$最小，$\widehat{B'C'}$最大. 但是

$$\widehat{A'D'}=\frac{1}{2}(\widehat{AB}+\widehat{AD})>\widehat{AD},$$

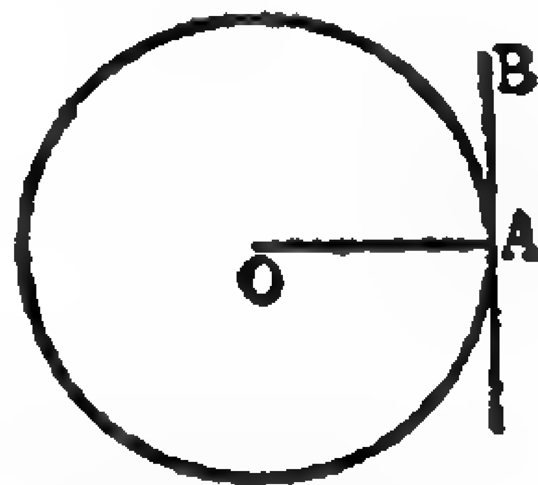
且 $$\widehat{B'C'}=\frac{1}{2}(\widehat{CD}+\widehat{BC})<\widehat{CD}$$

等等. 所以四边形$A'B'C'D'$的最小边$A'D'$大于四边形$ABCD$的最小边AD, 四边形$A'B'C'D'$的最大边$B'C'$小于四边形$ABCD$的最大边. 同样地，连结四边形$A'B'C'D'$各边所对弧的中点，作成第三个四边形$A''B''C''D''$, 则四边形$A''B''C''D''$的最小边大于四边形$A'B'C'D'$的最小边. 第三个四边形的最大边小于四边形$A'B'C'D'$的最大边. 所以反复使用这个方法时，各边的差逐渐变小,取它的极限,四边形各边的差趋近于零,即各边接近相等,而这个圆的内接四边形就接近正方形.

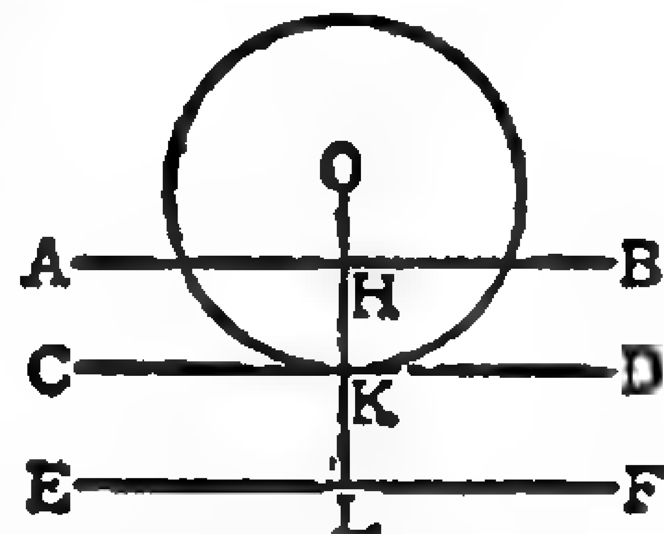
4. 切线

363. 过圆周上的一点只能作一条切线.

解 过圆O上的一点A, 作垂直于半径OA的直线AB,则AB是圆O的切线. 因为在点A垂直于OA的直线只有一条，所以在点A的切线只有一条.



364. 若圆心到一直线的距离小于半径或者等于半径或者大于半径，则这条直线与圆相交,或者相切,或者与圆相离.

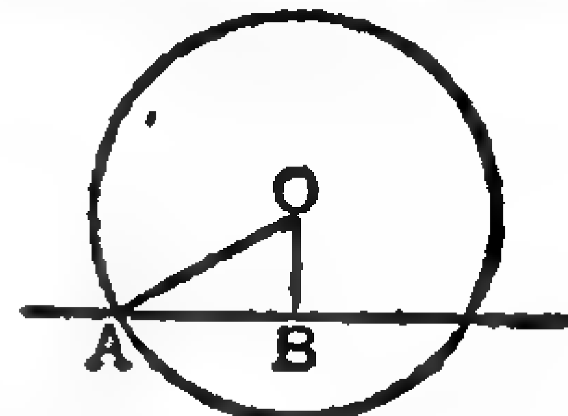


解 若从圆心O到直线AB的距离OH小于半径时，则点H在圆内. 然后在AB上充分远的地方取一点到O点的距离大于半径，显然这点在圆外，所以AB与圆相交.

其次若从圆心到直线CD的距离等于半径,则除垂足K外CD上的点都在圆O的外面，所以CD与圆相切. 若由圆心O到直线EF的距离OL大于半径，L在圆外，所以EF与圆相离.

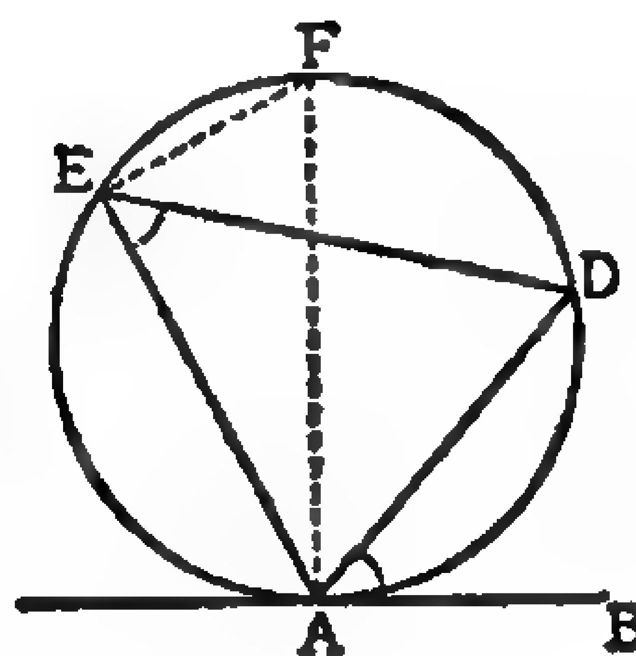
注 容易证明这个命题的逆命题也是正确的.

365. 过圆周上一点的半径与过这点的直线斜交时，则这条直线是圆的割线.



解 若过圆O上一点A的直线与半径OA斜交,由O作直线的垂线OB, B为垂足,则$OA>OB$. 即从圆心到点B的距离小于半径,所以AB是这个圆的割线.

366. 切线AB与过切点A所作的弦AD所成的角BAD, 等于$\widehat{AD}$所对的圆周角.



解 过点A作直径AF, 在$\widehat{ADF}$的共轭弧上任取一点E, 连结EF,

$$\because\quad \angle DAB=\angle FAB-\angle FAD,$$

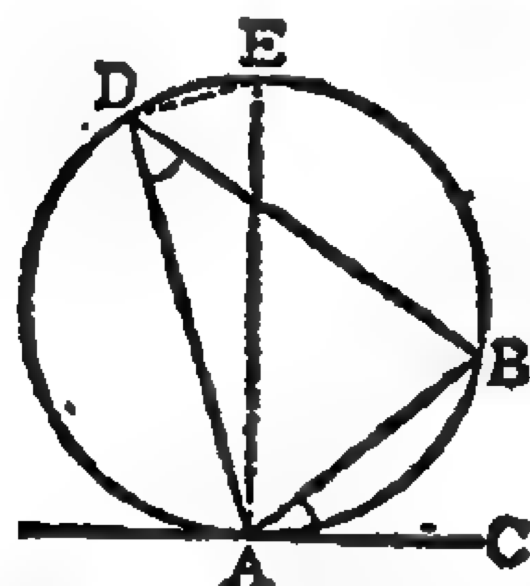
$$\angle AED=\angle AEF-\angle DEF.$$

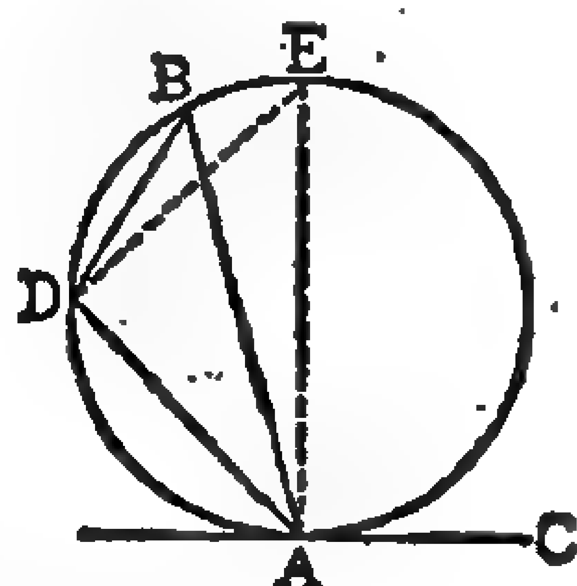
但是 $$\angle FAB=\angle R=\angle AEF,$$

$$\angle FAD=\angle DEF,$$

$$\therefore\quad \angle DAB=\angle DEA.$$

367. 由弦 AB 的端点 A 作直线 AC，若 AC 与 AB 所成的角等于弦 AB 的另一侧的弓形角 ADB，则直线 AC 是切线。





解　若过点 A 作直径 AE，因

$$\angle BAC=\angle ADB,\ \angle EAB=\angle EDB,$$

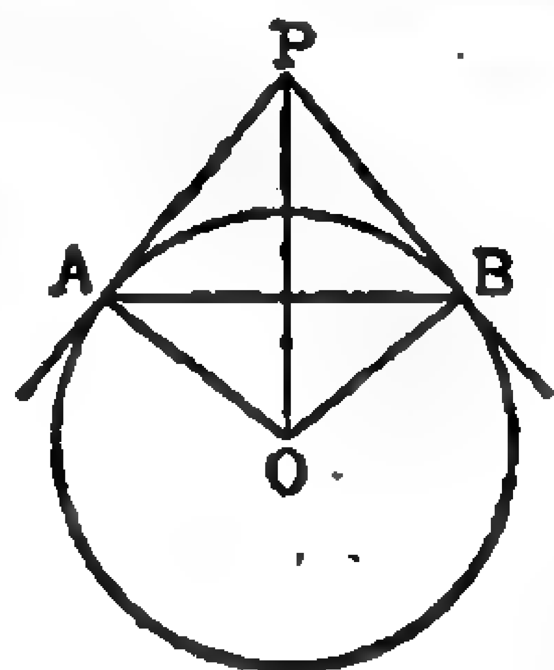
所以 $\angle BAC$ 与 $\angle EAB$ 的和或者差等于 $\angle ADB$ 与 $\angle EDB$ 的和或者差。即

$$\angle EAC=\angle EDA.$$

但　　$\angle EDA=\angle R,$

所以 AC 是切线。

368. 在弦所对的弧上取一点作该圆的切线与弦平行，则切线的切点平分该弧。



解　设圆的切线为 PN，切点为 P。若

$$AB\parallel PN,$$

则　　$\angle NPB=\angle PBA$ (内错角)。

又因为 PN 是切线，所以

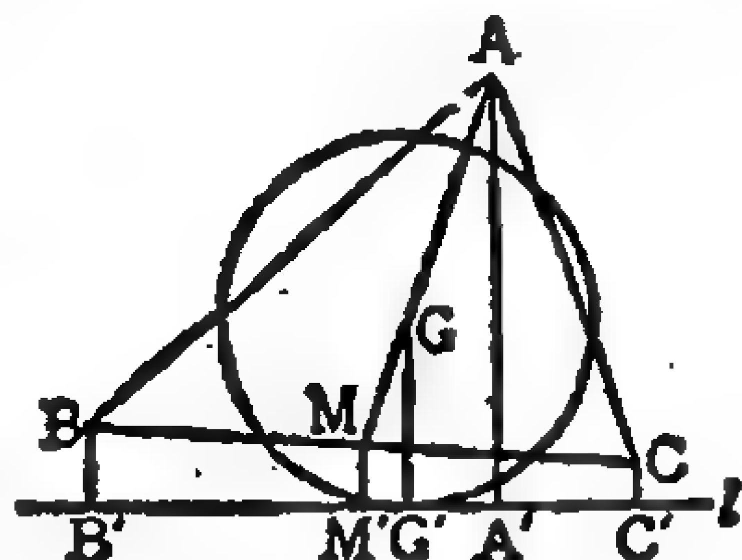
$$\angle NPB=\angle PAB\ (\text{问题 }366)。$$

于是 $\triangle PAB$ 是等腰三角形。

$$\therefore\quad AP=PB,$$

故　　$\widehat{AP}=\widehat{PB}.$

369. 若从圆 O 外一点 P 作圆的切线 PA、PB，则 (1) $PA=PB$；(2) PO 平分 $\angle APB$ 和 $\angle AOB$；(3) PO 是弦 AB 的垂直平分线。



解　(1) 在 $\triangle PAO$ 和 $\triangle PBO$ 中，PA、PB 是切线，所以

$$\angle PAO=\angle PBO=\angle R,$$

$$OA=OB,$$

PO 公共。

$$\therefore\quad \triangle PAO\cong\triangle PBO,$$

于是　　$PA=PB.$

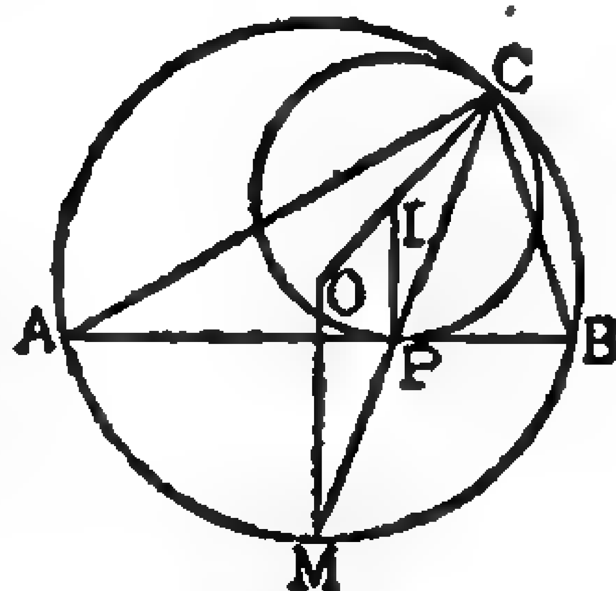
(2) 由 (1)，得

$$\angle APO=\angle BPO,\ \angle POA=\angle POB.$$

于是 PO 是 $\angle APB$ 与 $\angle AOB$ 的平分线。

(3) 因 $PA=PB$，所以 $\triangle PAB$ 是等腰三角形，PO 是其顶角 APB 的平分线，于是 PO 是底边 AB 的垂直平分线。

370. 在直线的同侧有三定点，这三点到直线的距离之和等于定值 d，则直线与定圆相切，并求出这个圆的圆心与半径。

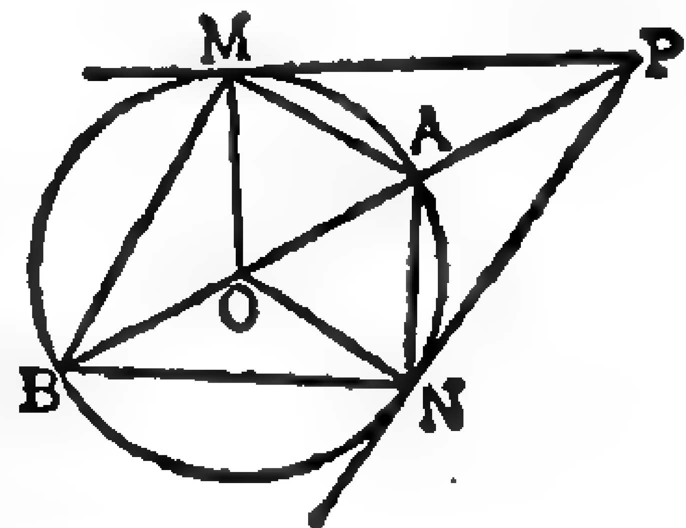


解　设三点 A、B、C 到直线 l 的垂直距离分别为 AA'、BB'、CC'，若 $\triangle ABC$ 的重心 G 到直线 l 的垂直距离为 GG'，则

$$AA'+BB'+CC'=3GG'\ (\text{问题 }\mathbf{107})。$$

所以 l 是以 G 为圆心，以 $GG'=\frac{1}{3}d$ 为半径的圆的切线。

371. 若在圆 O 内画一圆 I，它与圆 O 的弦 AB 相切于点 P，又同圆 O 内切于点 C，则直线 CP 是 $\angle ACB$ 的平分线。



解　设 CP 的延长线与外切圆相交于点 M，连结 IP、OM，则

$$IC=IP,\ OC=OM,$$

$$\angle IPC=\angle ICP=\angle OMC.$$

所以　　$IP\parallel OM,$

并且　　$IP\perp AB,$

从而　　$OM\perp AB.$

故 M 是 $\widehat{AB}$ 的中点，CM 平分 $\angle ACB$，即 CP 平分 $\triangle ACB$ 的顶角 C。

372. 从圆 O 外一点 P 作圆的切线，其切点为 M、N，则过圆心的线段 PAB 平分由 M、N 划分的共轭弧。

解　连结 OM、ON，由问题 **369**，知

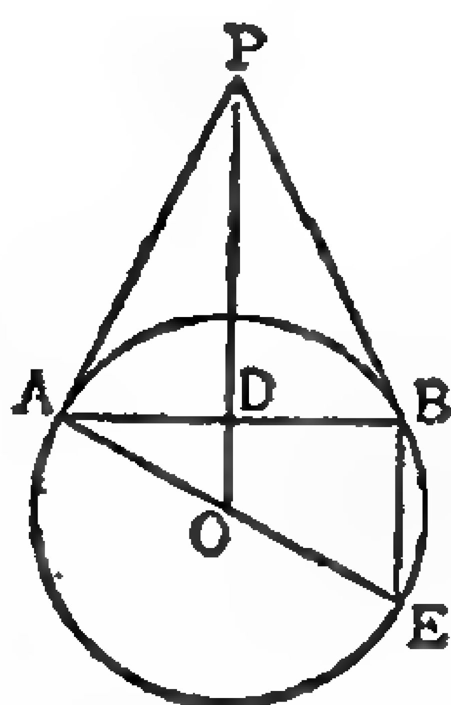
$$\angle MOP=\angle NOP,$$

即　　$\angle MOA=\angle NOA.$

$\therefore\quad \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{AN}$,

从而 $\qquad \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{BN}$.

373. 从圆 O 外一点 P 所作该圆的切线 PA、PB 的夹角，是连结切点的弦 AB 与过点 A 的直径 AE 的夹角的两倍.



解 设 PO 与 AB 的交点为 D，则

$$\angle ADO=\angle ABE=\angle R,$$

$$\therefore\quad OD\parallel BE,$$

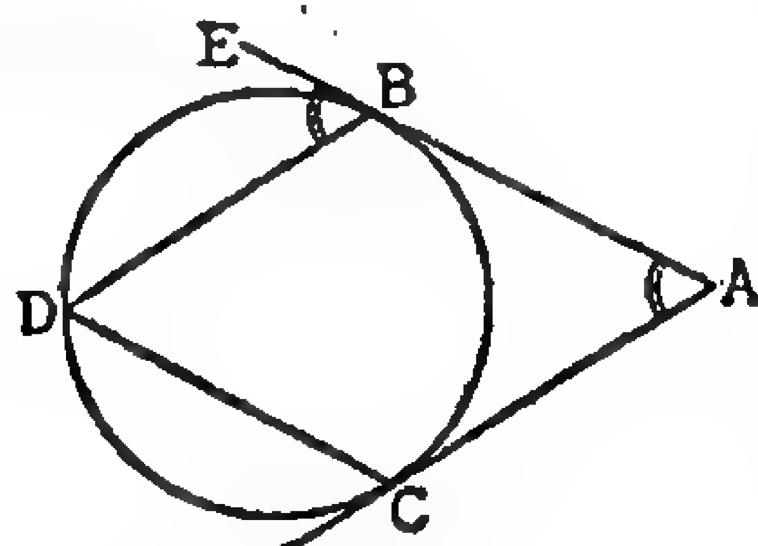
因而 $\angle AOD=\angle AEB$.

但是 $\qquad \angle PAO=\angle R=\angle ABE$,

$$\therefore\quad \angle APO=\angle BAE,$$

故 $\qquad \angle APB=2\angle BAE$.

374. 从圆外一点 A 所作该圆的两切线 AB 及 AC 的夹角 BAC，等于劣弧 BC 与共轭弧 BDC 上的圆周角之差.



解 若过 B 作弦 BD 平行于 AC，则

$$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DC}$$

(问题 **368**).

又 $\quad AC\parallel BD$,

$$\therefore\quad \angle A=\angle EBD.$$

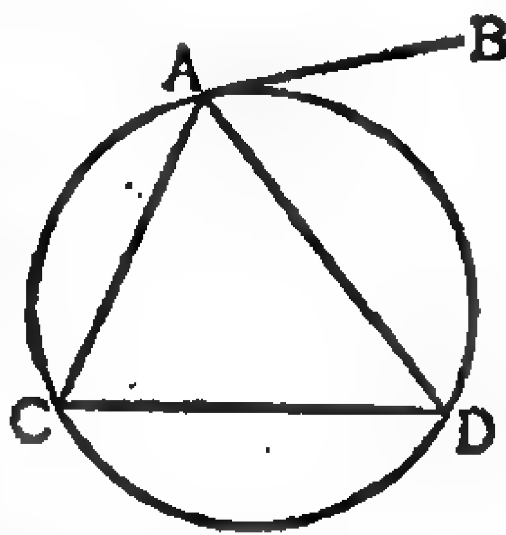
但是 ABE 是过点 B 的切线，所以

$$\angle EBD=\angle BCD,$$

$$\therefore\quad \angle A=\angle BCD.$$

因而 $\angle A$ 等于 $\overset{\frown}{BDC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 之差上的圆周角.

375. 切线 AB 与过切点 A 的弦 AC 的夹角 BAC 的平分线，也平分这个角内的弧.



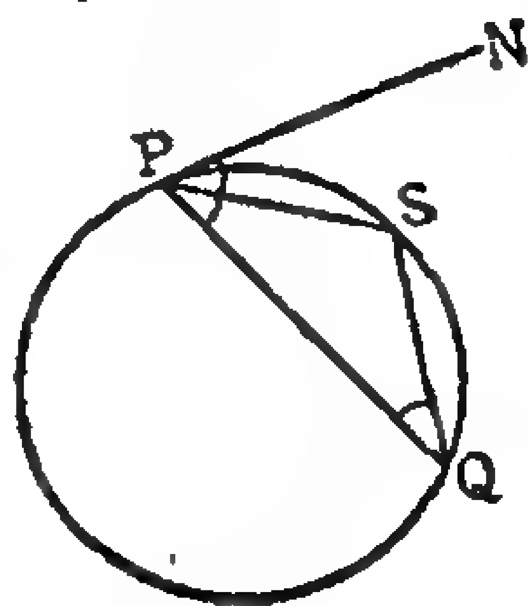
解 设平分 $\angle BAC$ 的直线与弧相交于点 D，连结 DC，则

$$\angle ACD=\angle BAD=\angle CAD,$$

$$\therefore\quad \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD},$$

即 D 是 $\overset{\frown}{ADC}$ 的中点.

376. 若从圆周上一点 P 作圆的切线 PN 和弦 PQ，则该弦所对的弧的中点 S 到切线及弦的距离相等.



解 $\because\quad \overset{\frown}{PS}=\overset{\frown}{QS}$,

$$\therefore\quad 弦\ PS=弦\ QS.$$

于是 $\triangle SPQ$ 是等腰三角形,

$$\therefore\quad \angle SQP=\angle SPQ.$$

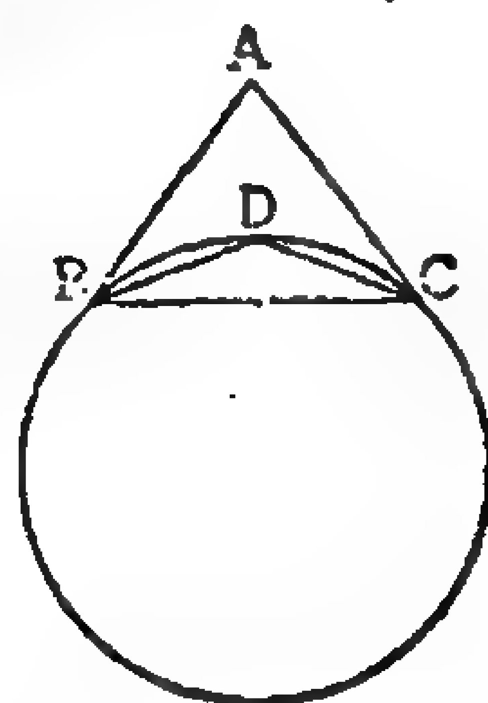
但是 PN 是切线，故

$$\angle NPS=\angle SQP,$$

$$\therefore\quad \angle NPS=\angle SPQ,$$

故 S 到 PN、PQ 的距离相等.

377. 等腰三角形 ABC 的底边 BC 和底角的平分线组成 $\triangle DBC$，它的外接圆与边 AB、AC 相切.

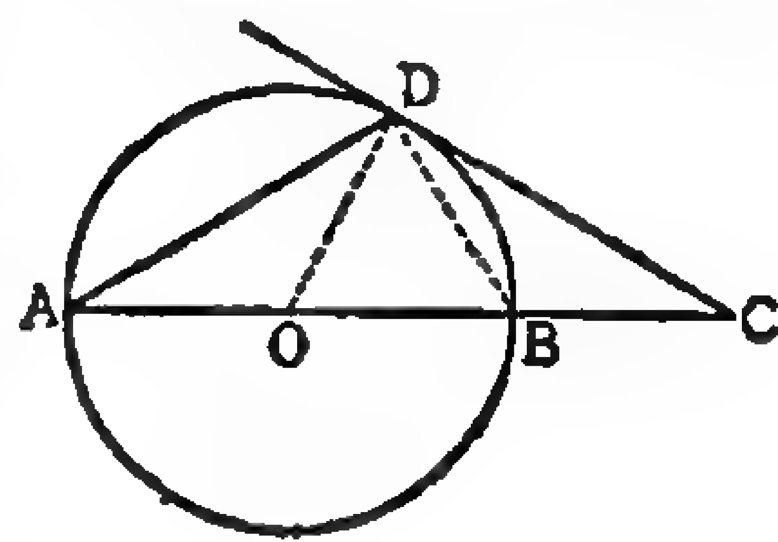


解 $\because\quad AB=AC$,

$$\therefore\quad \angle B=\angle C,$$

从而它们的半角 $\angle DBC$ 和 $\angle ACD$ 也相等. 所以 AC 在点 C 与 $\triangle BDC$ 的外接圆相切. 同样地，AB 在点 B 与 $\triangle BDC$ 的外接圆相切.

378. 若延长圆 O 的直径 AB 到点 C，截取 BC 等于半径 OB，从点 C 作圆的切线 CD，其切点为 D，则 $\triangle DAC$ 是等腰三角形.



解 连结 OD、BD，则

$$OD=OB,$$

而且 $\triangle DOC$ 是直角三角形，B 是斜边 OC 的中点，所以

$$BD=BO,\ \therefore\quad BD=OD.$$

在直角三角形 ABD 和 CDO 中,

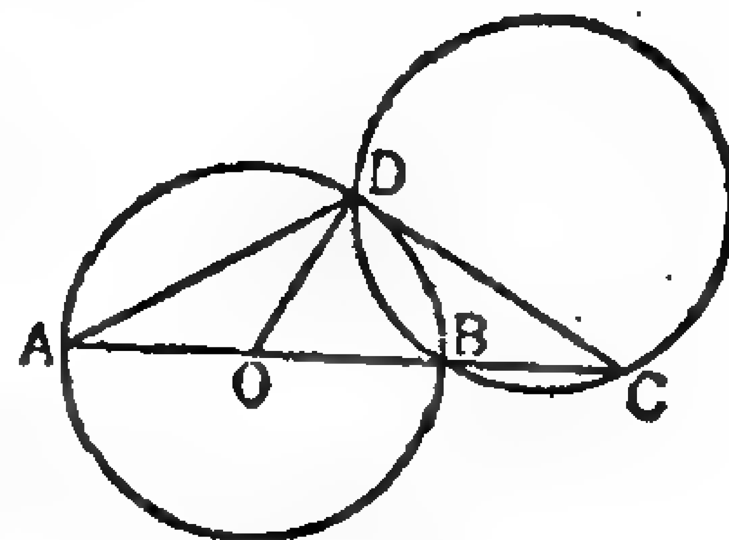
$$AB=OC,\ DB=OD,$$

$$\therefore\quad \triangle ADB\cong\triangle CDO,$$

故 $\qquad DA=DC$.

因而 $\triangle DAC$ 是等腰三角形.

379. 若延长圆 O 的直径 AB 到点 C，截取 $BC=OB$，由 C 作圆 O 的切线 CD，则圆 CBD 与圆 O 相等.



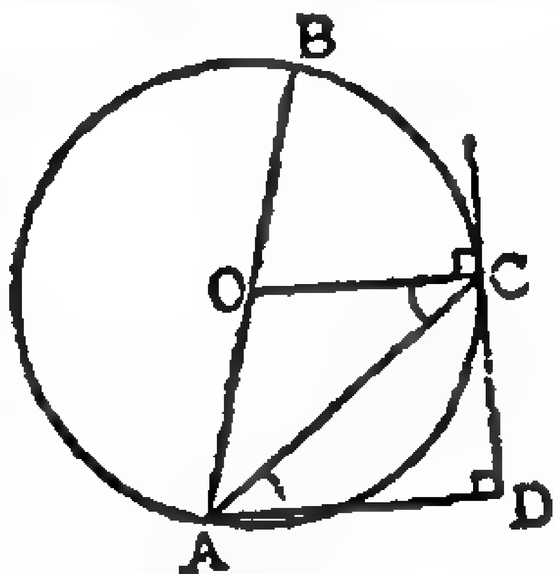
解 $\angle ODC=\angle R$，而且 $OB=BC$,

$\therefore \quad OB=BC=BD,$

且 $\qquad \angle A=\angle BDC=\angle C,$

所以两个三角形 DBA、DBC 的外接圆有一边 BD 是公共的，它所对的 $\angle A$ 和 $\angle C$ 相等，从而这两个圆相等．即圆 CBD 与圆 O 相等。

380. 过圆 O 的圆周上一点 C 作该圆的切线，从直径 AB 的端点 A 作切线的垂线 AD，则 AC 平分 $\angle BAD$。



解 $\because \ OC\perp CD$，$\therefore \ OC\parallel AD$，

于是 $\qquad \angle OCA=\angle CAD.$

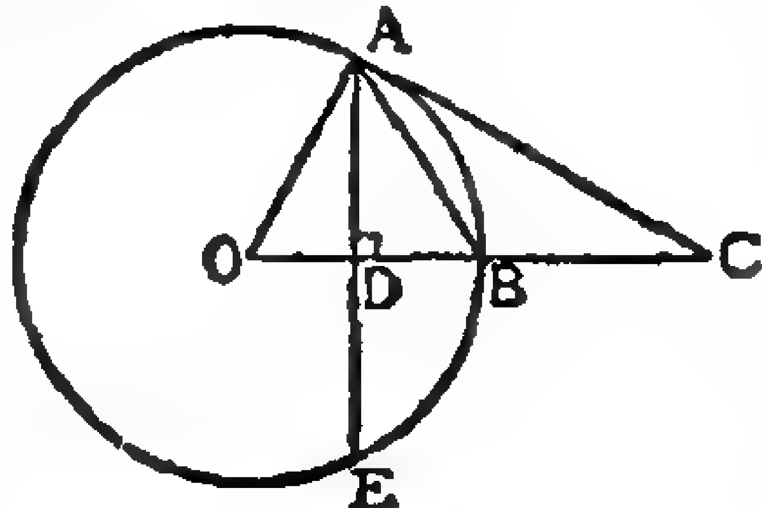
但是 $\qquad OC=OA,$

$\therefore \quad \angle OAC=\angle OCA,$

从而 $\qquad \angle OAC=\angle CAD,$

即 AC 平分 $\angle BAD$.

381. 设 A 是圆 O 的圆周上的一点，它的切线与任意半径 OB 的延长线的交点为 C，过点 A 作 OB 的垂线 AD，则 AB 平分 $\angle DAC$.



解 设 AD 的延长线与圆 O 的交点为 E，则

$$\widehat{AB}=\widehat{BE},$$

$$\therefore \quad \angle BAE=\angle BEA. \qquad ①$$

但是 AC 是切线，所以

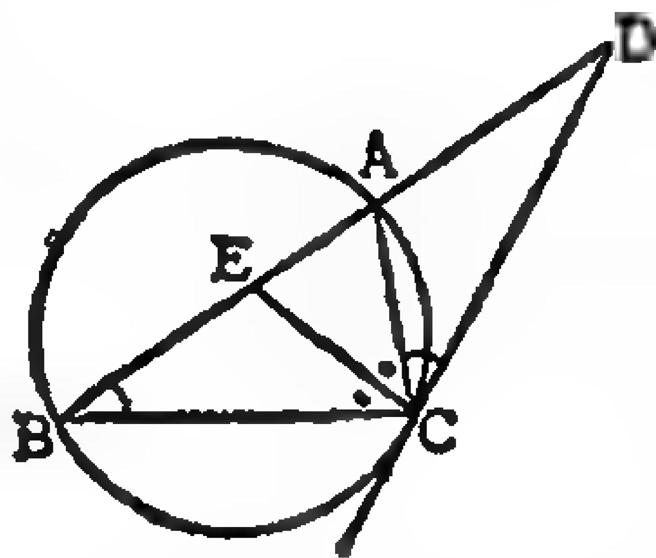
$$\angle CAB=\angle BEA. \qquad ②$$

由①、②，得

$$\angle BAE=\angle CAB,$$

所以 AB 平分 $\angle DAC$.

382. 过 $\triangle ABC$ 的外接圆上的点 C，作切线与 BA 的延长线交于点 D，以 D 为圆心、DC 为半径的圆与 AB 相交于点 E，则 CE 平分 $\angle ACB$.



解

$\because \quad \angle DCE=\angle DEC,$

$\angle DCA=\angle ABC,$

$\therefore \quad \angle DCE-\angle DCA=\angle DEC-\angle ABC.$

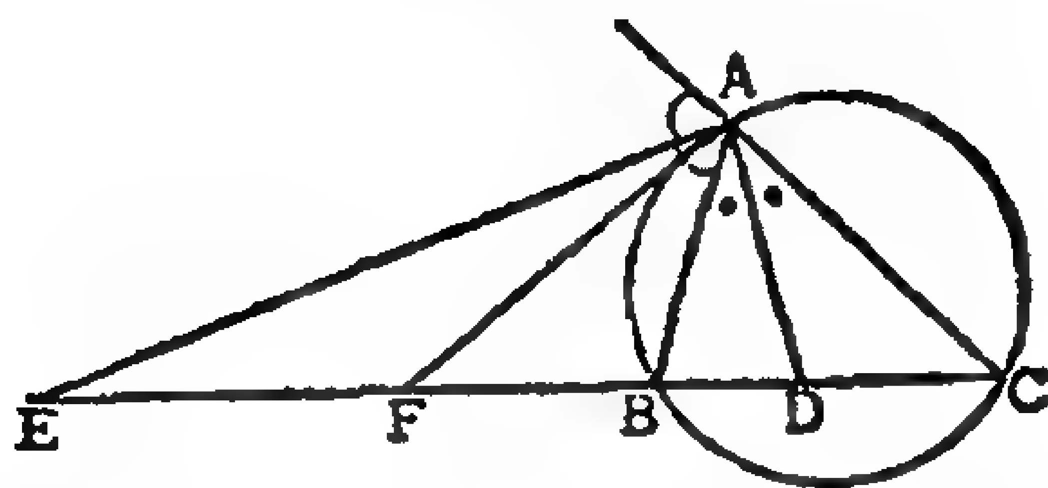
从而 $\qquad \angle ACE=\angle ECB$

($\because \ \angle DEC$ 是 $\triangle BCE$ 的外角)，

即 CE 平分 $\angle ACB$.

383. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 及它的外角的平分线与 BC 的交点分别为 D、E，若外接圆在 A 点的切线 AF 与 CE 的交点为 F，则

$$DF=EF.$$



解 设 AD、AE 分别是 $\angle BAC$ 及其外角的平分线，则

$$\angle DAE=\angle R, \qquad ①$$

而且 $\quad \angle ADF=\angle C+\angle CAD$

$\qquad\qquad =\angle BAF+\angle BAD$

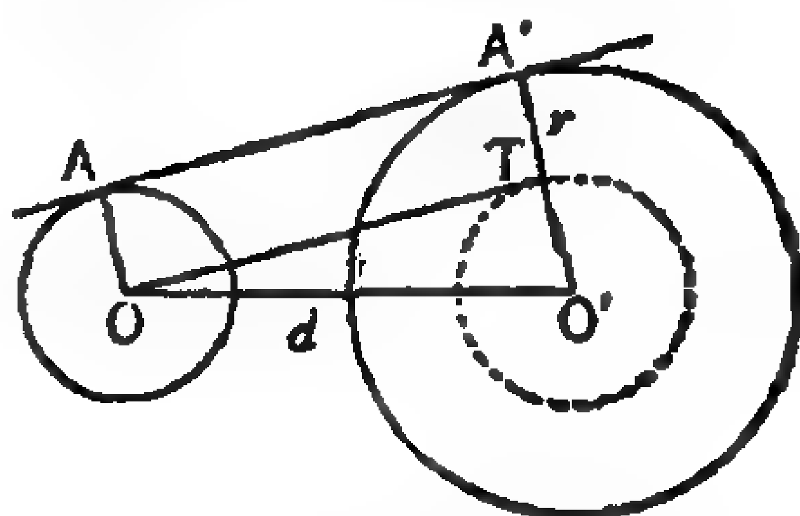
$\qquad\qquad =\angle DAF,$

$$\therefore \quad AF=DF. \qquad ②$$

由①和②，知 F 是 ED 的中点，

即 $\qquad DF=EF.$

384. 设圆 O、O' 的半径分别为 r、r' $(r<r')$，圆心距为 d。若作两圆的公切线 AA'，则 AA' 与 r、r' 及 d 之间有怎样的关系？



解 (i) 当 AA' 是外公切线时，设以 O' 为圆心，$r'-r$ 为半径画圆与 $O'A'$ 的交点为 T，连结 OT，则

$OA \perp\!\!\!= TA'$，

所以

$AA'\parallel OT$.

因而

$\angle OTO'=\angle R,$

$$OT=AA'.$$

从而 $\triangle OO'T$ 是直角三角形，于是

$$OO'^2=OT^2+O'T^2,$$

即 $\qquad d^2=AA'^2+(r'-r)^2.$

$$\therefore \quad AA'^2=d^2-(r'-r)^2,$$

$$AA'=\sqrt{d^2-(r'-r)^2}.$$

(ii) 当 AA' 是内公切线时，设以 O' 为圆心，$r'+r$ 为半径画圆与 $O'A'$ 的延长线相交

于点T，和(i)一样。

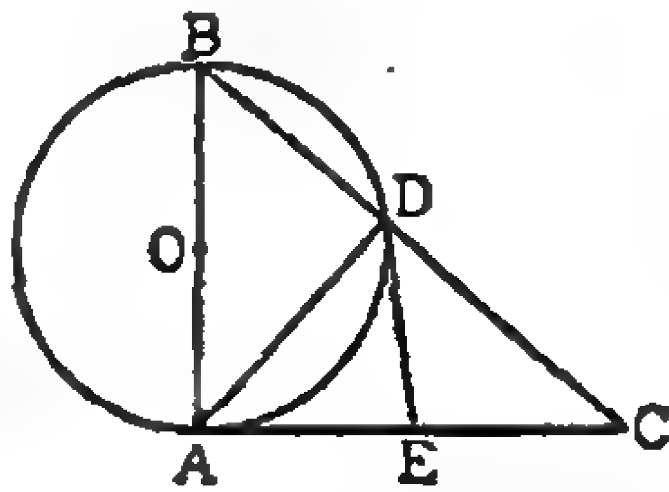
$$\angle OTO'=\angle R,$$
$$OT=AA',$$

所以$\triangle OO'T$是直角三角形，从而有

$$OO'^2=OT^2+O'T^2,$$

于是　$AA'=\sqrt{d^2-(r+r')^2}$.

385. 若以直角三角形ABC的一直角边AB为直径的圆与斜边BC的交点为D，则过点D的切线必过AC的中点E。



解　因AB是圆O的直径，且垂直AE，所以EA是这个圆的切线。因为DE也是这个圆的切线，于是

$$ED=EA,$$
$$\therefore\ \angle DAE=\angle ADE.\qquad ①$$

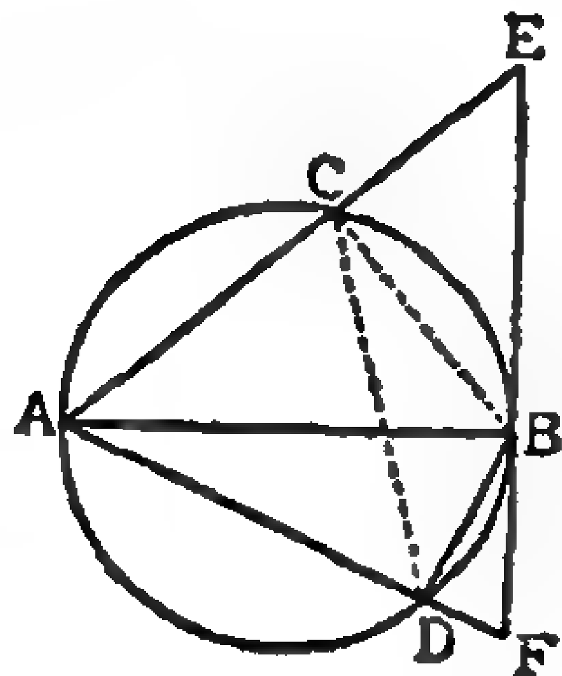
又

$$\angle ADC=\angle R,\qquad ②$$

由①、②，得

$$AE=EC.$$

386. 若从圆的直径AB的一端点A作直线AE、AF，且与另一端点B所作的切线分别相交于E、F，与圆周分别交于C、D，则C、D、F、E四点共圆。



解　因为$\angle ABE=\angle R=\angle ACB$，所以在直角三角形$ABE$中，

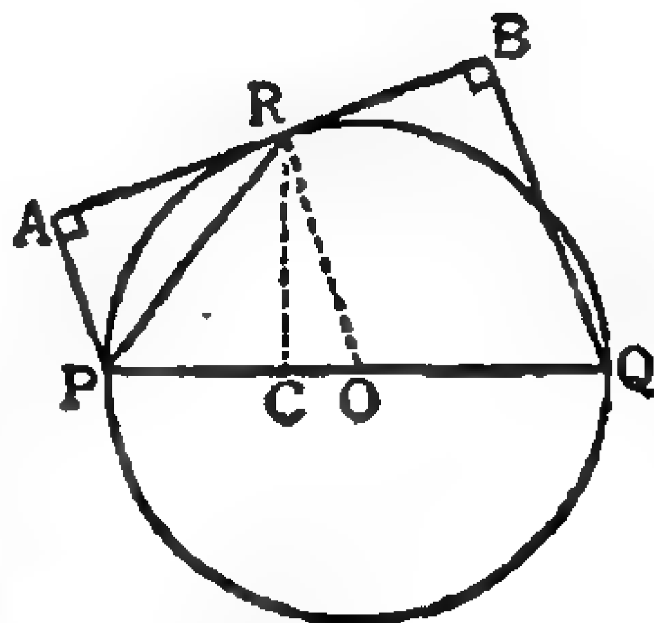
$$\angle E=\angle ABC.$$

但　$\angle ABC=\angle CDA,$

$\therefore\ \angle E=\angle CDA.$

故C、D、F、E四点共圆。

387. 设圆O的直径为PQ，过圆上一点R作该圆的切线，由P、Q向该切线作垂线，其垂足分别为A、B，证明



(1) $RA=RB$；(2) $\angle APR=\angle RPQ$；

(3) 以R为圆心，RA为半径的圆与PQ相切。

解　(1) 连结OR，则$OR\perp AB$，

$$\therefore\ PA\parallel OR\parallel QB.$$
$$\because\ OP=OQ,$$
$$\therefore\ RA=RB.$$

(2) $\because\ PA\parallel OR,$

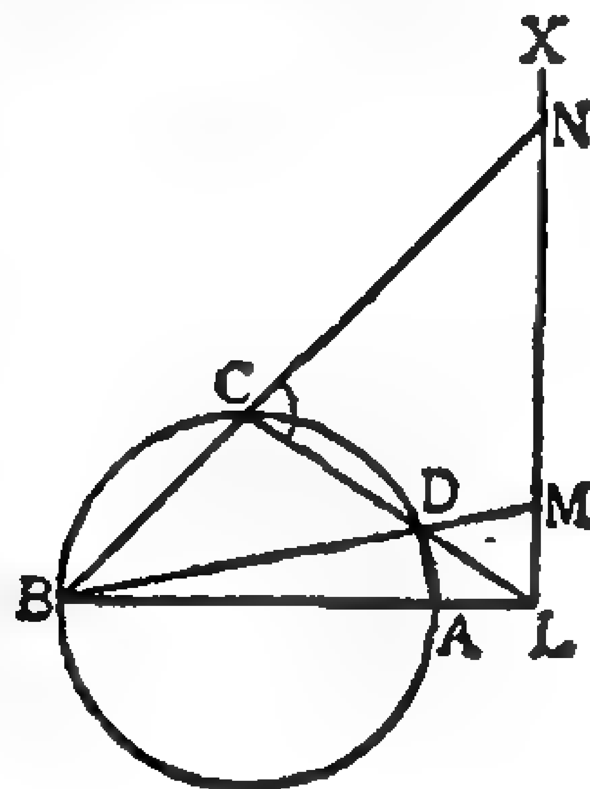
$$\therefore\ \angle APR=\angle PRO=\angle RPQ.$$

(3) 设从R向PQ所作垂线的垂足为C，根据(2)，得

$$RA=RC.$$

因此以R为圆心，RA为半径的圆在点C与直线PQ相切。

388. 若从圆的直径BA的延长线上一点L作任意割线LDC，再作直线LAB的垂线LX，它与BC、BD的延长线的交点分别为N、M，则M、N、C、D四点共圆。



解　连结DA，则在$\triangle BAD$和$\triangle BML$中，$\angle BDA=\angle R=\angle BLM$，$\angle B$公共，

$$\therefore\ \angle BAD=\angle BML.$$

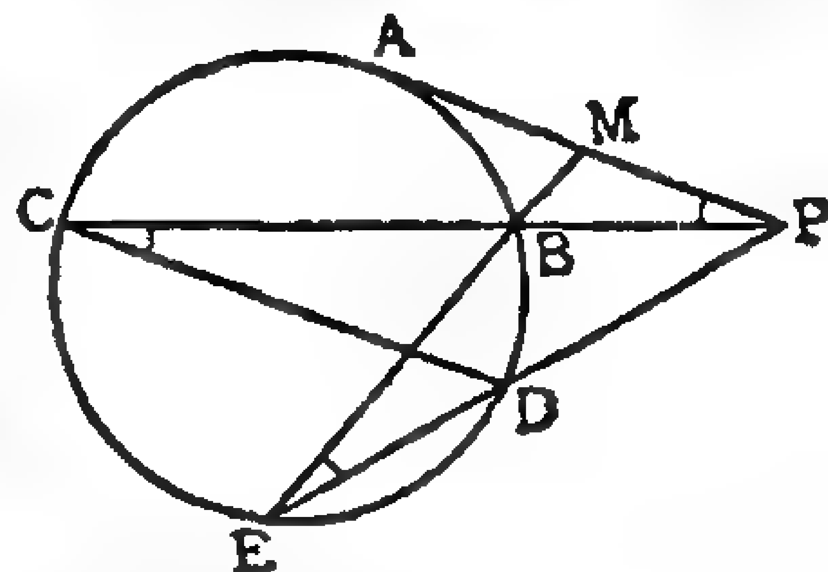
而且$BADC$是圆内接四边形，所以

$$\angle BAD=\angle NCD,$$

于是　$\angle NCD=\angle DML,$

从而四边形$NCDM$是圆内接四边形，即M、N、C、D共圆。

389. 从圆外一点P作该圆的一条切线，其切点为A。过P作一直线与圆相交于B、C，再作AP的平行弦CD，若直线PD与圆的另一交点为E，则直线EB过PA的中点。



解　设EB和PA的交点为M。

$$PA\parallel CD,$$

所以　$\angle C=\angle MPB.$

并且　$\angle C=\angle E,$

$$\therefore\ \angle E=\angle MPB.$$

于是过三点E、B、P的圆与MP相切于点P，从而

$$MP^2=MB\cdot ME.\qquad ①$$

又因MA是切线，所以

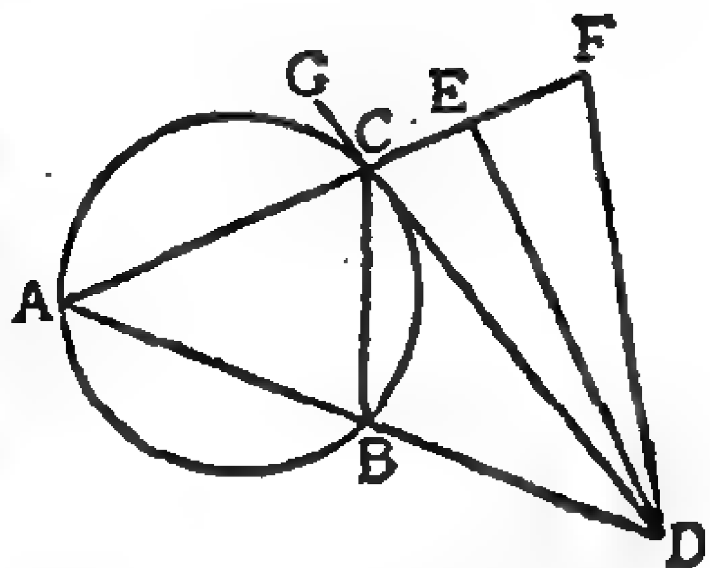
$$MA^2=MB\cdot ME.\qquad ②$$

于是由①、②，得

$$MP=MA,$$

故 M 是 PA 的中点.

390. 若从圆周上一点 A 作两条相等的弦 AB、AC，过点 C 作该圆的切线和 AB 相交于点 D，由 D 向 AC 或它的延长线作垂线 DE，则



$$BD=2CE.$$

解 延长 CE 到 F，使 $EF=CE$. 连结 DF，则

$$\triangle DEC\cong\triangle DEF,$$

$$\therefore\quad \angle DCF=\angle DFC.$$

$$\because\quad \angle GCA=\angle ABC,$$

由 $AB=AC$，知

$$\angle ACB=\angle ABC,$$

于是 $\qquad \angle ACB=\angle ACG.$

又 $\qquad \because\ \angle FCD=\angle ACG,$

$$\therefore\quad \angle ACB=\angle ACG=\angle DCF=\angle DFC.$$

从而 $\qquad BC\parallel DF.$

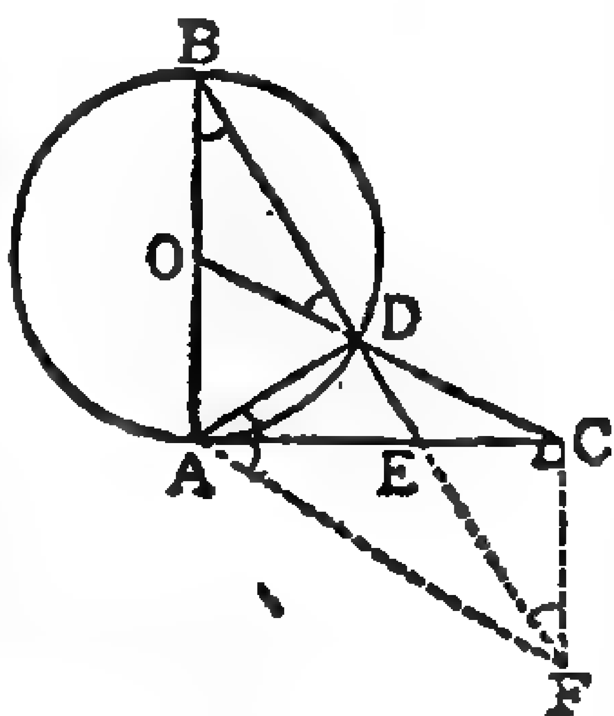
又由于 $\qquad AB=AC,$

所以 $\qquad AF=AD,$

于是 $\qquad BD=FC.$

即 $\quad BD=2CE.$

391. 若圆 O 的直径为 AB，在点 A 与圆相切的直线上截取 $AC=AB$，连结 OC，OC 与圆 O 相交于点 D，延长 BD 与 AC 相交于点 E.



证明

(1) CD 是 $\triangle ADE$ 的外接圆的切线；

(2) $AE=CD$.

解 (1) 因为 $\angle CDE=\angle ODB=\angle OBD=\angle DAC$，因此 CD 是 $\triangle ADE$ 的外接圆的切线.

(2) 过点 C 作 AC 的垂线与 BE 相交于点 F，则 C、D 在以 AF 为直径的圆周上，所以

$$\angle CAF=\angle CDF=\angle ODB$$
$$=\angle OBD=\angle ABE.$$

又因 $\qquad CA=AB,$

$$\angle ACF=\angle R=\angle BAE,$$

$$\therefore\quad \triangle ACF\cong\triangle BAE,$$

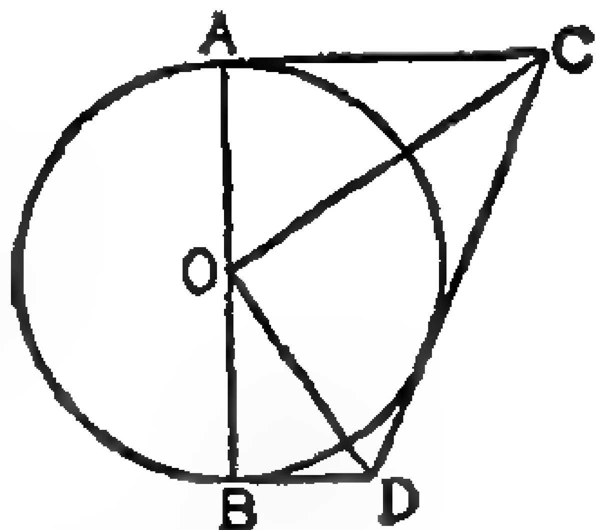
于是 $\qquad CF=AE.$

又 $\quad \because\ \angle CFD=\angle CAD=\angle CDF,$

$$\therefore\quad CF=CD,$$

故 $\quad AE=CD.$

392. 设过圆 O 直径 AB 的两端点 A 和 B 所作圆的切线与圆的任意切线相交于 C、D，则



$$\angle COD=\angle R.$$

解 因 CA、CD 是切线，所以 CO 平分 $\angle ACD$，同样，DO 平分 $\angle BDC$.

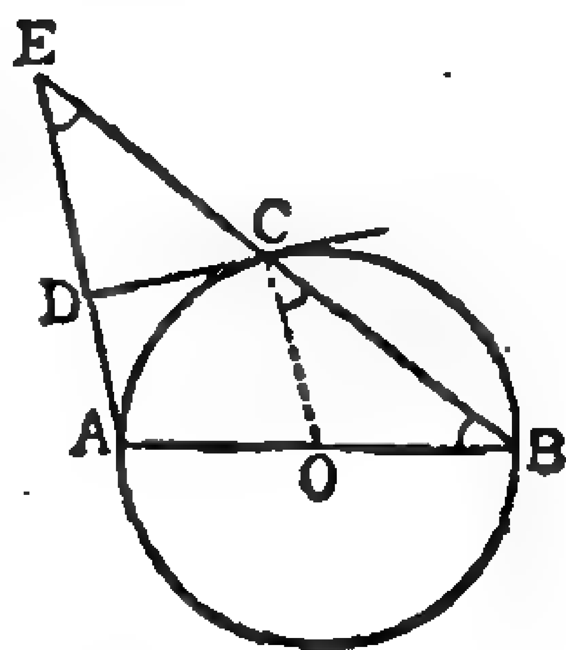
又 $\qquad \because\ AC\parallel BD,$

$$\therefore\quad \angle ACD+\angle BDC=2\angle R,$$

于是 $\qquad \angle OCD+\angle ODC=\angle R,$

故 $\quad \angle COD=\angle R.$

393. 设 AB 为圆 O 的直径，由端点 A 作过圆上一点 C 的切线的垂线 AD，其垂足为 D，延长 AD、BC 相交于 E，则 $AE=AB$.



解 因为 DC 是切线，所以 $DC\perp OC$.

$$\because\quad DC\perp AE,$$

$$\therefore\quad OC\parallel AE,$$

于是 $\qquad \angle OCB=\angle AEB.$

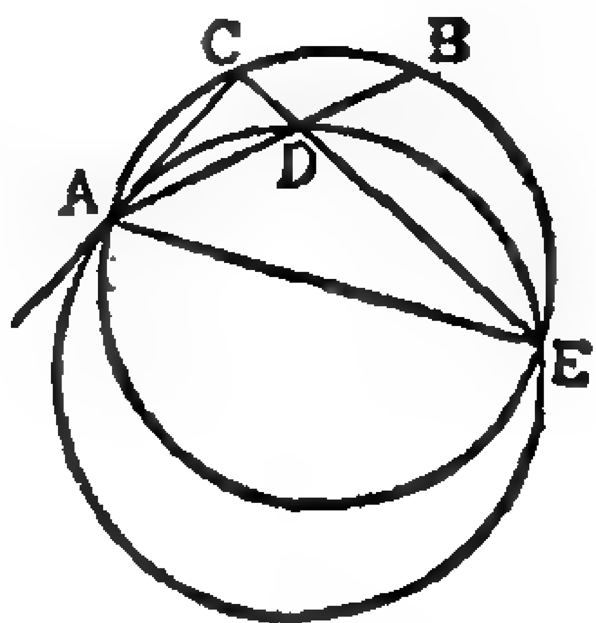
但 $\qquad OB=OC,$

所以 $\qquad \angle OBC=\angle OCB.$

从而 $\quad \angle AEB=\angle OBC=\angle ABE,$

故 $\quad AE=AB.$

394. 若过 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 C 的直线与弦 AB 相交于点 D，且与 $\overset{\frown}{AB}$ 的共轭弧相交于点 E，则直线 AC 是过三点 A、D、E 的圆的切线.



解 因为 C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，所以

$$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB},$$

于是在 $\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{CB}$ 上的两圆周角相等，即

$$\angle AEC=\angle CAB.$$

因此，AC 是与圆 ADE 相切于点 A 的直线.

395. 设圆 O 的直径为 AB，从圆周上一点 P 作 AB 的垂线，其垂足为 H，从点 A 向过点 P 的切线作垂线，其垂足为 K，则

$AH=AK$。

解 ∵ $\angle APB=\angle R$,

$PH\perp AB$,

∴ $\angle APH$

$=\angle ABP$。

又因为 PK 是切线，所以

$\angle ABP=\angle APK$,

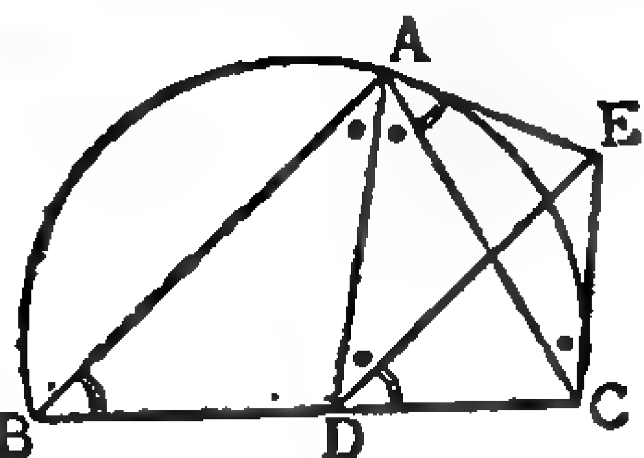
于是

$\angle APH=\angle APK$。

因此 $\triangle APH\cong\triangle APK$（一边和两角），

故 $AH=AK$。

396. 在圆内接三角形 ABC 中，$\angle BAC$ 的平分线与 BC 相交于点 D，从点 D 作 AB 的平行线，与过点 A 的切线相交于点 E，则 CE 平行 AD。



解 因为 AE 是切线，所以 $\angle EAC=\angle B$。

又 ∵ $DE\parallel AB$,

∴ $\angle B=\angle EDC$,

于是 $\angle EAC=\angle EDC$。

因而 $ADCE$ 是圆内接四边形，

∴ $\angle ACE=\angle ADE$。

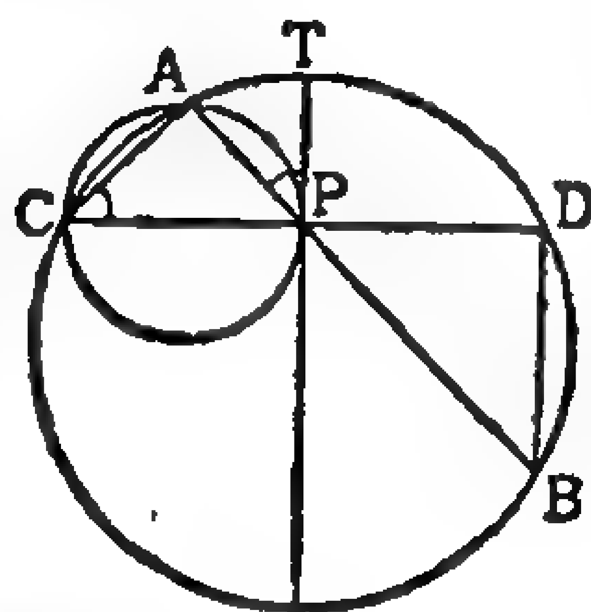
又因为 $DE\parallel AB$，且 AD 是 $\angle A$ 的平分线，所以

$\angle ADE=\angle BAD=\angle DAC$,

于是 $\angle ACE=\angle DAC$,

从而 $CE\parallel AD$。

397. 设圆内相交两弦 AB、CD 的交点为 P，作过 A、P、C 三点的圆的切线 PT，则 $PT\parallel BD$。



解 因 PT 是切线，所以

$\angle APT=\angle ACP$。

又因同弧上的圆周角相等，所以

$\angle ACP=\angle ABD$,

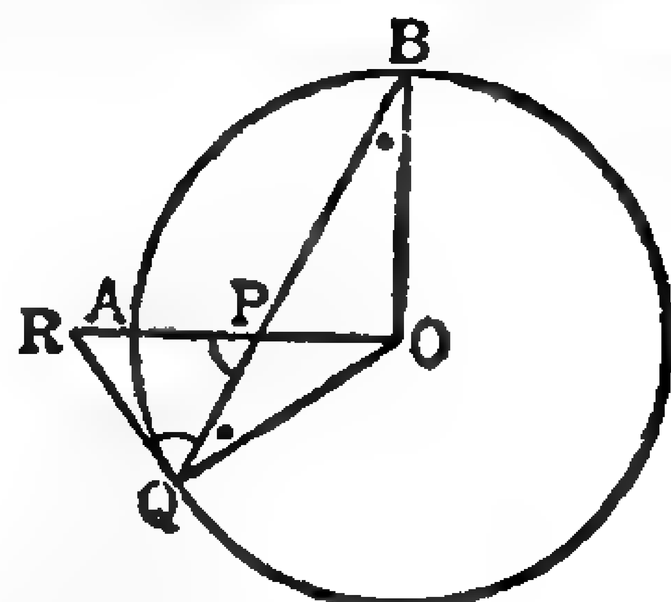
∴ $\angle APT=\angle ABD$,

于是 $PT\parallel BD$。

398. 若从圆周上的点 A 作两弦 AB、AC，又作直线 BD 平行于过点 A 的切线 AE 且与 AC 或者 AC 的延长线相交于点 D，则圆 BDC 与 AB 相切。

解 因为 AE 是切线，所以

$\angle EAB=\angle ACB$。 ①



又 ∵ $EA\parallel BD$,

∴ $\angle EAB$

$=\angle ABD$。②

于是由①、②，得

$\angle ABD=\angle ACB$,

因此圆 BDC 在点 B 与 AB 相切。

399. 若半径 OA、OB 互相垂直，P 是 OA 上的任意一点，过 P 作弦 BPQ，过点 Q 的切线与 OA 的延长线相交于点 R，则 $\triangle RPQ$ 是等腰三角形。

解 因为 QR 是切线，所以

$\angle OQR=\angle R=\angle POB$

$=(\angle OPB+\angle OBP)$。

又 ∵ $OB=OQ$,

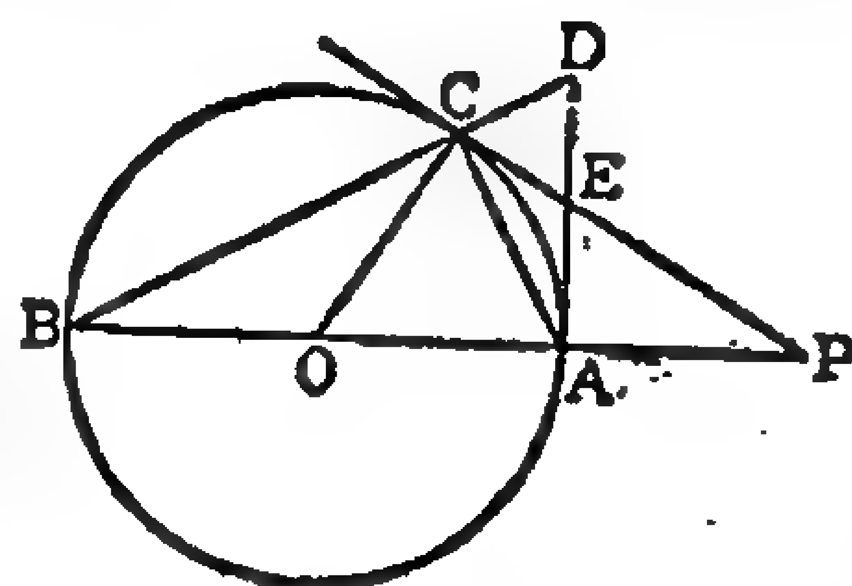
∴ $\angle OQP=\angle OBP$,

于是 $\angle OQR-\angle OQP=\angle OPB$,

即 $\angle RQP=\angle RPQ$。

所以 $\triangle RPQ$ 是等腰三角形。

400. 设延长圆的直径 BA 到点 P，使 AP 等于半径 OA，过点 A 的切线与从点 P 所作切线 PC（C 为切点）相交于点 E，连结 BC，且延长与 AE 的延长线相交于点 D，则 $\triangle DEC$ 是正三角形。



解 因为 A 是直角三角形 OPC 的斜边 OP 的中点，所以

$AO=AP=AC$。

又 ∵ $OA=OC$,

∴ $OA=AC=CO$,

于是 $\triangle OAC$ 是正三角形。又因为

$OB=OC$,

而且 $\angle COA=60°$,

∴ $\angle B=30°$。

又 ∵ $\angle BAD=\angle R$,

$\therefore\quad \angle D=60°.$ ①

其次，因为 CP 是切线，所以

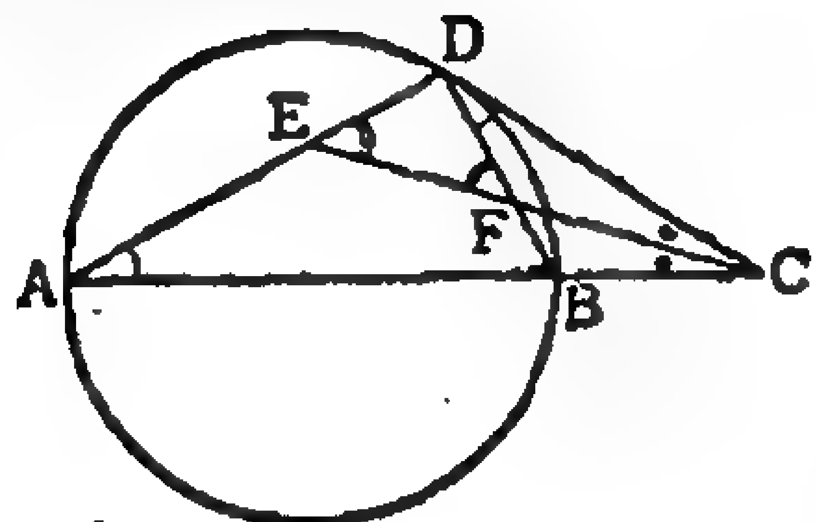
$$\angle ECA=\angle B=30°.$$

而且 $\angle DCA=\angle R,$

$\therefore\quad \angle DCE=60°.$ ②

由①、②，得 $\triangle DCE$ 是正三角形。

401. 从直径 AB 的延长线上一点 C 作该圆的切线 CD，切点为 D，若 AD 和 $\angle ACD$ 的平分线的交点为 E，则



$$\angle CED=\frac{1}{2}\angle R.$$

解 设 EC 和 DB 的交点为 F，在 $\triangle EAC$ 和 $\triangle FDC$ 中，因 CD 是切线，所以

$$\angle EAC=\angle FDC.$$

而且 $\angle ACE=\angle DCF,$

$\therefore\quad \angle AEC=\angle DFC,$

因此 $\angle DEF=\angle DFE.$

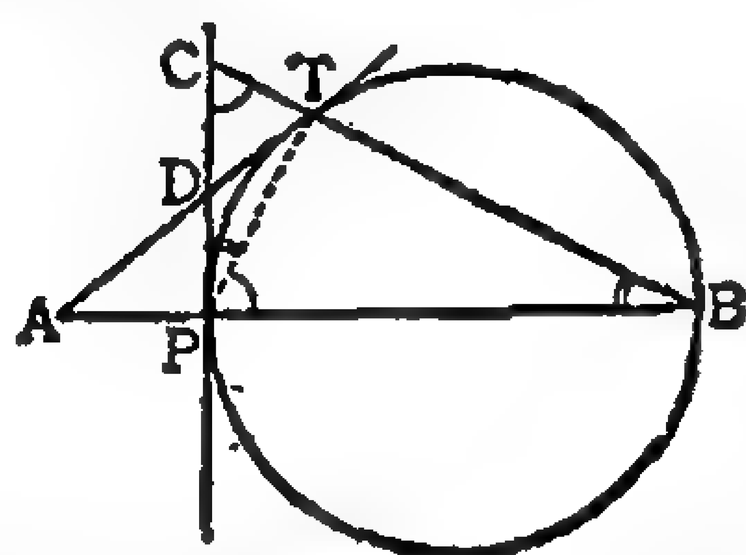
而 $\angle ADB=\angle R,$

所以 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形。

$$\therefore\quad \angle DEF=\frac{1}{2}\angle R,$$

即 $$\angle CED=\frac{1}{2}\angle R.$$

402. 若在线段 AB 上取一点 P，从点 A 作以 BP 为直径的圆的一切线，其切点为 T。两直线 AT、BT 与过点 P 的切线的交点分别为 D、C，则 $\triangle DTC$ 是等腰三角形。又这个三角形是正三角形时，求线段 AP、BP 的比值。



解 因为 $\triangle PTC$ 是直角三角形，且 DT、DP 是切线，所以，

$$DP=DT,$$

故 D 是斜边 PC 的中点。从而 $DC=DT$，因此 $\triangle DTC$ 是等腰三角形。为使这个三角形构成正三角形，只需

$$\angle DTC=60°.$$

因而 $\angle ATP=30°,$

$$\angle PBT=\angle ATP=30°,$$

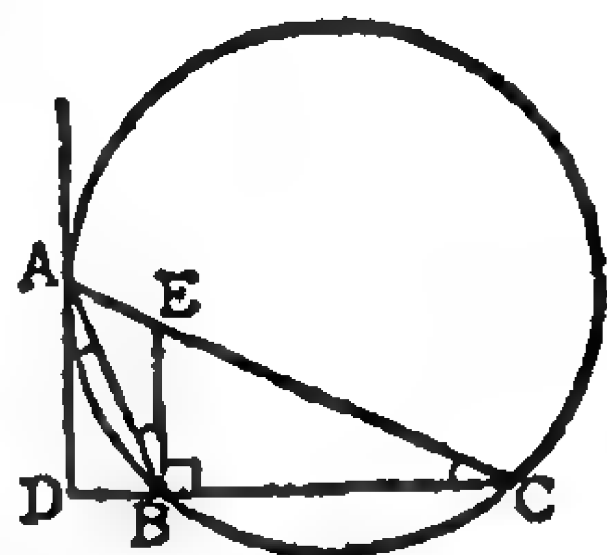
$$\angle BTP=\angle R,$$

所以 $\angle BAT=30°.$

$$PA=PT=\frac{1}{2}BP,$$

$$\therefore\quad AP:BP=1:2.$$

403. 若三角形的两底角之差为直角，则过其顶点所作这个三角形外接圆的切线必垂直于底边。



解 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle B=\angle C+\angle R$，过点 A 的 $\triangle ABC$ 外接圆的切线与 CB 相交于点 D，则

$$\angle DAB=\angle ACB,$$

又过 B 作 BC 的垂线 BE，则

$$\angle ABE=\angle ACB\ (假设),$$

$\therefore\quad \angle DAB=\angle ABE,$

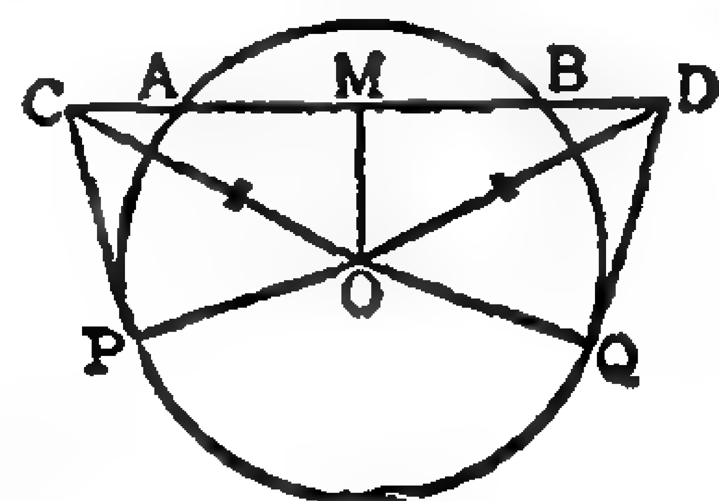
故 $AD\parallel BE.$

但 $BE\perp DC,$

所以 $AD\perp BC.$

404. 若把圆的弦 AB 向两边延长分别到点 C、D，使 $AC=BD$，则从 C、D 向这个圆所作的两切线 CP、DQ 必相等。

解 因 $AC=BD$，所以 AB 的中点 M 是 CD 的中点，而且



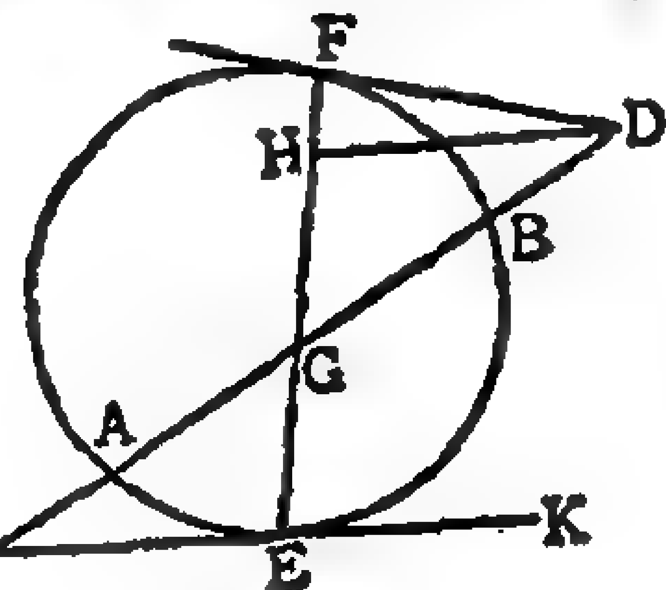
$OM\perp CD,$

$\therefore\quad OC=OD.$

又因 $\triangle OCP$ 和 $\triangle ODQ$ 都是直角三角形，斜边和它的一直角边都分别相等，所以它们全等。故

$$CP=DQ.$$

405. 把弦 AB 向两端延长到 C、D，使 $AC=BD$，从 C、D 分别作 AB 异侧弧的切线 CE、DF，则 EF 平分 AB。



解 设 EF 和 AB 的交点为 G，过 D 作 CE 的平行线与 EF 的交点为 H，则 $\triangle CEG$ 与 $\triangle DHG$ 相似，若 CE 的延长线为 EK，则 EK、FD 都是切线，所以

$$\angle KEF=\angle DFE.$$

又因为 $EK\parallel DH$，所以

$$\angle KEF=\angle DHF,$$

于是　$\angle DFE=\angle DHF,$

从而　$DF=DH.$

但是 $DF=CE$（根据上题），

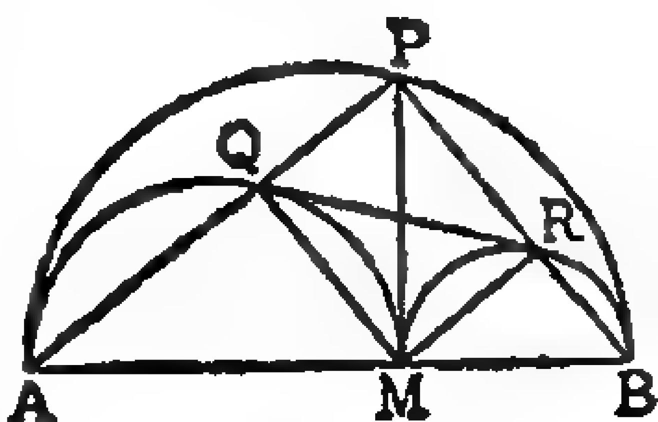
$$\therefore\quad CE=DH,$$

$$\triangle CEG\cong\triangle DHG,$$

$$CG=DG,$$

所以　$AG=BG$ ($\because AC=BD$).

406. 若由直径为 AB 的半圆周上的任意一点 P 所作 AB 的垂线为 PM，以 AM、BM 为直径画半圆，与 PA、PB 的交点分别是 Q、R，则 QR 是所画两半圆的公切线。



解　连结 MQ、MR，则四边形 $PQMR$ 是矩形，可画外接圆，

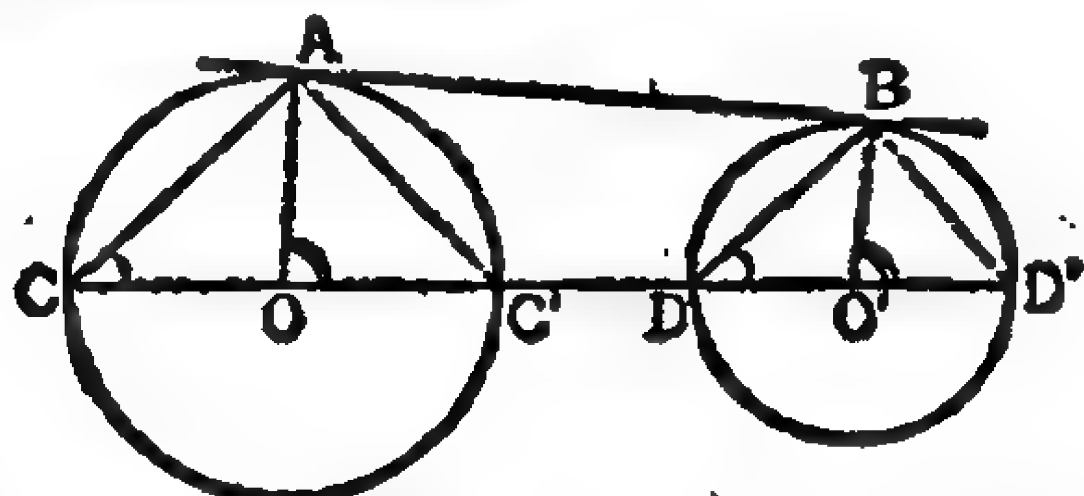
$$\therefore\quad \angle MQR=\angle MPR.$$

$$\because\quad \angle MPR=\angle MAP,$$

$$\therefore\quad \angle MQR=\angle MAP.$$

所以 QR 是半圆 AQM 在点 Q 的切线。同样，RQ 是半圆 MRB 在点 R 的切线，即 QR 是公切线。

407. 两圆公切线的切点，两圆连心线与两圆周的交点，分别连结这些点的线段是互相平行还是互相垂直？



解　设两圆的圆心为 O、O'，直线 OO' 与两个圆周的交点顺次为 C、C'，D、D'，则 OA、$O'B$ 都是 AB 的垂线。

$$\therefore\quad OA\parallel O'B,\ \angle AOC'=\angle BO'D'.$$

但是 $\triangle AOC$, $\triangle BO'D$ 都是等腰三角形，所以

$$\angle C=\frac{1}{2}\angle AOC',\ \angle D=\frac{1}{2}\angle BO'D',$$

$$\therefore\quad \angle C=\angle D,\ AC\parallel BD.$$

同样，　$AC'\parallel BD'.$

因为　$\angle CAC'=\angle R,$

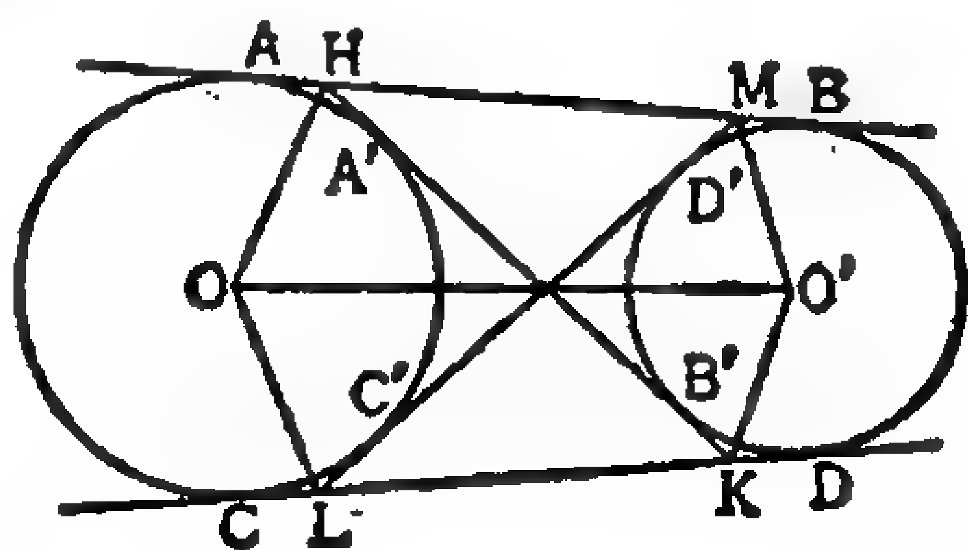
所以　$AC'\perp AC.$

$$\because\quad BD\parallel AC,$$

$$\therefore\quad AC'\perp BD.$$

同样，　$BD'\perp AC.$

408. 若两圆的外公切线与内公切线相交于四点，则这四点与这两圆的圆心都在同一圆周上。



解　设圆 O、O' 的外公切线为 AB、CD，内公切线为 $A'B'$、$C'D'$，它们的交点为 H、M、K、L，连结 OO'、OH，则

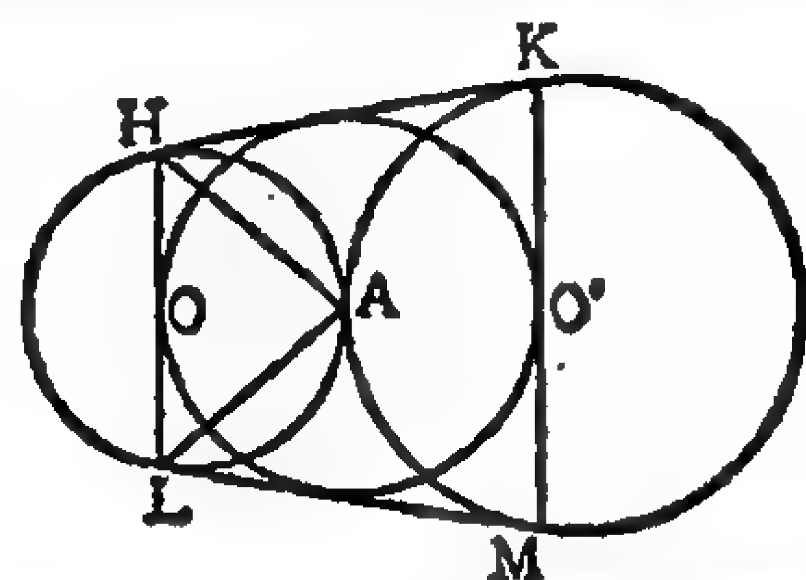
$$\angle AHO=\angle OHB',$$

$$\angle B'HO'=\angle O'HB,$$

$$\therefore\quad \angle OHO'=\angle R,$$

于是 H 在以 OO' 为直径的圆周上。对于 M、K、L 有同样的结果。所以 H、M、K、L 在 OO' 为直径的圆周上。

409. 若两外切圆的两外公切线的切点分别是 H、K、L、M，则四边形 $HKML$ 为一圆的外切四边形。



解　因为 HK、ML 的夹角的平分线过 O、O'，且垂直平分 HL、KM（问题369），所以过两圆的公切点 A，于是

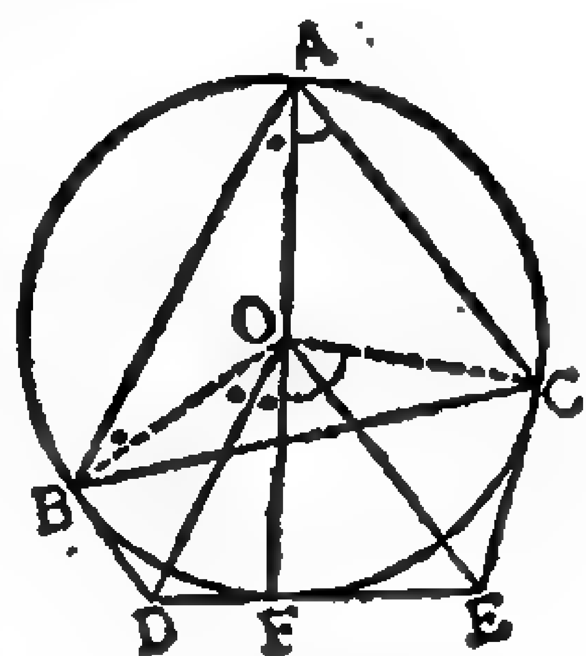
$$\angle AHL=\angle ALH.$$

又　$\because\quad \angle ALH=\angle KHA,$

$$\therefore\quad \angle AHL=\angle KHA.$$

同样，AK、AM、AL 分别平分 $\angle HKM$、$\angle KML$、$\angle MLH$，所以 A 到四直线 HK、HL、LM、MK 的距离相等。故以 A 为圆心可以画出这个四边形的内切圆。

410. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，由点 O 所作 AB、AC 的平行线与过点 B、C 的切线分别相交于 D、E，则 DE 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切。



解　过点 A 作直径 AF，若连结 FD、FE，则在 $\triangle OBD$、$\triangle OFD$ 中，

$$OD \parallel AB,$$

$$\therefore\ \angle ABO=\angle BOD,$$

$$\angle BAO=\angle DOF.$$

但 $OA=OB$,

$$\therefore\ \angle ABO=\angle BAO,$$

于是 $\angle BOD=\angle DOF$.

又因 $OB=OF$, OD 公共,

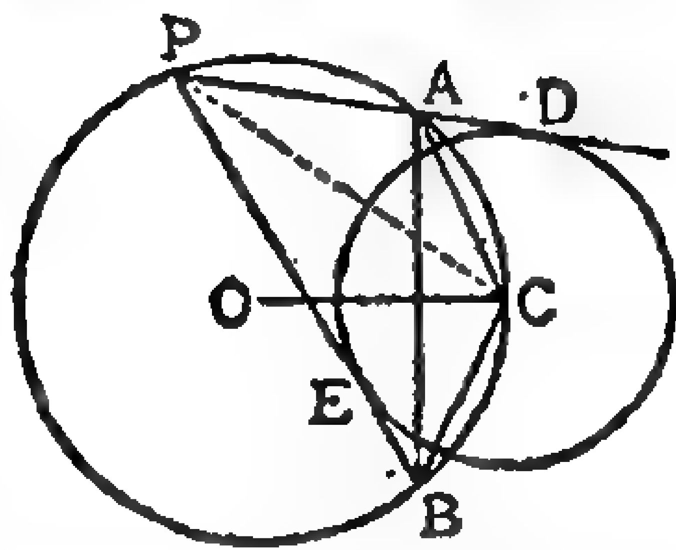
$$\therefore\ \triangle OBD\cong\triangle OFD,$$

从而 $\angle OFD=\angle OBD=\angle R$.

同样, $\angle OFE=\angle R$,

从而 D、F、E 在一直线上, DE 与圆 O 在点 F 相切.

411. 以圆 O 上的定点 C 为圆心画圆, 从圆 O 上的点 P 向圆 C 作两条切线与圆 O 相交于 A、B, 则不管点 P 的位置如何, AB 都有固定的方向.



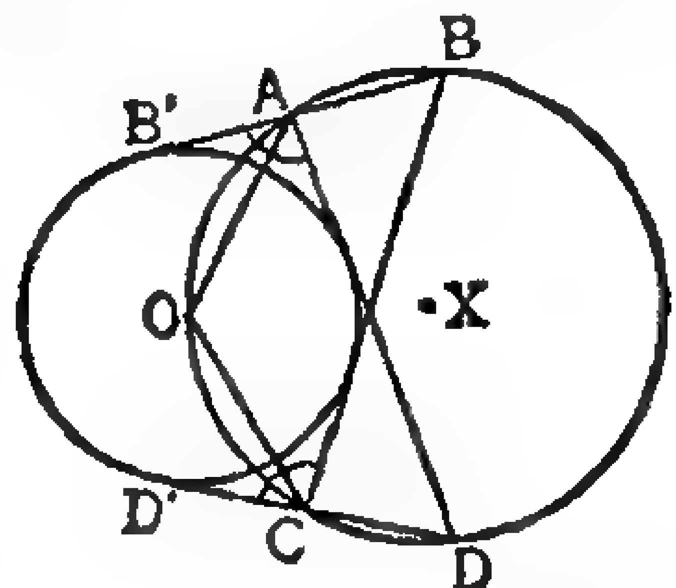
解 因为 PA、PB 是圆 C 的切线, 所以 PC 平分 $\angle APB$, 从而

$$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC},$$

$$\therefore\ AB\perp OC.$$

而 CO 是定直线, AB 是垂直 CO 的, 所以常有固定的方向.

412. 过圆 O 外一点 A 和圆心 O 作任意圆 X, 由点 A 作圆 O 的切线 AB' 和圆 X 的交点为 B, 由 B 作圆 O 的另一条切线和圆 X 的交点为 C, 再由点 C 作圆 O 除 BC 以外的切线和圆 X 的交点为 D, 则直线 AD 与圆 O 相切.



解 设 AB、CD 与圆 O 相切的切点分别为 B'、D', 则四边形 $ABCO$ 是圆内接四边形, 所以

$$\angle B'AO=\angle OCB.$$

但是 $\angle OCB=\angle OCD'$

(CB、CD' 是圆 O 的切线), 于是

$$\angle B'AO=\angle OCD'.$$

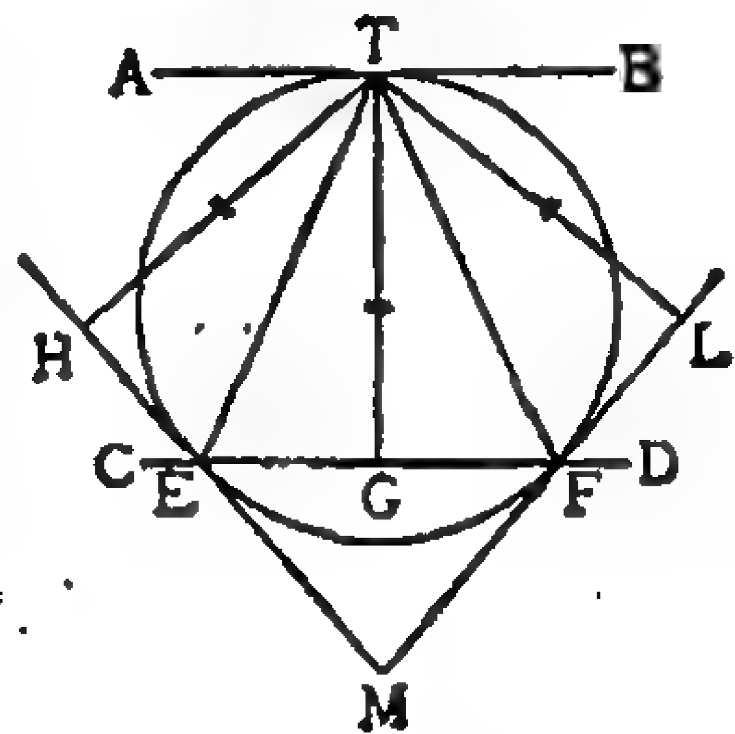
又因四边形 $AOCD$ 是圆内接四边形, 所以

$$\angle OCD'=\angle OAD,$$

$$\therefore\ \angle B'AO=\angle OAD.$$

因 AB' 与圆 O 相切, 故 AD 与圆 O 相切.

413. AB、CD 是两条给定的平行线, 若任意圆切于 AB 上的定点 T, 且与 CD 交于点 E、F, 则过点 E、F 所作这个圆的切线都和定圆相切.



解 因为

$$EF\parallel AB,$$

T 是切点, 所以

$$TE=TF,$$

于是 $\angle TEF=\angle TFE$.

设过点 E 的切线和过点 F 的切线的交点为 M, 由点 T 向 ME、CD 所作的垂线分别为 TH、TG, 则在 $\triangle TEH$、$\triangle TEG$ 中

$$\angle TEH=\angle TFE=\angle TEF,$$

$$\angle THE=\angle R=\angle TGE.$$

而且 TE 公共,

$$\therefore\ \triangle TEH\cong\triangle TEG,$$

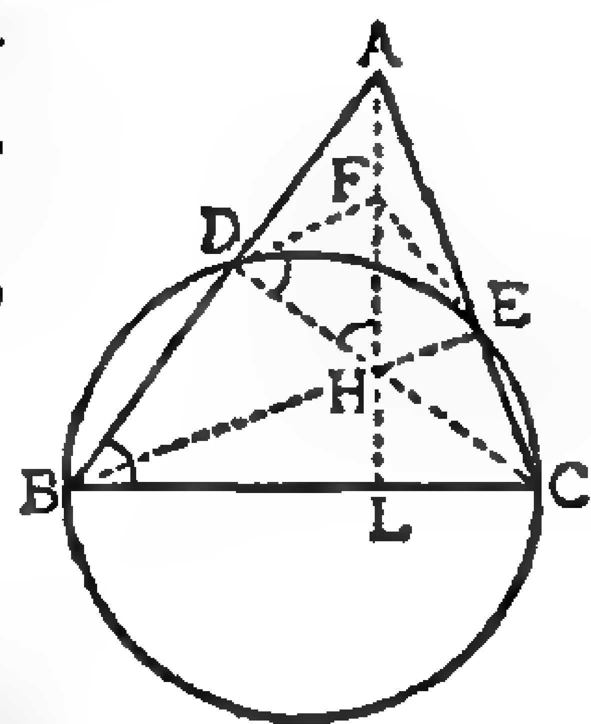
于是 $TH=TG$.

同样, 设由点 T 向过点 F 的切线所作的垂线为 TL, 则

$$TL=TG.$$

而 T 是定点, TG 是定长线段, 所以这个圆在点 E、F 的切线, 与以 T 为圆心, TG 为半径的定圆相切.

414. 设以锐角三角形 ABC 的底边 BC 为直径所作的圆, 与边 AB、AC 的交点分别是 D、E, 过 D、E 的切线的交点为 F, 则直线 AF 过 BE 和 CD 的交点 H.



解 因为 $CD\perp AB$,

$$BE\perp AC,$$

所以 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 因此如果延长 AH 与 BC 的交点为 L, 则 $AL\perp BC$. 若过点 D 的切线与 AH 交于点 F', 则

$$\angle F'DC=\angle DBC. \qquad ①$$

又因为 D、H、L、B 四点共圆, 所以

$$\angle DBC=\angle DHA. \qquad ②$$

由 ①、②, 得

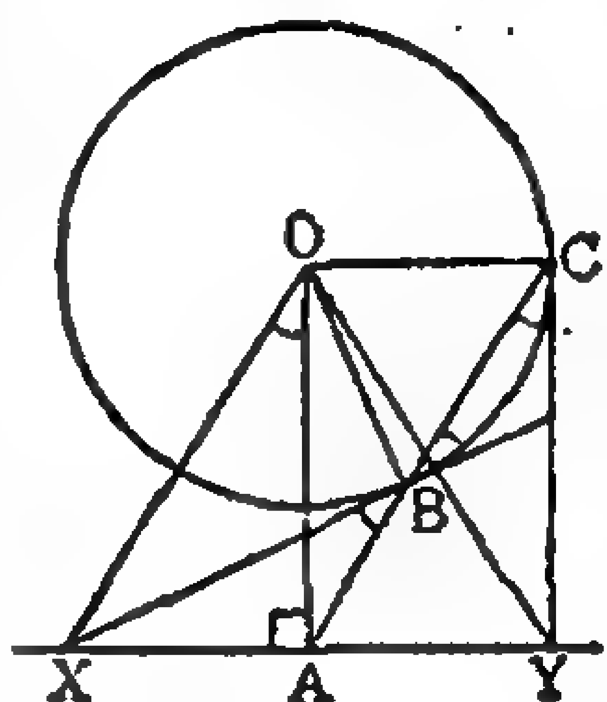
$$\angle F'DH=\angle F'HD,$$

$$\therefore\ F'D=F'H.$$

而且 $\angle ADH=\angle B$,

所以 F' 是 AH 的中点。同样，从点 E 作这圆的切线也过 AH 的中点 F'，从而 F' 和 F 重合，即直线 AF 过点 H.

415. 若从已知的圆心 O 向任意直线 XY 作垂线 OA，过垂足 A 作割线和圆周交于点 B 及 C，过 B、C 所作圆的切线和直线 XY 分别交于点 X、Y，则点 A 到点 X、Y 等距.



解 因为 $\angle OBX=\angle OAX=\angle R$，所以 O、B、A、X 四点共圆，

$$\therefore\quad \angle XOA=\angle XBA.$$

同样，O、A、Y、C 四点共圆，

$$\therefore\quad \angle YOA=\angle YCA.$$

而且 $\qquad \angle XBA=\angle YCA,$

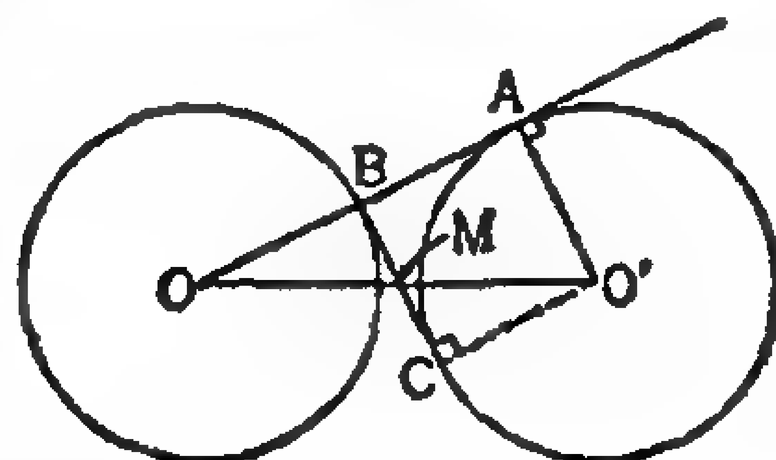
$$\therefore\quad \angle XOA=\angle YOA,$$

且 $\qquad OA\perp XY,$

$$\therefore\quad OX=OY,$$

$$AX=AY.$$

416. 设两等圆 O、O'，若从圆心 O 所作圆 O' 的切线的长 OA 等于圆的直径，则其内公切线的长等于圆的半径.



解 设 OA 和圆 O 的交点为 B，则

$$OB=AB=AO'.$$

把 OO' 的中点 M 和 B 连结，则

$$BM\parallel AO',$$

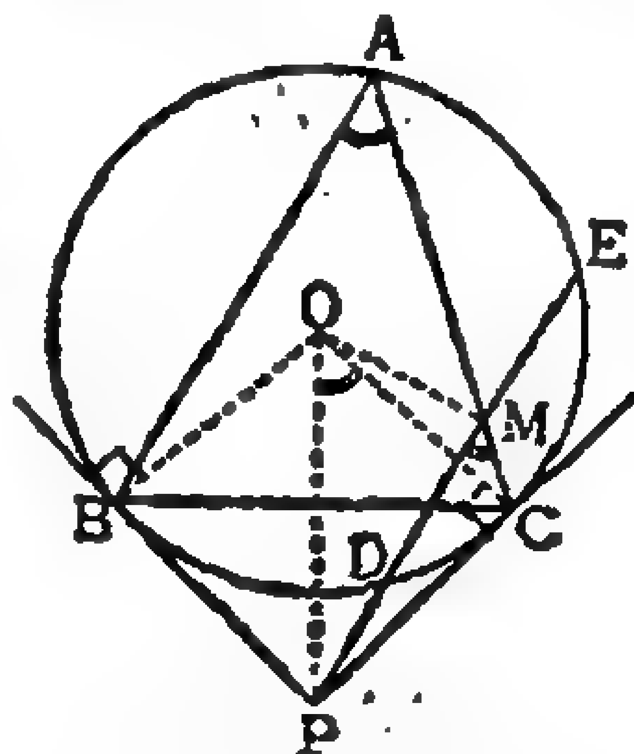
$$\therefore\quad \angle OBM=\angle OAO'=\angle R,$$

于是 MB 是圆 O 的切线。从 O' 向 BM 作垂线 $O'C$，则四边形 $O'ABC$ 是正方形，所以

$$O'A=O'C=BC.$$

于是 BC 在点 C 与圆 O' 相切，BC 等于圆 O' 的半径 $O'A$.

417. 若过圆内接三角形 ABC 的顶点 B、C 所作该圆的切线的交点为 P，过 P 作 AB 的平行线与圆相交于点 D、E，则 AC 平分 DE.



解 设圆心为 O，AC 与 DE 的交点为 M，连结 OC、OM、OP、OB，因为 $AB\parallel DE$，所以

$$\angle PMC=\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle POC$$

$$(PB\text{、}PC\text{ 是切线}),$$

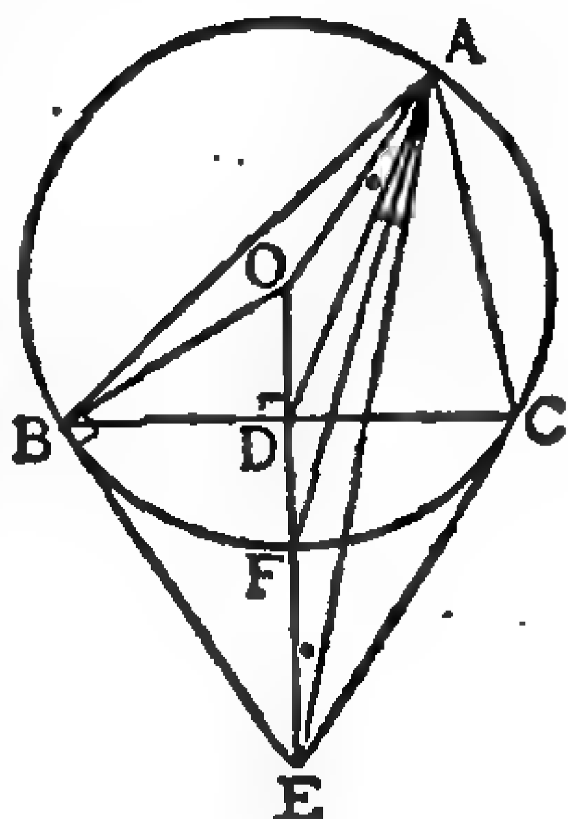
因此 O、M、C、P 四点共圆.

$$\therefore\quad \angle OMP=\angle OCP=\angle R,$$

于是 $\qquad OM\perp DE,\ DM=ME.$

418. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$。设 D 为 BC 中点，过顶点 B、C 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线相交于点 E，DE 和外接圆的交点为 F。求证

$$\angle FAE=\angle DAF.$$



解 若 O 为外心，则

$$\angle OBE=\angle R.$$

又 $\qquad\because\quad OE\perp BD,$

$$\therefore\quad OB^2=OD\cdot OE.$$

但是 $\qquad OB=OA,$

于是 $\qquad OA^2=OD\cdot OE.$

因此，过 A、D、E 的圆与直线 OA 相切于点 A，

$$\therefore\quad \angle OAD=\angle AEO. \qquad ①$$

由 $OA=OF$，得

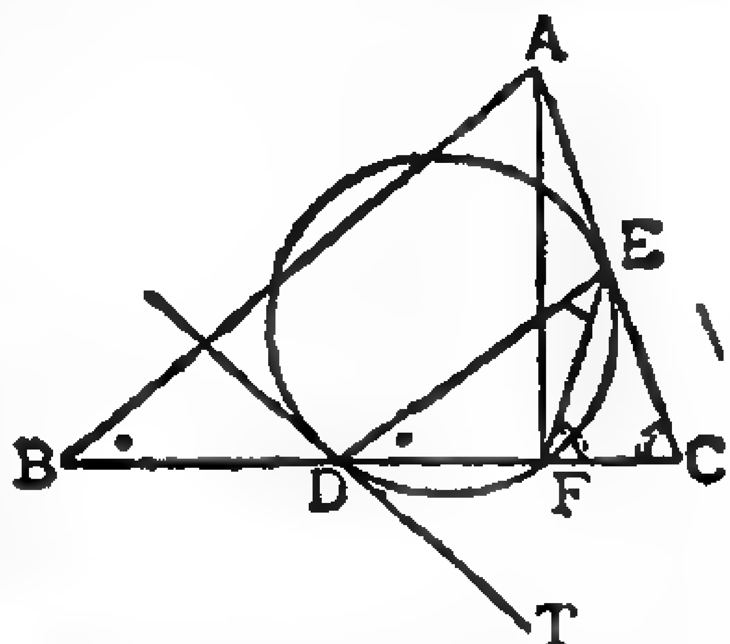
$$\angle OAF=\angle OFA. \qquad ②$$

由②－①，得

$$\angle OAF-\angle OAD=\angle OFA-\angle AEO,$$

即 $\qquad \angle DAF=\angle FAE.$

419. 设 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA 的中点分别为 D、E，由 A 向 BC 所作的垂线足为 F，则过点 D 所作圆 DEF 的切线和 BC 所成的角之一和原来的三角形的两底角 B、C 之差相等.



解 因为 D、E 分别是 BC、AC 的中点，

$$\therefore\quad DE\parallel AB,$$

于是

$$\angle B=\angle EDC. \qquad ①$$

又因为 E 是直角三角形 AFC 的斜边 AC 的中点，所以

$$\angle C=\angle EFC. \qquad ②$$

由②－①，得

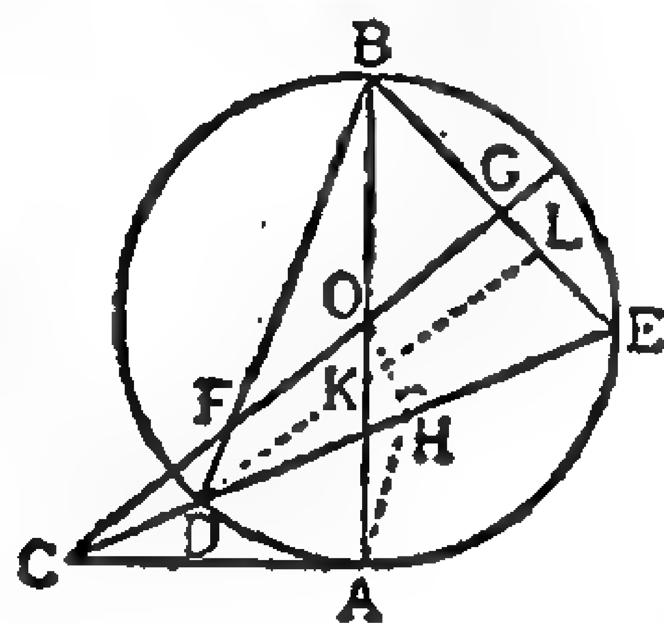
$$\angle C-\angle B=\angle EFC-\angle EDF=\angle DEF.$$

若过点 D 所作圆 DEF 的切线为 DT，则

$\angle TDC=\angle DEF=\angle C-\angle B$.

420. 设圆 O 的直径为 AB，由端点 A 的切线上一点 C 作割线和圆周的交点为 D、E，且 BD、BE 和 CO 及其延长线的交点分别为 F、G，则

$$OF=OG.$$



解 设从点 O 所作 DE 的垂线为 OH，由点 D 作 FG 的平行线和 BA、BE 的交点分别为 K、L，则

$$\angle OHC=\angle OAC=\angle R.$$

所以 O、H、A、C 四点共圆，因此

$$\angle OAH=\angle OCH=\angle KDH,$$

从而 D、A、H、K 四点也共圆，

$$\therefore\quad \angle KHD=\angle KAD=\angle BED,$$

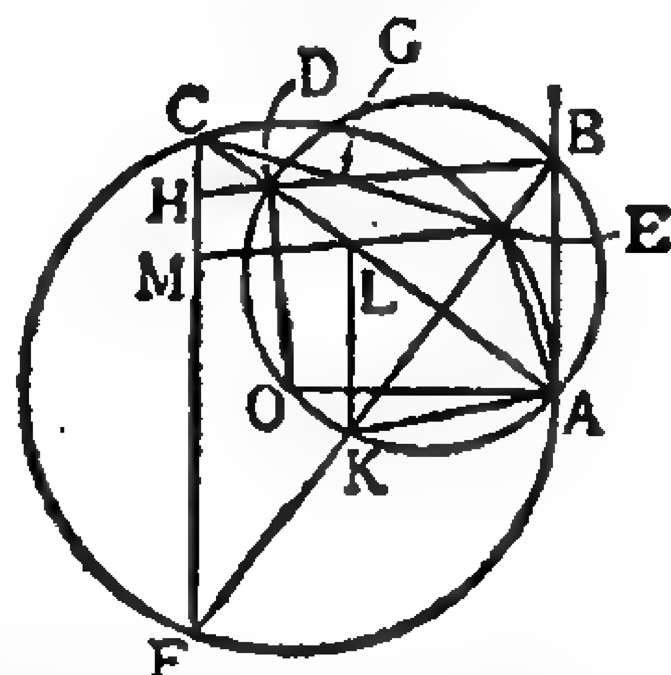
于是 $HK\parallel EL$.

而 H 是 DE 的中点，所以 $DK=KL$，又因

$$FG\parallel DL,$$

故 $OF=OG$.

421. 过圆 O 上一点 A 作切线 AB 及弦 AC，过 AC 上一点 D 作 OD 的垂线和 AB 交于点 B，由 B 作割线和圆周的交点为 E、F，若 CE、CF 和 BD 的交点分别为 G、H，则 $DG=DH$.



解 因为

$$\angle ODB=\angle R=\angle OAB,$$

所以四边形 $ODBA$ 为圆的内接四边形．若这圆和 EF 的交点为 K，则

$$\angle OKB=\angle R,$$

所以 K 是 EF 的中点．若从 E 作 BD 的平行线和 CA、CF 的交点分别为 L、M，则

$$\angle LEK=\angle DBK=\angle DAK.$$

所以 A、E、L、K 四点共圆，

$$\therefore\quad \angle LKE=\angle LAE=\angle CFE,$$

于是 $KL\parallel FM$.

又 $\because\ FK=KE$,

$\therefore\ ML=LE$,

但是 $ME\parallel HG$,

$\therefore\ DH=DG$.

422. 设 P 是弓形 AMB 弧上的任意一点，延长 AP、BP，且截取 $PB'=PB$，$PA'=PA$，则 $A'B'$ 与定圆相切。

解 若 M 是 $\overset{\frown}{APB}$ 的中点，则 MP 平分 $\angle APA'$（问题 301），所以

$$\triangle PAM\cong\triangle PA'M\ (\text{两边夹角}),$$

$$\therefore\quad MA=MA',\ \angle PAM=\angle PA'M.\quad ①$$

又由假设知

$$\triangle PAB\cong\triangle PA'B',$$

$$\therefore\quad \angle PAB=\angle PA'B'.\quad ②$$

由①、②，得

$$\angle MAB=\angle MA'B'.$$

从点 M 作 AB、$A'B'$ 的垂线分别为 MC、MD，则

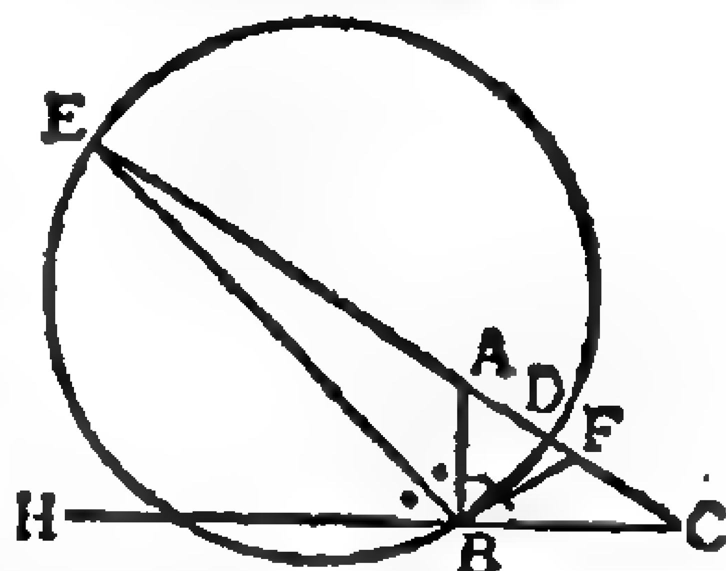
$$\triangle MAC\cong\triangle MA'D$$

（直角三角形的斜边和一锐角对应相等），

$$\therefore\quad MC=MD.$$

因此 MD 是定长，并且 M 是定点，于是 $A'B'$ 是与以 M 为圆心、MC 为半径的圆相切于点 D.

423. 设直角三角形 ABC 的直角 B 及其外角的平分线和 CA 或 CA 的延长线的交点分别为 D、E，若 AC 的中点为 F，则 BF 与圆 DBE 相切于点 B.



解 因为 BD、BE 分别为 $\angle B$ 及其外角的平分线，

$$\therefore\quad \angle ABD=\frac{1}{2}\angle R=\angle ABE.\quad ①$$

又因 F 是斜边 AC 的中点，所以

$$\angle ABF=\angle BAF.\quad ②$$

由①、②，得

$$\angle ABF-\angle ABD=\angle BAD-\angle ABE,$$

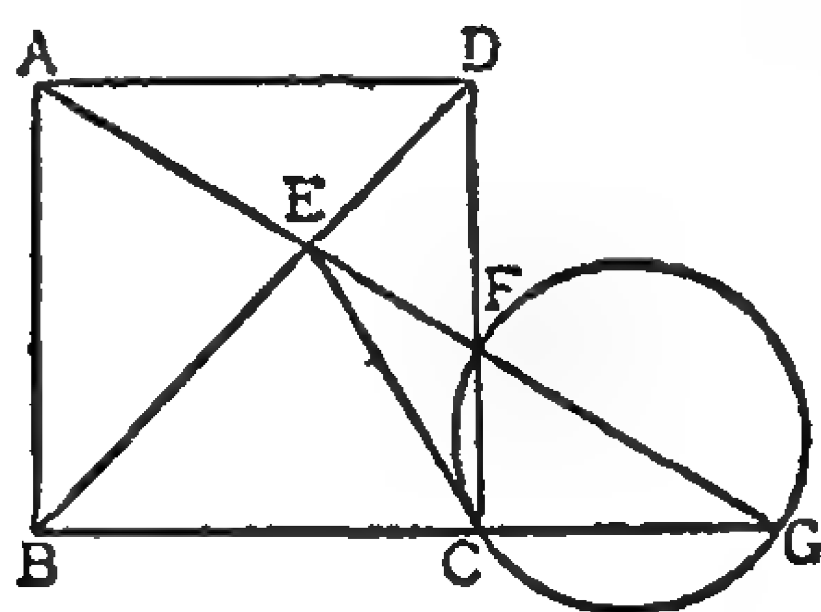
$$\therefore\quad \angle DBF=\angle DEB,$$

故 BF 与圆 DBE 相切于点 B.

424. 若从正方形 $ABCD$ 的顶点 A 作任意的直线和 BD、CD、BC 或者它们的延长线的交点分别为 E、F、G，则 CE 与圆 CGF 相切于点 C.

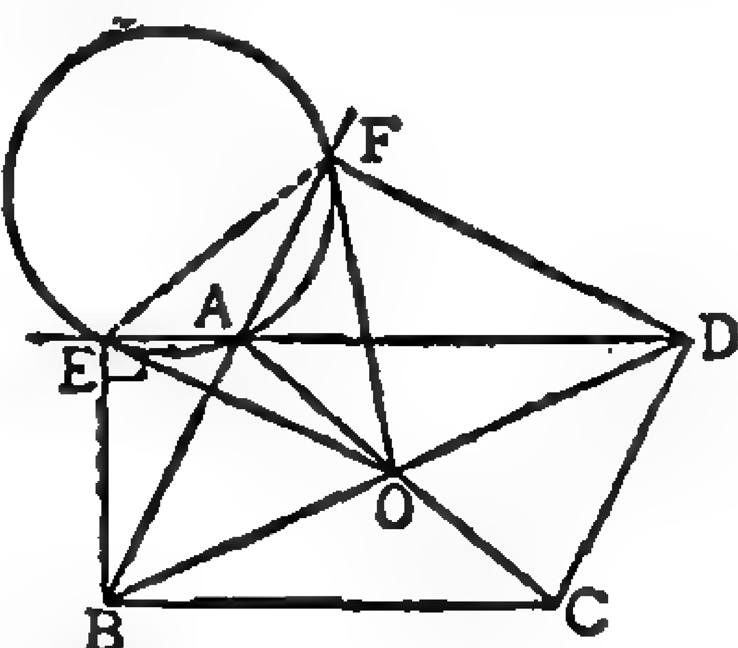
解 $\because\ \angle ADE=\angle CDE$，且 $AD=DC$，DE 公共，

$$\therefore\quad \triangle DEA\cong\triangle DEC,$$



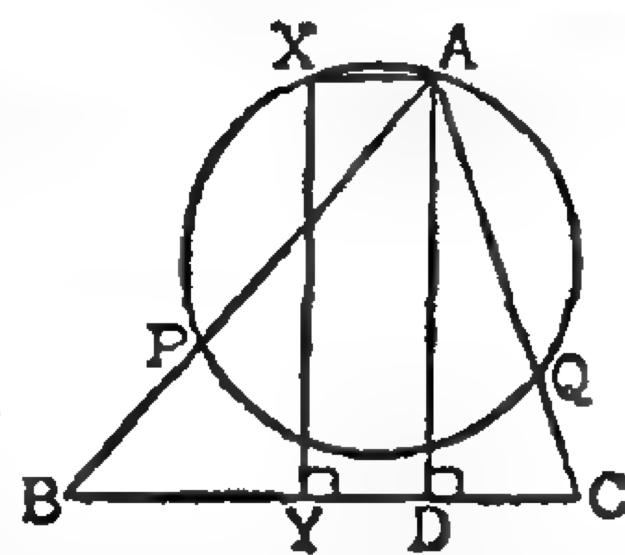
于是　　$\angle DCE=\angle DAE$.
但是　　$AD \parallel CG$,
$\therefore$　$\angle DAE=\angle G$,
从而　　$\angle DCE=\angle G$.
因此，圆 CGF 与 CE 相切于点 C.

425. 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点为 O，从 B 及 D 分别作 AD、AB 的垂线，其垂足为 E、F，则 OE、OF 都与圆 AEF 相切.



解 $\triangle FBD$ 是直角三角形，O 是 BD 的中点，所以
$\angle OFB=\angle OBF$.
又因 B、E、F、D 四点共圆，
$\therefore$　$\angle OBF=\angle DEF$,
$\therefore$　$\angle OFB=\angle AEF$,
因此 OF 与圆 AEF 相切于点 F.
同理，OE 与此圆相切于点 E.

426. 设 $\triangle ABC$ 与给定的三角形全等，边 AB、AC 分别过定点 P 与 Q，使顶点 A 在 PQ 的一侧移动时，则边 BC 与一定圆相切.



解 因为边 AB、AC 分别过定点 P、Q，因此 $\angle PAQ$ 是固定不变的，所以点 A 在以 PQ 为弦所对 $\angle A$ 的弓形弧上. 此弓形弧是确定的. 若从 A 所作 BC 的平行线与圆 APQ 的交点为 X，则

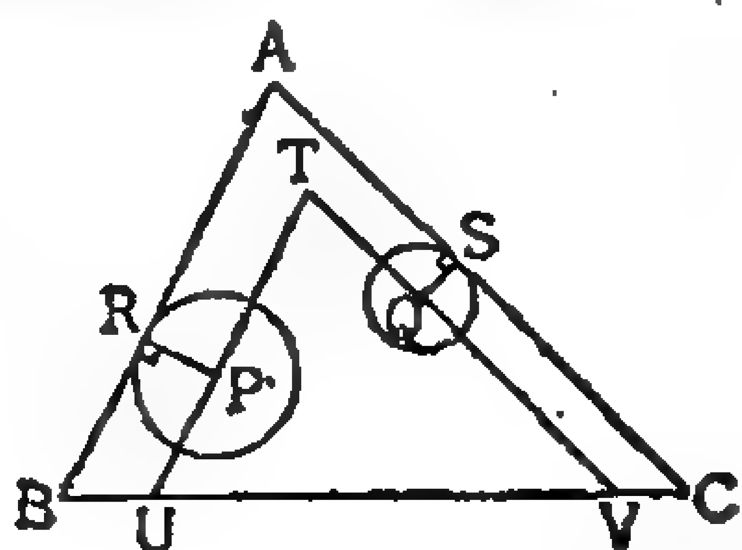
$$\angle PAX=\angle ABC=\text{定值},$$

因此弧 PX 一定，X 是定点. 现从 A、X 作 BC 的垂线 AD、XY，四边形 $AXYD$ 是矩形. 因此

$$XY=AD=\text{定值},$$

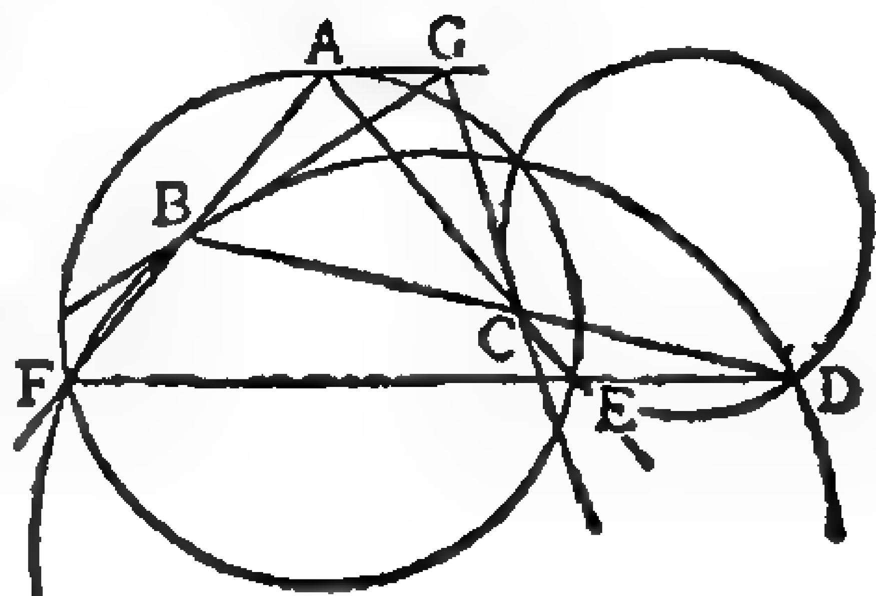
所以 BC 总是与以定点 X 为圆心，AD 为半径的圆相切.

427. 若三角形与给定的三角形全等，且两边分别和两定圆相切，则第三边也和定圆相切.



解 设以 P、Q 为圆心的两定圆和 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 分别在点 R、S 相切，过 P、Q 分别作 AB、AC 的平行线，其交点为 T，且与 BC 的交点分别是 U、V. 这时 UPT、VQT 分别平行于 BA、CA，UPT 到 AB 的距离、VQT 到 AC 的距离都是一定的，所以 $\triangle UTV$ 的形状与大小是一定的，由上题知 UV 即 BC 与定圆相切.

428. 作一直线与 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或者它们的延长线的交点分别是 D、E、F，若过点 A 圆 AEF 的切线和过点 B 圆 BDF 的切线相交于点 G，则 GC 为圆 CED 的切线.



解 因为 AG 是圆 AEF 的切线，所以

$$\angle GAC=\angle AFE.$$

又因为 BG 是圆 BDF 的切线，
$\therefore$　$\angle GBC=\angle AFD$.
于是　　$\angle GAC=\angle GBC$,
所以 A、B、C、G 四点共圆，于是
$\angle ABG=\angle ACG$.
又因为 BG 是圆 BDF 的切线，所以
$\angle ABG=\angle BDF$,
因而　　$\angle ACG=\angle BDF$
即　　$\angle ACG=\angle CDE$.
故圆 CED 在点 C 与 GC 相切.

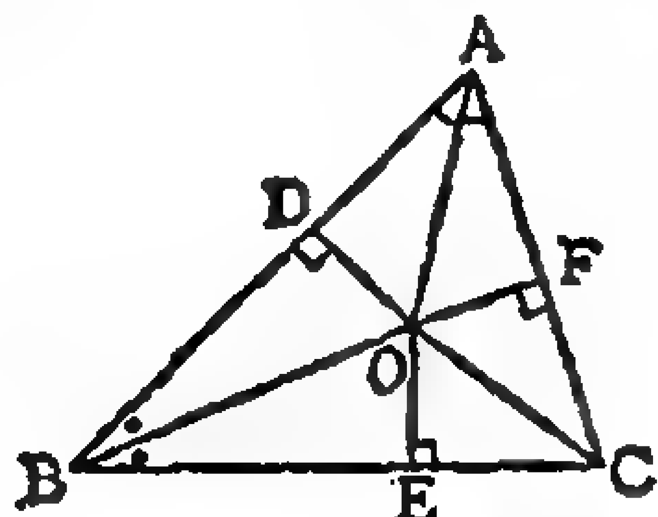
5. 三角形的内心、旁心、内切圆、旁切圆

429. 三角形的三个角的平分线相交于一点，这点是三角形的内切圆的圆心.

解 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 和 $\angle B$ 平分线的交点为 O，如果从 O 向三边 AB、BC、CA 作垂线分别为 OD、OE、OF，因 O 是 $\angle A$ 平分线

上的点，所以点 O 到 AB、AC 等距，即

$$OD=OF.$$



同样

$$OE=OD,$$

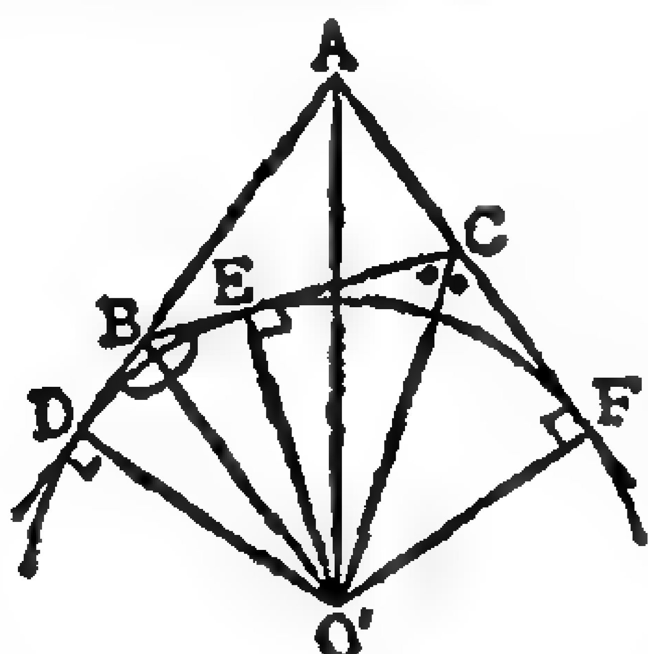
$$\therefore\quad OE=OF.$$

因此点 O 到 $\angle C$ 的两边 AC、BC 的距离相等，$\angle C$ 的平分线也过点 O. 又因

$$OD=OE=OF,$$

所以以 O 为圆心，OD 为半径所作的圆和三边相切，即点 O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心.

430. 三角形两个外角的平分线和另一个内角平分线相交于一点，这点是旁切圆的圆心.



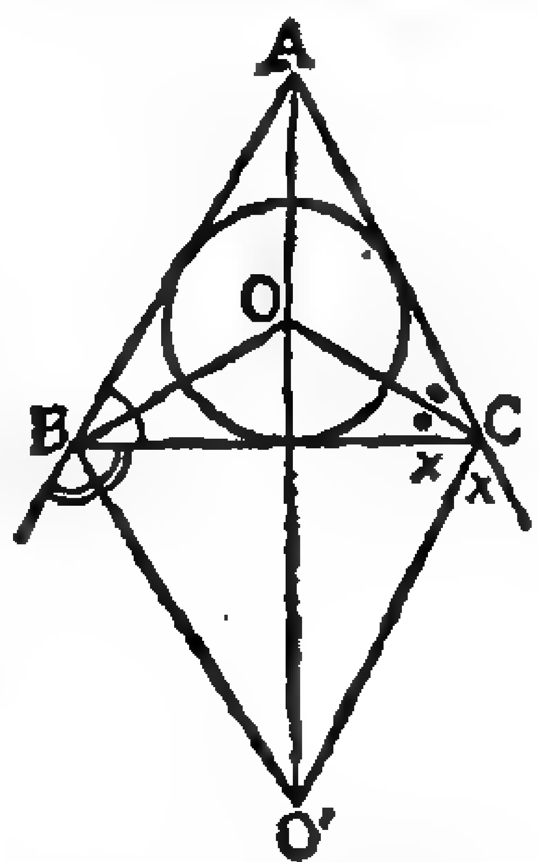
解 和上题一样，设 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$、$\angle C$ 的外角平分线交于点 O'，从 O' 向 AB、BC、CA 所作的垂线分别为 $O'D$、$O'E$、$O'F$，则

$$O'D=O'E=O'F.$$

$\angle A$ 的平分线也过 O'，于是以 O' 为圆心，$O'D$ 为半径的圆与 BC，以及 AB、AC 的延长线都相切，即 O' 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆的圆心.

注 三角形有三个旁心.

431. $\triangle ABC$ 的内心、$\angle A$ 内的旁心以及两顶点 B、C 都在同一圆周上.



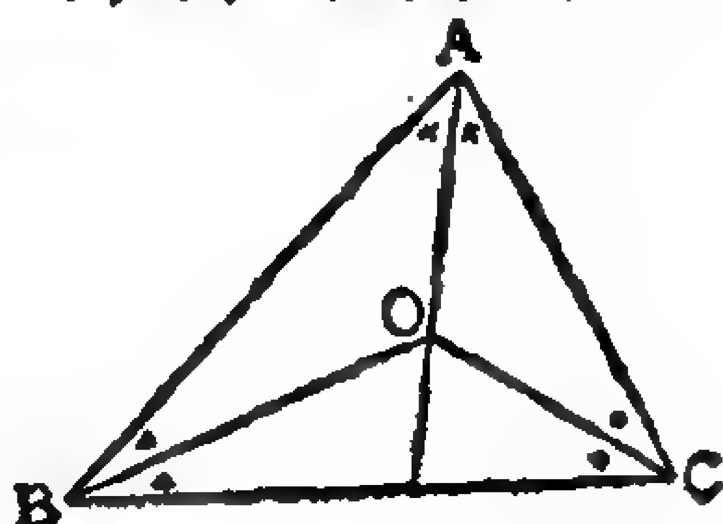
解 设 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，则 OB、OC 分别是 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线，又设在 $\angle A$ 内的旁心为 O'，则 $O'B$、$O'C$ 分别是 $\angle B$, $\angle C$ 的外角的平分线.

$$\therefore\quad \angle OBO'=\angle R=\angle OCO',$$

于是 O, O' 以及 B, C 都在同一圆周上.

432. 若 $\triangle ABC$ 的内心为 O，则

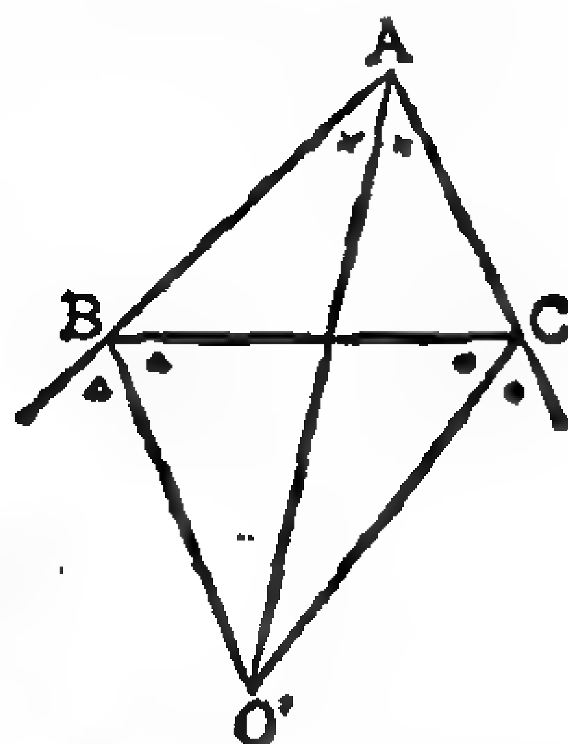
$$\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A.$$



解 参考问题 79 的解.

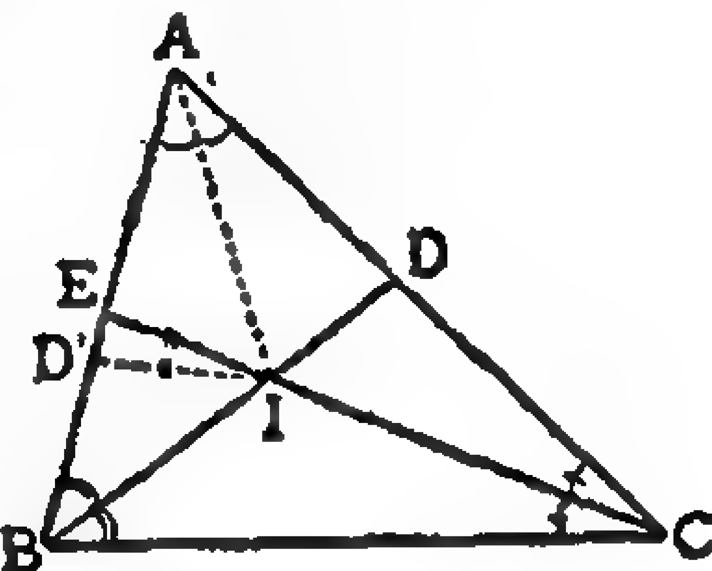
433. 若三角形 ABC 的 $\angle A$ 包含的旁切圆的圆心为 O'，则

$$\angle BO'C=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A.$$



解 参考问题 79 的解.

434. 在 $\triangle ABC$ 中，设内心为 I，延长 BI、CI 和边 AC、AB 的交点为 D、E，若 $DI=EI$，则 $\triangle ABC$ 是怎样的三角形?



解 因为 AI 是 $\angle A$ 的平分线，所以 D 关于 AI 的对称点 D' 在 AB 上. 因为

$$D'I=DI=EI,$$

所以 D' 和 E 重合或者 $\triangle ID'E$ 是等腰三角形.

(i) 当 D' 和 E 重合时，

$$\angle AEI=\angle AD'I=\angle ADI,$$

$$\therefore\quad \angle B+\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\angle B+\angle C,$$

于是　　$\angle B=\angle C.$

(ii) 当 $\triangle ID'E$ 是等腰三角形时，

$$\angle AEI+\angle ADI=\angle AEI+\angle AD'I=180^\circ,$$

$$\therefore\quad \left(\angle B+\frac{1}{2}\angle C\right)+\left(\frac{1}{2}\angle B+\angle C\right)=180^\circ,$$

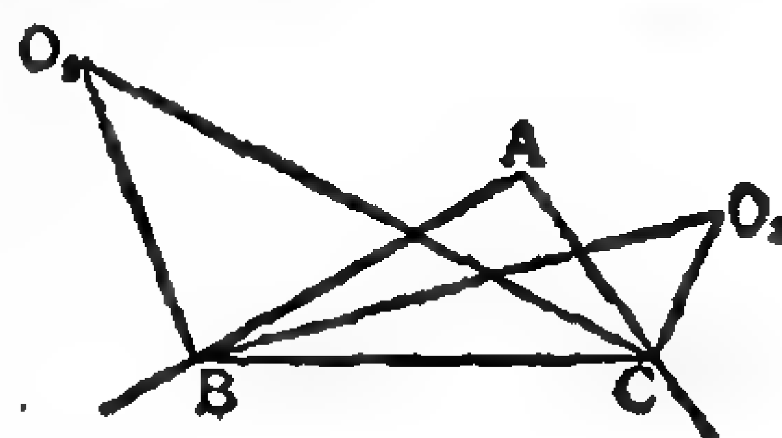
于是　　$\angle B+\angle C=120^\circ,$

$$\angle A=60^\circ.$$

因此 $\triangle ABC$ 是 $AB=AC$ 或者 $\angle A=60^\circ$.

435. 若 O_2、O_3 分别是与 $\triangle ABC$ 的边 AC、AB 相切的旁切圆的圆心，则 B、C、O_2、O_3 四点共圆.

解 因 O_2 是 $\triangle ABC$ 的旁心，所以 O_2B 以及 O_2C 是 $\angle ABC$ 以及 $\angle ACB$ 的外角的平分线. 同理，O_3 是在 $\angle ABC$ 的外角以及 $\angle ACB$ 的平分线上.



$$\therefore\quad \angle O_2BO_3=\angle R=\angle O_2CO_3,$$

因此 B、C 是在以 O_2O_3 为直径的圆周上，即 B、C、O_2、O_3 四点共圆.

436. 若$\triangle ABC$的$\angle B$包含的旁切圆的圆心为O'，则

$\angle AO'B=\frac{1}{2}\angle C$.

解 设$\triangle ABC$的内心为O，则

$$\angle O'AO=\angle R,\ \angle O'CO=\angle R.$$

所以A、O、C、O'四点共圆，于是

$$\angle AO'O=\angle ACO=\frac{1}{2}\angle C.$$

437. 三角形的旁心在三角形外接圆的外部.

解 设$\triangle ABC$的内心为O，延长AO和外接圆相交于点D，则

$$\angle CBD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle A,$$

$$\angle OBC=\frac{1}{2}\angle B.$$

$$\therefore\quad \angle OBD=\frac{1}{2}(\angle B+\angle A)<90°. \quad ①$$

设$\angle A$内的旁切圆的圆心为P，则BP是$\angle B$的外角的平分线，所以

$$\angle OBP=90°. \quad ②$$

由①、②，得

$$\angle OBP>\angle OBD,$$

因此点P在OD的延长线上，故点P在外接圆的外部.

438. 设直角三角形ABC的内切圆和斜边BC的切点为T，则$BT\cdot TC$等于三角形ABC的面积.

解 因为$BT=BS$，$CT=CR$，$AR=AS$，所以

$$BT=\frac{1}{2}(BC+BA-AC),$$

$$CT=\frac{1}{2}(CA+CB-AB),$$

$$\therefore\quad BT\cdot CT=\frac{1}{4}[BC+(BA-AC)]\times[BC-(AB-AC)]$$
$$=\frac{1}{4}[BC^2-(AB-AC)^2]$$
$$=\frac{1}{4}[BC^2-(AB^2+AC^2-2AB\cdot AC)].$$

但是 $BC^2=AB^2+AC^2$，

所以从上式得

$$BT\cdot CT=\frac{1}{2}AB\cdot AC=S_{\triangle ABC}.$$

439. 任意四边形的每三边(如果必要可以延长)相切于圆，若都在四边形的内部或者都在外部，则此四个圆心在同一圆周上.

解 若四边形$ABCD$的$\angle A$的平分线和$\angle B$、$\angle D$的平分线的交点分别为G、K. 若$\angle C$的平分线和$\angle B$、$\angle D$的平分线的交点分别为L、H. 则

$$\angle AGB=\left[2\angle R-\left(\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}\right)\right],$$

$$\angle CHD=\left[2\angle R-\left(\frac{\angle C}{2}+\frac{\angle D}{2}\right)\right],$$

$$\therefore\quad \angle AGB+\angle CHD=\left[4\angle R-\left(\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle C}{2}+\frac{\angle D}{2}\right)\right]=2\angle R.$$

故K, G, L, H在同一圆周上.

440. 圆的外切正三角形DEF的边是圆内接正三角形ABC的边的两倍.

解 设过圆内接正三角形ABC各顶点所作圆的三条切线的交点为D、E、F，则$\triangle DEF$是外切正三角形. 而且

$$AF=FB,\ \angle BAF=\angle ACB=\frac{2}{3}\angle R.$$

同理， $\angle FBA=\frac{2}{3}\angle R,$

所以$\triangle ABC$和$\triangle AFB$是全等正三角形. 因此

$$AF=BC,$$

同理 $AE=BC,$

$$\therefore\quad FE=2BC.$$

同理， $DF=2CA$, $DE=2AB$.

441. 如果连结$\triangle ABC$的内切圆的切点D、E、F，得到$\triangle DEF$，则$\angle D=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$，$\angle E=\frac{1}{2}(\angle C+\angle A)$，$\angle F=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$.

解 若BA的延长线为AG，则

$$\angle GAC=\angle B+\angle C.$$

又因

$$\angle GAC=\angle AEF+\angle AFE,$$

但是$\triangle DEF$的外接圆分别在点F、E与AB、AC相切，所以

$$\angle AEF=\angle D,$$

$$\angle AFE=\angle D.$$

因而 $\angle GAC=2\angle D$,

$$\therefore\ 2\angle D=\angle B+\angle C,$$

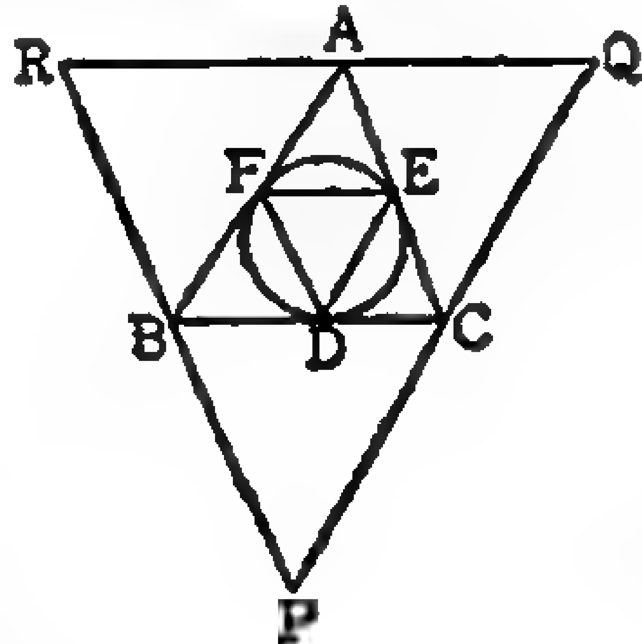
于是 $\angle D=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$.

同理， $\angle E=\frac{1}{2}(\angle C+\angle A)$,

$$\angle F=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B).$$

442. 以$\triangle ABC$的三个旁心为顶点所构成的三角形的三个角，与内切圆的切点所构成的三角形的三个角分别相等.

解 如图，设$\triangle ABC$的内切圆的切点分别为D、E、F，旁心分别为P、Q、R. 因为AE、AF为同一圆的切线，所以相等，因而$\triangle AFE$是等腰三角形，而RQ是$\angle A$的外角平分线，所以



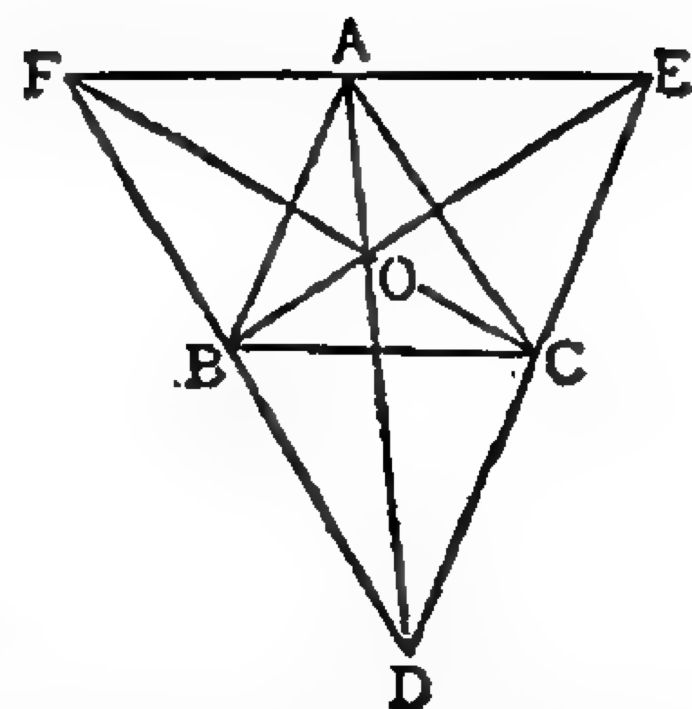
$$QR\parallel EF.$$

同理， $PR\parallel DF$, $PQ\parallel DE$.

所以$\triangle DEF$和$\triangle PQR$的三边是分别平行的，从而两个三角形相似，于是两个三角形的三个角分别相等.

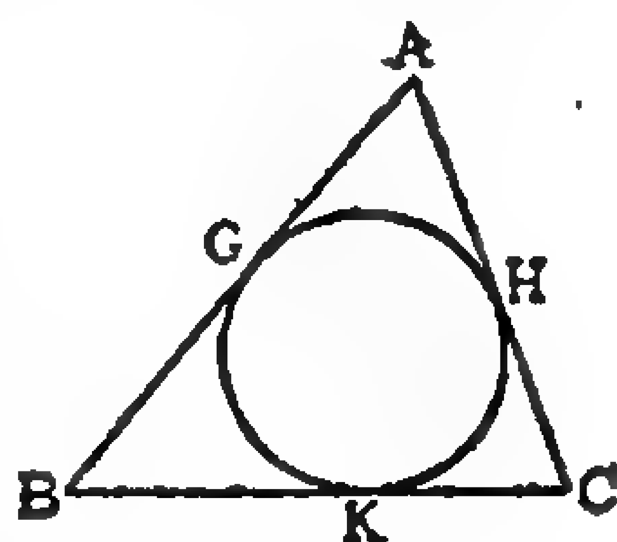
443. 若$\triangle ABC$的内心为O，它的三个旁心分别为D、E、F，则O是$\triangle DEF$的垂心.

解 因D、E、F是$\triangle ABC$的旁心，O是它的内心，所以三条直线DOA、EOB、FOC分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的平分线.



其次三条直线EF、FD、DE是分别过顶点A、B、C的，并且是其顶点的外角平分线，所以三条直线DOA、EOB、FOC分别和三条直线EF、FD、DE垂直，且过O点，这点就是$\triangle DEF$的垂心. 因此$\triangle ABC$的内心O是$\triangle DEF$的垂心.

444. 若$\triangle ABC$的内切圆和边BC、CA、AB的切点分别为K、H、G，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则$AG=p-a$，$BK=p-b$，$CH=p-c$.



解 由切线的性质，

$$AG=AH,\ BK=BG,\ CK=CH.$$

把以上三式的两边分别相加，得

$$AG+BK+CK=AH+BG+CH$$

$$=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)=p,$$

即 $AG+BC=p$.

$$\therefore\ AG=p-BC=p-a.$$

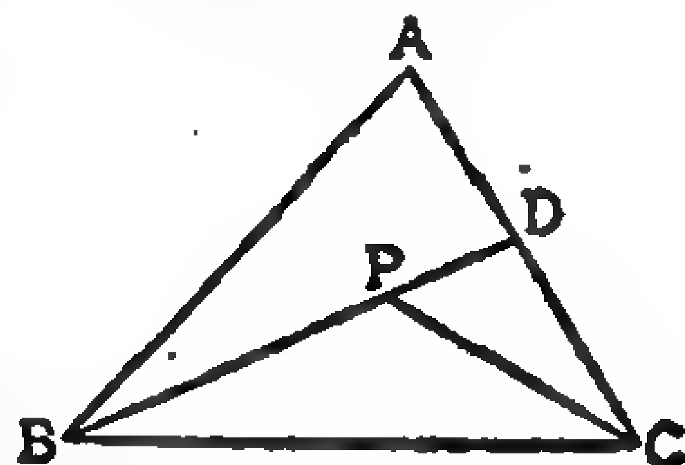
同理， $BK=p-b$, $CH=p-c$.

445. (1) 已知三角形三边的长分别为3、4、5，求其内切圆半径.

(2) 已知P为$\triangle ABC$内的一点，求证

$$AB+AC>PB+PC.$$

解 (1) 由已知条件知这个三角形是直角三角形，其面积为6. 设它的内切圆半径为r，则



$$(3+4+5)\times\frac{r}{2}=6,\ 从而\ r=1.$$

(2) 延长BP和AC相交于D，则

$$AB+AD>BP+PD.$$

因为 $PD+DC>PC$,

把以上两不等式的两边分别相加，并消去两边的相同项PD，得

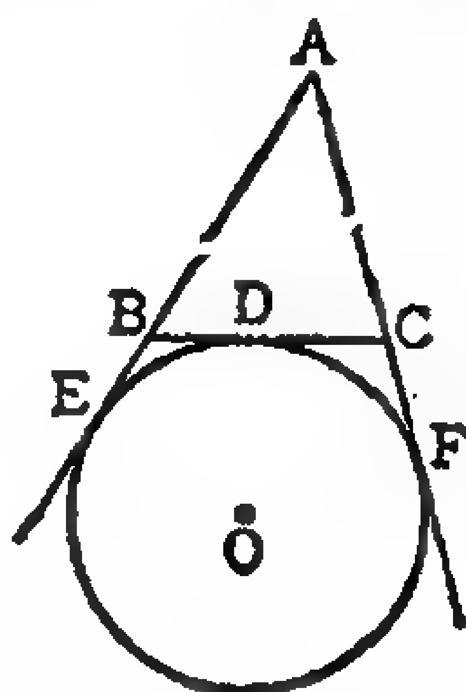
$$AB+AC>PB+PC.$$

446. 设$\triangle ABC$的$\angle A$内的旁切圆和边AB、AC的延长线的切点分别为E、F，则

$$AE=AF=p,$$

其中

$$2p=AB+BC+CA.$$



解　设这个旁切圆和BC的切点为D，则

$$BD=BE,\ CD=CF.$$

$\therefore\quad AB+BC+CA=AB+(BD+CD)+CA$
$=(AB+BE)+(AC+CF)$
$=AE+AF.$

由于AE、AF是相等的，所以

$$AE+AF=2AE=2AF,$$

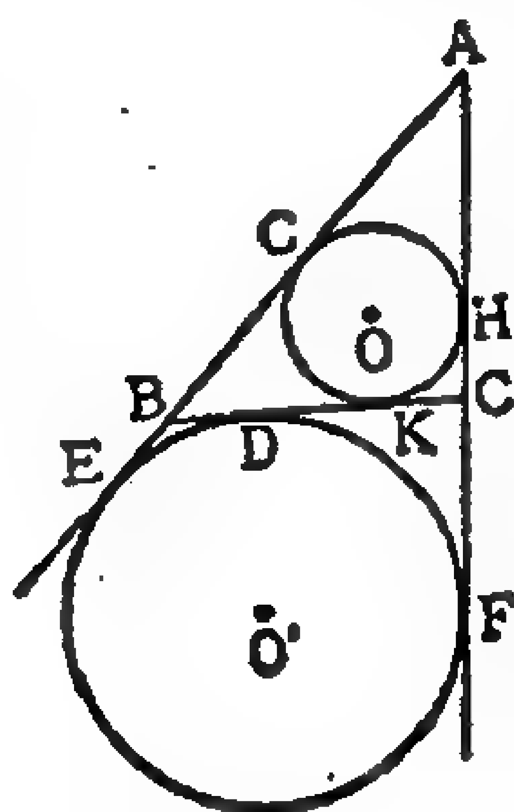
从而

$$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)=p.$$

447. 设$\triangle ABC$的内切圆和边AB、BC、CA的切点分别为G、K、H，$\angle A$内的旁切圆和BC、AB、AC的切点分别为D、E、F，则$GE=HF=BC$，$DK=AB\sim AC$.

解　设$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$a+b+c=2p$，则由问题**444**，知

$$AG=p-a.\qquad ①$$



由问题**446**，知

$$AE=p.\qquad ②$$

于是由①、②，得

$GE=AE-AG$
$=p-(p-a)=a,$

$\therefore\quad BC=GE.$

显然又有$GE=HF$，

$$\therefore\quad GE=HF=BC.$$

又因

$$BK=p-AC,\qquad ③$$

$$BD=BE=AE-AB=p-AB.\qquad ④$$

如果$AB>AC$，则由③、④，得

$$BK-BD=AB-AC$$

即　$DK=AB-AC.$

如果$AB<AC$，同样可得

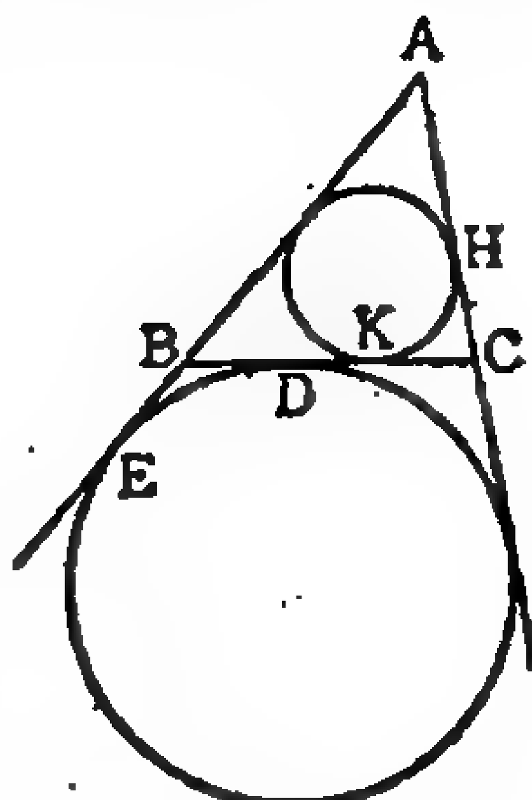
$$DK=AC-AB,$$

因此，一般地　$DK=AB\sim AC.$

448. 设$\triangle ABC$的内切圆和BC的切点为K，$\angle A$内的旁切圆和BC的切点为D，则$CK=BD$.

解　由问题**444**，知

$$CK=CH=p-AB.$$

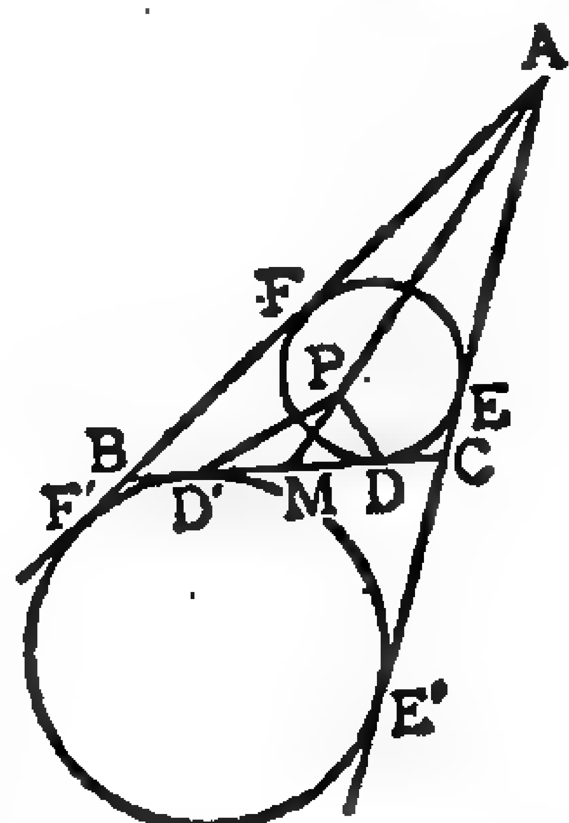


又因

$BD=BE=AE-AB$
$=p-AB,$

$\therefore\quad CK=BD.$

449. 设$\triangle ABC$的内切圆、$\angle A$内的旁切圆和边BC的切点分别为D、D'，BC的中点为M，P为AM上的任意一点，求证四边形$ABD'P$和$APDC$的面积相等.



解　由上题知

$$BD'=CD.$$

又因　$BM=MC,$

$\therefore\quad MD'=MD.$

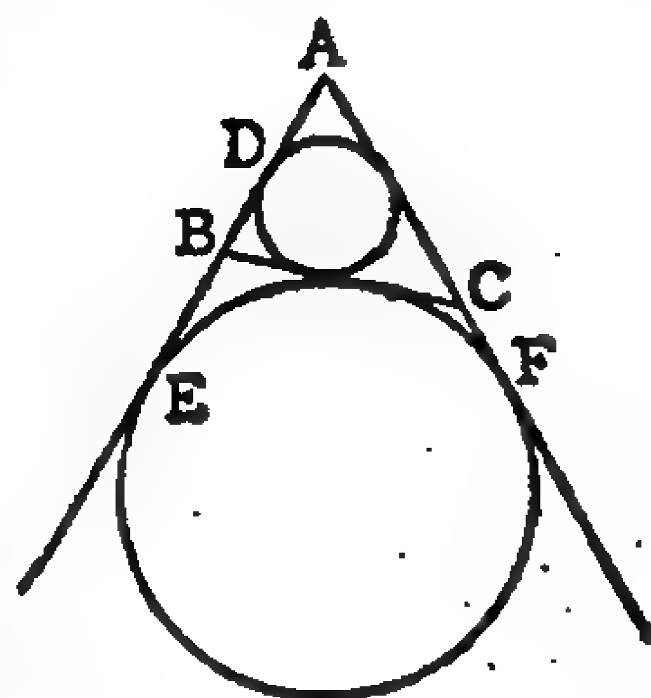
因此

$S_{\triangle ABM}=S_{\triangle AMC},\quad ①$

$S_{\triangle PD'M}=S_{\triangle PMD}.\quad ②$

①－②，得四边形$ABD'P$的面积＝四边形$APDC$的面积.

450. 设$\triangle ABC$的边AB和内切圆的切点为D，$\angle A$内的旁切圆和AB的延长线的切点为E，且$AE=3AD$，则$\triangle ABC$三边的长成等差数列.



解　设$\triangle ABC$的周长为$2p$，则由问题**444**，得

$$AD=p-BC.\qquad ①$$

又　$AE=p$，$AE=3AD$，

于是由①，可得

$$AD=AE-BC=3AD-BC,$$

$$\therefore\quad 2AD=BC.\qquad ②$$

又因　$AB+BC+CA=2AE,$

把$AE=3AD$，$BC=2AD$代入上式，得

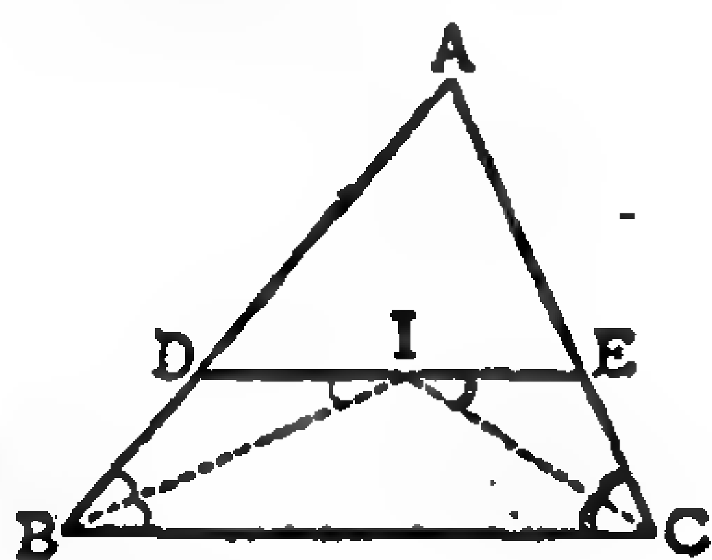
$$AB+2AD+AC=6AD,$$

$$\therefore\quad AB+AC=4AD=2BC.$$

即$\triangle ABC$的三边AB，BC，CA成等差数列.

451. 设过$\triangle ABC$的内心I所作边BC的平行线和边AB、AC的交点分别为D、E，则$DE=DB+CE$.

解 因为 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，所以



$$\angle DBI=\angle IBC. \quad ①$$

又 $\because\ DI\parallel BC$,

$$\therefore\ \angle DIB=\angle IBC. \quad ②$$

由①、②，得

$$\angle DBI=\angle DIB,$$

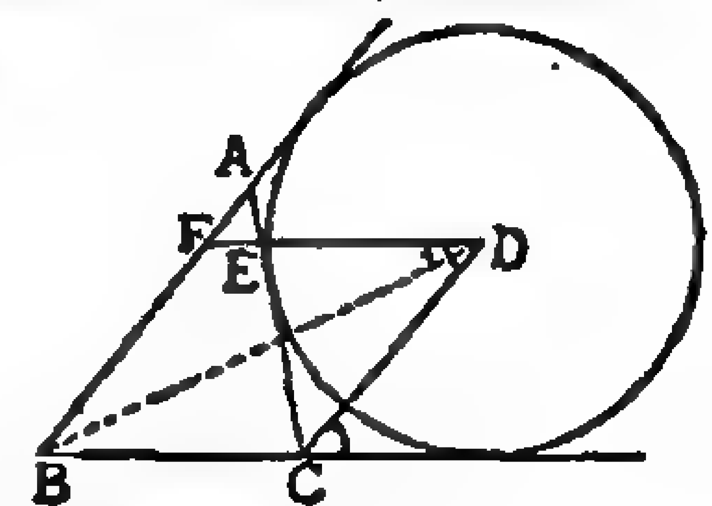
$$\therefore\ DI=DB.$$

同理，

$$IE=EC,$$

$$\therefore\ DE=DB+CE.$$

452. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 内的旁切圆的圆心为 D，过 D 所作 BC 的平行线和 AC、AB 的交点分别为 E、F，则



$$EF=BF-CE.$$

解 因为 D 是 $\triangle ABC$ 的旁心，所以

$$\angle ABD=\angle DBC.$$

又 $\because\ DF\parallel BC$,

$$\therefore\ \angle FDB=\angle DBC,$$

从而 $\angle FDB=\angle FBD$,

$$\therefore\ BF=DF. \quad ①$$

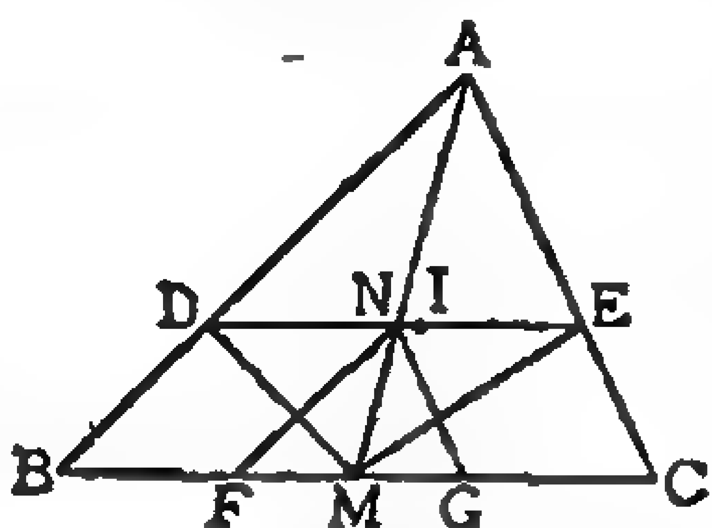
同理，

$$DE=CE. \quad ②$$

于是由①、②，得

$$EF=DF-DE=BF-CE.$$

453. 设过 $\triangle ABC$ 的内心 I 所作 BC 的平行线和 AB、AC 分别交于 D、E，M 是 BC 的中点，则 $\angle DME$ 是钝角。



解 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，且 $DE\parallel BC$，因而由问题 **451**，知

$$DE=BD+CE. \quad ①$$

设 AM 和 DE 的交点为 N，则 N 是 DE 的中点。设过 N 作与 DB、EC 平行的两直线和 BC 的交点分别为 F、G，则 $NF=DB$，$NG=EC$，所以由①，可得

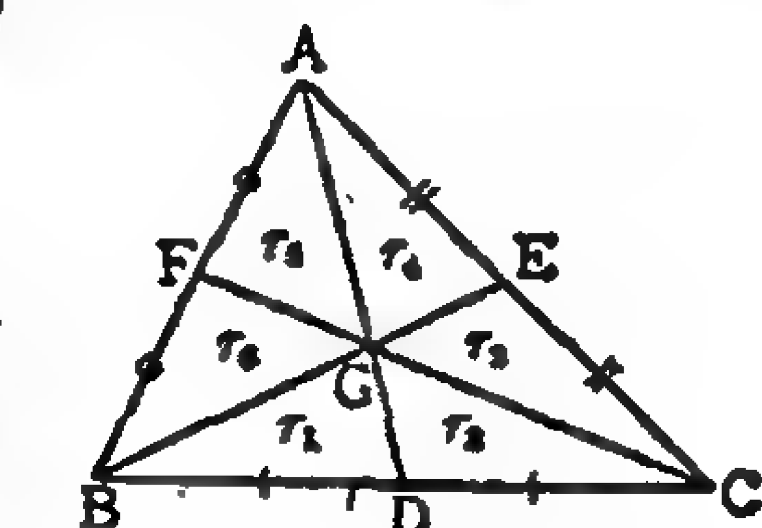
$$NF+NG=DB+EC=DE. \quad ②$$

但在 $\triangle NFG$ 中，M 是 FG 的中点，由问题 **97**，知

$$NF+NG>2NM.$$

所以由②，可得 $DE>2MN$，又 N 是 DE 的中点，因此 $\angle DME$ 是钝角。

454. 已知三角形的三条中线把它分成六个等积三角形。设这六个三角形的内切圆半径顺次为 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6，则



$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}.$$

解 设 $\triangle ABC$ 各边 BC、CA、AB 的中点分别为 D、E、F；重心为 G；$\triangle BDG$，$\triangle CDG$，$\triangle CEG$、$\triangle AEG$、$\triangle AFG$、$\triangle BFG$ 的面积都是 S；其内切圆半径分别为 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6，则在 $\triangle BDG$ 中，

$$(BD+GD+BG)r_1=2S,$$

$$\therefore\ \frac{1}{r_1}=\frac{BD+GD+BG}{2S}.$$

同理，

$$\frac{1}{r_2}=\frac{CD+GD+CG}{2S},$$

$$\frac{1}{r_3}=\frac{CE+GE+CG}{2S},$$

$$\frac{1}{r_4}=\frac{AE+GE+AG}{2S},$$

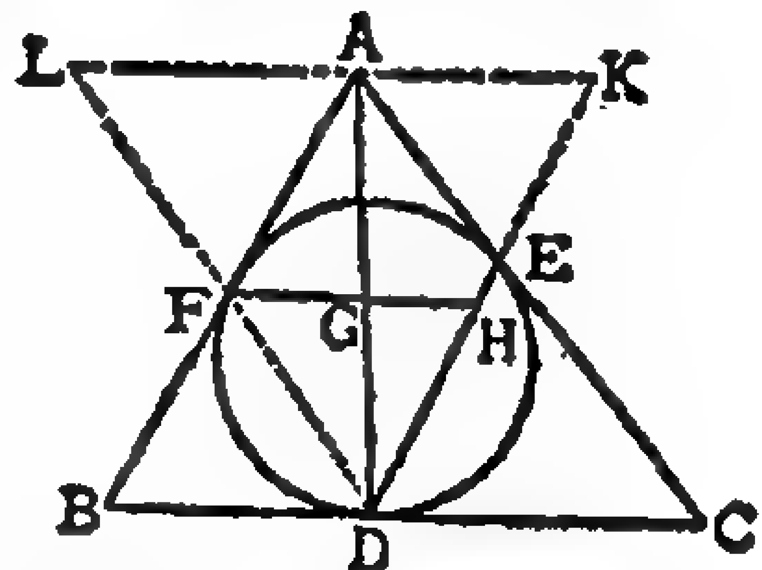
$$\frac{1}{r_5}=\frac{AF+GF+AG}{2S},$$

$$\frac{1}{r_6}=\frac{BF+GF+BG}{2S}.$$

由以上诸式及 $BD=CD$，$CE=AE$，$AF=BF$，可得

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}.$$

455. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆和边 BC、CA、AB 的切点分别为 D、E、F，从 F 作 BC 的平行线和 AD、DE 的交点分别为 G、H，则 $FG=GH$。



解 设过点 A 所作 BC 的平行线和 DE、DF 的延长线的交点分别为 K、L，则

$$\angle K=\angle EDC=\angle DEC=\angle AEK,$$

$$\therefore\ AE=AK.$$

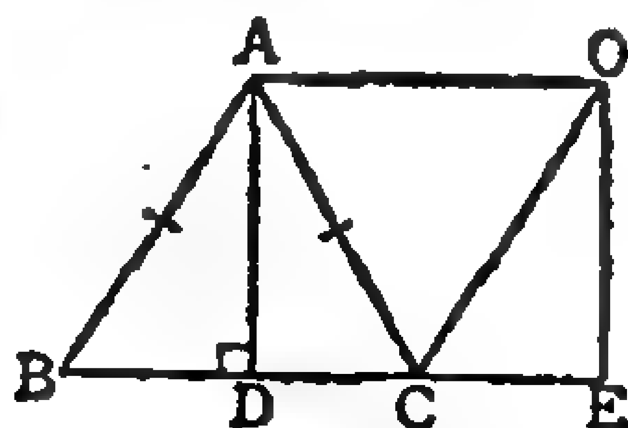
同理，

$$AF=AL.$$

但　　$AE=AF$，∴　$AK=AL$，

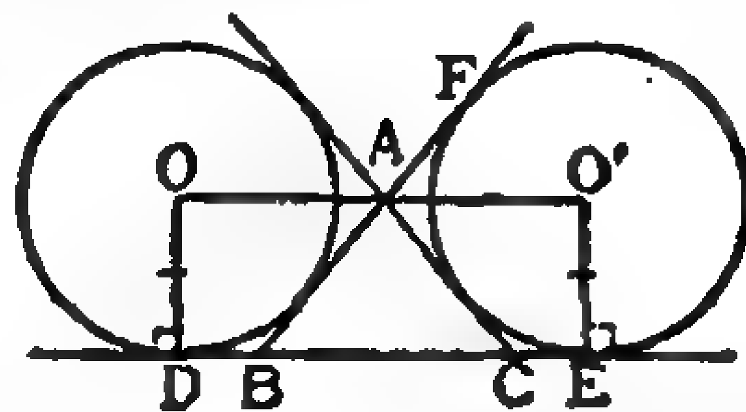
又　　$FH \parallel LK$，∴　$FG=GH$。

456. AD 是等腰三角形 ABC 底边 BC 上的垂线，则与边 AC 相切的旁切圆的半径等于 AD。



解　切于 AC 的旁切圆的圆心 O 必在 $\angle A$ 的外角平分线上，而且 $OA \parallel BC$，所以若从 O 向 BC 作垂线 OE，则 $AD=OE$。但是 OE 等于切于 AC 的旁切圆的半径，因此这个半径等于 AD。

457. 若 $\triangle ABC$ 的两个旁切圆 O、O' 相等，则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

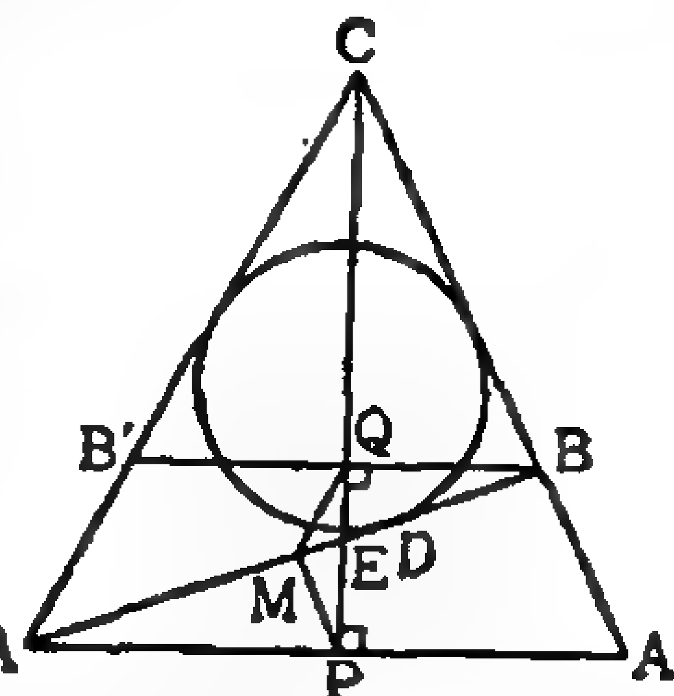


解　从 O、O' 分别向 BC 作垂线 OD、$O'E$，则由题设知 $OD=O'E$。因为 O、A、O' 在一直线上，所以 $OO' \parallel BC$。从而

$$\angle ABC=\angle BAO=\angle O'AF$$
$$=\angle O'AC=\angle ACB,$$

故　　$AB=AC$。

458. 从 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B 分别作 $\angle C$ 平分线的垂线 AP、BQ，若 M 是 AB 的中点，内切圆切 AB 于点 D，则以 M 为圆心，MD 为半径的圆过点 P 及 Q。



解　设 AP、BQ 的延长线和 CB、CA 的交点分别为 A'、B'，则因 CP 是 $\angle C$ 的平分线，且 $AP \perp CP$，$BQ \perp CP$，所以 P、Q 分别是 AA'、BB' 的中点。从而

$$MP=\frac{1}{2}A'B=\frac{1}{2}(A'C-BC)$$
$$=\frac{1}{2}(AC-BC).$$

同理，　$MQ=\frac{1}{2}(AC-BC)$。

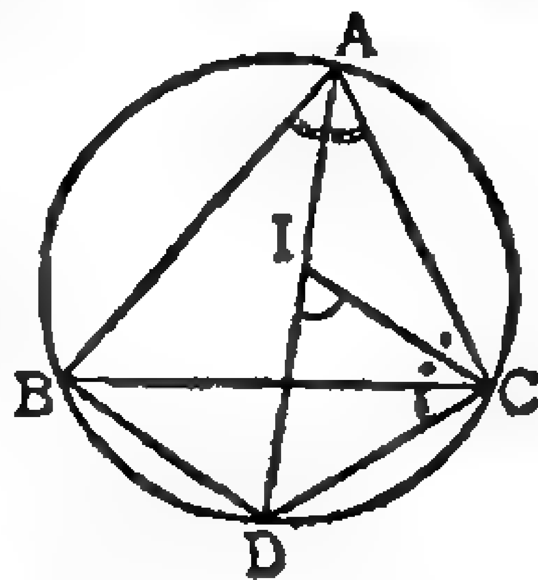
其次，

$$MD=AD-\frac{1}{2}AB$$
$$=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)-\frac{1}{2}AB$$
$$=\frac{1}{2}(AC-BC),$$

∴　$MD=MP=MQ$。

故以 M 为圆心，MD 为半径的圆过点 P 及 Q。

459. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，如果延长 AI 与其外接圆的交点为 D，则 $DI=DB=DC$。



解　因 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，所以 AI、CI 分别平分 $\angle A$、$\angle C$，即

$$\angle BAD=\angle CAD,$$
$$\angle ACI=\angle BCI.$$

但是　　$\angle BAD=\angle BCD$，

∴　$\angle DAC+\angle ACI=\angle BCD+\angle BCI$，

因而　　$\angle DIC=\angle DCI$，

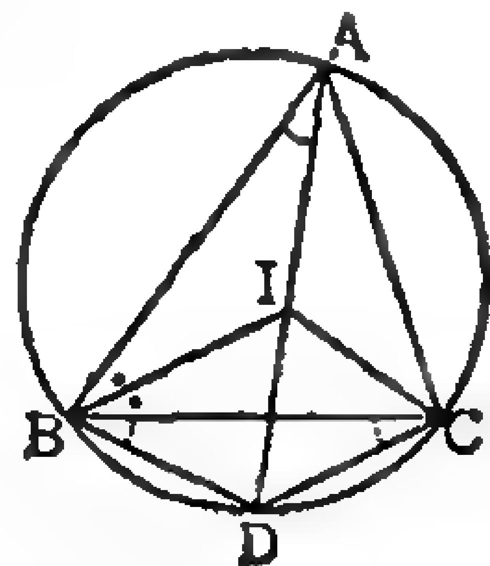
故　　$DI=DC$。

又由 AD 是 $\angle A$ 的平分线，知 D 是 $\widehat{BC}$ 的中点，

∴　$DB=DC$，

从而　　$DB=DC=DI$。

460. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，$\triangle BCI$ 的外心为 D，则 A、B、D、C 四点共圆。



解　因为 D 是 $\triangle BCI$ 的外心，所以

$$DB=DI=DC,$$

从而

$$\angle IBD=\angle BID. \quad ①$$

又因 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，所以

$$\angle ABI=\angle IBC. \quad ②$$

由①、②，得

$$\angle BID-\angle ABI=\angle IBD-\angle IBC,$$

即

$$\angle BAI=\angle CBD. \quad ③$$

但是 $BD=DC$，所以

$$\angle CBD=\angle BCD. \quad ④$$

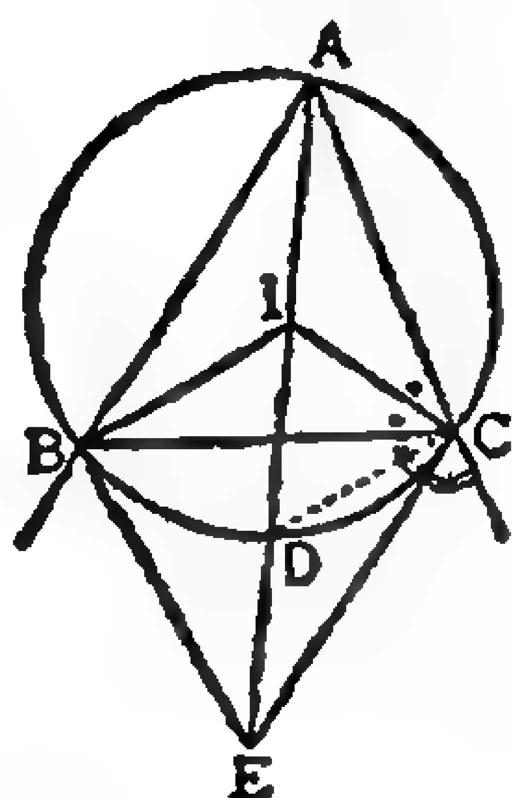
由③、④，得

$$\angle BCD=\angle BAD,$$

因此 A、B、D、C 四点共圆。

461. 设 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的平分线和它的外接圆的交点为 D，则 D 到下列四点的

距离相等：点 B，点 C，内切圆的圆心 I，$\angle A$ 内的旁切圆的圆心 E。



解 由问题459，得

$$DC=DI=DB.$$

又因 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，E 是它的旁心，

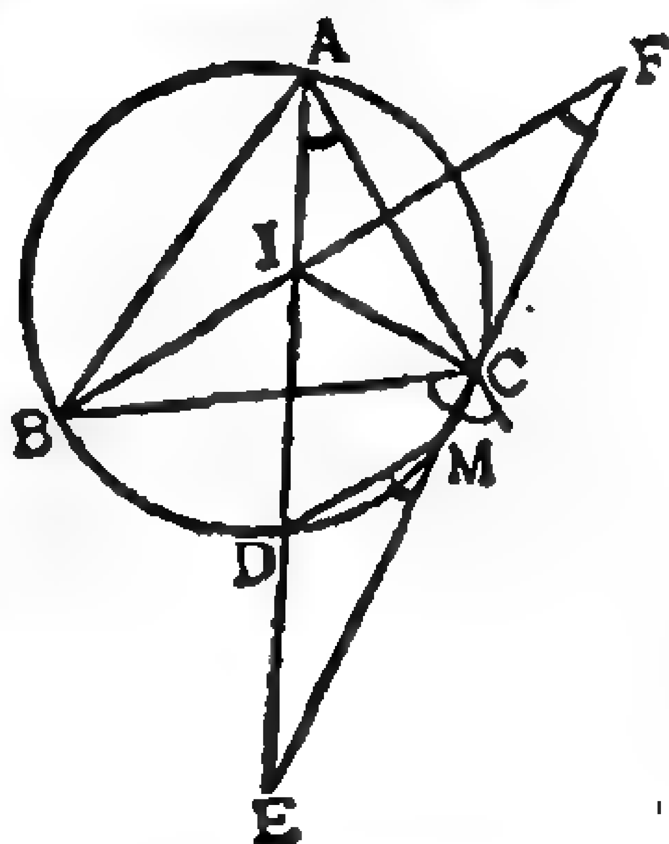
$$\therefore\ \angle ICE=\angle R,$$

$$\angle IBE=\angle R,$$

所以 B、I、C、E 四点共圆。又由 $DI=DB=DC$，可知 D 是这个圆的圆心，

$$\therefore\ DB=DI=DC=DE.$$

462. 证明三角形的外接圆平分其旁心和旁心所连结的线段。



解 设 $\angle A$、$\angle B$ 的平分线和 $\angle C$ 的外角平分线的交点分别为 E、F，则 E、F 是这个三角形的旁心。

设 EF 和 $\triangle ABC$ 的外接圆的另一交点为 M，则在内接四边形 $ACMD$ 中

$$\angle DME=\angle DAC.$$

又由上题，知四边形 $AICF$ 是圆内接四边形，所以

$$\angle IAC=\angle IFC,$$

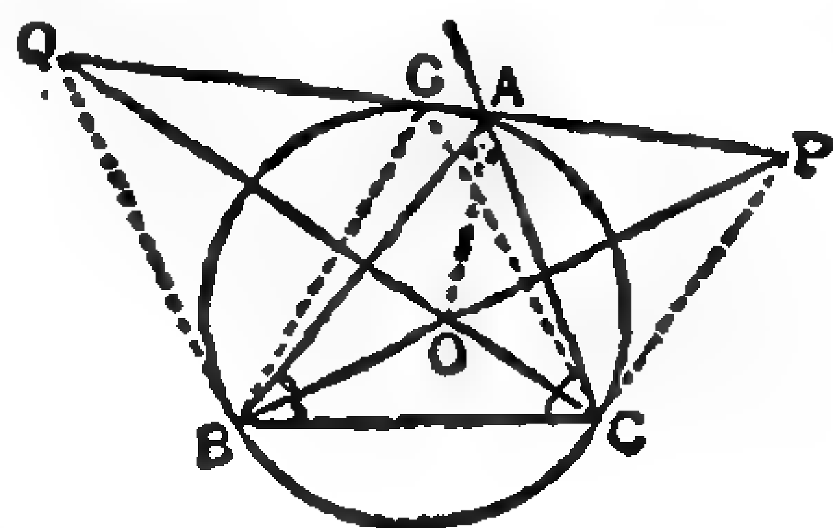
$$\therefore\ \angle DME=\angle IFC,$$

从而 $DM\parallel IF$.

又由上题，知 $ID=DE$,

$$\therefore\ FM=ME.$$

463. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$、$\angle C$ 内的旁心分别为 P、Q，它的外接圆和 $\angle A$ 的外角平分线的交点为 G，则 $GP=GQ=GB=GC$.



解 本题可由上题直接证明，现另解如下。

因为 P、Q 是旁心，AG 是 $\angle A$ 的外角平分线，所以 AG 和 P、Q 在一直线上。

设 BP、CQ 的交点为 O，则 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，所以

$$\angle OAQ=\angle R,\ \angle OBQ=\angle R,$$

从而四边形 $QAOB$ 是圆内接四边形，

$$\therefore\ \angle AQO=\angle ABO=\frac{1}{2}\angle B. \qquad ①$$

但是

$$\angle AGC=\angle ABC, \qquad ②$$

由①、②，得

$$\angle AGC=2\angle GQC,$$

$$\therefore\ GQ=GC. \qquad ③$$

因为 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，P 是旁心，所以

$$\angle OCP=\angle R,$$

即 $\triangle QCP$ 是直角三角形。

因此，由③，可得

$$GQ=GC=GP. \qquad ④$$

又因 AG 是 $\angle A$ 的外角平分线，则 G 是 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点，所以

$$GB=GC. \qquad ⑤$$

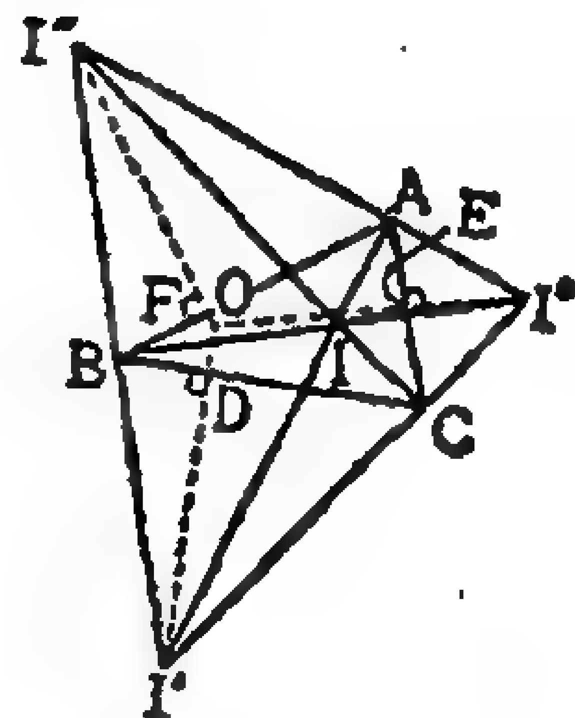
于是由④、⑤，可得

$$GP=GQ=QC=GB.$$

注 由 $\angle PCQ=\angle R=\angle PBQ$，可知 PQ 是四边形 $PCBQ$ 的外接圆的直径，从而 G 就是该外接圆的圆心，所以也可证得

$$GP=GQ=GC=GB.$$

464. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，旁心为 I'、I''、I'''，且旁切圆 I'、I''、I''' 分别和 BC、CA、AB 的切点为 D、E、F，则 $I'D$、$I''E$、$I'''F$ 过 $\triangle I'I''I'''$ 的外心 O，而且 IO 的中点是 $\triangle ABC$ 的外心。



解 $\because\ \angle CI'D=\angle R-\dfrac{1}{2}(2\angle R-\angle C)$

$$=\frac{1}{2}\angle C,$$

$$\angle CI''E=\angle R-\frac{1}{2}(2\angle R-\angle C)$$

$$=\frac{1}{2}\angle C.$$

所以若 $I'D$、$I''E$ 的交点为 O，则

$$OI'=OI'',$$

且 $\angle I'OI''=2\angle R-\angle C.$

但 $\angle I'I'''I''=\angle R-\dfrac{1}{2}\angle C,$

$$\therefore\ \angle I'OI''=2\angle I'I'''I'',$$

所以 O 是 $\triangle I'I''I'''$ 的外心。

同理，$I'''F$、$I'D$ 的交点也是 $\triangle I'I''I'''$ 的外心。

由于 I 是 $\triangle I'I''I'''$ 的垂心，O 是外心，所以由问题 675，知 IO 的中点是过垂足 A、B、C 的九点圆的圆心，也就是 $\triangle ABC$ 的外心。

465. 从 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 内的三个旁心 P、Q、R 分别向 BC、CA、AB 作垂线，则这三条垂线相交于一点。

解 设从 P、Q、R 向 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 所作垂线 PD、QE、RF 的垂足分别为 D、E、F，则因 P、Q、R 是三个旁心，可知 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的旁切圆和边 BC、CA、AB 的切点，于是由上题知 PD、QE、RF 相交于一点。

466. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆和 BC 相切于点 D，则 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内切圆相切。

解 设 $\triangle ABC$ 的内切圆和 AC、AB 的切点分别为 E、F，$\triangle ABD$ 的内切圆和 AD 的切点为 K，则

$$2AK = AB + AD - BD,$$

$$AB - BD = AB - BF = AF,$$

$$\therefore\quad 2AK = AD + AF.$$

同理，若 $\triangle ACD$ 的内切圆和 AD 的切点为 K'，则

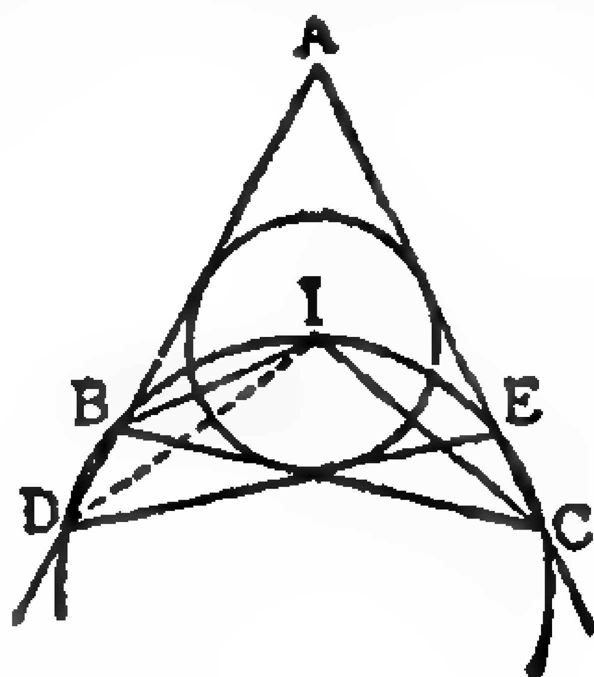
$$2AK' = AD + AE.$$

但
$$AF = AE,$$

$$\therefore\quad AK = AK',$$

从而 $\triangle ACD$、$\triangle ABD$ 的内切圆相切。

467. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，$\triangle IBC$ 的外接圆和 AB、AC 的交点分别为 D、E，则 DE 和 $\triangle ABC$ 的内切圆相切。



解 因为点 D、B、I、E、C 共圆，所以

$$\angle IDB = \angle ICB,$$

$$\angle IDE = \angle ICE.$$

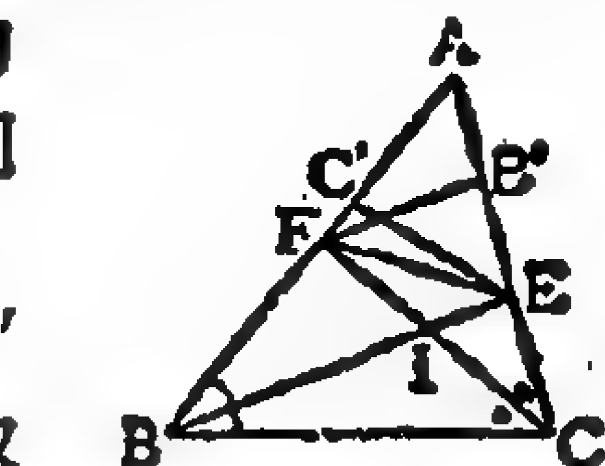
由于 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，所以

$$\angle ICE = \angle ICB,$$

因而
$$\angle IDB = \angle IDE.$$

由于已知 AD 和圆 I 相切，所以 DE 也与圆 I 相切。

468. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，BI 与 AC 的交点为 E，CI 和 AB 的交点为 F，且 $BF = CE$，问 $\triangle ABC$ 是怎样的三角形？



解 在 CA 上取点 B' 使 $CB' = BC$，在 AB 上取点 C' 使 $BC = BC'$，则由两边夹角对应相等，可知

$$\triangle BCF \cong \triangle B'CF, \qquad ①$$

$$\triangle CBE \cong \triangle C'BE. \qquad ②$$

$$\therefore\quad BF = B'F,\ CE = C'E.$$

又知
$$BF = CE,$$

$$\therefore\quad B'F = C'E. \qquad ③$$

在 $\triangle B'FE$、$\triangle C'EF$ 中，EF 公共，

因为 $B'E = BC - CE$，$C'F = BC - BF$，

所以
$$B'E = C'F.$$

又由 ③，知 $B'F = C'E$，

$$\therefore\quad \triangle B'FE \cong \triangle C'EF\ (\text{三边}),$$

$$\therefore\quad \angle FB'E = \angle EC'F.$$

但是由 ①、②，

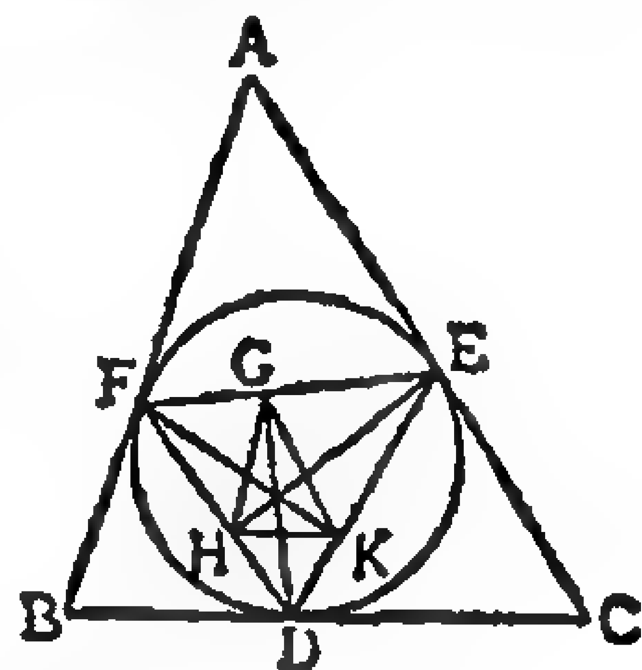
$$\angle FB'E = \angle FBC,\ \angle EC'F = \angle ECB,$$

$$\therefore\quad \angle FBC = \angle ECB,$$

因而 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

469. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆和三边 BC、CA、AB 的切点分别为 D、E、F，由 $\triangle DEF$ 的各顶点向其对边所作垂线的垂足分别为 G、H、K，则 $\triangle GHK$ 的各边平行于 $\triangle ABC$ 的各边。

注 由三角形的各顶点向其对边作垂线，则连结垂足所成的三角形叫做垂足三角形。



解 因为

$$\angle EHF = \angle EKF = \angle R,$$

所以点 F、H、K、E 共圆，从而

$$\angle DKH = \angle DFE.$$

又因 DC 是 $\triangle ABC$ 内切圆的切线，所以

$$\angle DFE = \angle EDC,$$

从而
$$\angle DKH = \angle EDC,$$

$$\therefore\quad HK \parallel BC.$$

同理，
$$KG \parallel CA,\ GH \parallel AB.$$

470. 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，内切圆和 BC、CA 分别在点 A'、B' 处相切，CI 与内切圆的交点为 P、Q，则 P 是 $\triangle A'B'C$ 的内心，Q 是它的旁心。

解 CI 是 $A'B'$ 的垂直平分线，所以

$$\overset{\frown}{A'P}=\overset{\frown}{B'P},$$

于是

$$\angle A'B'P=\angle PA'B'.$$

又因 $A'C$ 是切线，

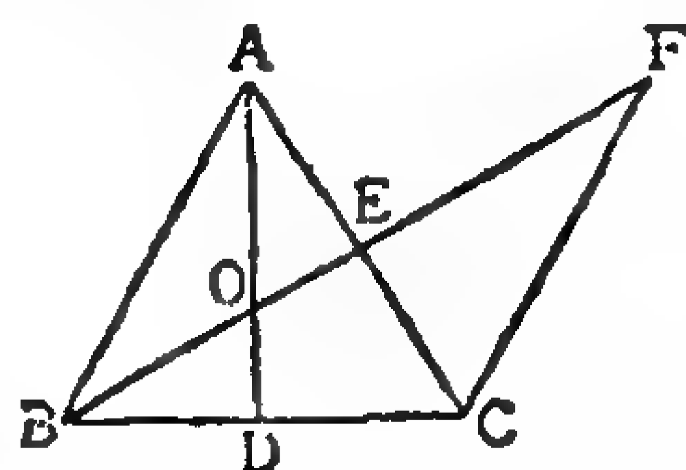
所以 $\angle A'B'P=\angle CA'P,$

$\angle PA'B'=\angle CA'P.$

因此 $A'P$ 是 $\angle CA'B'$ 的平分线。又知 CP 是 $\angle A'CB'$ 的平分线，因而 P 是 $\triangle A'B'C$ 的内心。

其次，因为 PQ 是直径，$\angle PB'Q=\angle R$，又 $B'P$ 是 $\angle A'B'C$ 的平分线，所以 $B'Q$ 是 $\angle AB'A'$ 的平分线，又 CQ 是 $\angle A'CB'$ 的平分线，从而 Q 是 $\triangle A'B'C$ 的旁心。

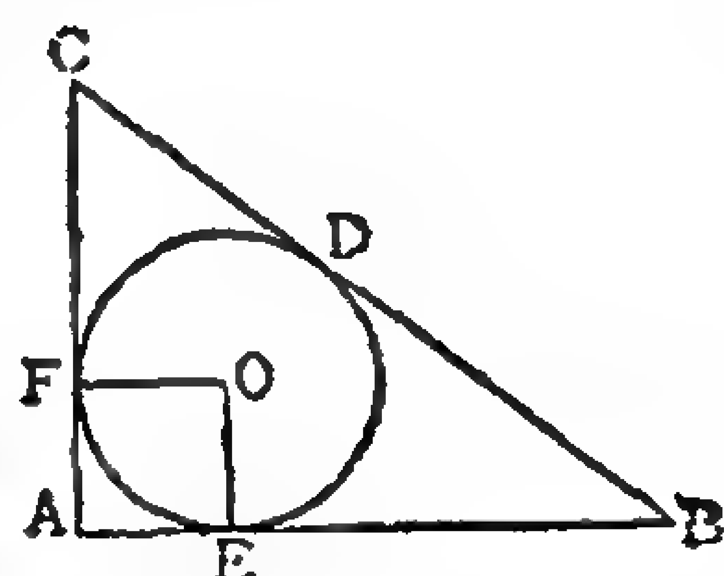
471. 正三角形 ABC 的内切圆，外接圆和旁切圆的半径之比是 1:2:3。



解 因为 $AB=BC=CA$，所以 $\triangle ABC$ 旁切圆的半径等于这个正三角形的高 AD（参照问题 **456**），而且正三角形 ABC 的内心，外心，重心是重合的。设这点为 O，则 OA 是外接圆的半径，OD 是内切圆半径，因此 $\triangle ABC$ 的内切圆，外接圆，旁切圆的半径的比是

$$OD:OA:AD=1:2:3.$$

472. 直角三角形 ABC 的内切圆 O 的直径与斜边 BC 之和等于 $AB+AC$。



解 设内切圆和斜边 BC 及两直角边 AB、AC 的切点分别为 D、E、F，则四边形 $OEAF$ 是正方形。

$\therefore$ $OE+OF=AE+AF=$ 圆 O 的直径，

从而 $AB+AC=AE+BE+AF+CF$

$=(AE+AF)+(BD+CD)$

$=$ 圆 O 的直径 $+BC$。

473. 设从直角三角形 ABC 的直角顶点 C 向斜边 AB 所作的垂线为 CD，则 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 的内切圆半径之和为 CD。

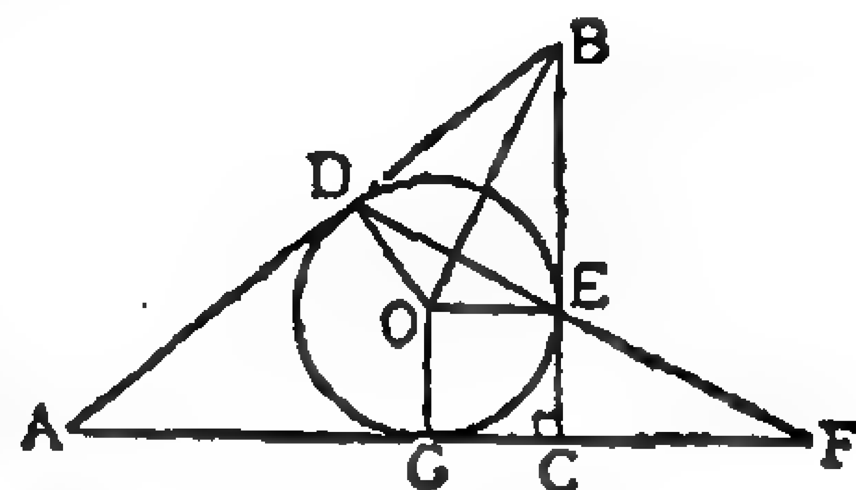
解 设 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 的内切圆的半径分别为 r_1、r_2、r_3，则由问题 **472**，知

$$2r_1=AC+BC-AB,$$
$$2r_2=AD+CD-AC,$$
$$2r_3=BD+CD-BC.$$

$$\therefore\quad 2(r_1+r_2+r_3)=2CD+AD+BD-AB$$
$$=2CD,$$

即 $$r_1+r_2+r_3=CD.$$

474. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 为直角，其内切圆和 AB、BC 的切点分别为 D、E，连结 D、E 并延长和 AC 的延长线交于点 F，则 $BD=CF$。



解 设内切圆的圆心为 O，与边 AC 的切点为 G，把点 O 和点 B、D、E、G 分别连结，显然 $OGCE$ 是正方形，所以

$$OD=OE=EC.$$

因为四边形 $BDOE$ 是圆内接四边形，所以

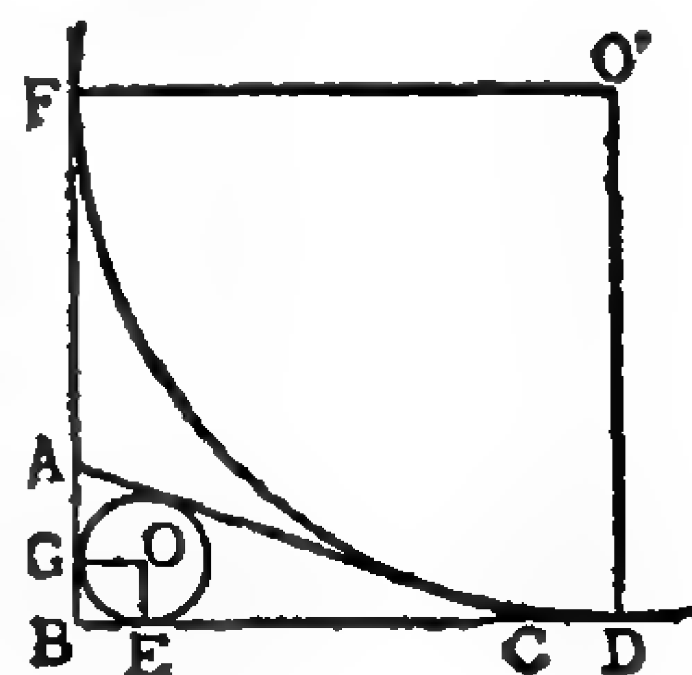
$$\angle BOD=\angle BED=\angle FEC.$$

又 $$\angle ODB=\angle ECF=\angle R,$$

$$\therefore\quad \triangle ODB\cong\triangle ECF,$$

从而 $BD=CF$。

475. 证明和直角三角形 ABC 的斜边 CA 相切的旁切圆 O' 的半径 $O'D$ 等于 $\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$；再设内切圆的半径为 OE，则 $O'D-OE=AC$。



解 设圆 O' 和 AB、BC 的切点分别为 F、D，则 $O'FBD$ 是正方形，于是由问题 **446**，得

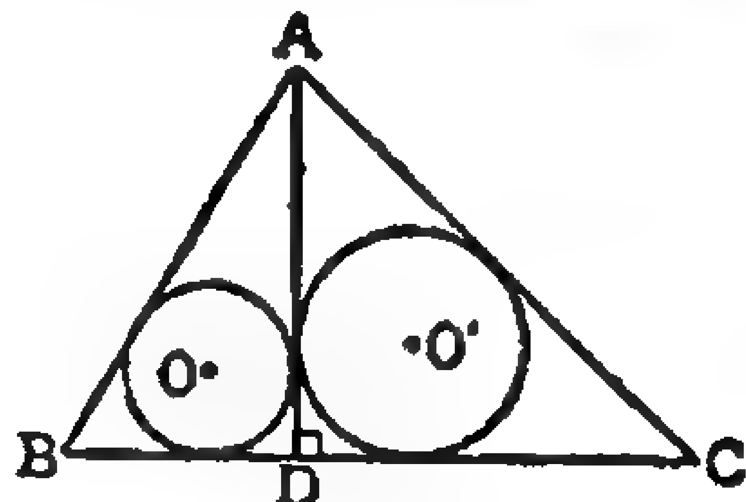
$$O'D=BD=\frac{1}{2}(AB+BC+CA). \quad ①$$

又设圆 O 和 BC 的切点为 E，则由问题 **444**，得

$$OE=BE=\frac{1}{2}(AB+BC-AC).\qquad ②$$

①－②，得　$O'D-OE=AC$.

476. 从$\triangle ABC$的顶点A作BC的垂线AD，再作$\triangle ABD$、$\triangle ACD$的内切圆O、O'，则此两圆的直径之和等于$2AD+BC-AB-AC$.



解　圆O的直径为

$$AD+BD-AB\ (\text{问题 }472)$$

圆O'的直径为

$$AD+CD-AC.$$

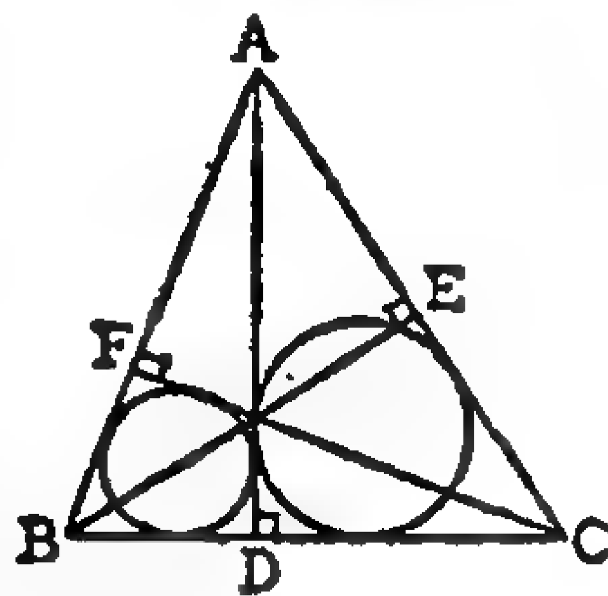
所以两圆的直径之和为

$$2AD+BC-AB-AC.$$

注　在本题中假设$\angle B$、$\angle C$都是锐角.

477. 若从锐角三角形ABC的三个顶点向对边所作的垂线分别为AD、BE、CF，则六个三角形ABD、ACD、BCE、BAE、CAF、CBF的内切圆的直径之和为

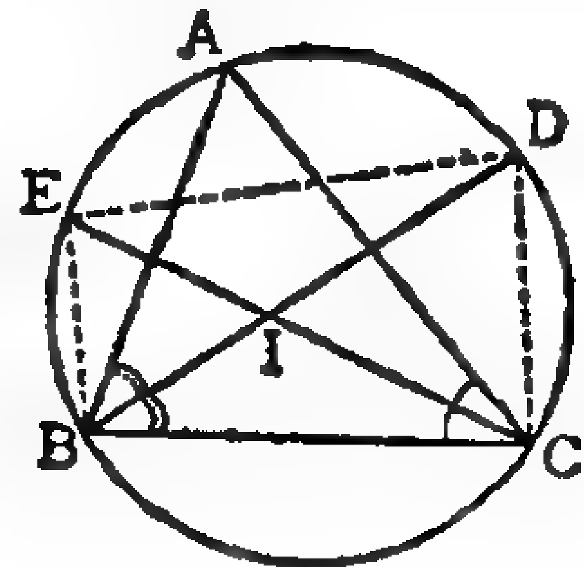
$$2(AD+BE+CF)-(AB+BC+CA).$$



解　设六个内切圆的直径顺次为d_1、d_2、d_3、d_4、d_5、d_6，则由上题知

$$d_1+d_2=2AD+BC-AB-AC,$$
$$d_3+d_4=2BE+AC-AB-BC,$$
$$d_5+d_6=2CF+AB-AC-BC.$$
$$\therefore\ d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6=2(AD+BE+CF)-(AB+BC+CA).$$

478. 在$\triangle ABC$中，$AB\neq AC$，$\angle B$、$\angle C$的平分线和这个三角形的外接圆的交点分别为D、E，为使$BD=CE$，问$\triangle ABC$的$\angle A$应满足什么条件?



解　假定$BD=CE$，则$\overset{\frown}{EAC}$和$\overset{\frown}{BAD}$或$\overset{\frown}{BCD}$相等.

若　$\overset{\frown}{EAC}=\overset{\frown}{BAD}$，

则　$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{DC}$，

$$\therefore\ \angle ECB=\angle DBC,$$

因而　$\angle B=\angle C$.

由此可知$AB=AC$，但这与题设矛盾．因此只有

$$\overset{\frown}{EAC}=\overset{\frown}{BCD},$$

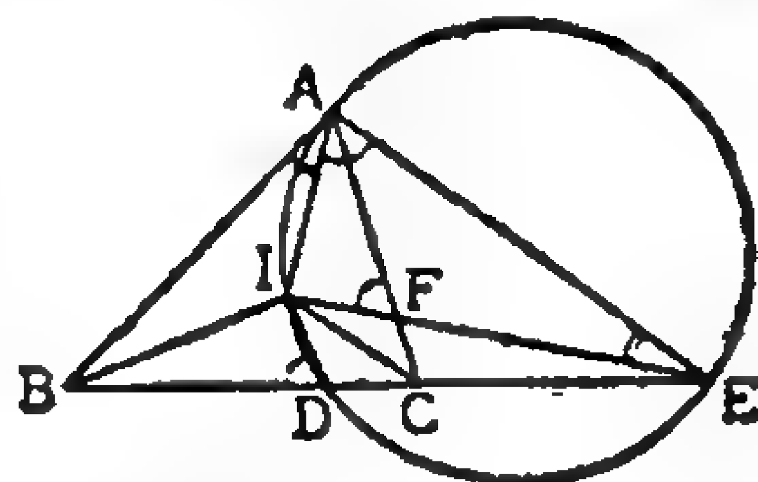
从而　$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{EAD}$.

又　$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AE}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$，

故　$\overset{\frown}{EAD}=\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{DC}$，

$$\therefore\ \overset{\frown}{BC}=\frac{1}{3}\text{圆周},\ \angle A=60^\circ.$$

479. 设过$\triangle ABC$的内心I作一圆和边AB切于点A，和BC的交点为D、E，则IC平分$\angle DIE$.



解　因四边形$AIDE$是圆内接四边形，所以

$$\angle IDB=\angle IAE.\qquad ①$$

在图中，

$$\angle IFA=\angle AEF+\angle EAF.\qquad ②$$

由于AB是切线，

$$\angle BAI=\angle AEI,$$

又　$\angle BAI=\angle CAI$，

$$\therefore\ \angle AEI=\angle CAI.$$

从而　$\angle AEI+\angle EAF=\angle IAF+\angle EAF$，

$$\therefore\ \angle IAE=\angle IFA.\qquad ③$$

由①、③，得

$$\angle IDB=\angle IFA.\qquad ④$$

又I是$\triangle ABC$的内心，有

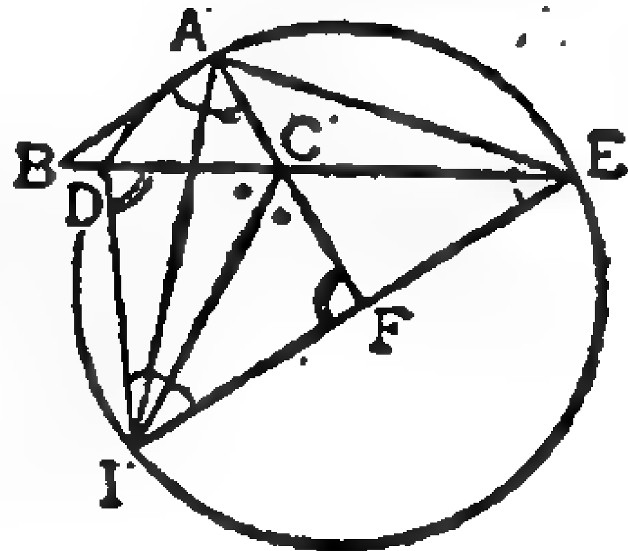
$$\angle ICD=\angle ICF.\qquad ⑤$$

由④、⑤，得

$$\angle DIC=\angle FIC$$

即IC平分$\angle DIE$.

480. 设过$\triangle ABC$的$\angle A$内的旁心I'的圆，和$\triangle ABC$的一边AB相切于顶点A，和底边BC及其延长线的交点分别为D、E，则直线$I'C$平分$\angle DI'E$.



解　同上题一样考虑.

$$\angle I'DE=\angle I'AE,$$

且BA是切线，所以

$$\angle I'EA=\angle I'AB=\angle I'AF.$$

但　　$\angle I'FA=\angle I'EA+\angle EAF,$

因而　$\angle I'FA=\angle I'AF+\angle EAF$

$$=\angle I'AE=\angle I'DC.$$

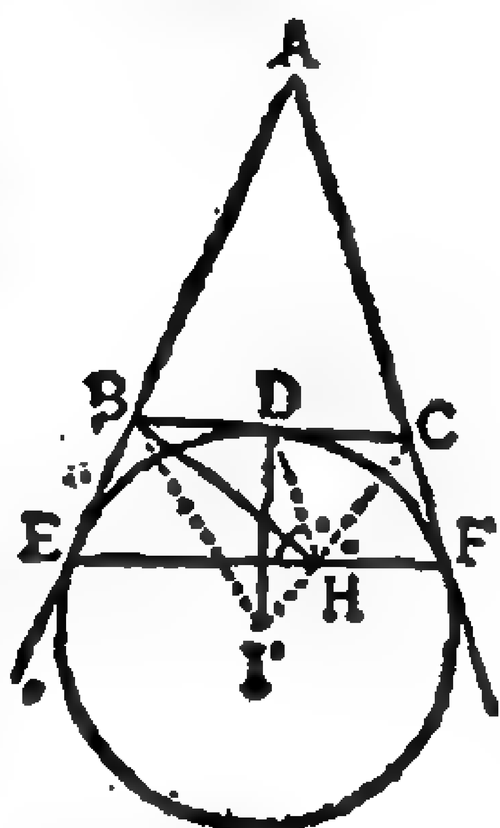
又由 I' 是旁心，知

$$\angle DCI'=\angle FCI',$$

$$\therefore\quad \triangle DCI'\cong\triangle FCI',$$

从而　$\angle DI'C=\angle FI'C.$

481. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 内的旁心为 I'，从 B 向 $I'C$ 作垂线 BH，垂足为 H，AB、AC 的延长线和圆 I' 的切点分别为 E、F，则 E、F、H 在一直线上。



解 连结 HE、HF，若能证明 $\angle EHF=2\angle R$，则三点 E、F、H 就共线，兹证明如下。

设圆 I' 和边 BC 的切点为 D，则点 E、B、D、H、I' 共圆，从而 $BD=BE$，所以

$$\angle DHB=\angle BHE.$$

又因　$\triangle DCH\cong\triangle FCH,$

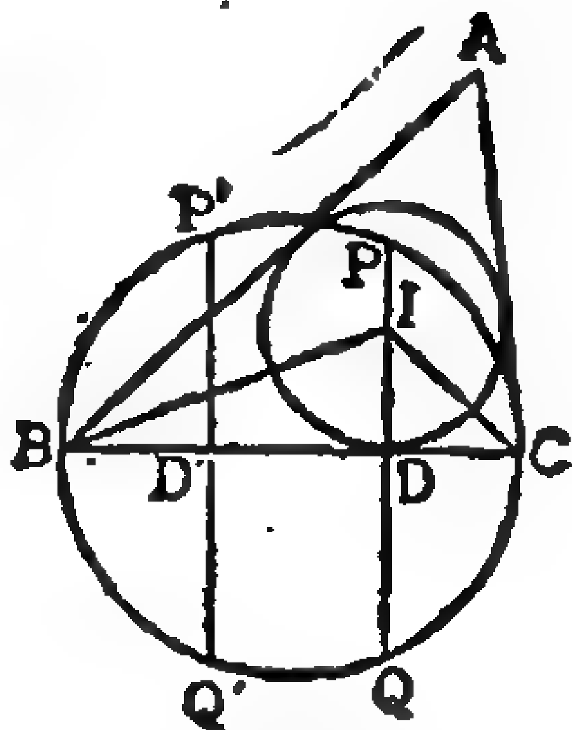
$$\therefore\quad \angle DHC=\angle CHF.$$

又　$\angle BHC=\angle R,$

$$\therefore\quad \angle EHD+\angle DHF=2\angle R,$$

故 E、H、F 在同一条直线上。

482. 若 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的大小及位置一定，且 AB、AC 的差一定，则此三角形的内心 I 在定线段上。



解 设内切圆和 BC 的切点为 D，三角形的周长为 $2p$，则

$$BD=p-AC,\ DC=p-AB,$$

$$\therefore\quad BD\sim DC=(p-AC)\sim(p-AB)$$

$$=AB\sim AC=\text{一定}.$$

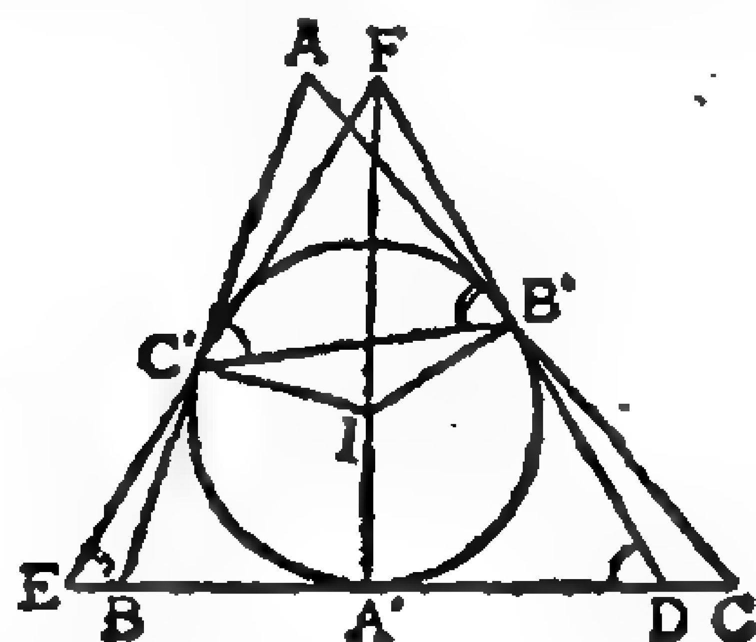
由于 BC 是定线段，BD、DC 的差一定，所以 D、D' 是定点（可按照 $AB>AC$ 或 $AB<AC$ 以确定点 D、D'）。从而内心 I 在过定点 D 且垂直于 BC 的直线上。由于 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$$\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A,$$

$$\therefore\quad \angle BIC>\angle R.$$

因此，若以 BC 为直径所作的圆和 DI 的延长线交于点 P、Q，则 I 不会在 PQ 的延长线上。即这个三角形的内心 I 在定线段 PQ（或 $P'Q'$）上。

483. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 I 和 BC、CA、AB 的切点分别为 A'、B'、C'，两圆 $BC'B'$、$CB'C'$ 和 BC 的交点分别为 D、E，则 $A'D=A'E$。



解 设 EC'、DB' 的交点为 F。因为 E、C'、B'、C 四点共圆，所以

$$\angle AB'C'=\angle E.$$

又因 B、C'、B'、D 四点共圆，所以

$$\angle AC'B'=\angle BDB'.$$

但　　$AB'=AC',$

所以　$\angle AB'C'=\angle AC'B',$

$$\therefore\quad \angle E=\angle BDB'.\qquad ①$$

因而 $\triangle FED$ 和 $\triangle AB'C'$ 的两底角相等，故 $\angle A=\angle F$。又由 $\angle AC'I=\angle R$，$\angle AB'I=\angle R$，知 A、C'、I、B'、F 五点共圆，且 $IB'=IC'$，所以 FI 平分 $\angle F$。于是由①，知 FI 垂直且平分 DE。然而 $IA'\perp ED$，故 F、I、A' 在一直线上，所以

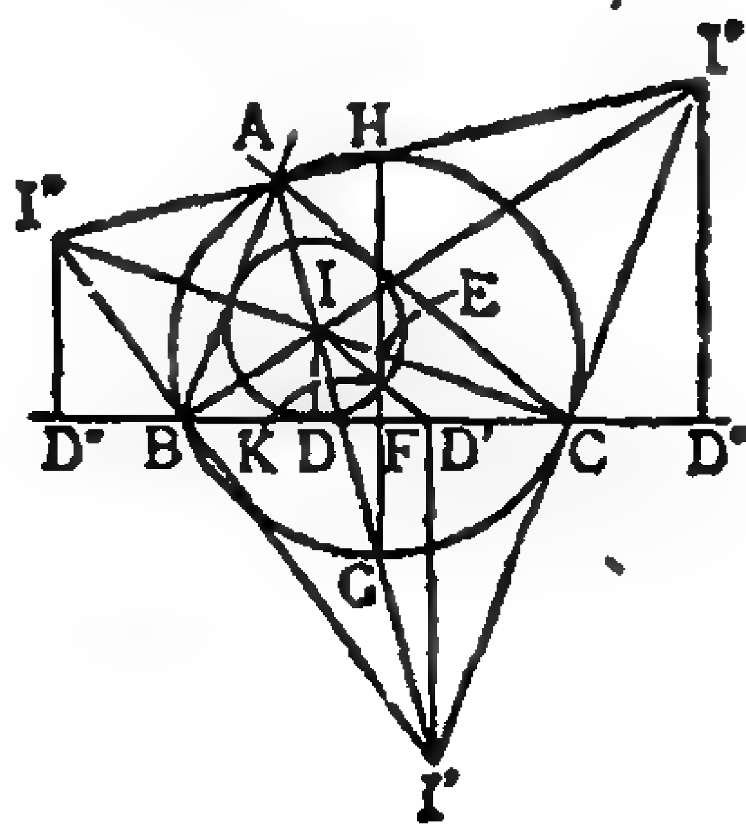
$$A'E=A'D.$$

484. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R，内切圆 I 的半径为 r，旁切圆 I'、I''、I''' 的半径分别为 r'、r''、r'''，则

$$r'+r''+r'''=4R+r.$$

其次，设从外心 E 向三边所作垂线 EF 等的长分别为 p'、p''、p'''，则

$$p'+p''+p'''=R+r.$$



再次，若延长 EF 等与外接圆的交点为 G 等，FG 等的长分别为 q'、q''、q'''，则

$$q'+q''+q'''=2R-r.$$

解 设圆 I' 与 BC 的切点为 D'，EG、ID' 的交点为 K，则

$$r'=I'D'=2GK=2(KF+FG)$$
$$=2KF+2(HG-FH)$$
$$=2KF+2HG-2FH$$
$$=ID+4HE-(I''D''+I'''D''')$$
$$=r+4R-(r''+r'''),$$
$$\therefore\quad r'+r''+r'''=4R+r. \qquad ①$$

其次， $p'=EF=R-FG$

$$=R-\frac{1}{2}(r'-r)$$

$$=R-\frac{1}{2}r'+\frac{1}{2}r.$$

同理， $p''=R-\frac{1}{2}r''+\frac{1}{2}r,$

$$p'''=R-\frac{1}{2}r'''+\frac{1}{2}r.$$

$$\therefore\quad p'+p''+p'''=3R-\frac{1}{2}(r'+r''+r''')$$

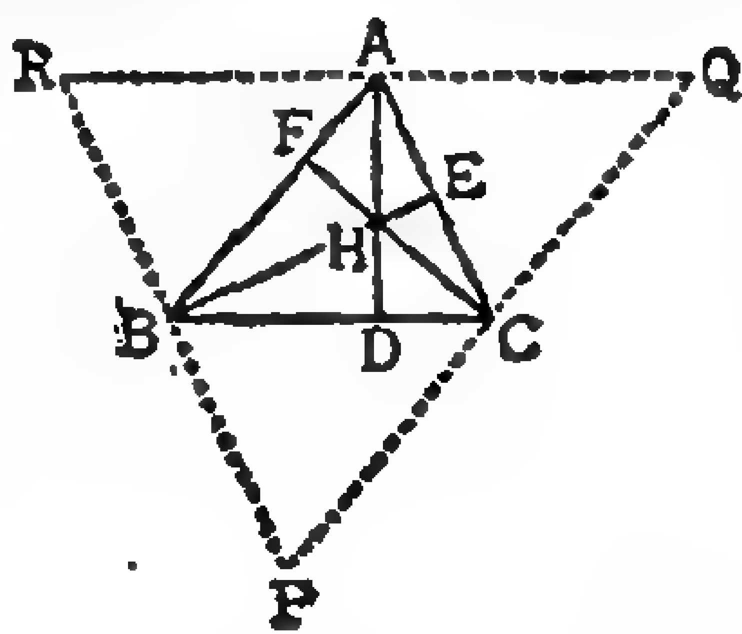
$$+\frac{3}{2}r=R+r \text{ (由 ① 得)}.$$

最后，由 $3R$ 减去上式的两边，则得

$$q'+q''+q'''=2R-r.$$

6. 高、垂心

485. 由三角形的各顶点向其对边所作的三条垂线相交于一点(这个点叫做这个三角形的垂心)。



解 设 AD、BE、CF 为 $\triangle ABC$ 的三条高，过各顶点作其对边的平行线，由此得到 $\triangle PQR$，则 $RBCA$、$QCBA$ 都是平行四边形，所以

$$AR=BC=AQ.$$

又因 $AD\perp BC,\ BC\parallel QR,$

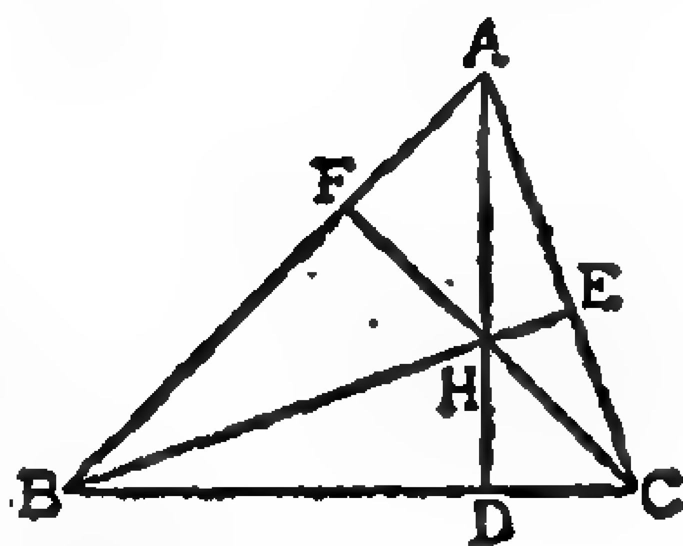
$$\therefore\quad AD\perp QR,$$

因而 AD 是 QR 的垂直平分线．同理，BE、CF 分别为 PR、PQ 的垂直平分线．由于 $\triangle PQR$ 各边的垂直平分线相交于一点(这个点是 $\triangle PQR$ 的外心)，因此 $\triangle ABC$ 的三条高 AD、BE、CF 相交于一点。

486. 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，则

$$\angle BHC+\angle BAC=2\angle R.$$

解 延长 BH、CH 和 AC、AB 的交点分别为 E、F，则



$BE\perp AC$, $CF\perp AB$,

$$\therefore\quad \angle AEH=\angle R$$
$$=\angle AFH.$$

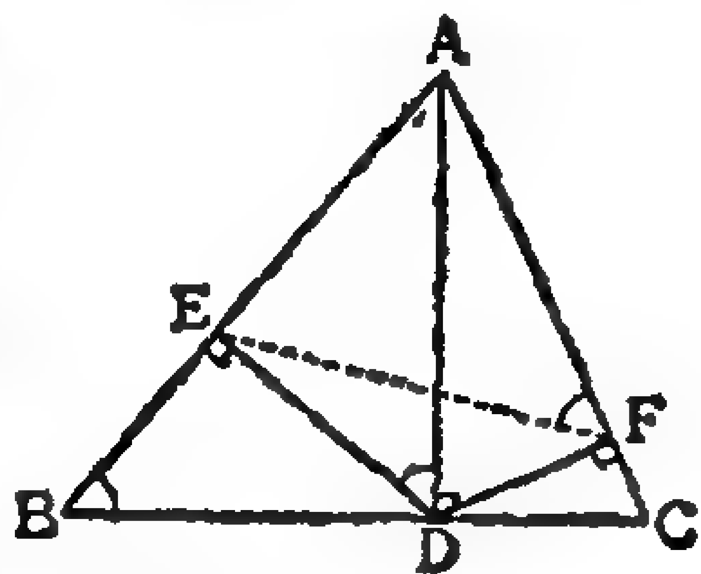
因此四边形 $AEHF$ 是圆内接四边形，

$$\therefore\quad \angle BAC+\angle EHF=2\angle R.$$

但 $\angle EHF=\angle BHC,$

$$\therefore\quad \angle BAC+\angle BHC=2\angle R.$$

487. 由 $\triangle ABC$ 的顶点 A 向对边 BC 作垂线 AD，再由其垂足 D 向 AB、AC 分别作垂线 DE、DF，则四边形 $BCFE$ 为圆内接四边形。



解 因为四边形 $AEDF$ 是圆内接四边形，所以

$$\angle AFE=\angle ADE. \qquad ①$$

在 $\triangle ADB$ 中，$\angle ADB=\angle R$，且

$$DE\perp AB,$$

$$\therefore\quad \angle ADE=\angle ABD. \qquad ②$$

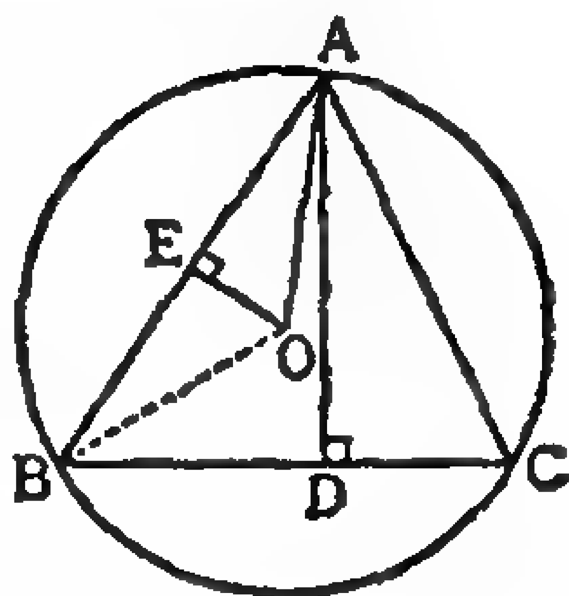
于是由①、②，得

$$\angle AFE=\angle ABD.$$

因此，四边形 $BCFE$ 是圆内接四边形。

488. 设从 $\triangle ABC$ 的顶点 A 所作对边的垂线为 AD，且 $\triangle ABC$ 的外心为 O，则

$$\angle BAO=\angle DAC.$$



解 从 O 作 AB 的垂线 OE，则

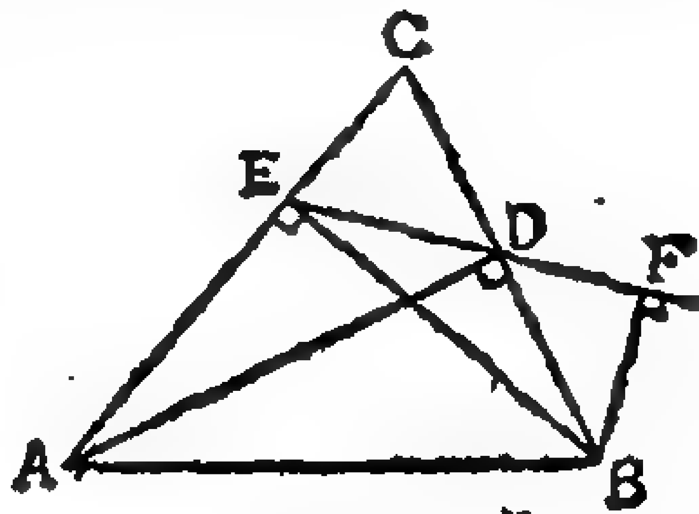
$$\angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle C.$$

又因 $\angle AEO=\angle ADC=\angle R,$

$$\therefore\quad \angle BAO=\angle DAC.$$

489. 从 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A、B 所作其对边的垂线分别为 AD、BE，再从点 B 作 DE 的垂线 BF，则有

$$\angle FBD=\angle EBA.$$



解 因为

$$\angle AEB=\angle R=\angle ADB,$$

所以四边形 $EABD$ 为圆内接四边形，从而

$\angle FDB=\angle EAB$,

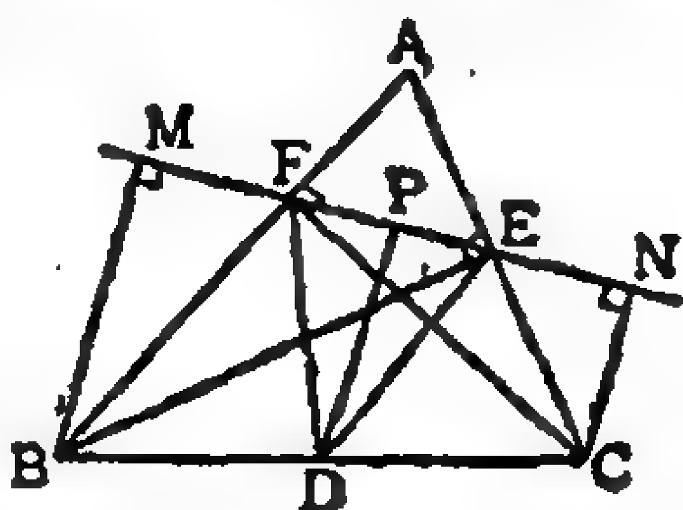
因此，在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle BAE$ 中，

$\angle DFB=\angle AEB=\angle R$,

$\angle FDB=\angle EAB$,

故　　$\angle FBD=\angle EBA$.

490. 从 $\triangle ABC$ 的顶点 B、C 分别作其对边的垂线 BE,CF; 再从 B,C 分别作 EF 的垂线 BM、CN, 则 $FM=EN$.



解　设 BC 的中点为 D, 则由 $\angle BEC$、$\angle BFC$ 都是直角，可知 $DF=DE$.

设 EF 的中点为 P, 则

$PE=PF$.　　①

且 $EF\perp PD$, 从而

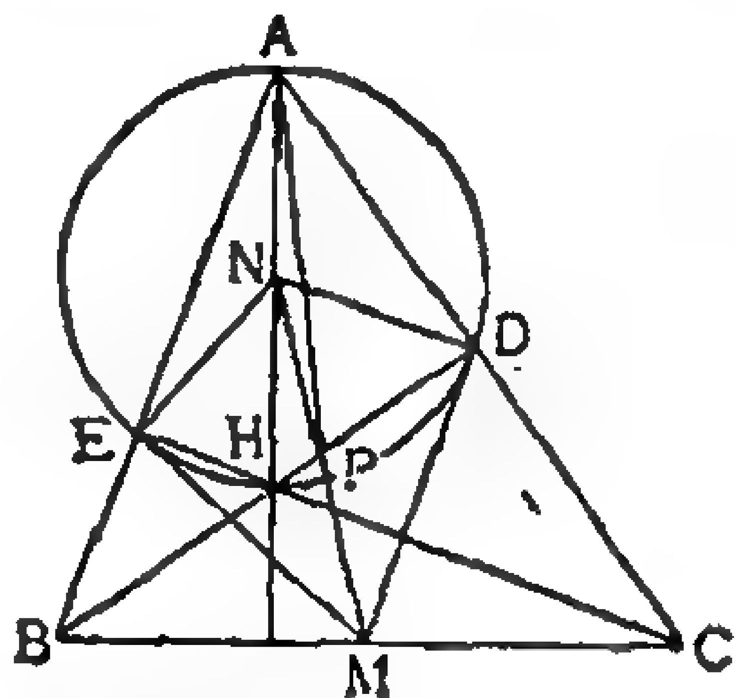
$BM\parallel DP\parallel CN$,

$\therefore\ PM=PN$.　　②

于是由①、②，可得

$FM=EN$.

491. 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H, BC、AH 的中点分别为 M、N, 若以 AH 为直径作圆和 MN 的交点为 P, 则 AP 平分 $\angle BAC$.



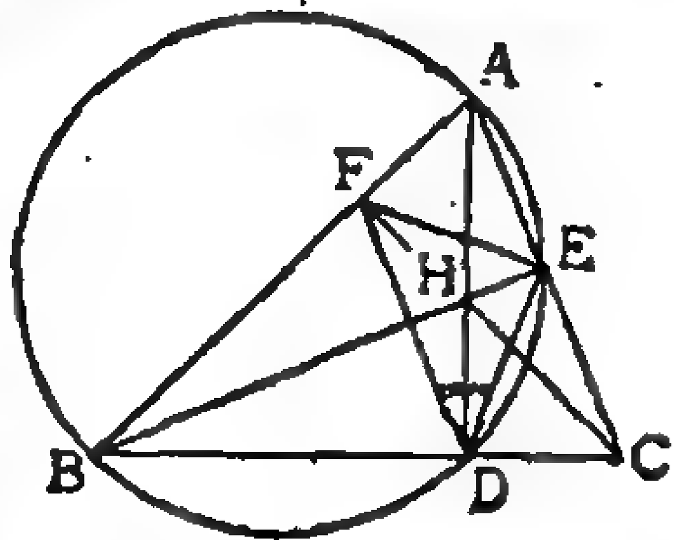
解　延长 BH、CH 和 AC、AB 的交点为 D、E, 则 A、D、P、E 在以 N 为圆心的圆上；因为 M 是 BC 的中点，$\angle D$、$\angle E$ 是直角，所以 $MD=ME$, 从而 $\triangle MEN$ 和 $\triangle MDN$ 是三边分别相等的全等三角形.

$\therefore\ \angle ENP=\angle DNP$,

$\overset{\frown}{EP}=\overset{\frown}{DP}$,

故　　$\angle EAP=\angle DAP$.

492. 从锐角三角形的各顶点向其对边所作的垂线平分其垂足三角形的顶角.



解　设从 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 向其对边所作垂线的垂足分别为 D、E、F, 且 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，则

$\angle BFH=\angle R=\angle HDB$.

所以 B、F、H、D 四点共圆，从而

$\angle FDH=\angle FBH$.　　①

又因　$\angle AEB=\angle R=\angle ADB$,

所以 A、E、D、B 四点共圆，从而

$\angle ADE=\angle ABE$.　　②

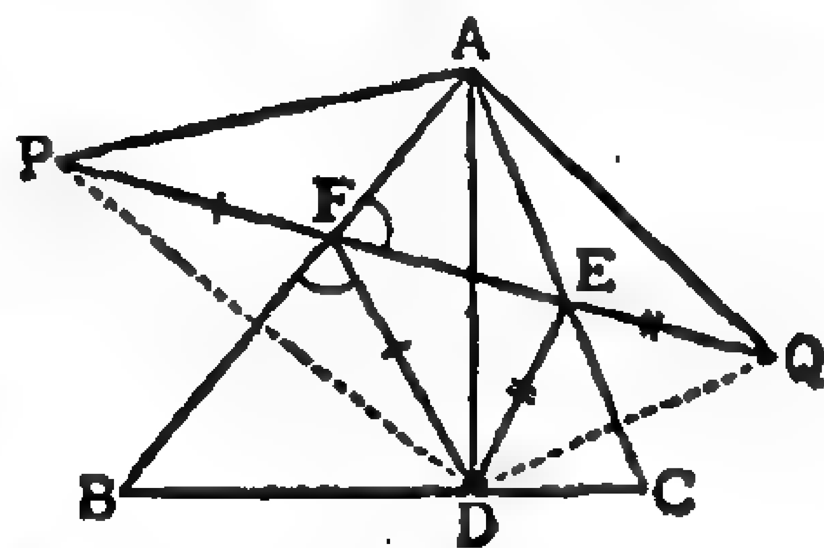
由①、②，得

$\angle FDA=\angle ADE$,

即 AD 平分 $\angle FDE$.

同理，BE、CF 分别平分 $\angle FED$、$\angle EFD$.

493. 若三角形的内接三角形的两边与原来三角形的一边分别成等角，则这个内接三角形是原来三角形的垂足三角形.



解　延长 EF, 使 $FP=FD$, 则

$\angle AFE=\angle PFB$,

但是由题设知

$\angle AFE=\angle BFD$,

$\therefore\ \angle PFB=\angle BFD$.

又　　$FP=FD$, $\angle AFP=\angle AFD$,

$\therefore\ \triangle APF\cong\triangle ADF$.

于是

$AP=AD$,　　①

且

$\angle ADF=\angle APF$.　　②

同理，在 FE 的延长线上，取 $EQ=ED$, 则可证明

$AQ=AD$,　　③

$\angle ADE=\angle AQE$.　　④

于是由①、③，得

$AP=AQ$,

$\therefore\ \angle P=\angle Q$.

又由②、④，得

$\angle FDA=\angle EDA$.　　⑤

由题设知

$\angle FDB=\angle EDC$.　　⑥

所以由⑤、⑥，可得

$\angle ADB=\angle R$,

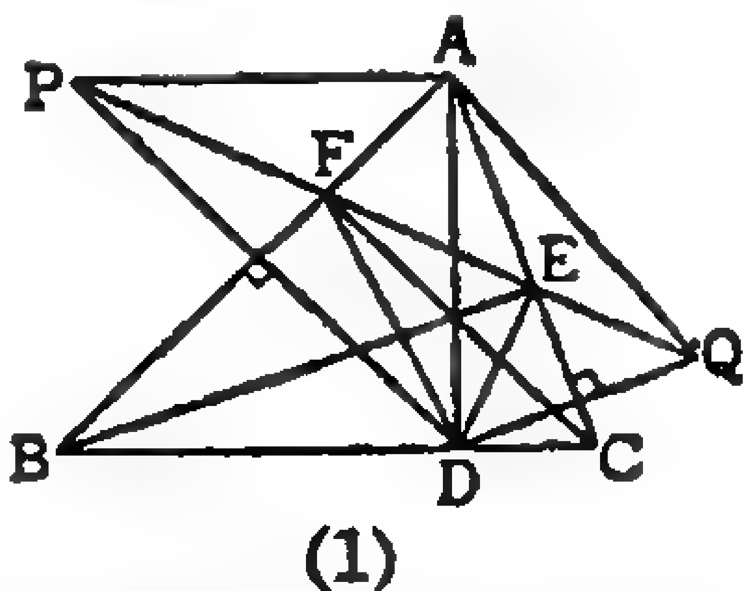
从而　　$AD\perp BC$.

同理，连结 BE、CF, 则 $BF\perp AC$, $CF\perp AB$, 因此 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形.

494. 证明　顶点分别在给定的锐角三

角形 ABC 的各边上的三角形中，周长最小的是垂足三角形。

解　在 $\triangle ABC$ 的各边上分别取一顶点作成垂足三角形 DEF，如图 (1)；再在 $\triangle ABC$ 的各边上分别取一顶点作成任意三角形 $D'E'F'$，如图 (2)。



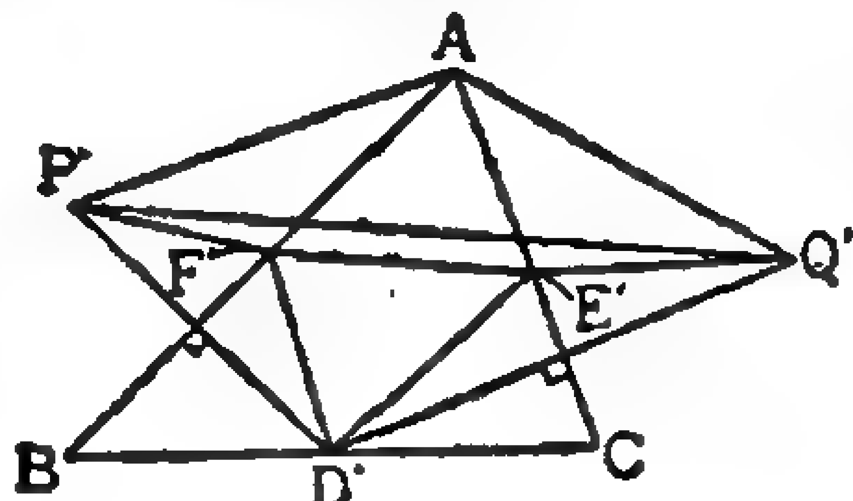
(1)

设在图 (1) 中，点 D 关于 AB、AC 的对称点分别为 P、Q，则由上题知 P、F、E、Q 构成一直线，且

垂足三角形 DEF 的周长 $=PQ$.

在图 (2) 中，设点 D' 关于 AB、AC 的对称点分别为 P'、Q'，连结 $P'Q'$，则

$P'F'+F'E'+E'Q'>P'Q'$.



(2)

此式左边是 $\triangle D'E'F'$ 的周长，所以

$\triangle D'E'F'$ 的周长 $>P'Q'$.

又在 $\triangle APQ$ 和 $\triangle AP'Q'$ 中，

$\angle PAQ=2\angle A=\angle P'AQ'$,

$AP=AQ(=AD)$,

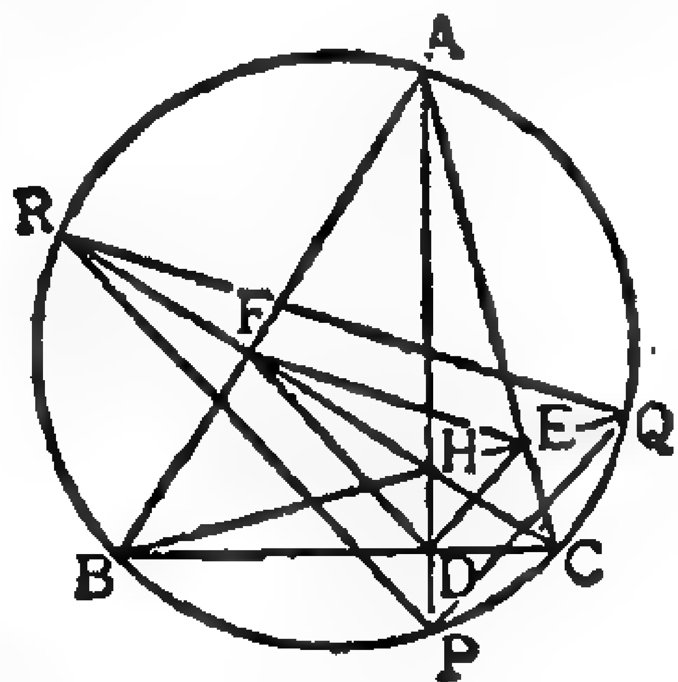
$AP'=AQ'(=AD')$.

所以这两个三角形是顶角相等的等腰三角形，且 $AD'>AD$（因 AD 是 BC 的垂线），于是可知 $AP'>AP$,

$\therefore\ P'Q'>PQ$,

于是 $\triangle D'E'F'$ 的周长 $>P'Q'>PQ=$ 垂足三角形 DEF 的周长，即垂足三角形的周长最小。

495.　设从锐角三角形 ABC 的各顶点向对边作垂线 AD、BE、CF，并延长和外接圆分别交于 P、Q、R，则 $\triangle ABC$ 的垂心 H 是 $\triangle PQR$ 的内心。



解　因为同弧上的圆周角相等，

$\therefore\ \angle APR=\angle ACR,$　①

$\angle APQ=\angle ABQ.$　②

又由题设知

$\angle BFC=\angle R=\angle BEC$,

所以 B、F、E、C 四点共圆，从而

$\angle FCE=\angle FBE$,

即　$\angle ACR=\angle ABQ$.

于是由 ①、②，可得

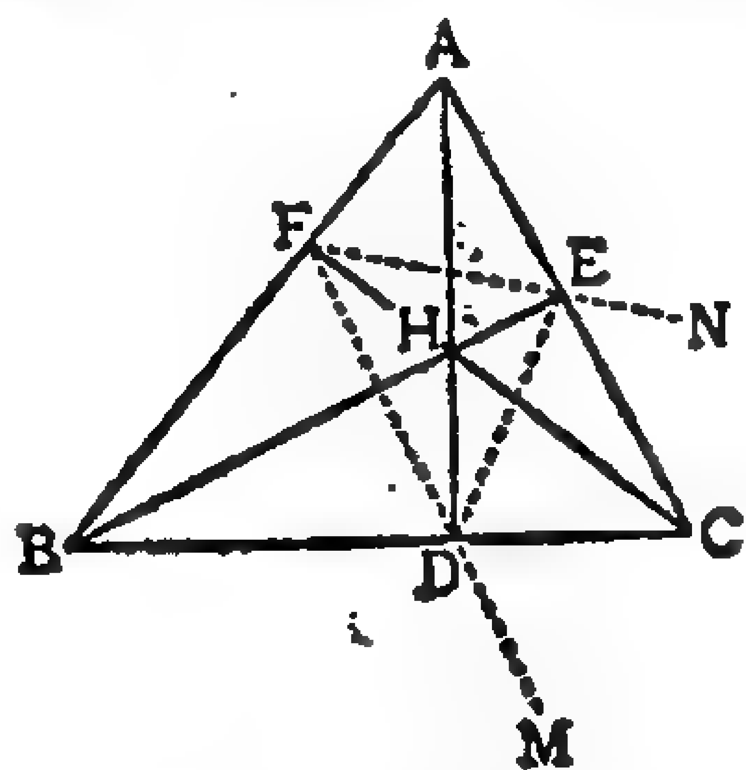
$\angle APQ=\angle APR$,

即 HP 平分 $\angle RPQ$.

同理，HQ 平分 $\angle PQR$. 故 H 是 $\triangle PQR$ 的内心。

496.　证明锐角三角形 ABC 的垂心 H 是其垂足三角形 DEF 的内心；三个顶点 A、B、C 是垂足三角形的旁心。

解　设 $\triangle ABC$ 的垂足三角形为 DEF，根据问题 **492**，可知 AD 平分 $\angle EDF$.

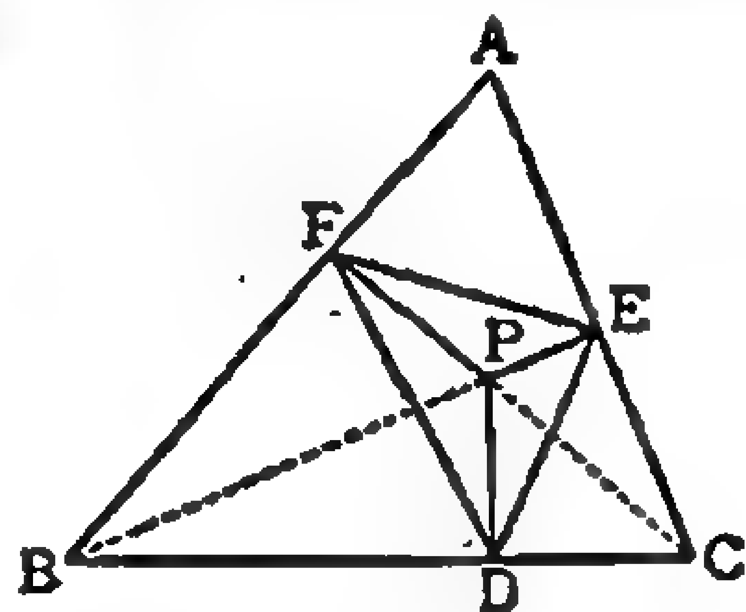


同理，BE 平分 $\angle FED$，CF 平分 $\angle DFE$，所以 H 是 $\triangle DEF$ 的内心。

因为 $BC\perp HD$，$CA\perp HE$，$AB\perp HF$，所以 BC、CA 分别是 $\triangle DEF$ 的 $\angle D$、$\angle E$ 的外角平分线。由此可知 C 是 $\triangle DEF$ 中 $\angle D$ 的外角平分线和 $\angle E$ 的外角平分线的交点，因而 C 是 $\triangle DEF$ 的旁心。

同理，A、B 也是 $\triangle DEF$ 的旁心。

497.　从 $\triangle ABC$ 内一点 P 向各边作垂线，若分别连结其垂足所成的三角形是正三角形，则 $\angle BPC=\angle A+60°$.



解　设 $\triangle DEF$ 为正三角形，连结 BP、CP，则

$\angle BPC=\angle A+\angle ABP+\angle ACP.$　①

但由 $PF\perp AB$，$PD\perp BC$，$PE\perp AC$，知 B、D、P、F，P、D、C、E 分别共圆，所以

$\angle FBP=\angle PDF$，$\angle ECP=\angle PDE$.

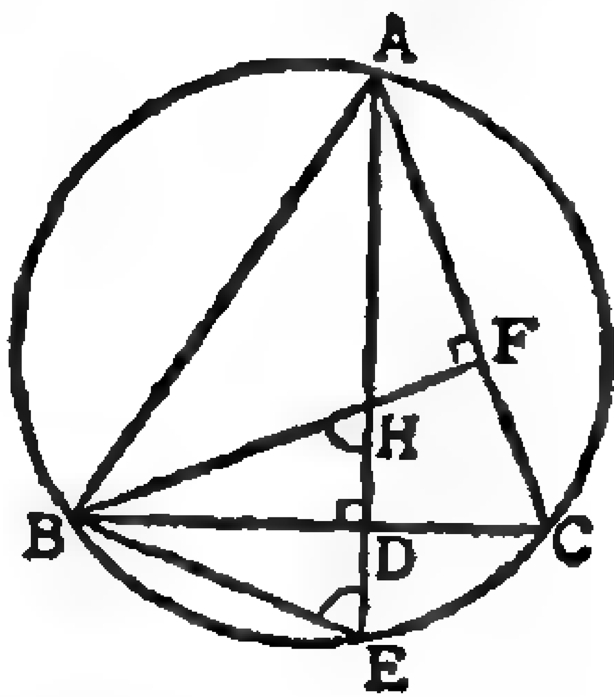
从而　$\angle ABP+\angle ACP=\angle EDF=60°$.

把此式代入 ①，则得

$\angle BPC=\angle A+60°$.

498.　设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，并且直线 AH 和外接圆及边 BC 的交点分别为 E、D,

则 $HD=DE$。



解 由 $\angle AFB=\angle R=\angle ADB$,知 $AFDB$ 是圆内接四边形,

$\therefore\ \angle FAD=\angle FBD$. ①

又知

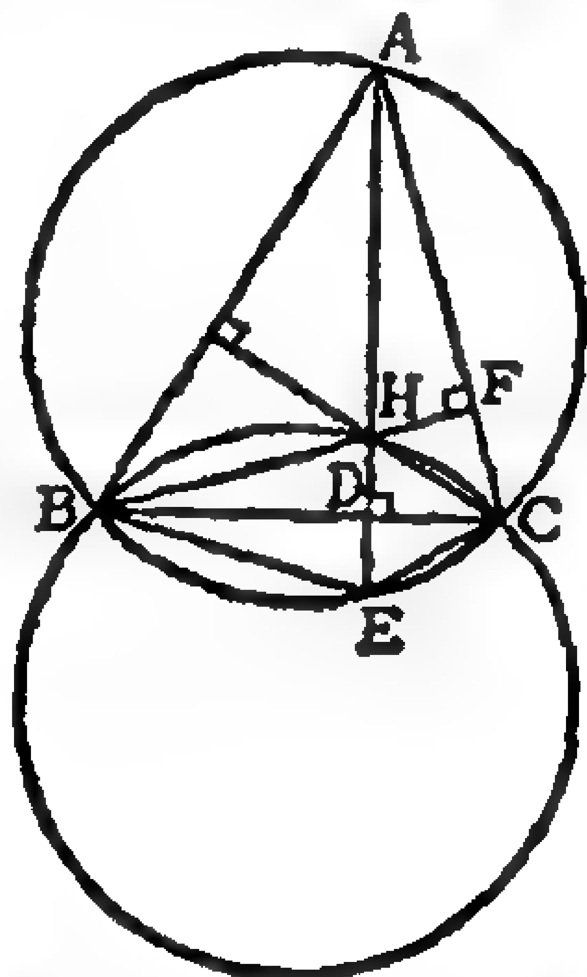
$\angle CAD=\angle CBE$, ②

于是由①、②,得

$\angle HBD=\angle EBD$.

又 $BD\perp HE$,可知 BD 是 $\triangle BHE$ 的顶角 B 的平分线且垂直于底边 HE,所以 D 是 HE 的中点,即 $HD=DE$。

499. 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H,则三角形 ABC、ABH、BCH、CAH 的外接圆都相等。



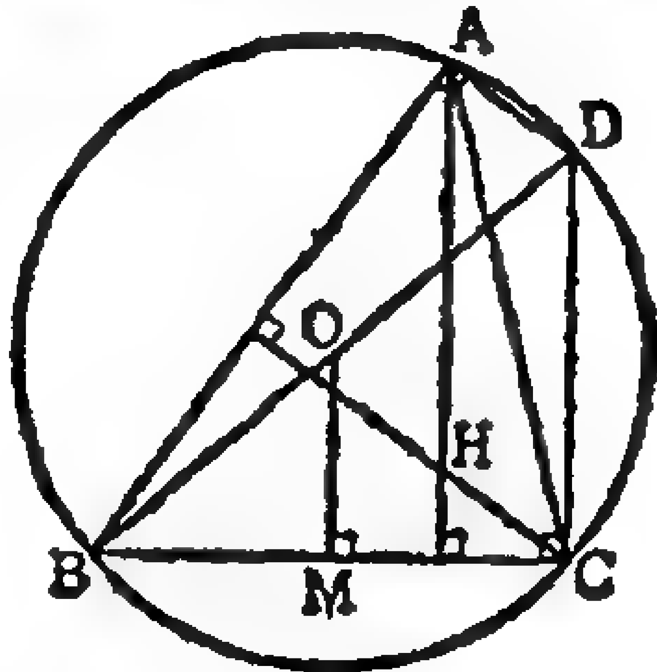
解 由上题知 $HD=DE$,所以

$\triangle BCH\cong\triangle BEC$,

从而 $\triangle BCH$ 的外接圆等于 $\triangle BEC$ 的外接圆,然而 $\triangle BEC$ 的外接圆就是 $\triangle ABC$ 的外接圆。因此 $\triangle BCH$ 的外接圆就等于 $\triangle ABC$ 的外接圆。

同理,$\triangle ABH$ 和 $\triangle CAH$ 的外接圆都等于 $\triangle ABC$ 的外接圆。所以上述四个三角形的外接圆相等。

500. 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H,外心 O 到边 BC 的距离为 OM,则 $AH=2OM$。



解 作直径 BD,则 O、M 分别是 BD、BC 的中点,所以

$OM\parallel DC$,

且 $DC=2OM$.

又因 $AD\perp AB$, $CH\perp AB$,

$\therefore\ AD\parallel CH$.

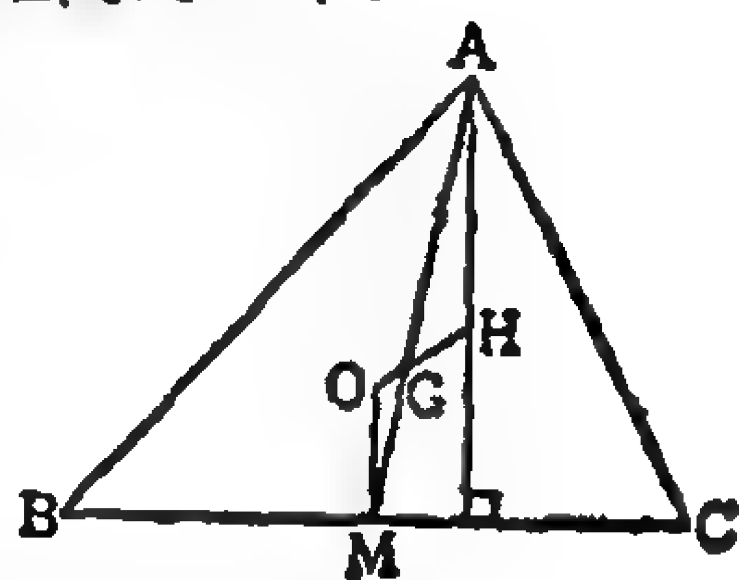
又知 $OM\parallel DC$,

$\therefore\ AHCD$ 是平行四边形。

从而 $AH=CD$,

$\therefore\ AH=2OM$.

501. 证明 $\triangle ABC$ 的外心 O,垂心 H,重心 G 在一条直线上,而且外心和重心的距离等于垂心和重心的距离的一半。



解 从外心 O 向 BC 作垂线 OM,由上题知

$$OM=\frac{1}{2}AH.\qquad ①$$

设 OH 和 AM 的交点为 G,则

$\triangle OMG\backsim\triangle HAG$,

$\therefore\ AG:GM=AH:OM$

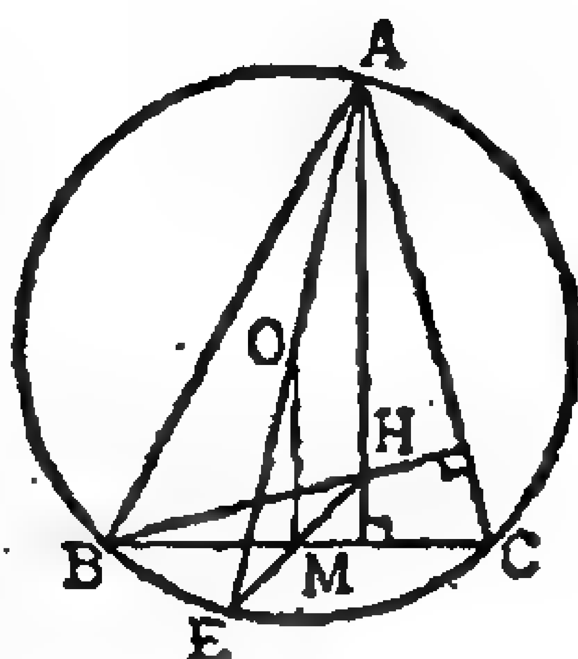
$=2:1$。(参照上题) ②

但 AM 为 $\triangle ABC$ 的中线,所以由②知 G 是这个三角形的重心,所以 O、G、H 在同一直线上。

又 $OG:GH=OM:AH=1:2$,

$$\therefore\ OG=\frac{1}{2}GH.$$

502. 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H,AE 为外接圆过点 A 的直径,连结 EH,则直线 EH 过 BC 的中点 M,且 $ME=MH$。



解 设从 $\triangle ABC$ 的外心 O 作 BC 的垂线 OM,则 M 是 BC 的中点,所以

$$OM=\frac{1}{2}AH\ (\text{问题 }500).$$

又 $AO=OE$,

$AH\parallel OM$ (同垂直于 BC)。

因此,H、M、E 在一直线上.又 O 是 AE 的中点,所以 M 为 HE 的中点,即

$ME=MH$.

503. 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H,以 AH 为直径的圆和 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点为 D,则 DH 过 BC 的中点 M。

解 设 DH 和 BC 的交点为 M,作直径 AE,则

$\angle ADE=\angle R=\angle ADH$.

所以 DE 和 DH 重合,从而 DE 过点 M,但四边形 $HBEC$ 是平行四边形,所以 M 是 BC 的中点,因而 DH 必过 BC 的中点 M。

504. 从锐角三角形 ABC 的两个顶点 A、B 所作对边 BC、CA 的垂线分别为 AX、BY，其垂足为 X、Y，若 M 是 AB 的中点，则

$\angle MXY=\angle C$.

解 因 $AX\perp BC$，$BY\perp AC$，设 AX、BY 的交点为 P，则四边形 $AYXB$、$PXCY$ 都是圆内接四边形，

$\therefore\quad \angle ABY=\angle AXY,\ \angle APY=\angle C.$

又因为 M 是直角三角形 AXB 斜边 AB 的中点，所以

$$\angle MAX=\angle MXA.$$

$$\therefore\quad \angle MXY=\angle MXA+\angle AXY=\angle MAX+\angle ABY=\angle APY,$$

故 $\qquad \angle MXY=\angle C$.

505. 设从一点 P 向不过点 P 的两直线 x、y（交点为 O）所作垂线的垂足分别为 X、Y，从点 X 向 y、从点 Y 向 x 所作垂线的垂足分别为 X'、Y'，则 $PO\perp X'Y'$.

解 若延长 YP、XP 和 Ox、Oy 的交点分别为 A、B，则在 $\triangle OAB$ 中，$AY\perp OB$，$BX\perp OA$，所以 P 是 $\triangle AOB$ 的垂心.

$$\therefore\quad OP\perp AB. \qquad ①$$

但是 $\angle AXB=\angle R=\angle AYB$，所以 A、X、Y、B 共圆.

$$\therefore\quad \angle XAB=\angle XYX'. \qquad ②$$

又因 X、Y、X'、Y' 也共圆，

$$\therefore\quad \angle XYX'=\angle OY'X'. \qquad ③$$

由②、③，得 $\quad \angle XAB=\angle OY'X'$,

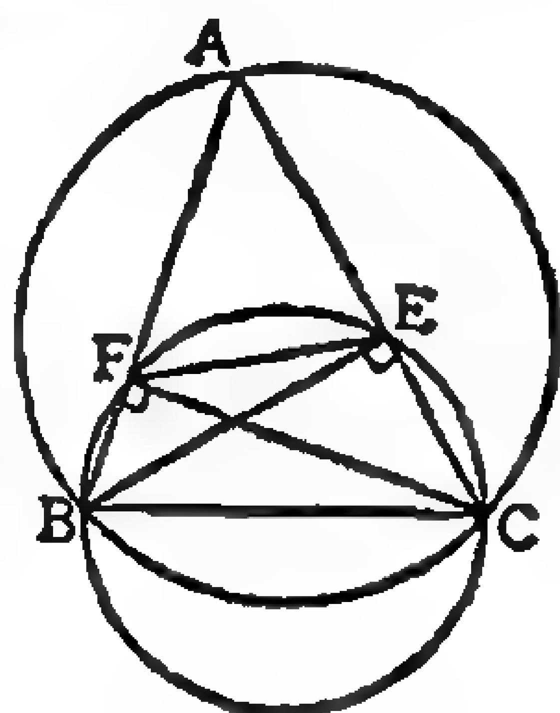
$$\therefore\quad AB\parallel X'Y'.$$

但在①中，$\qquad AB\perp OP$,

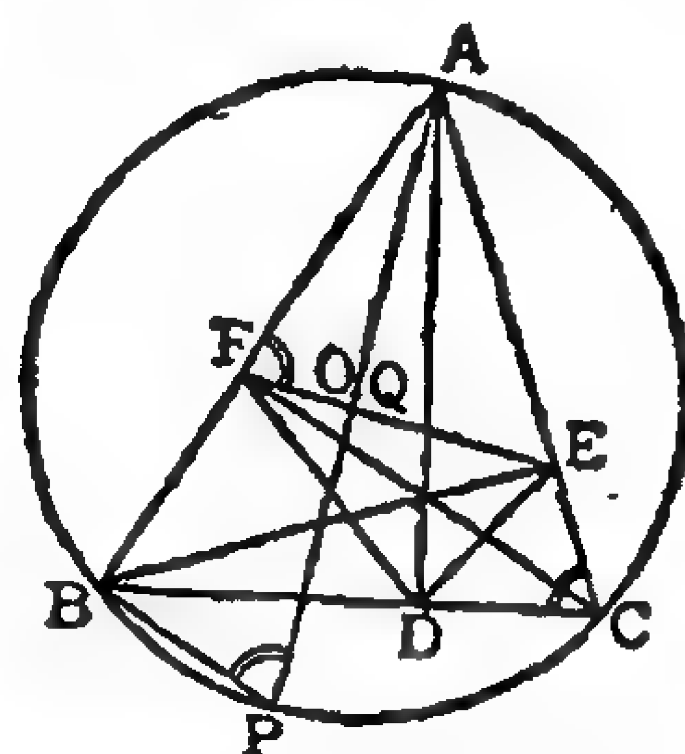
$$\therefore\quad X'Y'\perp OP.$$

506. 若 $\triangle ABC$ 的底边 BC 及顶角 A 的大小一定，从 B、C 向对边所作的垂线的垂足分别为 E、F，则 EF 的长一定.

解 因为 $\angle BEC=\angle R=\angle BFC$，所以 E、F 在以 BC 为直径的定圆周上，而 $\angle ABE$ 是定角 A 的余角，所以也是定角．因此，在以 BC 为直径的定圆上的 $\angle EBF$ 的大小是一定的，所以这个定角所对的弦 EF 的长也是一定的.



507. 设 $\triangle ABC$ 的垂足三角形为 DEF，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，则 OA、OB、OC 分别垂直于 EF、FD、DE.



解 设延长 AO 与 EF 及圆周的交点分别为 Q、P，则 AP 是圆的直径，且

$\angle P=\angle ACB$.

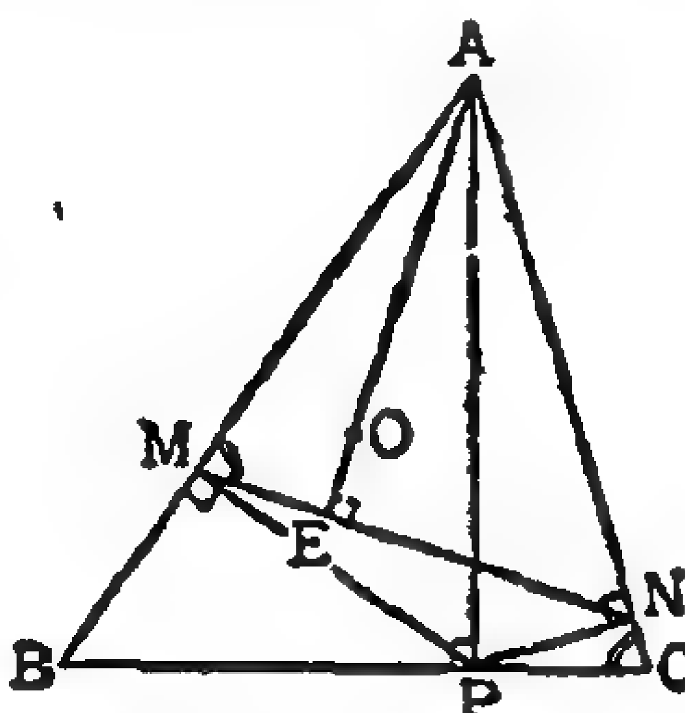
又因 $BFEC$ 是圆内接四边形，所以 $\angle AFE=\angle ACB$，因此 $\angle P=\angle AFE$，故四边形 $FQPB$ 是圆内接四边形.

$$\therefore\quad \angle AQF=\angle ABP=\angle R,$$

$$AO\perp EF.$$

同理，$\qquad OB\perp FD,\ OC\perp DE.$

508. 设从 $\triangle ABC$ 的顶点 A 向底边所作垂线的垂足为 P，从 P 向 AB、AC 所作垂线的垂足分别为 M、N，则直线 MN 垂直于 $\triangle ABC$ 的外接圆的过 A 点的直径.



解 由问题 **487** 知 $MBCN$ 是圆内接四边形，所以

$$\angle AMN=\angle ACP. \qquad ①$$

若 $AE\perp MN$，则由①，可得

$$\angle MAE=\angle PAC.$$

事实上，设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，由问题 **488**，

$$\angle PAC=\angle MAO,$$

$$\therefore\quad \angle MAE=\angle MAO,$$

于是 $\qquad AO\perp MN.$

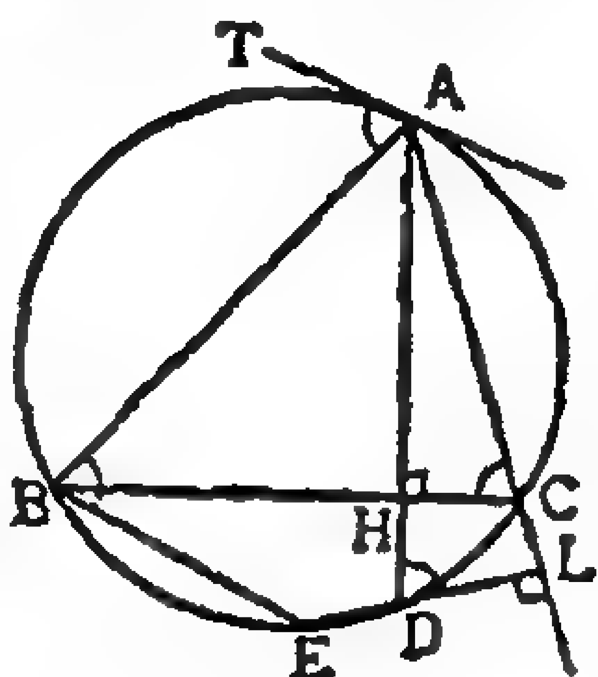
509. 设从锐角三角形 ABC 的顶点 A 作 BC 的垂线和外接圆的交点为 D，再从 D 作 AC 的垂线和外接圆的交点为 E，则 BE 和外接圆在 A 点的切线 AT 平行.

解　设 AD 和 BC 的交点为 H，AC 和 ED 的交点为 L，则 $HCLD$ 是圆内接四边形．所以

$\angle ACH=\angle HDL$．①

又因 $ABED$ 是圆内接四边形，所以

$\angle ABE=\angle ADL$．②



由①、②，得

$$\angle ABE=\angle ACB.\quad ③$$

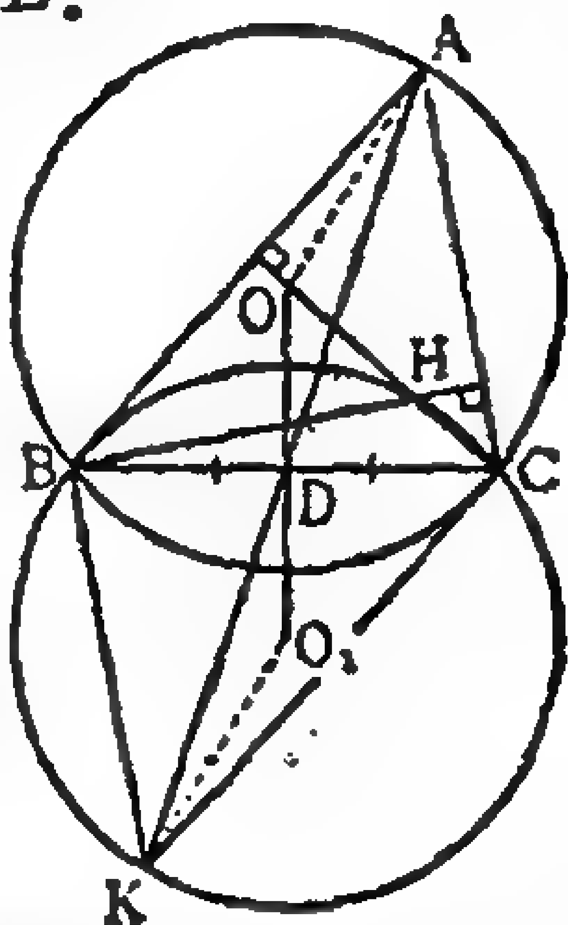
但是 AT 是切线，所以

$$\angle TAB=\angle ACB.\quad ④$$

由③、④，得　$\angle TAB=\angle ABE$，

$$\therefore\quad AT\parallel BE.$$

510.　设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，延长中线 AD 和 $\triangle BCH$ 的外接圆的交点为 K，则 D 是线段 AK 的中点．



解　连结 BK、CK．$\angle BAC$、$\angle BKC$ 都是 $\angle BHC$ 的补角，它们相等．

$$\therefore\quad 圆 ABC=圆 KBC.$$

设 $\triangle ABC$、$\triangle BKC$ 的外接圆的圆心分别为 O、O_1，则 OO_1 过公共弦的中点 D．

$$\therefore\quad OD=O_1D,\ OA=O_1K,$$

而且　　$OA>OD$，$O_1K>O_1D$．

在 $\triangle OAD$、$\triangle O_1KD$ 中，两组等边中大边所对的角 $\angle ADO=\angle KDO_1$，这时 $\angle OAD$、$\angle O_1KD$ 不可能构成补角，所以

$$\triangle OAD\cong\triangle O_1KD.$$

$$\therefore\quad AD=KD,$$

即 D 是 AK 的中点．

511.　设 $\triangle ABC$ 的三条垂线为 AD、BE、CF，其垂心为 H，若 $\triangle HBC$ 的外接圆和 AB、AD、AC 的交点分别为 K、L、M，则

$AF=FK$，$AD=DL$，

$AE=EM$．

解　由问题 **499**，两圆 HBC 和 ABC 相等．连结 KC，则 $\angle AKC=\angle BAC$．

$$\because\quad AB\perp CF,$$

$$\therefore\quad \triangle CFA\cong\triangle CFK，因而 AF=FK.$$

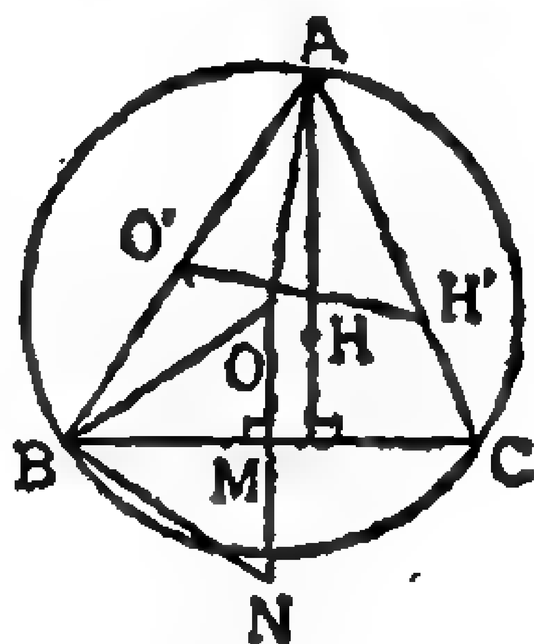
同理，　　$AE=EM$．

又因 A 和 L 关于 BC 是对称的，所以

$$AD=DL.$$

512.　设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，垂心为 H，若在边 AB、AC 上截取 $AO'=AO$，$AH'=AH$，则 $O'H'=AO$．

解　若由点 O 作 BC 的垂线 OM 并延长到 N，使 $MN=OM$．由问题 **500**，



$AH=2OM=ON$．

在 $\triangle AO'H'$、$\triangle OBN$ 中，

$AO'=BO$，

$AH'=AH=ON$，

$$\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle BON.$$

$$\therefore\quad \triangle AO'H'\cong\triangle OBN,$$

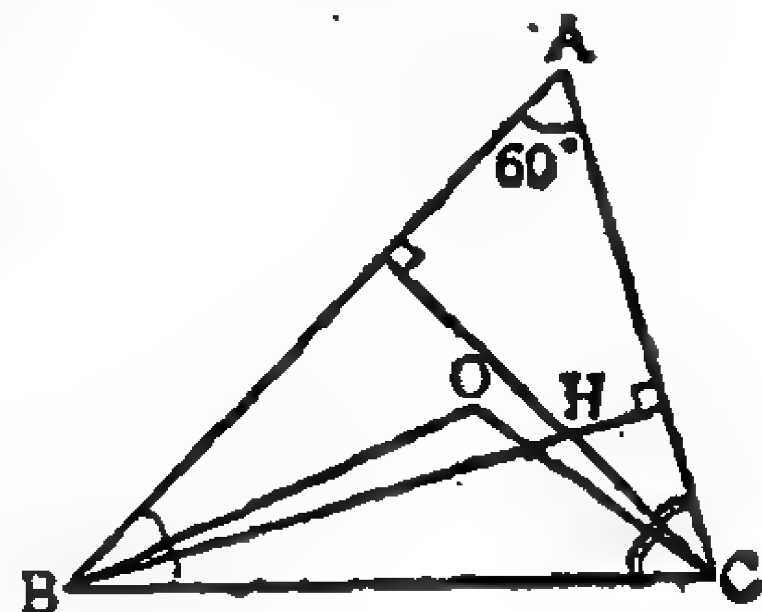
$$\therefore\quad BN=O'H'.$$

但是 BC 是 ON 的垂直平分线，

$$BN=BO,$$

$$\therefore\quad BO=O'H'，因而 O'H'=AO.$$

513.　设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A=60°$，从 B、C 向对边所作垂线的交点为 H，$\angle B$ 及 $\angle C$ 的平分线的交点为 O，则 B、O、H、C 四点共圆．



解　因

$$\angle BOC=180°-\left(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\right)$$

$$=180°-\left(90°-\frac{1}{2}\angle A\right)$$

$$=180°-(90°-30°)=120°,$$

又因　$\angle BHC=\angle A$ 的补角

$$=180°-60°=120°.$$

所以，点 O、H 在以 BC 为弦的圆周上，即 B、O、H、C 四点共圆．

514.　设 $\triangle ABC$ 的重心为 H，外心为 O，若 $\angle A=60°$，则三直线 HO、AB、AC 所作成的 $\triangle APQ$ 是正三角形．

解　因 $\angle BAC=60°$，所以 $\overset{\frown}{BC}$ 是外接圆

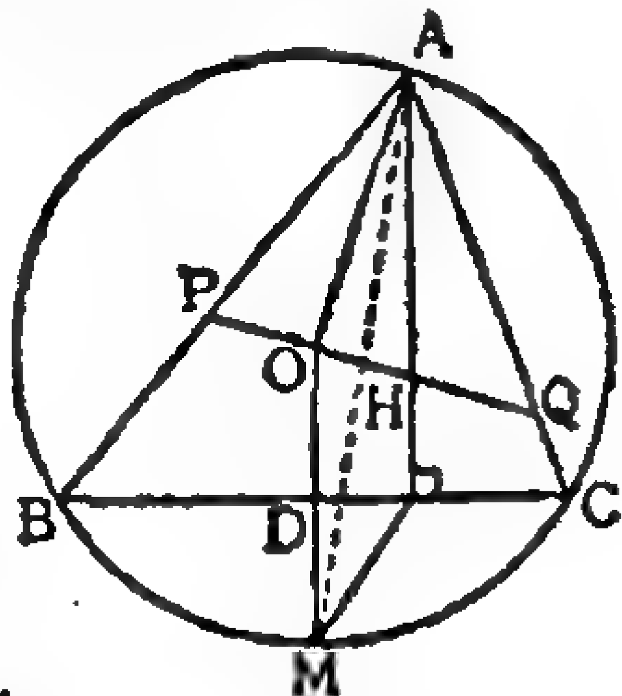
圆周的三分之一，因而 $OD=DM$.

但是 $AH=2OD$, $\therefore$ $AH=OM$,

并且 $AH \parallel OM$.

又因为 $OM=OA=r$(圆 O 的半径).

因而 A、O、M、H 是菱形的顶点.



$\therefore$ $OH \perp AM$,

于是 $PQ \perp AM$.

而且 $\angle BAM$

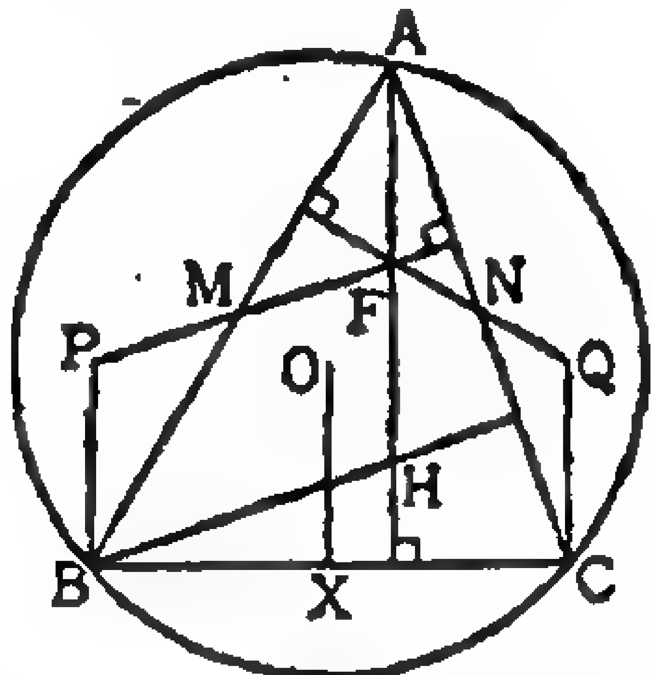
$=\angle CAM$

$=30°$,

因此 $\triangle APQ$ 是正三角形.

515. 在 $\triangle ABC$ 中，若底边 BC 的长及位置一定，顶角 A 的大小一定，则分别从 AB、AC 的中点 M、N 向对边所作的垂线必分别过一定点.

解 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，外心为 O，若 BC 的中点为 X，由问题 **500**，有

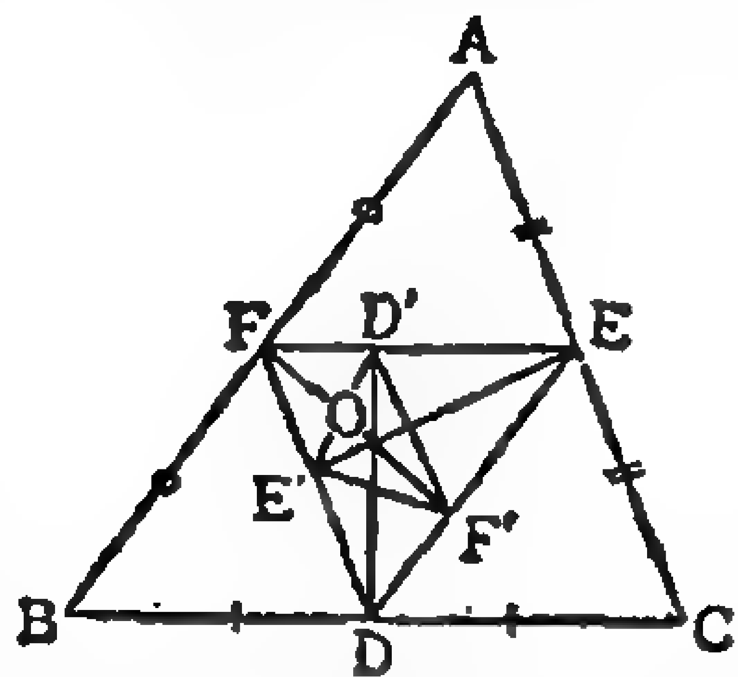


$$\frac{1}{2}AH=OX.$$

因 BC 是定长，$\angle A$ 的大小是一定的，因此外心的位置是一定的，所以 OX 是定长、定位置，因而 AH 的长是一定的.

设从 M 向 AC 所作的垂线与 AH 的交点为 F，则 $MF \parallel BH$，所以 F 是 AH 的中点，因而 $AF=OX$(定长). 从 B 所作 BC 的垂线和 FM 的延长线交于 P，因 M 是 AB 的中点，所以 $BP=AF$(一定). 因此，P 是定点，所以 MF 过定点 P. 同理，NF 过定点 Q.

516. 设锐角三角形 ABC 的边 BC、CA、AB 的中点分别为 D、E、F，则 $\triangle ABC$ 的外心，$\triangle DEF$ 的垂心，$\triangle DEF$ 的垂足三角形的内心是同一点.

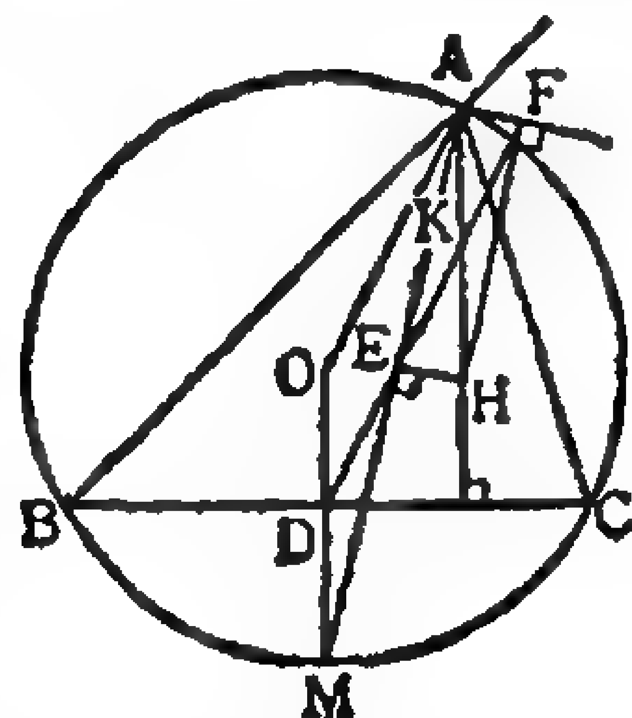


解 若从 $\triangle DEF$ 的顶点 D、E、F 分别作对边的垂线，其垂足为 D'、E'、F'，则 DD'、EE'、FF' 交于一点，这是 $\triangle DEF$ 的垂心.

但是 DD'、EE'、FF' 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的垂直平分线，所以 O 还是 $\triangle ABC$ 的外心.

因 $\triangle D'E'F'$ 是 $\triangle DEF$ 的垂足三角形，所以(由问题 **492**) $D'O$、$E'O$、$F'O$ 分别平分 $\angle E'D'F'$、$\angle F'E'D'$、$\angle D'F'E'$，因而 O 是 $\triangle D'E'F'$ 的内心，所以 $\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle DEF$ 的垂心并且是 $\triangle D'E'F'$ 的内心.

517. 从 $\triangle ABC$ 的垂心 H 分别作 $\angle A$ 的平分线及其外角平分线的垂线 HE、HF，其垂足为 E、F，若 D 是 BC 的中点，则 D、E、F 在一直线上.



解 因 $AE \perp AF$，所以四边形 $AEHF$ 是矩形，故 AH、EF 互相平分，设其交点为 K，则 K 是 AH 的中点. 假定 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，则 $OD=\frac{1}{2}AH$(由问题 **500**),

$$\therefore\ OD \perp\!\!\!\!= AK. \qquad ①$$

但是 $OM \parallel AH$, $OM=OA$.

因而

$$\angle HAE=\angle M=\angle OAM. \qquad ②$$

又因 $AEHF$ 是矩形

$$\angle EAK=\angle KEA. \qquad ③$$

由②、③，得 $\angle OAE=\angle AEK$,

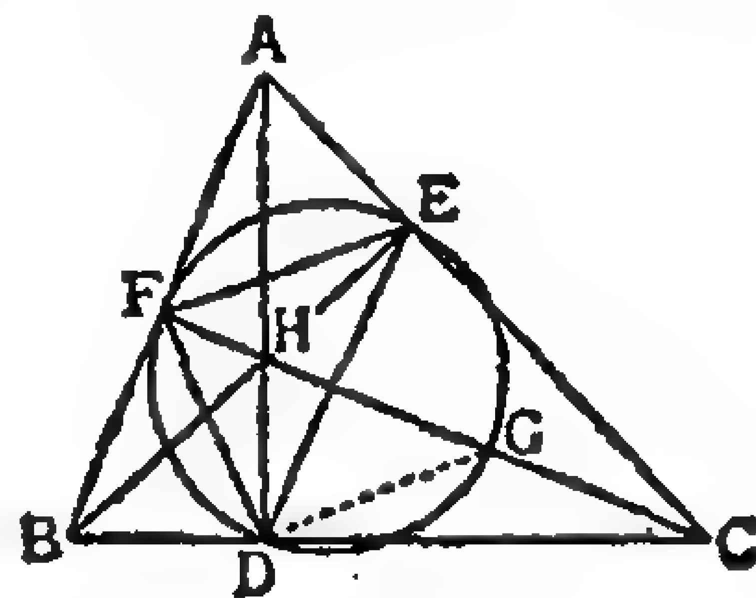
$$\therefore\ OA \parallel EF. \qquad ④$$

若连结 KD，由①知 $AODK$ 是平行四边形.

$$\therefore\ KD \parallel AO. \qquad ⑤$$

由④、⑤，知 FE 及 KD 都过点 K，且平行于直线 OA，所以 F、E、D 在一直线上.

518. 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，若垂足三角形 DEF 的外接圆和 HC 的交点为 G，则 $HG=CG$.



解 $\angle HDG=\angle HDE+\angle EDG$,

但是 $\angle HDE=\angle HDF$(问题 **492**);

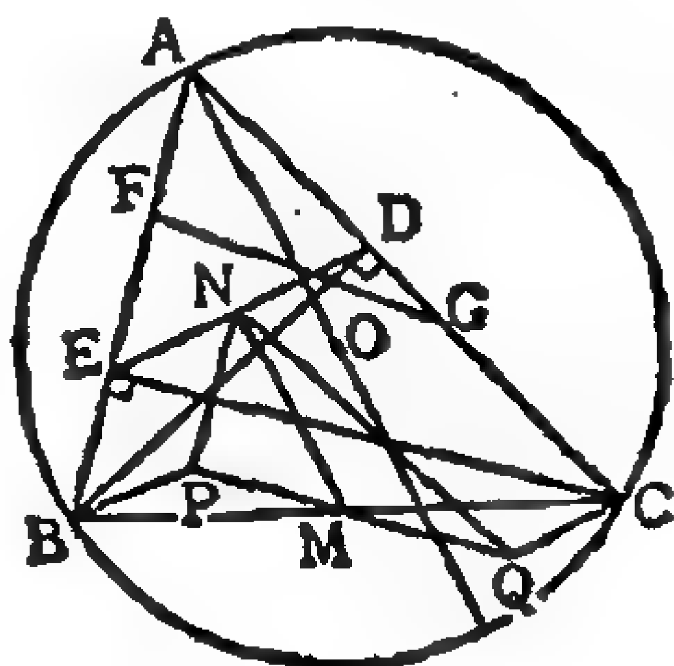
$$\angle EDG=\angle EFG=\angle DFG,$$

$$\therefore\ \angle HDG=\angle HDF+\angle DFG$$
$$=\angle DHG,$$

于是　　$GD=GH$.

$\because$ $\angle HDC=\angle R$, 故 $HG=CG$.

519. 设$\triangle ABC$的外心为O, 且从B、C向对边所作垂线的垂足分别为D、E, 若在AB、CA上分别截取$AF=BE$, $AG=CD$, 则OA平分GF.



解　设DE的中点为N, 作平行四边形$NEBP$、$NDCQ$, 则$BP \mathbin{\underline{\parallel}} EN$, $CQ \mathbin{\underline{\parallel}} ND$,

并且　　$ND=EN$.

因此$BPCQ$是平行四边形, 且BC过PQ的中点M.

但是　　$NP \mathbin{\underline{\parallel}} BE \mathbin{\underline{\parallel}} AF$,

$NQ \mathbin{\underline{\parallel}} DC \mathbin{\underline{\parallel}} AG$,

$\therefore$ $\triangle AFG \cong \triangle NPQ$.

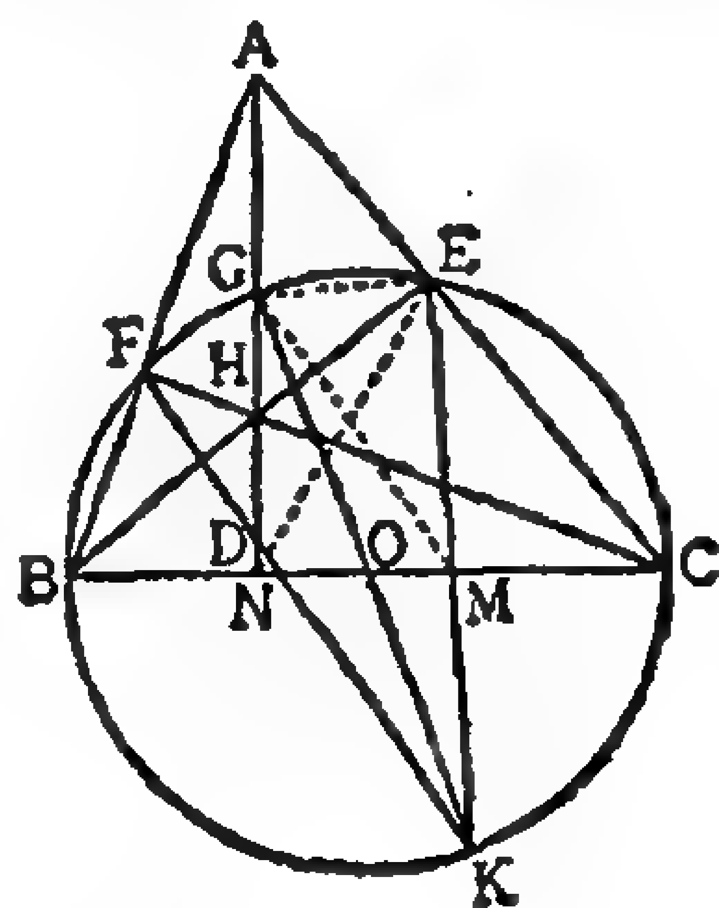
由问题**507**, $AO \perp ED$.

又由问题**489**、**490**, $NM \perp ED$,

$\therefore$ $AO \parallel MN$,

即在两个全等的$\triangle AFG$、$\triangle NPQ$中的各对应边是平行的. 且$NM \parallel AO$. 由于NM平分PQ, 所以AO也平分FG.

520. 设锐角$\triangle ABC$的三条高分别为AD、BE、CF, 以BC为直径的圆O和AD的交点为G, 过点G的直径的另一端点为K, 若EK、FK和BC的交点分别为M、N, 则$BN=CM$.



解　因GK是直径, 所以

$$\angle GEM=\angle R.$$

又因$\angle GDM=\angle R$, G、D、M、E四点共圆,

$\therefore$ $\angle GME=\angle GDE$.

又因　　$\angle HDC=\angle R=\angle HEC$,

H、D、C、E四点共圆,

$\therefore$ $\angle HDE=\angle HCE$,

因此　$\angle GME=\angle HCE=\angle FKE$,

于是　　$GM \parallel NK$.

又因　$OG=OK$, $\therefore$ $\triangle OMG \cong \triangle ONK$.

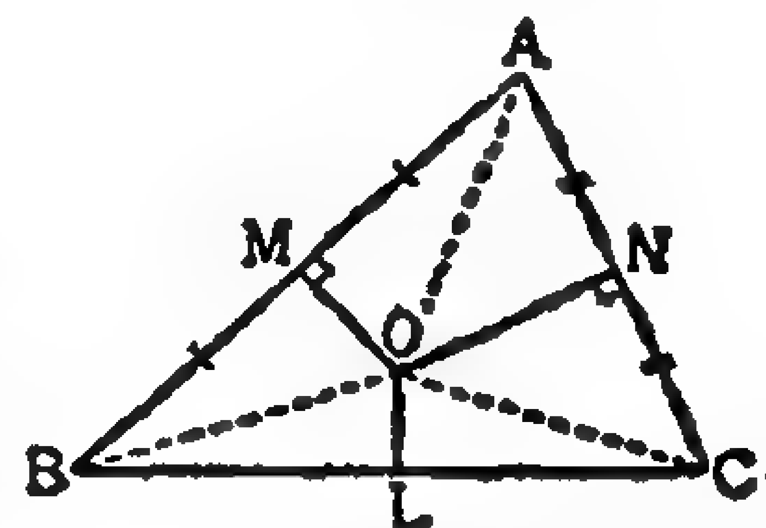
因而　　$OM=ON$,

故　　$BN=CM$.

7. 三角形的外接圆

521. 三角形各边的垂直平分线交于一点, 且其交点到三角形的三顶点等距. [三角形的外心]

解　设M、N分别是$\triangle ABC$的两边AB、AC的中点. 过M、N分别作AB、AC的垂线



MO、NO, 其交点为O, 因O是线段AB的垂直平分线上的点, 所以$AO=BO$.

同理, O是AC的垂直平分线上的点, 所以$AO=CO$.

$\therefore$ $AO=BO=CO$.

因此$\triangle BOC$是等腰三角形, 且O为顶点, 所以BC的垂直平分线过点O. 即AB、BC、CA的各垂直平分线相交于一点, 并且

$$OA=OB=OC.$$

522. 从$\triangle ABC$的外接圆的圆心O向BC边作垂线OD,

(1) 证明 $\angle BOD=\angle A$ 或者 $\angle BOD+\angle A=2\angle R$;

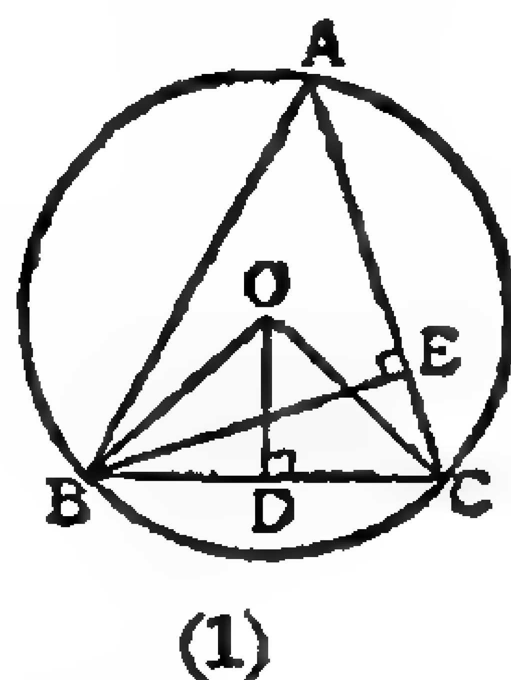
(2) 由B向AC或它的延长线所作垂线BE,

则　$\angle OBC=\angle ABE$.

解　(1) 当$\angle A$是锐角时(图1).

在这种情况下, 圆心O及顶点A在BC的同侧, 而且$\angle BOC=2\angle BAC$.

但是　　$OD \perp BC$,

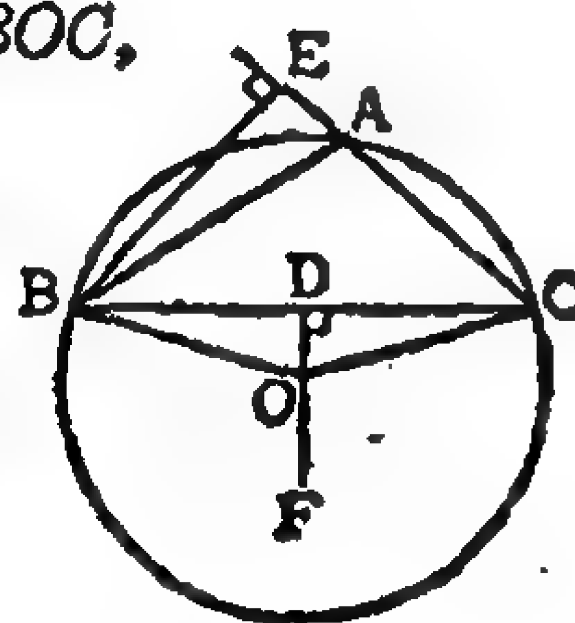


(1)

所以　　$\angle BOD=\dfrac{1}{2}\angle BOC$,

$\therefore$ $\angle BOD=\angle A$.

当$\angle A$是钝角时(图2), 圆心O和顶点A在BC的异侧, 而且令DO的延长线为OF, 则



(2)

$\angle A=\angle BOF$.

但是　　$\angle BOF+\angle BOD=2\angle R$,

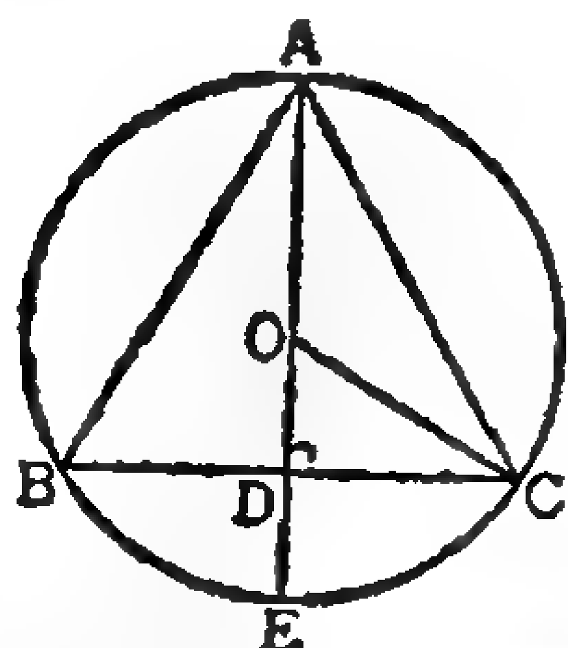
$\therefore$ $\angle A+\angle BOD=2\angle R$.

(2) 在$\triangle ABE$和$\triangle OBD$中，

$$\angle BAE=\angle BOD,$$
$$\angle AEB=\angle B=\angle BDO,$$
$$\therefore\quad \angle ABE=\angle DBO,$$

即
$$\angle ABE=\angle OBC.$$

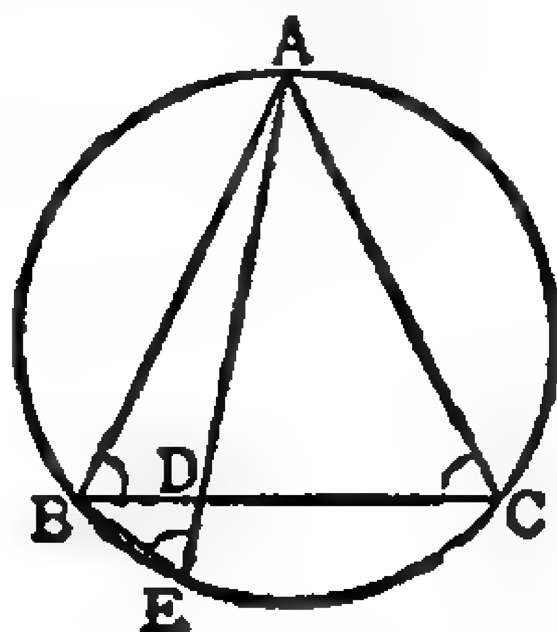
523. 圆内接正三角形的各边，截取过该边所对顶点的直径的$\frac{1}{4}$.



解 设$\triangle ABC$为内接于圆O的正三角形，作直径AOE，则A是$\overset{\frown}{BAC}$的中点，E是$\overset{\frown}{BEC}$的中点，所以AE是BC的中垂线．又$\triangle OCE$是正三角形，所以D是OE的中点．

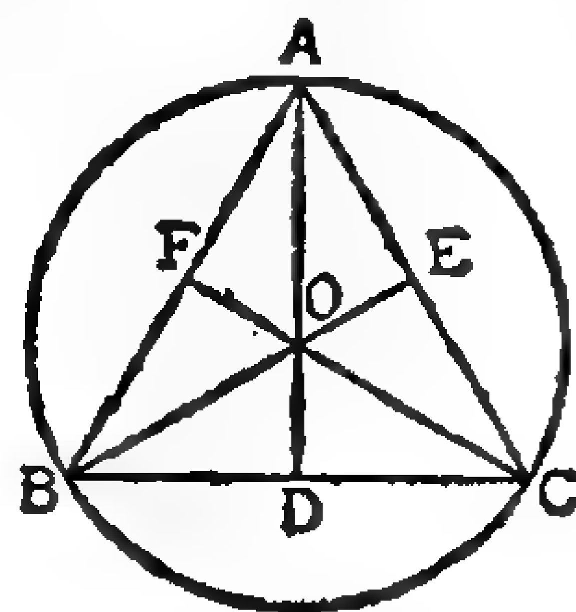
$$\therefore\quad DE=\frac{1}{2}OE=\frac{1}{4}AE.$$

524. 过等腰三角形ABC的顶点A的直线和底边BC交于D，和外接圆交于E，则AB和圆BDE相切．



解 因$\angle AEB=\angle C$，
$AB=AC$，
所以　$\angle C=\angle ABC$，
　　$\angle E=\angle ABD$，
因此AB和圆BDE相切．

525. 圆内接三角形的重心和圆心重合，问具有这种性质的三角形是什么三角形？



解 设$\triangle ABC$的外接圆的圆心O和$\triangle ABC$的重心重合，则$\triangle ABC$是正三角形．为什么呢？因为O是$\triangle ABC$的外接圆的圆心，所以

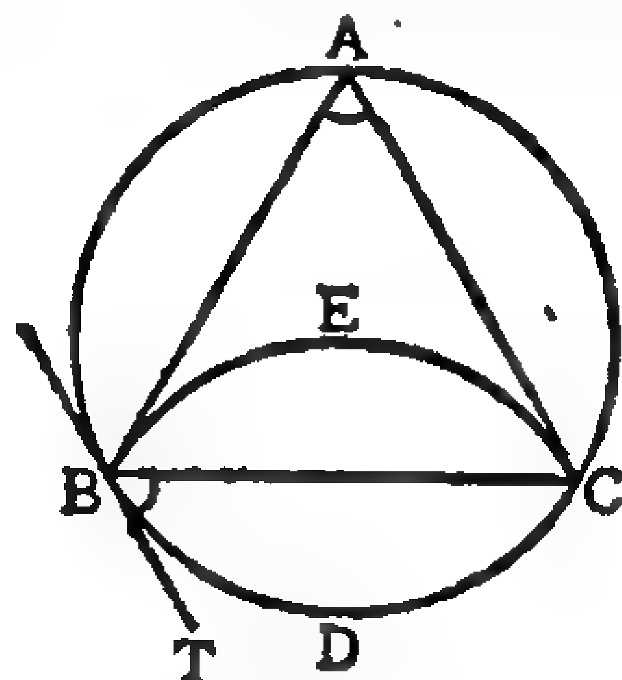
$$OA=OB=OC.\quad ①$$

又因O为$\triangle ABC$的重心，若作三条中线AD、BE、CF，则

$$AO=\frac{2}{3}AD,\ BO=\frac{2}{3}BE,$$
$$CO=\frac{2}{3}CF.$$

由①，有　　$AD=BE=CF$，
所以$\triangle ABC$的三条中线相等，因此是正三角形．

526. 在圆形的纸上作一内接三角形ABC，若以弦BC为折痕把圆弧BC折过来，此弧恰好切于两边AB、AC，问$\triangle ABC$是什么三角形？



解 在点B作该圆的切线BT．在图中，$\overset{\frown}{BDC}$和$\overset{\frown}{BEC}$关于BC是对称的，BA和$\overset{\frown}{BEC}$相切，所以

$$\angle CBT=\angle ABC.$$

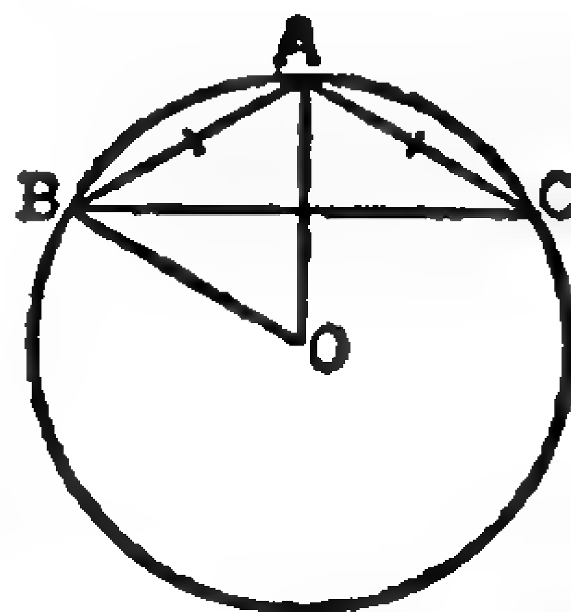
因BT是该圆的切线，所以$\angle CBT=\angle A$，

$$\therefore\quad \angle ABC=\angle A.$$

同理，　　$\angle ACB=\angle A$.

因此，$\triangle ABC$是正三角形．

527. 如果等腰三角形ABC的顶角A等于正三角形的外角，则该三角形的外接圆的半径等于其一腰．



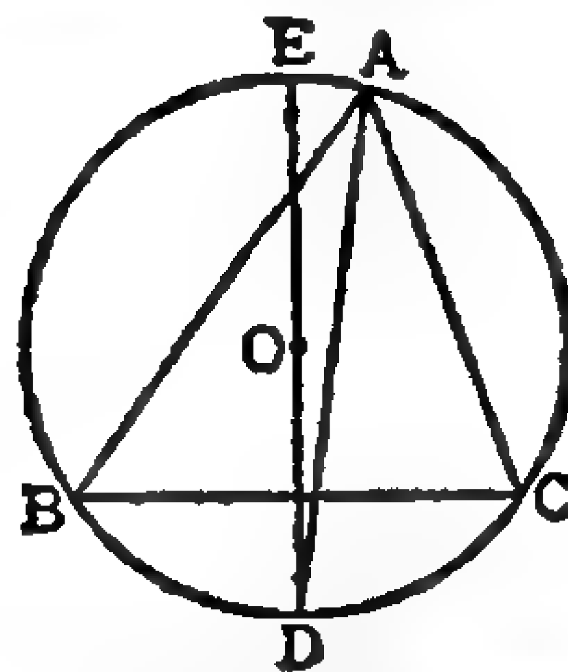
解 因正三角形的顶角是60°，它的外角是120°，

所以　　$\angle BAC=120°$.

设$\triangle ABC$的外心为O，且$AB=AC$，
所以AO平分$\angle BAC$，$\therefore\ \angle BAO=60°$.
又因$OA=OB$，所以$\angle ABO=60°$，
从而$\triangle ABO$是正三角形．圆O的半径AO等于AB.

528. 设$\triangle ABC$的外心为O，$\overset{\frown}{BC}$的中点为D，则

$$\angle ADO=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C).$$



解 若延长DO和圆O交于点E，则E是$\overset{\frown}{BAC}$的中点．

所以，　$\overset{\frown}{AE}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}\sim\overset{\frown}{AC})$，

$$\therefore\quad \angle ADO=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C).$$

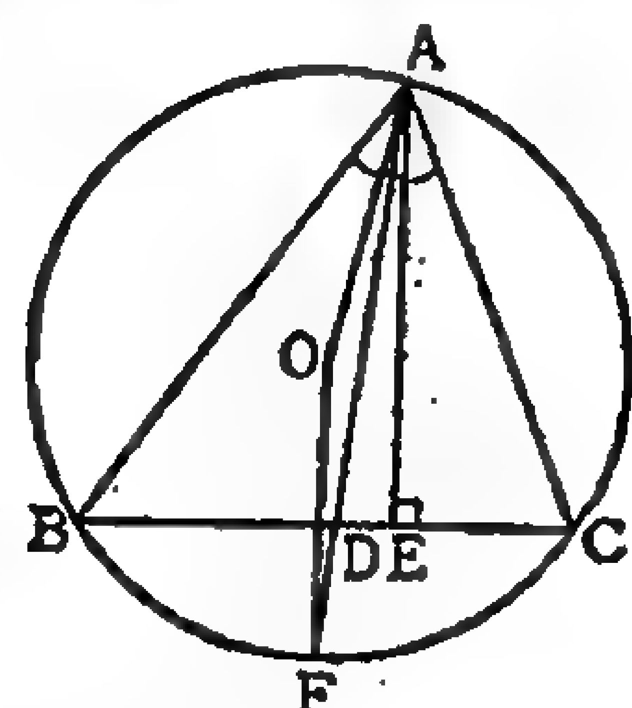
529. 设$\triangle ABC$中$\angle A$的平分线和BC的交点为D，从A向BC作垂线AE，若外心为O，则$\angle OAD=\angle EAD$.

解 因AD是$\angle A$的平分线，若延长AD与外接圆的交点为F，则F是$\widehat{BC}$的中点．因此 $OF\perp BC$，

$\therefore$ $OF\parallel AE$，

因而

$\angle F=\angle DAE$． ①



又因 $OA=OF$，

$\therefore$ $\angle F=\angle OAD$． ②

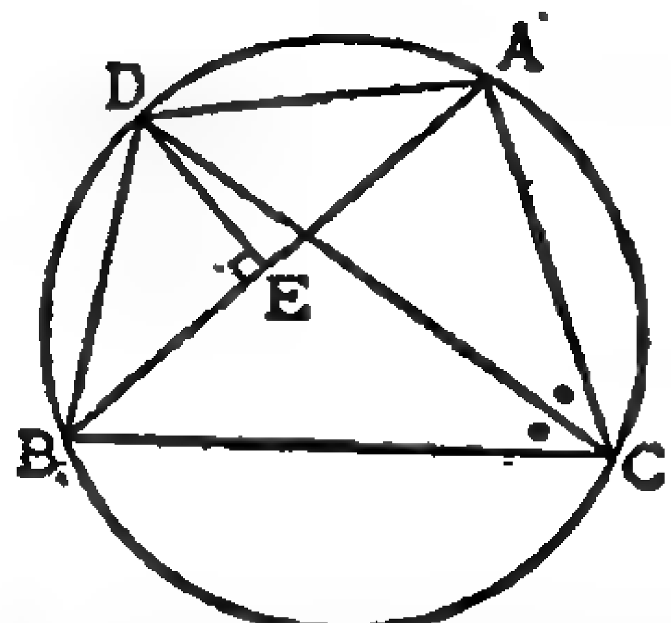
由①、②，得

$$\angle OAD=\angle EAD．$$

530． 若$\triangle ABC$的$\angle C$的平分线和边AB的垂直平分线相交于D，则

$$\angle ACB+\angle ADB=2\angle B．$$

解 若画$\triangle ABC$的外接圆，则$\angle C$的平分线过$\angle C$所对的$\widehat{AB}$的中点．又因AB的垂直平分线也过$\widehat{AB}$的中点，所以$\angle C$的平分线和边AB的垂直平分线的交点D是$\widehat{AB}$的中点．于是在内接于圆的四边形$ADBC$中，

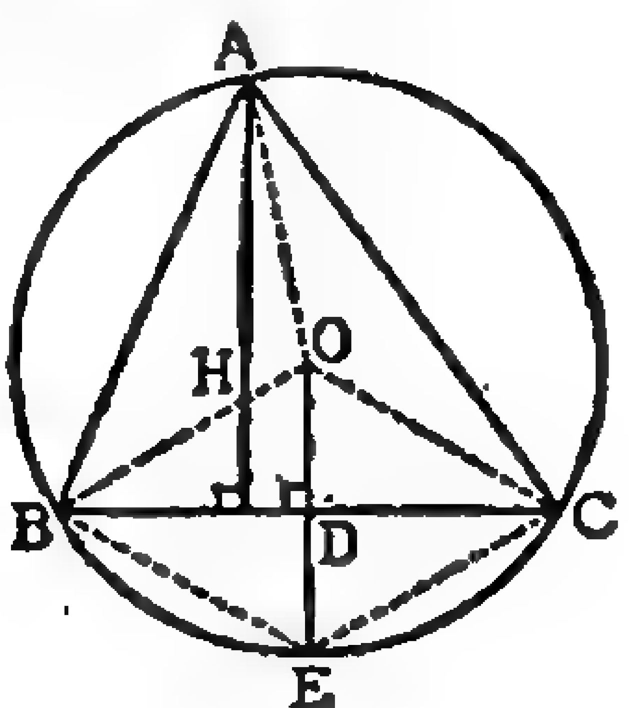


$$\angle ACB+\angle ADB=2\angle B．$$

531． 若在$\angle A=60°$的$\triangle ABC$中，其外心为O，垂心为H，则$AO=AH$．

解 设 $OD\perp BC$，延长OD和圆周的交点为E，则

$$OD=\frac{1}{2}AH$$



(由问题**500**)．

$$\angle BOC=2\angle BAC=120°=\angle BEC．$$

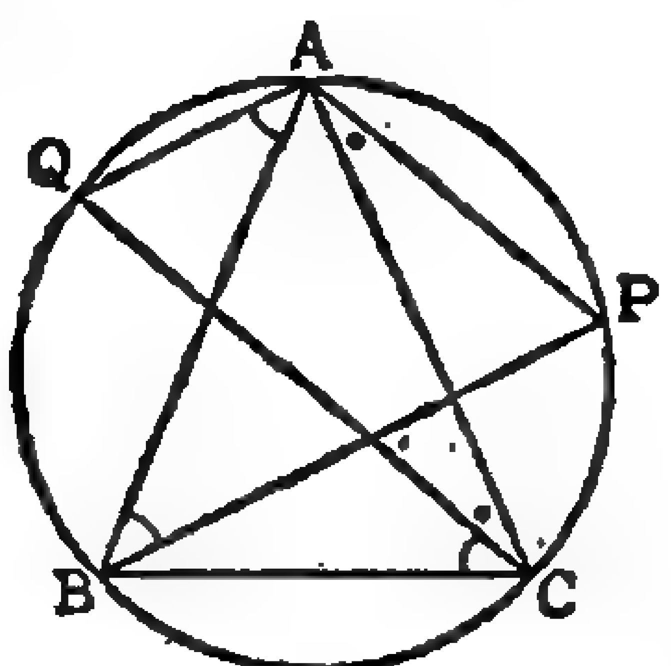
于是BC是OE的垂直平分线，因此

$$OE=2DO,$$

故

$$AH=OE=AO．$$

532． 从圆内接等腰三角形ABC的底边BC的一端点B，在$\angle B$内作弦BP，若作弦AQ平行于BP，则$AP\parallel QC$．



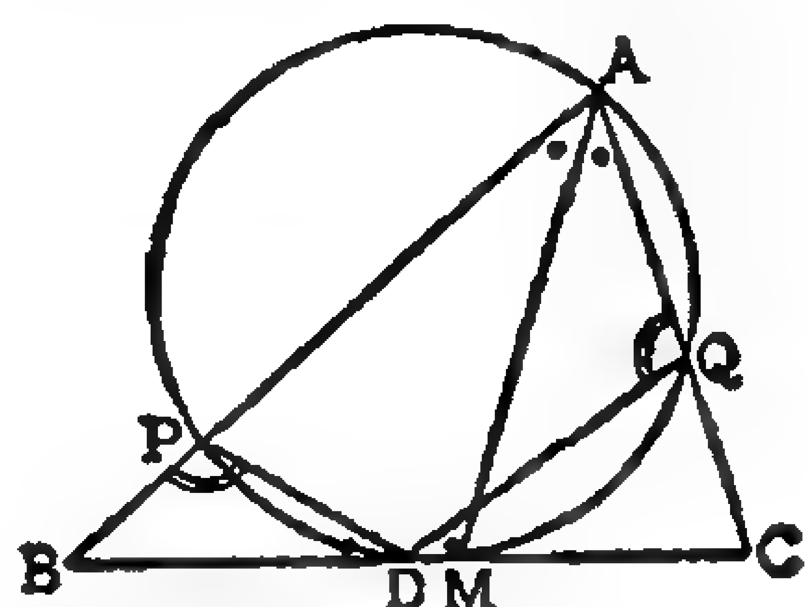
解 因$AQ\parallel BP$，

$$\therefore\ \widehat{BQ}=\widehat{AP}．$$

又由 $AB=AC$，$\widehat{AB}=\widehat{AC}$．

$\therefore$ $\widehat{AQ}=\widehat{PC}$，故 $AP\parallel QC$．

533． 若$\triangle ABC$的$\angle A$的平分线和BC的交点为M，BC的中点为D，$\triangle AMD$的外接圆与AB、AC的交点分别为P、Q，则$BP=CQ$．



解 因四边形$APDQ$是圆内接四边形，所以$\angle BPD=\angle AQD$．于是$\angle BPD$、$\angle DQC$构成补角，并且$BD=DC$，所以

$$圆\ BPD=圆\ DQC． \quad ①$$

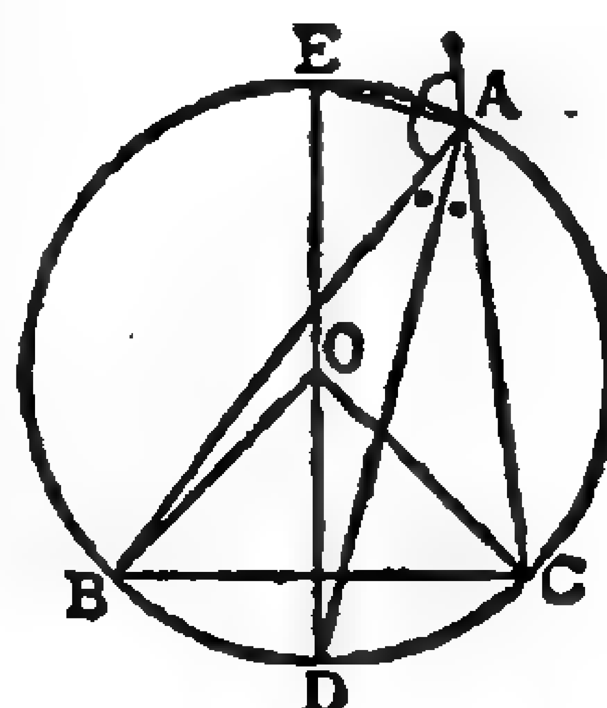
但是 $\angle PDB=\angle PAM$

$=\angle MAQ=\angle QDM$，

$\therefore$ $\angle PDB=\angle QDC$． ②

由①、②， $BP=CQ$．

534． 证明$\triangle ABC$的一个顶点A的内角及其外角的平分线和外接圆的交点所连结的线段，是顶点A的对边BC的垂直平分线，且该线段的两端点也是外接圆直径的端点．



解 设$\angle A$的平分线和外接圆的交点为D，则D是$\widehat{BC}$的中点．所以

$$\angle BOD=\angle COD,$$

从而OD是等腰三角形BOC顶角O的平分线，它垂直平分BC．延长DO和圆周的交点为E，连结AE，因DE是直径，所以$\angle DAE=\angle R$．因AD是$\angle A$的内角的平分线，所以AE是外角的平分线，故E、D是垂直平分BC的直径的两端点．

535． 在不等边三角形ABC中，设从点C所作垂直于$\angle A$的平分线和AB及该三角形的外接圆的交点分别为D、E，证明：

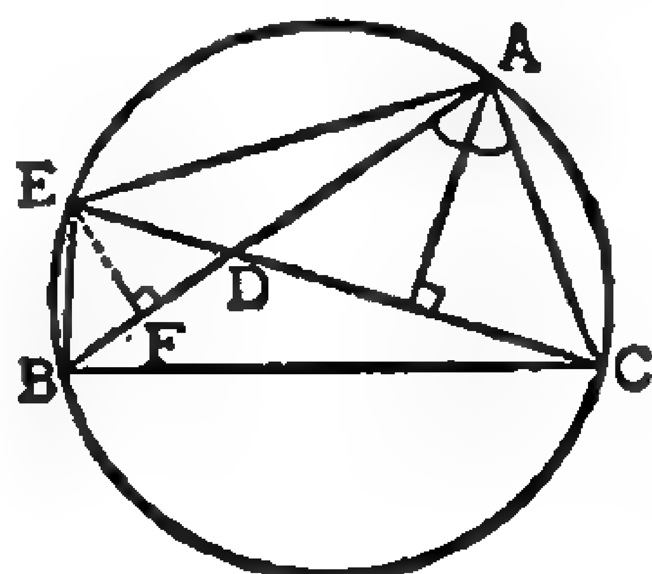
(1) $EB=ED$;

(2) $AE>\frac{1}{2}(AB+AC)$．

解 (1) 在$\triangle ACD$中，$\angle A$的平分线是垂直于CD的，所以$AC=AD$．

$\therefore\ \angle ACD=\angle ADC.$

又



$\angle EDB=\angle ADC,$

$\angle EBA=\angle ECA,$

$\therefore\ \angle EDB=\angle EBD,$

因此，$EB=ED.$

(2) 由 E 向 BD 作垂线，设其垂足为 F，则由 (1) 知 F 是 BD 的中点，

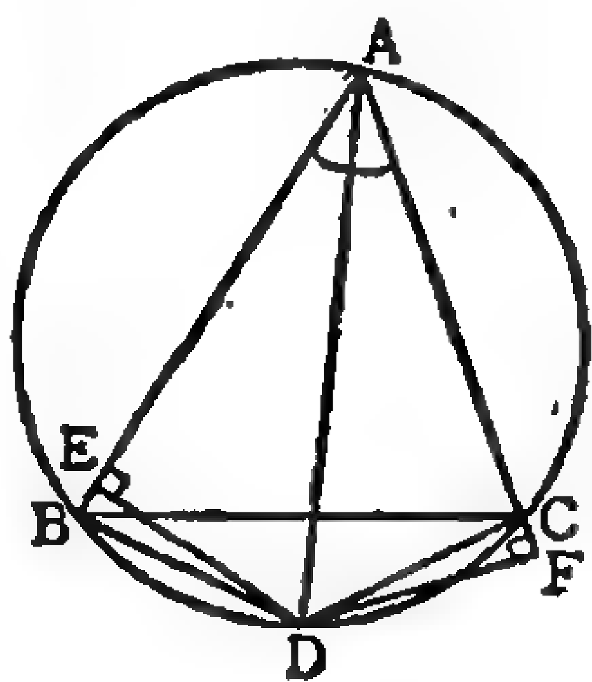
$$\therefore\ AE>AF=\frac{1}{2}[(AB-BF)+(AD+DF)]$$
$$=\frac{1}{2}(AB+AD)$$
$$=\frac{1}{2}(AB+AC).$$

536. 在圆内接三角形 ABC 中，若 $\angle A$ 的平分线和圆周的交点为 D，从 D 所作 AB、AC 的垂线分别为 DE、DF，则

$$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC),$$

$$BE=CF=\frac{1}{2}(AB\sim AC).$$

解 因 AD 是 $\angle A$ 的平分线，所以 D 是 $\widehat{BC}$ 的中点。



因此　$BD=CD.$

从 D 向 AB、AC（设 $AB>AC$）作垂线，设其垂足分别为 E、F，因 AD 是 $\angle A$ 的平分线，所以 $DE=DF$，

而且　$BD=CD,$

$\therefore\ \triangle DBE\cong\triangle DCF,$

于是　$BE=CF.$

但 D 是 $\angle BAC$ 的平分线上的点，所以 $AE=AF$，

故　$AB+AC=AE+AF$
$=2AE=2AF.$

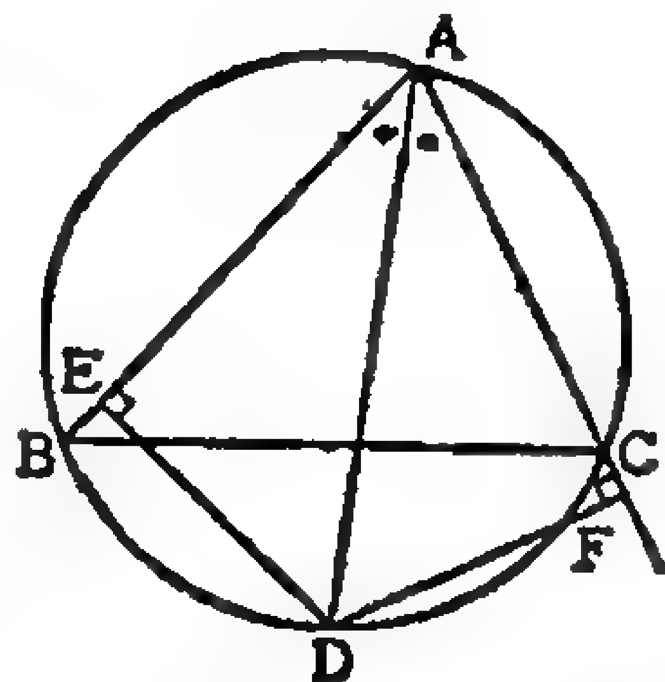
同理，

$AB-AC=[(AE+BE)-(AF-FC)]$
$=2BE=2CF.$

因此　$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC),$

$$BE=CF=\frac{1}{2}(AB\sim AC).$$

537. 若三角形一个顶角的位置、大小及夹该角两边的和都一定，则三角形的外接圆总过一定点。



解 设 $\triangle ABC$ 的外接圆和 $\angle A$ 的平分线的交点为 D。由 D 所作 AB、AC 的垂线分别为 DE、DF，则由上题知

$$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC)=\text{一定}.$$

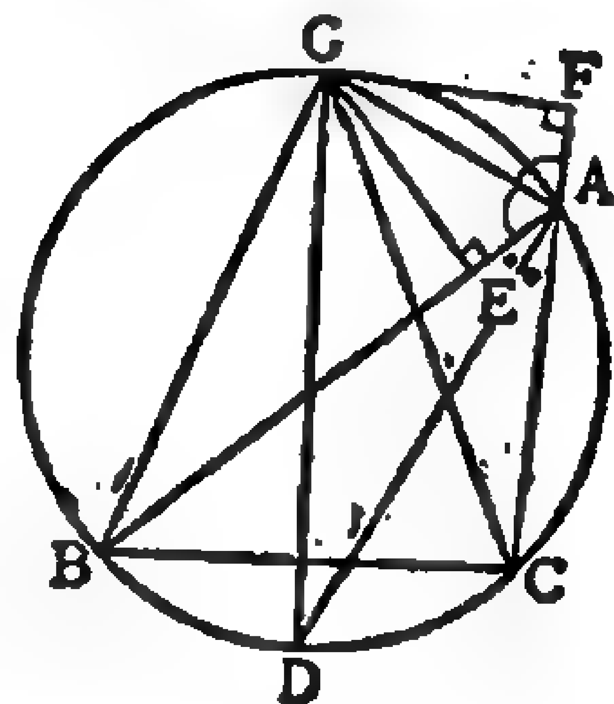
因 $\angle A$ 的位置、大小是一定的，所以 AE、AF 是一定的。因此 D 的位置是确定的，故 $\triangle ABC$ 的外接圆必过这个定点 D。

注 $AB\sim AC$ 一定时，由下题可见外接圆过定点 G。

538. 设 $\triangle ABC(AB>AC)$ 的 $\angle A$ 的外角平分线和外接圆的交点为 G，由 G 所作 AB、AC 的垂线的垂足分别为 E、F，则

$$GB=GC,\ EB=FC.$$

解 设 $\angle A$ 的平分线和外接圆的交点为 D，则 $\angle GAD=\angle R$。因此，GD 是该圆的直径，并且 $\widehat{DB}=\widehat{DC}$，



$\therefore\ \widehat{GB}=\widehat{GC},$

于是弦　$GB=GC.$

因 AG 是 $\angle A$ 的外角平分线，且 $GE\perp AB$，

$GF\perp AC,$

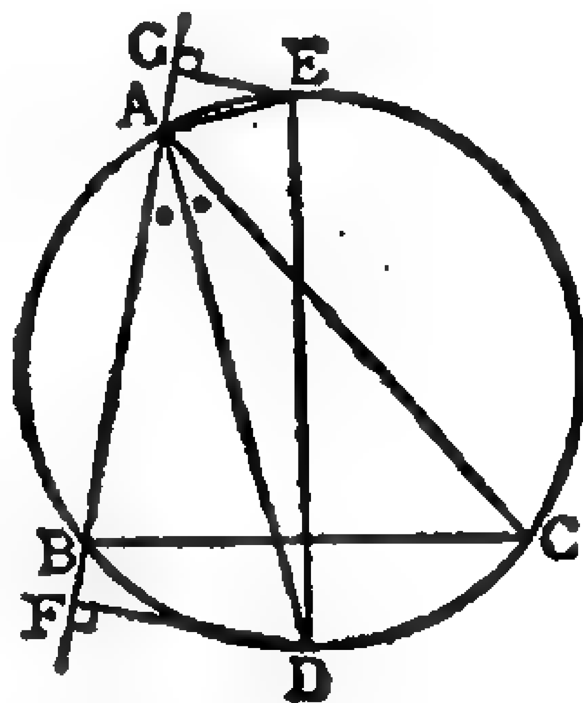
$\therefore\ GE=GF.$

$\therefore\ \triangle BGE\cong\triangle CGF,$

故　$EB=FC,\ GB=GC.$

539. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线和外接圆的交点为 D，由直径 DE 的两端点所作 AB 的垂线分别为 DF、EG，则

$$FG=AC.$$



解 因 AD 是 $\angle A$ 的平分线，所以由问题 **536**，得

$$AF=\frac{1}{2}(AB+AC).\quad ①$$

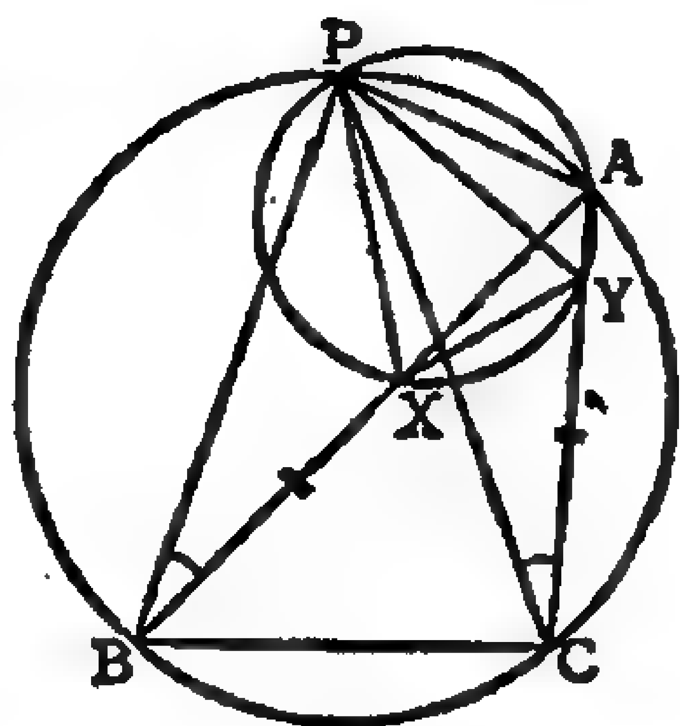
又因 $\angle DAE=\angle R$, $\therefore$ AE 平分 $\angle CAG$,

$$\therefore\ AG=\frac{1}{2}(AC-AB).\quad ②$$

由①+②,得 $AF+AG=AC$,

即 $FG=AC$.

540. 若在定三角形的两边 AB、AC 上截取任意等长线段 BX、CY,连结 XY,则 $\triangle AXY$ 的外接圆总过一定点. 问 X、Y 取在边的延长线上,或 X、Y 之一取在延长线上时的情形如何?



(1)

解 (1)设圆 AXY 和圆 ABC 的交点为 P. 在 $\triangle PXB$、$\triangle PYC$ 中,

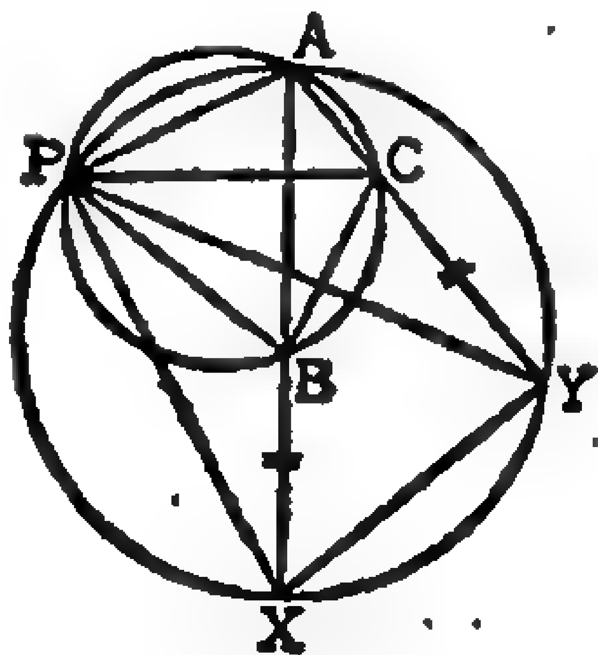
$$\angle PBA=\angle PCA,$$

$$\angle PXB=\angle PYC(\because\ \angle PXA=\angle PYA).$$

又因 $BX=CY$,

$\therefore$ $\triangle PXB\cong\triangle PYC$,

$PB=PC$.



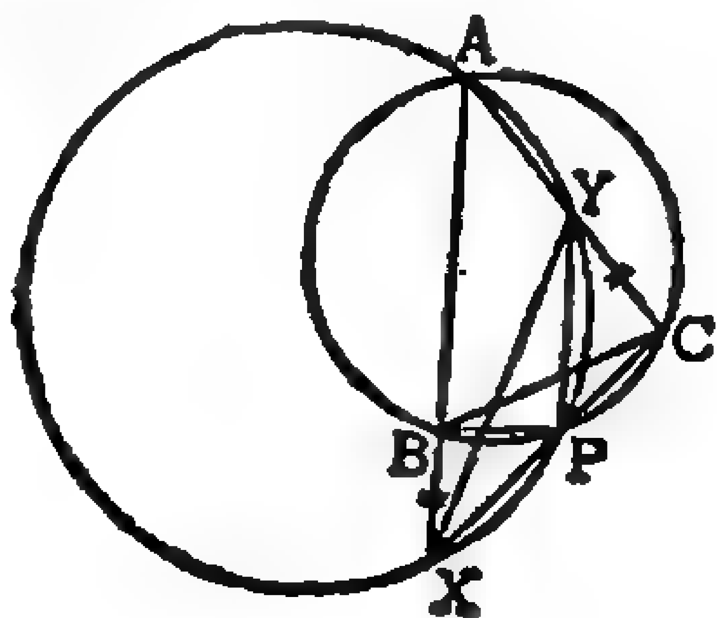
(2)

因此 P 是 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点,所以圆 AXY 过定点($\overset{\frown}{BAC}$ 的中点).

(2) 当 X、Y 在边的延长线上时,同样也有 $\triangle PBX\cong\triangle PCY$,

$\therefore$ $PB=PC$.

因此 P 是 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点,是定点. 所以圆 AXY 过定点 P.

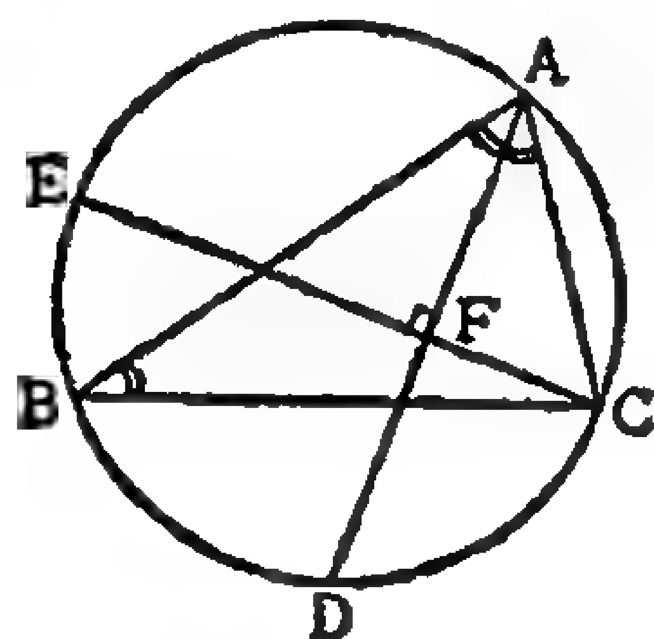


(3)

(3) 若 X 在 AB 的延长线上,Y 在 AC 上时,完全同样,P 还是一定点,圆 AXY 过定点 P.

541. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\angle A$ 是 $\angle B$ 的两倍,由顶点 C 作 $\angle A$ 的平分线的垂线,则该垂线过三角形的外心.

解 作 $\triangle ABC$ 的外接圆,令 $\angle A$ 的平分线和圆周的交点为 D,若由 C 作 AD 的垂线和圆周交于 E,和 AD 交于 F,则由



$$\angle AFC=\angle R,$$

有

$$\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{DC}=\text{半圆周}.$$

但由假定

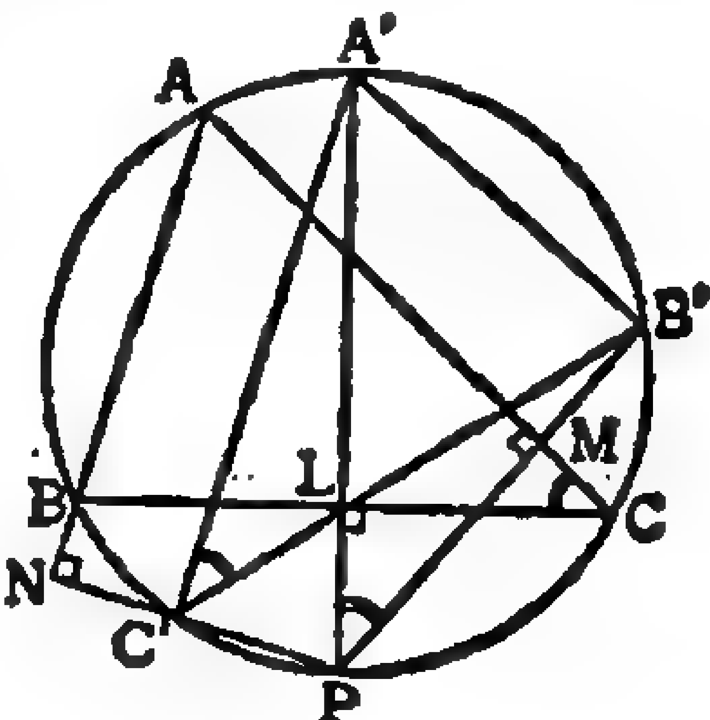
$$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BD},$$

$$\therefore\ \overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{AC}=\text{半圆周}.$$

所以 EC 是外接圆的直径,因而 CE 过 $\triangle ABC$ 的外心.

542. 若由 $\triangle ABC$ 的外接圆上的一点 P 向三边或其延长线所作垂线和圆周的交点分别为 A'、B'、C',则 $\triangle A'B'C'\cong\triangle ABC$.

解 设由点 P 向边 BC、CA、AB 所作垂线的垂足分别为 L、M、N,则 P、L、M、C 四点共圆,所以



$$\angle A'PB'=\angle BCA.$$

但是

$$\angle A'PB'=\angle B'C'A',$$

$$\therefore\ \angle B'C'A'=\angle BCA,\quad ①$$

因而

$$\text{弦 } A'B'=\text{弦 } AB.\quad ②$$

其次,四边形 $A'C'PB'$ 及 $ANPM$ 分别是圆内接四边形,

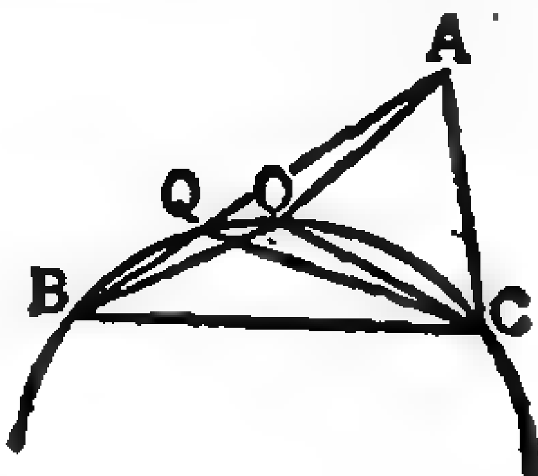
$$\therefore\ \angle C'A'B'=2\angle R-\angle C'PB'$$
$$=2\angle R-\angle NPM=\angle BAC.\quad ③$$

由①、②、③,得

$$\triangle A'B'C'\cong\triangle ABC.$$

543. 若过 $\triangle ABC$ 的两顶点 B、C 及外心 O 的圆和 AB 或它的延长线的交点为 Q,连结 QC,则 $QA=QC$.

解 因为 O 是外心.



所以

$$\angle QAO=\angle QBO.$$

又 $\angle QCO=\angle QBO$,

从而

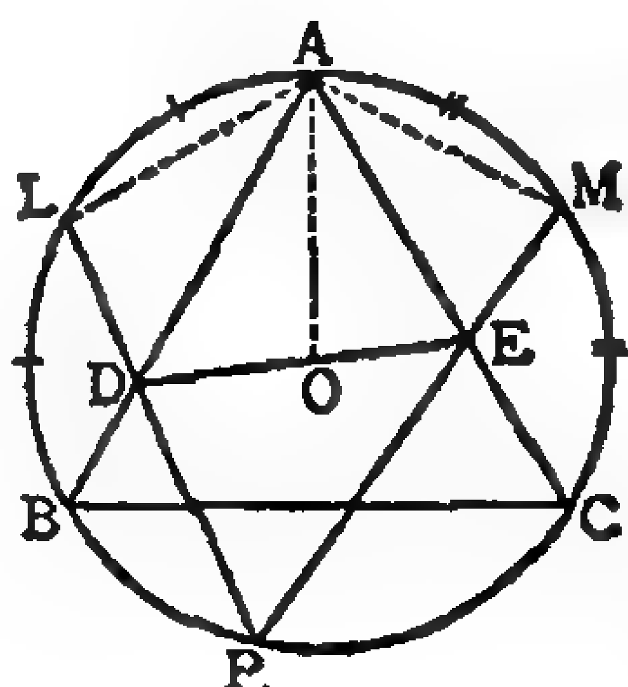
$$\angle QAO=\angle QCO.$$

又因 $\angle OAC=\angle OCA$,

$$\therefore\ \angle QAC=\angle QCA,$$

故 $QA=QC$.

544. 作正三角形 ABC 的外接圆 O，设 L、M 分别是 $\widehat{AB}$、$\widehat{AC}$ 的中点，P 为 $\widehat{BC}$ 上的任意一点，PL、PM 和 AB、AC 的交点分别为 D、E，则 D、O、E 在一直线上。



解 连结 OD、OE，M 和 O 关于 AC 是对称的，所以 $\angle AOE=\angle AME$。

同理，

$\angle AOD=\angle ALD$。

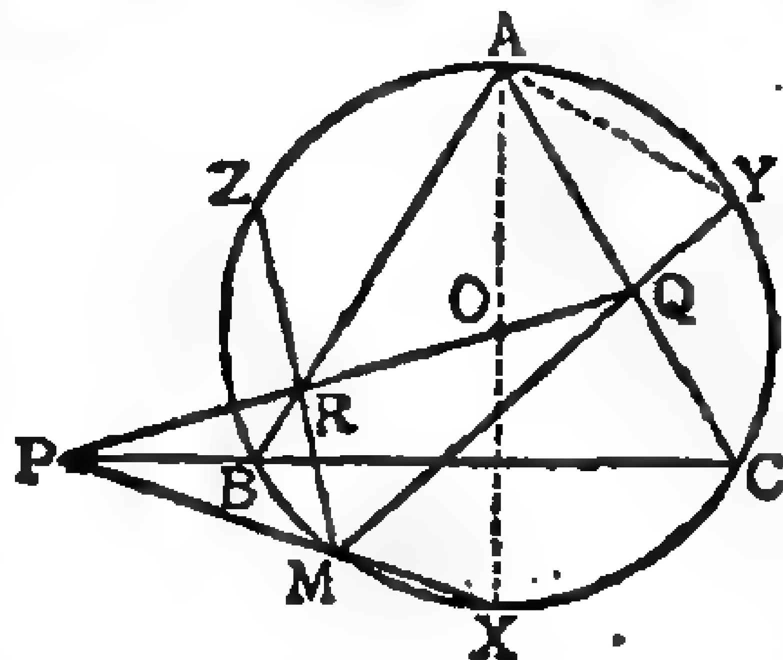
但是 A、L、P、M 四点共圆，

所以 $\angle M+\angle L=2\angle R$，

$\therefore\ \angle AOE+\angle AOD=2\angle R$。

因此 D、O、E 在一直线上。

545. 作正三角形 ABC 的外接圆 O，设 $\widehat{BC}$、$\widehat{CA}$、$\widehat{AB}$ 的中点分别为 X、Y、Z，$\widehat{BC}$ 上的任意点为 M，MX、MY、MZ 分别和 BC、CA、AB 的交点分别为 P、Q、R，则 P、R、Q 在一直线上。



解 由上题知 R、O、Q 在一直线上。连结 PO，则 O 和 X 关于 BC 对称，所以

$\angle POX=\angle PXO=\angle MYA=\angle AOQ$。

所以 P、O、Q 在一直线上。故 P、R、Q 在一直线上。

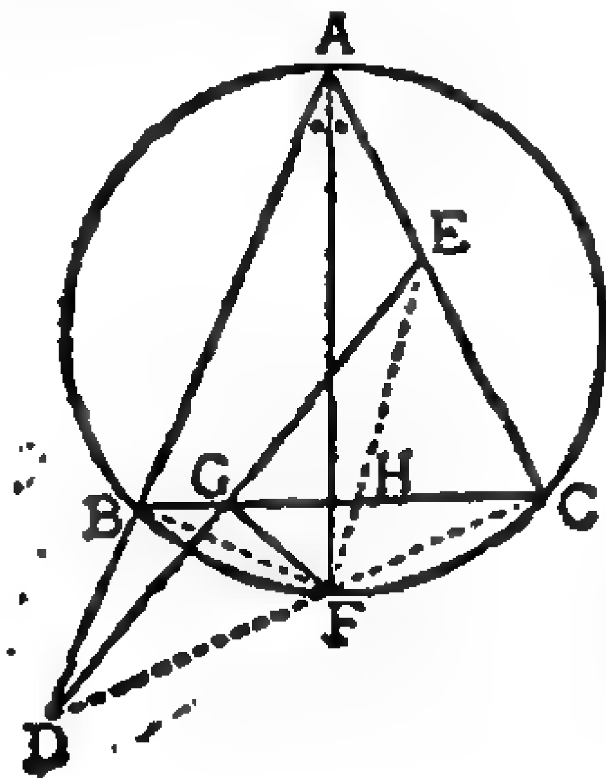
546. 在等腰三角形 ABC 的边 AB 的延长线上取点 D，在 AC 上取点 E，使 $BD=CE$，若 $\angle A$ 的平分线和 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 F，BC、DE 交于点 G，则 $FG\perp DE$。

解 因 F 是 $\widehat{BFC}$ 的中点，所以 $BF=FC$。

又因　$BD=CE$，$\angle FBD=\angle FCE$，

$\therefore\ \triangle FCE\cong\triangle FBD$。

因此　$EF=DF$。



由 E 作 AB 的平行线和 BC 的交点为 H，则 $EH=EC$。

$\therefore\ BD\mathrel{\underline{\parallel}}EH$，

因此 $BDHE$ 是平行四边形，DE 和 BH 的交点 G 就是 DE 的中点。

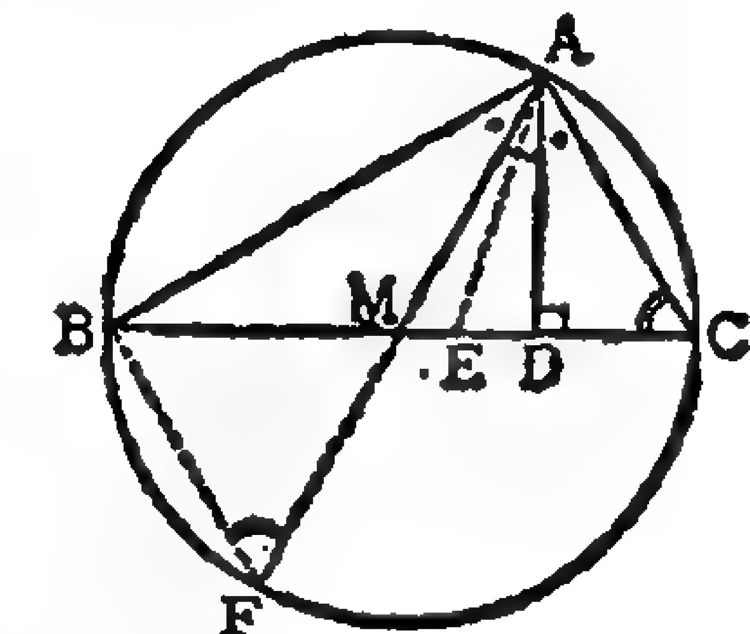
$\therefore\ FG\perp DE\quad(\because\ EF=DF)$。

547. 若 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线 AE 是中线 AM 与垂线 AD 所夹的角的平分线，则 $\triangle ABC$ 是什么三角形？

解　因 $\angle BAE=\angle CAE$，

$\angle MAE=\angle DAE$

$\therefore\ \angle BAM=\angle CAD$。　①



若延长中线 AM 和 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点为 F，则 $\angle C=\angle AFB$。②

由①、②，得

$\angle ABF=\angle ADC=\angle R$，

所以 AMF 是该圆的直径。

由于直径 AF 平分边 BC，所以 $AM\perp BC$，或者 M 是圆心，二者必居其一。当 $AM\perp BC$ 时，则 $AB=AC$。由此 AD、AM 重合，这不合题意。所以 M 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，

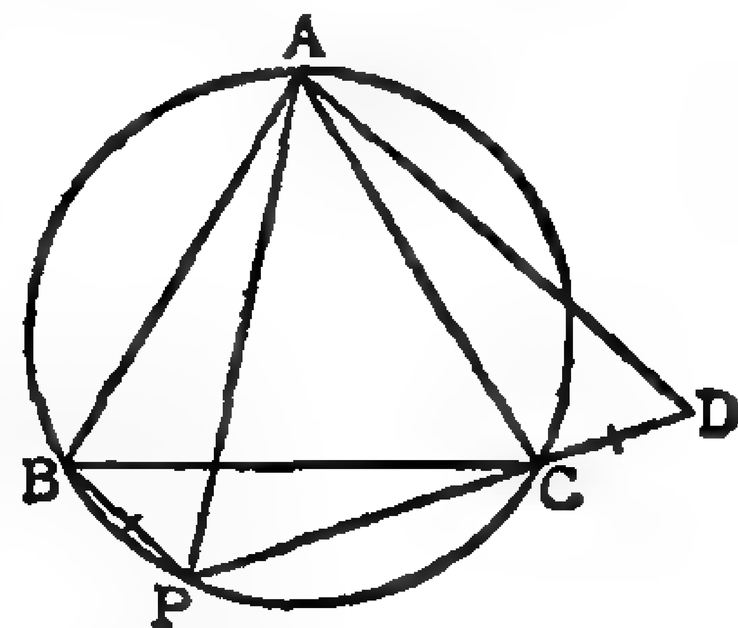
$\therefore\ \angle BAC=\angle R$。

因此 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

548. 若在正三角形 ABC 的外接圆的劣弧 BC 上任取一点 P，则 $PA=PB+PC$。

解 延长 PC，截取 $CD=PB$。因为四边形 $ABPC$ 是圆内接四边形，所以

$\angle ACD=\angle ABP$。



又因　$AC=AB$，

$CD=BP$，

$\therefore\ \triangle ACD\cong\triangle ABP$，

因此

$AD=AP$。　①

又因　$\angle DAC=\angle PAB$，

于是

$\angle DAP=60°$。　②

由①、②，得 $\triangle APD$ 是正三角形。

$\therefore\ PD=PA$，

而　$PD=PC+CD=PC+PB$，

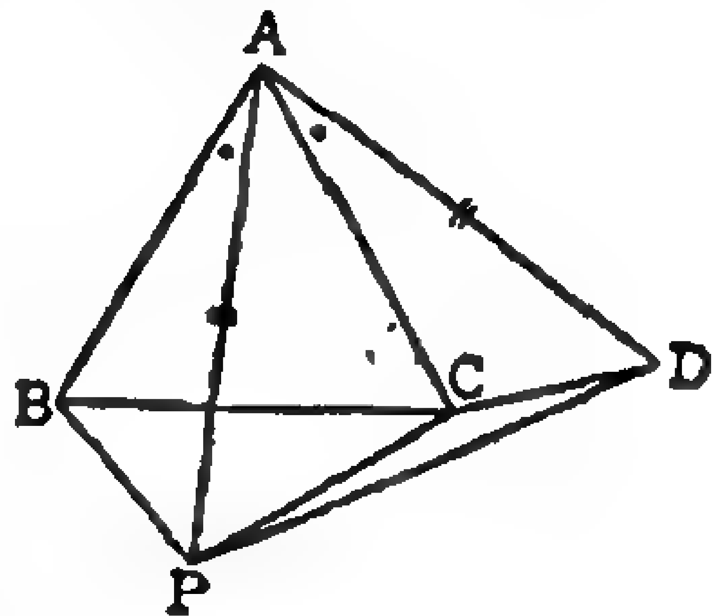
故　$PA=PB+PC$。

549. 若在正三角形 ABC 外取一点 P，

使得 $PA=PB+PC$，则 A、B、P、C 四点共圆。

解 若在 $\triangle ABC$ 的外侧作 $\angle CAD=\angle BAP$，并截取 $AD=AP$，则

$\triangle ABP\cong\triangle ACD$.



$\therefore\ PB=DC$,

$\angle ABP=\angle ACD$.

因 $AP=AD$ 及

$\angle DAP=\angle CAB=60^\circ$,

所以 $\triangle DAP$ 是正三角形， $\therefore\ AP=PD$.

但由假定 $AP=PB+PC$，所以 $PD=PC+CD$，因此 P、C、D 在一直线上。

因为 $\qquad \angle ACD=\angle ABP$,

从而 A、B、P、C 四点共圆。

550. 若在 $\triangle ABC$ 的各边的外侧作正三角形 ABC'、BCA'、CAB'，则

(1) 这三个正三角形的外接圆相交于一点；

(2) $AA'=BB'=CC'$;

(3) 这三个外心构成正三角形的顶点。

解 (1) 设三个圆的圆心分别为 P、Q、R，两圆 P、Q 的交点为 O，连结 AO、BO、CO，则

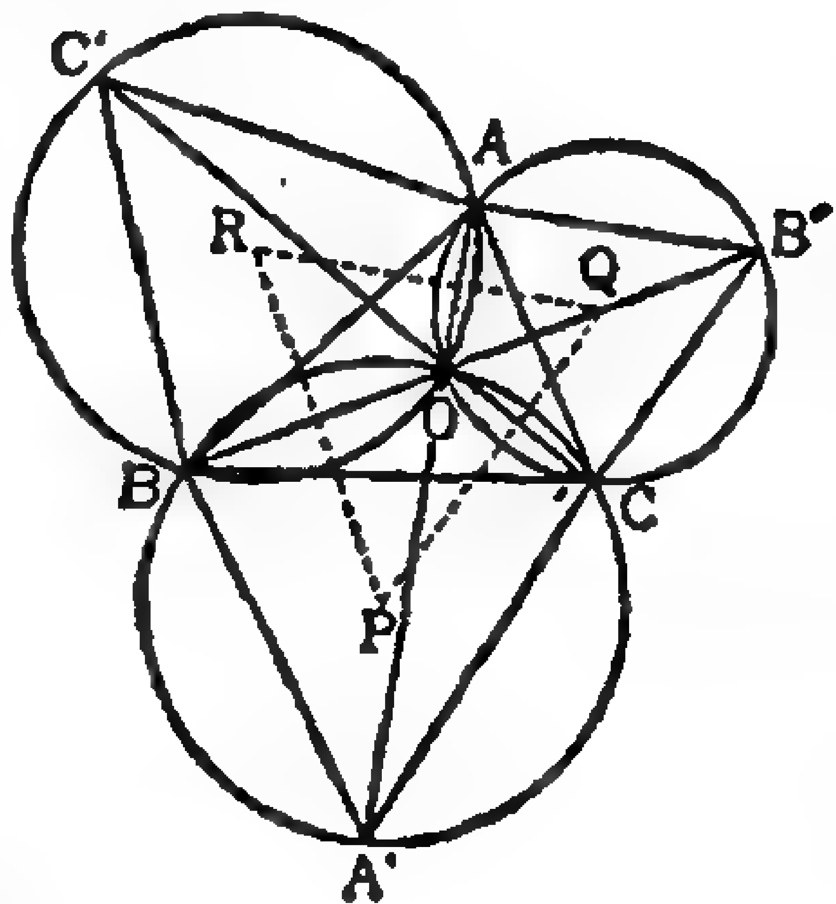
$$\angle AOC+\angle B'=180^\circ.$$

但 $\angle B'=60^\circ$，所以 $\angle AOC=120^\circ$.

同理， $\qquad \angle BOC=120^\circ$.

$$\therefore\ \angle AOB=120^\circ.$$

又因 $\angle C'=60^\circ$，所以 $\triangle ABC'$ 的外接圆也过点 O.



(2) 连结 $A'O$、$B'O$、$C'O$.

$\because\ \angle AOC=120^\circ$,

$\angle A'OC=\angle A'BC=60^\circ$.

所以 A、O、A' 在一直线上。

同理，B、O、B'，C、O、C' 也在一直线上。而且 O 是正三角形 $A'BC$ 的外接圆的劣弧 BC 上的点，由问题 **548**，有

$$OA'=OB+OC.$$

$$\therefore\ AA'=OA+OB+OC.$$

同理， $BB'=CC'=OA+OB+OC$,

$$\therefore\ AA'=BB'=CC'.$$

(3) 连结两圆的圆心的线段垂直公共弦，

所以 $\qquad PQ\perp OC$, $PR\perp OB$.

故 $\qquad \angle P+\angle BOC=2\angle R$.

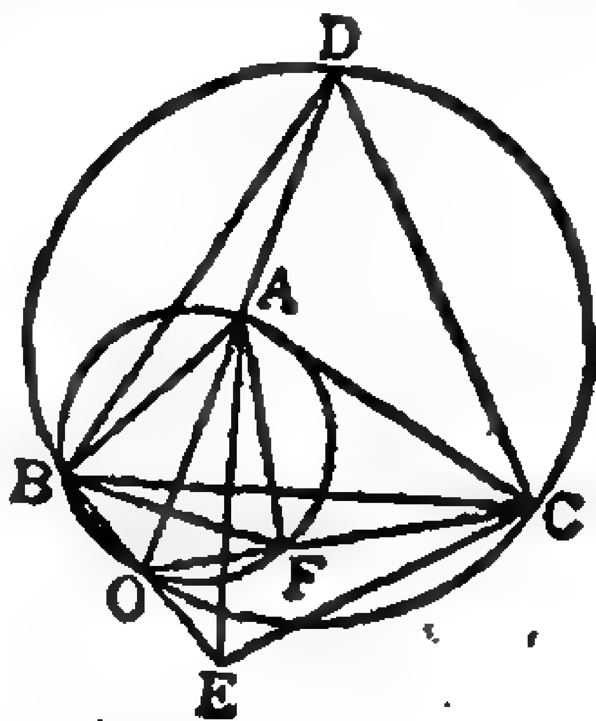
但是 $\angle BOC=120^\circ$, $\quad\therefore\ \angle P=60^\circ$.

同理，$\angle Q$、$\angle R$ 也是 60°.

所以 $\triangle PQR$ 是正三角形。

551. 在 $\triangle ABC$ 的各边的内侧作正三角形 BCD、CAE、ABF，则 AD、BE、CF 相交于一点。

解 设两圆 DBC、ABF 的交点为 O，连结 AO、DO，则



$$\angle BOA=\angle BFA=\frac{2}{3}\angle R.$$

又因

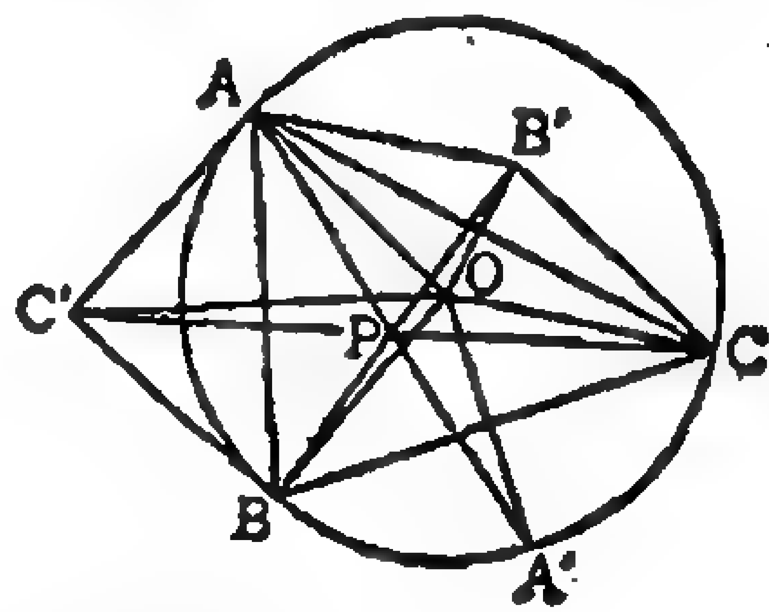
$$\angle BOD=\angle BCD=\frac{2}{3}\angle R,$$

$$\therefore\ \angle BOA=\angle BOD.$$

故 O、A、D 在一直线上。

同理，分别连结 OF、OC 及 OB、OE，则 O、F、C 及 B、O、E 在一直线上。即 AD、BE、CF 相交于一点。

552. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，若 O 关于 BC、CA、AB 的对称点分别为 A'、B'、C'，则 AA'、BB'、CC' 相交于一点。



解 因为四边形 $OAC'B$ 的对角线互相平分，所以它是平行四边形。

$$\therefore\ AC'\mathop{\perp\!\!\!\!=}OB.$$

同理， $\qquad A'C\mathop{\perp\!\!\!\!=}OB$,

$$\therefore\ AC'\mathop{\perp\!\!\!\!=}A'C.$$

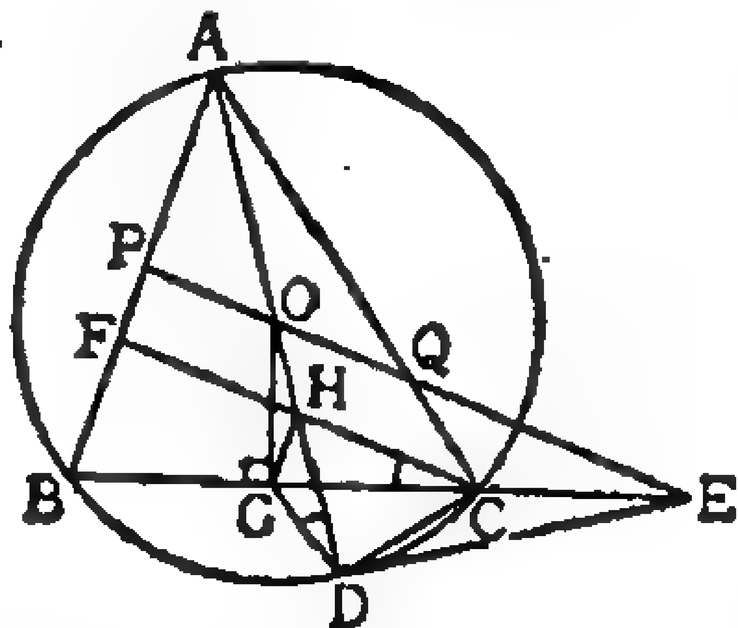
因此四边形 $AC'A'C$ 是平行四边形，AA'、CC' 在中点 P 相交。

同理，BB' 也过 P 点。

所以 AA'、BB'、CC' 过同一点 P.

553. 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 的直径，过直径 AD 的一端点 D 的切线和 BC 的

交点为 E, EO 和 AB、AC 的交点分别为 P、Q, 则 $OP=OQ$.



解　从 C 所作 EP 的平行线和 AD、AB 的交点分别为 H、F, 又由 O 作 BC 的垂线 OG, 则

$$\angle OGE=\angle R=\angle ODE,$$

所以 O、G、D、E 四点共圆.

于是　$\angle ODG=\angle OEG=\angle HCG$,

所以 G、D、C、H 四点共圆,

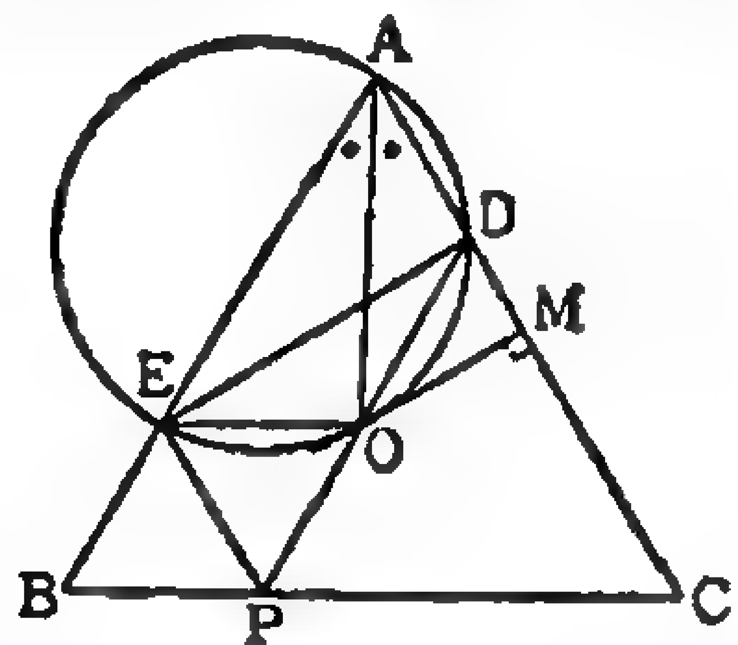
$$\therefore\quad \angle HGC=\angle HDC=\angle B,$$

$$\therefore\quad HG\parallel AB.$$

$$\because\quad GB=GC,\quad \therefore\quad HF=HC.$$

又　$\because$　$PQ\parallel CF$,　$\therefore$　$OP=OQ$.

554.　设由正三角形 ABC 的边 BC 上的一点 P, 所作 AB、AC 的平行线和 AB、AC 的交点分别为 E、D, 若 $\triangle ADE$ 的外接圆和 $\angle A$ 的平分线的交点为 O, 则 O 是 $\triangle ABC$ 的外心。



解　从 O 向 AC 作垂线 OM, 由问题 **536**, 有

$$AM=\frac{1}{2}(AE+AD).\quad ①$$

但 $\triangle ABC$ 是正三角形,

$$PD\parallel AB,\ PE\parallel AC,$$

所以

$$AE+AD=AC.\qquad ②$$

于是由①、②得

$$AM=\frac{1}{2}AC,$$

因此点 O 在 AC 的垂直平分线上.

同理, 从 O 向 AB 作垂线 ON, 显然 N 是 AB 的中点, 因而点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

8. 圆内接、外切四边形

555.　圆内接四边形对角互补. 这个命题的逆命题也是正确的.

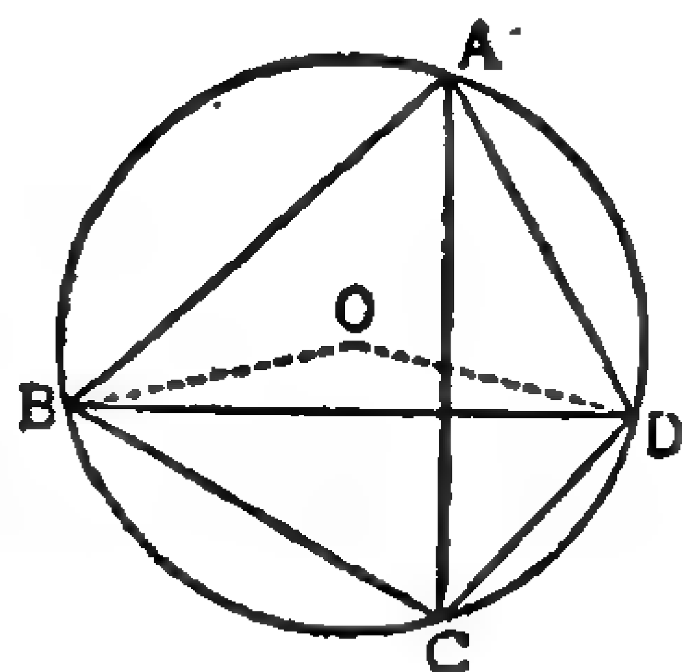
解　设四边形 $ABCD$ 的外接圆的圆心为 O, 连结 OB、OD 时,

$$\angle A=\frac{1}{2}\widehat{BCD}\text{ 的度数},$$

$$\angle C=\frac{1}{2}\widehat{BAD}\text{ 的度数},$$

$$\therefore\quad \angle A+\angle C=\frac{1}{2}[\widehat{BCD}\text{ 的度数}+\widehat{BAD}\text{ 的度数}]$$

$$=\frac{1}{2}\times 360^\circ=2\angle R.$$

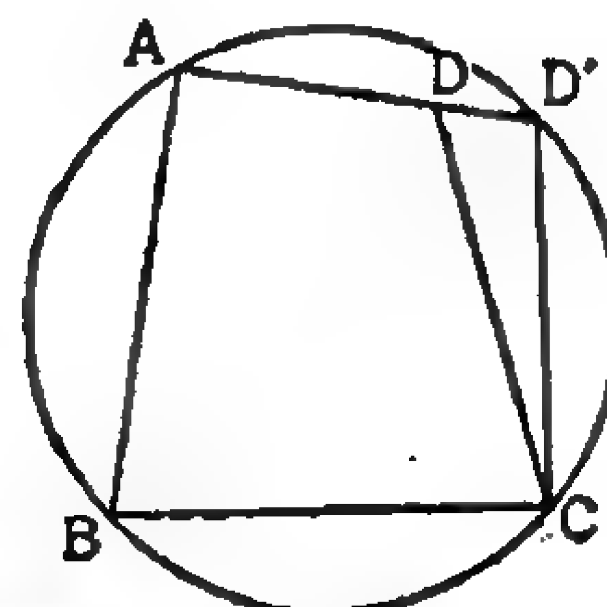


所以 $\angle A$ 和 $\angle C$ 互为补角.

同理, $\angle B$ 和 $\angle D$ 互为补角.

逆　当四边形 $ABCD$ 的内对角互补时, 就能够画出其外接圆. 这是因为:

假定过 A、B、C 三点的圆不过顶点 D, 令 AD 和圆周的交点为 D', 连结 $D'C$, 则四边形 $ABCD'$ 是圆内接四边形, 所以

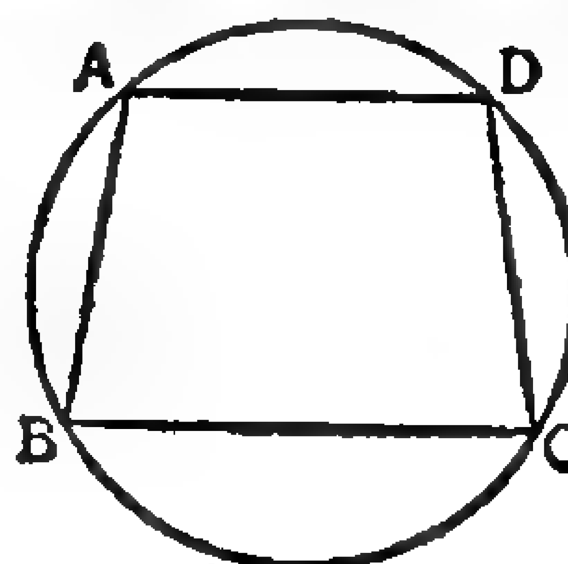


$$\angle B+\angle D'=2\angle R,$$

$$\therefore\quad \angle D'=\angle ADC.$$

这是不合理的. 所以圆 ABC 过 D 点. 即能够画出四边形 $ABCD$ 的外接圆.

556.　证明　等腰梯形内接于圆. 又若圆内接四边形的两对角线相等, 则此四边形是等腰梯形.

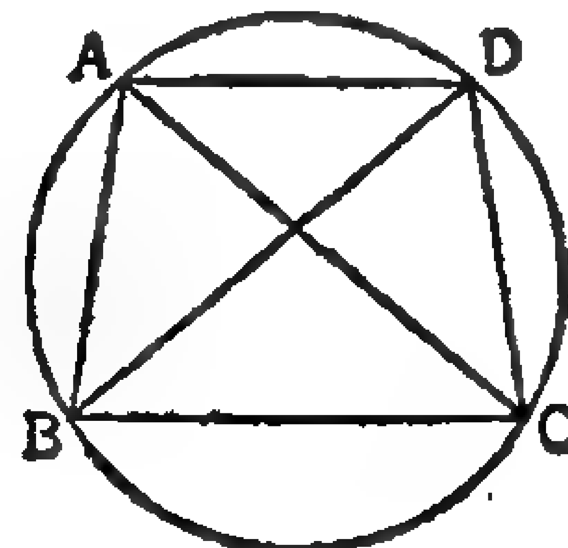


解　在梯形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $AB=CD$.

则　$\angle ABC=\angle DCB$.

$$\therefore\quad \angle ABC+\angle BAD=\angle DCB+\angle ADC=2\angle R\ (\because\ AD\parallel BC),$$

故等腰梯形内接于圆.



又设四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形, 且

$$AC=BD,$$

则　$\widehat{ADC}=\widehat{BAD}$

或　$\widehat{ABC}=\widehat{BAD}$,

$$\therefore\quad \widehat{AB}=\widehat{CD}\quad\text{或}\quad \widehat{AD}=\widehat{BC}.$$

故当 $AB=CD$ 时, 则 $\angle ADB=\angle DBC$;

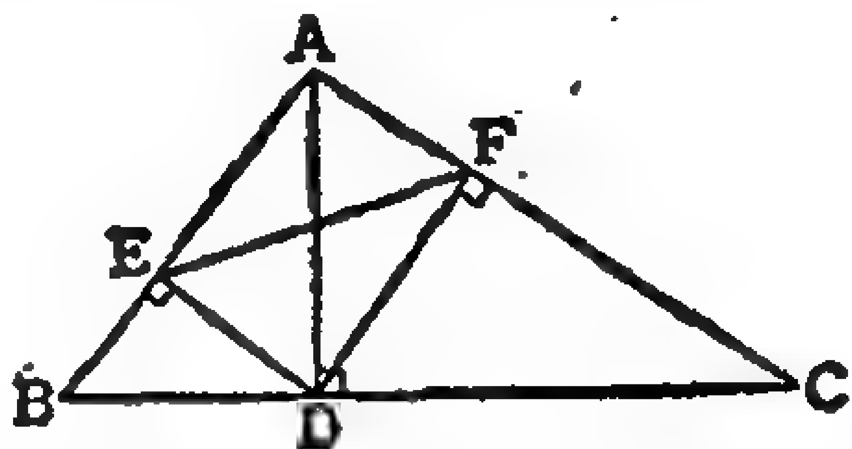
当 $AD=BC$ 时, 则 $\angle ABD=\angle BDC$.

所以有 $AD\parallel BC$, $AB=CD$; 或 $AB\parallel CD$,

$AD=BC$。故不论哪种情况四边形 $ABCD$ 都是等腰梯形。

557. 由 $\triangle ABC$ 的一个顶点 A，向对边 BC 作垂线 AD，再由 D 向另两边作垂线 DE、DF，则 B、E、F、C 四点共圆。

解 因 $AEDF$ 是内接于圆的四边形，所以 $\angle AEF=\angle ADF$。



但是 $\angle ADC=\angle R$，$AC\perp DF$。

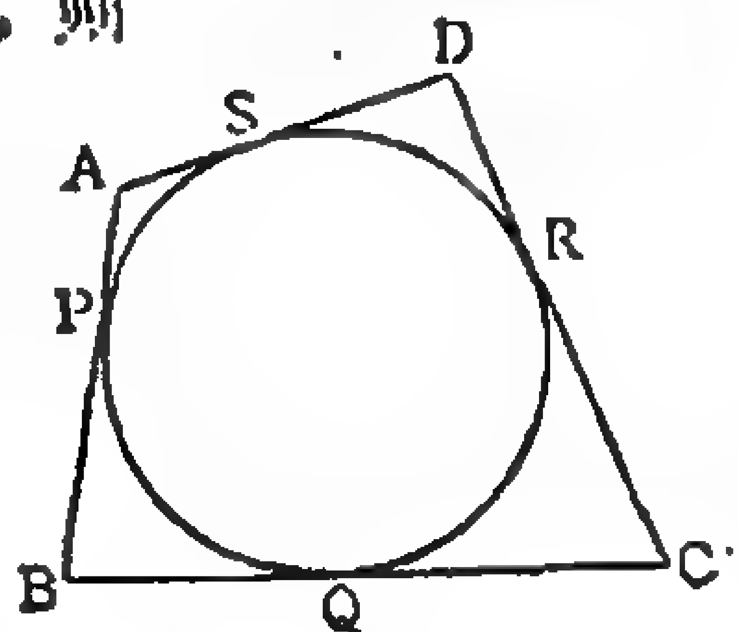
$\therefore\quad \angle ADF=\angle ACB,\ \angle AEF=\angle ACB$。

故 B、E、F、C 四点共圆。

558. 圆外切四边形 $ABCD$ 的对边之和 $AB+CD$ 与 $AD+BC$ 相等。

解 设 AB、BC、CD、DA 同内切圆的切点分别为 P、Q、R、S，则

$AP=AS$，
$BP=BQ$，
$CR=CQ$，
$DR=DS$。



把这四个式子的两边分别相加，得

$$(AP+BP)+(CR+DR)=(AS+DS)+(BQ+CQ),$$

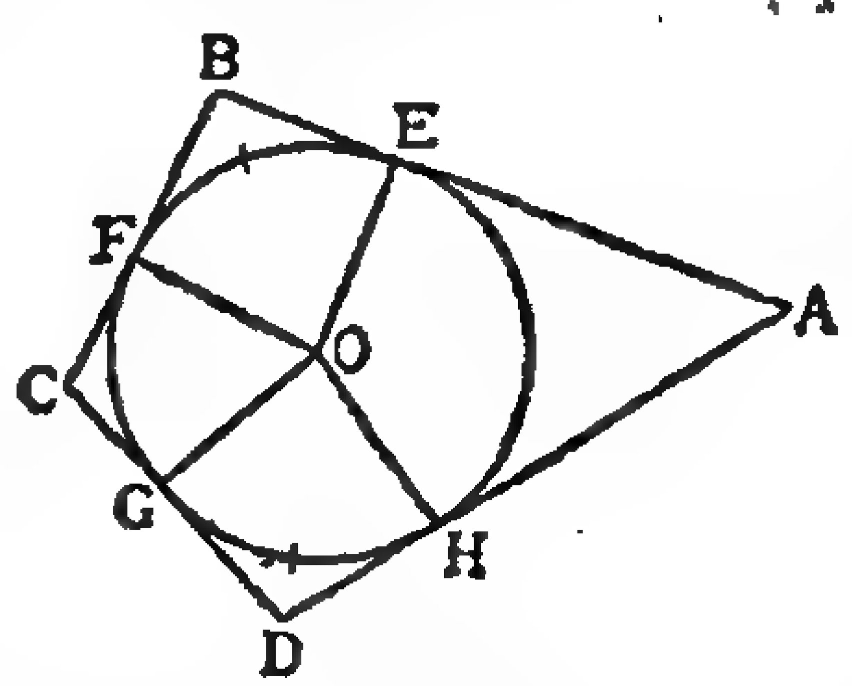
即 $\qquad AB+CD=AD+BC$。

559. 在一圆上有两等弧，过每弧的两端点所作四条切线构成的四边形，则位于不相等二弧上的两邻边相等。

解 设圆 O 的 $\overset{\frown}{EF}$ 和 $\overset{\frown}{GH}$ 相等，则

$$\angle EOF=\angle GOH.$$

设 由 E、F、G、H 各点作该圆的切线所构成的四边形为 $ABCD$，则 OB 平分 $\angle EOF$，OD 平分 $\angle GOH$。所以在 $\triangle BFO$ 和 $\triangle DGO$ 中，$\angle OFB=\angle R=\angle OGD$，$\angle FOB=\angle GOD$，$OF=OG$。



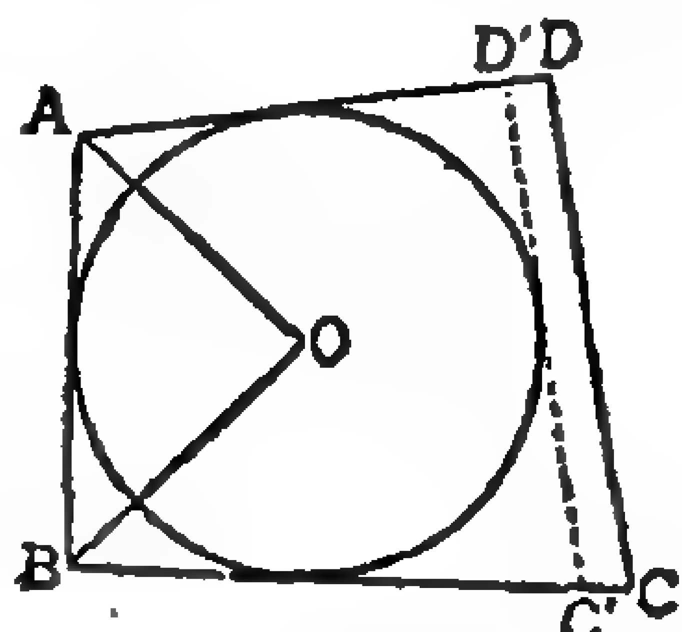
$\therefore\quad \triangle BFO\cong\triangle DGO$，$BF=DG$。

但是 $\quad CF=CG$，$\quad\therefore\quad BC=DC$。

同理，$\qquad AB=AD$。

560. 在凸四边形 $ABCD$ 中，若相对两边 AB、CD 之和等于另两对边 AD、BC 之和，则该四边形是圆外切四边形。

解 设以 $\angle A$、$\angle B$ 的平分线的交点 O 为圆心，可以作一圆与三边 AB、BC、AD 相切。现假定 DC 和圆 O 不相切，若作此圆的切线且平行于 CD 并与 AD、BC 或其延长线分别相交于 D'、C'，则四边形 $ABC'D'$ 为圆外切四边形，所以，



$$AB+D'C'=AD'+BC'. \qquad ①$$

又由假定，知

$$AB+DC=AD+BC. \qquad ②$$

由①～②，得

$$DC\sim D'C'=[(AD\sim AD')+(BC\sim BC')],$$

$$\therefore\quad DC\sim D'C'=DD'+CC',$$

即 $\qquad DC=DD'+CC'+D'C'$，

或 $\qquad D'C'=DD'+CC'+DC$。

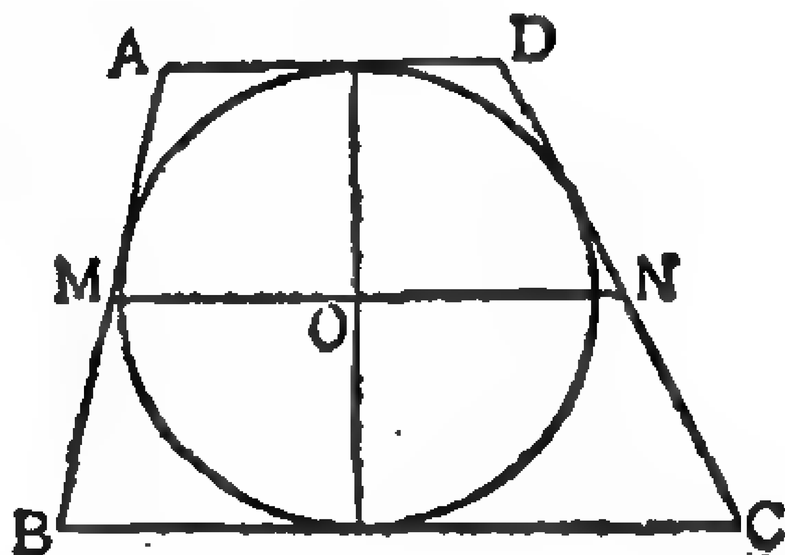
这个四边形的一边等于其余三边之和，这是不合理的。所以，该四边形 $ABCD$ 是圆外切四边形。

561. 在定圆的外切梯形中，面积最小的是正方形。

解 设梯形 $ABCD$ 为圆外切梯形，$AD\parallel BC$，圆 O 的半径为 r，则梯形的面积 S 为

$$S=\frac{1}{2}(AD+BC)\times 2r.$$

要使 S 为最小，只要 $AD+BC$ 为最小就可以了。但是 $ABCD$ 是梯形，若设 AB、CD 的中点分别为 M、N，则 MN 通过圆心 O 并且



$$MN=\frac{1}{2}(AD+BC).$$

因此在本题中，只要求出 MN 为最小就可以了。但 MN 等于直径 $2r$ 时为最小。这时，面积最小值 $S=4r^2$，$ABCD$ 为正方形。

562. AD、BO 是相交的两条线段，当四条直线 AB、AD、OB、OD 都和一个圆相切时，则 $AB\sim OD=AD\sim BO$。

解 设边 AB、BO、OD、DA 或它们的延长

线和一个圆相切，其切点分别为 E、F、G、H，则

$AB=AE-EB$

$=AH-BF$，　①

$OD=OG-DG$

$=OF-DH$。　②

由①－②，得

$AB-OD=[(AH-BF)-(OF-DH)]$

$=[(AH+DH)-(BF+OF)]$

$=AD-BO$。

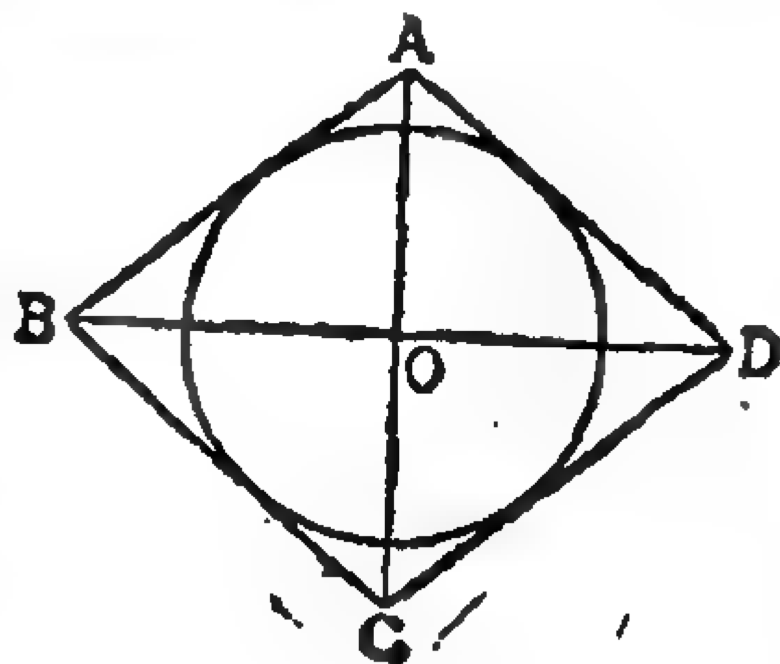
在 $AB<OD$ 时，由②－①，得

$$OD-AB=BO-AD.$$

因此一般地　$AB\sim OD=AD\sim BO$。

563. 若圆 O 的外切四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 过圆心 O，则 AC、BD 互相垂直，且四边形 $ABCD$ 是菱形。

解　因对角线 AC 过内切圆的圆心，所以该四边形关于 AC 是对称的．同理，四边形关于 BD 也是对称的。



所以　　$AC\perp BD$，

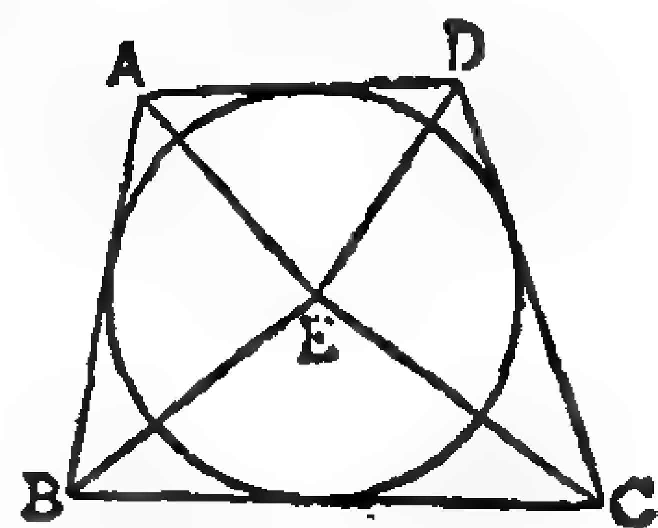
并且　　$AB=AD=BC=CD$。

故四边形 $ABCD$ 是菱形。

564. 四边形 $ABCD$ 是圆的外切四边形，若这个圆的圆心为 E，则

$$\angle AEB+\angle CED=2\angle R.$$

解　设圆心为 E，把 E 和各顶点 A、B、C、D 连结，则



$\angle EAB=\angle EAD$，

$\angle EBA=\angle EBC$，

$\angle ECD=\angle ECB$，

$\angle EDC=\angle EDA$。

$\therefore$　$\angle EAB+\angle EBA+\angle ECD+\angle EDC=2\angle R$。

但是 $\triangle ABE$、$\triangle CDE$ 的内角之和都等于两直角，

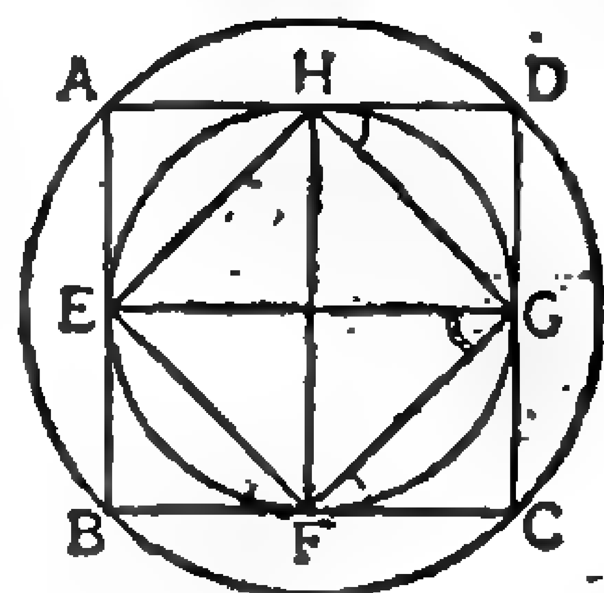
即　$\angle EAB+\angle EBA+\angle AEB=2\angle R$，

$\angle ECD+\angle EDC+\angle CED=2\angle R$，

$\therefore$　$\angle AEB+\angle CED=2\angle R$。

565. 若四边形 $ABCD$ 是一个圆的内接四边形，又是另一个圆的外切四边形，则连结对边切点的两直线 EG、FH 互相垂直。

解　设四边形的边 AB、BC、CD、DA 与内切圆的切点分别为 E、F、G、H，则



$\angle BFE=\angle EGF$，　①

$\angle DHG=\angle HFG$；　②

但是 $\triangle DHG$、$\triangle BEF$ 都是等腰三角形，并且 A、B、C、D 四点共圆，$\angle B+\angle D=2\angle R$。

所以

$$\angle BFE+\angle DHG=\angle R.\qquad ③$$

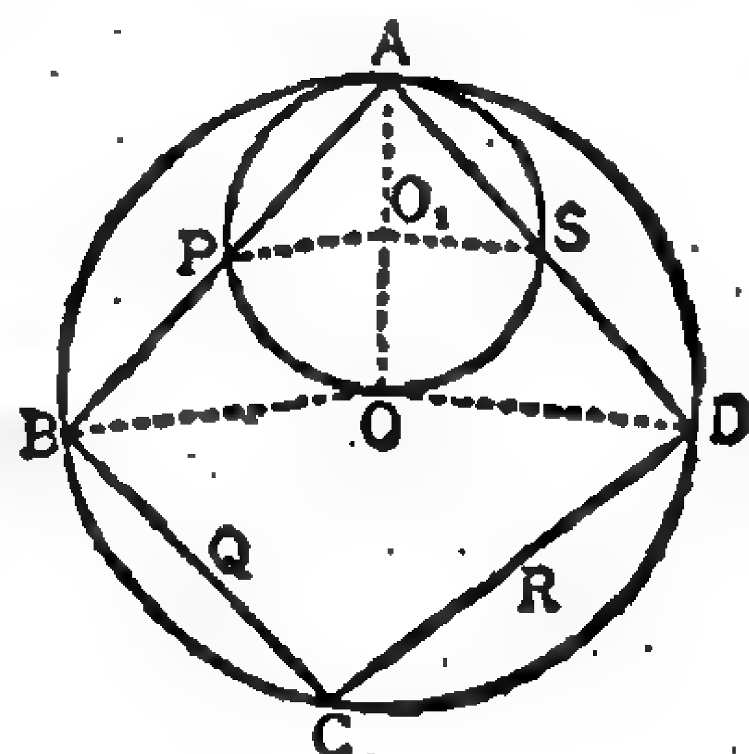
故由①、②、③，得

$$\angle EGF+\angle HFG=\angle R,$$

$$\therefore\quad HF\perp EG.$$

566. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 P、Q、R、S，则 $\triangle APS$、$\triangle BQP$、$\triangle CRQ$、$\triangle DSR$ 的外接圆都相等并且都与圆 $ABCD$ 内切。

解　设四边形 $ABCD$ 的外接圆的圆心为 O，线段 AO 的中点为 O_1，则



$$O_1P=\frac{1}{2}OB,$$

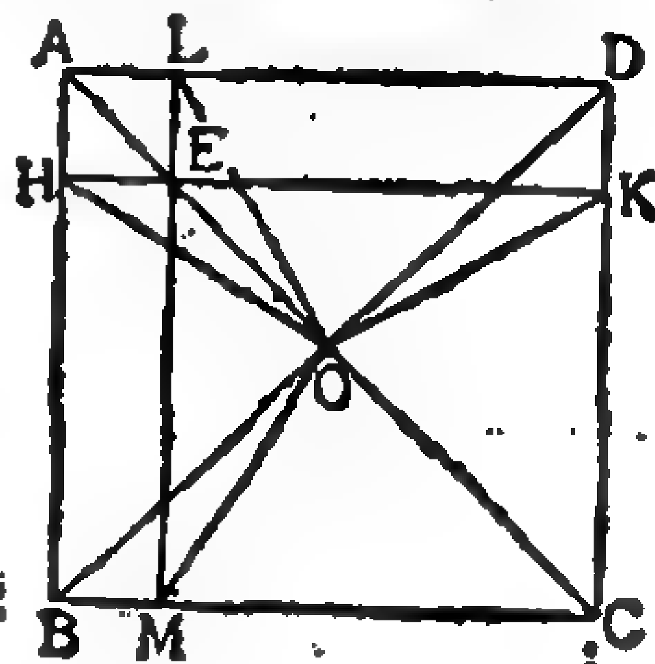
$$O_1S=\frac{1}{2}OD.$$

因 OA、OB、OD 都是圆 O 的半径，

所以　　$O_1A=O_1O=O_1P=O_1S$。

因此以 OA 为直径的圆 O_1 过 P 及 S，并且和圆 O 在点 A 内切．同理也可作以 OB、OC、OD 为直径的圆．所以四个三角形 APS、BQP、CRQ、DSR 的外接圆都相等，并且都和圆 O 内切。

567. 设过正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的任意点 E 作 AD、AB 的平行线，与 AB、BC、CD、DA 的交点分别为 H、M、K、L，则此四点在以正方形的对角线的交点 O 为圆心的圆周上。



解　因 O 是对角线的交点，所以

$$OA=OD.$$

又　　$AL=LE=DK$,

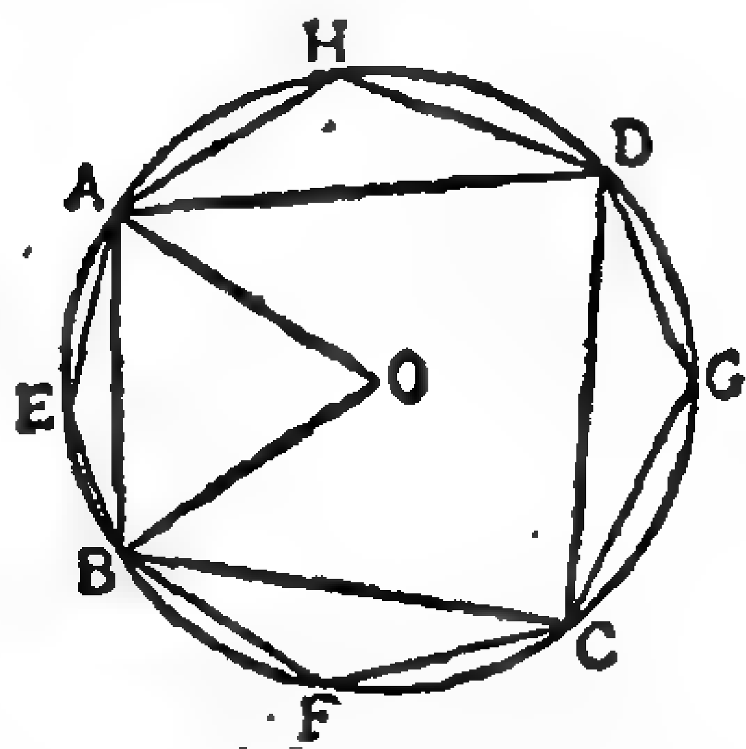
$$\angle OAL=\frac{1}{2}\angle R=\angle ODK,$$

$$\therefore\quad \triangle AOL\cong\triangle DOK.$$

同理，$\triangle AOL$、$\triangle AOH$、$\triangle BOM$ 都是全等的，

$$\therefore\quad OL=OK=OH=OM.$$

因此 L、K、M、H 四点在以 O 为圆心，OL 为半径的圆周上。



568. 以圆内接四边形 $ABCD$ 的四边 AB、BC、CD、DA 为弦所构成的四个弓形角之和 $\angle AEB+\angle BFC+\angle CGD+\angle DHA$ 等于 $6\angle R$.

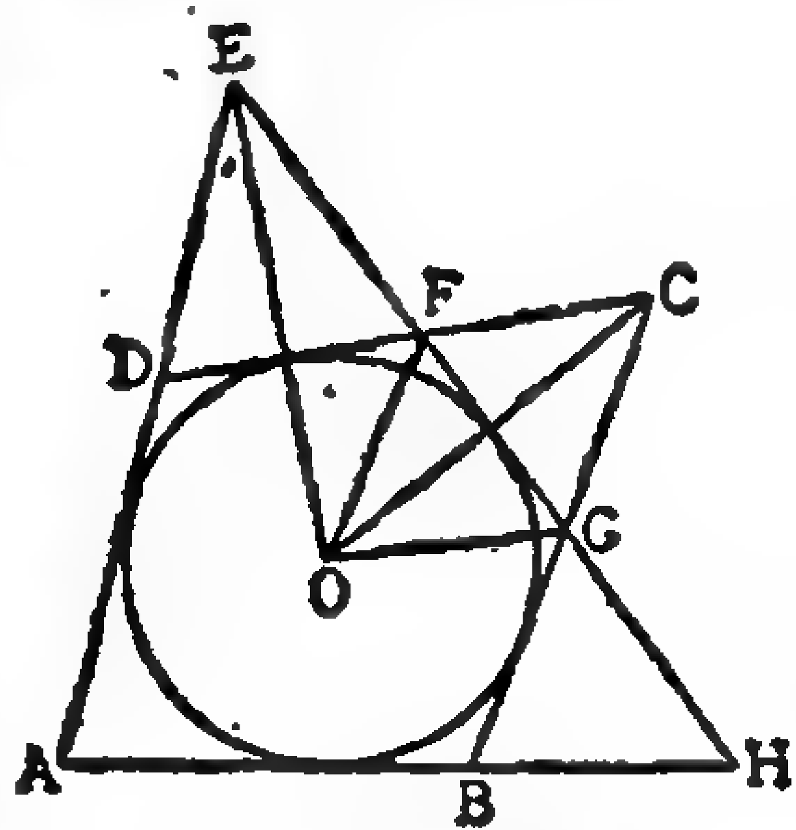
解　$\angle AEB$ 等于(圆周 $-\overset{\frown}{AEB}$)上的圆心角的一半。其他三个弓形角也是一样的。所以

$\angle AEB+\angle BFC+\angle CGD+\angle DHA$ 是

$(4\times$圆周$)-(\overset{\frown}{AEB}+\overset{\frown}{BFC}+\overset{\frown}{CGD}+\overset{\frown}{DHA})$，

即 $3\times$圆周上的圆心角的一半，亦即是 $6\angle R$.

569. 设圆 O 的切线 $EFGH$ 被圆的外切四边形 $ABCD$ 的边或其延长线分成三段 EF、FG、GH，试证此三线段所对圆 O 的圆心角的大小是一定的。



解　因圆 O 是 $\triangle EDF$ 的旁切圆，所以

$$\angle EOF=\frac{1}{2}\angle EDF;$$

圆 O 是 $\triangle CFG$ 的旁切圆，所以

$$\angle FOG=\angle R-\frac{1}{2}\angle FCG$$

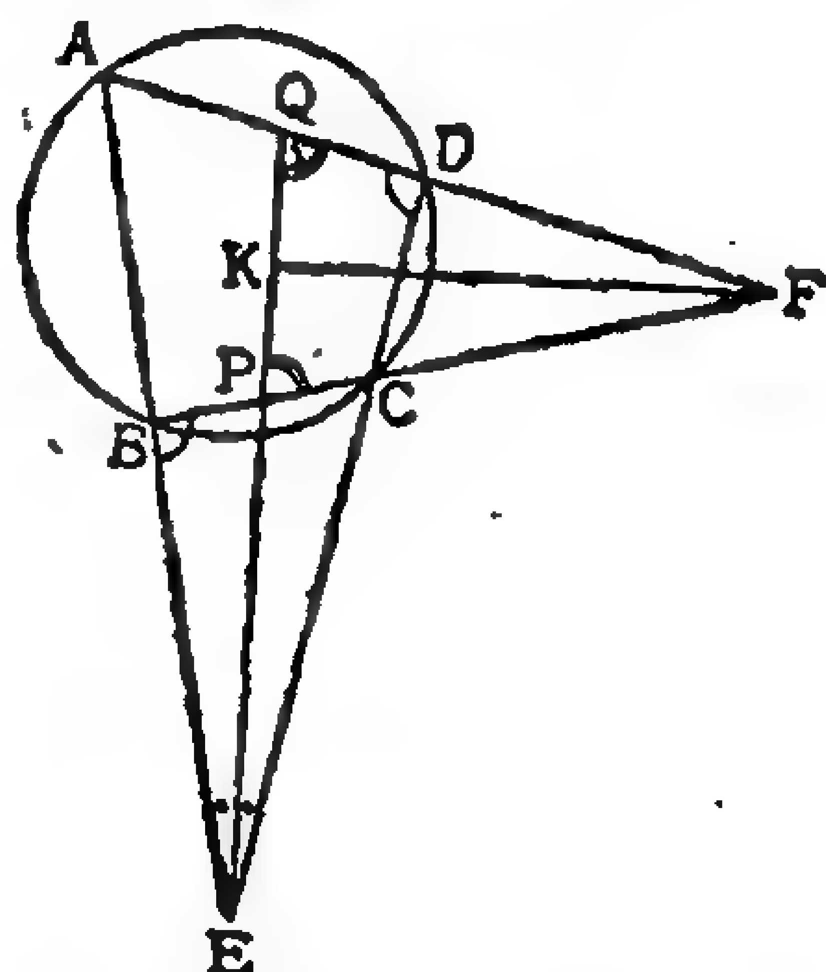
$$=\frac{1}{2}(2\angle R-\angle FCG);$$

圆 O 是 $\triangle BGH$ 的旁切圆，所以

$$\angle GOH=\frac{1}{2}\angle GBH.$$

因此，$\angle EOF$、$\angle FOG$、$\angle GOH$ 分别是等于 $\angle ADC$、$\angle DCB$、$\angle CBA$ 的补角的一半。

570. 圆内接四边形的两组对边相交所成的角的平分线互相垂直。



解　设 $ABCD$ 为圆内接四边形，延长 AD、BC 及 AB、DC，交点分别为 F、E。

设 $\angle E$ 的平分线和 BC、AD 的交点分别为 P、Q，$\angle F$ 的平分线和 PQ 的交点为 K，则在 $\triangle EBP$ 和 $\triangle EQD$ 中，

$$\angle BEP=\angle QED. \qquad ①$$

又因 $ABCD$ 是圆内接四边形，所以

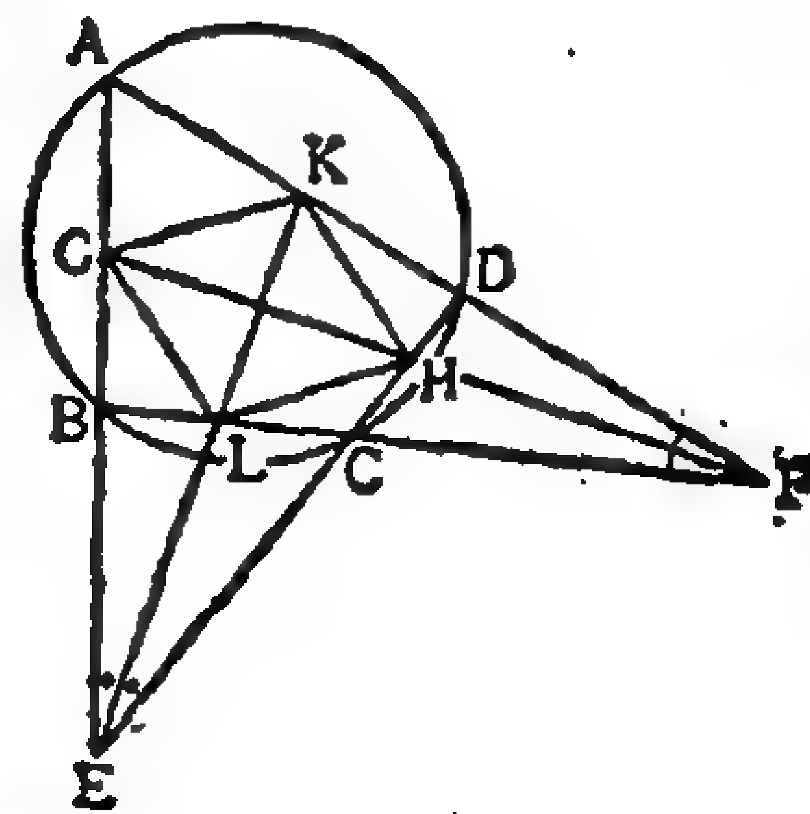
$$\angle EBP=\angle EDQ. \qquad ②$$

由①、②，得　$\angle BPE=\angle EQD$，

因此　　$\angle FPQ=\angle FQP$.

所以 $\triangle FPQ$ 是等腰三角形。因此 $\angle F$ 的平分线垂直 PQ。

571. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的对边 AB、DC 及 AD、BC 的延长线的交点分别为 E、F，若 $\angle AFB$ 的平分线和 AB、CD 的交点分别为 G、H，$\angle AED$ 的平分线和 AD、BC 的交点分别为 K、L，则四边形 $GKHL$ 是菱形。



解　由上题知 $\triangle FKL$ 是等腰三角形，FG 垂直平分 KL.

同理，EK 垂直平分 GH。即 GH、KL 是互相垂直平分的，所以四边形 $GKHL$ 是菱形。

572. 设四边形 $ABCD$ 的两组对边 AB、DC 及 AD、BC 的交点分别为 E、F，若 $\angle E$、$\angle F$ 的平分线互相垂直时，则该四边形为圆内接四边形。

解　设 $\angle E$ 的平分线和 BC、AD 的交点分别为 P、Q，$\angle F$ 的平分线和 PQ 的交点为

M 时，由题意知 $FM\perp PQ$，所以 $\triangle FPQ$ 是等腰三角形。

因此

$\angle QPF$

$=\angle PQF$。①

在 $\triangle EPC$ 和 $\triangle AEQ$ 中，$\angle PEC=\angle AEQ$，

由①，$\angle EPC=\angle EQA$，

$$\therefore\quad \angle PCE=\angle EAQ.$$

因此四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。

573. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的边 AD、BC 的延长线交于点 G，AC、BD 交于点 E，过 E 作 $\angle AGB$ 的平分线的垂线 EF，则 EF 平分 AC 和 BD 所夹的角。

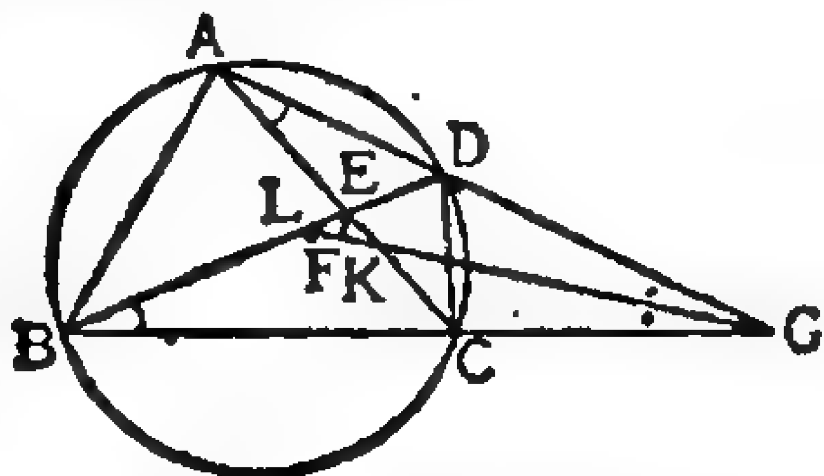
解 令 $\angle G$ 的平分线和 AC、BD 的交点为 K、L，则

$$\angle EKF=\frac{1}{2}\angle G+\angle DAC,$$

$$\angle ELF=\frac{1}{2}\angle G+\angle DBC.$$

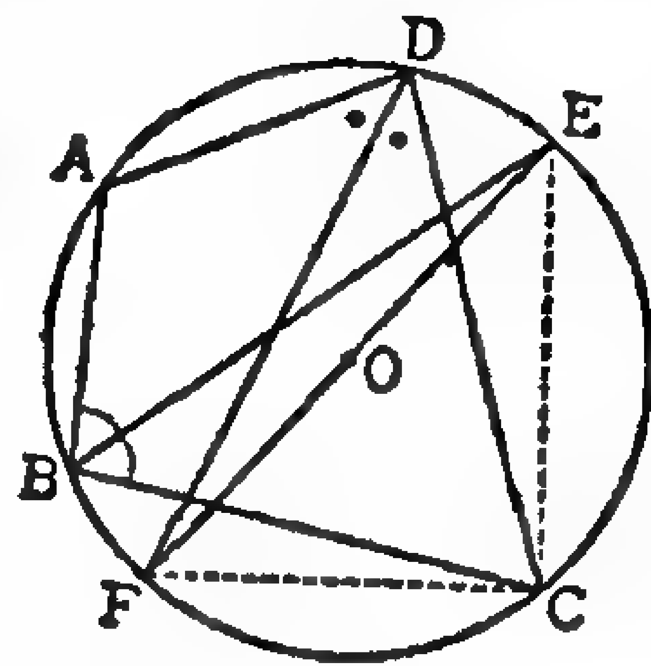
但 $\qquad \angle DAC=\angle DBC$，

$$\therefore\quad \angle EKF=\angle ELF.$$



因此，$\triangle ELK$ 是等腰三角形。所以，EF 平分由 AC、BD 所夹的角。

574. 若圆内接四边形 $ABCD$ 的对角 B、D 的平分线和外接圆的交点分别为 E、F，则 EF 是该圆的直径。



解

$\because\ \angle CEF=\angle CDF$

$$=\frac{1}{2}\angle ADC,$$

$$\angle CFE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC.$$

$\therefore\ \angle CEF+\angle CFE$

$$=\frac{1}{2}(\angle ADC+\angle ABC)=\angle R.$$

因而 $\qquad \angle ECF=\angle R$，

故 EF 是该圆的直径。

575. 设由定圆的内接四边形 $ABCD$ 的顶点 B 作任意弦 BP，它和 CD 的交点为 Q，再由 Q 作 AB 的平行线 QE 和 AD 或其延长线的交点为 E，则 EP 过定点。

解 设 EP 和圆 O 的交点为 F。因

$AB\parallel EQ$，

所以

$\angle PQE=\angle PBA$。

但是，四边形 $ABPD$ 是圆内接四边形，

$$\angle PBA=\angle PDE,$$

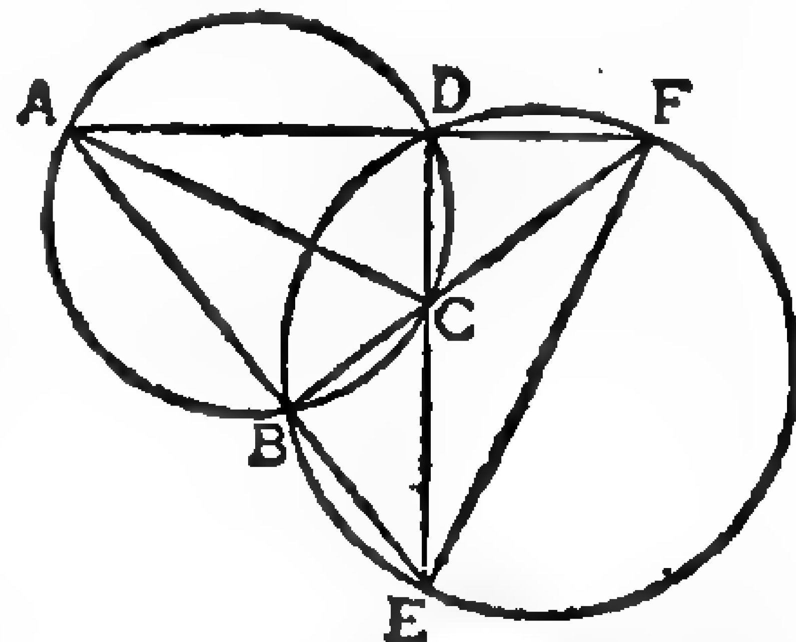
$$\therefore\quad \angle PQE=\angle PDE.$$

因此，P、E、D、Q 四点共圆。

$\therefore\quad \angle BPF=\angle EDC=\angle ABC$（定角）。

因为 $\quad \angle BCF+\angle BPF=2\angle R$，

所以 $\angle BCF$ 也是定角，故 F 是定点，EP 总是过定点 F。



576. $ABCD$ 是圆内接四边形，AB、DC 及 BC、AD 的延长线的交点分别为 E、F，若 E、F、D、B 四点共圆，则 AC 是前一圆的直径，EF 是后一圆的直径。

解 因 $ABCD$ 是圆内接四边形，所以

$$\angle CBE=\angle ADC.$$

又 E、F、D、B 四点共圆，所以

$$\angle EBF=\angle EDF,$$

于是 $\qquad \angle ADC=\angle EDF$，

$$\therefore\quad \angle ADC=\angle R=\angle EDF.$$

因此 AC 是前一圆的直径，EF 是后一圆的直径。

577. 若圆内接四边形 $ABCD$ 的对边 AB、DC 的延长线相交于 P，AD、BC 的延长线相交于 Q，则 $\triangle BPC$、$\triangle DCQ$ 的外接圆的另一交点在 PQ 上。

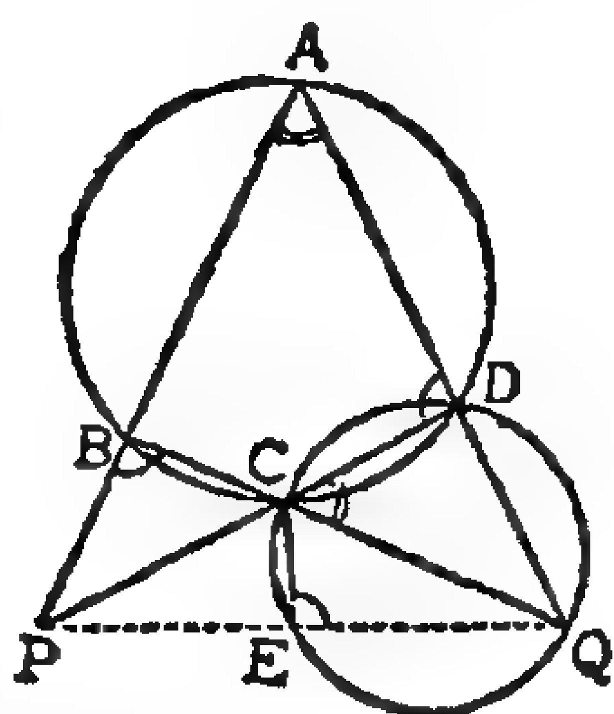
解 若 $\triangle DCQ$ 的外接圆和 PQ 的交点为 E，则 C、D、Q、E 四点共圆，所以

$$\angle CEQ=\angle ADC.$$

但四边形 $ABCD$ 是圆的内接四边形，所以

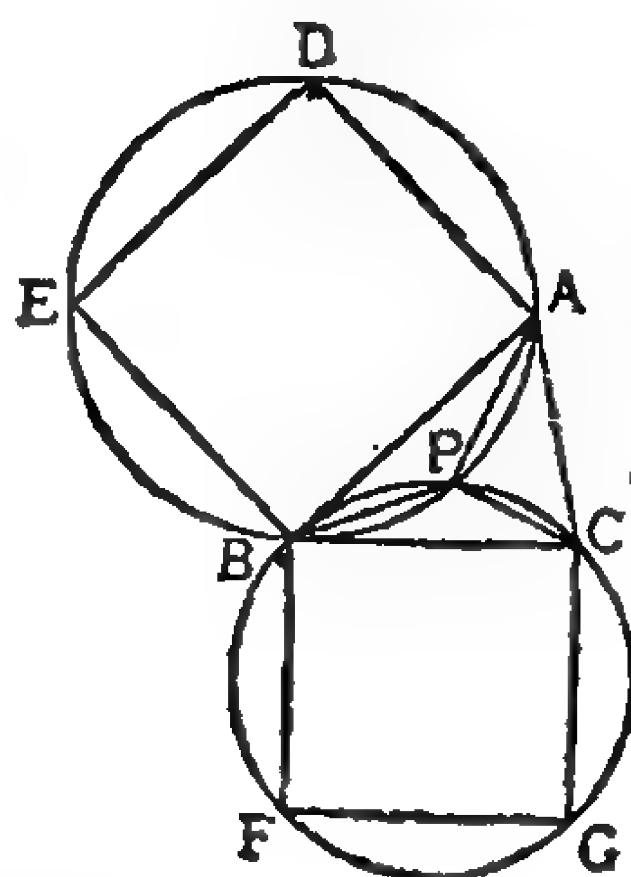
$$\angle ADC=\angle PBC.$$

于是　　　$\angle PBC=\angle CEQ$,
因此 P、B、C、E 四点共圆。
所以 $\triangle BPC$、$\triangle DCQ$ 的外接圆的另一交点在 PQ 上。



578. 在 $\triangle ABC$ 的两边 AB、BC 的外侧分别作正方形 $ABED$、$BCGF$，再以第三边 CA 为对角线作正方形 $AKCH$，则三个正方形的外接圆过同一点。

解　设正方形 $BADE$、$BCGF$ 的外接圆的另一交点为 P，因弧 BPA 是圆周的 $\frac{1}{4}$，所以



$$\angle APB=\frac{3}{2}\angle R.$$

同理，

$$\angle BPC=\frac{3}{2}\angle R,$$

$$\therefore\quad \angle APC=4\angle R-\left(\frac{3}{2}\angle R\times 2\right)=\angle R.$$

因此 P 在以 AC 为直径的圆上，即在正方形 $AHCK$ 的外接圆周上。

579. 若四边形 $ABCD$ 为圆的外切四边形，则 $\triangle ABC$、$\triangle ADC$ 的内切圆互相外切。

解　假定两圆在 AC 上的切点分别为 P、Q，则由问题 **444**，知

$$AP=\frac{1}{2}(AC+AB-BC).\qquad ①$$

在 $\triangle ADC$ 中，

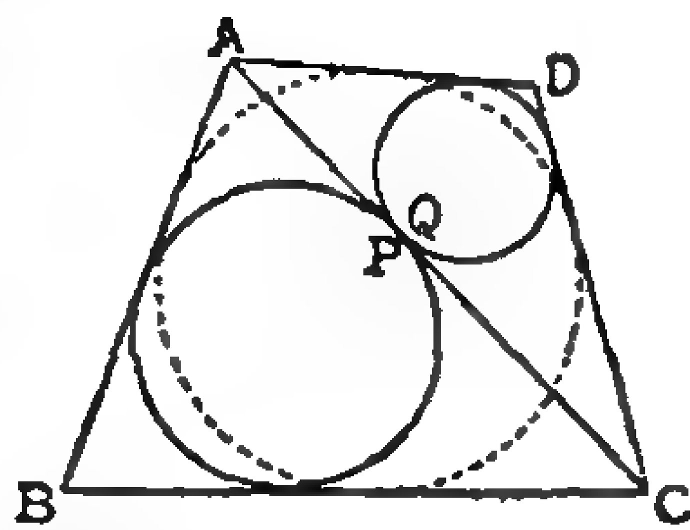
$$AQ=\frac{1}{2}(AC+AD-DC).\qquad ②$$

但是 $ABCD$ 是圆的外切四边形，由问题 **558**，知

$AB+CD=AD+BC$,

即 $AB-BC$

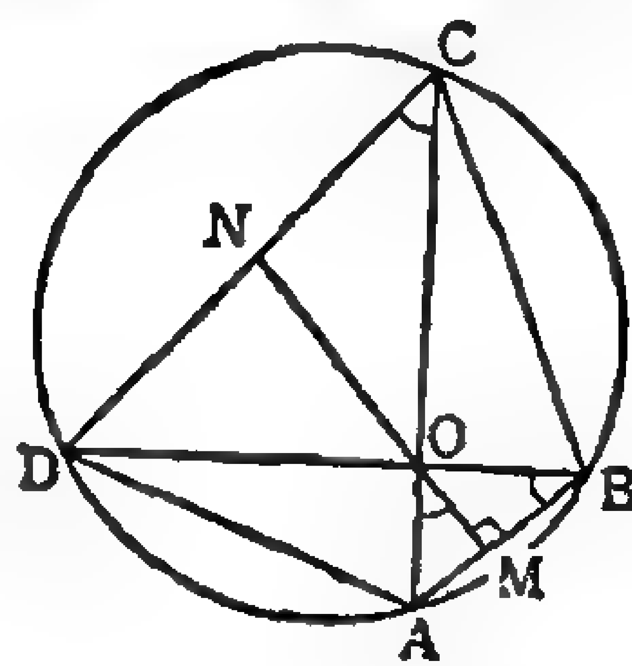
$\quad=AD-CD.$



因此由①、②，有 $AP=AQ$,
所以 P 和 Q 重合。因此两圆互相外切。

580. 若圆内接四边形的对角线互相垂直，则由交点向一边所作垂线平分其对边。[布拉美古塔定理]

解　设圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线的交点为 O，由 O 向 AB 所作垂线的垂足为 M，延长 MO 和 CD 的交点为 N，于是由 $\angle AOB=\angle R$，$OM\perp AB$。



可知　　　$\angle AOM=\angle OBA$,
　　　　　$\angle DBA=\angle DCA$.

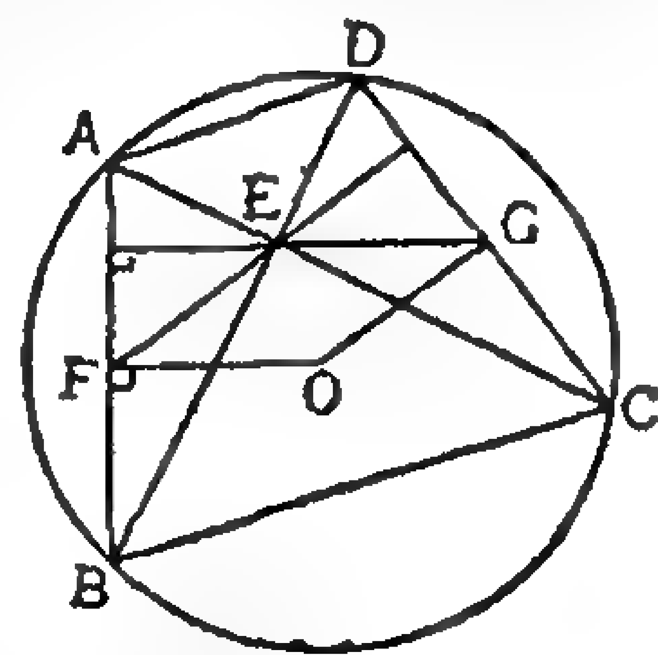
因此 $\angle NOC=\angle NCO$，从而 $NO=NC$。

同理 $NO=ND$，故 N 是 DC 的中点。

581. 若圆内接四边形 $ABCD$ 的两对角线互相垂直，则其一边 AB 和圆心 O 的距离 OF 等于对边 CD 的一半。

解　设 AC、BD 的交点为 E。由 E 作直线垂直于 AB，和 CD 的交点为 G，由上题知

$$GC=GD=\frac{1}{2}DC,$$



因而　$OG\perp CD$.

同理，由 E 作直线垂直于 CD，和 AB 的交点为 F，则

$$FE=FA=FB,$$

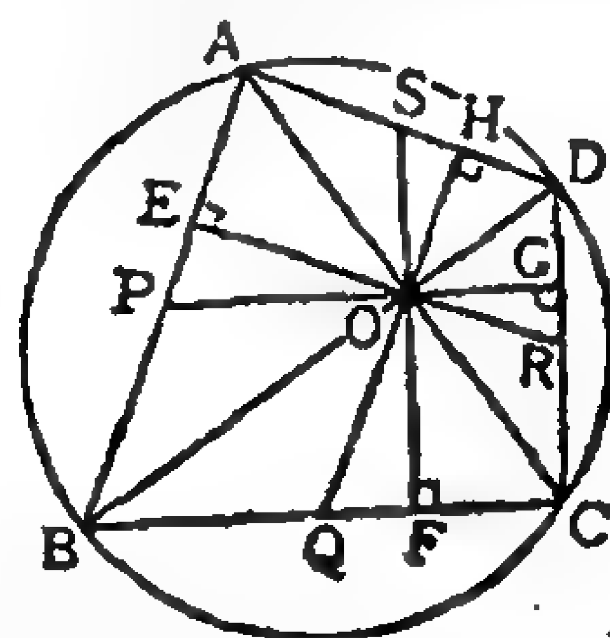
因而　　　　$OF\perp AB$.

但 $FE\parallel OG$（同垂直于 CD），$EG\parallel OF$，所以 $EFOG$ 是平行四边形。

故　　　　$OF=EG=\frac{1}{2}CD$.

582. 若圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直，从其交点 O 向各边 AB、BC、CD、DA 所作垂线的垂足分别为 E、F、G、H，则此四点共圆。

解　设 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 P、Q、R、S，由问题 **580**，可知 EO 的延长线过点 R，GO 的延长线过点 P，所以 E、G 是在以 PR 为直径的圆周上。



同理，F、H 是在以 QS 为直径的圆周上。但是，$PQRS$ 是矩形，

故以 PR 为直径的圆和以 QS 为直径的圆是重合的. 因此点 E、F、G、H 在以 PR 为直径的圆周上.

注 在这种情况下, E、F、G、H, P、Q、R、S 是在同一圆周上,称为八点圆.

583. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线的交点为 O, 由 O 向各边 AB、BC、CD、DA 所作垂线的垂足分别为 E、F、G、H, 则四边形 $EFGH$ 能画一内切圆.

解 由于 $\angle AEO=\angle AHO=\angle R$. 所以四边形 $AEOH$ 是圆的内接四边形,因而,

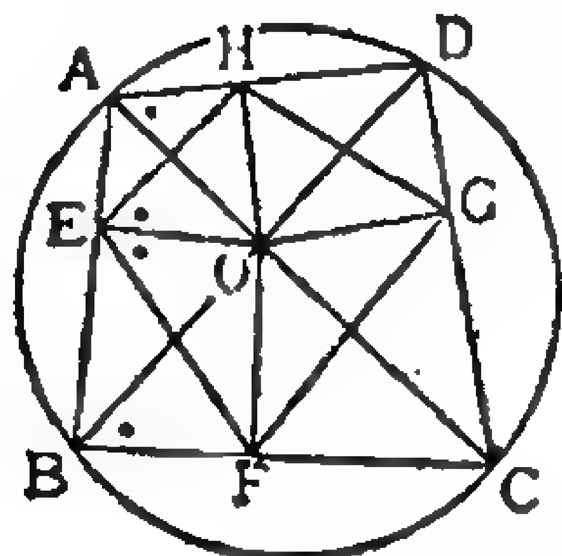
$$\angle HAO=\angle HEO.$$

同理, $\angle FBO=\angle FEO.$

但是 $\angle HAO=\angle FBO,$

$$\therefore\ \angle HEO=\angle FEO.$$

即 EO 平分 $\angle HEF$.



同理, FO、GO、HO 分别平分 $\angle F$、$\angle G$、$\angle H$, 所以由 O 到四边形 $EFGH$ 的各边的距离相等.故 $EFGH$ 能以 O 为圆心画一内切圆.

584. 证明 由圆内接四边形的各边的中点向对边所作的垂线相交于一点.

解 设圆内接四边形为 $ABCD$, E、F、G、H 分别是各边的中点, 由 E、G 分别作对边 AD、BC 的垂线, 相交于点 P, 则 EP、OG 同为 AD 的垂线, 所以 $EP\parallel OG$ 并且 $PG\parallel OE$ (都垂直于 BC), 故 $GPEO$ 是平行四边形, OP 过 GE 的中点 K 并且 $PK=KO$. 但是 E、G、F、H 是原四边形各边的中点, 所以 $EFGH$ 是平行四边形. 因此 HF 过 GE 的中点 K, 并且被这点所平分,所以 $PHOF$ 是平行四边形.

$$\therefore\ HP\parallel OF,\ OF\perp CD,$$

因而 $HP\perp CD.$

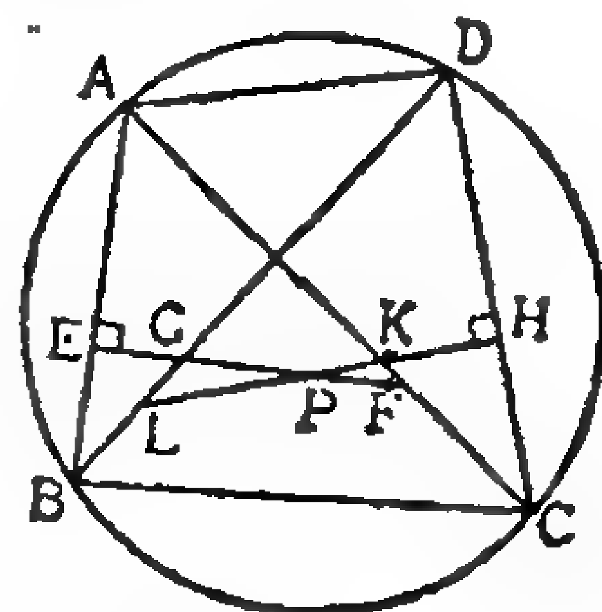
同理 $FP\perp AB.$

因此由圆内接四边形的各边的中点 E、F、G、H 向对边所作的垂线相交于一点 P.

585. 由圆内一点 P 向圆的内接四边形 $ABCD$ 的对边 AB、CD 作垂线 PE、PH, 若它们和 AC、BD 的交点分别为 F、G, K、L, 则 L、G、K、F 四点共圆.

解 因 $\angle AEF=90°$, 所以

$$\angle KFG=90°-\angle BAC.$$



又因 $\angle DHL=90°$, 所以

$$\angle GLK=90°-\angle BDC.$$

但是

$$\angle BAC=\angle BDC,$$

$$\therefore\ \angle KFG=\angle GLK.$$

故 L、G、K、F 四点共圆.

586. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线的交点为 E, 过点 E 作直线 GEH 垂直于过 E 点的直径, 若此直线和 AB、CD 的交点分别为 G、H, 则

$$EG=EH.$$

解 设由 C 所作 HG 的平行线和直径及圆周的交点分别为 F、K, 则 CF 垂直于 EF(直径上的线段). 因为 $EH\parallel CF$, 所以

$$\angle HEC=\angle ECK=\angle EKC=\angle GEK.$$

但是 $\angle ECK+\angle ABK=2\angle R$ ($\because$ A、B、K、C 四点是共圆的).

$$\therefore\ \angle GEK+\angle GBK=2\angle R,$$

故 E、K、B、G 四点共圆,从而

$$\angle EKG=\angle EBG=\angle ECH.$$

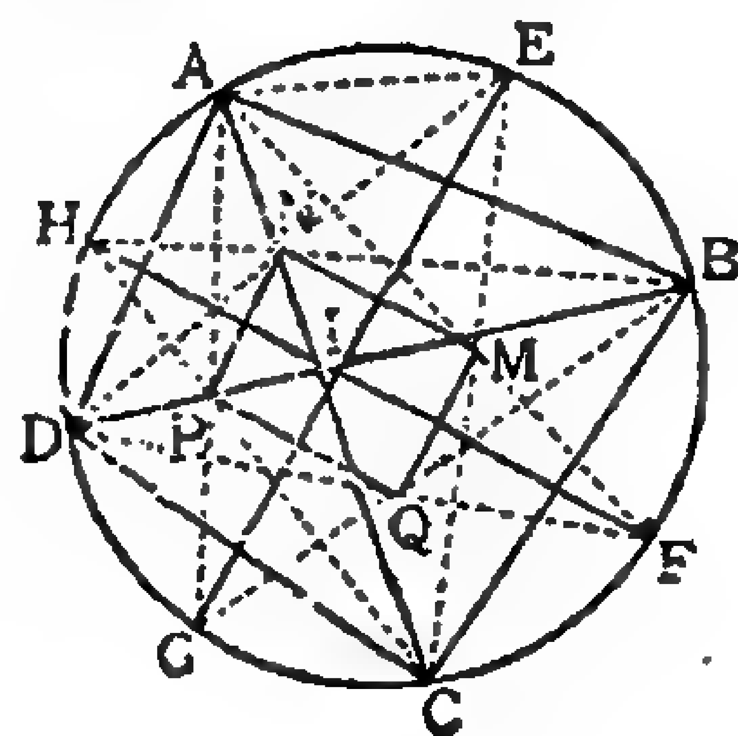
又因 $EF\perp KC,$

$$\therefore\ EK=EC,\ \angle GEK=\angle HEC.$$

因此 $\triangle GEK\cong\triangle HEC$, $\therefore\ EG=EH.$

587. 若 $ABCD$ 是圆内接四边形, 则 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 的内切圆的圆心 M、N、P、Q 是矩形的顶点.

解 令 E、F、G、H 为顺序弧 AB、BC、CD、DA 的中点, 设 EG、FH 的交点为 I, 则 $\angle EIH$ 等于 $\overset{\frown}{EAH}+\overset{\frown}{FCG}$ 上的圆周角,即 $\angle R$.



又因点 M、N 在以 E 为圆心、EA 为半径的圆周上(问题 **459**)。所以等腰三角形 EMN 的底边 MN 是垂直于 $\angle DEC$ 的平分线 EG。但是 $EG\perp HF$， $\therefore\ MN\parallel HF$。

同理，$PN\parallel GE$， $\therefore\ \angle PNM=\angle R$。

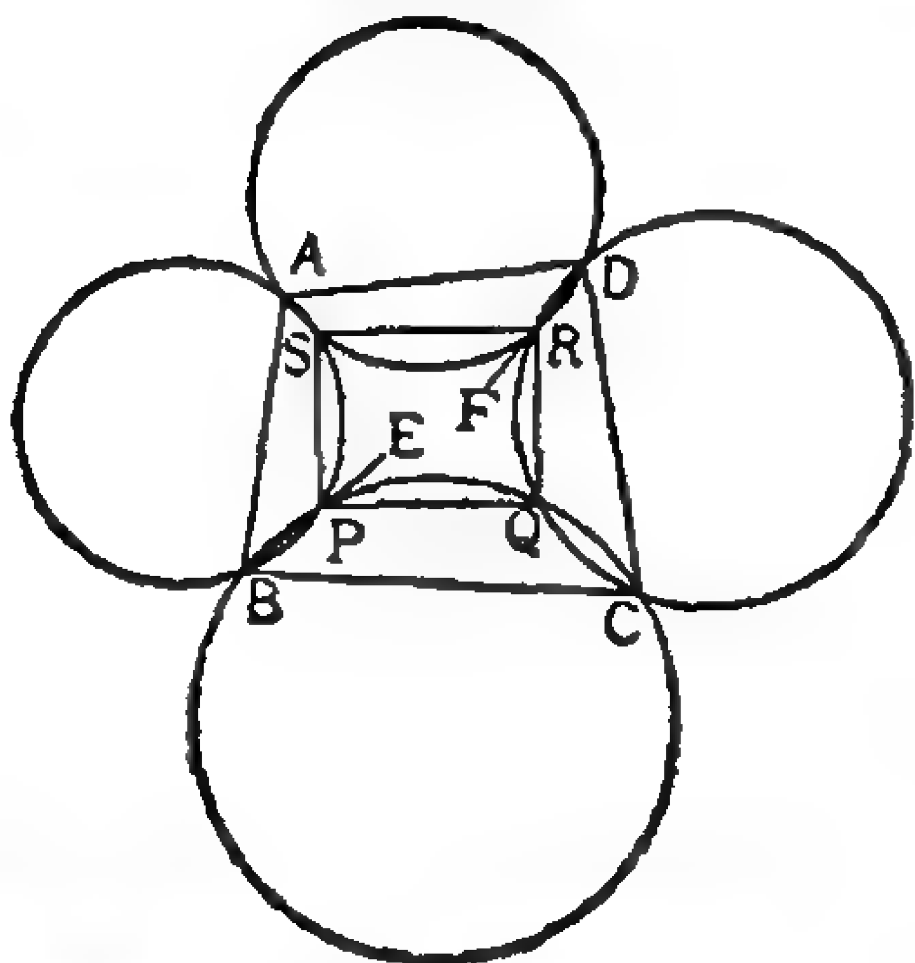
同理， $\angle NPQ=\angle PQM=\angle R$，

所以 $MNPQ$ 是矩形。

588. 若以圆内接四边形 $ABCD$ 的各边为弦作任意圆，则这些圆相交的四点共圆。

解 设以 AB、BC、CD、DA 为弦所作成的圆的交点顺次为 P、Q、R、S，BP、DR 分别延长到 E、F，则

$$\angle EPQ=\angle QCB,\ \angle EPS=\angle SAB,$$
$$\angle FRQ=\angle QCD,\ \angle FRS=\angle SAD.$$



这四个等式两边分别相加，得

$$\angle SPQ+\angle SRQ=\angle BCD+\angle BAD.$$

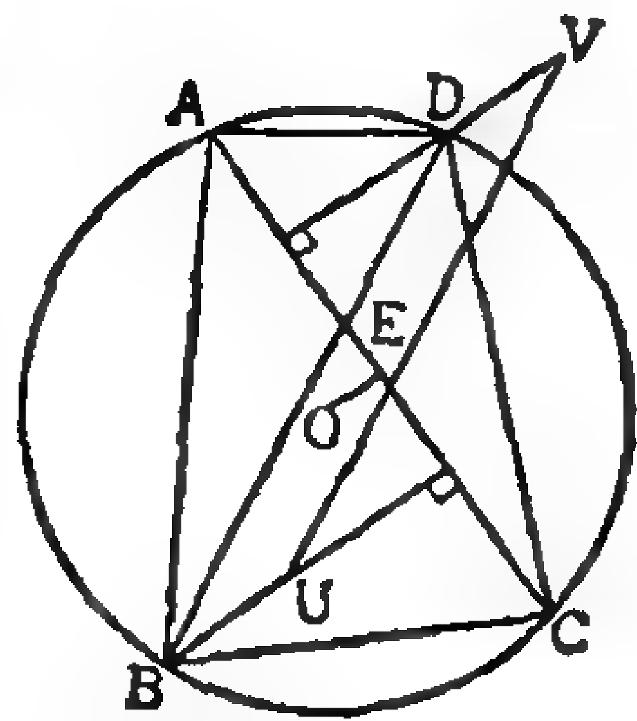
但是 $\angle BCD+\angle BAD=2\angle R$，

$$\therefore\ \angle SPQ+\angle SRQ=2\angle R.$$

因此 $PQRS$ 是圆内接四边形。

589. 连结圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，设 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ACD$ 的垂心分别为 U、V，则线段 $UV\mathrel{\underline{\parallel}}BD$。

解 因 BU、DV 同垂直于 AC，所以互相平行。从外接圆的圆心 O 所作 AC 的垂线的垂足为 E，由问题 **500**，BU、DV 都等于 OE 的两倍，所以它们相等。因此 $BDVU$ 是平行四边形，所以 $UV\mathrel{\underline{\parallel}}BD$。



590. 在内接圆 O 的四边形 $ABCD$ 中，若四个三角形 ABC、BCD、DCA、DAB 的垂心分别为 P、Q、R、S，则四边形 $PQRS$ 和原四边形全等。

解 若 $OE\perp BC$，则 $AP=2OE$ (由问题 **500**)，且 $AP\parallel OE$。

又因 $DQ=2OE$，

且 $DQ\parallel OE$，

$\therefore\ AP\mathrel{\underline{\parallel}}DQ$。

故四边形 $APQD$ 是平行四边形。

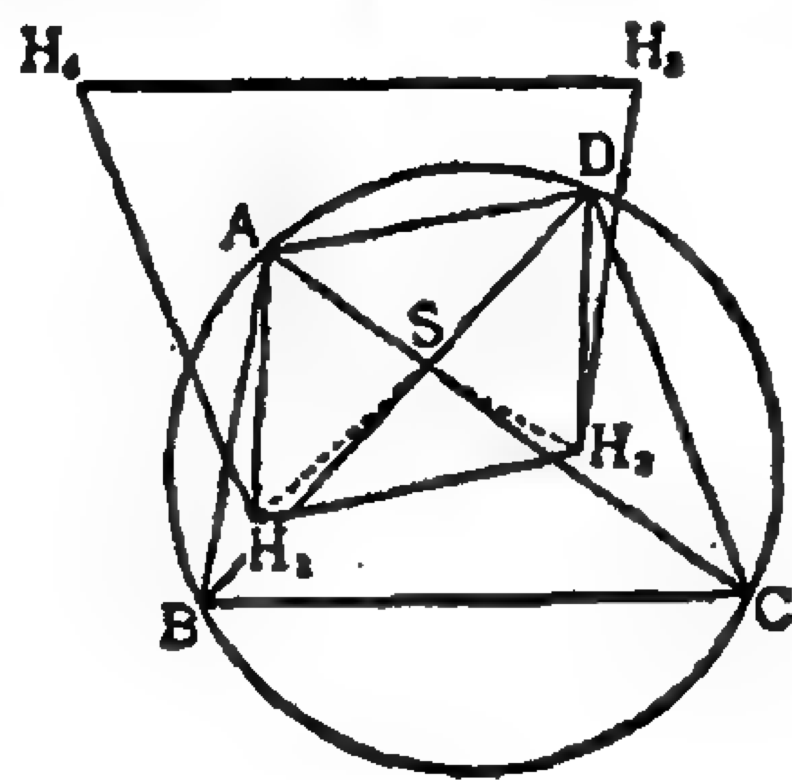
因而 $PQ\mathrel{\underline{\parallel}}AD$。

同理，$QR\mathrel{\underline{\parallel}}AB$，

所以 $\angle PQR=\angle DAB$。

同理， $DC\mathrel{\underline{\parallel}}PS$，$BC\mathrel{\underline{\parallel}}RS$。

因此四边形 $ABCD$ 和四边形 $PQRS$ 全等。



591. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，三角形 ABC、BCD、CDA、DAB 的垂心分别为 H_1、H_2、H_3、H_4，则 AH_2、BH_3、CH_4、DH_1 相交于一点。

解 因四边形 AH_1H_2D 是平行四边形(由上题)，所以 AH_2、DH_1 相互交于中点 S。

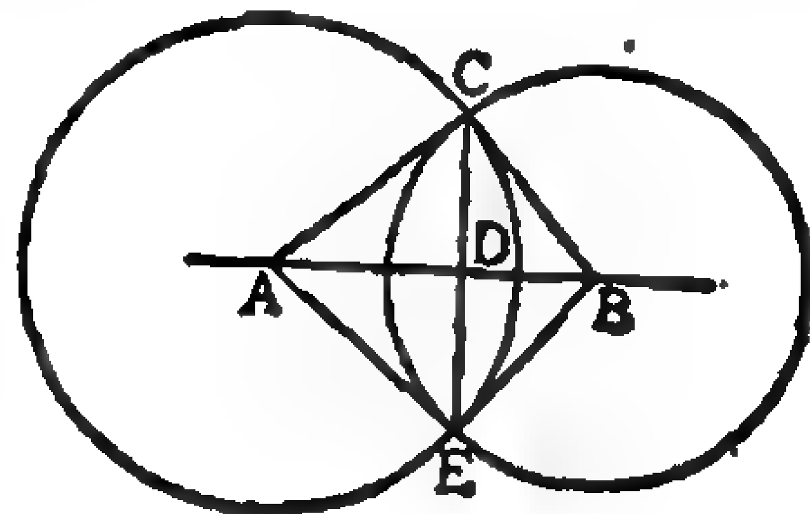
同理， $AB\mathrel{\underline{\parallel}}H_2H_3$，$CD\mathrel{\underline{\parallel}}H_1H_4$。

所以 BH_3、CH_4 交于 AH_2 的中点 S，故 AH_2、BH_3、CH_4、DH_1 交于一点 S。

9. 相交圆、相切圆

592. 若两圆有一交点不在连心线上，则此两圆还有一个交点。

解 设 A、B 是两圆的圆心，在连心线 AB 外两圆有一个交点 C。由 C 作 AB 的垂线 CD，在其延长线上取一点 E，使 $DE=CD$，A、B 分别和 C、E 连结，因 AB 是 CE 的垂直平分线，所以

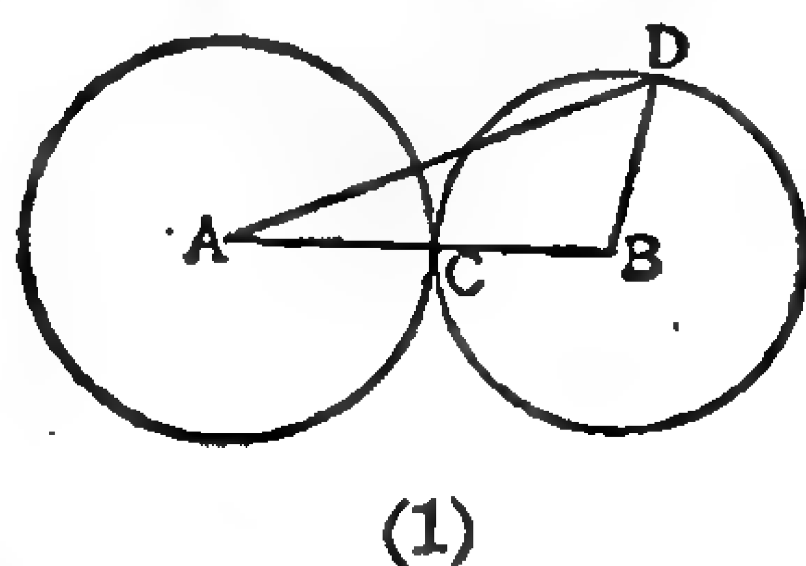


$$AE=AC,\ BC=BE.$$

因此 E 在以 A 为圆心的圆上，又在以 B 为圆心的圆上。所以两圆又在点 E 相交，而且两圆除 C、E 外没有其他的交点了。

593. 若两圆有一交点在连心线上，则此两圆没有其他交点．即此两圆为内切或外切．

解 设圆 A 和圆 B 在连心线 AB 上有一交点 C，在圆 B 上除 C 外任取一点 D，连结 AD、DB．



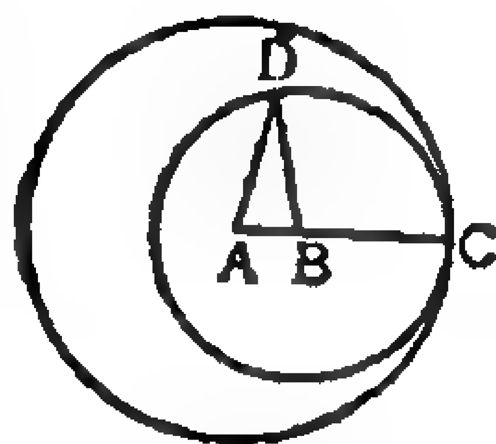
(1)

在图(1)的情况下，

$$AD+BD>AC+CB,$$

而　$BD=BC$，　$\therefore$　$AD>AC$．

因而 D 在圆 A 的外部，所以圆 A 和圆 B 除点 C 外，再没有别的公共点了，即此时两圆外切．



(2)

在图(2)的情况下，

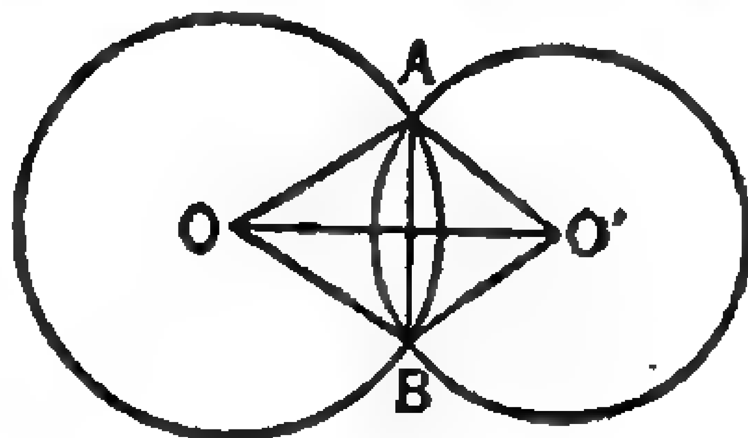
$$AD<AB+BD,$$

而　$AB+BD=AC$，　$\therefore$　$AD<AC$．

因此 D 在圆 A 的内部，所以圆 A、B 除点 C 外再没有别的公共点了，即此时两圆内切．

594. 两圆 O、O' 相交于 A、B 两点，则 OO' 垂直平分公共弦 AB．

解 将圆心 O、O' 分别和 A、B 连结，



则　$\triangle AOO'\cong\triangle BOO'$（三边相等）．

$$\therefore\ \angle AOO'=\angle BOO',$$

即 OO' 是等腰 $\triangle OAB$ 的顶角平分线，因而 OO' 垂直平分 AB．

595. 平面上不同的两圆可把平面分成三个或四个部分．若圆由一个增加到三个时，平面可分成多少部分？

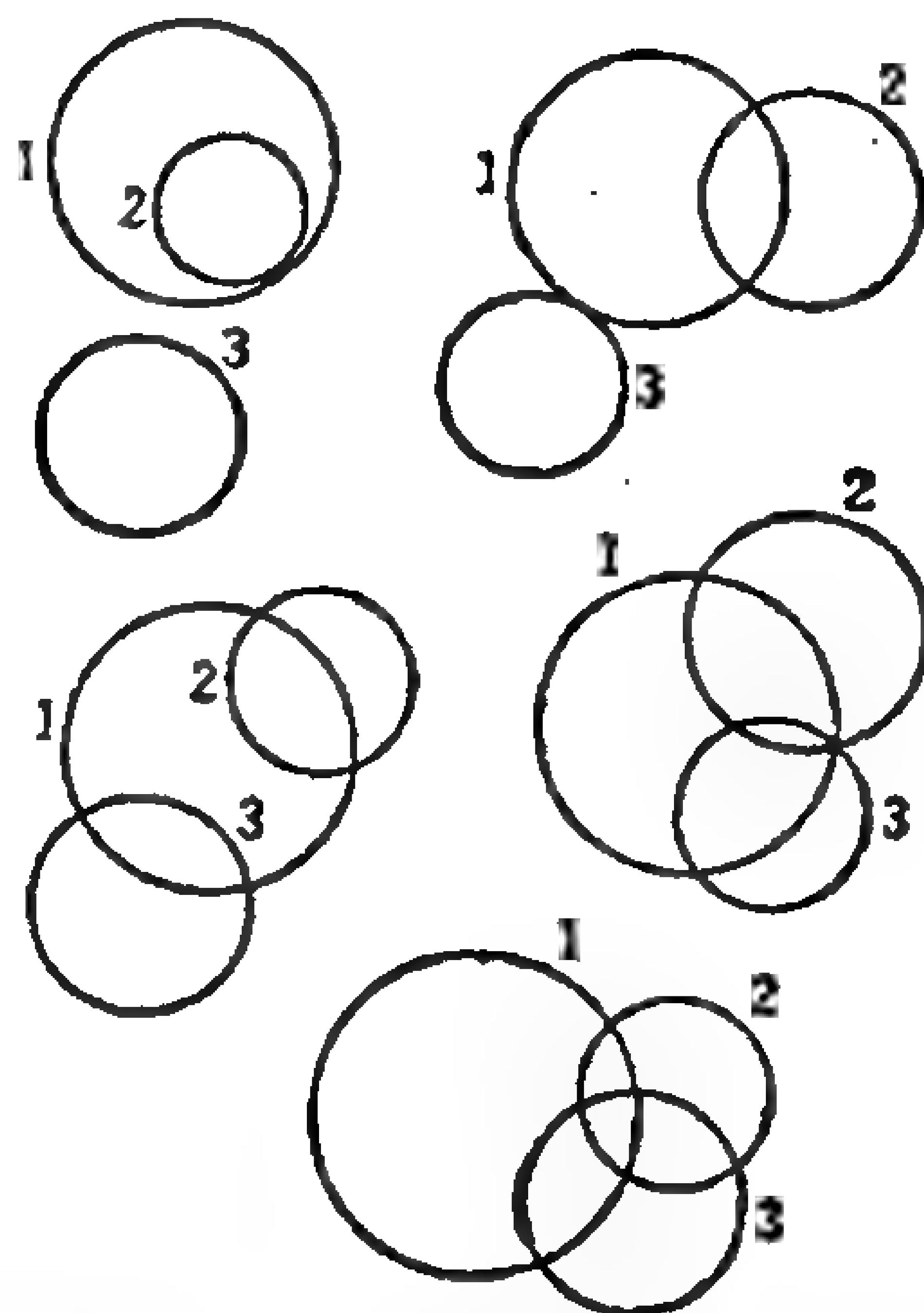
平面上不同的三个圆，最少可把平面分成四个部分，不可能分成九个以上的部分，试说明理由；

若把平面分成四个或八个部分试分别用图表示这两种情况；

若把平面分成五个、六个、七个部分，试分别用图表示每种情况．

解 一个圆把平面分成两个部分．作第二个圆时，若与第一个圆不相交，则把平面分成三个部分；若相交，则把平面分成四个部分．

第三个圆和前两个圆可以完全不相交或相



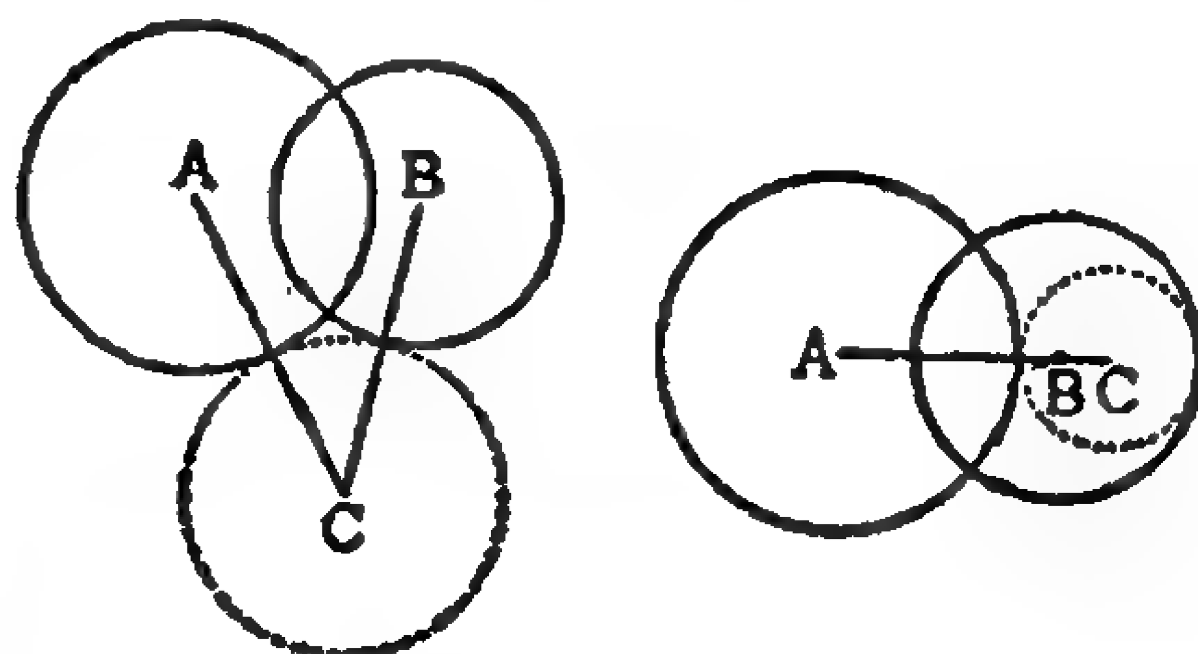
交于一个点、二个点、三个点、四个点，但不能多于四个交点．而且由于最初的两圆把平面分成三个或四个部分，设第三个圆和此两圆的交点个数为 n，$0\leqq n\leqq 4$．

当 $n=0$ 时，三个圆把平面分成四个或五个部分；

当 $n=4$ 时，把平面分成八个部分，所以没有把平面分成多于八个部分的．

596. 若任意圆都和相交两定圆相切，则由定圆的圆心到任意圆的圆心的距离之和或差是一定的．

解 设相交两定圆的圆心为 A、B，此两圆都和圆心为 C 的任意圆相切，又设圆 A、B 的半径分别为 R、R'，圆 C 的半径为 r，$(R>R')$．



(i) 当圆 C 和圆 A、B 外切时，则

$$AC\sim BC=(R+r)\sim(R'+r)=R\sim R'.$$

(ii) 当圆 C 和圆 A、B 之一（如圆 A）外切和另一圆（如圆 B）内切时，

则 $AC+BC=(R+r)+(R'-r)=R+R'$．

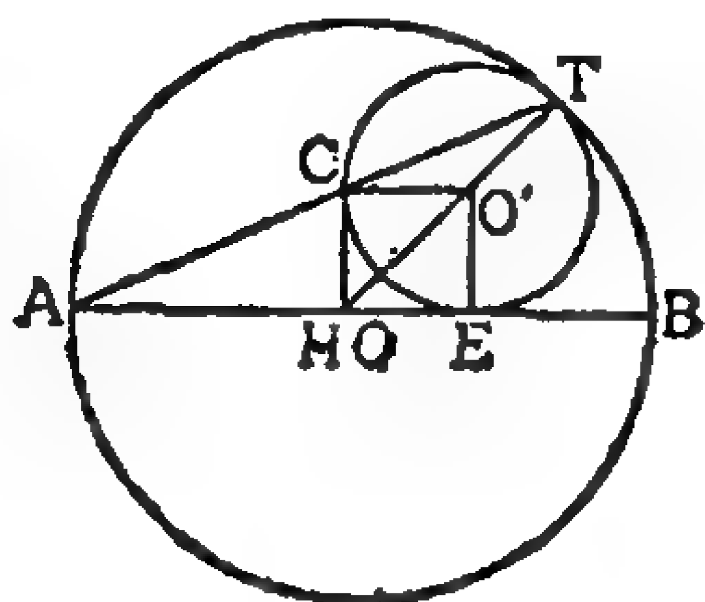
(iii) 当圆 C 和圆 A、B 都内切时，则

$$AC\sim BC=(R-r)\sim(R'-r)=R\sim R'.$$

因此，不论在那种情况下，AC 与 BC 之和或

差是一定的。

597. 圆O'内切于圆O，又切于它的直径AB，若这两圆的内切点和点A的连线，与内切圆的另一个交点为C，则过C点的切线垂直于直径AB。



解 在图中，T是两圆O、O'的切点，所以O、O'、T在一直线上。

又 $O'T=O'C$,

$OT=OA$.

所以 $\angle A=\angle T=\angle TCO'$,

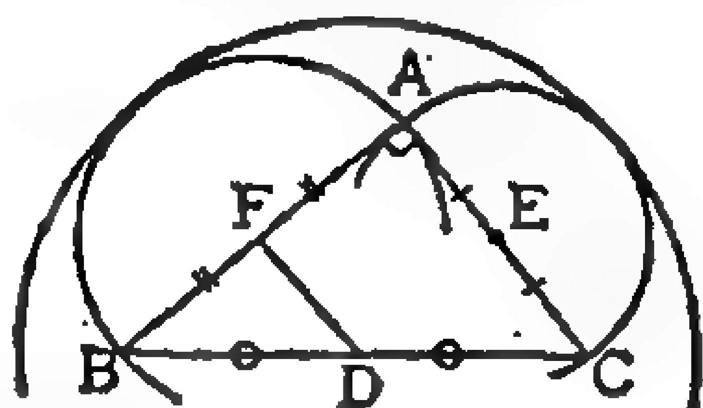
$\therefore\ O'C\parallel OA$. ①

又设CH是圆O'的切线，

$\therefore\ CH\perp CO'$. ②

由①、②， $CH\perp AB$.

598. 试证以直角三角形ABC的斜边BC的中点D为圆心，以$AB+AC$为直径的圆和以AB、AC为直径的两圆相切。



解 设E、F分别是边AC、AB的中点，则F、E分别是以AB、AC为直径的圆的圆心。但是，

圆D的半径$=\dfrac{1}{2}(AB+AC)$, ①

圆F的半径$=\dfrac{1}{2}AB$, ②

圆E的半径$=\dfrac{1}{2}AC$. ③

由①、②、③，得

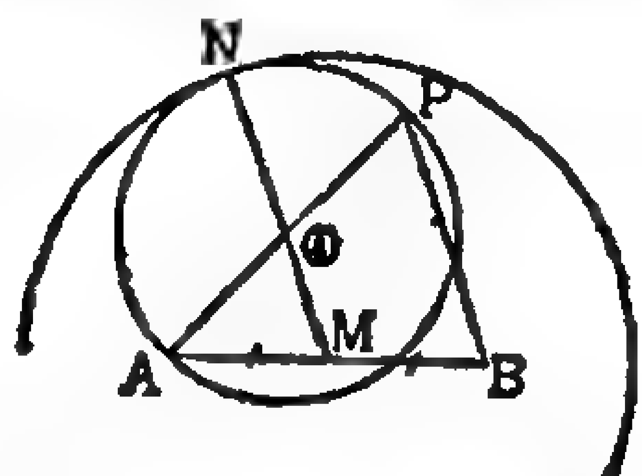
圆D的半径－圆F的半径

$=\dfrac{1}{2}AC=DF$.

即两圆D、F的圆心距等于两圆的半径之差。所以圆D与圆F相切。

同理，圆D与圆E也相切。

599. 确定一点P，使点P和两定点A、B所连结的线段PA、PB之和等于已知的定长。若以PA为直径作圆，则该圆恒切于定圆。



解 如图，设以PA为直径的圆的圆心为O，连结AB的中点M和O的直线与圆周的交点为N，则

$$ON=PO=\frac{1}{2}PA,\quad MO=\frac{1}{2}PB,$$

$$\therefore\ MN=ON+MO$$

$$=\frac{1}{2}(PA+PB)=\text{一定}.$$

因此圆O与以M为圆心，$\dfrac{1}{2}(PA+PB)$为半径的定圆相切。

600. 过两圆的交点X、Y作两直线AXB、CYD，若它们和圆分别相交于A、B、C、D，则弦AC、BD平行。

解 (i) 若AB、CD在圆内不相交，则

$\angle XYD+\angle XBD=2\angle R$, ①

又因

$\angle XYD=\angle XAC$. ②

由①、②，得

$\angle XAC+\angle XBD=2\angle R$,

所以$AC\parallel BD$.

(ii) 若AB、CD在圆内相交，设AX、CY的交点为P，

则 $\angle ACD=\angle AXY$,

又因

$\angle AXY=\angle YDB$,

$\therefore\ \angle ACD$

$=\angle YDB$,

故 $AC\parallel BD$.

601. 若过相切两圆的切点作任意两弦PAQ、RAS，则$PR\parallel QS$。

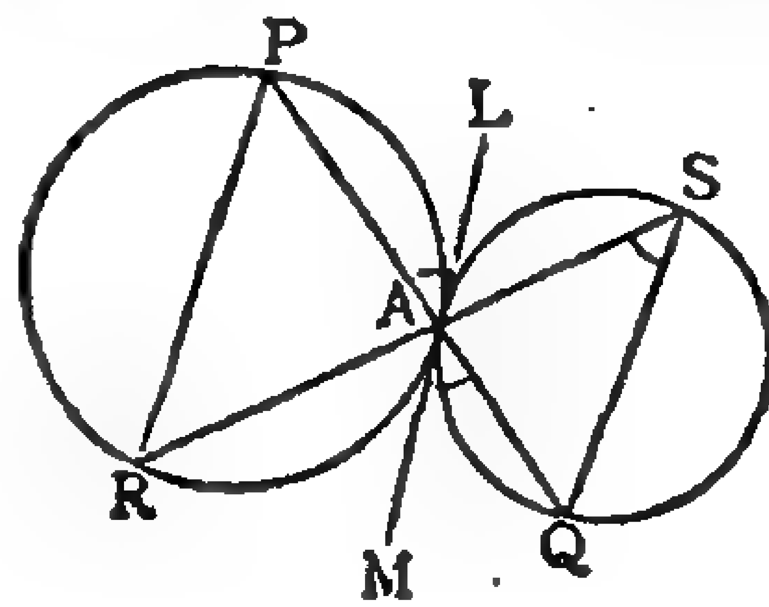
解 在点A作两圆的公切线LM。

在图(1)中，

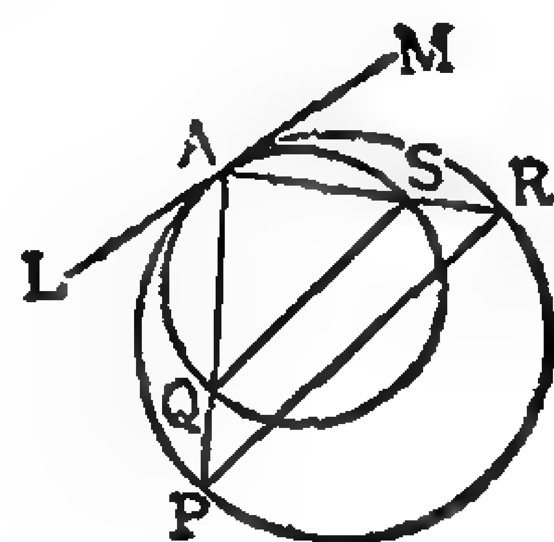
$\angle PAL=\angle PRA$,

$\angle MAQ=\angle ASQ$.

但是 $\angle PAL=\angle MAQ$,



(1)



(2)

$\therefore \quad \angle PRA=\angle ASQ,$

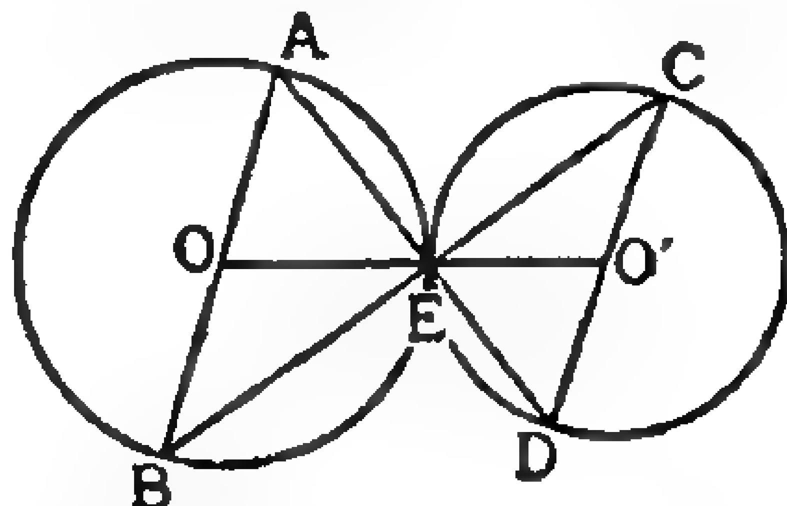
$\therefore \quad PR \parallel SQ.$

在图(2)中，

$\angle P=\angle MAR=\angle Q,$

$\therefore \quad PR \parallel QS.$

602. 设两圆在点 E 外切，若它们的直径 AB、CD 互相平行，则直线 AD、BC 相交于点 E.



解 因连心线 OO' 必过切点 E，若连结 EB，EC，则在等腰三角形 OBE、$O'CE$ 中，

$AB \parallel DC,$

$\therefore \quad \angle EOB=\angle EO'C,$

$\therefore \quad \angle OEB=\angle O'EC.$

因此 B、E、C 在一直线上，即 BC 过点 E.

同理 AD 也过点 E. 故直线 AD、BC 相交于点 E.

603. 直线 XX'、YY' 和半径相等的两圆 O、O' 相切，若 YY' 和 XX' 的交点为 P，OO' 和 XX'(或 YY')的交点为 M，则

$2PM=OO'.$

解 设 XX' 和圆 O、O' 的切点分别为 L、N，则

$\triangle OLM \cong \triangle O'NM,$

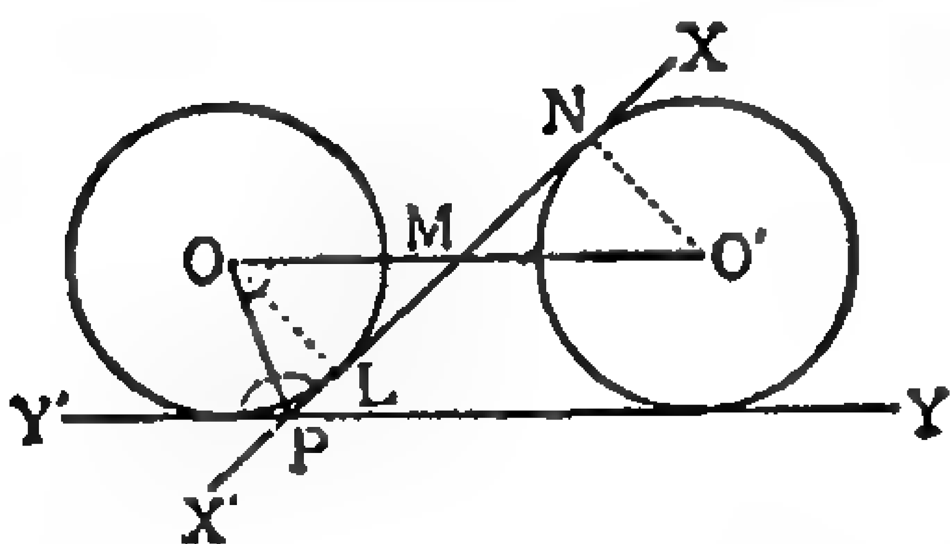
$\therefore \quad OM=O'M.$

又因圆 O、O' 是等圆，所以 $OO' \parallel YY'$,

$\therefore \quad \angle OPY'=\angle MOP.$

又因 $\quad \angle OPY'=\angle OPM,$

$\therefore \quad \angle MOP=\angle OPM,$



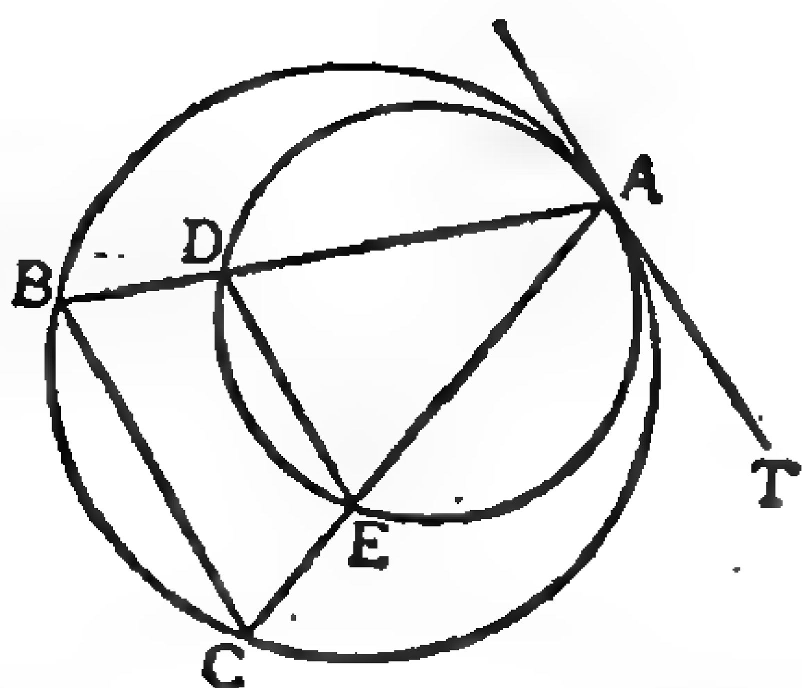
从而 $\quad OM=PM,$

故 $\quad OO'=2PM.$

604. 如图，作 DE 平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC，则 $\triangle ABC$、$\triangle ADE$ 的外接圆相切.

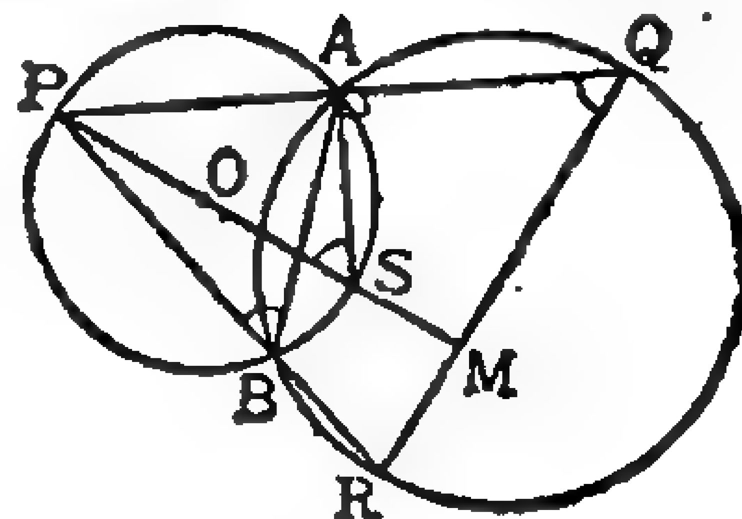
解 过点 A 作圆 ABC 的切线 AT. 因 $DE \parallel BC$，所以，

$\angle TAC=\angle ABC=\angle ADE,$



从而 AT 在点 A 和圆 ADE 相切. 即两圆和同一直线 AT 在点 A 相切，故两圆相切.

605. 在相交两圆之一的圆上取任意一点 P，若点 P 和两圆的交点 A、B 所连结的直线分别交另一圆于 Q、R 两点，则圆 ABP 中过点 P 的直径垂直于 QR.



解 设 PS 为直径，则

$\angle ASP=\angle ABP$

$=\angle AQR.$

①

设直径 PS 和 QR 的交点为 M，由①，知 A、S、M、Q 四点共圆，

$\therefore \quad \angle PMQ=\angle PAS.$

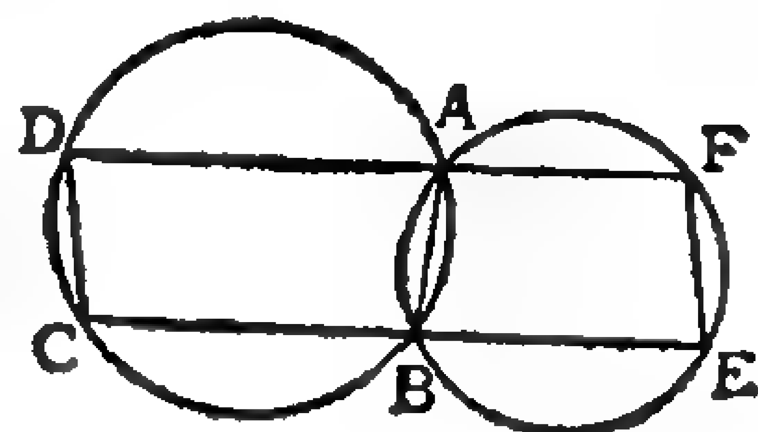
但 PS 是直径，所以 $\angle PAS=\angle R$,

从而 $\quad \angle PMQ=\angle R,$

故 $\quad PS \perp QR.$

606. 若过两圆的交点 A、B 作平行线 DAF、CBE 和两圆的交点分别为 D、F，C、E，则

$DF=CE.$

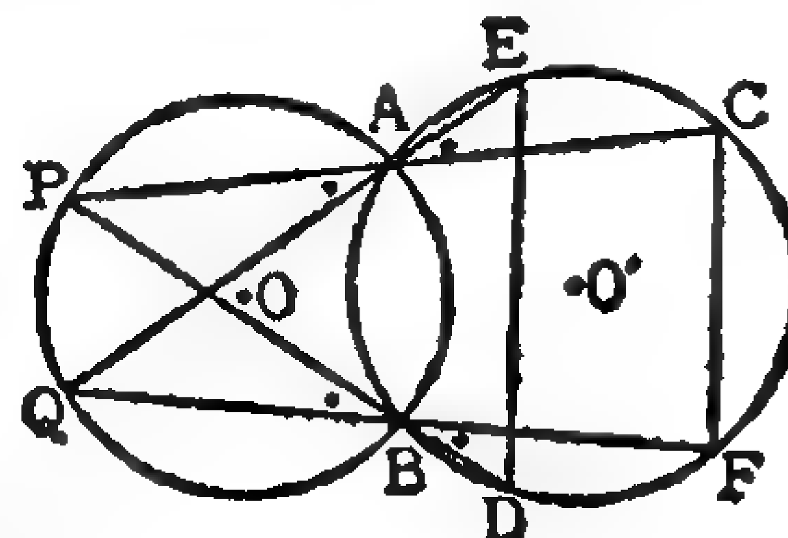


解 由假设 $DF \parallel CE$，又由问题 **600**，$DC \parallel FE$，所以 $DCEF$ 是平行四边形，因此

$DF=CE.$

607. 在相交两圆 O、O' 中的一个圆 O 上，取两点 P、Q，作四条割线 PAC、PBD、QAE、QBF，若它们与圆 O' 的交点分别为 C、D、E、F，则

$DE \parallel CF.$



解 在右图中，因

$\angle CAE=\angle PAQ=\angle PBQ=\angle DBF,$

所以 $\quad \overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DF},$

因而 $\quad DE \parallel CF.$

608. 设两定圆的交点为 A、B，过点 A 的任意直线和圆 O、O' 的另一交点分别为

P、Q，则线段 PQ 的中点 M 在定圆上.

解　过 B 作 EF 垂直于 AB，设它与两圆的另一交点为 E、F，则

$$PE \parallel QF\text{（由问题 600）}.$$

若设 EF 的中点为 N，则

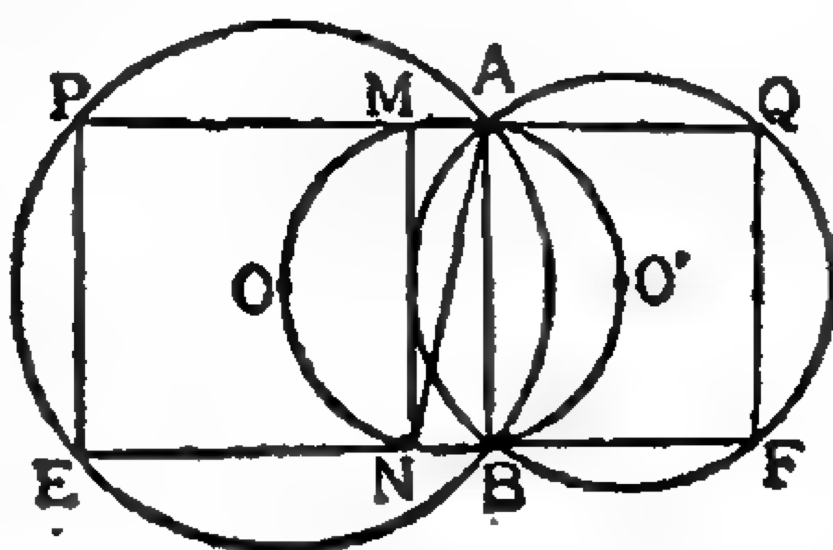
$$MN \parallel PE \parallel QF. \quad ①$$

但 $PEBA$ 是圆的内接四边形，所以，

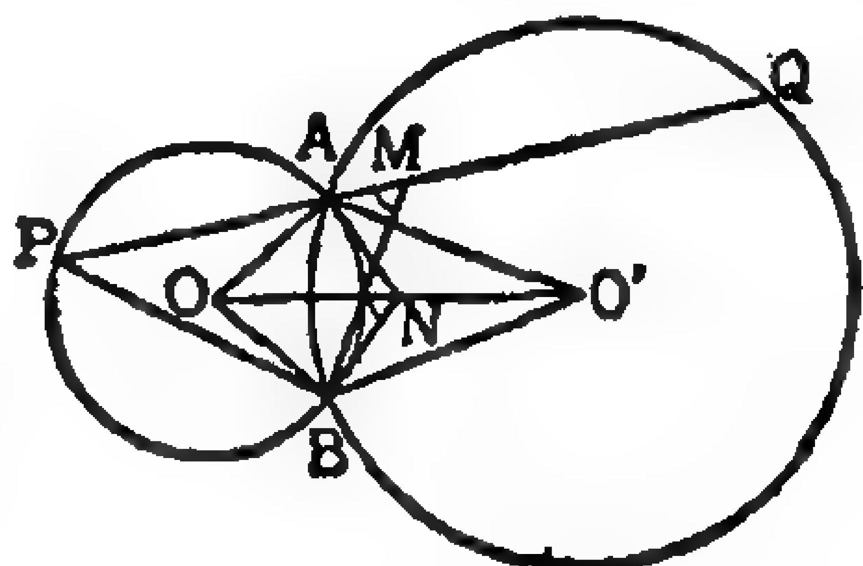
$$\angle P=\angle ABF=\angle R. \quad ②$$

由①、②，有　$\angle AMN=\angle P=\angle R$，

因 EF 在点 B 垂直于 AB，所以是定弦，N 是它的中点，是定点，因此由 $\angle M=\angle R$，可知 M 在以 AN 为直径的定圆上.



609.　两定圆 O、O' 相交于 A、B 两点，在圆 O 上取异于点 A 的一点 P，若连结 PA 的直线和圆 O' 的交点为 Q，线段 PQ 的中点为 M，线段 OO' 的中点为 N，



(1) 证明 $\triangle PBM$ 和 $\triangle OBN$ 相似；

(2) 当点 P 在圆 O 的圆周上移动时，则点 M 在怎样的图形上移动？

解　(1) 因

$$\angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOA=\angle BOO',$$

$$\angle BQP=\frac{1}{2}\angle BO'A=\angle BO'O,$$

$$\therefore\quad \triangle PBQ\backsim\triangle OBO'.$$

因此　$PM:ON=PQ:OO'=PB:OB$，

从而　　$\triangle PBM\backsim\triangle OBN$.

(2) 可以和上题同样考虑，也可以作如下考虑：

由(1)，$\angle PMB=\angle ONB=\dfrac{1}{2}\angle ANB$，

又因 $NA=NB$，所以 N 是圆 MAB 的圆心. 因此点 M 在以 N 为圆心，NA 为半径的圆上移动.

610.　圆 O 过圆 O' 的圆心并与它交于 A、B，由圆 O 上一点 P 作两直线 PA、PB，若它们与圆 O' 的交点分别为 C、D，则 $AD\parallel BC$.

解　在 $\triangle PO'B$ 和 $\triangle PO'C$ 中，PO' 公共.

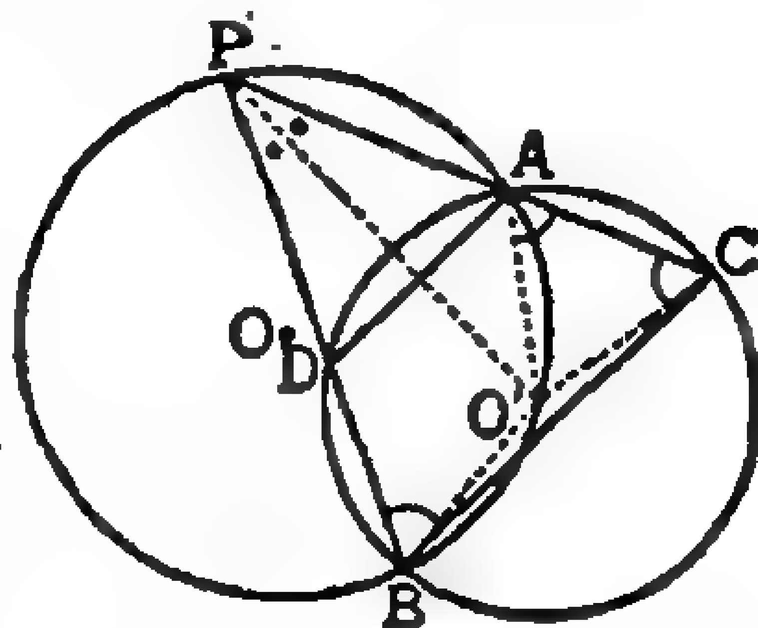
$\angle BPO'=\angle CPO'$（$\because\ \overset{\frown}{AO'}=\overset{\frown}{BO'}$），

$\angle O'BP=\angle O'AC$

$=\angle O'CA$，

$\therefore\quad \triangle PO'B\cong\triangle PO'C$，

$\therefore\quad \angle PCB=\angle PBC=\angle PAD$.



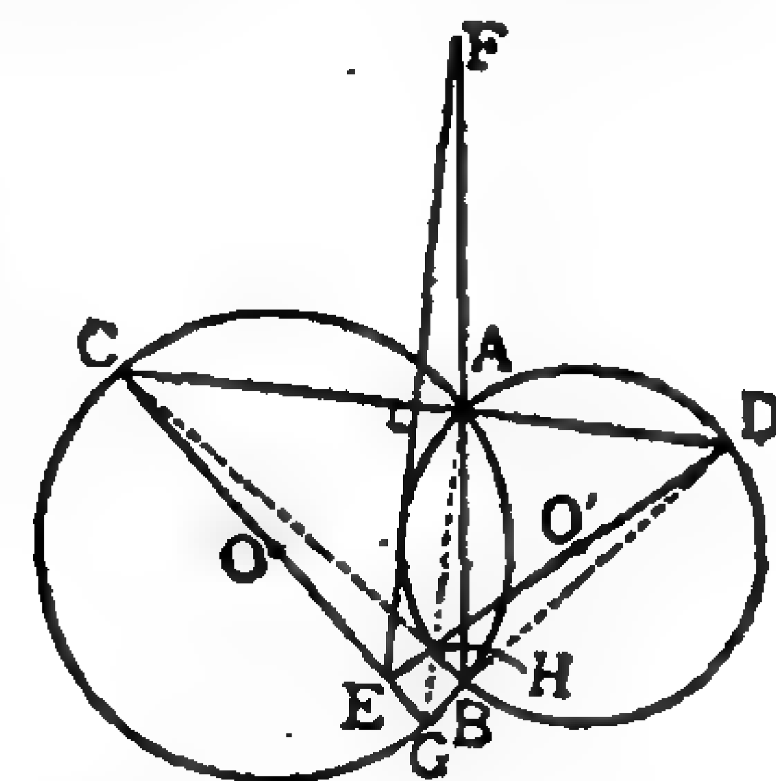
因此　　　$AD\parallel BC$.

611.　两圆 O、O' 相交于 A、B，过 A 作两圆间的任意割线 CAD. 若 CO、DO' 的交点为 E，由 E 作 CD 的垂线 EF 与 BA 的延长线相交于点 F，则 C、E、B、D、F 五点共圆.

解　作直径 CG，则 AG、FE 同垂直于 CD，因此

$AG\parallel FE$.

$\therefore\quad \angle BFE=\angle BAG=\angle BCG$，



因而过 F、B、E 的圆过点 C.

同理，作圆 O' 的直径 DH，由 $AH\parallel EF$，可知过 F、B、E 的圆过点 D，因此 C、E、B、D、F 五点共圆.

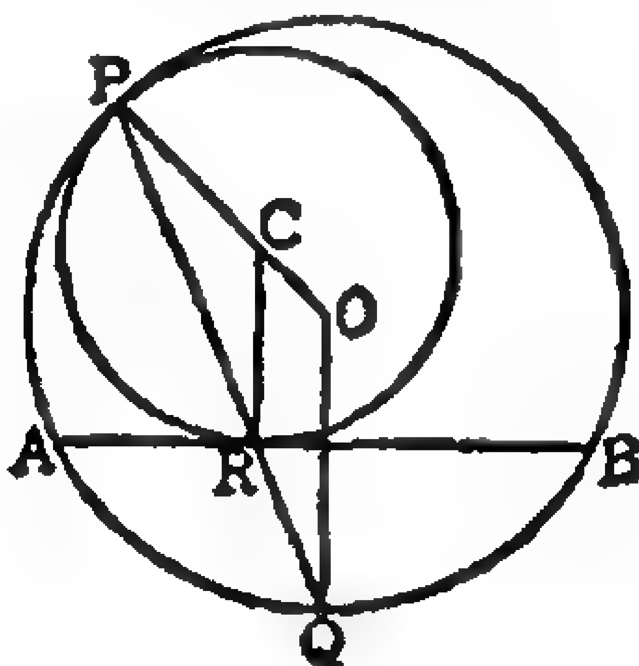
612.　在内切的两圆中，设 C 为小圆的圆心，O 为大圆的圆心，P 为切点，圆 O 的弦 PQ 和圆 C 相交于点 R，过点 R 作圆 C 的切线与圆 O 交于 A、B，则 Q 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点.

解　因 P 是两圆 O、C 的切点，所以点 P、C、O 在一直线上.

若连结 CR、OQ，则

$CP=CR$，

$OP=OQ$，



所以 $CR\parallel OQ$. 但是 R 是圆 C 和 AB 的切点，$CR\perp AB$，

$$\therefore\quad OQ\perp AB,$$

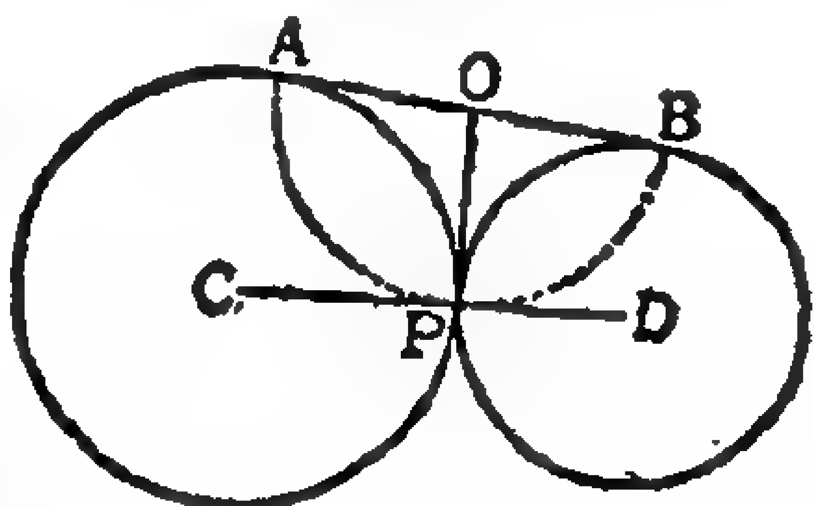
故 Q 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点.

613.　设两圆外切于点 P，若直线 AB 与

两圆的切点分别为 A、B，则以 AB 为直径的圆过点 P，且在该点和两圆的连心线相切。

解 若过点 P 作两圆的公切线交 AB 于点 O，则

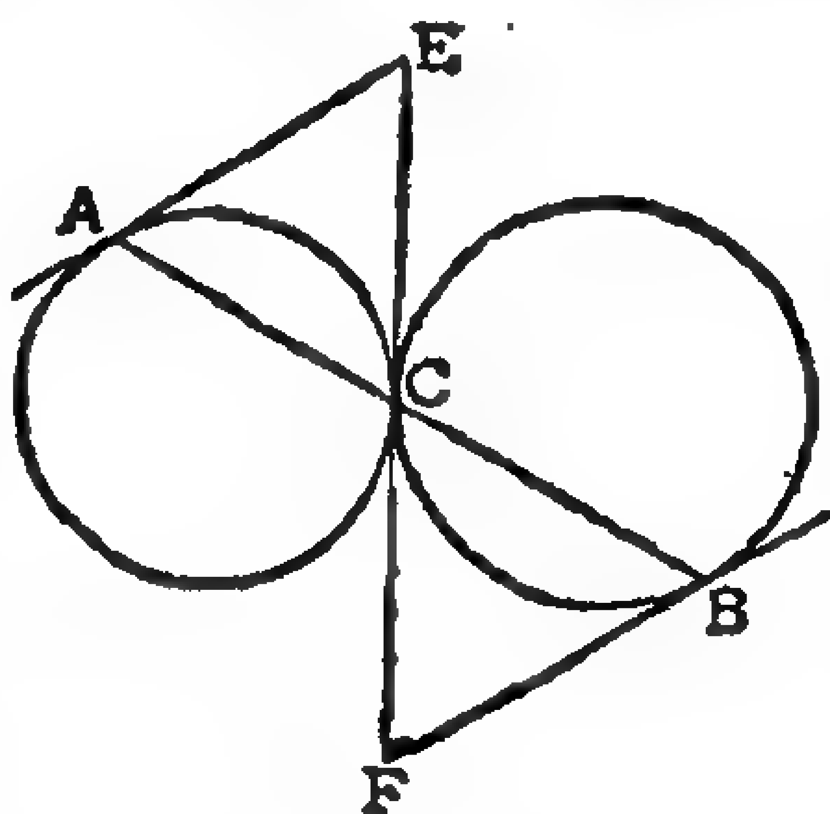
$OA=OP=OB$.



故若以 O 为圆心，OA 为半径作圆，则此圆过点 A、P、B，即以 AB 为直径的圆过点 P。

但 OP 是该圆的半径，且 $OP\perp CD$，所以此圆在点 P 切于 CD。

614. 设两圆外切，过切点的直线和两圆相交，若在交点处作圆的切线，则此两切线平行。



解 设两圆的切点为 C，过点 C 所作直线和两圆的交点分别为 A、B，若过点 A、B 的切线和过点 C 的公切线的交点分别为 E、F，则

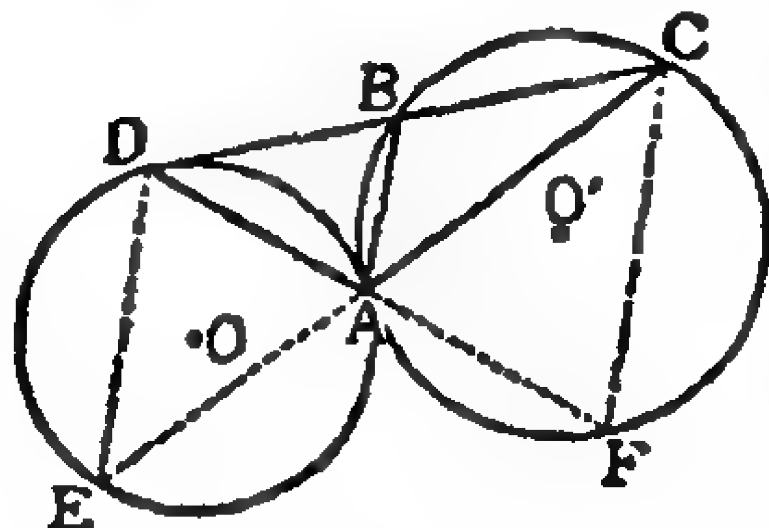
$$\angle EAC=\angle ECA,\ \angle FCB=\angle FBC.$$

但是 $\angle ECA=\angle FCB$（对顶角），

$$\therefore\ \angle EAC=\angle FBC,$$

故 $AE\parallel BF$.

615. 若两圆 O、O' 相切于点 A，圆 O' 的弦 BC 和圆 O 相切于点 D，则 AD 平分 $\angle BAC$ 的外角。



解 若延长 CA、DA 和圆 O、O' 分别交于 E、F，则

$DE\parallel CF$

（问题 **601**），

$$\therefore\ \angle ADE=\angle F=\angle ABD.$$

又因 $\angle E=\angle ADB$，即两个三角形 ADE、ABD 的两个角分别相等，所以剩下的角也相等。

即 $\angle DAE=\angle DAB$,

故 AD 平分 $\angle BAC$ 的外角。

616. 设过外切的两等圆的切点 C 作任意两弦 CD、CE 互相垂直，则 DE 平行且等于连心线 AB。

解 因 $AC=AD$, $BC=BE$,

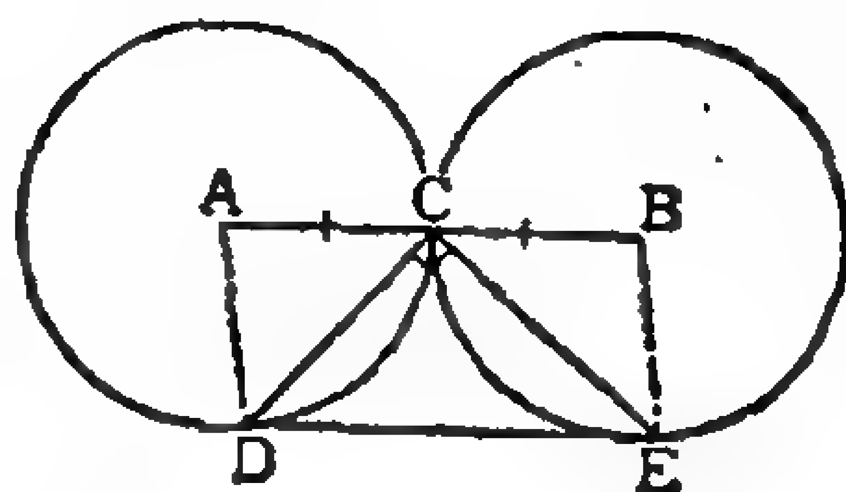
所以 $\angle ACD=\angle ADC$, $\angle BCE=\angle BEC$.

但是 $\angle DCE=\angle R$ 且 AB 过点 C,

所以，

$$\angle ACD+\angle BCE=\angle ADC+\angle BEC=\angle R.$$

$\therefore\ \angle A+\angle B=2\angle R$,



于是 $AD\parallel BE$,

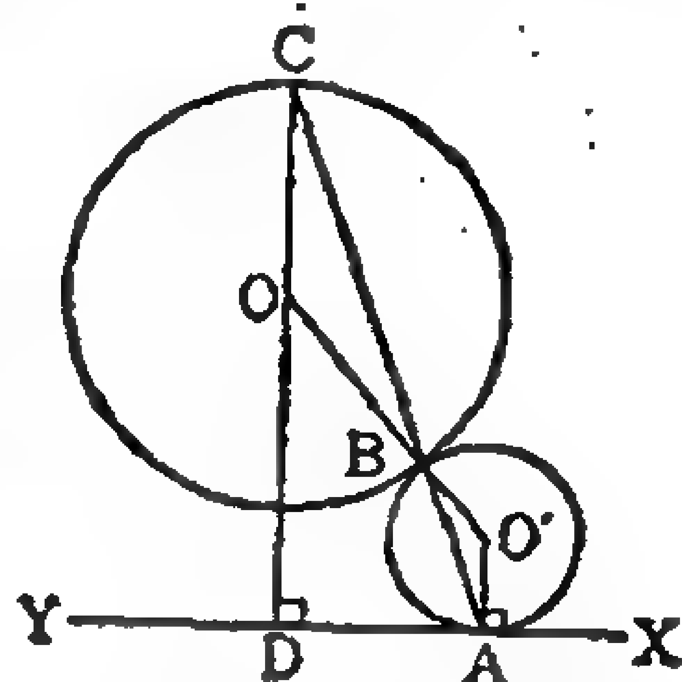
且 $AD=BE$,

从而 $ADEB$ 是平行四边形。

故 $DE \underline{\parallel} AB$.

617. 定直线与定圆不相交，若作外切于定圆又切于定直线的任意圆，则连结两切点的直线必过一定点。

解 设定圆为 O，定直线为 XY，且 XY、圆 O 和任意圆 O' 的切点分别为 A、B。由点 O 作 XY 的垂线和圆 O 的交点为 C，则 C 是定点。连结 AB、BC，因圆 O、O' 外切，所以 OO' 过切点 B。



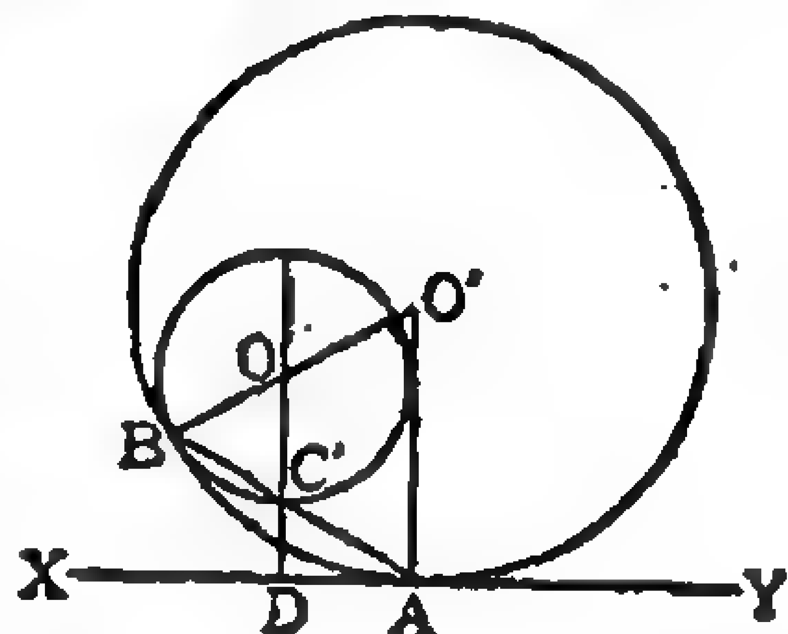
又因 $O'A\parallel OC$, $\therefore\ \angle AO'B=\angle BOC$.

但是 $\triangle AO'B$、$\triangle BOC$ 都是等腰三角形，它们的底角相等。因此

$$\angle ABO'=\angle OBC.$$

又因 OBO' 是一直线，所以 A、B、C 在一直线上。因而 AB 过从 O 向 XY 所作的垂线和圆 O 的交点，即过定点 C。

618. 在上题中，当圆 O、O' 内切时，连结两个切点的直线也过一定点。



解 设两圆 O、O' 内切于点 B，则 O'、O、B 在一直线上。

设 AB 和圆 O 的交点为 C'，连结 OC'，则 $OB=OC'$, $O'B=O'A$。所以 $\angle OC'B=\angle O'AB=\angle B$,

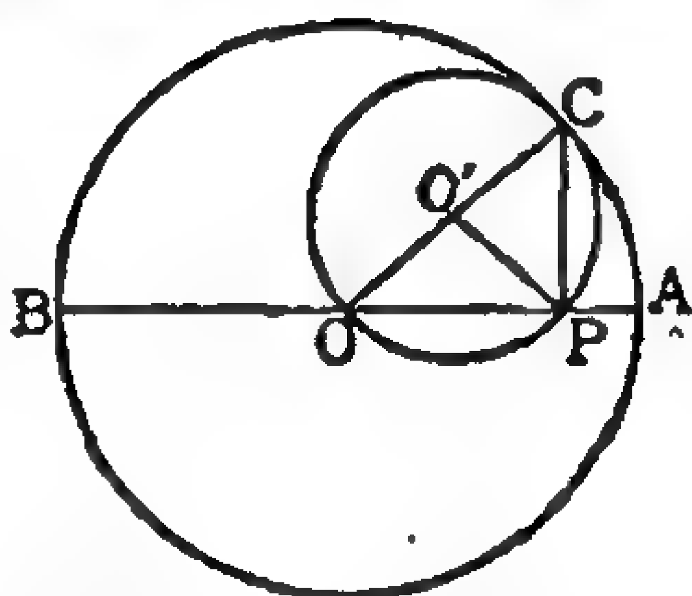
$$\therefore\ O'A\parallel OC',$$

又因 $O'A\perp XY$，于是 $OC'\perp XY$.

因此，和上题一样，C' 是定点，显然 AB 过定

点 C'。

619. 设圆 O 的半径是圆 O' 的半径的两倍且内切，当圆 O' 在圆 O 的内侧滚动时，其切点为 C，圆 O 的定直径 AB 与圆 O' 的交点为 P，则



$$\widehat{CA}=\widehat{CP}.$$

解 连结 $O'P$，则 $\angle CO'P=2\angle COP$。

设 $\angle AOC=\alpha,\ OA=2r$，

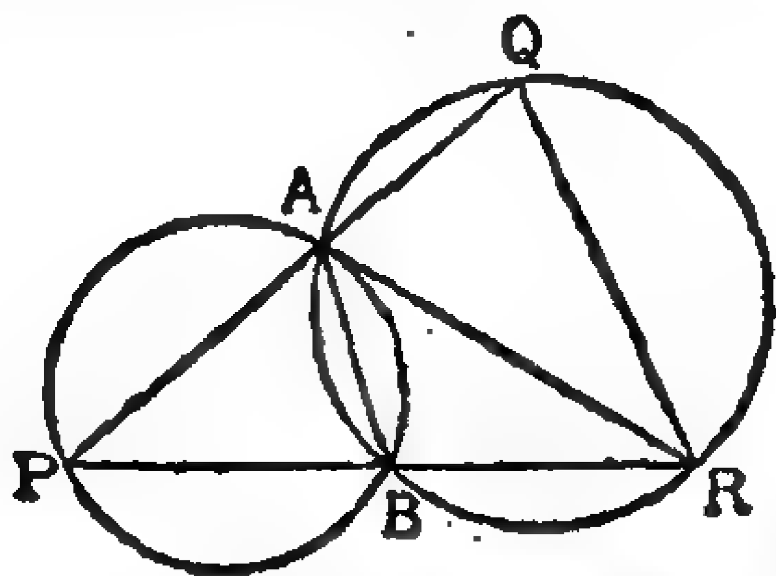
则 $$\widehat{AC}=4\pi r\times\frac{\alpha}{360}=\frac{\pi\alpha}{90}\cdot r,$$

$$\widehat{PC}=2\pi r\times\frac{2\alpha}{360}=\frac{\pi\alpha}{90}\cdot r,$$

$$\therefore\ \widehat{CA}=\widehat{CP}.$$

620. 设 AB 是两圆的公共弦，过其中一圆上的任意点 P 作直线 PA、PB，和另一圆的交点为 Q、R，则弦 QR 的长一定。

解 连结 AB、AR，则



$\angle QAR$
$=\angle APR$
$+\angle ARP$.

因为 AB 是一定的，可知 $\angle APR$、$\angle ARP$ 的大小是一定的。所以 $\angle QAR$ 是一定的。因而，弦 QR 的长度是一定的。

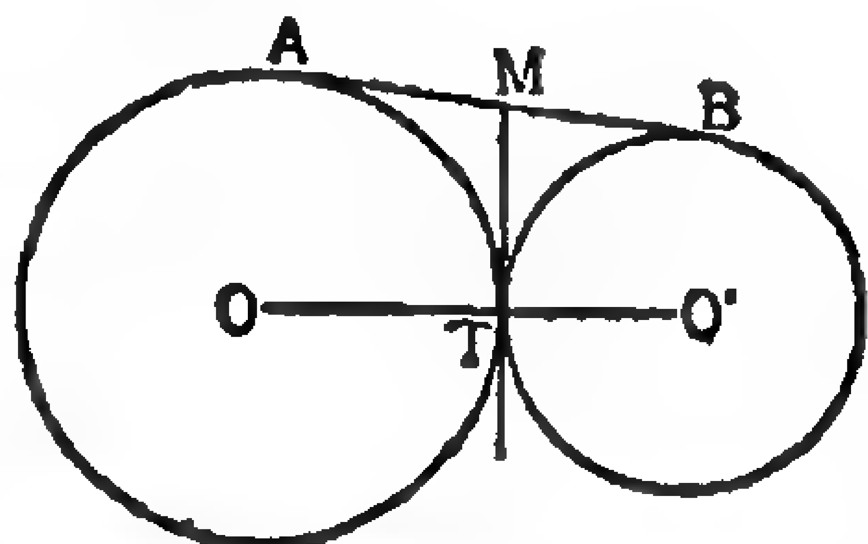
621. 设外切两圆 O、O' 的外公切线为 AB，其切点分别为 A、B，则过 A、B 且和直线 OO' 相切的圆的圆心是 AB 的中点 M。

解 设由两圆的切点 T 作公切线与 AB 的交点为 M；则

$$MA=MT=MB,$$

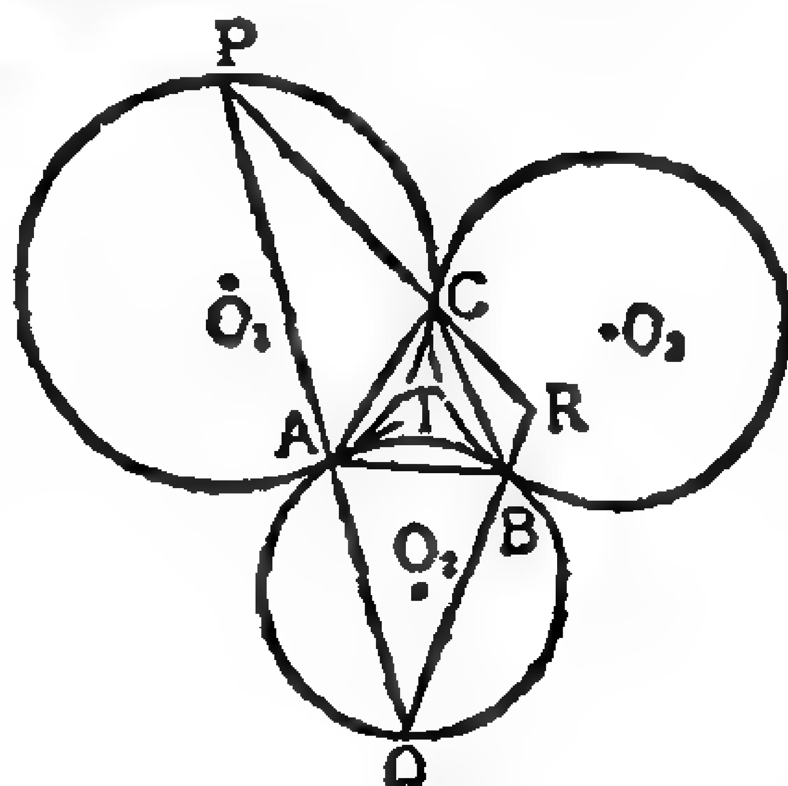
于是 M 是 AB 的中点。

又因 $MT\perp OO'$，因此，以 M 为圆心过 A、B 的圆和 OO' 在点 T 相切。



所以点 M 是过 A、B 且和 OO' 相切的圆的圆心，也是 AB 的中点。

622. 若三个圆 O_1、O_2、O_3 两两外切，O_1 和 O_2，O_2 和 O_3，O_3 和 O_1 的切点分别为 A、B、C，过点 A 的直线和圆 O_1、O_2 的交点分别为 P、Q，过 P、C 的直线和过 Q、B 的直线的交点为 R，则点 R 不在圆 O_3 上。其中点 P、Q、R 和点 B、C 是不同的。



解 显然 R 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上。这是因为：

由 A 作圆 O_1、O_2 的公切线 AT，在图中

$$\angle P=\angle CAT,\ \angle Q=\angle BAT,$$

$$\therefore\ \angle P+\angle Q=\angle CAB.$$

在 $\triangle PQR$ 中，

$$\angle P+\angle Q+\angle R=180°,$$

所以，$$\angle CAB+\angle CRB=180°.$$

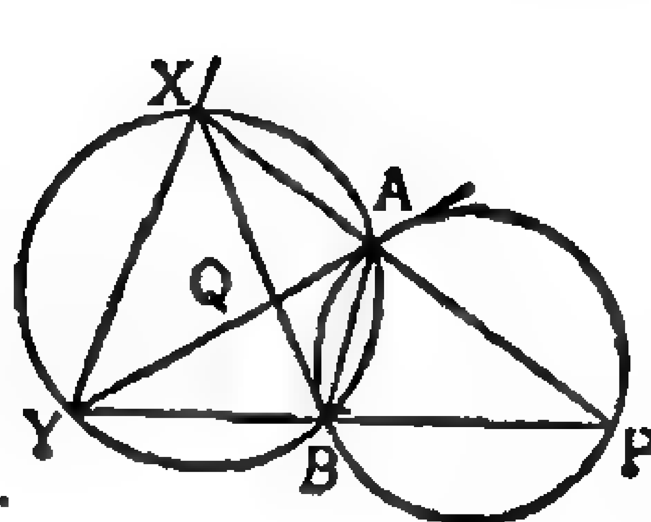
因此，R、C、A、B 四点共圆。若点 R 在圆 O_3 上，则圆 O_3 过点 A，与假定矛盾，故 R 不在圆 O_3 上。

623. 设两定圆的交点为 A、B，若在其中一个圆上任取一点 P，PA、PB 和另一圆的交点分别为 X、Y，则 BX、AY 的交点 Q 在定圆上。

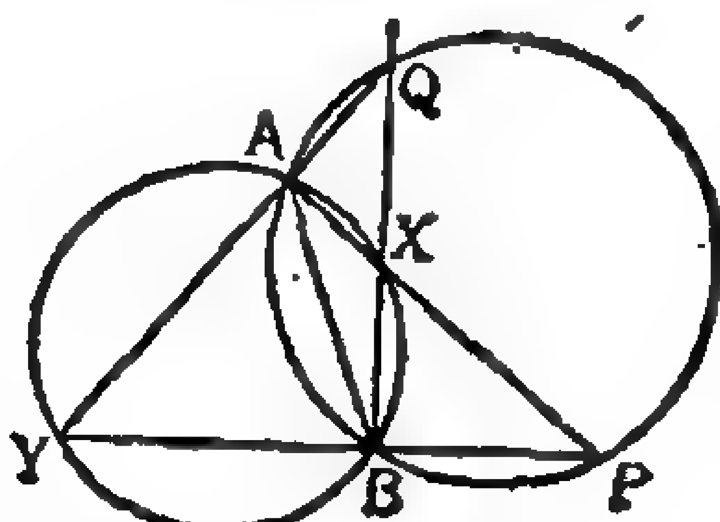
解 因 $\angle QAX=\angle APB+\angle AYB=$定角
（$\because$ AB 是一定的），

又因 $\angle AXB=$定角（$\because$ AB 是一定的），所以在图(1)中，

$$\angle AQB=\angle QAX+\angle AXQ\text{（定角）}.$$



(1)



(2)

又在图(2)中，

$$\angle AQB=\angle AXB-\angle XAQ\text{（定角）},$$

所以 Q 在以定线段 AB 为弦且所对的圆周角为定角的定圆上。

624. 相离两圆 O、O'，连心线 OO' 向两侧延长与圆 O、O' 在外侧的交点分别为 C、D。OC 向 C 的方向延长到 A，使 $OC=CA$，$O'D$ 向 D 的方向延长到 B，使 $O'D=DB$。

再在连心线的同侧由 A 向圆 O 作切线 AE，由 B 向圆 O' 作切线 BF，其切点分别为 E、F，若 DF 和 AE 的交点为 G，CE 和 BF 的交点为 H，则

$$HG=\frac{1}{2}EF.$$

解　在 $\triangle AEO$ 中，

$$\angle AEO=90°,\ OE=OC=CA.$$

所以，　$\angle A=30°$.

同理，　$\angle B=30°$.

因而　$\angle FDO'=60°$,

故　$\angle AGD=90°$,

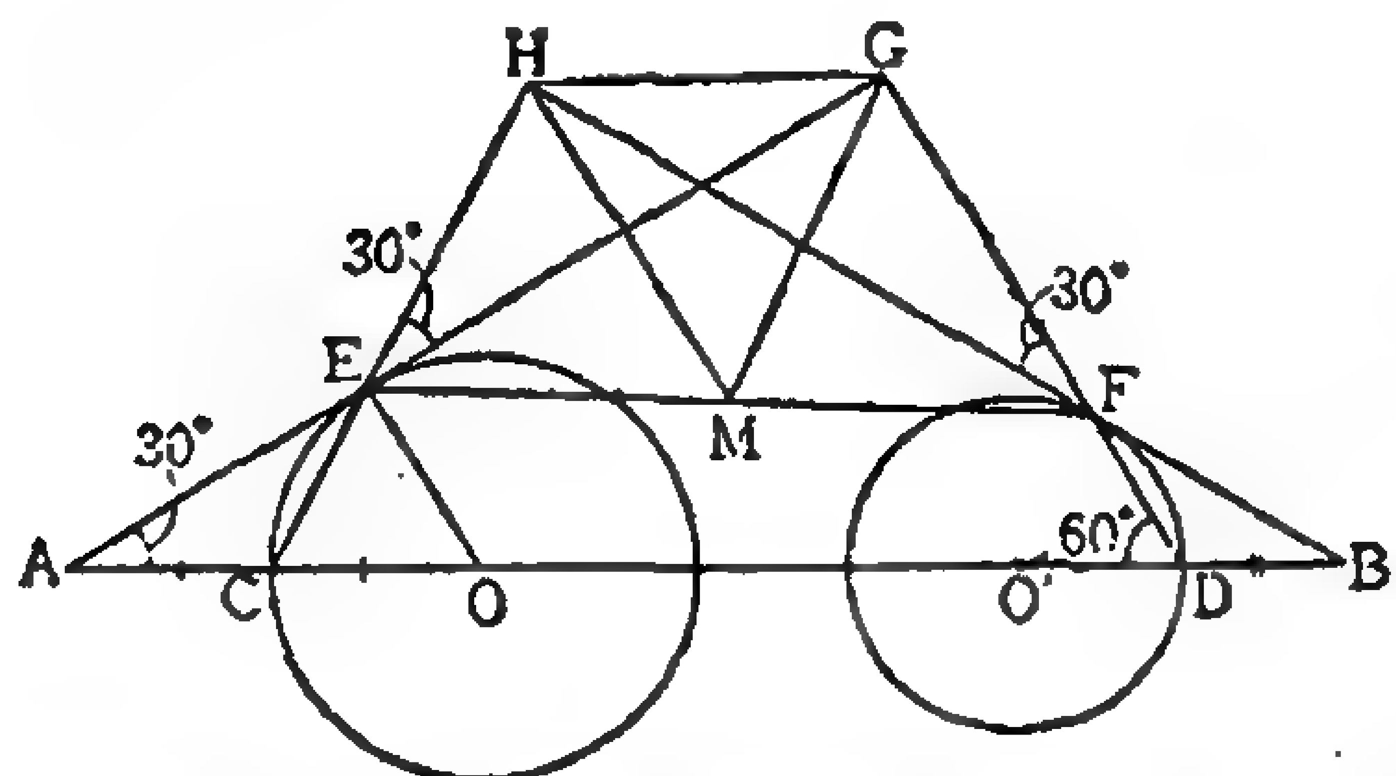
同理，　$\angle CHB=90°$.

因此 H、G 在以 EF 的中点 M 为圆心，EF 为直径的圆周上。在该圆中的圆周角 HEG 是 30°，所以圆心角

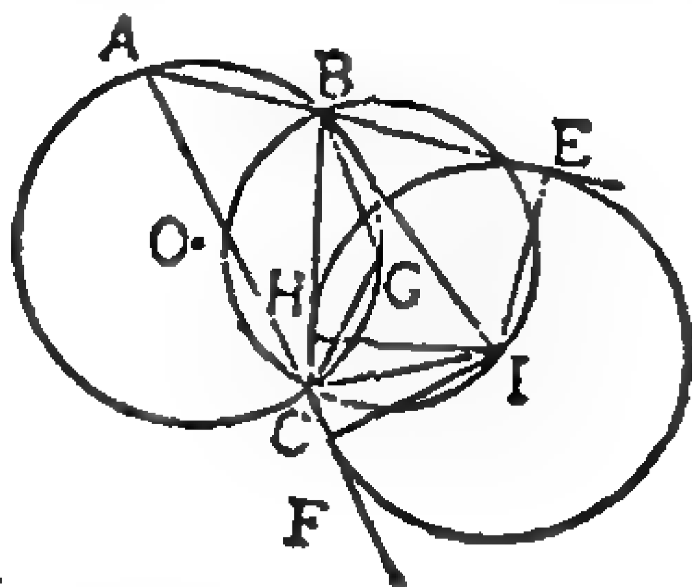
$$\angle HMG=60°,$$

因而 $\triangle HMG$ 是正三角形，

$$\therefore\quad HG=HM=\frac{1}{2}EF.$$



625.　以 O 为圆心作圆，在该圆上任取一点 G 为圆心所作第二个圆，与第一个圆的交点为 B、C. 又在第二个圆上任取一点 I 为圆心作与 BC 相切的第三个圆，若由 B、C 分别向第三个圆作切线，则其交点在第一个圆上。



解　由 B、C 作圆 I 的两切线 BE、CF，其切点分别为 E, F，设 BE、CF 的交点为 A，则圆 I 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆，所以

$$\angle BIC=\angle R-\frac{1}{2}\angle A.$$

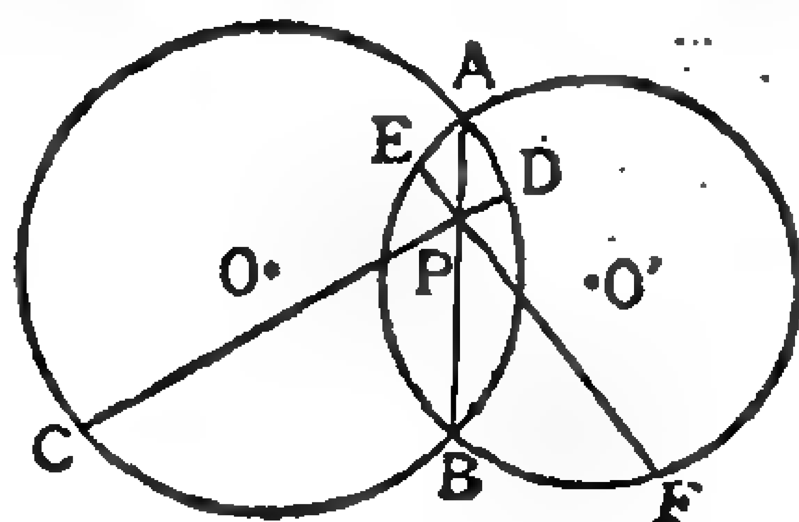
可是，G 是 $\triangle BIC$ 的外心，

故　$\angle BGC=2\angle BIC=2\angle R-\angle A$,

$$\therefore\quad \angle A+\angle BGC=2\angle R.$$

因此，A 在 $\triangle BGC$ 的外接圆上，即在圆 O 上。

626.　若过相交两圆的公共弦上一点 P 作一个圆的弦 CD，另一圆的弦 EF，则 C、D、E、F 四点共圆。



解　在圆 O 中，

$$CP\cdot DP=AP\cdot BP.$$

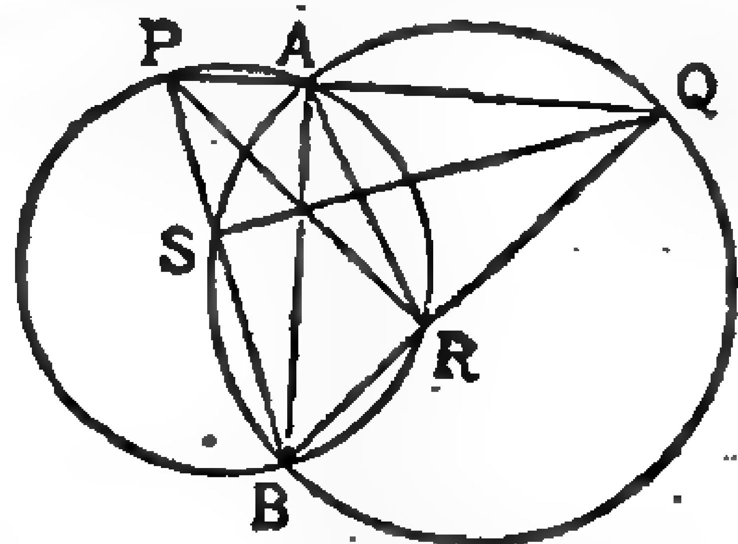
在圆 O' 中，

$$EP\cdot FP=AP\cdot BP.$$

所以　$CP\cdot DP=EP\cdot FP$,

故 C、D、E、F 四点共圆。

627.　设 A、B 是两圆的交点，过 A 作垂直于 AB 的直线和两圆的交点分别为 P、Q，若 PB、QB 与两圆的交点分别为 S、R，则 $\angle RAB=\angle SAB$.



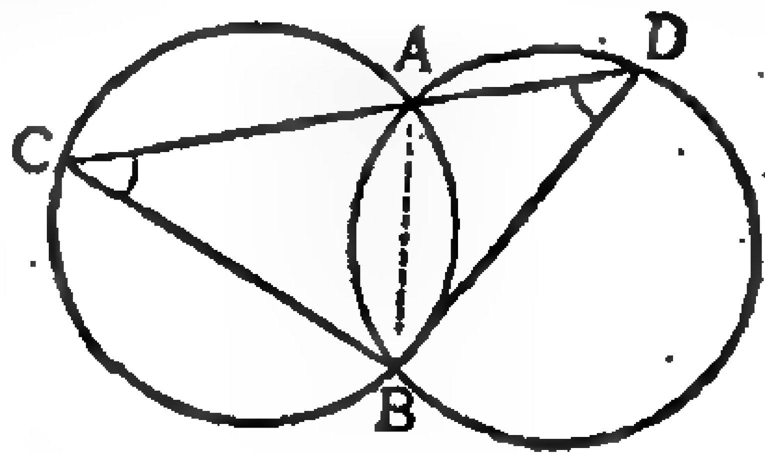
解　因

$$\angle BSQ=\angle QAB=\angle R,$$

$$\angle PRB=\angle PAB=\angle R.$$

所以，$\triangle ASR$ 是 $\triangle PBQ$ 的垂足三角形. 因此，$\angle RAB=\angle SAB$.

628.　设两等圆相交于 A、B 两点，过 A 作直线和两圆分别交于 C、D，连结 BC,BD,则 $\triangle BCD$ 是等腰三角形。



(1)

解　连结 AB，则

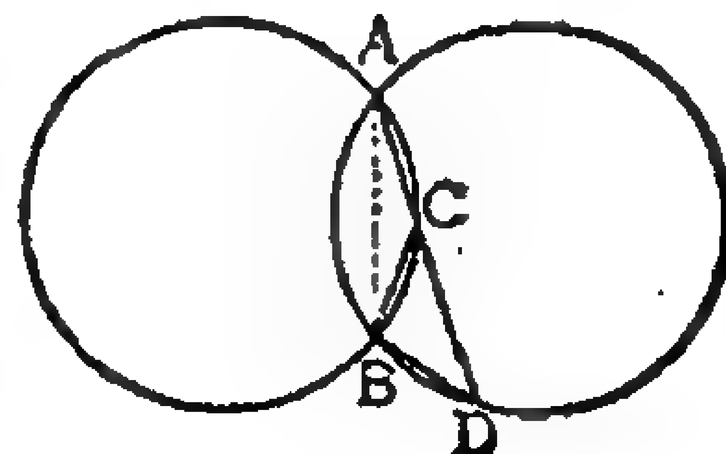
$$\angle BAC+\angle BAD=2\angle R,\ \text{图(1)}$$

或 $\angle BAC=\angle BAD$. 图(2)

但是在等圆中互补或相等的圆周角所对的弦相等。

所以　$BC=BD$,

即 $\triangle BCD$ 是等腰三角形。



(2)

629.　若两圆 O、O' 在点 P 相交成直角，连心线和圆 O' 的交点为 A，则连结 PA 的直线过垂直于连心线的直径的一端点。

解　设 PA 和圆 O 的交点为 B，过 B 作直

径 BC，则

$$\angle OBP=\angle OPB. \quad ①$$

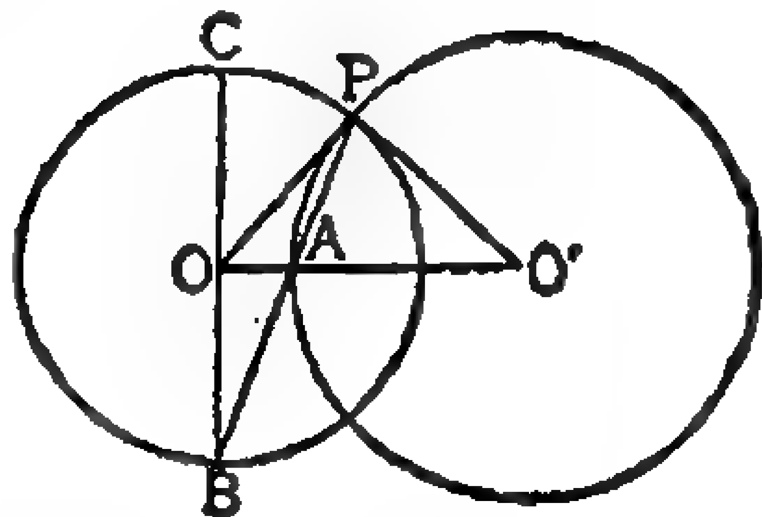
因两圆 O、O' 交点上的两条切线互相垂直，即

$$\angle OPO'=\angle R,$$

所以，$\angle OPA+\angle APO'=\angle R.$

又因 $\angle O'PA=\angle O'AP. \quad ②$

于是由①、②，得



$$\angle B+\angle OAB=\angle OPA+\angle APO'=\angle R,$$

$\therefore\ \angle BOA=\angle R.$

因此 $BO\perp OO'$，

即 PA 过垂直于 OO' 的直径 BC 的端点 B.

630. 三个圆相切于 A、B、C，若弦 AB、AC 的延长线和第三个圆的交点为 D、E，则第三个圆的圆心和 D、E 在一直线上.

解 设以 AB、AC 为弦的圆的圆心分别为 M、L，第三个圆的圆心为 N，连结 ND，NE，则

$$\angle MAB=\angle MBA,\ \angle NBD=\angle NDB,$$

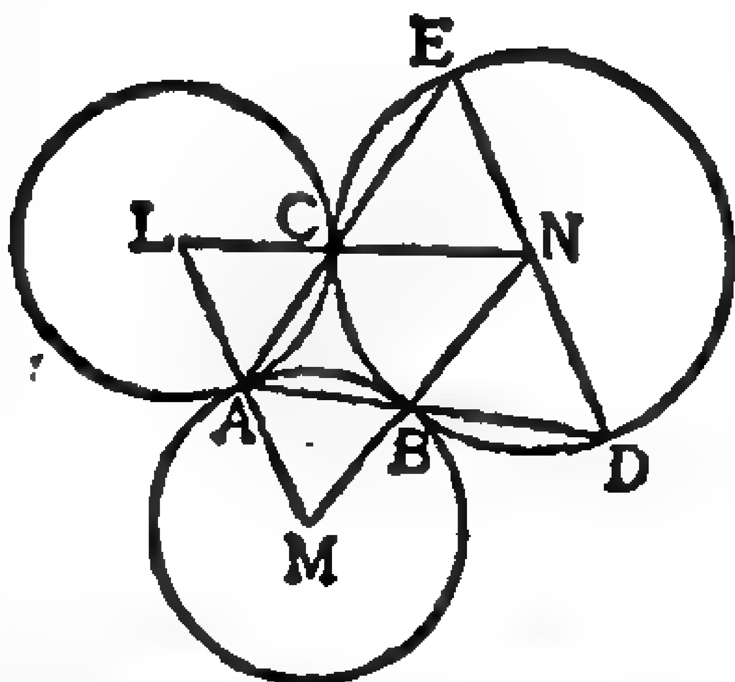
但是 $\angle ABM=\angle NBD,$

所以，$\angle MAB=\angle NDB,$

于是 $AM\parallel DN.$

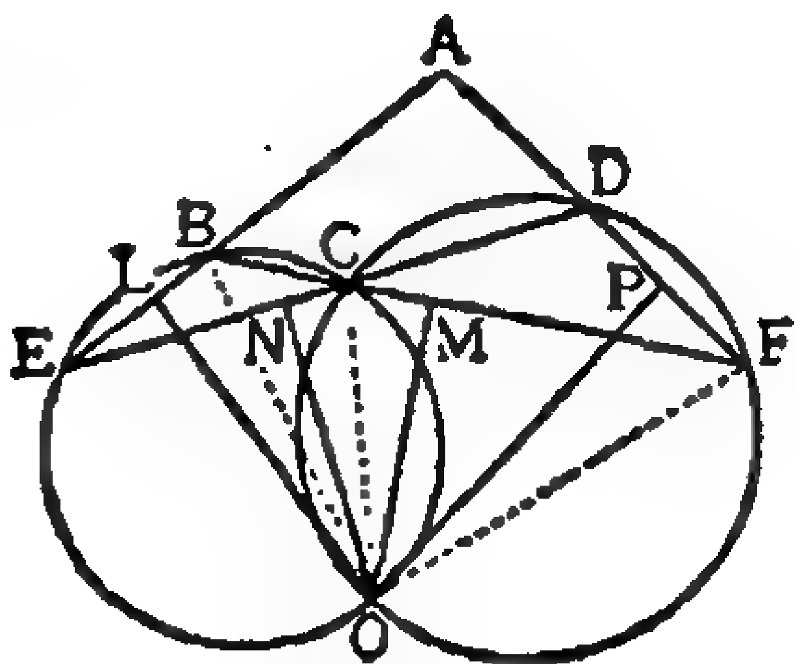
同理，$LA\parallel EN.$

但是 LAM 是一直线，且它平行于直线 ND、NE，因此 ND、NE 是一直线，即 E、N、D 在一直线上.



注 三个圆相切的情况是各种各样的，在各种情况下都有 E、N、D 在一直线上的结论.

631. 四直线两两相交所构成的四个三角形的外接圆相交于一点，且由该点向四直线所作垂线的垂足在一直线上.



解 设四直线 AB、BC、CD、AD 中，AB、CD 的交点为 E，BC、AD 的交点为 F，圆 BCE、圆 CDF 的另一交点为 O，则

$$\angle BOF=\angle BOC+\angle COF$$
$$=\angle BEC+\angle CDA,$$
$$\therefore\ \angle BOF+\angle A=2\angle R,$$

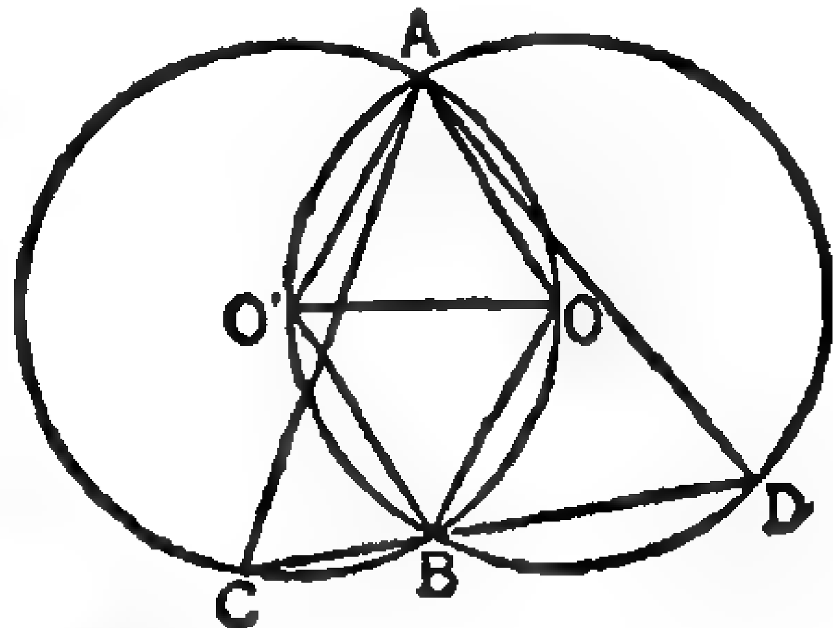
所以圆 ABF 过点 O.

同理，$\angle A+\angle EOD=2\angle R$，所以圆 AED 也过点 O. 故圆 BCE、CDF、ABF、AED 相交于一点 O.

其次，若由 O 向 AB、BC、CD、DA 所作垂线的垂足分别为 L、M、N、P，由西摩松定理 L、M、N 及 M、N、P 分别在一直线上. 因而 L、M、N、P 在一直线上（问题 **665**）.

632. 半径相等的两圆 O、O' 相交于 A、B，且其中一圆过另一圆的圆心，若过点 B 的直线和两圆的交点为 C、D，则 $\triangle ACD$ 是正三角形.

解 因两圆 O、O' 相等，且其中一圆过另一圆的圆心，所以



$$OA=OO'=AO'.$$

因此 $\triangle AOO'$ 是正三角形，

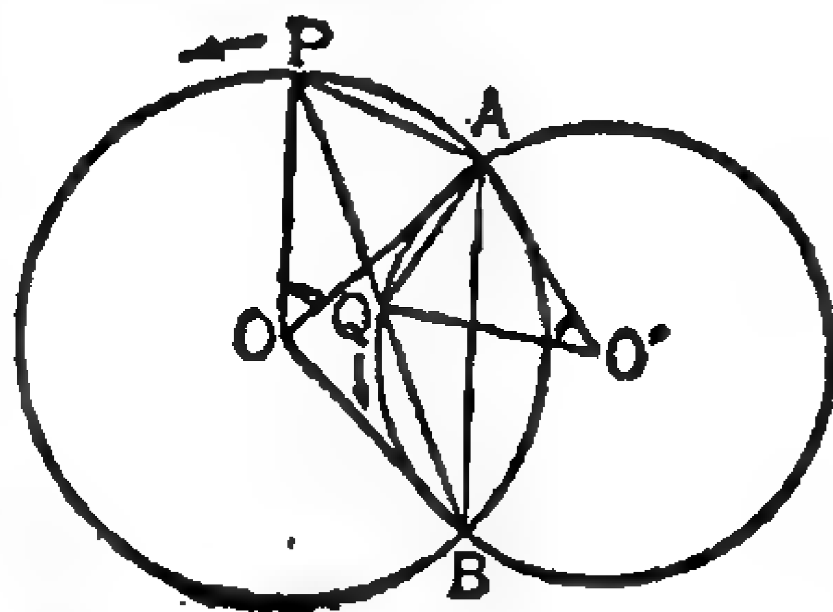
$$\therefore\ \angle AOO'=60°.$$

同理，$\angle BOO'=60°.$

$$\therefore\ \angle AOB=120°,$$
$$\angle ADB=60°.$$

因两圆是等圆，所以 $\angle ACB=60°$，故 $\triangle ACD$ 是正三角形.

633. 设 A、B 是两圆的交点，点 P、Q 分别在两圆上，若点 P、Q 按一定速度作同向运动，它们运动一周所需要的时间相等，且在某时刻同时过点 A，则 P、Q、B 恒在一直线上.



解 因点 P、Q 分别在圆 O、O' 上运动一周所需时间相等，所以它们的角速度相等. 故，

$$\angle AOP=\angle AO'Q.$$

但是，$\angle ABP=\frac{1}{2}\angle AOP,$

$$\angle ABQ=\frac{1}{2}\angle AO'Q,$$

$$\therefore\ \angle ABP=\angle ABQ.$$

因此 P、Q、B 在一直线上。

634. 设两圆内切于点 P，割线截两圆周于点 A、B、C、D，则 $\angle APB=\angle CPD$。

解 过切点 P 作两圆的公切线 PT，则

$$\angle PBC=\angle TPC,\ \angle PAD=\angle TPD.$$

$$\therefore\ \angle PBC-\angle PAD=\angle TPC-\angle TPD,$$

故 $$\angle APB=\angle CPD.$$

635. 设两圆内切于点 C，若大圆的弦 AB 切小圆于点 D，则 CD 平分 $\angle ACB$。

解 若在点 C 作公切线和 AB 的延长线交于点 E，则 CE、DE 是在 CD 的两端点的切线，所以

$$\angle DCE=\angle CDE,\qquad ①$$

$$\angle DCB=\angle DCE-\angle BCE.$$

又因

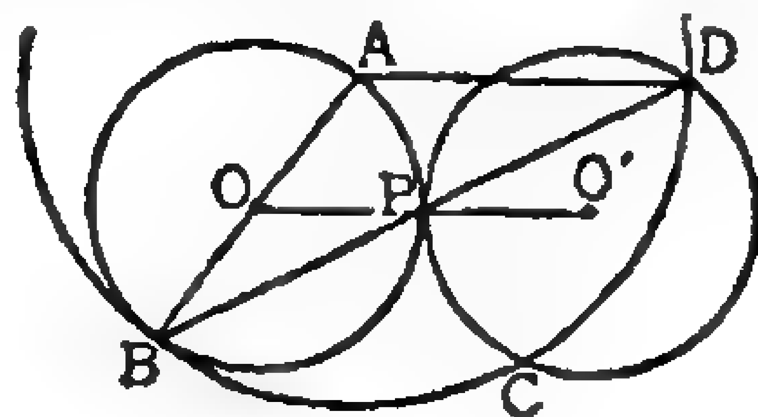
$$\angle ACD=\angle CDE-\angle CAD,\qquad ②$$

而 $\angle BCE$ 是大圆的弦 CB 和切线 CE 所成之角，所以等于 $\angle A$。由①、②，得

$$\angle DCB=\angle DCA,$$

即 CD 平分 $\angle ACB$。

636. 设两等圆 O、O' 外切于点 P，以圆 O 上的点 A 为圆心，作与圆 O 相切的圆，切点为 B，则此圆和圆 O' 的交点中之一在 BP 的延长线上。



解 连结 OO'，则 OO' 过切点 P。又圆 O、O' 是等圆，所以若令 BP 的延长线交圆 O' 于点 D，则

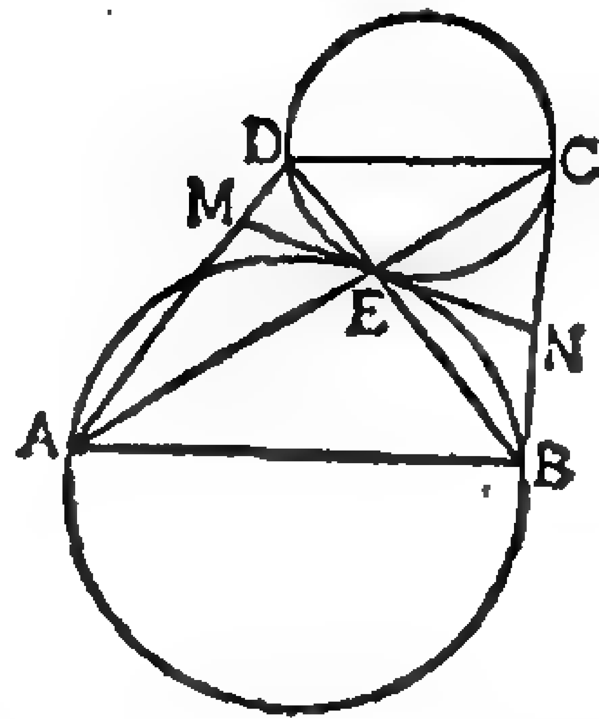
$$BP=PD.$$

又因 $$AO=BO,$$

所以 $$2PO=AD=AB.$$

故以 A 为圆心与圆 O 相切的圆过点 D。

637. 设梯形的两底为 AB、CD，对角线的交点为 E，则过 ABE、CDE 的两圆互相外切于点 E。



解 设 $\triangle ABE$ 的外接圆在点 E 的切线为 MEN，

则 $\angle NEB=\angle BAC$。

$\because\ AB\parallel CD,$

$\therefore\ \angle BAC=\angle ACD.$

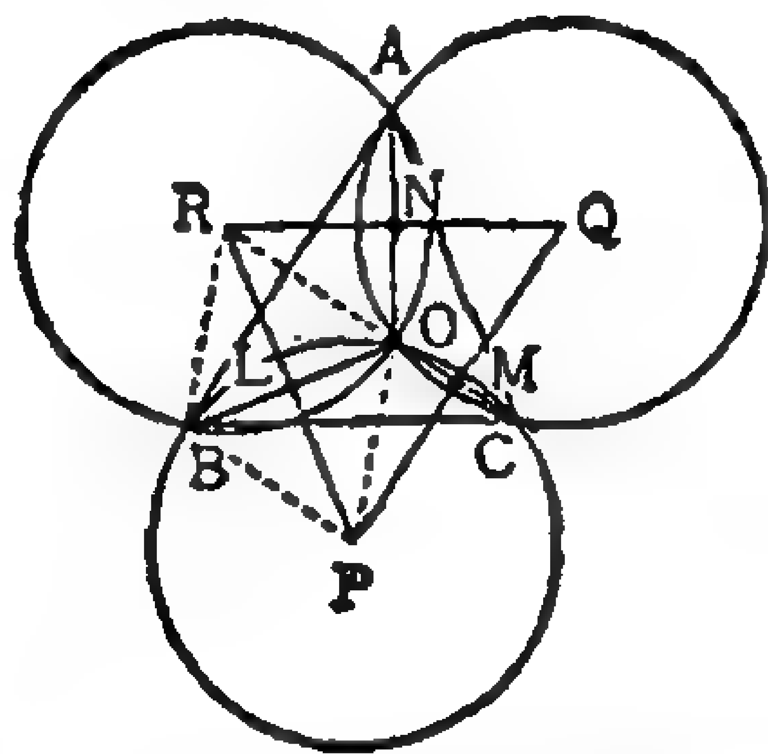
又因 $\angle NEB=\angle DEM$，

所以 $$\angle DEM=\angle ACD.$$

因而 MEN 又是 $\triangle CDE$ 的外接圆的切线。故两圆在点 E 互相外切。

638. 过一点 O 的三个等圆，若其他的交点为 B、C、A，则在四点 A、B、C、O 中，总有一点是其余三点所成三角形的垂心。

解 设过点 O 的三个等圆的圆心为 P、Q、R，则四边形 $ORBP$ 是菱形(在等圆中半径都相等)，其对角线 OB、RP 互相垂直且平分。



同理，OC、PQ 及 OA、QR 也都是互相垂直且平分，因设 OB、RP 的交点为 L，OC、PQ 的交点为 M，则

$$OL=LB,\ OM=MC.$$

$$\therefore\ LM\parallel BC.$$

又因 $$RL=LP,\ QM=MP.$$

$$\therefore\ LM\parallel RQ,\ BC\parallel RQ.$$

但是 $AO\perp RQ$，$\therefore\ AO\perp BC$。

同理，$BO\perp CA$，$CO\perp AB$。

所以，O 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

因而四点 O、A、B、C 中之一点是其他三点所成的三角形的垂心。

639. 设以四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC 为直径的两圆的公共弦为 BE，以边 DC、DA 为直径的两圆的公共弦为 DF，则

$$BE\parallel DF.$$

解　连结 AE、EC，则

$\angle BEA=\angle BEC$

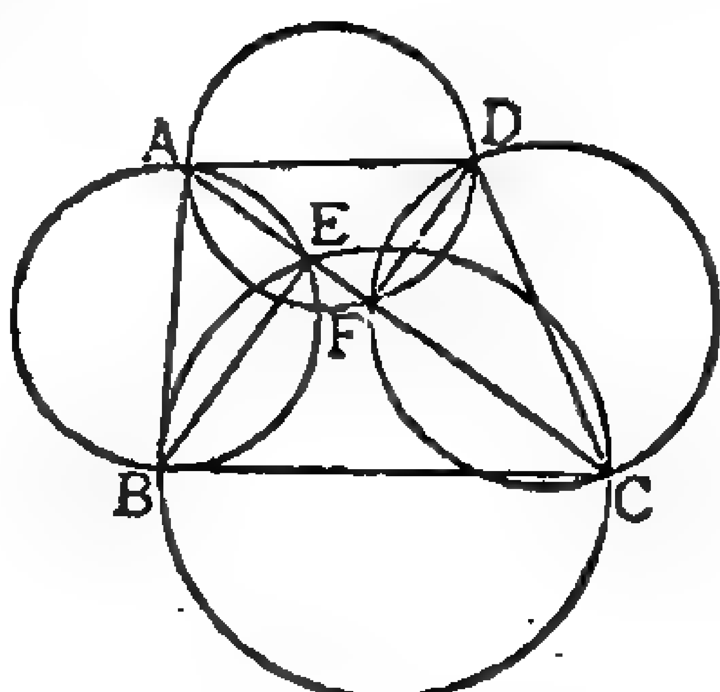
$=\angle R$.

所以，AE、EC 成一直线，从而

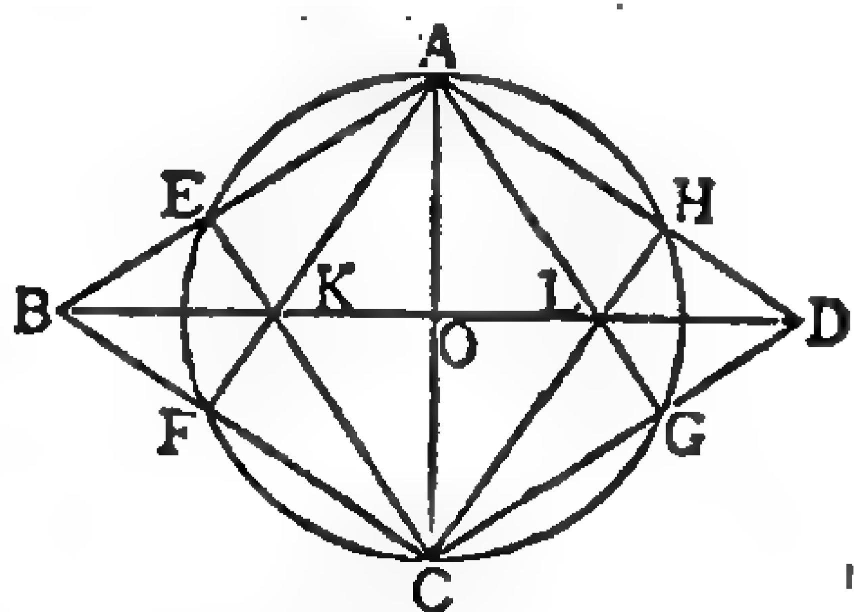
$BE\perp AC$.

同理，$DF\perp AC$.

$\therefore\ BE\parallel DF$.



640.　若菱形的两对角线中以短的为直径的圆周与四边相交，则把这些交点和短对角线的端点分别连结所成的四边形是菱形且与原菱形相似。



解　设菱形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 的交点为 O，则

$$OA=OC,\ 且\ AC\perp BD.$$

设 $AC<BD$，以 AC 为直径所作的圆和四边 AB、BC、CD、DA 的交点分别为 E、F、G、H，因 AC 是圆的直径，所以 $CH\perp AD$，$AF\perp BC$.

故　　$AF\parallel CH$.

同理，　$CE\parallel AG$.

其次，在 $\triangle ADC$ 中，由各顶点向对边所作的垂线，它们相交于一点，所以 AG、CH 在 OD 上相交，同理，AF、CE 在 OB 上相交，令这两点分别为 L、K，则四边形 $AKCL$ 是平行四边形。又对角线 AC、KL 互相垂直，所以 $AKCL$ 是菱形。

再次，

$$\angle ADC+\angle DAB=2\angle R. \quad ①$$

又因　$\angle DHL=\angle DGL=\angle R$,

故

$$\angle D+\angle HLG=2\angle R. \quad ②$$

因此，由①、②，得

$$\angle BAD=\angle HLG=\angle ALC.$$

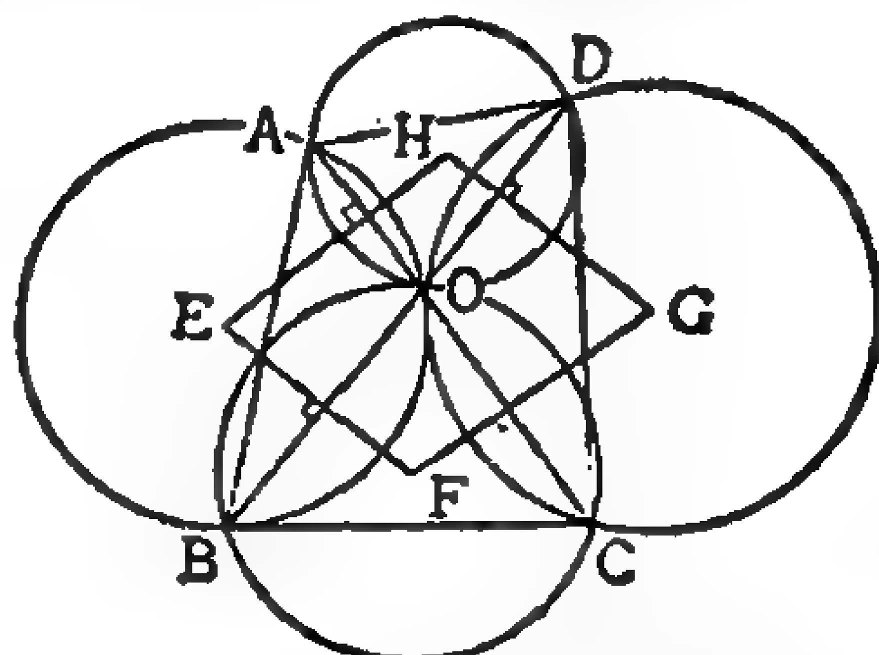
所以菱形 $AKCL$ 和菱形 $ABCD$ 相似。

641.　设四边形 $ABCD$ 的对角线的交点为 O，三角形 OAB、OBC、OCD、ODA 的外接圆的圆心分别为 E、F、G、H，则四边形 $EFGH$ 是平行四边形。

解　圆 AOB、圆 COB 相交于 B、O，连心线 EF 是垂直于 BO 的．同理，$GH\perp DO$．但是 BOD 是一直线，所以 $EF\parallel GH$.

同理，　　$FG\parallel HE$.

故四边形 $EFGH$ 是平行四边形。



642.　在平行四边形 $ABCD$ 的两边 AB、CD 上分别取点 E、F，若圆 AEF 和 AD、AC 的交点分别为 G、H，则两圆 DGF、CHF 相切。

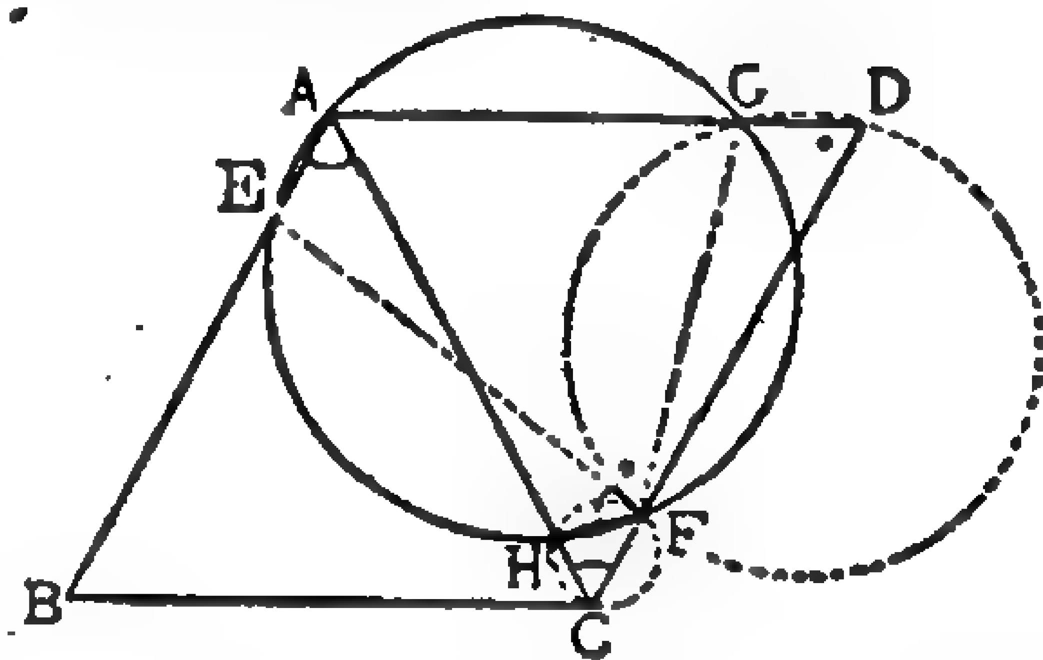
解　因 $\angle EFG=\angle D$($\angle EAG$ 的补角)，所以圆 DGF 在点 F 和 EF 相切。

其次，因 $AE\parallel FC$，所以

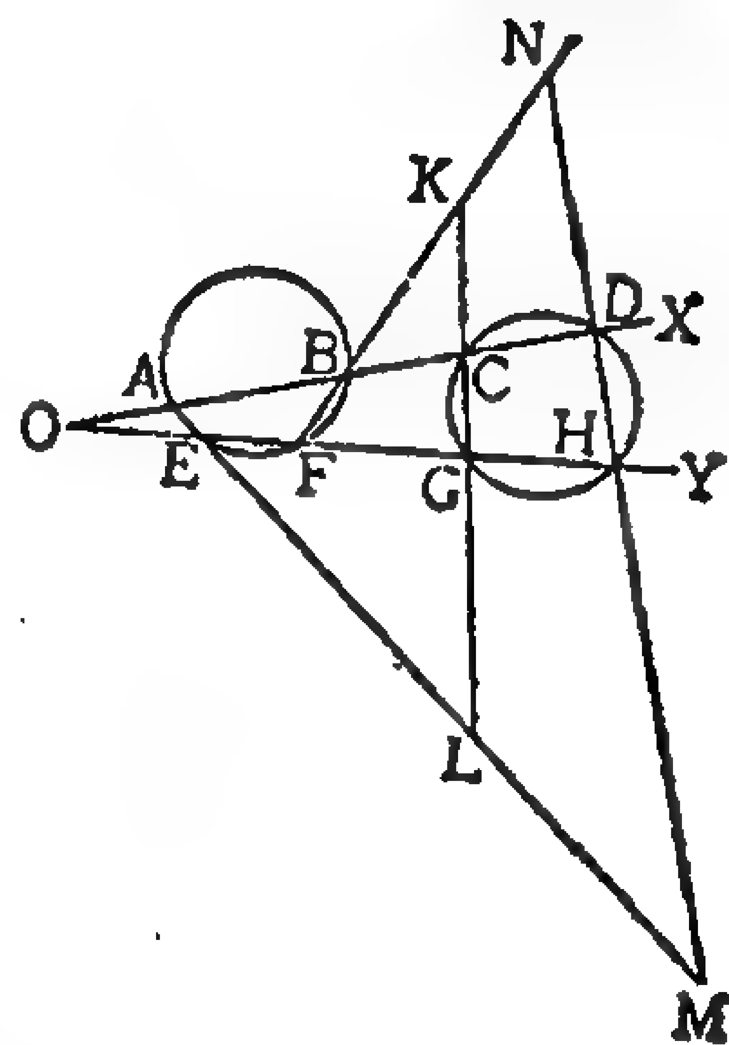
$$\angle FCH=\angle HAE=\angle EFH.$$

故圆 CHF 在点 F 和 EF 相切。

因此两圆在点 F 相切。



643.　作两圆和 $\angle XOY$ 的两边相交，若 OX 和两圆的交点为 A、B、C、D，OY 和两圆的交点为 E、F、G、H，则弦 AE、BF 的延长线和弦 CG、DH 的延长线相交的四点 K、L、M、N 共圆。



解　因 $\angle KLM$ 是 $\triangle EGL$ 的外角，所以

$$\angle KLM=\angle GEL+\angle LGE.$$

但是，　$\angle GEL=\angle ABF=\angle NBD$,

$\angle LGE=\angle CGH=\angle NDB$.

因而，

$\angle KLM=\angle NBD+\angle NDB$

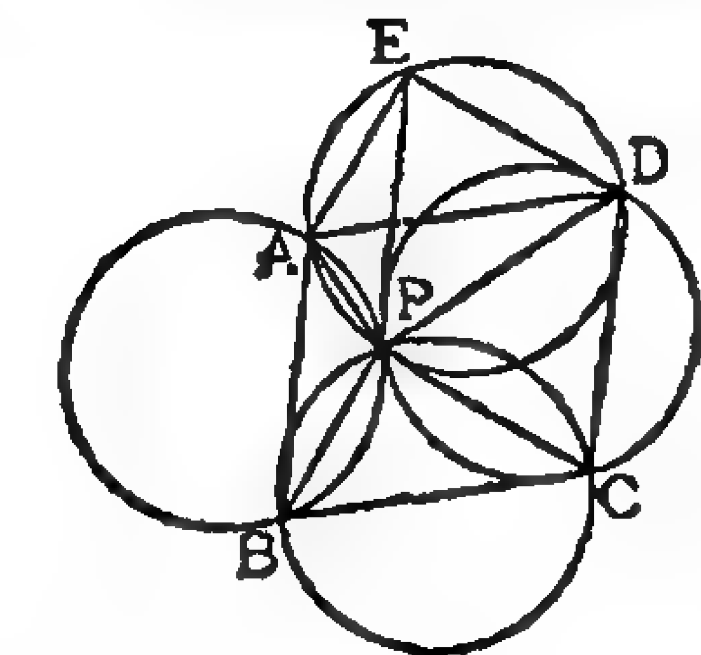
$=\angle N$ 的补角,

$\therefore\quad \angle KLM+\angle KNM=2\angle R$.

故 K、L、M、N 四点共圆.

644. 在平行四边形 $ABCD$ 所在的平面上取一点 P, 作四个圆 PAB、PBC、PCD、PAD, 若其中相邻两个圆相等, 则此四个圆都相等.

解 设两圆 PAB、PBC 相等,因 BP 是公共弦,所以,



$\angle BAP=\angle BCP$.

但是

$\angle BAD=\angle BCD$,

$\therefore\quad \angle PAD=\angle PCD$.

因为圆 PAD 和圆 PCD 有公共弦 PD, 并且

$$\angle PAD=\angle PCD,$$

故两圆相等.

又若以 AB、BP 为两边作平行四边形 $ABPE$, 则

$$PE \mathbin{\underline{\parallel}} AB \mathbin{\underline{\parallel}} CD.$$

所以四边形 $CDEP$ 为平行四边形. 于是,

$ED=PC$, $\quad\therefore\quad \triangle EAD\cong\triangle PBC$,

$\therefore\quad \angle EDA=\angle PCB=\angle PAB=\angle APE$.

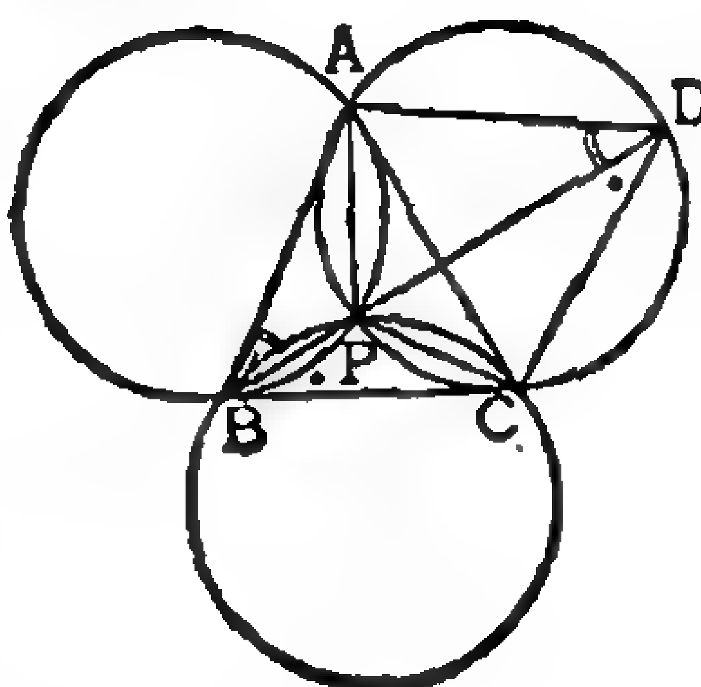
因此点 E 在圆 PAD 上. 而且

$\triangle EAD\cong\triangle PBC$, 所以圆 PAD 等于圆 PBC.

故以上四个圆都相等.

645. 共点的三个等圆中,过每两圆的另一交点的圆等于原来的圆.

解 设过点 P 的三个等圆中, 每两圆相交的另一交点分别为 A、B、C, 延长 BP 和圆 APC 交于 D. 因圆 APB 和圆 ACD 相等,所以



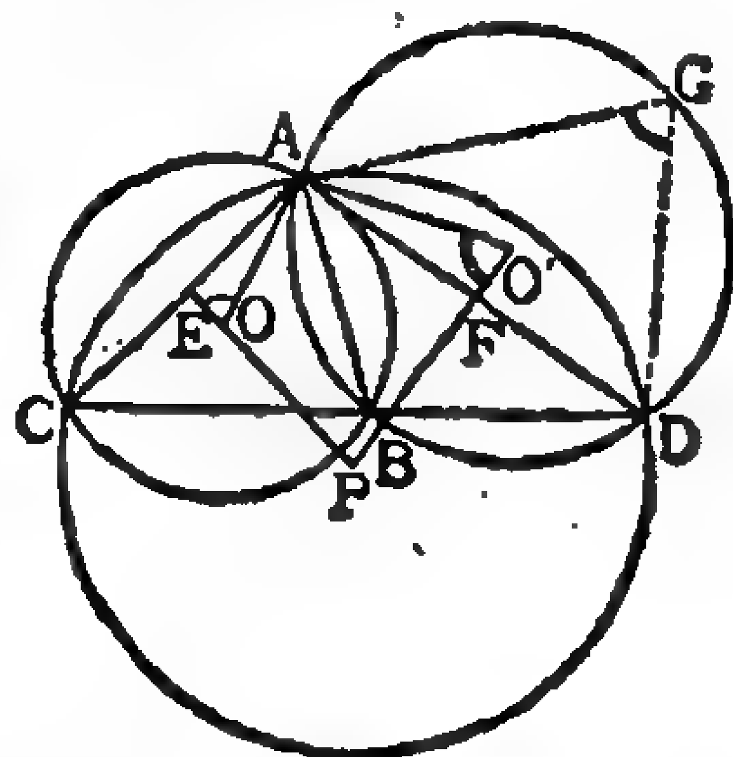
$$\angle ADP=\angle ABP.$$

同理, $\quad \angle PDC=\angle PBC$.

$$\therefore\quad \angle ADC=\angle ABC.$$

因此公共弦 AC 所对的圆周角 ADC 和圆周角 ABC 相等. 所以, 过 A、B、C 的圆和过 A、D、C 的圆相等. 故 $\triangle ABC$ 的外接圆和原来的三个圆相等.

646. 两圆 O、O' 相交于 A、B, 设过点 B 的割线 CBD 和圆相交于 C、D, $\triangle ACD$ 的外接圆的圆心为 P, 则四边形 $AOPO'$ 是圆内接四边形.



解 连结 PO、PO' 与 AC、AD 的交点分别为 E、F. 若在 $\overset{\frown}{ABD}$ 的共轭弧上取一点 G, 则

$$\angle G=\frac{1}{2}\angle AO'D=\angle AO'P.$$

又因, $\quad \angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=\angle AOE$,

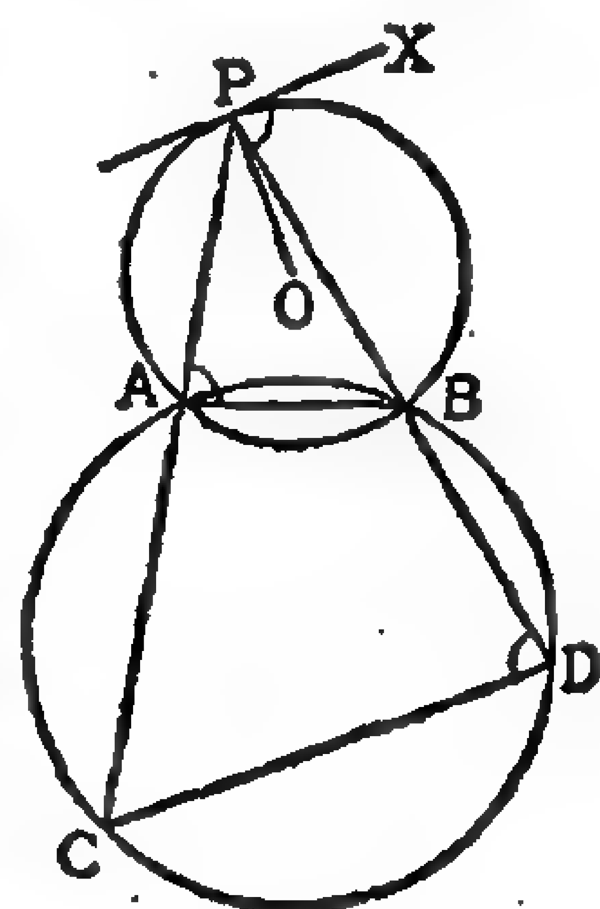
但是四边形 $ABDG$ 是圆内接四边形,

所以 $\quad \angle ABC=\angle G$,

于是 $\quad \angle AO'P=\angle ABC=\angle AOE$.

故四边形 $AOPO'$ 是圆内接四边形.

647. A、B 是定圆 O 上的两定点, P 是在此圆周上的任意一点, 若直线 PA、PB 和过 A、B 的任意圆的交点分别为 C、D, 则直线 CD 垂直于直线 PO.



解 过点 P 作圆 PAB 的切线 PX, 则

$\angle XPB$

$=\angle PAB$.

但是, $ABDC$ 是圆内接四边形,所以

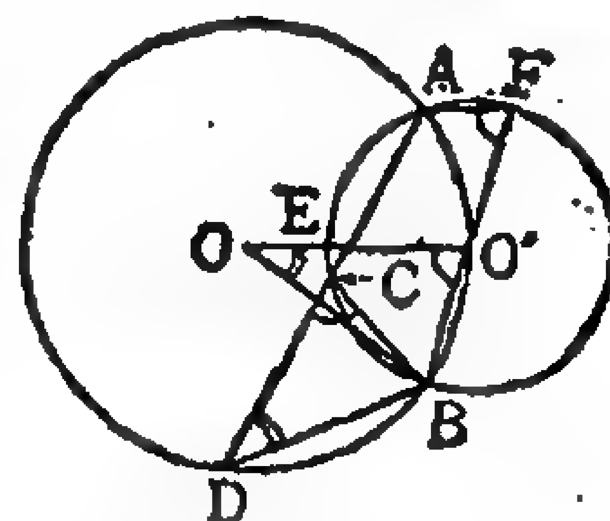
$$\angle PAB=\angle D,\ \angle XPB=\angle D,$$

因而 $\quad PX\parallel CD$.

因 PX 是圆 O 的切线,所以 $PX\perp PO$,

故 $\quad PO\perp CD$.

648. 大小两圆相交于 A、B, 且小圆的圆心在大圆的圆周上, 从点 A 作小圆的割线 ACD 和小圆交于点 C、和大圆周交于点 D, 若 $BC=BO'$, 则 CD 等于大圆的半径 OO'.



解 设 OO' 和小圆的交点为 E, 则

$$\widehat{O'B}=\frac{1}{2}\widehat{AO'B},$$

$\therefore\ \angle BOO'=\angle ADB.$ ①

又因 $\widehat{EB}=\frac{1}{2}\widehat{AEB}$，若延长 BO' 和小圆交于点 F，则

$\angle OO'B=\angle AFB$，并且 A、F、B、C 四点是共圆的。

所以 $\angle F=\angle DCB$，

$\therefore\ \angle OO'B=\angle DCB,$ ②

又

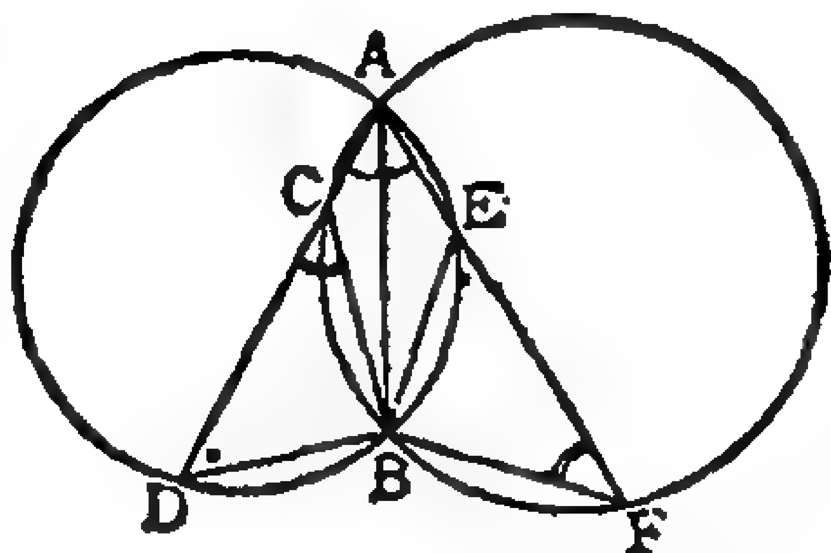
$O'B=BC.$ ③

由①、②、③，得

$\triangle O'BO\cong\triangle DBC,$

$\therefore\ CD=OO'.$

649. 过相交两圆的一个交点 A，作和公共弦成等角的两直线，则两圆间的线段 CD 和 EF 相等。



解 因四边形 $ADBE$ 是圆内接四边形，所以，

$\angle FEB=\angle CDB.$ ①

同理，

$\angle DCB=\angle EFB.$ ②

又由假定 $\angle DAB=\angle FAB,$

$\therefore\ DB=EB$ 和 $CB=FB.$ ③

由①、②、③，得

$\triangle CDB\cong\triangle FEB,$

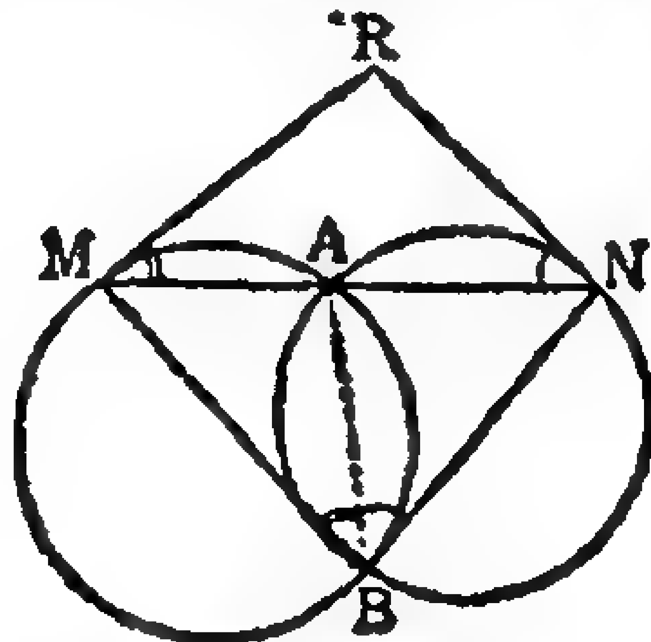
$\therefore\ DC=EF.$

650. 过两圆的交点 A 所作直线 MAN 与两圆的交点为 M、N，过点 M、N 分别作两圆的切线，则两切线所成的 $\angle MRN$ 是一定的，且四边形 $MBNR$ 是圆内接四边形。

解 设两圆的另一交点为 B，连结 AB，则

$\angle RMA=\angle MBA,$

$\angle RNA=\angle NBA.$



但是 $\angle AMB$ 是一定的，$\angle ANB$ 是一定的。

所以 $\angle MBN$ 是一定的。

因此，$\angle RMN+\angle RNM$ 是一定的。故 $\angle MRN$ 也是一定的。

其次，

$\angle MRN+\angle MBN$

$=\angle MRN+\angle RMN+\angle RNM=2\angle R,$

所以四边形 $MBNR$ 是圆内接四边形。

651. 过两圆交点 A、B 之一的点 A，引两条直线 CAD、PAQ，分别与两圆交于 C、D，P、Q，设 CP 与 DQ 的交点为 R，则 $\angle CRD$ 是一定的且四点 B、C、R、D 共圆。

解 在图中，因四边形 $ABDQ$ 是圆内接四边形，所以，

$\angle PQR=\angle ABD.$ ①

又因 P、C、A、B 共圆，所以，

$\angle P=\angle ABC.$ ②

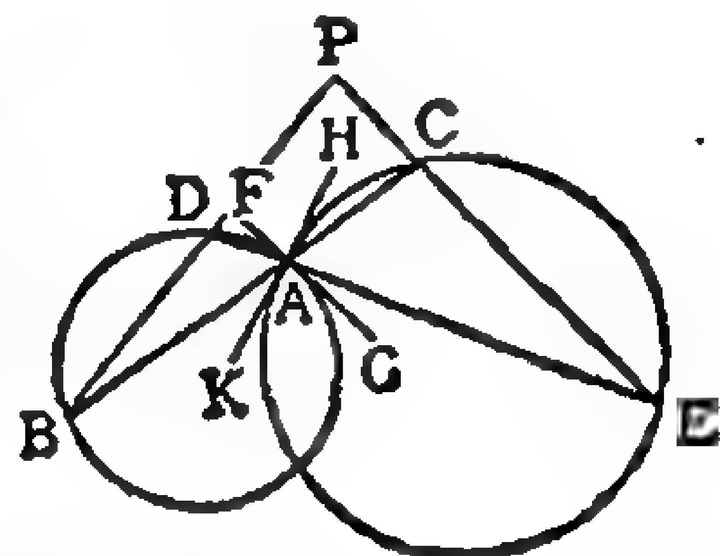
由①、②，得 $\angle CBD=\angle P+\angle RQP,$

$\therefore\ \angle CBD+\angle CRD=2\angle R.$

因此四点 R、D、B、C 在同一圆周上。

其次，由上题知 $\angle CBD$ 的大小是一定的，所以其补角 $\angle CRD$ 也是一定的。

652. 过两圆交点之一的点 A 作两割线 BAC、DAE，和一个圆的交点为 B、D，和另一圆的交点为 C、E，则 BD、EC 的交角 BPC 是一定的。



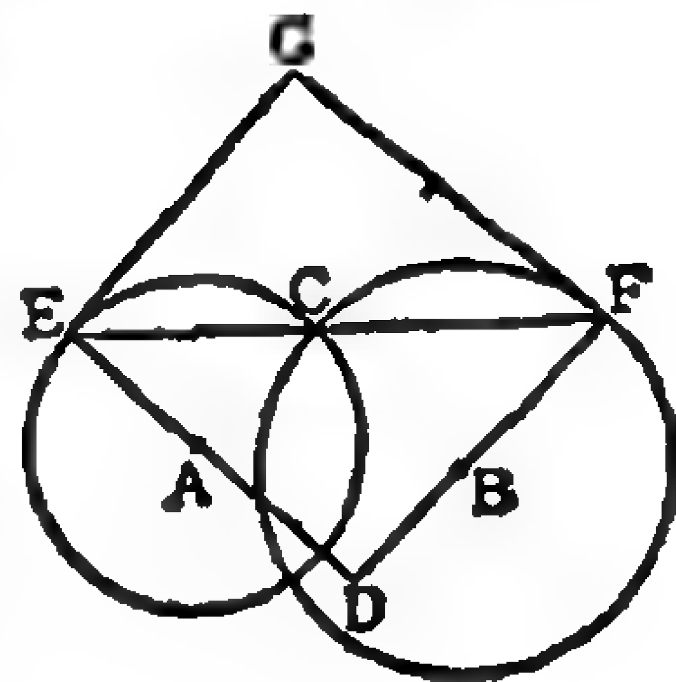
解 过点 A 作两圆的切线 FG、HK，则

$\angle P=\angle BDE-\angle E=\angle BAG-\angle CAH$

$=\angle BAG-\angle BAK=\angle GAK.$

即 $\angle P$ 的大小等于两圆的交角，所以是一定的。

653. 圆 A、B 为相交的两定圆，若过其中一个交点作任意直线，和圆 A、B 的另一交点分别为 E、F，则两直线 EA、FB 所成的角一定。



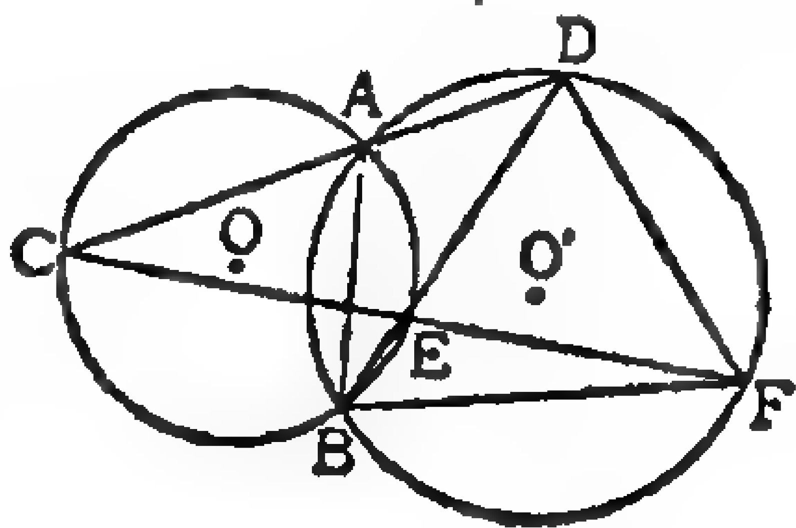
解 设 EA、FB 的交点为 D，过点 E、F 分别作圆 A、B 的切

线，设其交点为 G，则由问题 650，知 $\angle G$ 是一定的，而且

$$\angle GED=\angle GFD=\angle B.$$

所以 $\angle D$ 也是一定的。

654. 圆 O、O' 相交于点 A、B，若过点 A 的割线和两圆的交点分别为 C、D，连结 B、D 的直线和圆 O 的交点为 E，连结 C、E 并延长和圆 O' 的交点为 F，则 $\angle DFE=\angle DBF$。



解 因 A、D、F、B 四点共圆，所以

$$\angle DFB=\angle CAB=\angle CEB. \quad ①$$

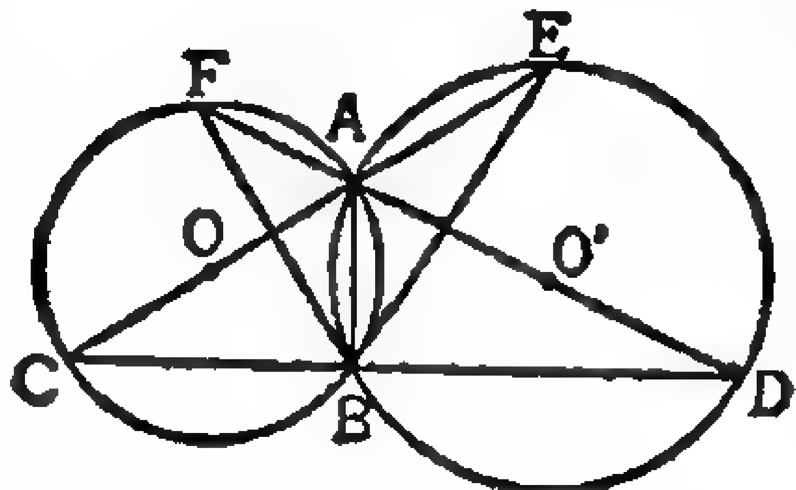
但是 $\angle CEB$ 是 $\triangle EBF$ 的外角，所以，

$$\angle DBF+\angle EFB=\angle CEB. \quad ②$$

由①、②，得 $\angle DFB=\angle DBF+\angle EFB$，

$\therefore\ \angle DBF=\angle DFB-\angle EFB=\angle DFE.$

655. 圆 O、O' 相交于 A、B，过点 B 作垂直于 AB 的两圆周间的割线 CBD，若连结 CA、DA 并延长和两圆分别交于 E、F，则



$$\angle ABE=\angle ABF.$$

解 因 $\angle DBE=\angle DAE$，

$\angle CAF=\angle CBF.$

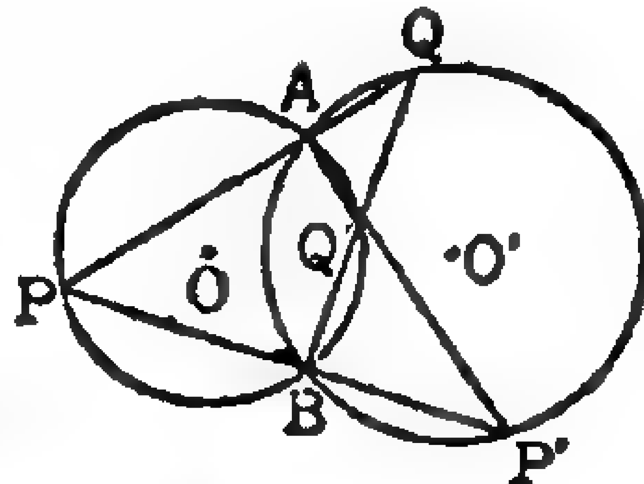
但是 $\angle DAE=\angle CAF$，

$\therefore\ \angle DBE=\angle CBF.$

由假定 $AB\perp CD$，

$\therefore\ \angle ABE=\angle ABF.$

656. 圆 O、O' 相交于 A、B，过点 A 作两圆周间的割线 PAQ，设 PB，QB 和另一圆的交点分别为 P'、Q'，且 $QB\perp PP'$，则 A、Q'、P' 在一直线上。



解 因 A、Q、P'、B 四点共圆，所以，

$$\angle QAP'=\angle QBP'=\angle R. \quad ①$$

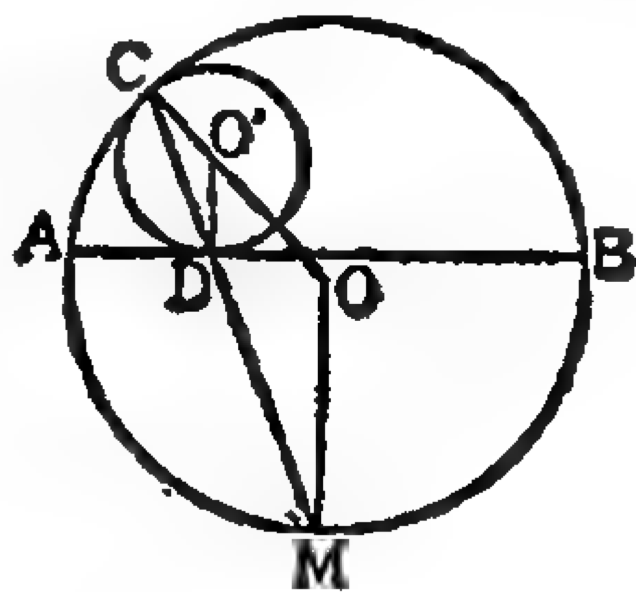
又因 P、A、Q'、B 四点共圆，所以，

$$\angle QAQ'=\angle Q'BP=\angle R. \quad ②$$

由①、②，得 $AP'\perp AQ$，$AQ'\perp AQ$。

因此 A、Q'、P' 在一直线上。

657. 一圆和弓形的弧及弦相切，则过两切点的直线恒过定点。



解 设任意圆 O' 和弓形 ACB 的 $\overset{\frown}{ACB}$ 及弦 AB 相切，其切点为 C、D，弓形所在圆的圆心为 O，则 O、O'、C 在同一直线上。

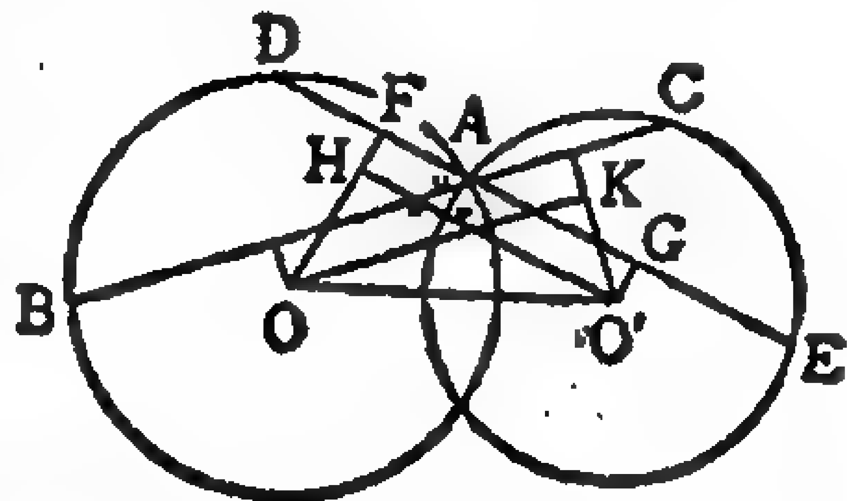
又设 CD 的延长线和 $\overset{\frown}{ACB}$ 的共轭弧的交点为 M，则 $\triangle O'DC$、$\triangle OMC$ 都是等腰三角形，且 $\angle C$ 为公共，所以 $\angle CO'D=\angle COM$。

$$\therefore\ O'D\parallel OM.$$

但是 $O'D\perp AB$，于是 OM 也垂直 AB。因而 M 是 $\overset{\frown}{AMB}$ 的中点，所以它是定点，即 CD 过此定点 M。

注　参考问题 615。

658. 圆 O、O' 在点 A 相交，过点 A 作两圆周间的割线 BAC、DAE，若此两直线和连心线 OO' 构成等角，则 $BC=DE$。



解 设从圆心 O、O' 所作 DE 的垂线分别为 OF、$O'G$，从 O' 作 DE 的平行线和 OF 的交点为 H，则

$$O'H=FG=\frac{1}{2}DE.$$

同理，从 O' 作 BC 的垂线和从 O 作 BC 的平行线相交于点 K，则

$$OK=\frac{1}{2}BC,$$

而且由假定

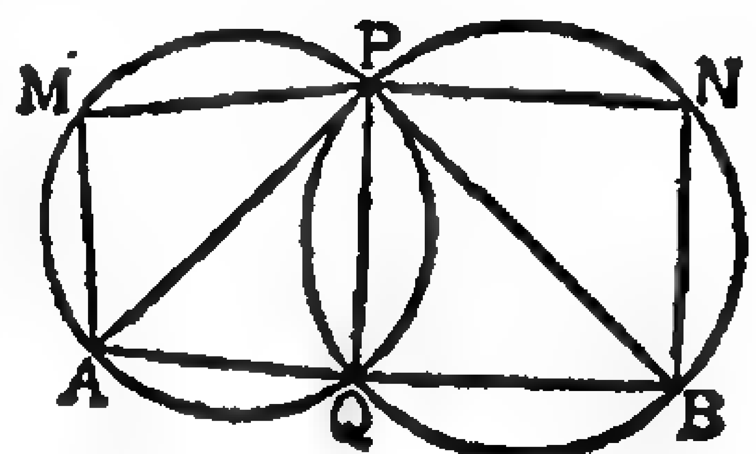
$$\angle HO'O=\angle KOO'.$$

$$\therefore\ \triangle HO'O\cong\triangle KOO',$$

因而 $OK=O'H$，

故 $BC=DE$。

659. 两圆相交于 P、Q，若过点 P 所作两圆的切线 PA、PB，分别和另一圆相交于 A、B，则 PQ 平分 $\angle AQB$。



解　设M是$\overset{\frown}{PQA}$的共轭弧上的一点，N是$\overset{\frown}{PQB}$的共轭弧上的一点. 因为PB是圆$PQAM$的切线，所以，

$$\angle BPA=\angle PMA.$$

PA是圆$PQBN$的切线，所以，

$$\angle APB=\angle PNB.$$

因而　$\angle PMA=\angle PNB.$

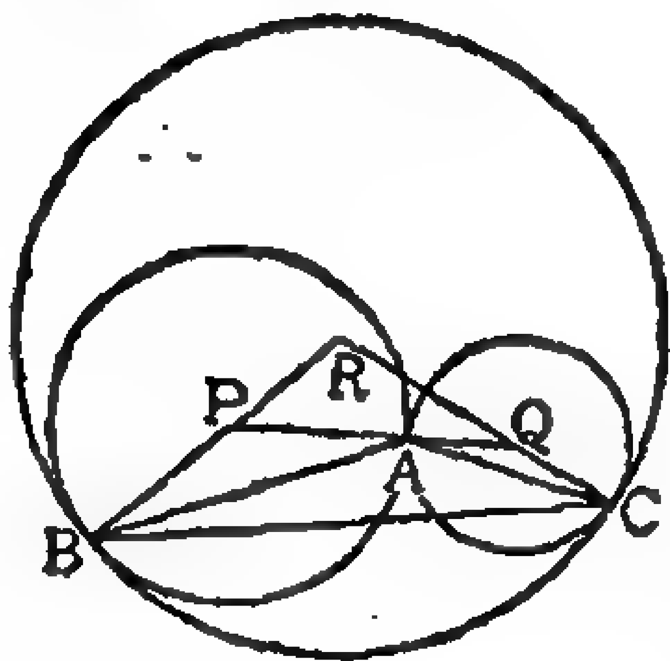
但是　$\angle PMA+\angle PQA=2\angle R,$

$\angle PNB+\angle PQB=2\angle R,$

$\therefore\ \angle PQA=\angle PQB.$

即PQ平分$\angle AQB$.

660.　若在点A互相外切的两圆P、Q，分别在点B、C内切于第三个圆R，则$\angle RQP=2\angle ABC$.



解　连结PQ、RP、RQ，则它们分别过切点A、B、C，而且

$$RB=RC,$$

$$\therefore\ \angle RBC=\angle RCB.$$

又因　$\angle RBC+\angle RCB+\angle BRC=2\angle R,$

$\therefore\ 2\angle RBC+\angle BRC=2\angle R.$

但是　$\angle RBC=\angle RBA+\angle ABC,$

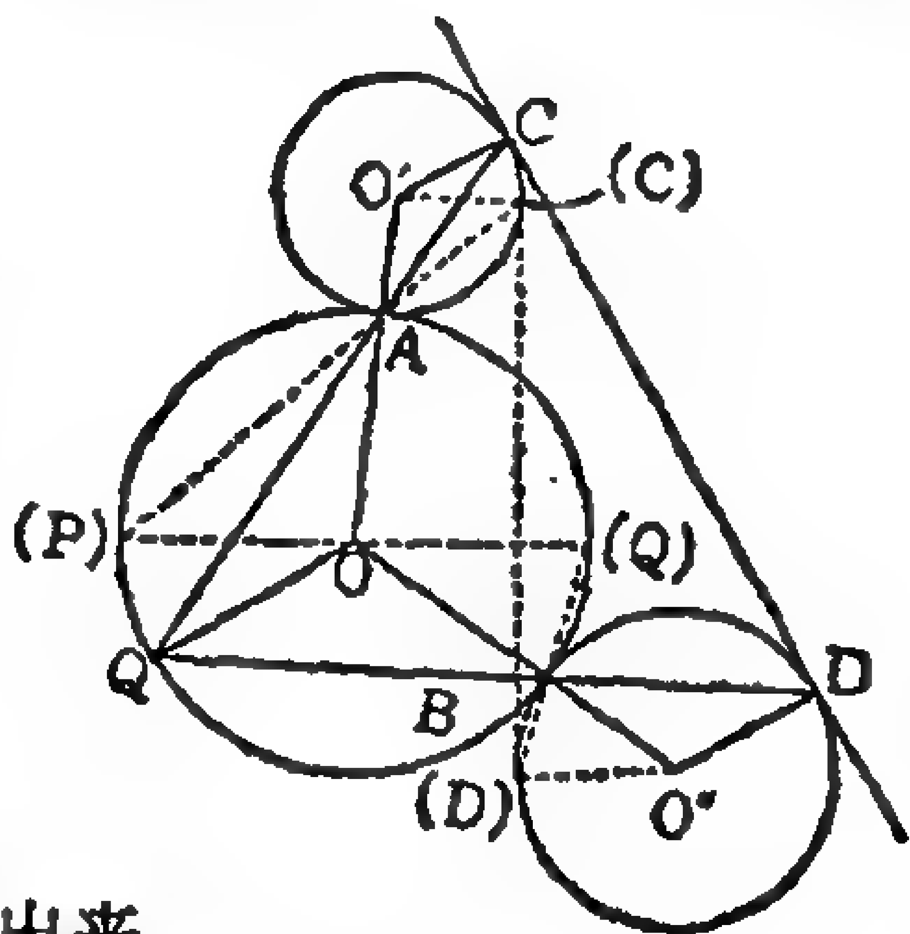
$\therefore\ 2\angle RBA+2\angle ABC+\angle BRC=2\angle R.$

又因$PA=PB$，所以$2\angle RBA=\angle RPQ$.

故　$2\angle ABC=2\angle R-(\angle BRC+\angle RPQ)$

$=\angle RQP.$

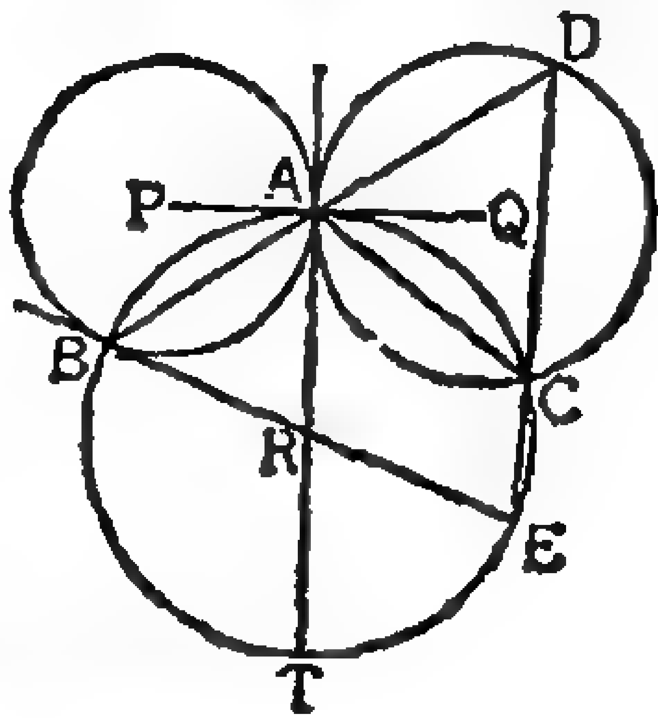
661.　圆O和两圆O'、O''分别相切于点A、B，在圆O'上有点C，在圆O''上有点D，若CD是此两圆的公切线，则两直线AC、BD和圆O交点有怎样的位置关系，说明其理由. 并把圆和切线的各种位置关系用图表示出来.



解　当CD是两圆O'、O''的外公切线时，由问题**617**，知两直线CA、DB和从点O所作CD的垂线同交于圆O上的一点Q.

当$(C)(D)$是圆O'、O''的内公切线时，若由O向直线$(C)(D)$作垂线和圆O相交于点(P)、(Q)，则直线$(C)A$、$(D)B$分别过(P)、(Q)，即点(P)、(Q)是垂直切线$(C)(D)$的圆O直径的端点.

662.　有三个圆P、Q、R. 圆P与圆Q外切于点A，圆R过点A且和圆P、圆Q分别交于点B、C. 设过B、A的直线和圆Q相交于点D，过D、C的直线和圆R相交于点E，则直线EB和圆P相切.



解　四边形$ABEC$是圆R的内接四边形，所以

$$\angle ABE=\angle ACD. \qquad ①$$

其次，作圆P、Q的公切线AT，则$\angle BAT$的对顶角等于$\angle ACD$，所以，

$$\angle BAT=\angle ACD. \qquad ②$$

由①、②，得　$\angle ABE=\angle BAT$.

因为AT是圆P的切线，所以BE也是圆P的切线.

663.　两圆相交于A、B. 过A作一直线和两圆相交于点P、Q，且$AP=AQ$，若$\overset{\frown}{PB}$和$\overset{\frown}{QB}$的中点分别为E、F，则$EF\perp AB$.

解　因点E是$\overset{\frown}{PEB}$的中点，所以AE平分$\angle PAB$.

$$\therefore\ PE=EB. \qquad ①$$

在AB上截取$AS=AP$，

则　$\triangle APE\cong\triangle ASE$，

所以

$$ES=PE. \qquad ②$$

由①、②，得

$$EB=ES. \qquad ③$$

但是$AP=AQ$，所以$AQ=AS$.

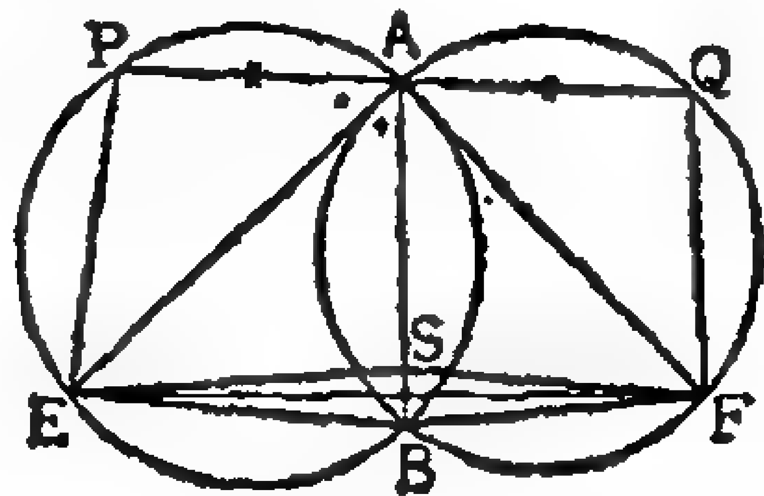
同理，

$FB=FS$. ④

由③、④，得

$EF\perp SB$,

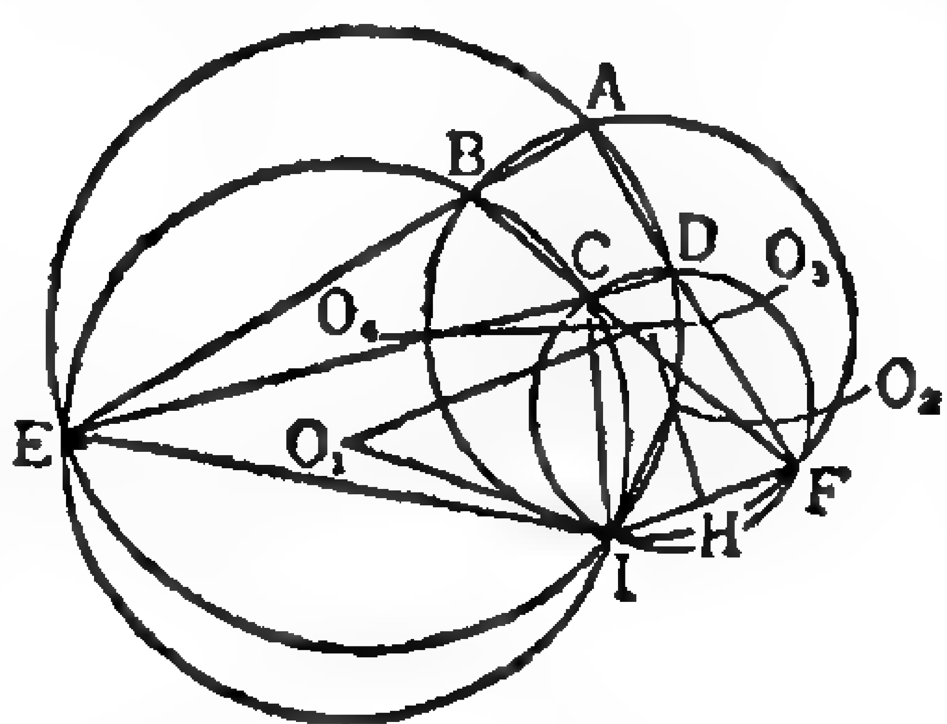
$\therefore\ EF\perp AB$.



664.　设四边形$ABCD$的两组对边的延长线的交点分别为E、F，且三角形BEC、CDF、ABF、ADE的外心分别为O_1、O_2、O_3、O_4，若此四

圆的交点为 I，则 I、O_1、O_2、O_3、O_4 五点共圆。

解　由问题 **631**，可知这四个圆相交于一点 I。因 FI 是圆 O_2、O_3 的公共弦，所以 $O_2O_3\perp FI$，设 O_2O_3 和 FI 的交点为 H，则 $O_2H\perp FI$。



$$\therefore\quad \angle IO_2H=\angle ICF.\qquad ①$$

同理，

$$\angle IO_1O_3=\angle IEB.\qquad ②$$

但 $EBCI$ 是圆内接四边形，所以

$$\angle ICF=\angle IEB.$$

由①、②，得　$\angle IO_2H=\angle IO_1O_3$。

同理　$\angle IO_4O_3=\angle IO_2H$。

因此 I、O_1、O_2、O_3、O_4 五点共圆。

10. 西摩松线、九点圆

665.　从 $\triangle ABC$ 外接圆上一点 P 作 BC、AB、AC 的垂线，设垂足分别为 D、E、F，则这三点在一直线上。　　［西摩松线］

解　连结 DE、DF，若能证明

$$\angle BDE=\angle FDC$$

就可以了。

因

$$\angle BDP=\angle R=\angle BEP,$$

所以 B、E、P、D 四点共圆。

因而　$\angle BDE=\angle BPE$。

同理，　$\angle FDC=\angle FPC$。

在 $\triangle BEP$ 和 $\triangle PFC$ 中，

$$\angle BEP=\angle R=\angle PFC.$$

又因 $\angle ACP=\angle PBE$（$\because$ A、B、P、C 共圆），

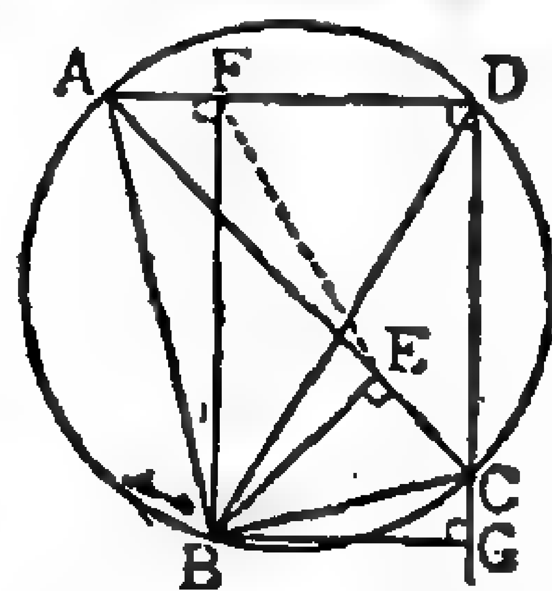
$$\therefore\quad \angle BPE=\angle FPC,$$

因此　$\angle BDE=\angle FDC$。

故 E、D、F 在一直线上。

666.　四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，且 $\angle D$ 是直角，若从 B 作直线 AC、AD 的垂线，其垂足分别为 E、F，则 EF（或它的延长线）平分 BD。

解　从 B 作 DC 的垂线 BG，根据西摩松定理，知 F、E、G 在一直线上。



又

$\angle BFD=\angle FDG=\angle R$，

所以四边形 $BGDF$ 是矩形。

因此 BD 被另一对角线 FG（即 FE）所平分。

667.　从一点 P 向 $\triangle ABC$ 的三边或它们的延长线上作垂线，若其垂足 L、M、N 在同一直线上，则点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上。

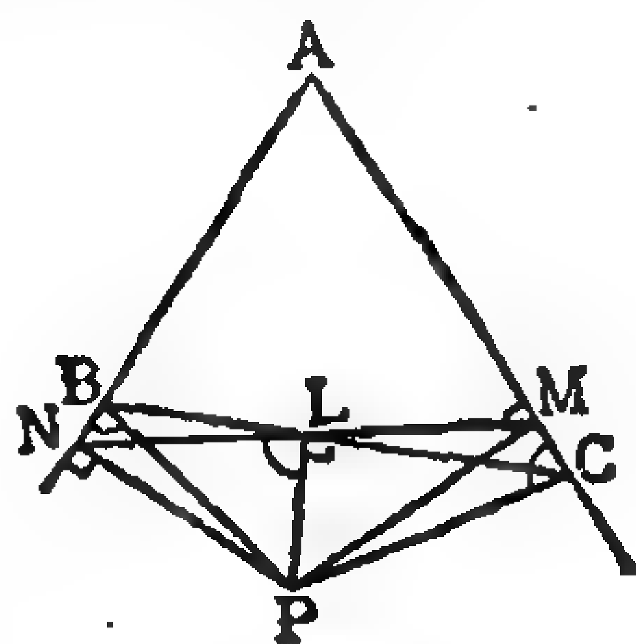
［西摩松线的逆定理］

解　因 $\angle BNP=\angle R=\angle PLC$，所以 N、B、L、P 四点共圆。

$$\therefore\quad \angle NBP=\angle NLP.\qquad ①$$

又因 $\angle PLC=\angle R=\angle PMC$，所以 P、L、M、C 四点共圆。

$$\therefore\quad \angle NLP=\angle MCP.\qquad ②$$



由①、②，得

$$\angle NBP=\angle ACP,$$

因此 A、B、P、C 四点共圆。即点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上。

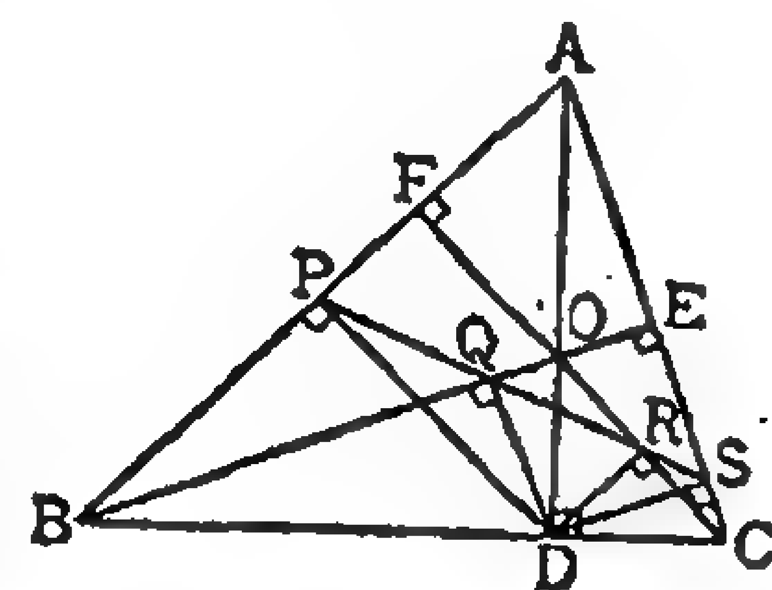
668.　设 $\triangle ABC$ 的三垂线 AD、BE、CF 的垂足分别为 D、E、F；从点 D 作 AB、BE、CF、AC 的垂线，其垂足分别为 P、Q、R、S，则 P、Q、R、S 在同一直线上。

解　设 $\triangle ABC$ 的垂心为 O，

则　$\angle OEC=\angle R=\angle ODC$。

所以 O、E、C、D 四点共圆。

同理，O、F、B、D 四点共圆。因此 D 是 $\triangle OEC$、$\triangle OFB$ 的外接圆的第二个交点，由问题 **665**，知 P、Q、R 在同一直线上。又 S、R、Q 也在同一直线上。



故，P、Q、R、S 在同一直线上。

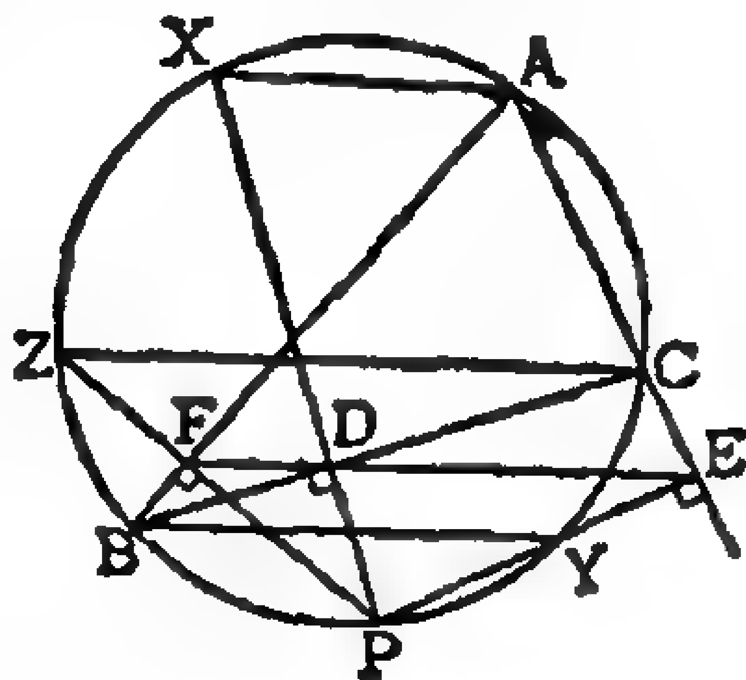
669.　从 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点 P，向边 BC、CA、AB 或它们的延长线分别作垂线 PD、PE、PF，若这些垂线及其延长线和

圆的交点分别为 X、Y、Z，则 AX、BY、CZ 都是关于点 P 的"西摩松线" EDF 的平行线。

解　因　$\angle BDP=\angle R=\angle PFB$，

所以 P、D、F、B 四点共圆，从而

$\angle DFP=\angle CBP$。



但是

$\angle CBP=\angle CZP$，

$\therefore\ \angle DFP=\angle CZP$。

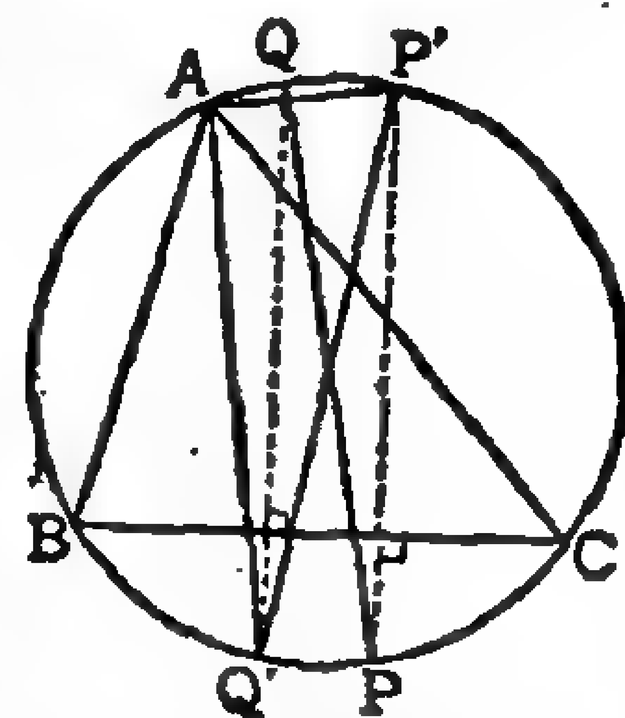
因此　$FD\parallel CZ$，

即　$EF\parallel CZ$。

同理，　$AX\parallel EF$，$BY\parallel EF$。

670.　设 $\triangle ABC$ 的外接圆的任意直径为 PQ，则关于 P、Q 的"西摩松线"是互相垂直的。

解　若从 P、Q 向 BC 作垂线并延长和 $\triangle ABC$ 的外接圆分别交于 P'、Q'，则由上题知 $P'A$、$Q'A$ 分别与点 P、Q 的"西摩松线"平行。



因为 PQ 是这个圆的直径，又 PP' 和 QQ' 是平行的，所以四边形 $PP'QQ'$ 是矩形。从而 $P'Q'$ 也是这个圆的直径。故 $P'A\perp Q'A$，因而关于 P、Q 的"西摩松线"是互相垂直的。

671.　设关于 $\triangle ABC$ 的外接圆上两点 P、Q 的"西摩松线" DE、FG 交于一点 O，则 $\angle FOE$ 等于圆周角 $\angle PCQ$。

解　在四边形 $OECG$ 中，

$\angle OGC+\angle OEC$

$=(\angle OGQ+\angle R)+(\angle OEP+\angle R)$。

但是　$\angle QFC=\angle QGC=\angle R$，

所以 G、F、Q、C 四点共圆。

$\therefore\ \angle FGQ=\angle QCF$。

同理，

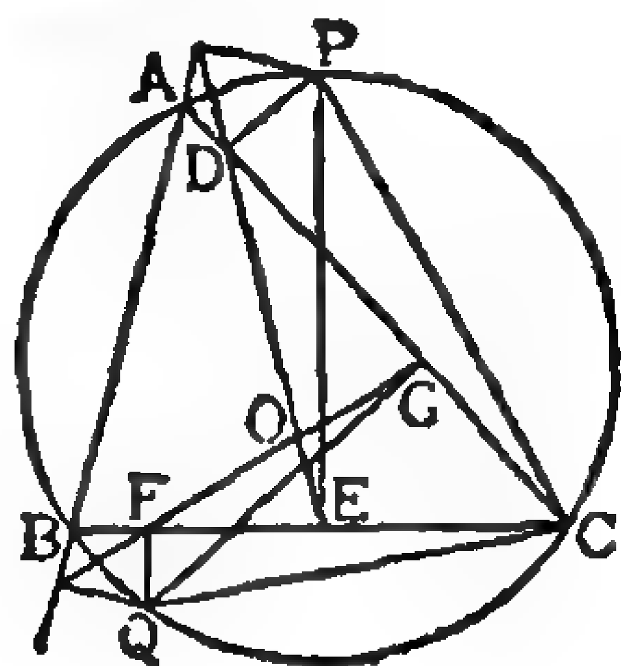
$\angle OEP=\angle PCA$，

$\therefore\ \angle OGC+\angle OEC$

$=\angle QCB$

$+\angle PCA$

$+2\angle R$。



两边加上 $\angle ACB$，得

$$\angle OGC+\angle OEC+\angle GCE$$
$$=\angle PCQ+2\angle R.$$

而在四边形 $OGCE$ 中，

$$\angle OGC+\angle OEC+\angle GCE$$
$$=4\angle R-\angle GOE.$$

所以由前式有

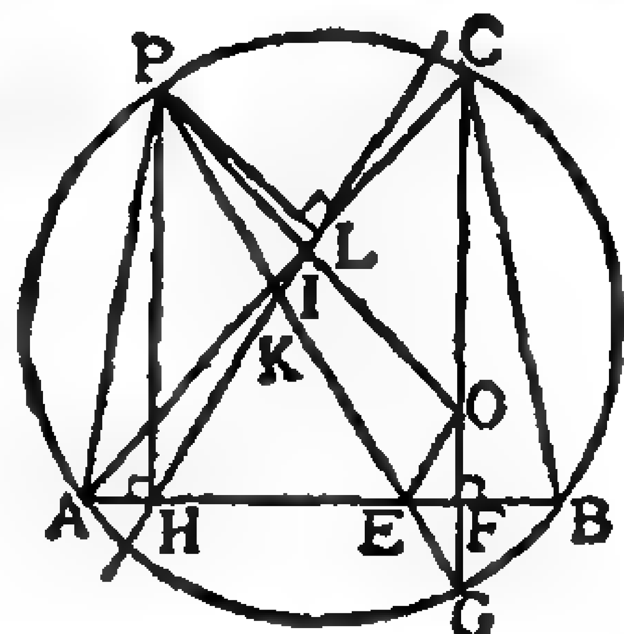
$$4\angle R-\angle GOE=\angle PCQ+2\angle R.$$

$$\therefore\ 2\angle R-\angle GOE=\angle PCQ,$$

故　$\angle EOF=\angle PCQ$。

672.　设 $\triangle ABC$ 的垂心为 O，则外接圆上任意一点 P 和 O 连结的线段 OP，被三角形关于点 P 的"西摩松线"所平分。

解　若从点 P 向 AB、AC 所作垂线分别为 PH、PL，则 HL 是 $\triangle ABC$ 关于 P 的"西摩松线"。



延长 CO，和 AB 及圆周的交点分别为 F、G，PO 和 HL 的交点为 I，PG 和 HL、AB 的交点为 K、E，则 A、H、L、P 四点共圆，并且 $PH\parallel CG$。所以

$$\angle PHK=\angle PAC=\angle PGC=\angle HPK,$$

即　$\angle PHK=\angle HPK$。

因此 K 是直角三角形 PHE 的斜边 PE 的中点。从而

$$\angle KHE=\angle KEH=\angle GEF.$$

但是由问题 **498** 知，

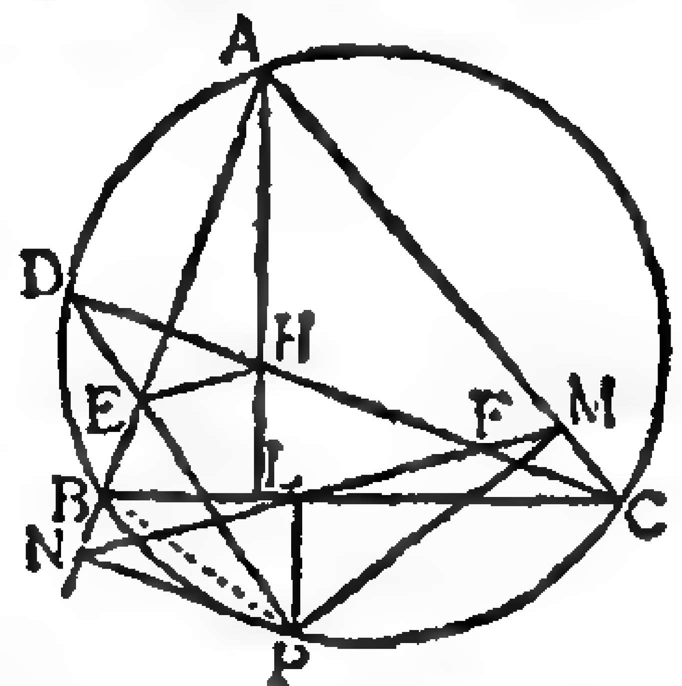
$$OF=GF,\ \angle GEF=\angle OEF.$$

$$\therefore\ \angle KHE=\angle OEF,$$

$$\therefore\ KL\parallel EO.$$

因 K 是 PE 的中点，所以 HL 在 I 点平分 OP。

673.　设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，延长 CH 和外接圆周的交点为 D。在外接圆上取一点 P，若 PD 和 AB 的交点为 E，则 EH 平行于关于点 P 的"西摩松线" NLM。



解　因 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，所以 H、D 关于 AB 是互相对称的（问题 **498**）。

$\therefore \quad \angle DHE=\angle HDE=\angle PBC.$ ①

但 B、N、P、L 共圆，所以

$\angle PBL=\angle PNL.$ ②

并且 PN、CH 都是垂直于 AB，所以互相平行.

$\therefore \quad \angle PNL=\angle DFN.$ ③

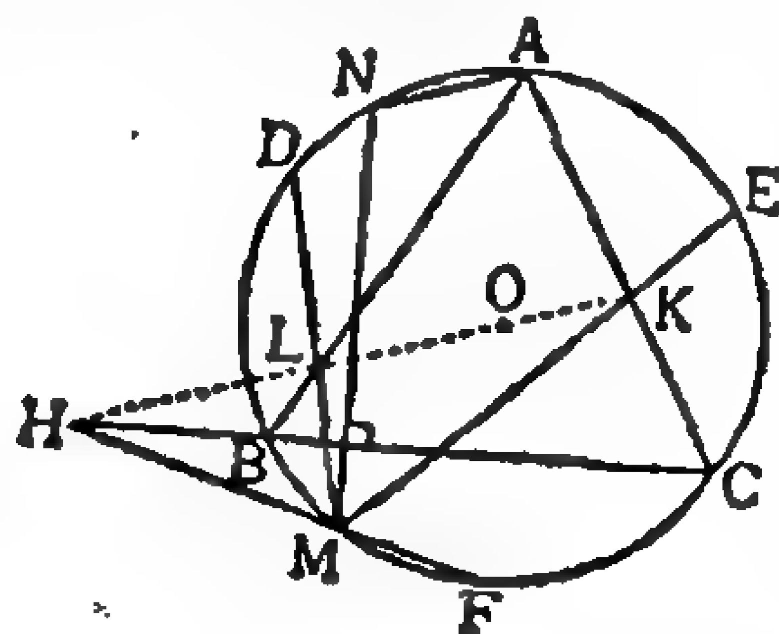
由①、②、③，得

$\angle DHE=\angle DFN.$

$\therefore \quad EH \parallel NLM.$

674. 正三角形 ABC 的外接圆上一点 M 和 $\widehat{AB}$、$\widehat{BC}$、$\widehat{CA}$ 的中点所连结的直线分别与 AB、BC、CA 的交点都在平行于 $\triangle ABC$ 关于 M 的西摩松线的一直线上.

解 设 $\widehat{AB}$、$\widehat{BC}$、$\widehat{CA}$ 的中点分别为 D、F、E，且 MD、ME、MF 和 AB、AC、BC 的交点分别为 L、K、H，由问题 **545**，知 KLH 是过圆心 O 的直线，并且显然有



$\angle DLA=\angle ALO.$ ①

从 M 作 BC 的垂线，和 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于 N，则 AN 是平行于关于 M 的西摩松线(问题 **669**). ②

因 $\triangle ABC$ 是正三角形，D 是 $\widehat{AB}$ 的中点，所以，

$DB\perp BC.$

因而 $\quad DB \parallel MN, \quad \widehat{DN}=\widehat{BM},$

并且 $\quad \widehat{DB}=\widehat{DA},$

于是 $\quad \widehat{DB}+\widehat{DN}=\widehat{AD}+\widehat{BM},$

故

$\angle NAB=\angle DLA.$ ③

(问题 **325**)

由①、③，得 $\quad \angle NAB=\angle ALK,$

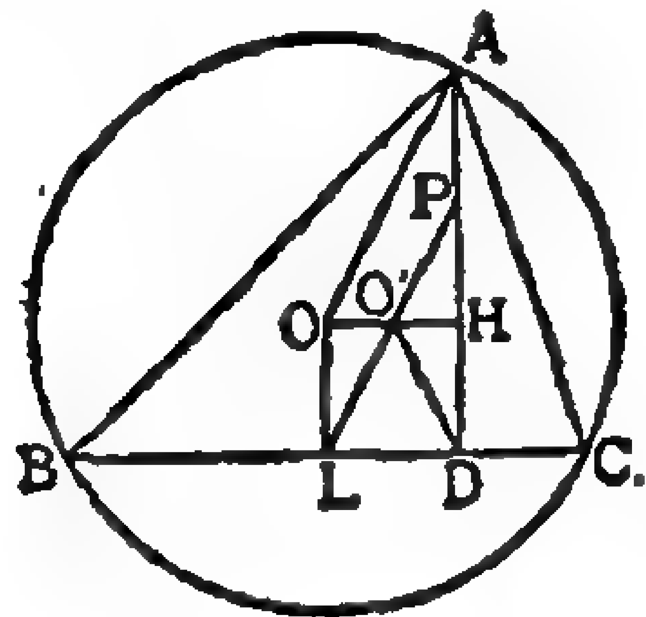
$\therefore \quad AN \parallel KL.$

因此由②，知直线 KLH 平行于 M 的"西摩松线".

675. 在 $\triangle ABC$ 中，如下的九点共圆：三边的中点 L、M、N，从三个顶点向对边所作垂线的垂足 D、E、F，三个顶点和垂心所连结线段的中点 P、Q、S 等九个点.

注 此圆称为九点圆.

解 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，BC 的中点为 L，连结垂心 H 和 A 线段的中点为 P，从 A 向 BC 所作垂线的垂足为 D，由问题 **500**，有 $OL=PH$. 因此，若 PL 和 OH 的交点为 O'，则 $LO'=O'P=O'D$，



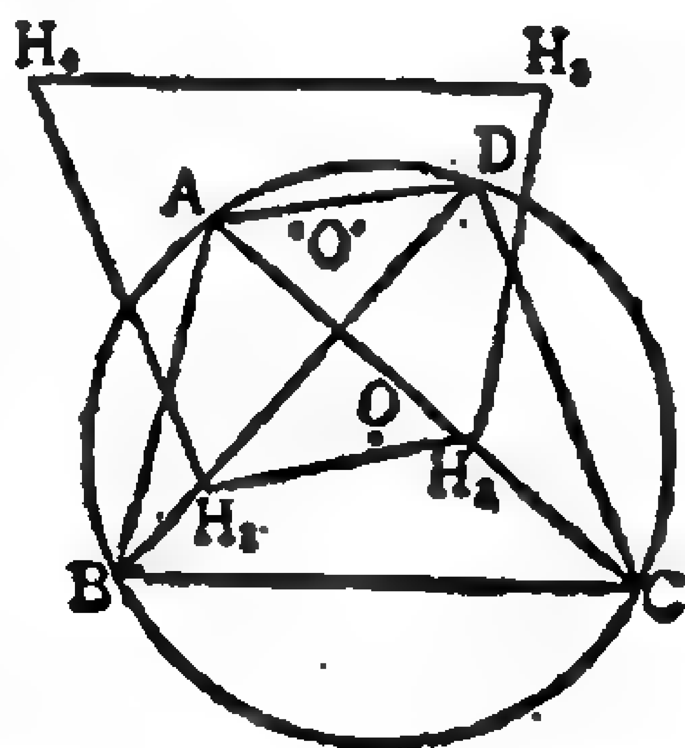
并且 $\quad O'P=\dfrac{1}{2}OA.$

所以 L、P、D 在以定点 O' 为圆心，以 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径的一半为半径的圆周上.

同理，M、Q、E 及 N、F、S 也在同一圆周上.

676. 在圆 O 的内接四边形 $ABCD$ 中，三角形 ABC、BCD、CDA、DAB 的四个垂心 H_1、H_2、H_3、H_4 在同一圆周上. 又这四个三角形的九点圆的圆心，四个三角形的重心都分别在同一圆周上.

解 因四边形 $H_2H_3H_4H_1 \cong$ 四边形 $ABCD$ (问题 **590**). 而四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，所以四边形 $H_2H_3H_4H_1$ 也是圆内接四边形，设这个圆的圆心为 O'.



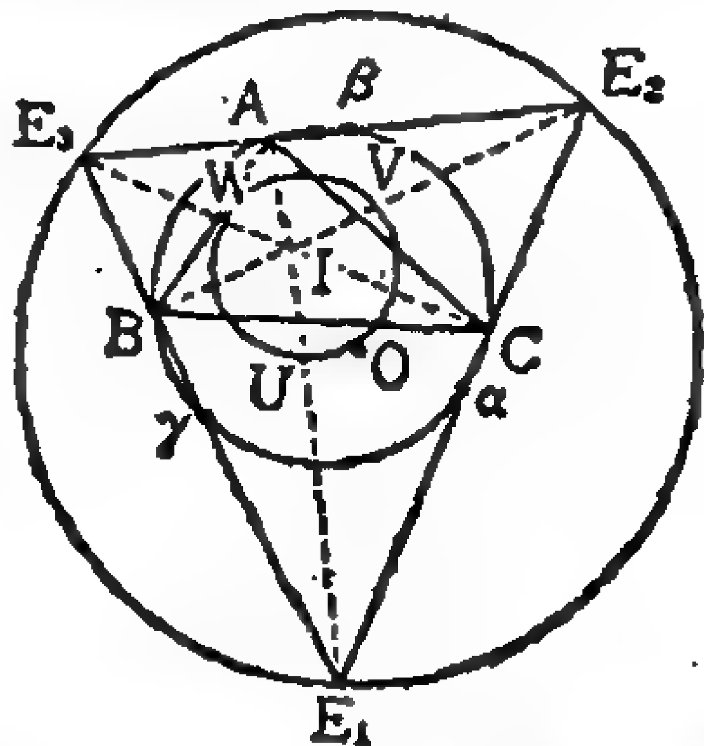
其次，三角形的九点圆的圆心是外心与垂心的中点(上题)，因此四个九点圆的圆心是在以 OO' 的中点 O'' 为圆心，圆 O' 的半径的一半为半径的圆周上.

再次，重心是在外心 O 和垂心的距离之间距 O 点的 $\dfrac{1}{3}$ 处(问题 **501**)，因此四个重心也在以 OO' 为 1:2 的内分点 O''' 为圆心、圆 O' 的半径的 $\dfrac{1}{3}$ 为半径的同一圆周上.

677. 设 $\triangle ABC$ 的内心及三个旁心分别为 I、E_1、E_2、E_3；在 IE_1 上取一点 U 使

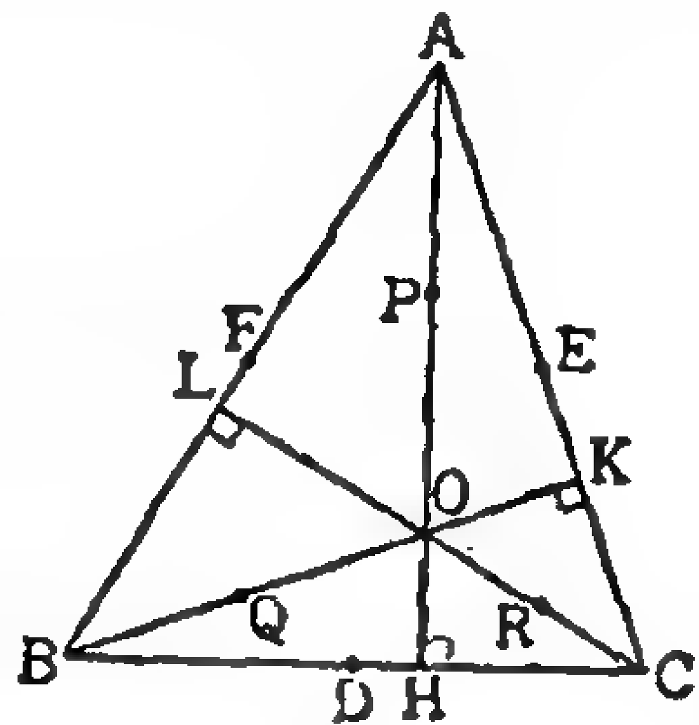
$IU=\frac{1}{4}IE_1$，同样，分别在 IE_2、IE_3 上取得点 V、W；又设 α、β、γ 分别为 $\triangle E_1E_2E_3$ 的各边的中点，则 $\triangle UVW$ 的外接圆平分 $I\!A$、IB、IC、$I\alpha$、$I\beta$、$I\gamma$。

解　因 $AE_1\perp E_2E_3$，$BE_2\perp E_1E_3$，$CE_3\perp E_1E_2$，所以 $\triangle ABC$ 的内心 I 是 $\triangle E_1E_2E_3$ 的垂心，因而 $\triangle ABC$ 的外接圆是 $\triangle E_1E_2E_3$ 的九点圆。又 $\triangle E_1E_2E_3$ 的各边中点 α、β、γ 及 IE_1、IE_2、IE_3 的中点都在九点圆上，所以点 U、V、W 及 $I\!A$、IB、IC、$I\alpha$、$I\beta$、$I\gamma$ 的中点到垂心 I 和 $\triangle ABC$ 的外心 O 所连结的线段的中点的距离，都等于圆 ABC 的半径的一半。所以圆 UVW 过这六条线段的中点。



678.　如果 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心，则三角形 ABC、OAB、OBC、OCA 有相同的九点圆。

解　设 BC、CA、AB、AO、BO、CO 的中点分别为 D、E、F、P、Q、R。若从顶点 A、B、C 向其对边所作垂线的垂足分别为 H、K、L，则 $\triangle ABC$ 的九点圆是过 D、E、F、P、Q、R、H、K、L 的圆。



现考虑关于 $\triangle OBC$ 和它的各边的中点 Q、D、R，则 A 恰好是 $\triangle OBC$ 的垂心，所以 P、F、E 分别是从顶点 O、B、C 到垂心 A 的距离的中点，且 H、K、L 分别是从顶点向其对边所作垂线的垂足，因此 $\triangle ABC$ 的九点圆和 $\triangle OBC$ 的九点圆相同。关于其余的三角形也可以同样证明。

679.　若三角形的九点圆的圆心是连结垂心和外心的线段的中点，其半径等于外接圆半径的一半，则该三角形的外心、垂心、重心及九点圆的圆心在一直线上。

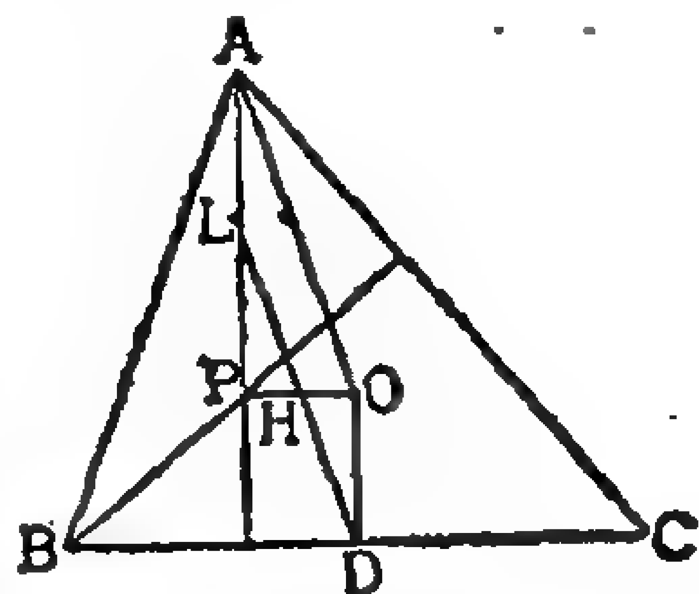
解　设 $\triangle ABC$ 的外心、垂心、重心及九点圆的圆心分别为 O、P、G、H，BC 的中点为 D，AP 的中点为 L，则 LD 是九点圆的直径（问题 **675**）。

但是　　$OD=\frac{1}{2}AP=LP$，

所以若 LD 和 OP 的交点为 H，则

$\triangle OHD\cong\triangle PHL$，　$\therefore$　$LH=HD$。

因而 H 是 $\triangle ABC$ 的九点圆的圆心。又因 $OH=HP$，所以九点圆的圆心是 OP 的中点，$2HL=OA$，即九点圆的半径是外接圆的半径的一半，且 $\triangle ABC$ 的重心 G 在 PO 上（问题 **501**）。因此四个点在一直线上。



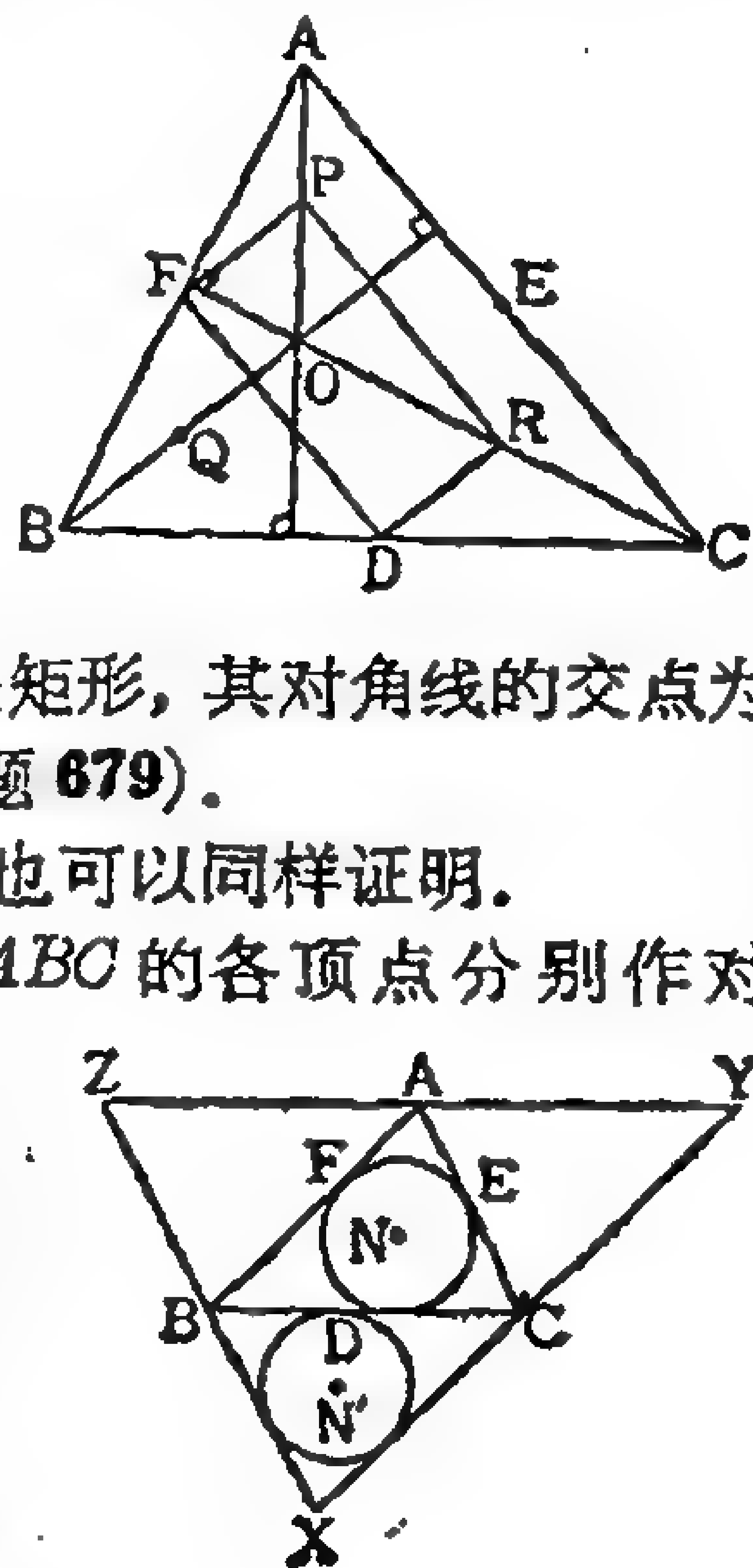
680.　有共同垂心和外接圆的一切三角形都有相同的九点圆。

解　因九点圆的圆心是外心和垂心连线的中点（上题），所以当外心和垂心一定时，则九点圆的圆心也是一定的。又九点圆的半径是外接圆的半径的一半，因此它的半径也是一定的。所以本问题的一切三角形都有相同的九点圆。

681.　设 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心，D、E、F 分别为边 BC、CA、AB 的中点，P、Q、R 分别为 AO、BO、CO 的中点，则四边形 $PFDR$、$PQDE$、$FQRE$ 都是矩形，其对角线的交点都是九点圆的圆心。

解　因 FP、DR 都平行于 BO，且 FD、PR 都平行于 AC，而 $BO\perp AC$，所以四边形 $PFDR$ 是矩形，其对角线的交点为九点圆的圆心（问题 **679**）。

其余两个四边形也可以同样证明。



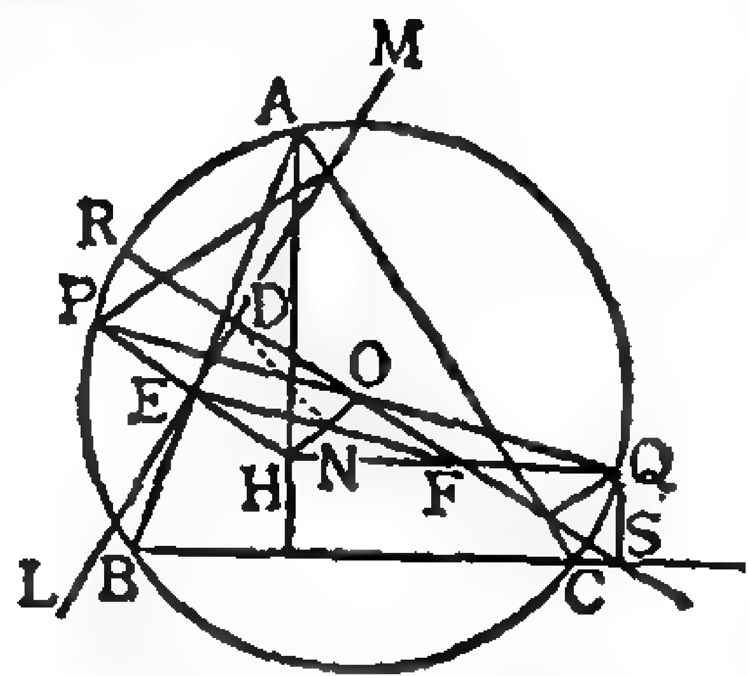
682.　若过 $\triangle ABC$ 的各顶点分别作对边的平行线 YAZ、ZBX、XCY，组成 $\triangle XYZ$，则 $\triangle ABC$ 的九点圆和三角形 XBC、YCA、ZAB 的九点圆分别相切

于 BC、CA、AB 的中点。

解 因 $\triangle ABC$ 和 $\triangle XCB$ 全等，且 $ABXC$ 构成平行四边形，所以若以 BC 的中点 D 为中心，则 $\triangle XBC$ 旋转 $2\angle R$ 就和 $\triangle ABC$ 完全重合，因而这两个三角形的九点圆也完全重合且 D 为公共点。设这两个九点圆的圆心为 N、N'，则 NDN' 成一直线。故圆 N、N' 在 D 点相切。关于 $\triangle YAC$、$\triangle ZAB$ 的九点圆也有同样的结果。

683. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 的直径为 PQ，关于 P、Q 的"西摩松线" LM、RS 的交点为 D，则 D 在九点圆 N 上。

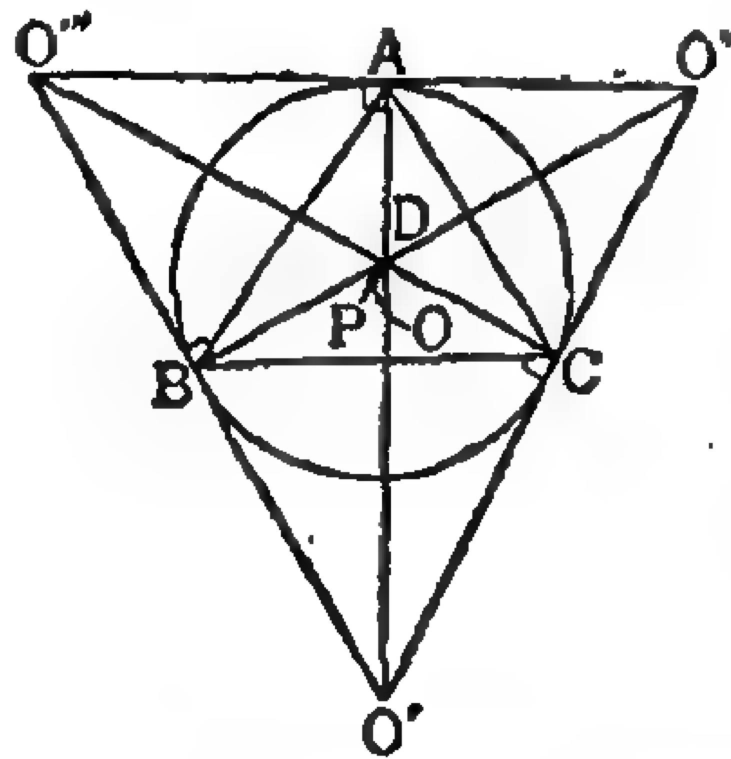
解 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，且 LM、RS 分别过 HP、HQ 的中点 E、F(问题**672**)。因而 $EF\parallel PQ$，但是 N 是九点圆的圆心，所以 $HN=NO$，因此 N 在 EF 上。



又 $PO=QO$，故 $EN=FN$，由问题**670**，有 $LM\perp RS$。所以 $\angle EDF=\angle R$。因此 D 在以 N 为圆心，$EN=\frac{1}{2}PO$ 为半径的圆上。即 D 在九点圆上。

684. $\triangle ABC$ 的内心 D、外心 O 和三个旁心为顶点所组成的 $\triangle O'O''O'''$ 的外心 P 在一直线上。

解 由题意知，D 是 $\triangle O'O''O'''$ 的垂心。圆 O 过其垂线足 A、B、C，所以 O 是 $\triangle O'O''O'''$ 的九点圆的圆心，而且 P 是 $\triangle O'O''O'''$ 的外心，因此 P、O、D 在一直线上(问题**679**)。

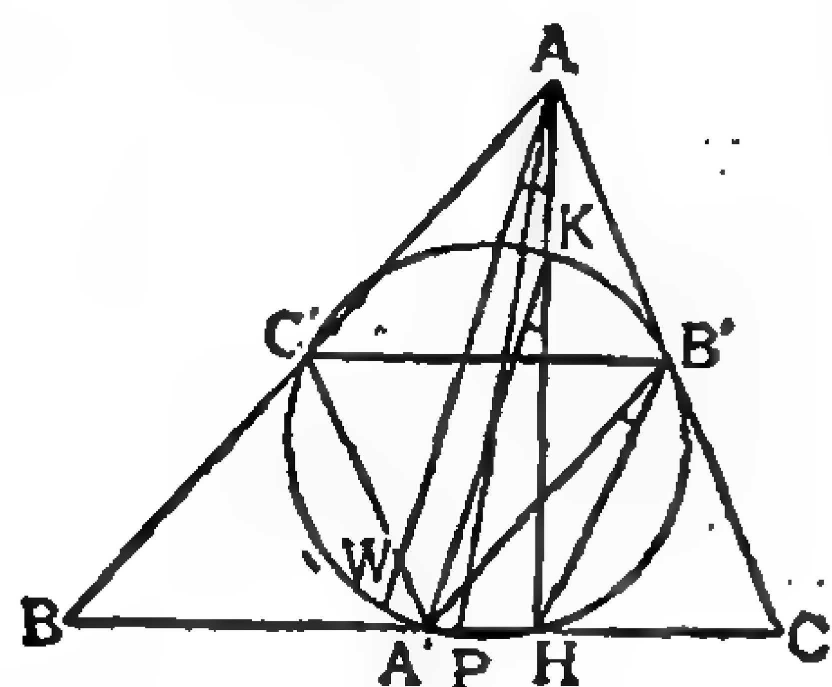


685. 设 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点分别为 A'、B'、C'，从 A 向 BC 所作垂线 AH 和 $\triangle ABC$ 的九点圆相交于 K，再作 AH 关于 $\angle A$ 平分线 AP 对称的线段 AW，则 $KA'\parallel AW$。

解 在图中，

$$\angle A'KH=\angle A'B'H. \quad ①$$

但是 A'、B' 是 BC、CA 的中点，



所以

$$A'B'\parallel AB.$$

于是

$$\angle B'A'C=\angle B.$$

又因

$$\angle AHC=\angle R,$$

所以

$$B'H=B'C.$$

因此 $\quad \angle B'HC=\angle C,$

$$\therefore\quad \angle A'B'H=\angle B'HC-\angle B'A'C=\angle C-\angle B. \quad ②$$

设 $\quad \angle B<\angle C,$

由①、②，得

$$\angle A'KH=\angle C-\angle B. \quad ③$$

$$\because\quad AH\perp BC,\ \angle BAP=\angle CAP,$$

$$\angle WAP=\angle HAP.$$

$$\therefore\quad \angle BAW=\angle HAC=\angle R-\angle C,$$

因此

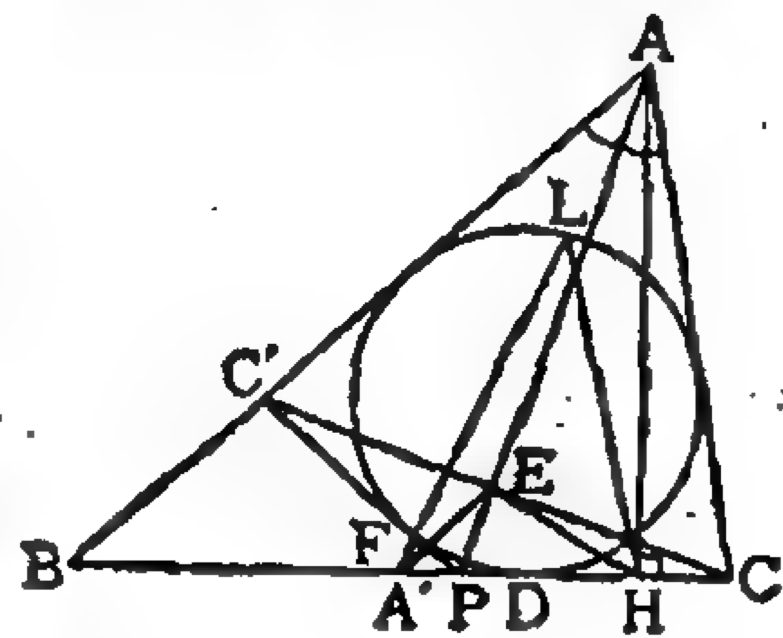
$$\angle WAH=\angle BAC-2(\angle R-\angle C)=\angle C-\angle B. \quad ④$$

于是由③、④，有

$$\angle WAH=\angle A'KH,$$

故 $\quad AW\parallel KA'.$

686. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线为 AP，从 P 作内切圆的切线 PF，其切点为 F；设 BC 的中点为 A'，延长 $A'F$ 和这个圆的另一交点为 L，则 L 在 $\triangle ABC$ 的九点圆上。



解 设内切圆和 BC 的切点为 D，PF 的延长线和 AB 的交点为 C'，则

$$AC=AC'.$$

又设 AP 和 CC' 的交点为 E，则

$$CE=EC',\ AE\perp CC'.$$

作 $\triangle ABC$ 的高 AH，则 A、E、H、C 四点共圆，

$$\therefore\quad \angle EHA'=\angle EAC=\angle EAB=\angle A'EP$$

$$(\because\quad A'E\parallel AB).$$

因而 $A'E$ 和 $\triangle PEH$ 的外接圆相切。

$$\therefore\quad A'E^2=A'P\cdot A'H. \quad ①$$

但是　$A'E=\frac{1}{2}BC'=\frac{1}{2}(AB-AC)$,

又因　$A'D=\frac{1}{2}(AB-AC)$（问题447）.

$\therefore\ A'E=A'D$.

由①，得　$A'P\cdot A'H=A'D^2=A'F\cdot A'L$,

所以 L、F、P、H 四点共圆.

因此　$\angle A'LH=\angle BPC'$.

又　$\angle BPC'=\angle AC'P-\angle B$

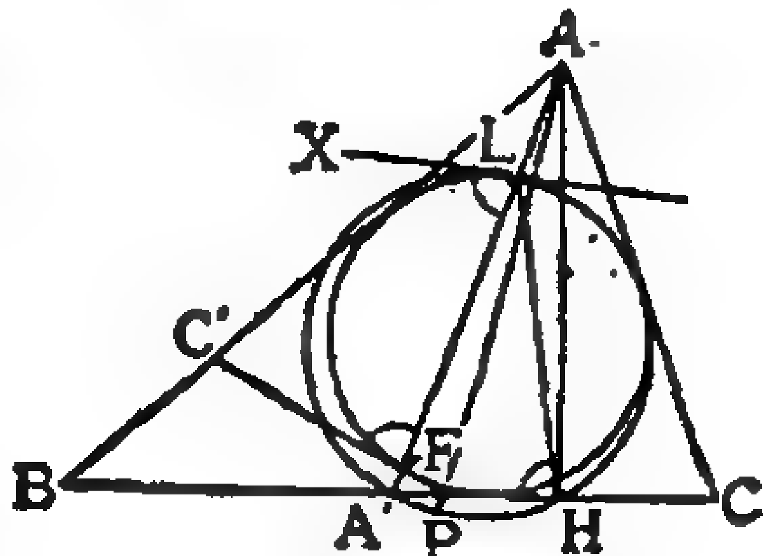
$=\angle C-\angle B$.

$\therefore\ \angle A'LH=\angle C-\angle B$.

但是，由上题知以 $A'H$ 为底边包含 $\angle C-\angle B$ 的圆是九点圆，所以点 L 在九点圆上.

687. $\triangle ABC$ 的内切圆及旁切圆都和此三角形的九点圆相切.　［费尔巴哈定理］

解　作 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线 AP，从点 P 作内切圆的切线 PF，设过 BC 的中点 A' 和点 F 的直线



与内切圆的交点为 L，则由上题知，L 在 $\triangle ABC$ 的九点圆上.　①

过点 L 作内切圆的切线 LX，则

$\angle XLF=\angle C'FL$.

由上题，L、F、P、H 四点共圆，所以

$\angle C'FL=\angle LHP$.

因而　$\angle XLF=\angle LHA'$.

由①，$\triangle A'LH$ 是内接九点圆的三角形，所以，LX 相切于这个九点圆.

即 LX 在点 L 相切于这两圆，因此 $\triangle ABC$ 的内切圆和九点圆相切.

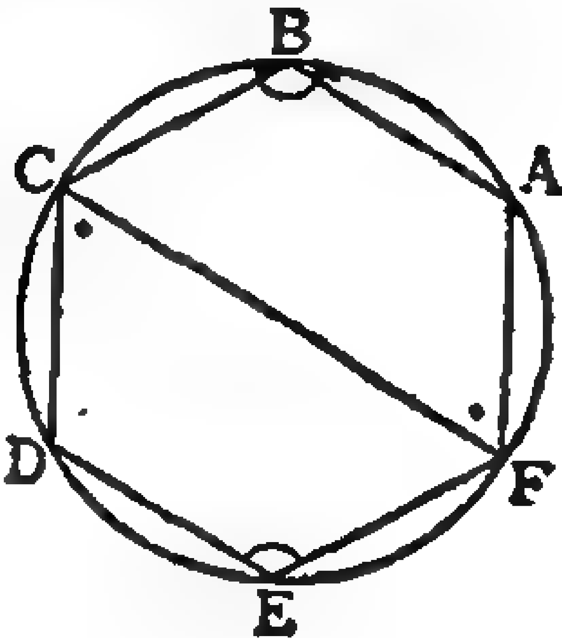
同样可以证明三个旁切圆也同九点圆相切.

11. 圆内接、外切多边形

688. 若圆内接六边形的两组对边分别互相平行，则第三组对边也互相平行.

解　在圆内接六边形 $ABCDEF$ 中，设 $AB\parallel DE$，$BC\parallel EF$，则

$\angle B=\angle E$.



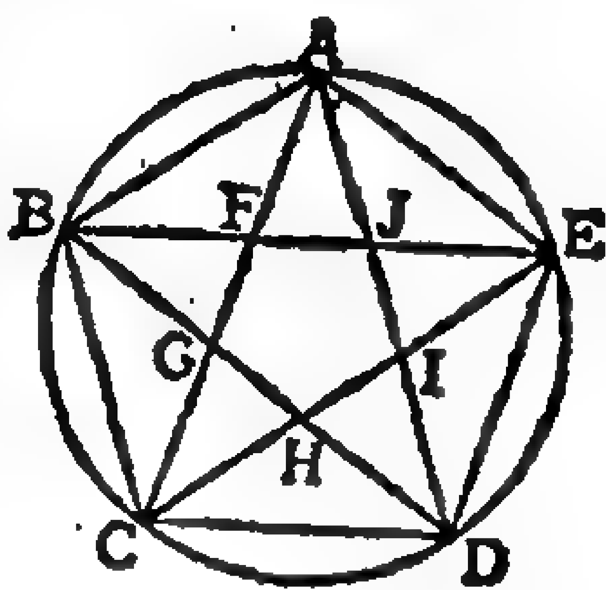
对于这两个角的补角，显然有

$\angle AFC=\angle FCD$,

$\therefore\ CD\parallel AF$.

689. 由正五边形的对角线的交点可以组成等边的五边形.

解　设由正五边形 $ABCDE$ 的对角线的交点组成的五边形为 $FGHIJ$，则



$AB=AE=BC=\cdots$,

$\therefore\ \angle ABE=\angle BAC=\angle ACB$

$=\angle CBD=\cdots$.

因此 $\triangle FAB$、$\triangle GBC$、…、$\triangle JEA$ 等都是全等的等腰三角形，因而 $\triangle BFG$、$\triangle CGH$、…、$\triangle AJF$ 也是全等的. 所以五边形 $FGHIJ$ 是等边的五边形.

690. 正多边形的内角平分线相交于一点，由这点到各顶点的距离相等，并且这点到所有的边等距. 由此正多边形既内接于圆又外切于圆，而且此两圆是同心圆.

解　设正多边形 $ABCD\cdots$ 的两角 A、B 的平分线交于点 O，连结 OC、OD，在 $\triangle OAB$、$\triangle OBC$ 中，$AB=BC$，OB 公共，$\angle OBA=\angle OBC$.

$\therefore\ \triangle OAB\cong\triangle OBC$,

$\therefore\ \angle OAB=\angle OCB$.　①

因为 $ABCD\cdots$ 是正多边形，所以

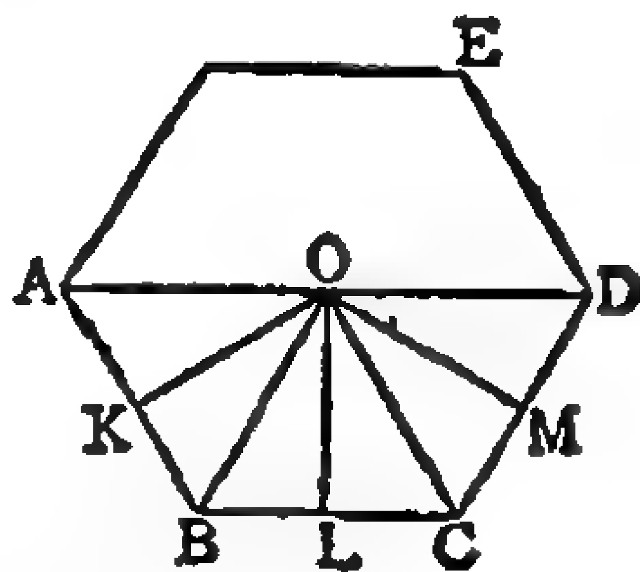
$\angle A=\angle C$.　②

又因 $\angle OAB=\frac{1}{2}\angle A$，所以

由①、②，得　$\angle OCB=\angle OCD$,

即 OC 平分 $\angle C$.

同理，OD、OE、…分别平分 $\angle D$、$\angle E$、…故正多边形的内角平分线相交于一点.



又因　$\angle OAB$、$\angle OBA$ 是 $\angle A$、$\angle B$ 的一半，所以相等. 因此 $OA=OB$.

同理，$OB=OC=OD=\cdots$，即 O 到各顶点等距.

其次，从 O 到 AB、$BC\cdots$ 的距离分别设为 OK、OL、OM、…，在直角三角形 OBK 和

OBL 中，

$$\angle OBK=\angle OBL,\quad OB\text{ 公共},$$

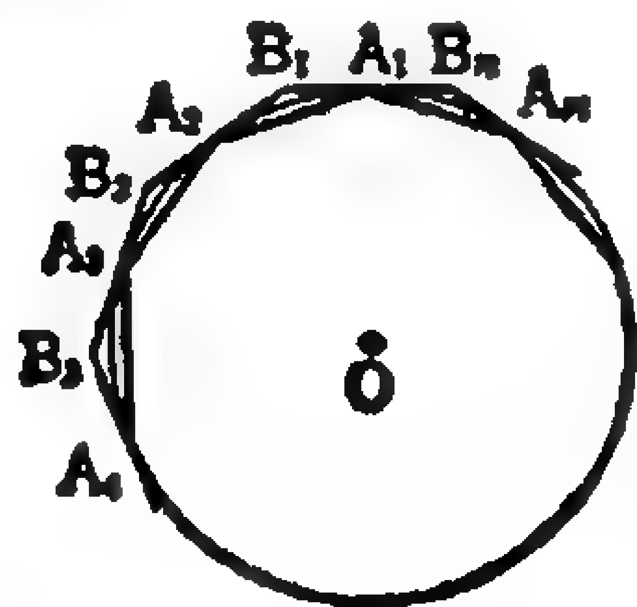
$$\therefore\quad \triangle OBK\cong\triangle OBL,$$

故 $$OK=OL.$$

同理，$OL=OM=\cdots$，即 O 到各边的距离相等。

因此正多边形的外接圆的圆心也是内切圆的圆心且都是 O。这两圆是同心圆。

691. n 等分圆周时，则这些弧所对的弦作成的内接多边形是正多边形，并且过所有的分点所作的切线组成外切多边形也是正多边形。



解 设圆周上的 n 等分点为 A_1、A_2、A_3、…、A_n，在各分点上的切线的交点如图中的 B_1、B_2、…、B_n，则

$$\overset{\frown}{A_1A_2}=\overset{\frown}{A_2A_3}=\cdots=\overset{\frown}{A_nA_1}.$$

$$\therefore\quad A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_nA_1,$$

并且这个内接多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的各内角都是 $\frac{n-2}{n}$ 圆周上的圆周角，所以是等角，因此内接多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正多边形。

其次，在外切多边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 中，令 O 为圆心，则四边形 $OA_1B_1A_2$，由于 $\angle A_1=\angle A_2=\angle R$，所以是圆内接四边形。

$$\therefore\quad \angle B_1=2\angle R-\angle A_1OA_2$$
$$=2\angle R-4\angle R\times\frac{1}{n}$$
$$=2\left(1-\frac{2}{n}\right)\angle R.$$

同理，
$$\angle B_2=\angle B_3=\cdots=\angle B_n=2\left(1-\frac{2}{n}\right)\angle R.$$

因而 $\triangle A_1B_1A_2$、$\triangle A_2B_2A_3$、…、$\triangle A_nB_nA_1$ 都是顶角相等的等腰三角形，所以是全等的。

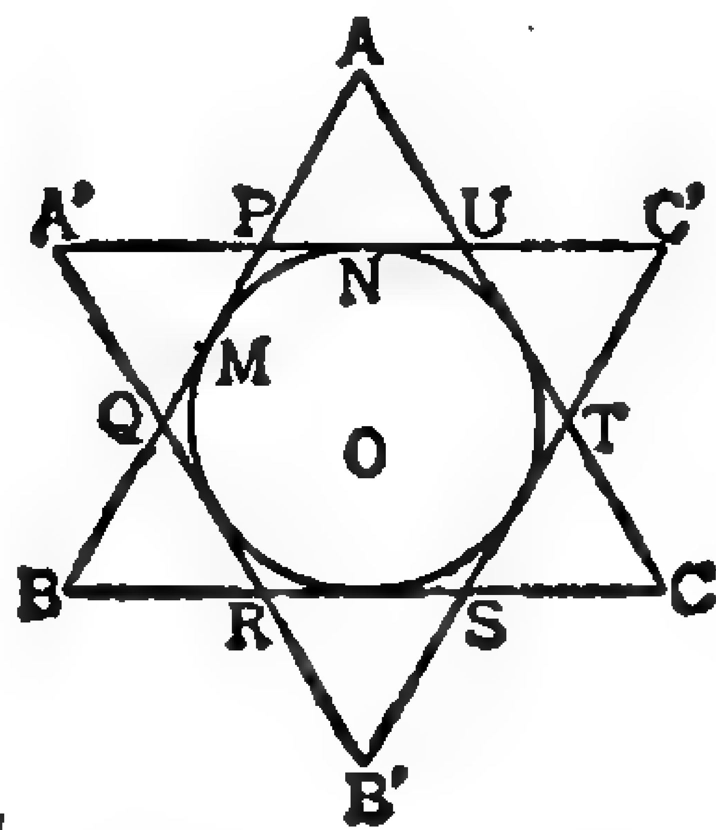
$$\therefore\quad A_1B_1=B_1A_2=A_2B_2=\cdots=A_nB_n=B_nA_1,$$

从而 $$B_1B_2=B_2B_3=\cdots=B_nB_1.$$

因此外切多边形是正多边形。

692. 与同一圆外切的两个等边三角形的边相交组成的六边形是等边的六边形。

解 设圆 O 的两个外切等边三角形 ABC、$A'B'C'$ 的边相交组成如图中的六边形 $PQRSTU$，则在 $\triangle PAU$、$\triangle PA'Q$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle APU=\angle A'PQ$，因此第三个顶点的外角也相等。



$$\therefore\quad \angle PQR=\angle PUT.$$

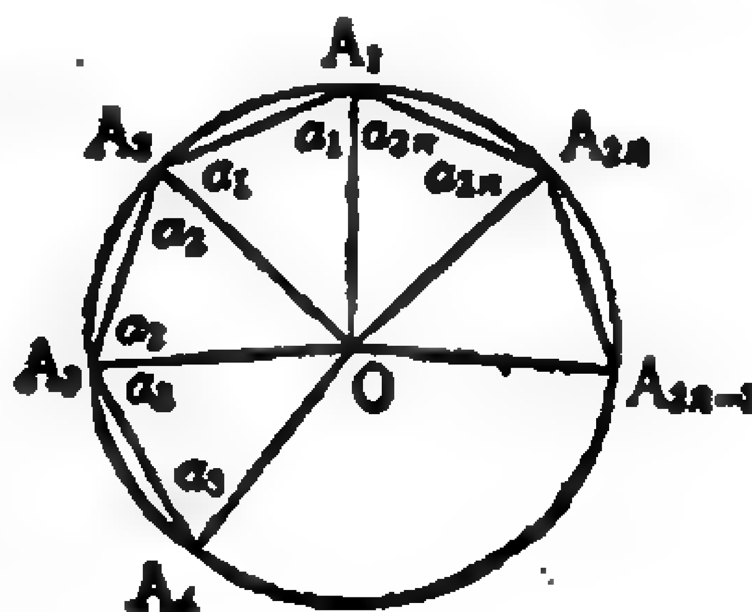
若设 PQ、PU 和圆 O 的切点分别为 M、N，则

$$QM=UN\quad\text{且}\quad PM=PN,$$

所以 $$PQ=PU.$$

同理，显然六边形 $PQRSTU$ 的任意相邻两边相等。即六边形 $PQRSTU$ 是等边的。

693. 若圆内接多边形的边数是偶数，则每隔一角的和等于另外的隔角的和。



解 设圆 O 的内接边数为 $2n$ $(n>1)$ 的多边形为 $A_1A_2\cdots A_{2n}$，分别连结 O 和各顶点，因 $\triangle OA_1A_2$、$\triangle OA_2A_3$、…，底角分别相等，所以都是等腰三角形。

现将这些角表示如下，令

$$\angle OA_1A_2=\angle OA_2A_1=\alpha_1,$$
$$\angle OA_2A_3=\angle OA_3A_2=\alpha_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\angle OA_{2n}A_1=\angle OA_1A_{2n}=\alpha_{2n},$$

则多边形 $A_1A_2A_3\cdots A_{2n}$ 的每隔一角的 n 个角之和为

$$\angle A_1+\angle A_3+\cdots+\angle A_{2n-1}=(\alpha_{2n}+\alpha_1)+(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+(\alpha_{2n-2}+\alpha_{2n-1}),$$

$$\angle A_2+\angle A_4+\cdots+\angle A_{2n}=(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4)+\cdots+(\alpha_{2n-1}+\alpha_{2n}).$$

$$\therefore\quad \angle A_1+\angle A_3+\cdots+\angle A_{2n-1}=\angle A_2+\angle A_4+\cdots+\angle A_{2n}.$$

694. 若边数是偶数的多边形的边都与同一圆相切，则不相邻的边之和相等。

解 设边数为偶数的外切多边形为 $A_1A_2A_3\cdots A_{2n}$，各边与同一圆的切点分别为

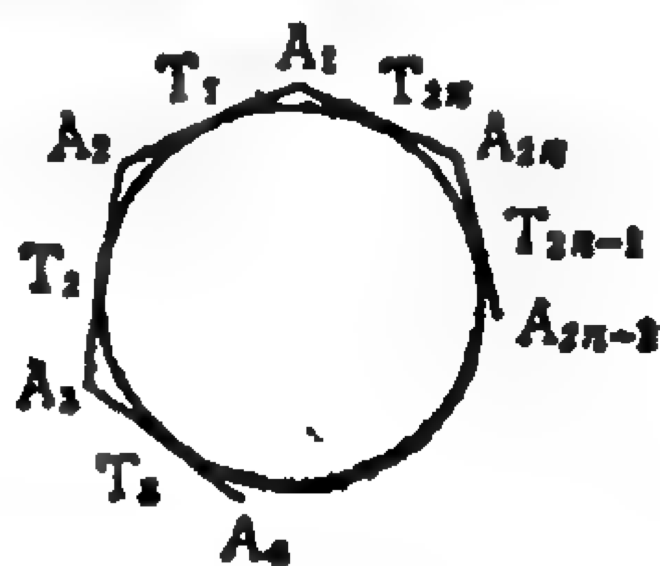
T_1、T_2、…、T_{2n}，则得到如下偶数个等式：

$A_1T_1=A_1T_{2n}$,

$A_2T_1=A_2T_2$,

$A_3T_3=A_3T_2$, …,

$A_{2n}T_{2n-1}=A_{2n}T_{2n}$.



将上式的两边分别相加，得

$$A_1A_2+A_3A_4+\cdots+A_{2n-1}A_{2n}$$
$$=A_2A_3+A_4A_5+\cdots+A_{2n}A_1.$$

695. 在圆内接等角多边形中，若边数为 $2n+1$ 则是正多边形。(其中 n 为正整数)

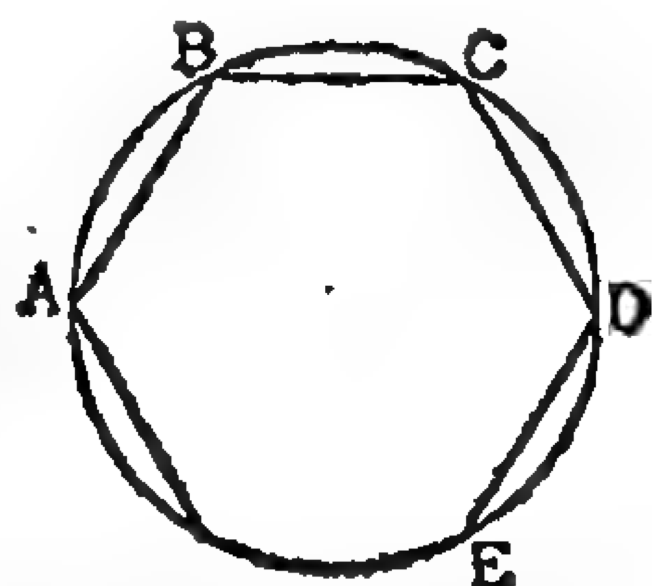
解 设 $ABCD\cdots$ 为圆内接等角多边形，设 $\angle B=\angle C$，则

$$\widehat{ABC}=\widehat{BCD}.$$

若两边去掉公共部分 $\widehat{BC}$，则

$$\widehat{AB}=\widehat{CD}.\quad\therefore\quad AB=CD.$$

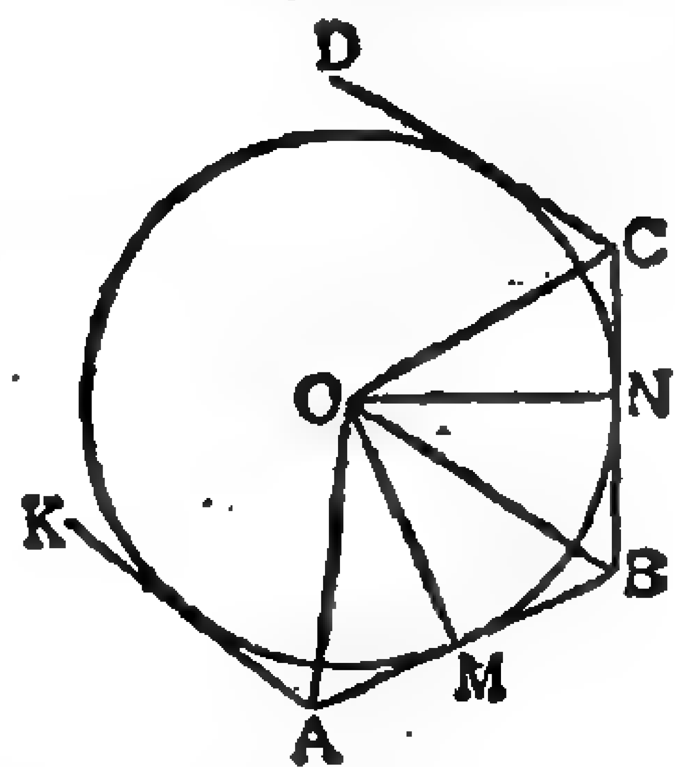
同理，CD 和间隔着的一条边相等。如此继续下去，就可以证明每隔一条边都相等。因此，当多边形的边数是偶数时，进行一周后，又等于 AB；



当多边形的边数为奇数时，进行一周后，就等于 AB 的邻边 BC。因 $2n+1$ 是奇数，所以边数为 $2n+1$ 时，等角的圆内接多边形是正多边形。

696. 在圆外切等边多边形中，若边数为奇数，则是正多边形。

解 设圆外切等边多边形为 $ABCD\cdots K$，且 AB、BC 和圆的切点分别为 M、N，O 为圆心，则



$BA=BC$,

$BM=BN$.

$$\therefore\quad AM=CN.$$

而 $OM=ON$，$\angle OMA=\angle R=\angle ONC$.

$$\therefore\quad \triangle OMA\cong\triangle ONC,$$

从而　　$\angle OAM=\angle OCN$.

但是　　$\angle KAB=2\angle OAM$,

$\angle BCD=2\angle OCN$.

$$\therefore\quad \angle KAB=\angle BCD,$$

即这个多边形的角每隔一个都相等，所以边数是奇数时，和上题相仿，各角都相等，故为正多边形。

697. 设在正五边形 $ABCDE$ 的外接圆周上，$\widehat{AB}$ 的中点为 M，则

$$MA+(\text{半径})=MC.$$

解 因 $\widehat{AEDC}=\frac{3}{5}$ 的圆周，所以

$$\angle AMC=\frac{6}{5}\angle R.$$

连结 C 和圆心 O，且延长 CO 和 MA 的延长线交于点 F，则 OF 过 $\widehat{AE}$ 的中点，因此

$$\angle MCF=\frac{2}{5}\angle R=\angle AOF,$$

从而　　$\angle MFC=\frac{2}{5}\angle R.$

$$\therefore\quad AF=AO,\ MC=MF.$$

故　　$MA+AO=MF=MC.$

698. 作正五边形 $ABCDE$ 的外接圆，若 P 为 $\widehat{AB}$ 上的一点，则

$$PA+PB+PD=PC+PE.$$

解 延长 PB 使 $BF=PA$。设 DF、PC 的交点为 G，则在 $\triangle PAD$、$\triangle FBD$ 中，

$$PA=BF,\ AD=BD,\ \angle PAD=\angle FBD.$$

$$\therefore\quad \triangle PAD\cong\triangle FBD,$$

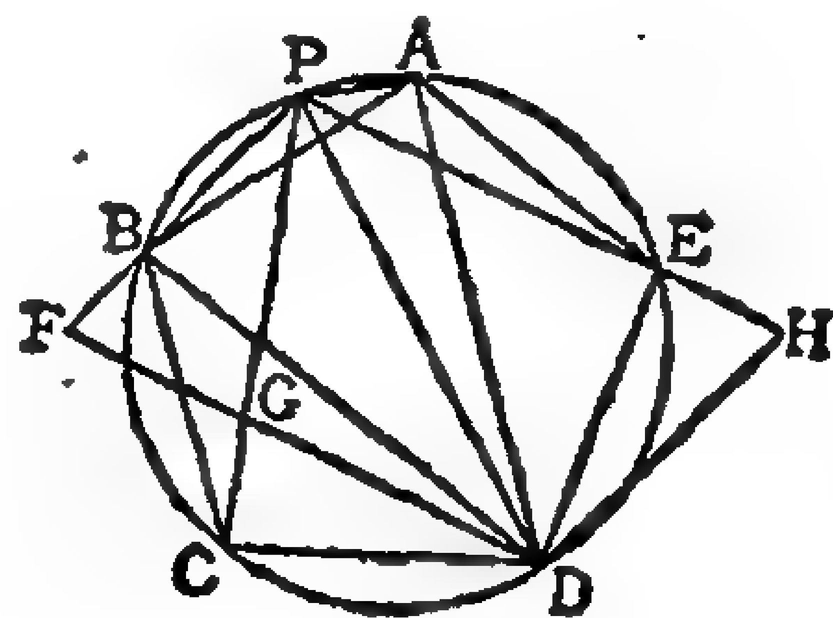
因而　　$\angle F=\angle APD=\frac{4}{5}\angle R,$

$$\angle BPC=\frac{2}{5}\angle R.$$

$$\therefore\quad \angle PGF=\frac{4}{5}\angle R,$$

因而　　$PG=PF.$

其次，延长 PE 使 $PH=PD$，连结 DH，则在 $\triangle GCD$、$\triangle HED$ 中，



$$CD=DE,\ \angle HED=\angle GCD,$$

又因 $\triangle PDH$ 是等腰三角形，

$$\angle DPH=\frac{2}{5}\angle R,$$

所以 $\angle H=\frac{4}{5}\angle R=\angle DGC.$

于是 $\triangle GCD\cong\triangle HED,$

因此 $EH=CG.$

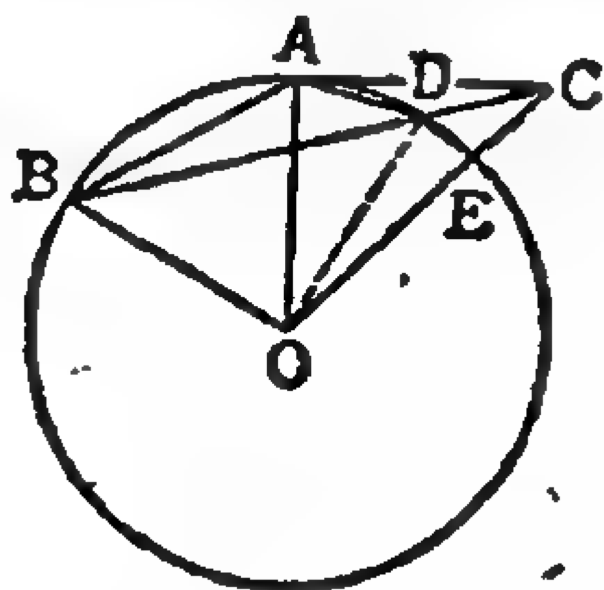
$$\therefore\ PA+PB=PF=PG,$$

$$PD=PH=PE+CG.$$

将这两式的两边分别相加，得

$$PA+PB+PD=PC+PE.$$

699. A 是圆 O 上一点，在圆 O 上另取一点 B，使 $AB=AO$。再过 A 作与 AB 反向的切线 AC，使 $AC=AO$。设 BC、OC 和圆 O 的交点分别为 D、E，则 AB、AD、DE 分别等于圆内接正六边形、正十二边形、正二十四边形的一边。



解 因 $\angle AOB=\frac{2}{3}\angle R$，所以 AB 是圆内接正六边形的一边。

其次，因 $\angle ABC=\angle ACB$ 且 AC 是切线，所以 $\angle ABC=\angle CAD.$

又 $\angle ADB=\angle CAD+\angle ACD=2\angle ACD,$

$\therefore\ \angle AOD=2\angle ABD=2\angle ACD=\angle ADB$

$$=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{3}\angle R.$$

因此 AD 是圆内接正十二边形的一边。

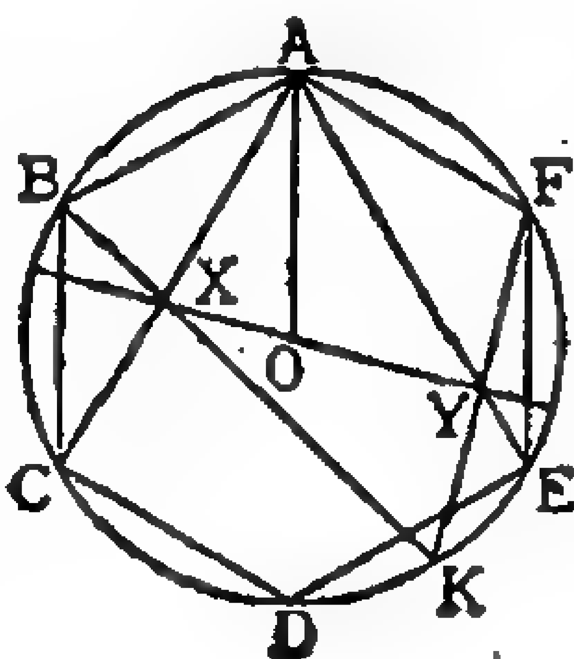
再次，因 $\angle OAC=\angle R$，$AO=AC$。

因此 $\angle AOE=\frac{1}{2}\angle R,$

$$\therefore\ \angle DOE=\frac{1}{2}\angle R-\frac{1}{3}\angle R=\frac{1}{6}\angle R.$$

故 DE 是圆内接正二十四边形的一边。

700. 设过正六边形 $ABCDEF$ 的中心 O 的直线和 AC、AE 的交点为 X、Y，则 BX、FY 的交点在外接圆上。



解 因

$\triangle ABX\cong\triangle AOX,$

$\therefore\ \angle ABX$

$=\angle AOX.$ ①

又因

$\triangle AFY\cong\triangle AOY,$

$\therefore\ \angle AFY=\angle AOY.$ ②

将①、②等式两边分别相加，得

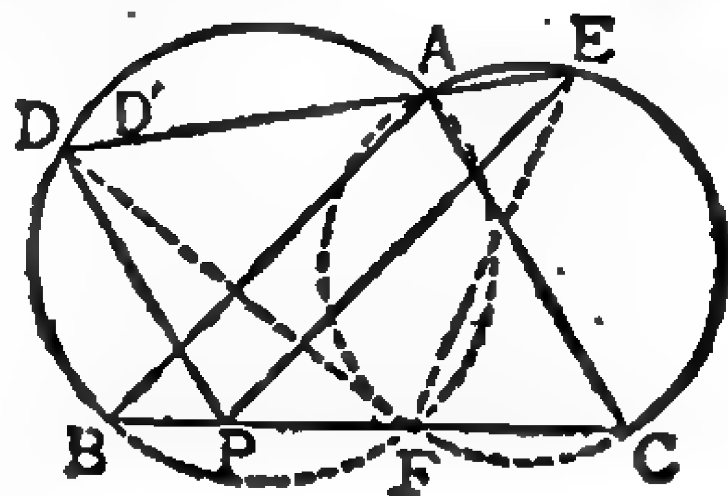
$\angle ABX+\angle AFY$

$=\angle AOX+\angle AOY=2\angle R.$

所以 BX、FY 的交点 K 在 A、B、F 的定圆 O 上。

12. 杂题

701. 设 P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的任意一点。过点 P 作 $PD\parallel AC$、$PE\parallel AB$，若直线 PD、PE 和以 AB、AC 为直径在三角形的外侧所作半圆的交点分别为 D、E，则 D、A、E 在一直线上。



解 两圆另外的交点 F 在 BC 上，连结 EA，并且延长和圆 AFB 的交点为 D'，若能证明 D 和 D' 重合就好了。

因 $AB\parallel PE$，所以

$$\angle D'EP=\angle D'AB=\angle D'FB,$$

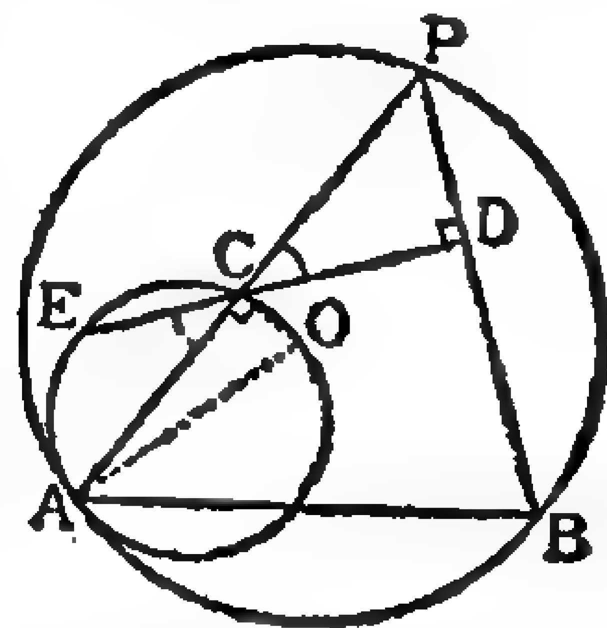
因此 E、F、P、D' 四点共圆。

$$\therefore\ \angle D'PB=\angle D'EF=\angle C,$$

因而 $PD'\parallel AC.$

故，D 和 D' 重合。

702. 设 AB 为定圆的定弦，P 为定圆上的任意一点，则过 PA 的中点 C 且垂直于 PB 的直线 CD 过定点。



解 设 O 为定圆的圆心。因为 $\angle ACO=\angle R$，所以点 C 在以 AO 为直径的定圆上。若 DC 的延长线和此圆的交点为 E，则

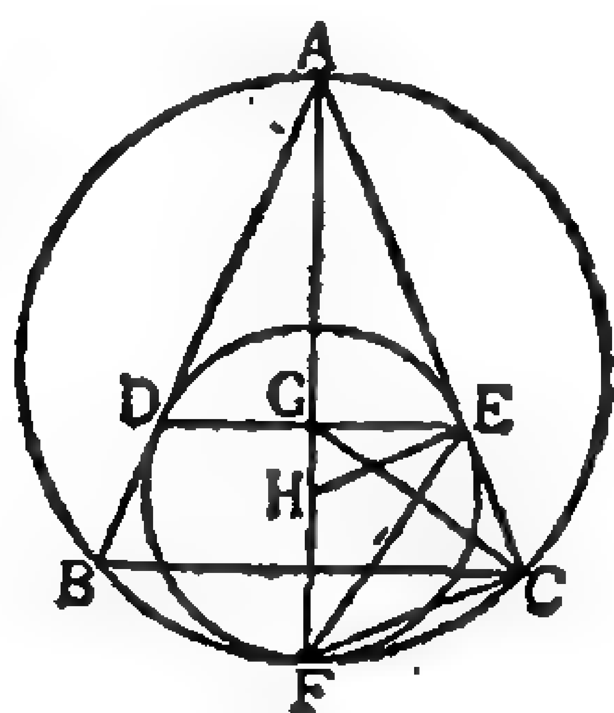
$\angle ACE=\angle PCD=\angle R-\angle CPD$（为定角）。

故 E 为定点（若点 P 取在劣弧上时，则 E 也是定点）。

703. 一圆和等腰三角形 ABC 的两边 AB、AC 分别相切于点 D、E，和 $\triangle ABC$ 的外接圆相切于点 F，则 $\triangle ABC$ 的内心 G 和 D、E 在一直线上。

解 设 AF、DE 的交点为 G，圆 DEF 的

圆心为 H，则 H 在 AF 上，并且 AF 是外接圆的直径。



$\therefore\quad HE \parallel FC$.

又因

$DE \parallel BC$, ①

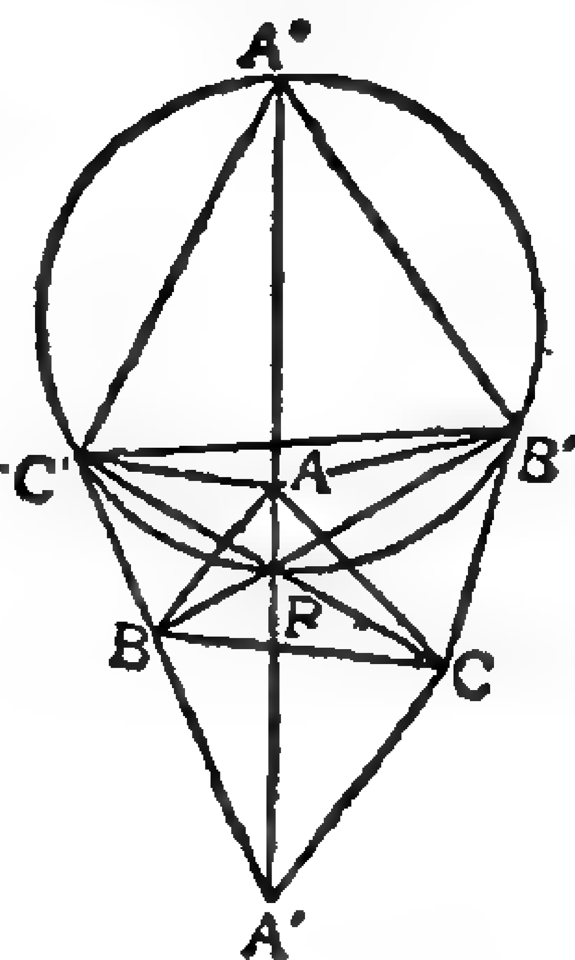
并且 G、F、C、E 四点共圆。

$\therefore\quad \angle GCE = \angle GFE = \angle HEF = \angle EFC$
$= \angle EGC = \angle GCB$(由①得)。

因此 G 是 $\angle BAC$、$\angle ACB$ 的平分线的交点，所以是 $\triangle ABC$ 的内心，且和 D、E 在一直线上。

704. 在 $\triangle ABC$ 各边的外侧作正三角形 BCA'、CAB'、ABC'，以 $B'C'$ 为一边在其外侧作正三角形 $B'C'A''$。若 BB'、CC' 的交点为 P，则 A''、A、P、A' 在一直线上。

解 由问题 **550** 知，点 A、P、A' 在一直线上，



$$\angle C'PB' = \frac{4}{3}\angle R,$$

而且

$$\angle C'A''B' = \frac{2}{3}\angle R,$$

所以 A''、C'、P、B' 四点共圆。

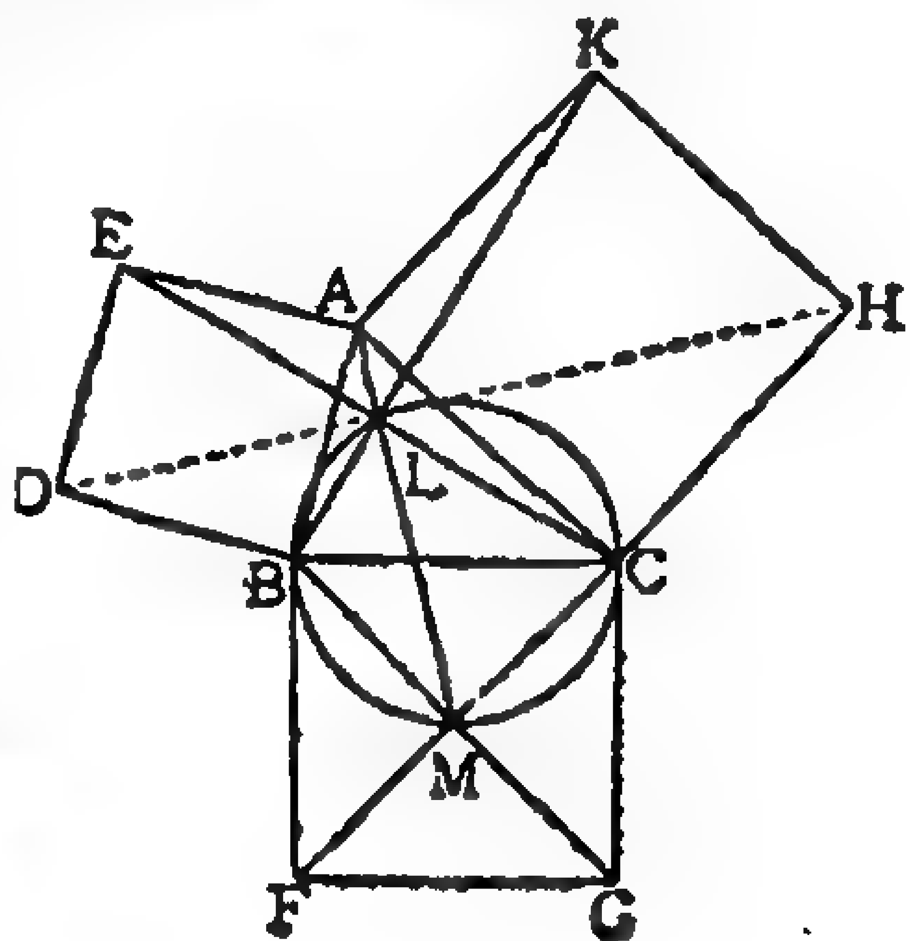
若连结 $A''P$，则

$$\angle A''PB' = \angle A''C'B' = \frac{2}{3}\angle R.$$

但是
$$\angle APB' = \frac{2}{3}\angle R,$$

故，$A''P$ 和 AP 重合，即点 A''、A、P、A' 在一直线上。

705. 在 $\triangle ABC$ 各边的外侧作正方形 $ABDE$、$BCGF$、$ACHK$，若 BK、CE 的交点为 L；BG、CF 的交点为 M，则 A、L、M；D、L、H 分别在一直线上。



解 由问题 **238** 知，

$\angle BLC = \angle R$、 又 $\angle BMC = \angle R$,

所以 B、M、C、L 四点共圆。而 $BM = CM$，因此 LM 平分 $\angle BLC$。

因 $\angle KLC = \angle R = \angle KHC$,

所以 K、A、L、C、H 五点共圆。连结 AH，则

$$\angle ALK = \angle AHK = 45°.$$

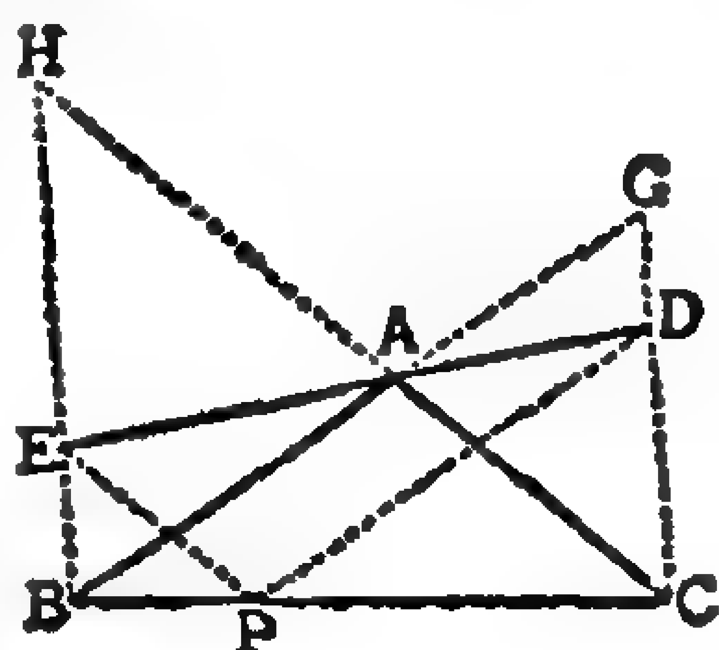
同理， $\angle ALE = 45°$,

所以 AL 平分 $\angle ELK$。故点 A、L、M 在一直线上。

其次，$\angle ELB = \angle R$，$\angle EDB = \angle R$，所以 E、D、B、L 四点共圆，而且 $DB = DE$，因此 LD 平分 $\angle BLE$。

同理，LH 平分 $\angle CLK$。故点 D、L、H 在一直线上。

706. 从 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点 P，作 AB、AC 的平行线，和过 C 及 B 的任意平行线分别相交于 D、E，则 D、A、E 在一直线上。



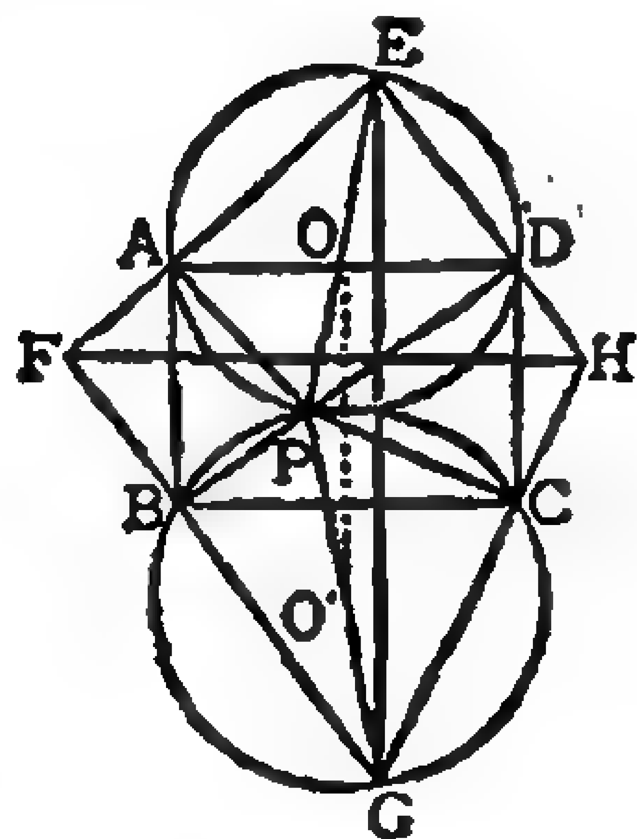
解 设 BA、CA 的延长线和 CD、BE 的延长线分别相交于 G、H，则

$$\frac{BE}{EH} = \frac{BP}{PC} = \frac{DG}{CD}.$$

因此，E、A、D 在一直线上。

707. 设 P 是矩形 $ABCD$ 内的一点，过各顶点所作垂直于 PA、PB、PC、PD 的直线组成四边形 $EFGH$，则 $EG \perp FH$。

解 因为 $\angle EAP = \angle R = \angle EDP$，所以，以 EP 为直径的圆过 A、D。



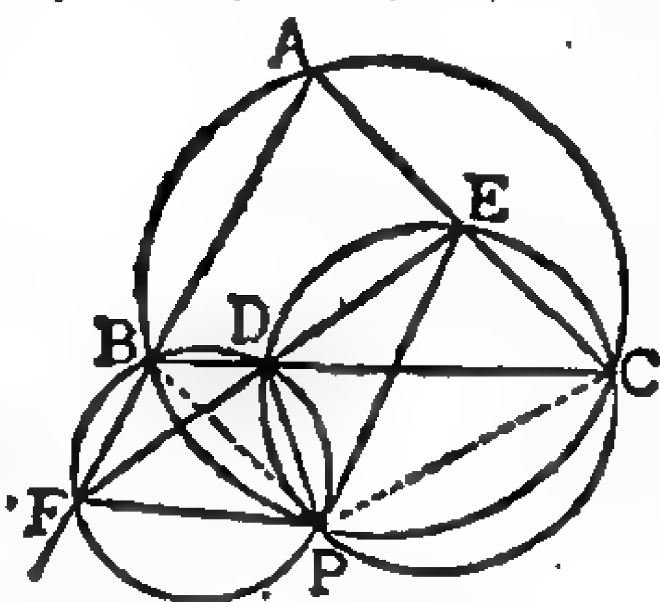
同理，以 GP 为直径的圆过 B、C。设圆 $APDE$ 的圆心为 O，圆 $BGCP$ 的圆心为 O'，则 O、O' 分别在 AD、BC 的垂直平分线上。所以 OO' 垂直平分 AD 及 BC。而 $OO' \parallel EG$， $\therefore\quad EG \parallel AB$.

同理， $FH \parallel AD$,

故 $EG \perp FH$.

708. 由 $\triangle ABC$ 外一点 P 向三边 BC、

CA、AB 分别引线段 PD、PE、PF，若 PD 与 BC、PE 与 CA、PF 与 AB 的同向夹角相等，且 D、E、F 在一直线上，则点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上。



解 设 $\angle PDC=\angle PEC=\angle PFB$，

则 B、F、P、D；D、P、C、E 分别在同一圆周上。

$$\therefore\quad \angle BPF=\angle BDF$$
$$=\angle EDC=\angle EPC.$$

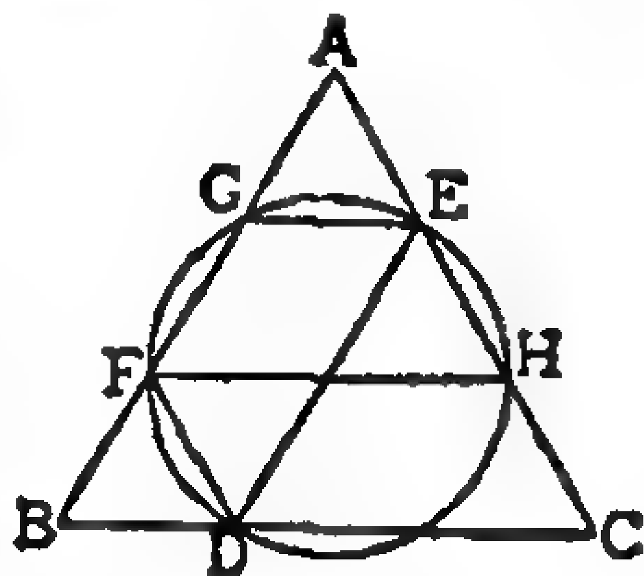
因此 $\qquad \angle BPC=\angle EPF$。

又因 $\angle BFP=\angle PEC$，所以 A、F、P、E 在同一圆周上。于是 $\angle A+\angle EPF=2\angle R$，

$$\therefore\quad \angle A+\angle BPC=2\angle R.$$

故 A、B、P、C 在同一圆周上，即点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上。

709. 从正三角形 ABC 的一边 BC 上的任一点 D 所作 AB、AC 的平行线和 AC、AB 的交点分别为 E、F，若圆 DEF 和 AB、AC 的交点分别为 G、H，则



$$EG\parallel FH\parallel BC。$$

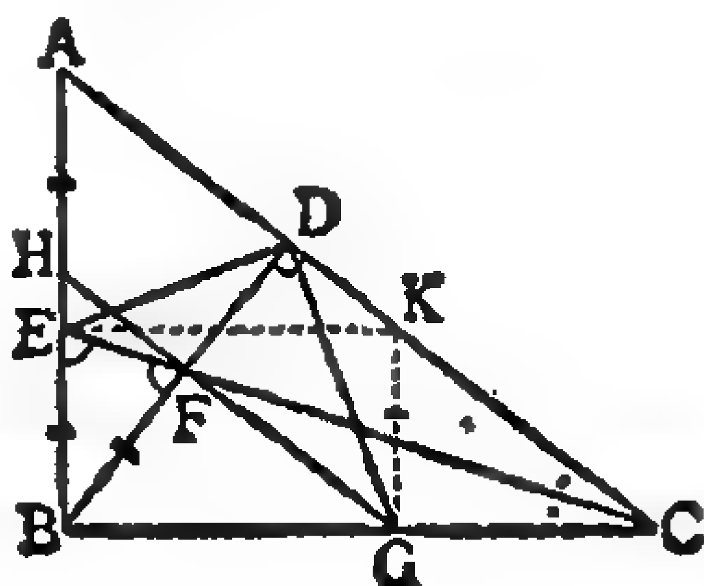
解 因为

$$\angle AGE=\angle EDF=\angle A=60^\circ=\angle B,$$
$$\therefore\quad EG\parallel BC.$$

其次，

$$\angle EHF=\angle EDF=\angle A$$
$$=60^\circ=\angle C,$$
$$\therefore\quad FH\parallel BC.$$

710. 从直角三角形 ABC 的直角顶点 B 作斜边 AC 的垂线 BD，设 $\angle C$ 的平分线和 AB、BD 的交点分别为 E、F，过 F 所作 AC 的平行线和 BC 的交点为 G，则



$$\angle EDG=\angle R.$$

解 设 GF 和 AB 的交点为 H，则 $AH=EB$(问题132)。作 $GK\parallel AB$，

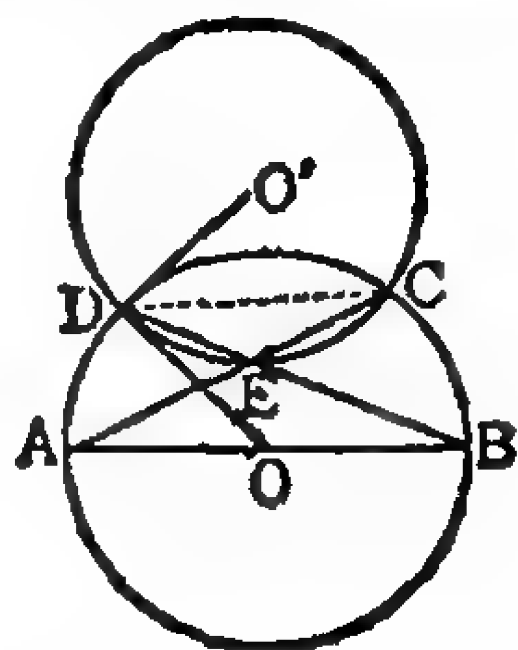
则 $\qquad GK=AH,$

所以 $\qquad KG=BE,$

四边形 $EBGK$ 是矩形。因此以 BK 为直径的圆过 E、G。并且 $BD\perp DC$，从而点 D 也在这个圆周上。

故 $\quad \angle EDG=\angle EKG=\angle R.$

711. 从定圆 O 的定直径 AB 的两端点分别作弦 AC、BD，若其交点为 E，则圆 DEC 和圆 O 互相垂直。



解 因为

$\angle ACD=\angle B=\angle BDO$，

所以圆 CDE 和 OD 相切于点 D。若设圆 DEC 的圆心为 O'，

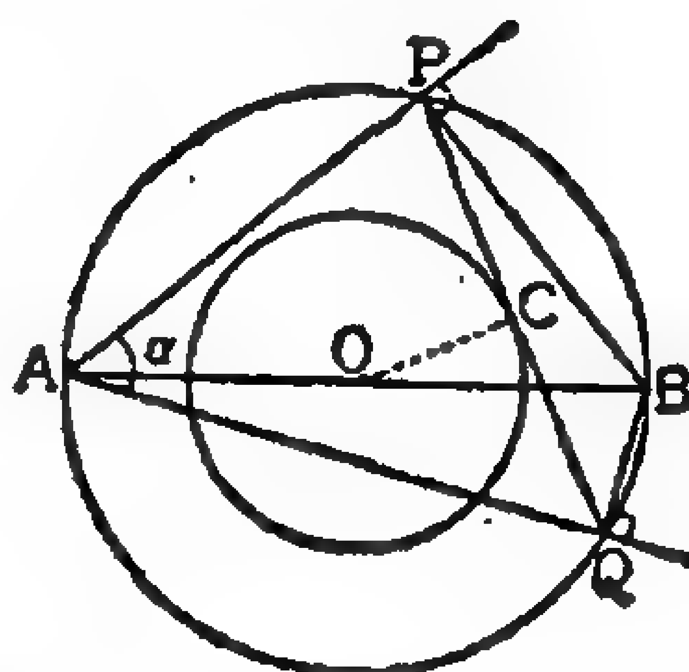
则 $\quad \angle ODO'=\angle R.$

因此两圆 O、O' 互相垂直。

712. 从一定点 A 所作两动直线 AP、AQ 的夹角等于定角 α，从另一定点 B 作此两边的垂线 BP、BQ，则 PQ 切于定圆。

解 因为 $\quad \angle APB=\angle R=\angle AQB$，

所以 P、Q 在以 AB 为直径的定圆周上。因 $\angle PAQ$ 是一定角，所以 PQ 为定长的弦，因此 PQ 到这个圆的圆心即 AB 的中点的距离一定，



设为 OC。则 PQ 是和以 O 为圆心，OC 为半径的定圆相切。

713. 固定 $\triangle ABC$ 的边 BC，当 $\angle A$ 一定时，若 $BE\perp AC$，$CD\perp AB$，则 DE 切于定圆。

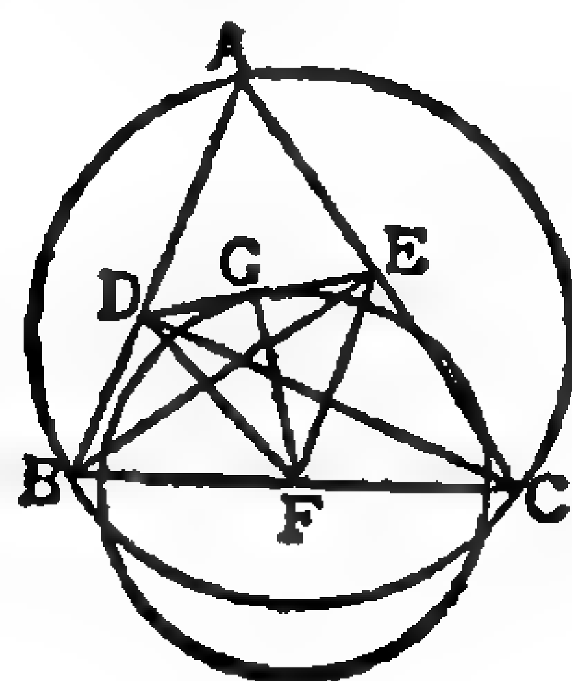
解 设 BC 的中点为 F，则

$$\angle DFE=2\angle DCE$$
$$=2\cdot(\angle A\text{ 的余角})=\text{一定}.$$

所以 DE 的长是一定的。因 F 是直角三角形 DBC、EBC 斜边的中点，所以

$$DF=\frac{1}{2}BC=EF.$$

因此 $\triangle FDE$ 的形状和大小是一定的。设 DE 的中点为 G，则 FG 是定长，且 $FG\perp DE$，故 DE 和以 F 为圆心，定



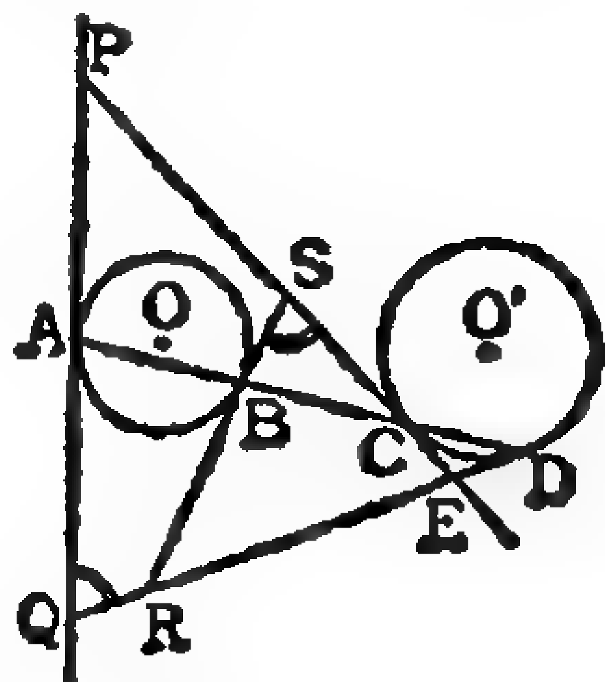
长 FG 为半径的圆相切.

714. 两圆 O、O' 的割线 $ABCD$ 与两圆的交点分别为 A、B、C、D, 设在点 A 的切线和在点 C、D 的切线的交点分别为 P、Q, 在点 B 的切线和 DQ、CP 的交点分别为 R、S, 则四点 P、Q、R、S 共圆.

解 因为 $\angle PAD$ 是 $\triangle AQD$ 的外角, 所以

$$\angle Q=\angle PAD-\angle D. \quad ①$$

但是



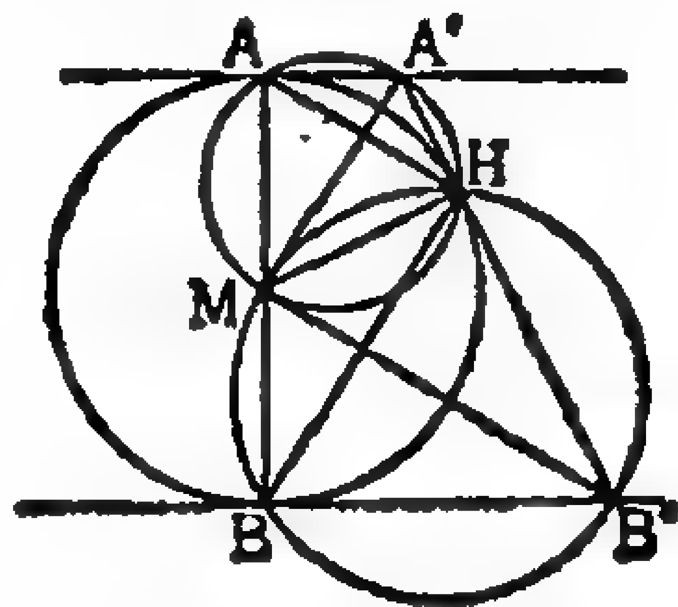
$$\angle PAD=\angle SBA,$$
$$\angle D=\angle SCB.$$

所以由①, 有

$$\angle Q=\angle SBA-\angle SCB=\angle BSC.$$

因此 P、Q、R、S 四点共圆.

715. 设平行线 AA'、BB' 的公垂线 AB 的中点为 M, 以 M 为直角的顶点所作成的直角三角形 $MA'B'$, 另两顶点 A'、B' 分别在两平行线上, 则斜边 $A'B'$ 切于一定圆.



解 若从点 M 作 $A'B'$ 的垂线, 其垂足为 H, 则四边形 $MBB'H$、$MAA'H$ 分别是以 MB'、MA' 为直径的圆内接四边形.

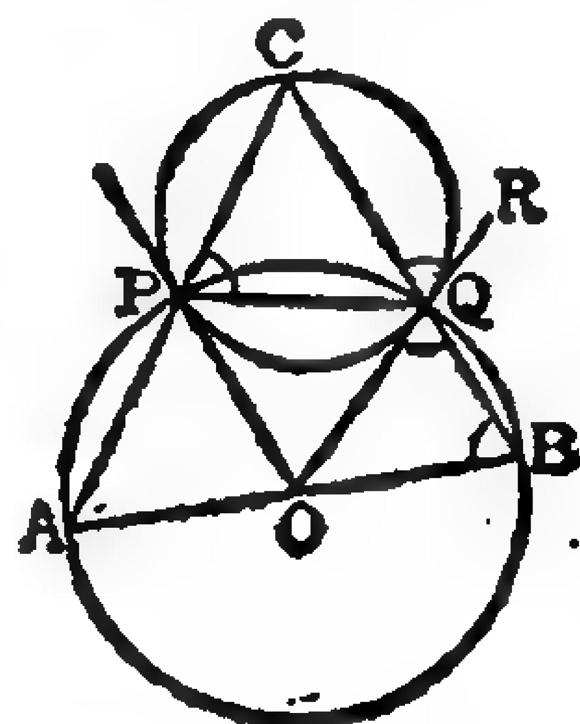
因此 $\angle MBH=\angle MB'H$,
$\angle MAH=\angle MA'H$.

但是 $\angle MB'H+\angle MA'H=\angle R$,

$\therefore \angle MBH+\angle MAH=\angle R$.

从而 $\triangle ABH$ 是直角三角形, 点 M 是斜边 AB 的中点, 有 $MH=MA$, 且 $MH\perp A'B'$. 所以 $A'B'$ 切于以 M 为圆心, MA 为半径的定圆.

716. 设 AB 为圆 O 的直径, C 为任意一点, 连结 AC、BC 的直线和圆 O 的交点分别为 P、Q, 则 OP、OQ 相切于圆 CPQ.



解 延长 OQ 得 QR, 因 $\triangle OBQ$ 是等腰三角形, 所以

$$\angle B=\angle OQB=\angle CQR.$$

又因 $APQB$ 是圆内接四边形, 所以

$$\angle B=\angle QPC,$$

因而 $\angle CQR=\angle QPC$.

因此 QR 即 OQ 在 Q 点切于圆 CPQ.

同理, OP 也切于圆 CPQ.

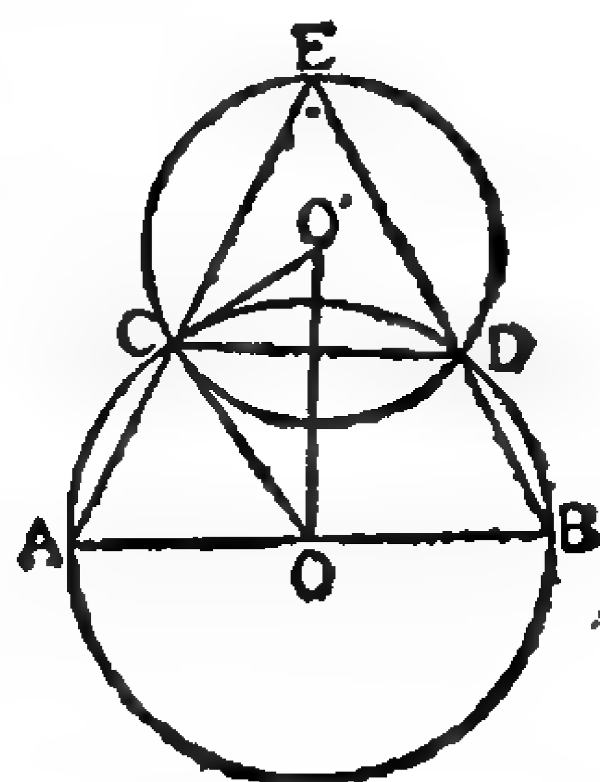
717. 设 AB 是定圆 O 的定直径, CD 是定长的动弦, AC、BD 或其延长线的交点为 E, 则 $\triangle ECD$ 的外接圆的圆心 O' 在定圆上.

解 因为 AB 是定直径, CD 是定长的弦, 所以 $\angle CAD=$定角(α). 于是

$$\angle E=\angle R-\alpha=\angle CO'O.$$

但由上题, 显然 OC 与圆 O' 相切,

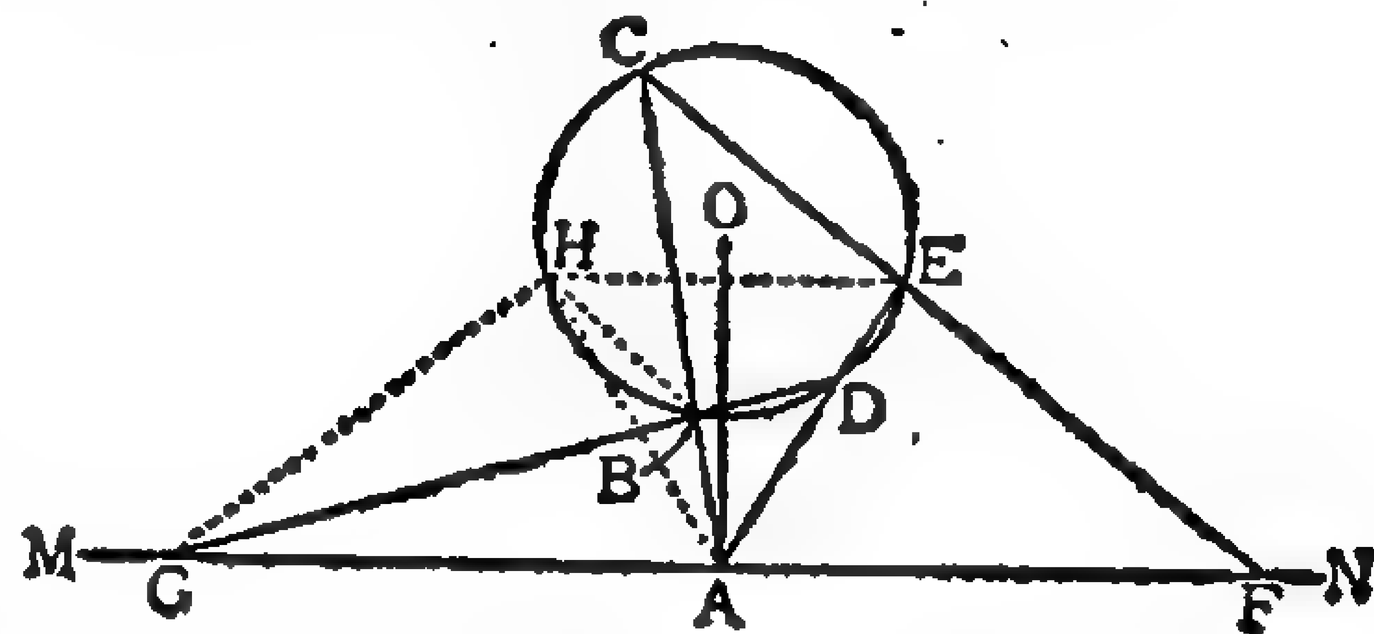
$$\therefore \angle OCO'=\angle R.$$



因此直角三角形 $O'OC$ 的 $\angle CO'O$ 的大小及 OC 的长都是一定的, 所以 OO' 也是一定的. 从而 O' 在以 O 为圆心, 定长 OO' 为半径的圆周上.

718. 从定圆的圆心 O 作定直线 MN 的垂线 OA, 再从垂足 A 作两割线 ABC、ADE 和圆 O 分别交于 B、C, D、E, 若 CE、DB 和 MN 的交点分别为 F、G, 则 $AF=AG$.

解 过 E 作平行于 MN 的弦 EH, 连结 HG、HB、HA, 则 $AH=AE$.



因 H、B、D、E 四点共圆, 所以

$$\angle HAG=\angle AHE=\angle AEH=\angle HBG.$$

从而 A、B、H、G 四点共圆.

$$\therefore \angle GHA=\angle GBA=\angle CBD=\angle AEF.$$

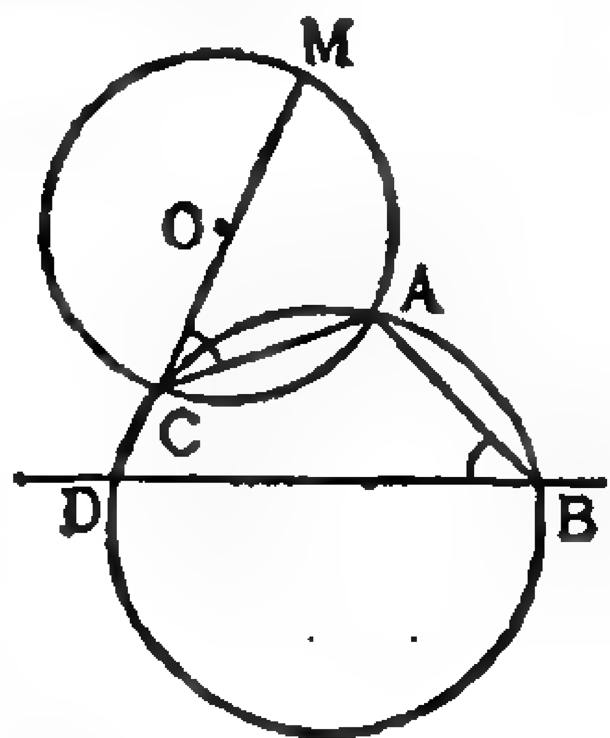
又因 $AH=AE$, $\angle HAG=\angle EAF$.

$$\therefore \triangle HAG\cong\triangle EAF,$$

故 $AF=AG$.

719. 设 A 为定圆 O 上的一定点, B 为

定直线上的一定点，作任意圆过 A、B，若它和定圆及定直线的另一个交点分别为 C、D，则直线 CD 恒过一定点。



解　设 DC 和定圆 O 的另一交点为 M，连结 AC，在圆内接四边形 $ACDB$ 中，

$$\angle ACM=\angle ABD.$$

但是 A、B 是定点，BD 是定直线，所以 $\angle ABD$ 也是一定的。从而定圆 O 上的圆周角 ACM 是一定的。因此 $\overset{\frown}{AM}$ 一定，点 M 是定点，即 DC 恒过定点 M。

720.　过 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点 D 作直线 DE，和 AC（或其延长线）相交于 E，使 $\angle AED=\angle B$，若 $AB>AC$，则

$$BE>CD.$$

解　(i) 当 E 在 AC 上时，因为

$$\angle AED=\angle B,$$

所以 B、D、E、C 四点共圆。又因 $AB>AC$，

若 $\angle C<\angle B$，则劣弧 $BE>$ 劣弧 CD，

$$\therefore\ BE>CD.$$

若 $\angle C=\angle R$，则 BE 是该圆的直径。因 $\angle C=\angle R$，

$$\therefore\ BE>CD.$$

若 $\angle C>\angle R$，则 $\angle C$ 的补角小于 $\angle R$，所以在图中，$\angle BDE<\angle R$ 并且

$$\angle BDE=\angle AED+\angle A>\angle AED.$$

$$\therefore\ \angle BDE>\angle ABC,$$

因而　　劣弧 $BE>$ 劣弧 CD，

故　　$BE>CD$。

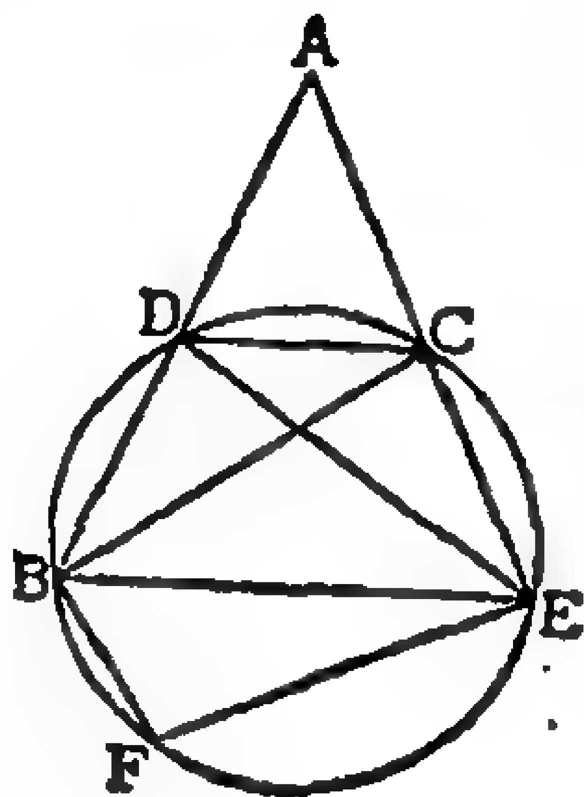
因此在这种情况下，一般地有 $BE>CD$。

(ii) 当 E 在 AC 的延长线上时，这时因

$$\angle AED=\angle B,$$

所以 B、D、C、E 在同一圆周上。因 $AB>AC$，所以

$$\angle ACB>\angle ABC.$$



若 $\angle C>\angle B$，取 $\overset{\frown}{BCE}$ 的共轭弧上的任意一点 F，则

$$\angle BFE=\angle C,$$

$$\angle BCE=\angle DBC+\angle A>\angle DBC.$$

$\therefore$　劣弧 $BE>$ 劣弧 CD，

$$\therefore\ BE>CD.$$

若　$\angle C=\angle R$，$\angle BCE=\angle R$，

$$\therefore\ BE>CD.$$

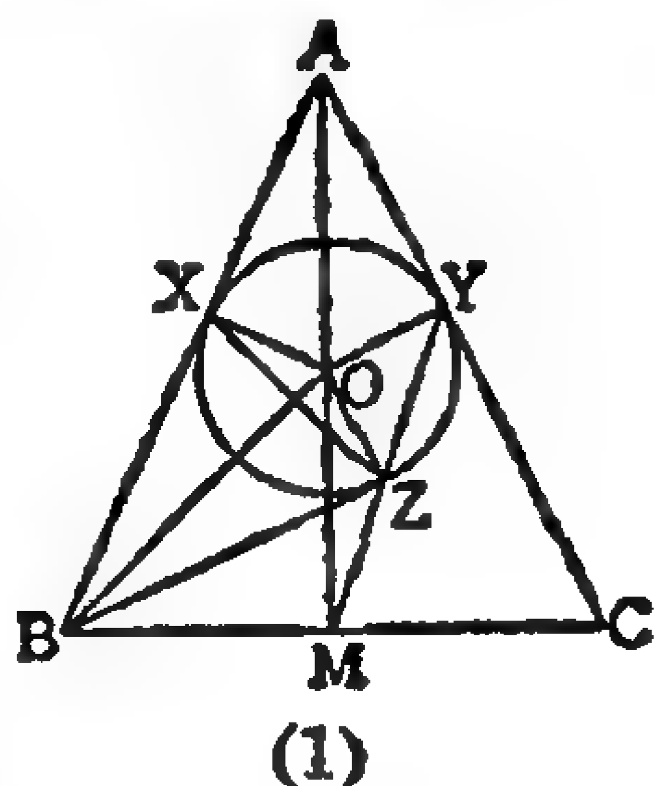
若　$\angle C<\angle R(\angle BCE>\angle R)$，

劣弧 $BE=$ 劣弧 $BD+$ 劣弧 DC $+$ 劣弧 $CE>$ 劣弧 CD，

$$\therefore\ BE>CD.$$

因此在一切情况下，都有 $BE>CD$。

721.　设等腰三角形 ABC 的等边 AB、AC 与任意圆的切点分别为 X、Y，从点 B 作此圆的切线，其切点为 Z，则直线 YZ 过边 BC 的中点 M。



解　设任意圆的圆心为 O，直线 AO 是垂直于底边 BC 且过其中点 M。连结 YZ，在图1中，

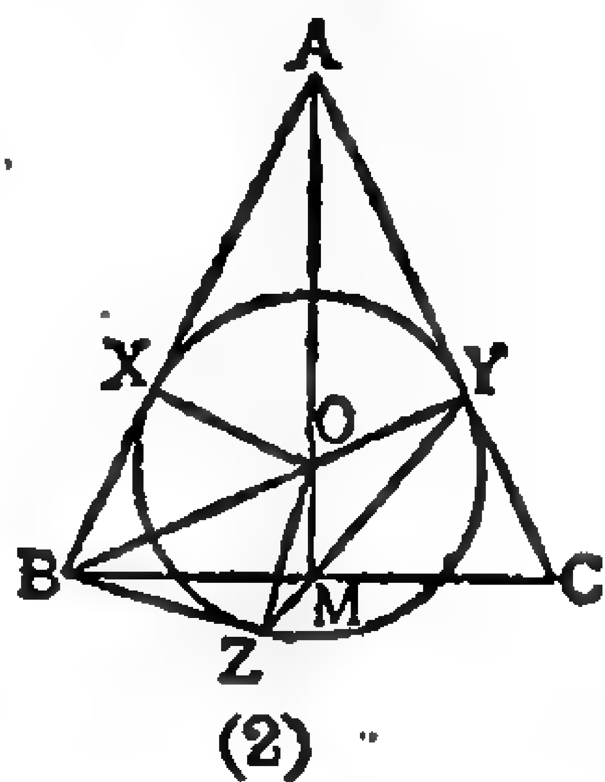
$$\angle XZY=\frac{1}{2}\angle XOY=\angle AOX=\angle ABC,$$

并且显然有 M、Z、O、X 四点在以 OB 为直径的圆周上。所以，在图1的情况下，即点 Z 在图形的内部时，

$$\angle XZM=2\angle R-\angle B.$$

在图2中，即点 Z 在图形的外部时，

$$\angle XZM=\angle B.$$

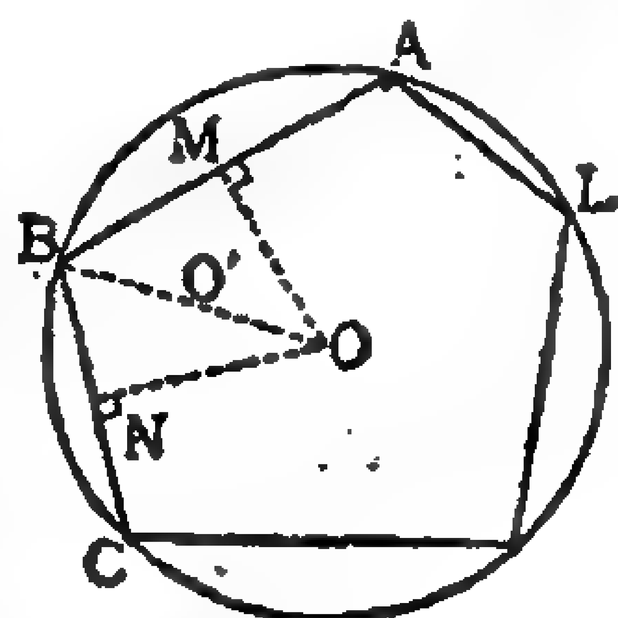


(2)

因此，$\angle XZY$ 和 $\angle XZM$ 在图1的情况下是补角关系，在图2的情况下是相等关系。故不论在哪一种情况下，Y、Z、M 总是在一直线上，即直线 YZ 过 M 点。

722.　在圆内接多边形中，作过一个顶点和该顶点的两邻边的中点的圆，则不论对于哪个顶点这样的圆都是全等的；都与原来的圆相切；都过一定点。

解　设圆内接多边形 $ABCD\cdots L$，AB、BC 的中点为 M、N，圆心为 O。因 $OM\perp AB$，



$ON\perp BC$，所以 M、B、N、O 在以 BO 为直径的圆周上．因此圆 $BMON$ 的半径是一定的．无论对哪个顶点，这样的圆都是相同的，所以这些圆是全等的．

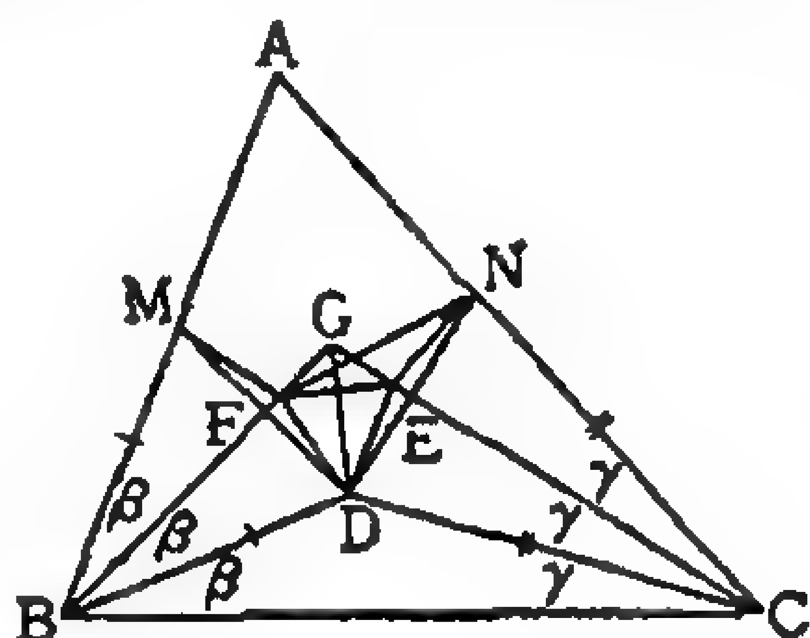
又因圆 BMN 的圆心 O' 是 BO 的中点，所以该圆与圆 O 相切，这个结论无论对哪个顶点都是相同的．

因圆 BMN 过 O 点．无论对哪个顶点都是相同的，所以这些圆都过定点 O．

723． 在 $\triangle ABC$ 内取一点 G，使

$$\angle ABG=\frac{1}{3}\angle B,\ \angle ACG=\frac{1}{3}\angle C,$$

设 D 为 $\triangle BGC$ 的内心，在 AB、AC 上取点 M、N，使 $BD=BM$，$CD=CN$；再在 GB、GC 上分别取 F、E，若 $\triangle DEF$ 是正三角形，则 A、N、E、F、M 五点共圆．



解 首先，为了证明 A、M、F、N 共圆，就要证明

$$\angle AMF+\angle FNA=2\angle R.$$

设 $\quad \angle B=3\beta,\ \angle C=3\gamma.$

因 D 是 $\triangle BGC$ 的内心，所以由问题 79，知

$$\angle GDC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle GBC=90^\circ+\beta.$$

因 $\angle GDE=30^\circ$，所以 $\angle EDC=60^\circ+\beta$．而 DC、GC 是 $\angle C$ 的三等分线，$CD=CN$，所以，

$$\angle ENC=\angle EDC=60^\circ+\beta. \qquad ①$$

同理，

$$\angle BMF=60^\circ+\gamma. \qquad ②$$

其次，为了求出 $\angle ENF$，着眼于 $EF=EN$，只要求出等腰三角形 NEF 的顶角 NEF 就可以了．

$$\angle FEN=360^\circ-\angle FED-\angle DEN, \qquad ③$$

而

$$\angle FED=60^\circ, \qquad ④$$

$$\angle DEN=360^\circ-2\angle EDC-2\gamma$$
$$=360^\circ-2(60^\circ+\beta)-2\gamma$$
$$=240^\circ-2(\beta+\gamma). \qquad ⑤$$

将④、⑤代入③中，得

$$\angle FEN=60^\circ+2(\beta+\gamma),$$

$$\therefore\quad \angle ENF=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle FEN)$$
$$=\frac{1}{2}[180^\circ-60^\circ-2(\beta+\gamma)]$$
$$=60^\circ-(\beta+\gamma) \qquad ⑥$$

由①、⑥，得

$$\angle FNC=\angle ENC+\angle FNE$$
$$=60^\circ+\beta+60^\circ-(\beta+\gamma)$$
$$=120^\circ-\gamma. \qquad ⑦$$

又由②＋⑦，得

$$\angle BMF+\angle FNC$$
$$=(60^\circ+\gamma)+(120^\circ-\gamma)=180^\circ.$$

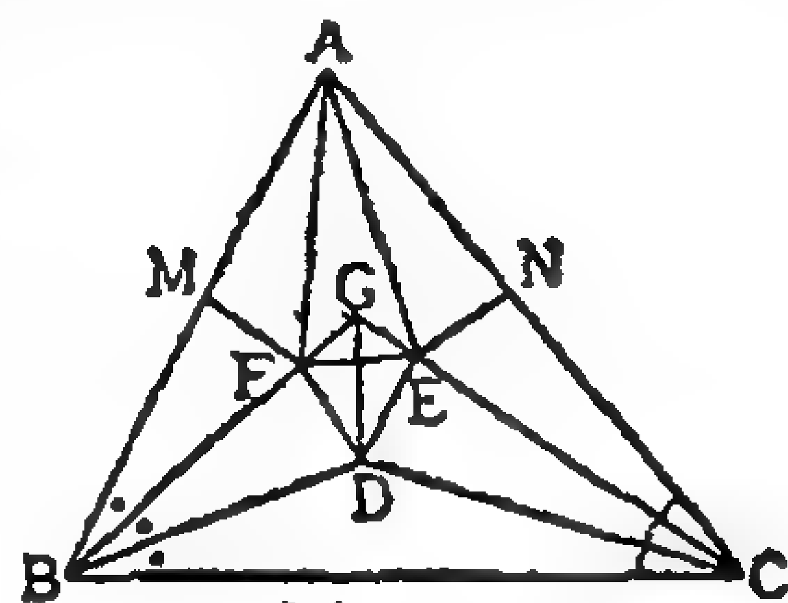
因此 $\quad \angle AMF+\angle FNA=180^\circ.$

所以 A、M、F、N 共圆．

同理，A、M、E、N 也共圆．故 A、N、E、F、M 五点在同一圆周上．

724． 在 $\triangle ABC$ 中，各角的三等分线的交点(如图)所作成的 $\triangle DEF$ 是正三角形．[布兰库·毛利问题]

解 延长 BF、CE 相交于点 G，则点 D 恰好又是 $\triangle GBC$ 的内心，因此，这个问题的证明可考虑如下：取 $\triangle GBC$ 的内心 D，若作 $\angle GDE=\angle GDF=30^\circ$



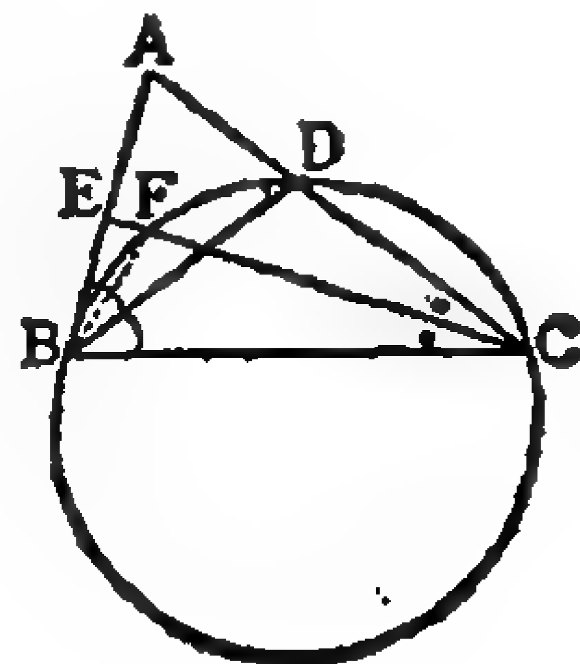
使 E、F 分别在 GC、GB 上，显然 $\triangle DEF$ 是正三角形，这时只要证明 AE、AF 三等分 $\angle A$ 就可以了．

设点 D 关于 BG、CG 的对称点分别为 M、N，因 $DE=EF=FD$，由问题 724，知 A、M、F、E、N 是共圆点．因 $DE=EF=FD$，所以 $\quad EN=EF=FM,$

于是 $\quad \angle MAF=\angle FAE=\angle EAN.$

故 AF、AE 三等分 $\angle A$．

725． 在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线为 BD、CE，若 $\angle B>\angle C$，试借助于圆证明 $BD<CE$．



解 因为

$$\angle ABD>\angle ACE,$$

所以 $\angle BDC>\angle BEC$。因此若过 B、D、C 作圆，则 E 在弓形 BDC 的外面。设 CE 和圆周的交点为 F，又因

$$\angle CBF=\angle CBD+\angle DBF$$
$$>\angle BCF+\angle DCF=\angle BCD,$$
$$\angle B+\angle C<180°,$$

所以 $\angle CBF=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)<90°$。

又因 $\angle C<\angle B$，所以 $\angle DCB<90°$。

因此 $\overset{\frown}{CDF}$、$\overset{\frown}{BFD}$ 都是劣弧。

$$\therefore\quad CF>BD,$$

故 $\quad CE>BD$.

726. 作 $\triangle ABC$ 的三条垂线 AD、BE、CF，由垂足向其余各边作垂线，则六条垂线的垂足 G、N、K、H、M、L 在同一圆周上。

解 由问题 **505**，知 $KN\parallel BC$，因此

$$\angle ANK=\angle ACB. \qquad ①$$

又因 $AD\perp BC$，$DH\perp AB$，$DG\perp AC$，所以 B、H、G、C 共圆(问题 **487**)。

$$\therefore\quad \angle AHG=\angle GCB. \qquad ②$$

由①、②，得

$$\angle ANK=\angle AHG,$$

因此 K、H、G、N 共圆. ③

和前面一样，$LG\parallel AB$，连结 KL，

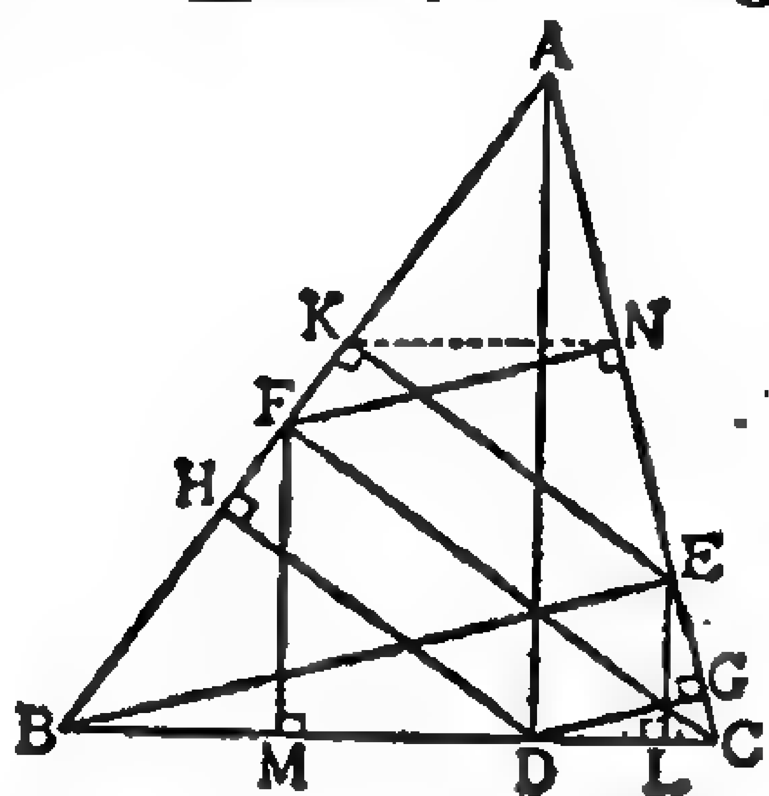
$$\therefore\quad \angle KLG=\angle BKL. \qquad ④$$

但是 A、K、L、C 共圆(由问题 **487**)，

$$\therefore\quad \angle BKL=\angle ACB. \qquad ⑤$$

由 ②、④、⑤，得

$$\angle KHG=\angle KLG,$$



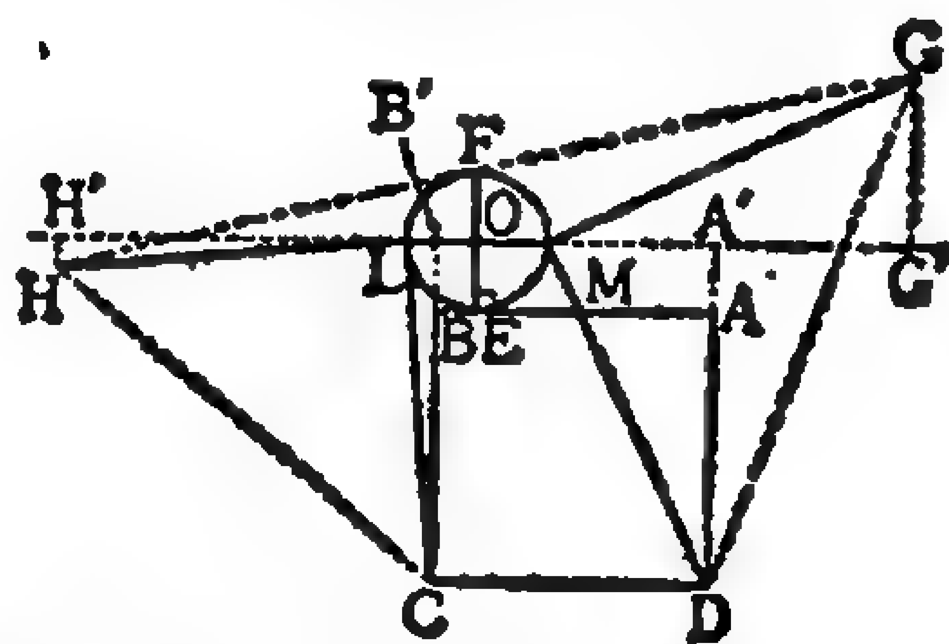
因此 K、G、L、H 共圆.

同理，H、M、L、K 也共圆. 故 K、H、M、L、G、N 共圆.

727. 在正方形 $ABCD$ 的一边 AB 上任取一点 E，从 E 作垂直于 AB 的 $EF=\frac{1}{2}AB$，以 EF 为直径作圆 O，再作垂直于 EF 的直径 LM，若分别以 L、M 为直角顶作等腰三角形 CLH、DMG，则 H、F、G 在一直线上。

解 若从 H、G、B、A 向 LM 作垂线 HH'、GG'、BB'、AA'，则

$$\triangle A'DM\cong\triangle G'MG,$$
$$\triangle B'CL\cong\triangle H'LH.$$



于是 $GG'=MA'$，$HH'=LB'$，

$$\therefore\quad GG'-HH'=MA'-LB'.$$

但是

$$MA'-LB'=(MA'+MB')-(LB'+MB')$$
$$=A'B'-LM=AB-LM$$
$$=\frac{1}{2}AB=EF=2\cdot FO,$$

$$\therefore\quad GG'-HH'=2FO. \qquad ①$$

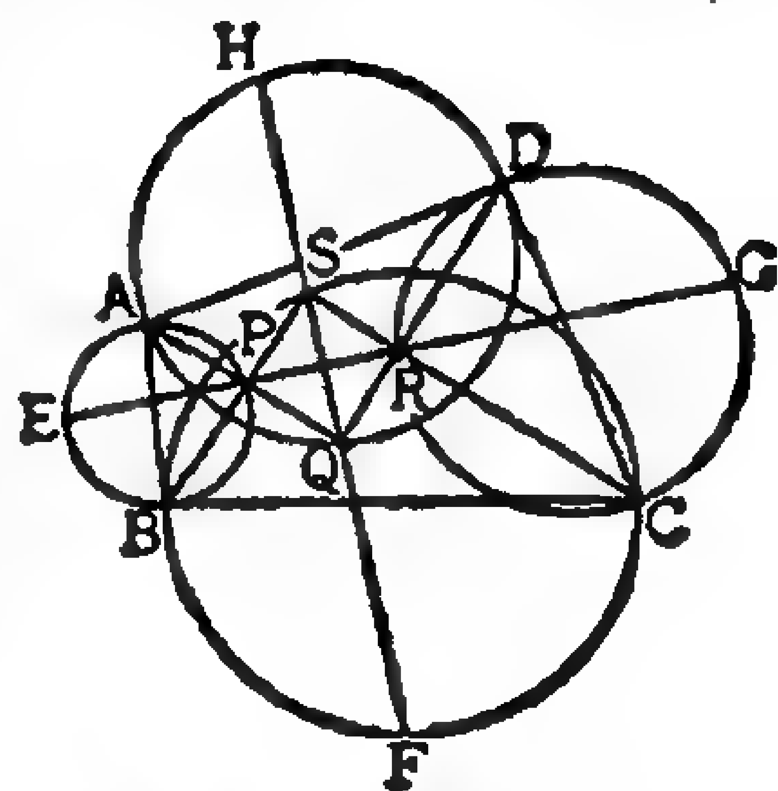
并且 $MG'=DA'$，$H'L=B'C$，所以

$$MG'=H'L,\ OM=OL,$$
$$\therefore\quad H'O=OG', \qquad ②$$

而 $\quad OF\parallel HH'\parallel GG'. \qquad ③$

由①、②、③，得 H、F、G 在一直线上。

728. 以四边形 $ABCD$ 的四边 AB、BC、CD、DA 为直径画圆，若在外侧的半圆弧的中点分别为 E、F、G、H，则 EG、FH 和在内侧的半圆弧的四个交点 P、Q、R、S 构成正方形的顶点。



解 如下考虑这个问题较为简单. 设 AP、DR 的交点为 Q，BP、CR 的交点为 S，要证明 $PQRS$ 是正方形，只需证明连结 SQ 的直线过半圆 AHD、BFC 的中点就可以了。

$$\because\quad \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}=\frac{1}{4}\text{的圆周},$$

$$\therefore\quad \angle APE=\angle BPE=45°.$$

同理，$\quad \angle DRG=\angle CRG=45°$.

因此，若 BP、CR 的延长线相交于点 S，则

$$\angle SPR=\angle SRP=45°. \qquad ①$$

又若 AP、DR 的交点为 Q，则

$$\angle RPQ=\angle PRQ=45°. \qquad ②$$

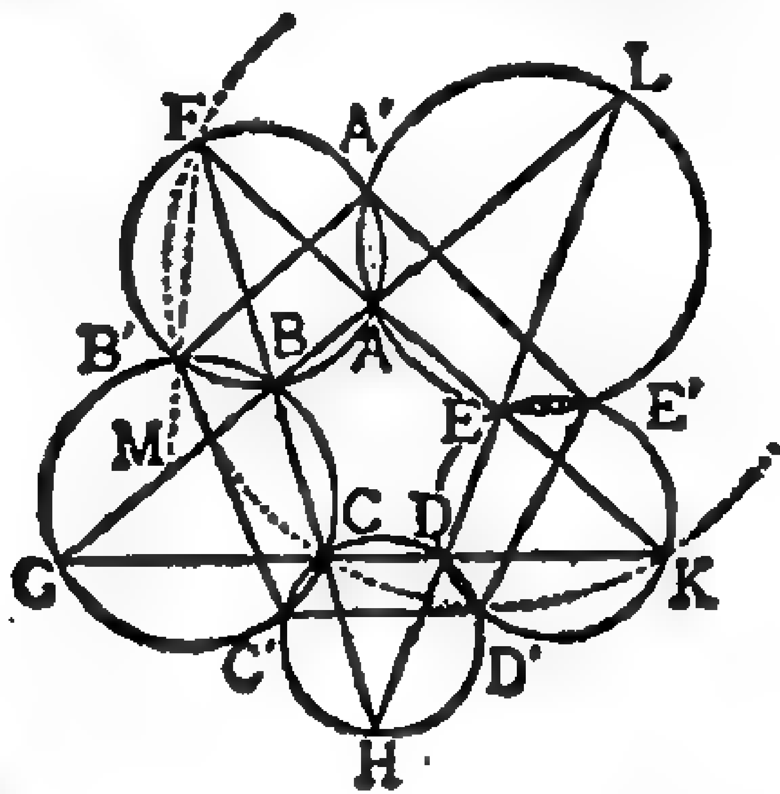
由①、②，得 $PQRS$ 是正方形．连结 SQ，则

$$\angle QSP=\angle QSR=45^\circ,$$

因此若延长 SQ 和以 BC 为直径的圆相交于点 F，则 F 是半圆 BFC 的中点．

同理，延长 QS 和以 AD 为直径的圆相交于 H，则 H 是半圆 AHD 的中点．

729. 延长五边形 $ABCDE$ 的各边，在其外部得出五个三角形 FAB、GBC、HCD、KDE、LEA，则这五个三角形的外接圆的五个交点 A'、B'、C'、D'、E' 在同一圆周上．[米库勒定理]



解 $\triangle FCK$ 的外接圆过 B'、D'，这是因为 E、K、D'、D 共圆．所以

$$\angle EKD'=\angle HDD'. \qquad ①$$

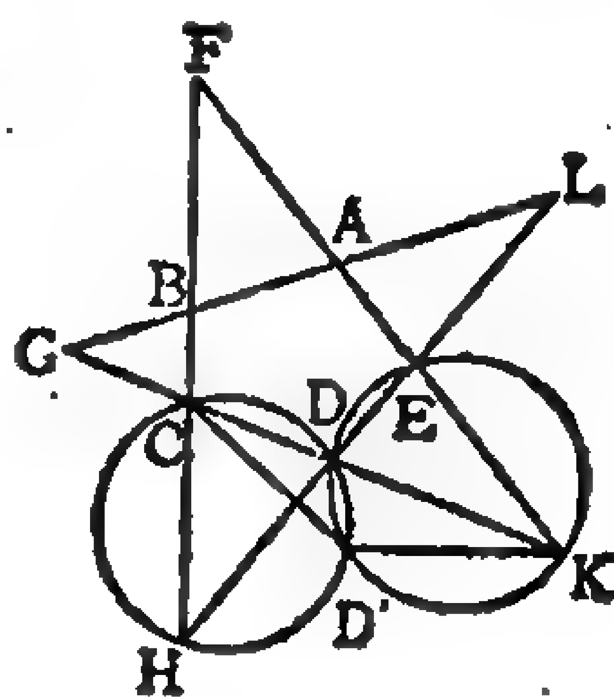
但是 H、C、D、D' 是共圆的，若连结 CD'，则

$$\angle HDD'=\angle HCD'. \qquad ②$$

由①、②得，$\angle EKD'=\angle HCD'$．

因此四边形 $FKD'C$ 是圆内接四边形．

同理 $\triangle FCK$ 的外接圆过点 B'．



其次，证 A'、B'、D'、E' 共圆．因 E、E'、K、D' 共圆，所以

$$\angle EE'D'=\angle EKD'. \qquad ③$$

但是由于上面证明了 F、B'、C、D'、K 共圆，所以连结 $D'B'$，则

$$\angle FKD'=\angle D'B'M. \qquad ④$$

由③、④，得

$$\angle EE'D'=\angle D'B'M. \qquad ⑤$$

又因 A、E'、L、A' 共圆，所以

$$\angle A'E'E=\angle A'AF=\angle A'B'F. \qquad ⑥$$

由⑤、⑥，得

$$\angle A'E'D'+\angle A'B'D'=2\angle R,$$

因此 A'、B'、D'、E' 共圆．

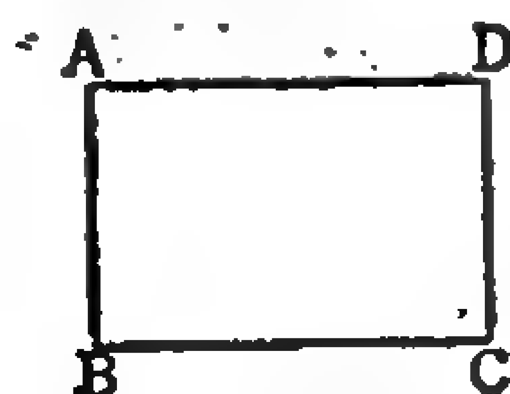
同理，A'、B'、C'、E' 也共圆．故这五个点共圆．

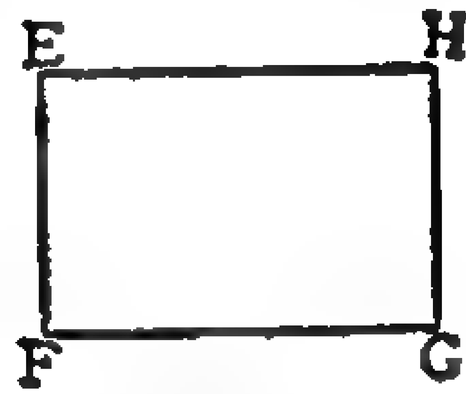
第三章 面 积

1. 基本性质

730. 两边分别相等的两个长方形面积相等．

解 在长方形 $ABCD$、$EFGH$ 中，当 AB 和 EF 相等，BC 和 FG 相等，若把 $EFGH$ 迭在 $ABCD$ 上，使 FG 和 BC 重合，且两个长方形在 BC 的同侧，则它们的各边完全重合，所以两个长方形面积相等．





注 长方形的面积用相邻的两边之积来表示．

$$\text{长方形 } ABCD=AB\cdot AD.$$

731. 平行四边形的面积等于以一边和与此边平行的另一边之间距离为边作出的长方形面积．

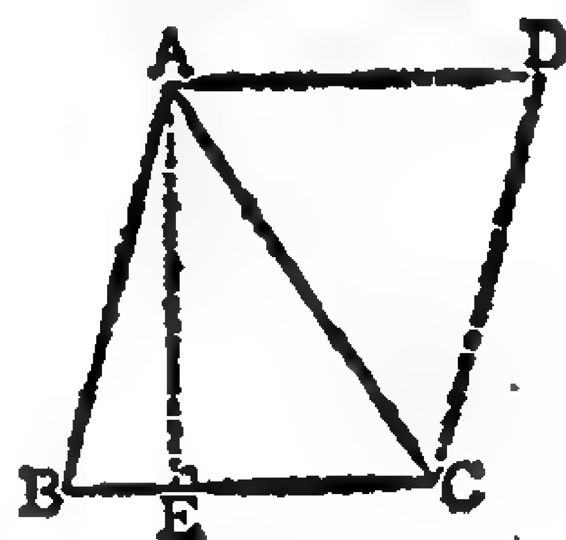
解 由 A、B 分别引 DC 的垂线，设垂足为 A'、B'，则 $A'ABB'$ 是长方形，显然

$$\triangle ADA'\cong\triangle BCB'\ (\text{两角夹一边}).$$

$\therefore$ $\square ABCD$ 的面积 $=\square ABB'A'$ 的面积，

因此 $\square ABCD=AB\cdot AA'$．

732. 三角形的面积等于与其同底、等高的平行四边形面积的一半．



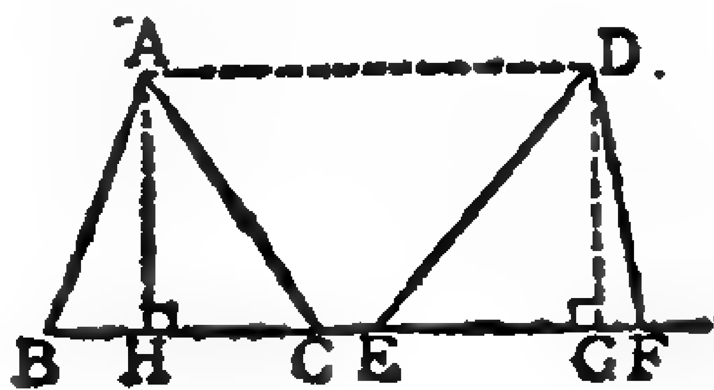
解 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A、C，分别作与 BC、AB 的平行线，其交点为 D，则 $ABCD$ 是平行四边形，并且 $\triangle ABC\cong\triangle CDA$．

$$\therefore\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\ \square ABCD \text{ 的面积}.$$

BC 是平行四边形 $ABCD$ 与 $\triangle ABC$ 的公共底边，且底边上的高相等，因此

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}\ \square ABCD\text{ 的面积.}$$

733. 若在同一线段的同侧有底边相等、面积相等的两个三角形，则连结两个三角形的顶点的直线与底边平行。



解 如图在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，$BC=EF$，且 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}$. 若从 A 及 D 向底边作垂线 AH、DG，因两三角形面积相等，且 $BC=EF$，所以 $AH=DG$，从而 $AD\parallel BF$.

734. 设一条直线上的四点依次为 A、B、C、D，则长方形 $AC\cdot BD$ 等于长方形 $AB\cdot CD$ 与长方形 $BC\cdot AD$ 之和. ［欧拉定理］

解

$$\begin{aligned}AC\cdot BD&=(AD-CD)(BC+CD)\\&=AD\cdot BC-CD\cdot BC\\&\quad+CD(AD-CD)\\&=AD\cdot BC-CD\cdot BC\\&\quad+CD(AB+BC)\\&=AD\cdot BC-CD\cdot BC\\&\quad+CD\cdot AB+CD\cdot BC\\&=AD\cdot BC+CD\cdot AB.\end{aligned}$$

735. 在线段 AB 上取一点 C，若 AB 的中点为 O，则 $AC\cdot CB=AO^2-OC^2$.

解

$$AC=AO+OC,$$
$$CB=OB-OC=AO-OC.$$
$$\therefore\ AC\cdot CB=(AO+OC)(AO-OC)=AO^2-OC^2.$$

即 $AC\cdot CB=AO^2-OC^2$.

736. 设线段 AB 上任意一点为 C，AB 的中点为 O，则

$$AC^2+CB^2=2(AO^2+OC^2).$$

若 $AC>CB$，

则 $AC^2-CB^2=2AB\cdot OC$.

解 设点 C 在 O 和 B 之间，则

$$AC=AO+OC.$$
$$\therefore\ AC^2=AO^2+OC^2+2AO\cdot OC,$$

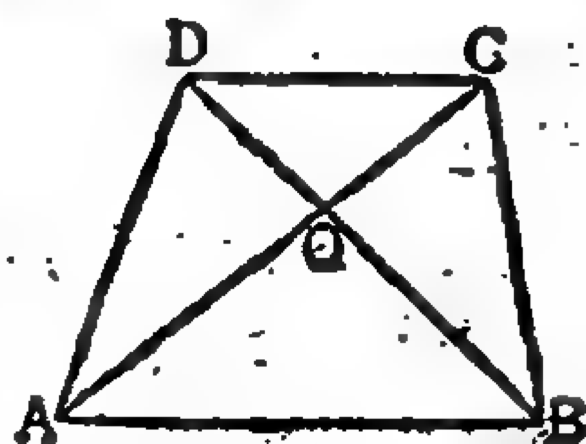
又 $BC=OB-OC.$

$$BC^2=OB^2+OC^2-2BO\cdot OC.$$
$$OB=AO,$$
$$\therefore\ AC^2+CB^2=2(AO^2+OC^2),$$
$$AC^2-CB^2=2AB\cdot OC.$$

2. 三角形的面积

737. 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 O，三角形 AOD 和三角形 BOC 面积相等，则 $AB\parallel DC$。反之亦成立。

解 $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$（题设），若在等式两边都加上 $\triangle OAB$，则得



$$S_{\triangle DAB}=S_{\triangle CAB},$$

所以过这两个三角形顶点的直线 DC 同底边 AB 平行。

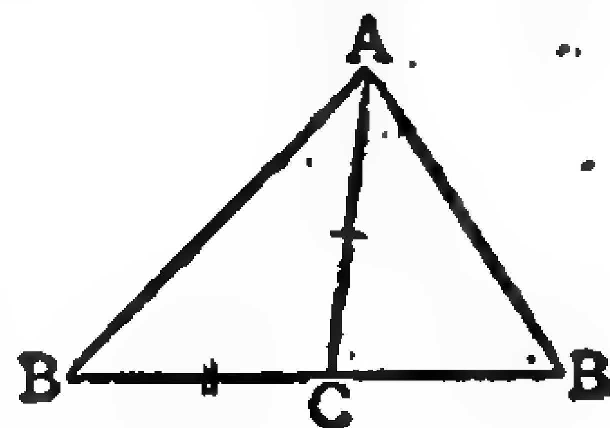
反之，若 $AB\parallel DC$，则 $S_{\triangle ADB}=S_{\triangle ACB}$. 从等式两边都减去 $\triangle AOB$，则

$$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}.$$

738. 在两个三角形中，设两边分别相等，其夹角互补，则这两个三角形面积相等.

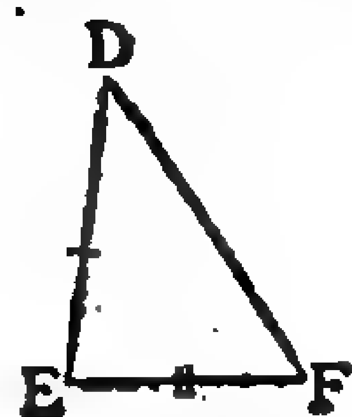
解 在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中，$AC=DE$、$BC=EF$. 并且

$$\angle C=2\angle R-\angle E.$$



延长 BC 并在其上取点 B'，使 $CB'=BC$. 连结 AB'，有

$$\triangle ABC\cong\triangle ACB'.$$



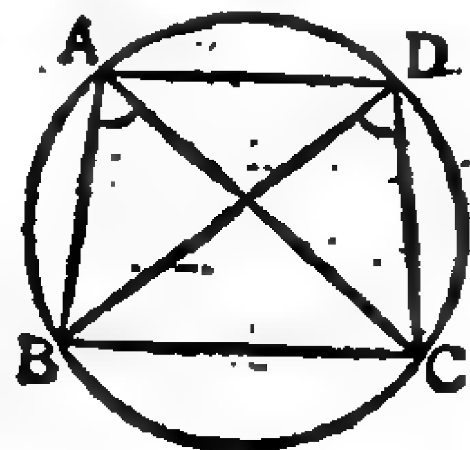
而 $\angle E=\angle ACB'$，

$AC=DE$，$CB'=EF$.

$\therefore\ \triangle DEF\cong\triangle ACB'$，

因此 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}$.

739. 若两个三角形的底边、面积和顶角分别相等，则这两个三角形全等.



解 使相等的两个三角形具有相同的底边，且顶点在底边的同侧，这时若顶点重合，这两个三角形显然全等. 若不重合，则两个三角形 ABC、DBC 在如图所示的位置，由于 $\angle BAC$、$\angle BDC$ 相等，知 $\triangle ABC$ 的外接圆过点 D，连结 AD，因为

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC},$$

所以 $AD\parallel BC$,

$$\therefore\ \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DC},$$

因而 $\angle ACB=\angle DBC$.

因这两个三角形的底边 BC 是公共的,

$$\angle A=\angle D,\ \angle ACB=\angle DBC.$$

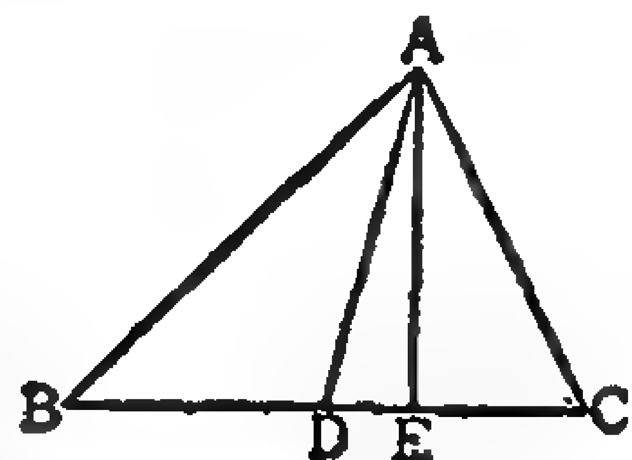
故 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$.

740. 三角形的一条中线等分三角形的面积.

解 设 AD 为三角形 ABC 的中线,则在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 中,底边 $BD=DC$,高 AE 公共,所以

$$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC},$$

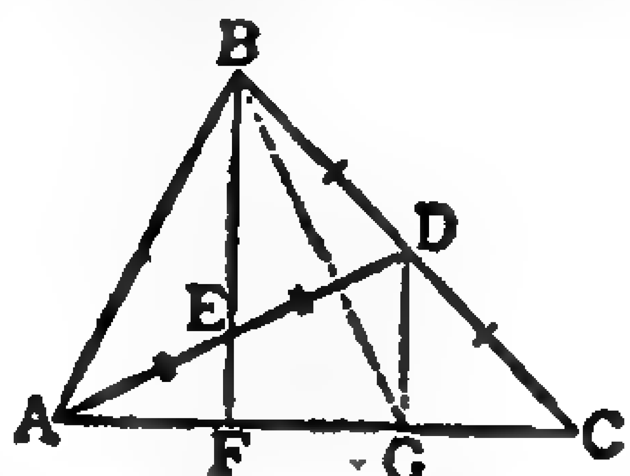
即中线 AD 将 $\triangle ABC$ 的面积二等分.



注 由此可知,两个三角形的两边分别相等,若夹角互补,则能够作出两个等积三角形(问题738).

741. 设三角形 ABC 中线 AD 的中点为 E, BE 的延长线与 AC 交于点 F,则

$$S_{\triangle BCF}=2S_{\triangle ABF}.$$



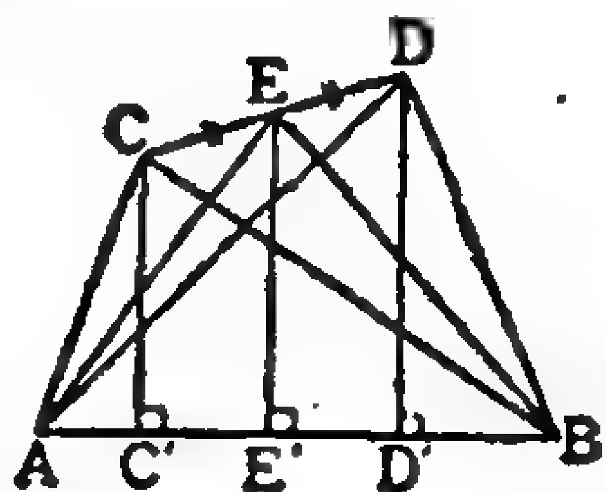
解 设从 D 作 DG 平行 BF 与 AC 交于 G,因为 D 是 BC 的中点,所以 G 是 FC 的中点.又在 $\triangle ADG$ 中, E 是 AD 的中点, $EF\parallel DG$,所以 F 是 AG 的中点.

$$\therefore\ AF=FG=GC,$$

因而 $S_{\triangle BAF}=S_{\triangle BFG}=S_{\triangle BGC}$,

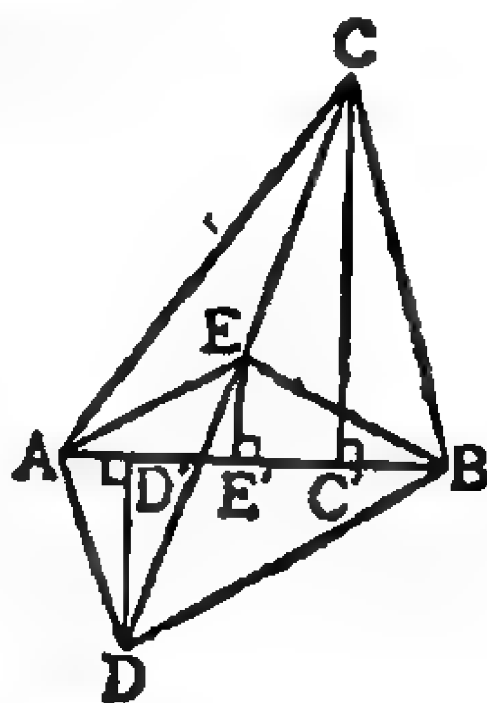
故 $S_{\triangle BCF}=2S_{\triangle ABF}$.

742. 在线段AB上作两个三角形 ABC、ABD,连结两个三角形顶点CD,若CD的中点为E,则三角形 ABE 等于两个三角形 ABC、ABD 的和或差的一半.



解 由 C、E、D 分别作 AB 的垂线 CC'、EE'、DD',得

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB(CC'+DD').$$



又 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot EE'$,

当 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 在 AB 的同侧时,

$$EE'=\frac{1}{2}(CC'+DD'),$$

$$\therefore\ S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABD}).$$

又当 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 在 AB 的异侧时,

$$EE'=\frac{1}{2}(CC'\sim DD'),$$

$$\therefore\ S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}(S_{\triangle ABC}\sim S_{\triangle ABD}).$$

743. 若在公共底边 BC 异侧的两个三角形 ABC 和 DBC 等积,则连结顶点 AD 的线段被 BC 或其延长线所平分.反之亦成立.

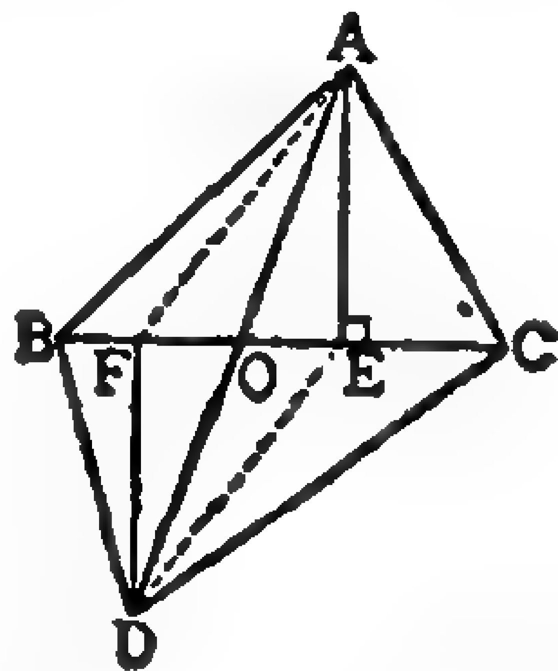
解 设 AD 和 BC 或其延长线的交点为 O,过 A 和 D 作 BC 的垂线 AE、DF,因两三角形等积,故 $AE=DF$.又 $AE\parallel DF$,故四边形 $AEDF$ 是平行四边形.

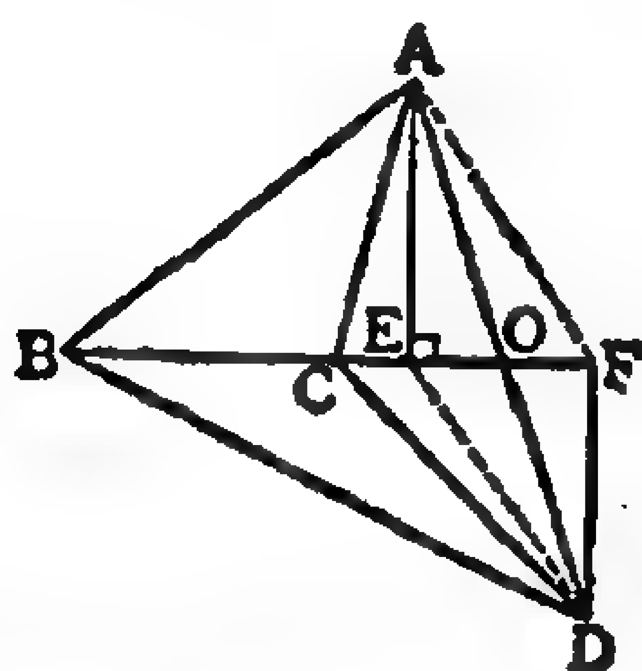
$$\therefore\ AO=DO.$$

即 AD 被 BC 或其延长线所平分.

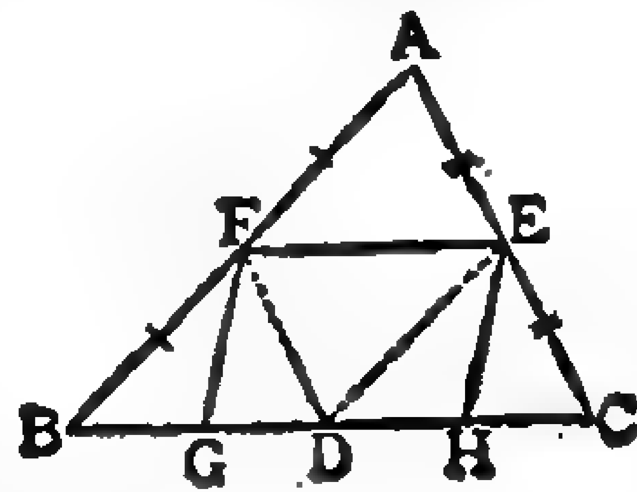
反之,因 $AO=OD$,有 $AE=DF$,

所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}$.





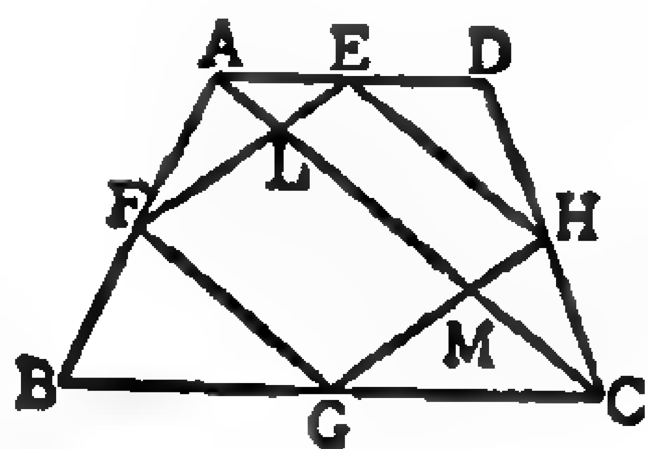
744. 以连结三角形两边中点的线段为底边、以第三边上的线段为对边的平行四边形的面积是这个三角形面积的一半.又顺次连结任意四边形各边的中点,所得平行四边形的面积等于这个四边形面积的一半.



解 设 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 的中点分别为 F、E,边 GH 在 BC 上, $EFGH$ 为任意平行四边形.设 BC 的中点为 D,如果连结 DE; DF,那么 $EFBD$ 是平行四边形.且

$$\triangle FBD\cong\triangle DEF\cong\triangle EDC\cong\triangle AFE,$$

$$\therefore\ \square EFBD\text{ 的面积}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$



平行四边形 $EFGH$ 和 $EFBD$ 有相同的底边 EF，而且它们的对应高相等，因此面积相等。

$$\therefore \quad \square EFGH \text{ 的面积}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

其次，设四边形 $ABCD$ 各边的中点依次为 E、F、G、H，作对角线 AC，与 EF、GH 分别交于点 L、M，则在 $\triangle DAC$ 中，E、H 分别为 DA、DC 的中点，所以

$$\square ELMH \text{ 的面积}=\frac{1}{2}S_{\triangle DAC},$$

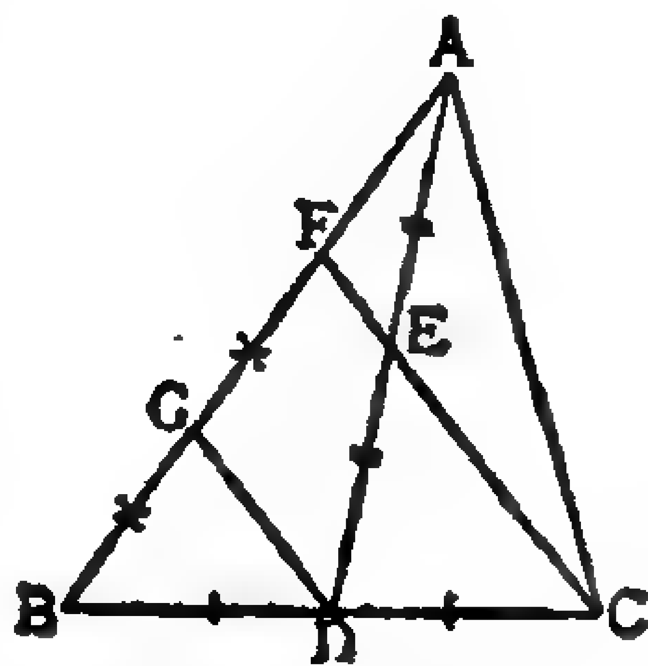
同理 $\quad \square FGML$ 的面积 $=\frac{1}{2}S_{\triangle BAC}.$

$\therefore$ 平行四边形 $EFGH$ 的面积

$$=\frac{1}{2}\text{四边形 } ABCD \text{ 的面积}.$$

745. 从圆 O 外一点 P 作切线 PA，PB，设过点 A 的直径为 AC，则

$$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$



解 连结 PO，则 $PO\perp AB$，又 AC 是直径，有 $BC\perp AB$。

$\therefore \quad PO\parallel BC$，因而 $S_{\triangle PBC}=S_{\triangle OBC}$。

由 $AO=OC$ 有 $S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAB}$，

$$\therefore \quad S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

746. 在三角形 ABC 中，设 BC 的中点为 D，AD 的中点为 E，延长 CE 与 AB 交于点 F，试证 $\triangle ACF$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{3}$。

解 设 BF 的中点为 G，则 $DG\parallel CF$，且 $AE=ED$，从而有 $AF=FG=GB$。

$$\therefore \quad S_{\triangle ACF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

747. 在面积为 S 的三角形 ABC 的边 BC、CA、AB 上，分别取点 P、Q、R，设 AP 和 CR 的交点为 L，当

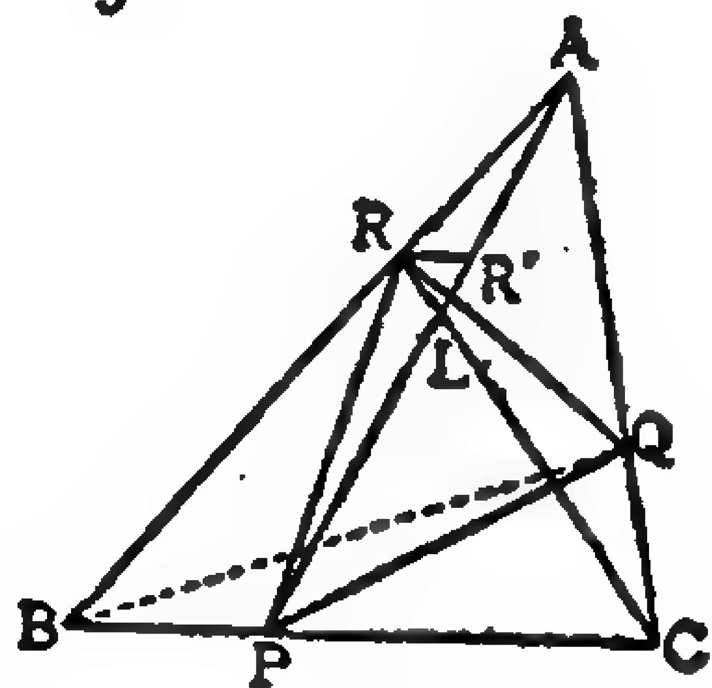
$$\frac{BP}{PC}=\frac{CQ}{QA}=\frac{AR}{RB}$$

等于 $\frac{1}{2}$ 时，求 $\triangle PQR$、$\triangle ARL$ 的面积。

解 因为

$$\frac{S_{\triangle ARQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ARQ}}{S_{\triangle ABQ}}\times\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9},$$

$$\therefore \quad S_{\triangle ARQ}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}.$$



设 $S_{\triangle ABC}=S$，

$$S_{\triangle ARQ}=\frac{2}{9}S.$$

同理，

$$S_{\triangle BPR}=S_{\triangle CPQ}=\frac{2}{9}S.$$

$$\therefore \quad S_{\triangle PQR}=S-\frac{2}{9}S\times 3=\frac{1}{3}S.$$

其次，$RR'\parallel BP$，在 AP 上取点 R'，使

$$\frac{RR'}{PC}=\frac{RR'}{2BP}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{RR'}{PC}=\frac{RL}{LC}.$$

$$\therefore \quad \frac{RL}{LC}=\frac{1}{6}, \quad \therefore \quad \frac{S_{\triangle ARL}}{S_{\triangle ALC}}=\frac{1}{6},$$

$$\therefore \quad S_{\triangle ARL}=\frac{1}{7}S_{\triangle ARC}=\frac{1}{21}S.$$

748. 若三角形 ABC 的垂足三角形 DEF 的外心为 O，则

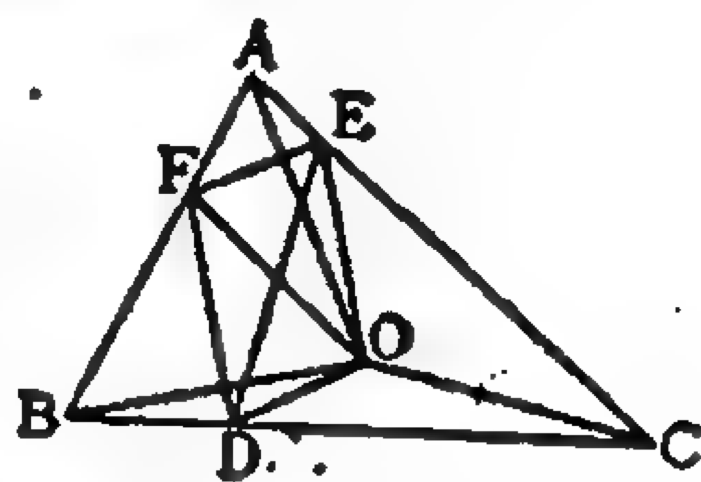
$$2S_{\triangle ABC}=OA(DE+EF+FD).$$

解 根据问题 **587**，$AO\perp EF$，

$\therefore \quad 2\times$ 四边形 $OEAF$ 的面积 $=OA\cdot EF$。

同理，$2\times$ 四边形 $OFBD$ 的面积 $=OB\cdot FD$，

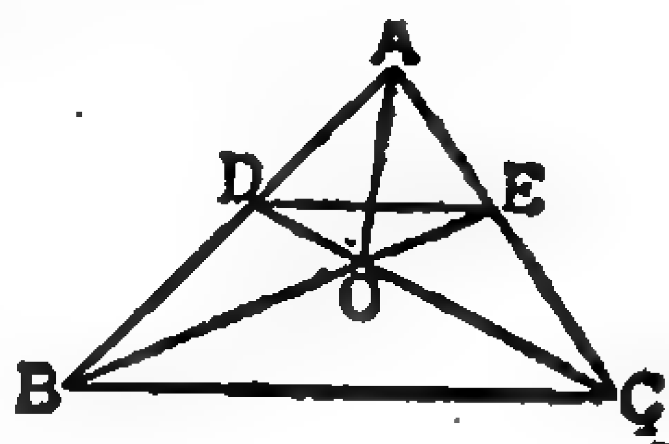
$2\times$ 四边形 $ODCE$ 的面积 $=OC\cdot DE$。



将以上三式相加，左边是 $2S_{\triangle ABC}$；右边由于 $OA=OB=OC$，所以 $OA(EF+FD+DE)$。

$$\therefore \quad 2S_{\triangle ABC}=OA(EF+FD+DE).$$

749. 设平行于三角形 ABC 底边 BC 的直线与 AB、AC 的交点分别为 D、E，若 BE、CD 的交点为



O，则$\triangle AOD$、$\triangle AOE$面积相等。

解　由$DE\parallel BC$，$S_{\triangle BDC}=S_{\triangle BEC}$.

$$\therefore\ S_{\triangle DOB}=S_{\triangle EOC}. \qquad ①$$

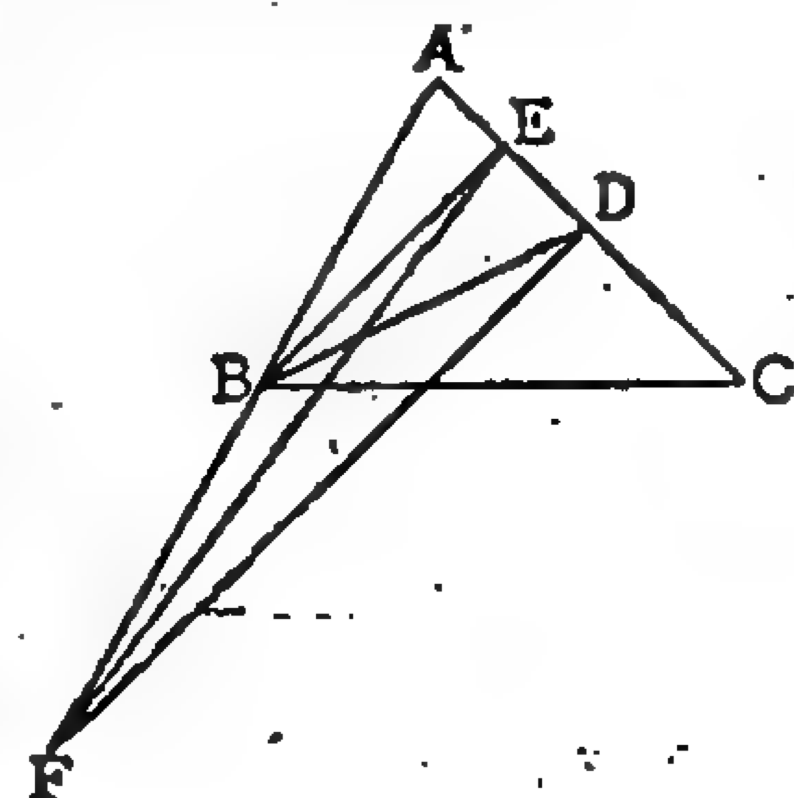
但是 $\dfrac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{DO}{DC}$，$\dfrac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{EO}{EB}$，

而且$DE\parallel BC$，

$$\therefore\ \frac{DO}{DC}=\frac{EO}{EB},\ \therefore\ S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}. \qquad ②$$

由①、②得　$S_{\triangle ADO}=S_{\triangle AEO}$.

750.　设$\triangle ABC$的边AC的中点为D，过B、D作任意的平行线BE、DF与AC、AB或其延长线分别相交于E、F，则三角形AEF面积等于三角形ABC面积的一半.



解　由于D是AC的中点，所以

$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

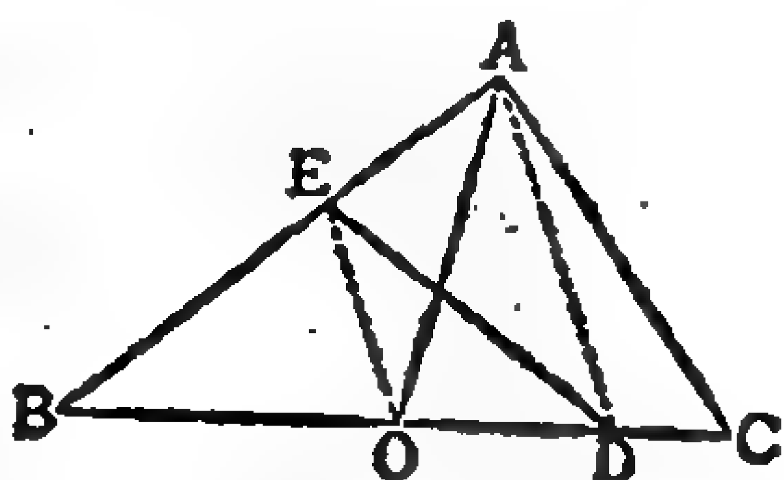
又　$BE\parallel FD$，$\therefore\ S_{\triangle BED}=S_{\triangle BEF}$.

如果在两边加上$\triangle ABE$，

那么　$S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BED}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BEF}$.

即　$S_{\triangle AFE}=S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

751.　在直角三角形ABC中，设$AB>AC$，在斜边BC上取一点D，使$BD=AB$，过D作直线平分$\triangle ABC$，且与AB的交点为E，则BE、DE都等于BC的一半.



解　设BC的中点为O，连结AO，则

$$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

因为　$S_{\triangle EBD}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$,

$$\therefore\ S_{\triangle ABO}=S_{\triangle EBD}.$$

等式两边减去$\triangle EBO$，得$S_{\triangle AEO}=S_{\triangle DEO}$，又$\triangle AEO$和$\triangle DEO$共底边且面积相等，所以$AD\parallel EO$. 根据假设$AB=BD$,

$$\therefore\ BE=BO=\frac{1}{2}BC.$$

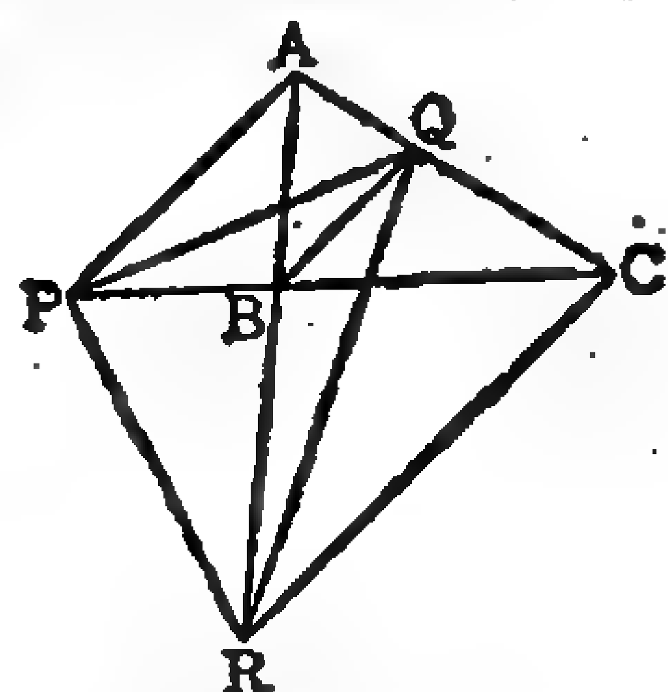
因此$\triangle ABO$与$\triangle DBE$是两边及其夹角分别相等而全等.

$$\therefore\ DE=AO=\frac{1}{2}BC,$$

$$BE=DE=\frac{1}{2}BC.$$

752.　若从三角形ABC的顶点A、B、C分别作三条平行线AP、BQ、CR，它们同其对边的交点分别为P、Q、R，则

$S_{\triangle AQR}=S_{\triangle BRP}$
$=S_{\triangle CPQ}$.



解　$AP\parallel QB$,

$$\therefore\ S_{\triangle ABQ}=S_{\triangle PBQ}.$$

同理$S_{\triangle RBQ}=S_{\triangle CBQ}$. 两等式相加，得

$$S_{\triangle AQR}=S_{\triangle CPQ}. \qquad ①$$

又　$AP\parallel CR$，$\therefore\ S_{\triangle PRC}=S_{\triangle ARC}$.

从两边减去$\triangle BRC$得

$$S_{\triangle BRP}=S_{\triangle ABC}. \qquad ②$$

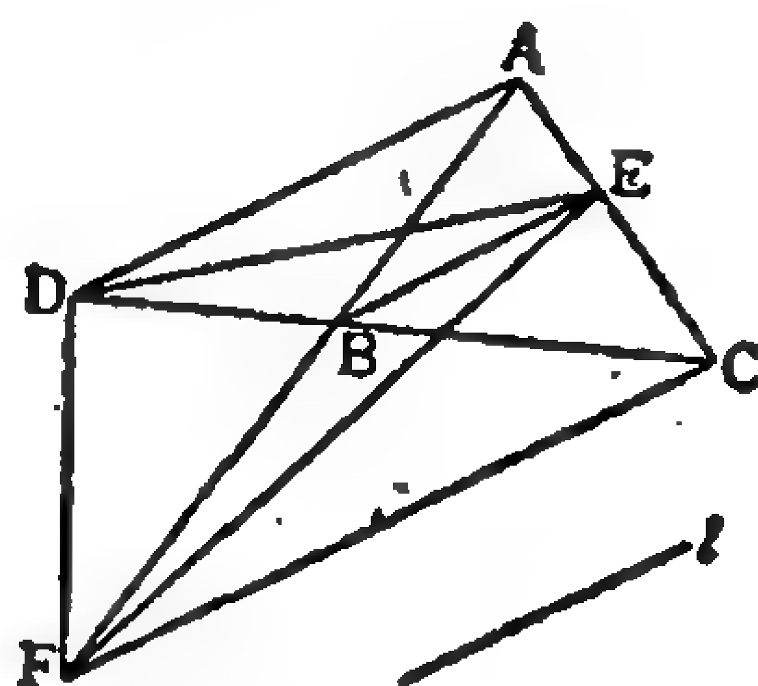
在$S_{\triangle PBQ}=S_{\triangle ABQ}$的两边加上$\triangle CBQ$得

$$S_{\triangle CPQ}=S_{\triangle ABC}. \qquad ③$$

由①、②、③得

$$S_{\triangle CPQ}=S_{\triangle BRP}=S_{\triangle AQR}.$$

753.　设给定三角形ABC及与其各边都不平行的一直线l，过顶点A、B、C作直线l的平行线，若这些平行线与BC、CA、AB或其延长线的交点分别为D、E、F，则三角形DEF的面积是定值.



解　因为$AD\parallel BE\parallel CF$，所以

$$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle BAE}, \qquad ①$$

$$S_{\triangle BEF}=S_{\triangle BEC}. \qquad ②$$

又以FC为底边，有$\triangle FDC=\triangle FAC$，所以

$$S_{\triangle FDC}-S_{\triangle FBC}=S_{\triangle FAC}-S_{\triangle FBC},$$

即

$$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle ABC}. \qquad ③$$

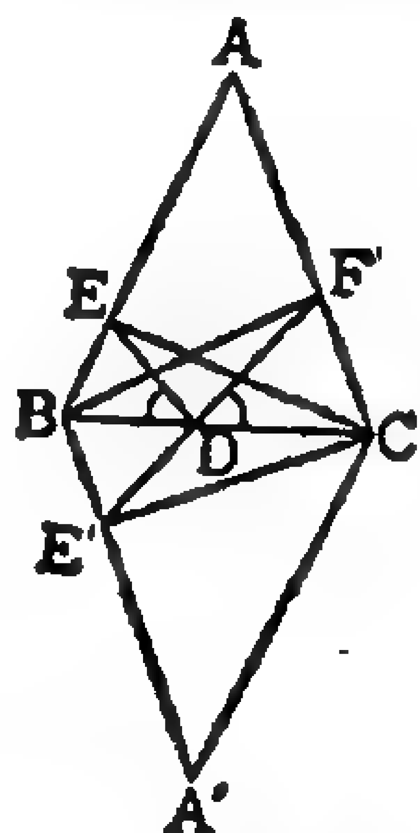
由①+②+③得

$$S_{\triangle BDE}+S_{\triangle BEF}+S_{\triangle BDF}$$
$$=S_{\triangle BAE}+S_{\triangle BEC}+S_{\triangle ABC},$$

因此$S_{\triangle DEF}=2S_{\triangle ABC}$. 即不管$l$的方向如

何，$\triangle DEF$ 的面积总等于 $\triangle ABC$ 面积的两倍。

754. 在等腰三角形 ABC 中，从底边 BC 上任取一点 D 作与底边夹成等角的两条直线 DE 和 DF，与 AB、AC 的交点分别为 E、F，则两三角形 BDF、CDE 面积相等。



解 取点 A 关于底边 BC 的对称点 A'，设 FD 的延长线与 $A'B$ 的交点为 E'，因为 $BA' \parallel AC$，所以

$$S_{\triangle BFE'}=S_{\triangle BCE'}.$$

从而 $$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle CDE'},$$

但 $$\angle EDB=\angle FDC=\angle E'DB,$$

因此 E 和 E' 是关于 BC 的对称点。

$$\therefore\quad S_{\triangle CDE'}=S_{\triangle CDE},$$

故 $$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle CDE}.$$

755. 在三角形 ABC 的边 CA、CB 上分别取点 D、E，使

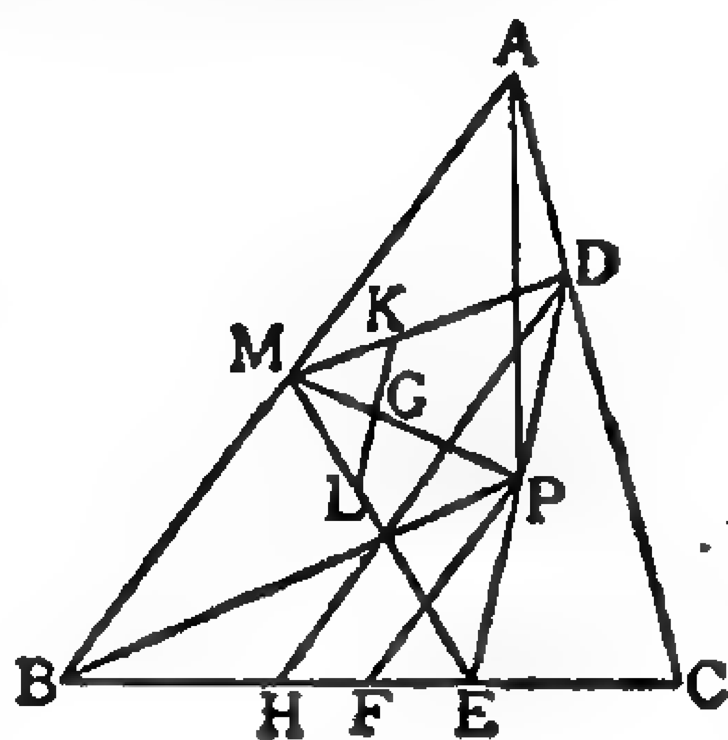
$$CD=2AD,\quad CE=\frac{1}{2}EB.$$

(1) 如果点 P 是线段 DE 的中点，F 是 BC 的中点，证明 $PF \parallel AB$。

(2) 点 P 在线段 DE 上移动时，确定 $\triangle ABP$ 的重心移动范围。

(3) 点 P 是线段 DE 的中点时，则

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}.$$



解 (1) 设 BE 的中点为 H，HE 的中点为 F，则 D、H 是 AC、BC 的三等分点，所以 $DH \parallel AB$。而 P、F 分别是 ED、EH 的中点，有 $PF \parallel DH$。

$$\therefore\quad PF \parallel AB.$$

(2) 设 AB 的中点为 M，在 MP 上取一点 G，使

$$PG=\frac{2}{3}PM,$$

则 G 是 $\triangle APB$ 的重心。而在 DM、EM 上分别取点 K、L，当

$$DK=\frac{2}{3}DM,\quad EL=\frac{2}{3}EM$$

时，因为 K、G、L 在一直线上，所以 G 在线段 KL 上移动。

(3) 由(1)知 $PF \parallel AB$，所以

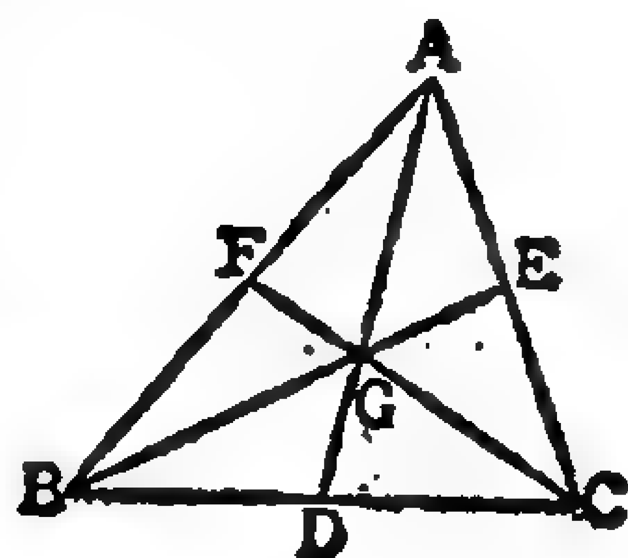
$$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABF},$$

F 为 BC 的中点。

$$\therefore\quad S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

故 $$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}.$$

756. 在三角形 ABC 内取一点 G，若三角形 ABG、ACG、BCG 面积相等，则 G 是这个三角形的重心。

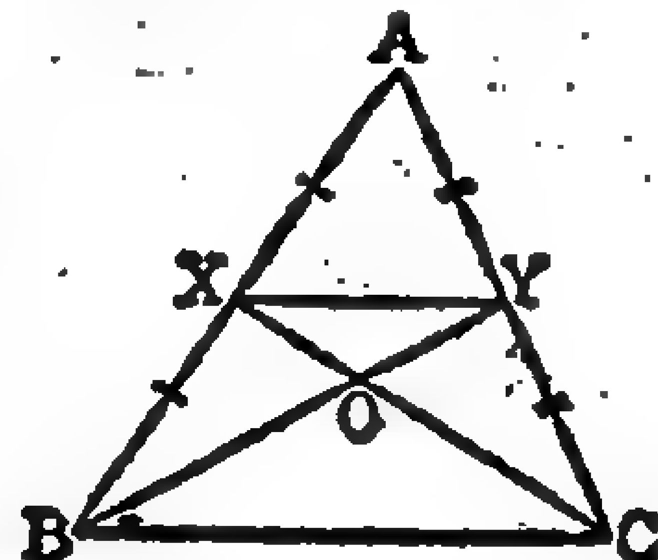


解 按假设

$$S_{\triangle ABG}=S_{\triangle ACG},$$

延长 AG 与 BC 交于点 D，则 $BD=DC$（由问题 743），即 AD 是这个三角形的中线。同理，BE、CF 也是这个三角形的中线，所以 G 是这个三角形的重心。

757. 设三角形 ABC 的边 AB、AC 的中点分别为 X、Y，BY、CX 的交点为 O，则



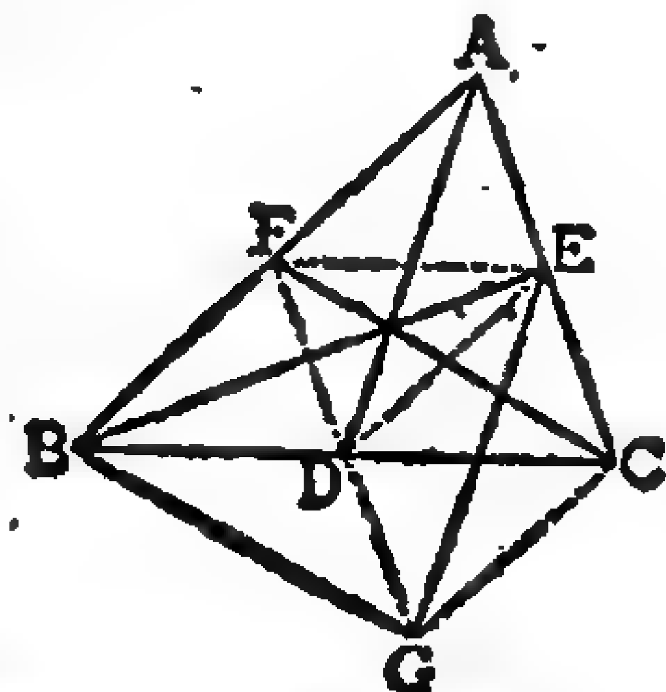
$$S_{\triangle AXY}=3S_{\triangle XOY}.$$

解 因 $AY=YC$，$\therefore\ S_{\triangle AXY}=S_{\triangle XCY}$，由于两条中线 BY、CX 的交点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，于是有 $CX=3\cdot OX$。

$$\because\quad S_{\triangle XCY}=3S_{\triangle OXY},$$

$$\therefore\quad S_{\triangle AXY}=3S_{\triangle XOY}.$$

758. 以三角形三条中线为三边的三角形的面积，等于原三角形面积的四分之三。



解 设 $\triangle ABC$ 的三条中线为 AD、BE、CF，连结两点 FD，并延长到 G 点，使 $DG=FD$，连接 CG，则 $FBGC$ 是平行四边形。

$$\therefore\quad BG=FC.$$

又 FDG 平行 AC，

$$FD=DG=AE,$$

因此 $ADGE$ 是平行四边形，

$$\therefore \quad EG=AD.$$

因此$\triangle BGE$是以三边中线为边的三角形. D、E、F分别是BC、CA、AB的中点,有

$$\triangle AFE\cong\triangle FBD\cong\triangle DEF\cong\triangle EDC=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

因此D是FG的中点,所以

$$S_{\triangle DEG}=S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle DBG}=S_{\triangle FBD}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

又$FE\parallel BC$,

$$\therefore \quad S_{\triangle EBD}=S_{\triangle FBD}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC},$$

因而

$$S_{\triangle DEG}+S_{\triangle DBG}+S_{\triangle EBD}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\times 3,$$

故
$$S_{\triangle BEG}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}.$$

759. 若在等腰三角形$ABC(AB=AC)$的边AB上,任取一点P,由P作BC的垂线PD,则

$$S_{\triangle PDC}<\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

解 由A作BC的垂线AE,由P作BC的平行线与AE、AC分别交于F、G,则

$$S_{\triangle PDC}=S_{\triangle FDC}=S_{\triangle FED}+S_{\triangle FEC}.$$

但是
$$S_{\triangle FED}=S_{\triangle PFD}=S_{\triangle GFC}$$
$$(\because \quad PF=GF),$$

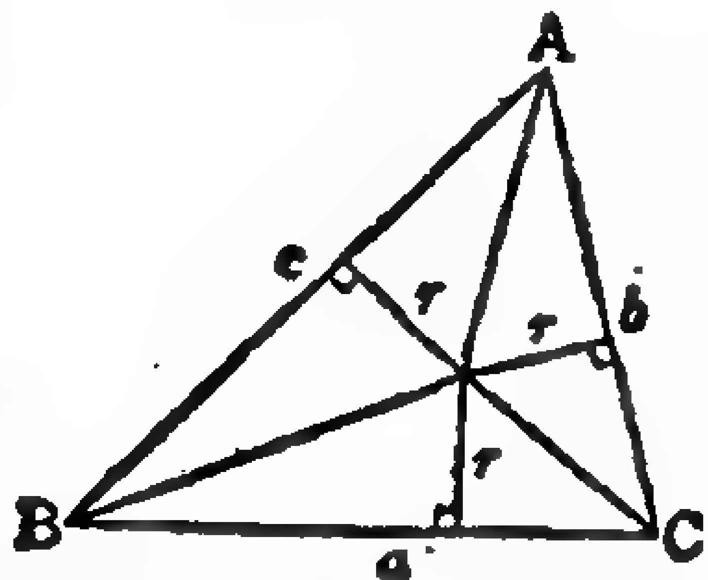
$$\therefore \quad S_{\triangle PDC}=\text{四边形}FECG\text{的面积}.$$

而四边形$FECG$的面积$<S_{\triangle AEC}$,

$$\therefore \quad S_{\triangle PDC}<S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

760. 设三角形三条高为l、m、n,内接圆的半径为r,证明

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}.$$



解 设$\triangle ABC$各边BC、CA、AB的长分别为a、b、c,各边上的对应高分别为l、m、n,则由$\triangle ABC$的面积得

$$2S=r(a+b+c)=al=bm=cn,$$

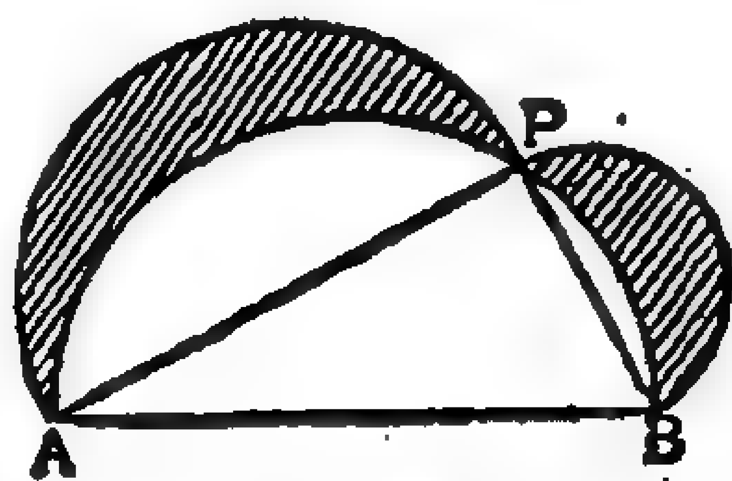
$$\therefore \quad \frac{2S}{r}=a+b+c,$$

$$\frac{2S}{l}=a,\quad \frac{2S}{m}=b,\quad \frac{2S}{n}=c,$$

得
$$\frac{2S}{r}=\frac{2S}{l}+\frac{2S}{m}+\frac{2S}{n},$$

故
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}.$$

761. 在以AB为直径的半圆周上取点P,设以PA、PB为直径,在$\triangle ABP$的外侧画两个半圆,则原圆弧与这两个半圆之间的两个月形面积的和等于$\triangle PAB$的面积.



解 两个月形的面积是以PA、PB为直径的两个半圆与$\triangle PAB$的和减去AB为直径的半圆. 设两个月形面积的和为S,则

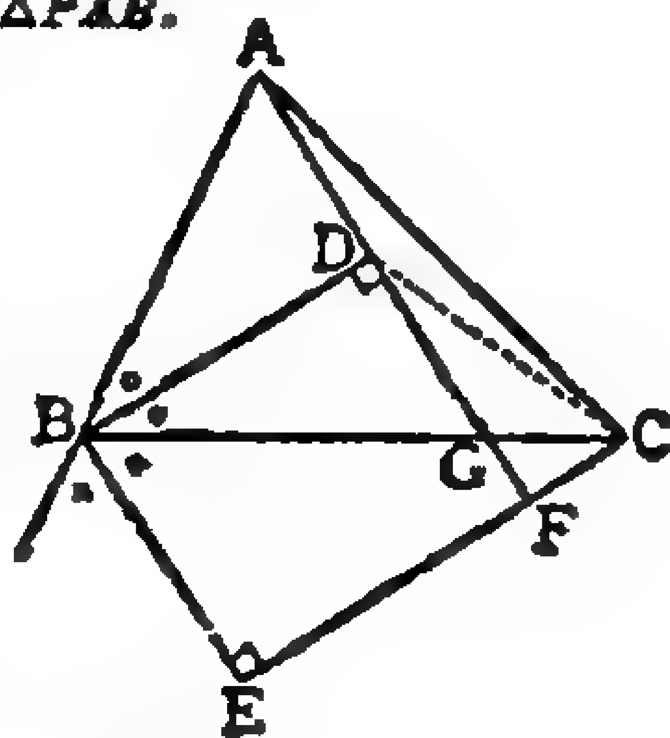
$$S=\frac{\pi}{8}(AP^2+BP^2)+S_{\triangle ABP}-\frac{\pi}{8}AB^2.$$

由于$\angle APB=90^\circ$,有$AP^2+BP^2=AB^2$.

$$\therefore \quad S=S_{\triangle PAB}.$$

762. 在三角形ABC中,由A作$\angle B$的平分线的垂线AD,由C作角B的外角平分线的垂线CE,设AD、CE的交点为F,则四边形

$$BEFD\text{的面积}=S_{\triangle ABC}.$$



解 设AF、BC的交点为G,在$\triangle ABG$中$BD\perp AG$. 因为BD是$\angle ABG$的平分线,所以
$$AD=DG.$$

$$\therefore \quad S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle DBC}.$$

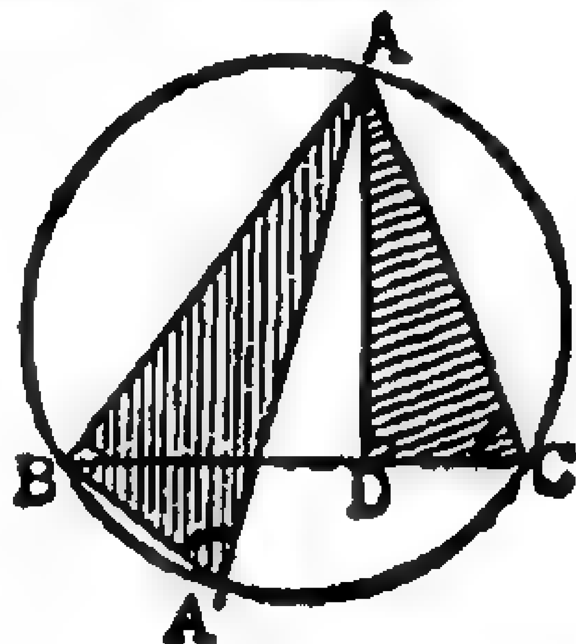
但$EC\parallel BD$,有

$$2S_{\triangle DBC}=\text{四边形}BEFD\text{的面积},$$

$$\therefore \quad S_{\triangle ABC}=\text{四边形}BEFD\text{的面积}.$$

763. 由三角形ABC的顶点A作底边的垂线,设垂足为D,外接圆半径为R,则

$$AB\cdot AC=2R\cdot AD.$$



解 设过A的直径的

另一端为A'，则

$$\angle ABA'=\angle R=\angle ADC,$$

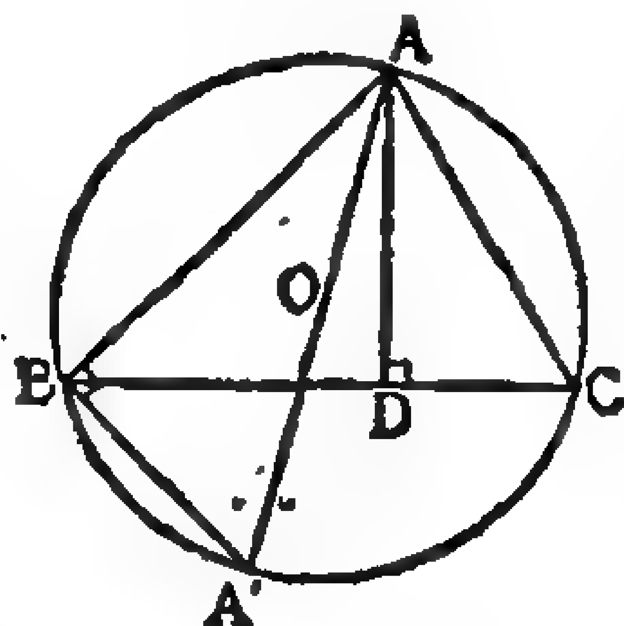
因 $\angle AA'B=\angle ACD.$

$\therefore\ \triangle ABA'\backsim\triangle ADC$(两角相等)，

因而 $AB:AD=AA':AC,$

故 $AB\cdot AC=AA'\cdot AD=2R\cdot AD.$

764. 设三角形ABC的边BC、CA、AB分别为a、b、c，其外接圆的半径为R，三角形ABC的面积为S，则



$$S=\frac{abc}{4R}.$$

解 设过A的直径的另一端为A'，由A作BC的垂线，垂足为D，由上题知

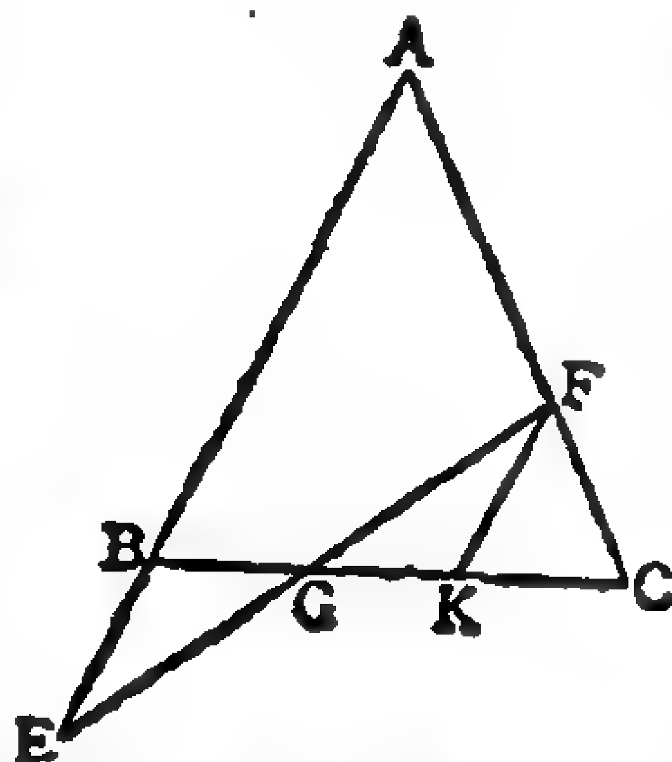
$$AB\cdot AC=2R\cdot AD,$$

但 $S=\frac{1}{2}AD\cdot BC,$

$$\therefore\ AB\cdot AC=2R\frac{2S}{BC},$$

故 $S=\frac{BC\cdot CA\cdot AB}{4R}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}.$

765. 在顶角相等，夹顶角的两边之和等于定长l的三角形中，等腰三角形的面积最大。



解 设顶角相等，夹此角两边的和等于l的两个三角形ABC、AEF，使其等角重迭。若ABC是等腰三角形，另一三角形为AEF，则

$$AB+AC=AE+AF=l,$$

即 $2AB=AE+AF=l.$

当$AE>AB$，那么$AF<AC$，所以E在AB的延长线上，F在边AC上。

又作$FK\parallel BE$，则由$AB=AC$，有$FK=FC$。而由$BE=FC$，有$BE=FK$，所以

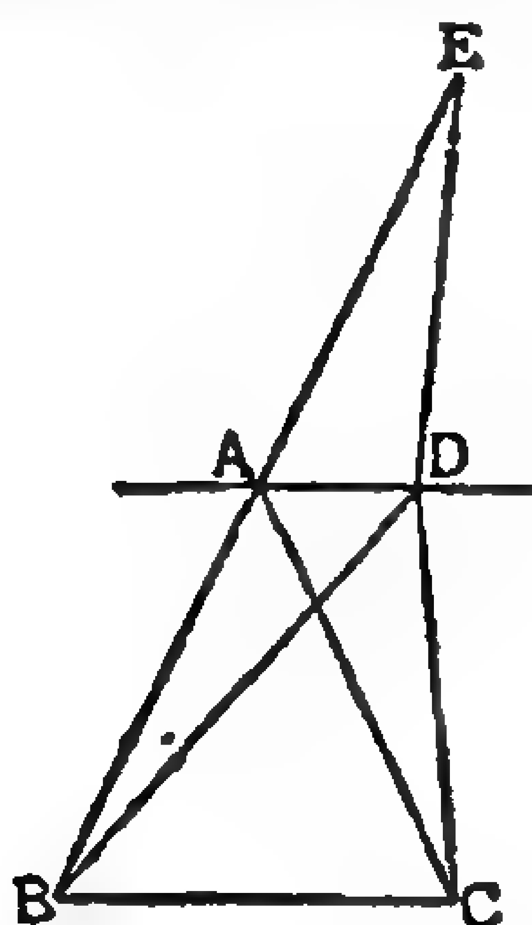
$$\triangle BEG\cong\triangle KFG.$$

$$\therefore\ S_{\triangle BEG}<S_{\triangle FGC}.$$

由此 $S_{\triangle AEF}<S_{\triangle ABC},$

即两边的和与其夹角相等的三角形中，等腰三角形面积最大。

766. 在同底且面积相等的三角形中，等腰三角形的周长最短。



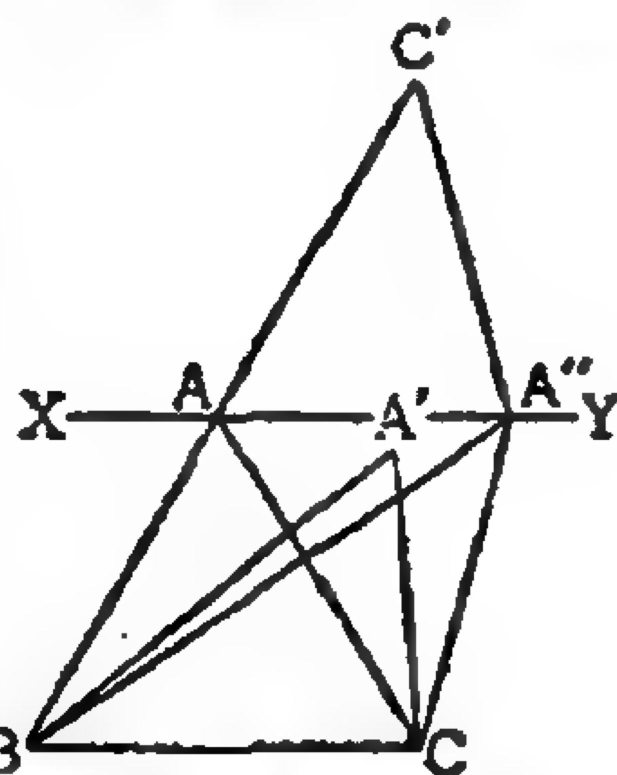
解 设$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\triangle DBC$是与$\triangle ABC$同底等面积的任意三角形，则两三角形高相等，所以D在过点A且与BC平行的直线上。另外在BA的延长线上取$AE=AC$，由$AD\parallel BC$，$AB=AC$，有$\angle EAD=\angle CAD$，可知三角形AED、ACD全等，所以$DE=DC$。因此$DB+DC=DB+DE$，并且$BE<DB+DE$。但是

$$AB+AC=BE,$$

$$\therefore\ AB+AC<DB+DC,$$

故三角形ABC的周长比三角形DBC的周长小。

767. 在同底且周长相等的三角形中，等腰三角形的面积最大。



解 设$\triangle ABC$为等腰三角形，$A'BC$是与$\triangle ABC$同底等周长、且在BC同侧的三角形。由题意得：

$$AB+AC=A'B+A'C.$$

过A作与BC平行的直线XY，则A'在BC与XY之间。这是因为，如果A'在XY上A''的地方，延长BA，取点C'，使$AC'=AC$，则C'与C是关于直线XY的对称点，

$$A''C=A''C',$$

$$A''B+A''C=A''B+A''C'>BC'$$
$$=AB+AC,$$

与假设矛盾。如果A'与BC在XY的异侧，则因为$A'C$与XY的交点为A''，有

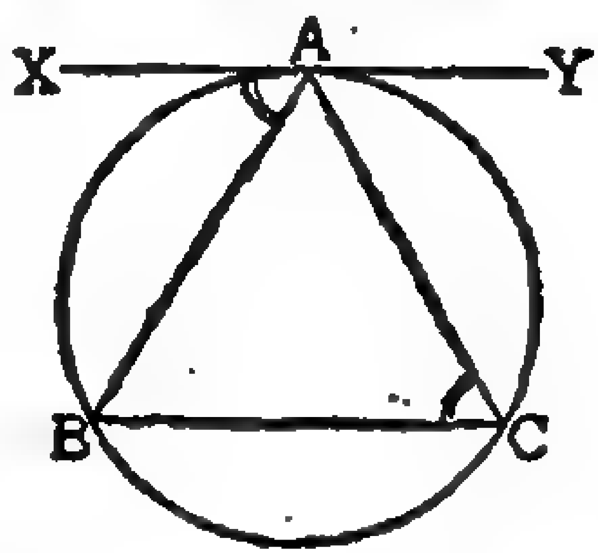
$$A'B+A'C=A'B+A'A''+A''C>A''B+A''C$$
$$=A''B+A''C'\geq BC'=AB+AC,$$

同样与假设矛盾。所以A'是在BC和XY之间，因而$S_{\triangle ABC}>S_{\triangle A'BC}$，故等腰三角形$ABC$的面积最大。

768. 在同顶角A的各种三角形中，若底边过顶角内一定点O，则这些三角形中其底边被点O平分时面积最小。

解　若三角形 ABC 的底边 BC 被点 O 平分，三角形 AEF 的底边 EF 过点 O，有

$$EO>OF.$$

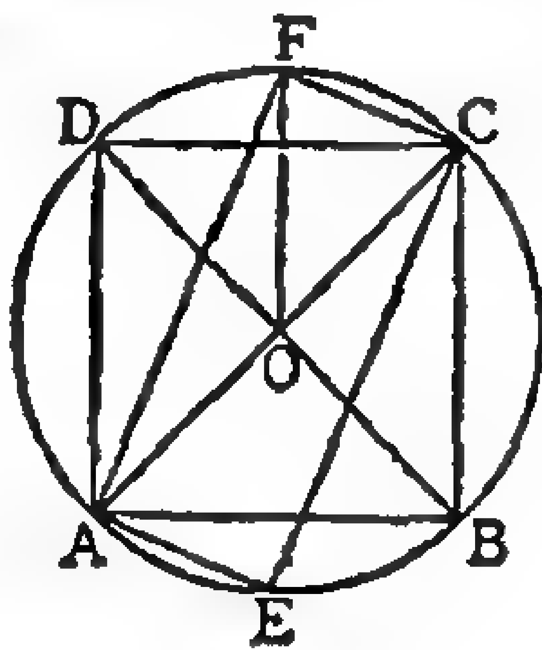


过 B 作 AC 的平行线 BD，又 BD 与 EO 的交点为 D，则

$$\triangle BOD\cong\triangle COF.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle AEF}>S_{\triangle ABC}.$$

769.　在定圆的内接三角形中，若三角形 ABC 的面积不小于其他三角形面积，则过点 A、B、C 的各切线分别与 BC、AC、AB 平行，并且 ABC 是等边三角形.

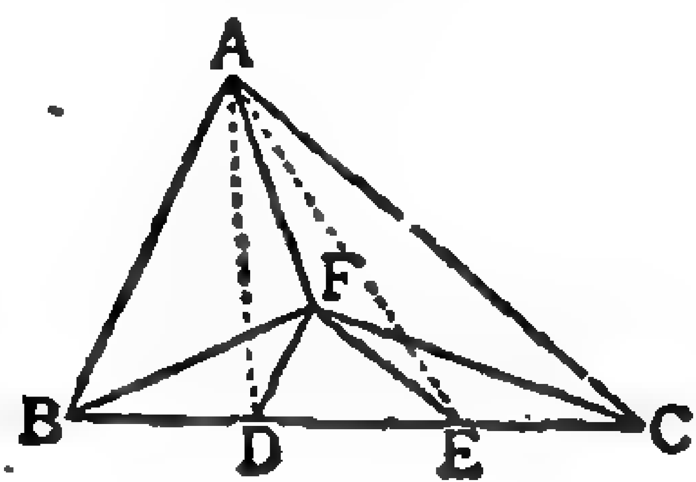


解　首先考虑固定 BC，若 A 是弧 BAC 的中点时，则从 BC 到点 A 的高最大，这时三角形面积最大，即 $AB=AC$。同样，$CA=CB$ 时，即 $\triangle ABC$ 为正三角形时，比其它任何内接三角形的面积都大。过 A 作切线 XAY，有

$$\angle XAB=\angle C=\angle B,$$

由此可知 $XY\parallel BC$。过 B、C 作切线时也是如此。

770.　在所有的圆内接长方形中，以四条边都相等的长方形，即正方形的面积最大。



解　设圆内接正方形为 $ABCD$，长方形为 $AECF$，圆心为 O，则在三角形 DOC、FOC 中，OC 为公共，$DO=FO$，$\angle DOC=\angle R$，$\angle FOC<\angle R$，

$$\therefore\quad S_{\triangle DOC}>S_{\triangle FOC}.$$

正方形 $ABCD$ 的面积 $=4S_{\triangle DOC}$，

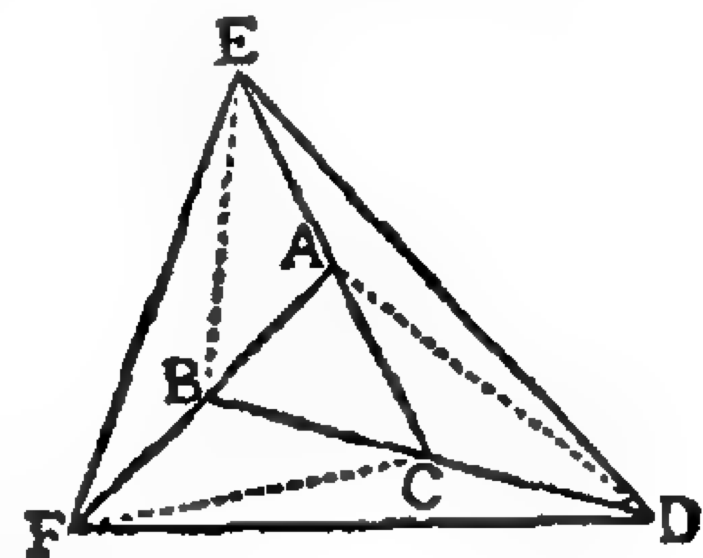
矩形 $AECF$ 的面积 $=4S_{\triangle FOC}$，

$\therefore$　正方形 $ABCD$ 的面积 $>$ 矩形 $AECF$ 的面积。

由此得出，在圆内接长方形中，正方形面积最大。

771.　设三角形 ABC 的边 BC 被 D、E 三等分，由 D 和 E 分别作 AB 和 AC 的平行线交于点 F，则

$$S_{\triangle FAB}=S_{\triangle FBC}=S_{\triangle FCA}.$$



解　由 $FD\parallel AB$，$\therefore\ S_{\triangle FAB}=S_{\triangle DAB}$.

因为　$BD=DE=EC$，

所以三个三角形 ABD、ADE、AEC 的面积都相等，等于 $\frac{1}{3}\triangle ABC$.

$$\therefore\quad S_{\triangle FAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

又　$FE\parallel AC$，$\therefore\ S_{\triangle FCA}=S_{\triangle ECA}$.

$$\therefore\quad S_{\triangle FCA}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle FBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore\quad S_{\triangle FAB}=S_{\triangle FCA}=S_{\triangle FBC}.$$

772.　设三角形 ABC 的外接圆半径为 R，内接圆半径为 r，边 BC、CA、AB 的长分别为 a、b、c，证明当 $ac=6Rr$，有

$$a+c=2b.$$

解　设这个三角形的面积为 S，由问题 **760**、**764** 有

$$r=\frac{S}{\frac{1}{2}(a+b+c)},\quad R=\frac{abc}{4S}.$$

所以如将此式代入 $ac=6Rr$，得

$$ac=6\times\frac{abc}{2(a+b+c)}=\frac{3abc}{a+b+c}.$$

因而　$a+b+c=3b$，　$\therefore\ a+c=2b$.

注　因为 $a+c=2b$，所以三边 a、b、c 按这个顺序构成等差数列。

773.　若延长三角形 ABC 的边 BC、CA、AB，使 $CD=BC$，$AE=CA$，$BF=AB$，则 $S_{\triangle DEF}=7S_{\triangle ABC}$.

解　因为 $BC=CD$，$CA=AE$，$AB=BF$，所以
$$S_{\triangle BFD}=2S_{\triangle BFC}=2S_{\triangle ABC},$$
$$S_{\triangle CDE}=2S_{\triangle CDA}=2S_{\triangle ABC},$$
$$S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle AEB}=2S_{\triangle ABC}.$$

故

$$S_{\triangle DEF}=(2S_{\triangle ABC})\times3+S_{\triangle ABC}=7S_{\triangle ABC}.$$

774.　设直角三角形 ABC 的内切圆 I 与斜边 AC 和边 BC 的切点分别为 P、Q。又设

角A内的旁切圆与边AB的延长线的切点为R，试回答以下问题:

(1) 设$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB的长分别为a、b、c，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$时，则AR和CQ的长用a、b、c、s来表示.

(2) 设I为内切圆中心时，证明

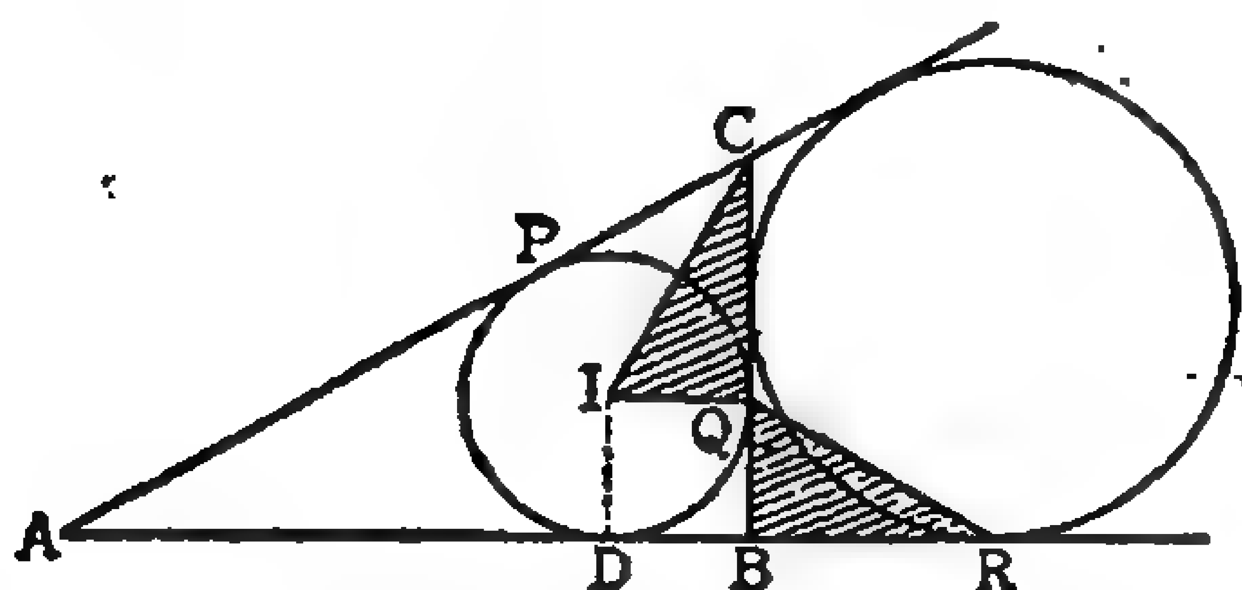
$$\triangle BQR\cong\triangle QIC.$$

(3) 证明三点P、Q、R在一直线上.

解 (1) 由问题**444**、**446**得

$$AR=\frac{1}{2}(a+b+c)=s,$$

$$CQ=s-AB=s-c.$$



(2) 因为$BR=AR-AB=s-c$，又$CQ=s-c$，$BQID$是正方形. 所以

$$QI=QB,\ \angle B=\angle IQC=\angle R,$$

$$\therefore\ \triangle BQR\cong\triangle QIC.$$

(3) 因为$\triangle BQR$、$\triangle QIC$全等，由于

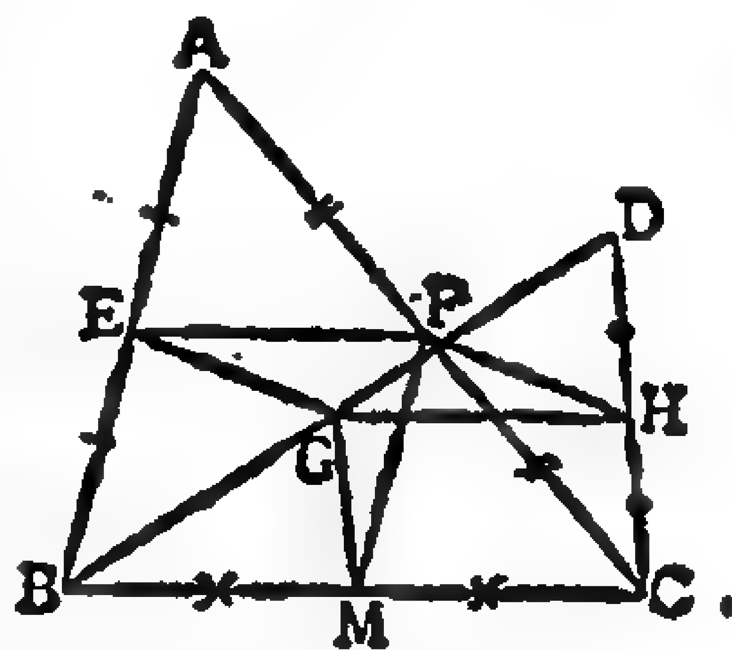
$$BQ\perp QI,\ BR\perp QC,$$

所以在第三边上也有$QR\perp IC$. ①

又连结PQ，$PQ\perp IC$. ②

由①、②有P、Q、R在一条直线上.

775. 在共底边BC的同侧作两个三角形ABC、DBC，设边AB、AC、DB、DC的中点分别为E、F、G、H，则四边形$EGHF$的面积等于$\triangle ABC$与$\triangle DBC$面积之差的一半.



解 设M为BC的中点，E、F分别为AB、AC的中点.

所以

$$\square EBMF\text{的面积}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}, \quad ①$$

$$\square GMCH\text{的面积}=\frac{1}{2}S_{\triangle DBC}. \quad ②$$

因G、H分别是DB、DC的中点，所以

$$GH=BM=MC,$$

因此三个平行四边形$EGHF$、$EBMF$、$GMCH$有相等的底边，所以其面积与其高成比例.

因$\square EGHF$的高等于$\square EBMF$的高与$\square GMCH$的高之差，所以

$$\square EGHF\text{的面积}=\square EBMF\text{的面积}\sim\square GMCH\text{的面积}.$$

将①、②代入这个等式，得

$$\square EGHF\text{的面积}=\frac{1}{2}(S_{\triangle ABC}\sim S_{\triangle DBC}).$$

776. 若同底等高的三角形ABC、DBC在BC的同侧，BA、CD的交点为O，$OE\parallel BD$，$OF\parallel AC$，则$BE=CF$.

解 因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}$，$A$和$D$在$BC$的同侧，所以$AD\parallel BC$，

$$\therefore\ S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD},$$

$$\therefore\ S_{\triangle OBD}=S_{\triangle OCA}.$$

由 $OE\parallel BD$，

$OF\parallel AC$，

有

$S_{\triangle OBD}=S_{\triangle EBD}$，

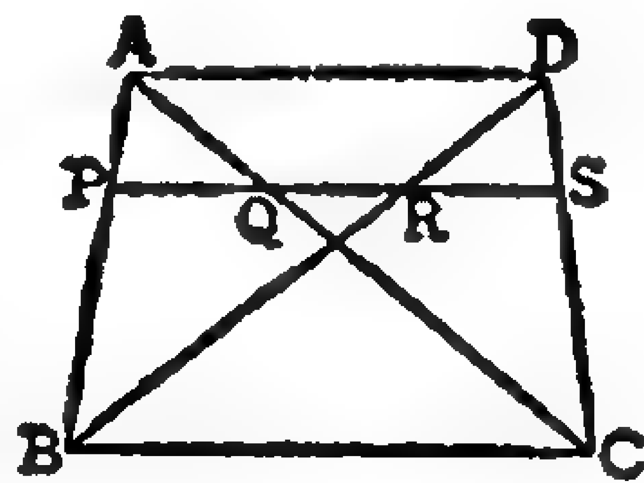
$S_{\triangle OCA}=S_{\triangle FCA}$.

$$\therefore\ S_{\triangle EBD}=S_{\triangle FCA},$$

从而这两个三角形高相等.

$$\therefore\ BE=CF.$$

777. 若在公共底边同侧的两个三角形的面积相等，则与底边的平行线被每个三角形其他两边截得的线段相等.



解 设面积相等的两个三角形为ABC、DBC，底边BC的平行线与边AB、AC、DB、DC或其延长线的交点分别为P、Q、R、S，则由这两个三角形是同底等面积，其高相等，从而$AD\parallel BC$.

$$\therefore\ AD\parallel BC\parallel PS,$$

$$\therefore\ \frac{AP}{AB}=\frac{DS}{DC},\ \frac{PQ}{BC}=\frac{RS}{BC}.$$

故 $PQ=RS$.

778. 从$\triangle ABC$底边的两端B、C，在三角形同侧分别作BC的垂线BD、CE等于三角形的高AL的两倍，若F和G分别为AB、

AC的中点，$\angle ABC$、$\angle ACB$都是锐角，则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CEG}.$$

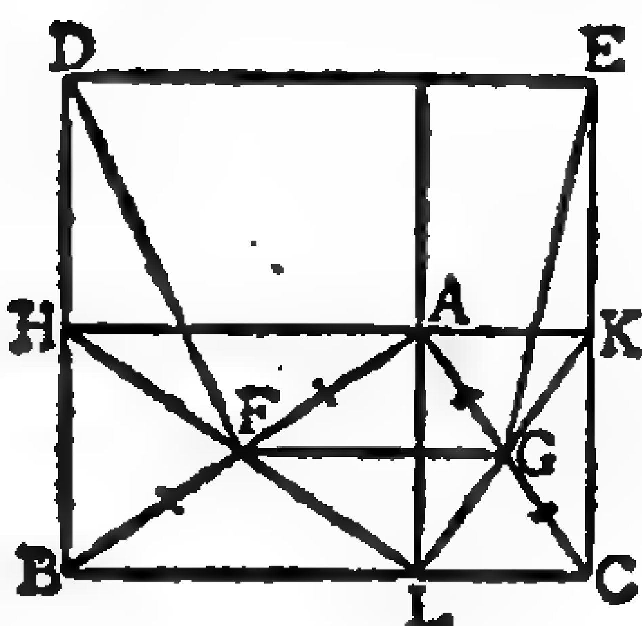
若$\angle ABC$为钝角，则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CEG}-S_{\triangle BDF}.$$

解 设过A作BC的平行线与DB、EC的交点分别为H、K，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\ \square HBCK\text{ 的面积}$$
$$=\frac{1}{2}\ \square HBLA\text{ 的面积}$$
$$+\frac{1}{2}\ \square ALCK\text{ 的面积}.$$

又F和G分别为AB、AC的中点，所以HL、KL分别过F、G。但在$\triangle BFD$、$\triangle HBL$中，$DH=HB$，$HF=FL$。



$\therefore\quad S_{\triangle DHF}=S_{\triangle BHF}=S_{\triangle BFL}$，

$\therefore\quad S_{\triangle BDF}=S_{\triangle HBL}.$

同理，

$S_{\triangle CEG}=S_{\triangle LCK}.$

即 $\quad S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}\ \square HBLA$的面积，

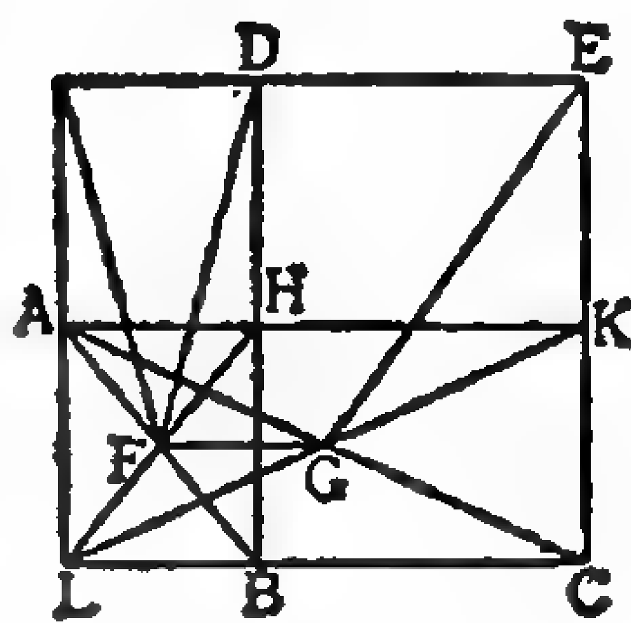
$$S_{\triangle CEG}=\frac{1}{2}\ \square ALCK\text{ 的面积}.$$

因此 $\quad S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CEG}.$

若$\angle ABC$为钝角，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\ \square ALCK\text{ 的面积}$$
$$-\frac{1}{2}\ \square ALBH\text{ 的面积}.$$

因此与上面一样，得



$\frac{1}{2}\ \square ALCK$ 的面积

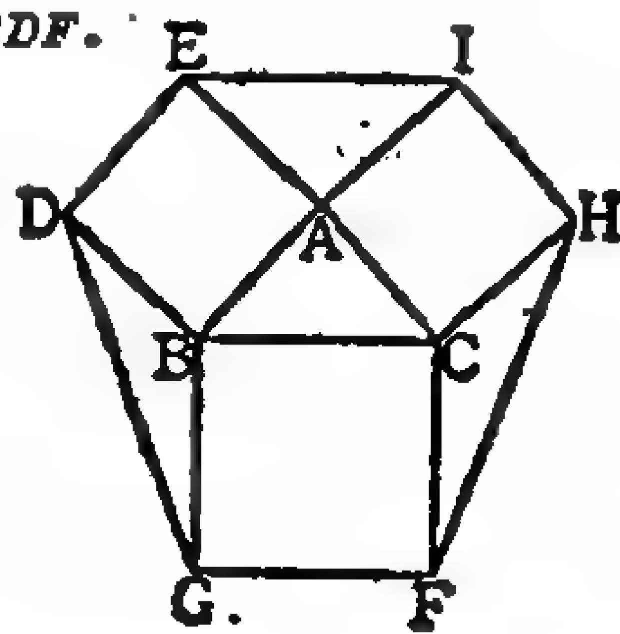
$=S_{\triangle CEG}$，

$\frac{1}{2}\ \square ALBH$ 的面积

$=S_{\triangle BDF}.$

$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CEG}-S_{\triangle BDF}.$

779. 若以$\triangle ABC$的各边为边分别向外侧作正方形$ABDE$、$BCFG$、$ACHI$，则三角形AIE、BDG、CFH面积相等。



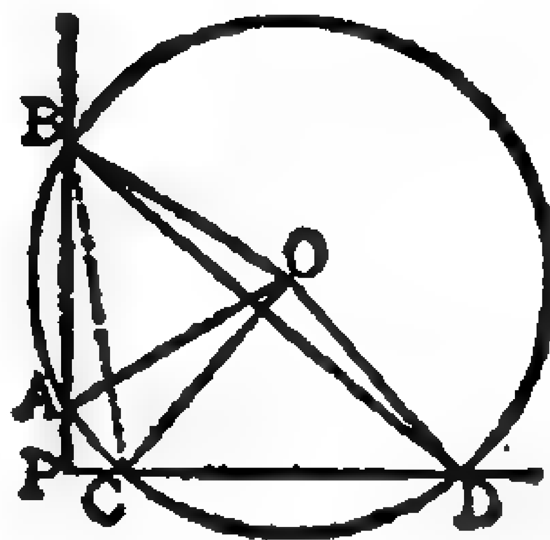
解 由于$\angle CAI=\angle EAB=\angle R$，所以$\angle IAE$、$\angle BAC$互补。两个三角形$AIE$、$ACB$的两边分别相等，它的夹角互补，所以

$$S_{\triangle AIE}=S_{\triangle ACB}\text{(问题 793)}.$$

同理 $\quad S_{\triangle BDG}=S_{\triangle BAC}$，$S_{\triangle CFH}=S_{\triangle CBA}$，

所以 $\quad S_{\triangle AIE}=S_{\triangle BDG}=S_{\triangle CFH}.$

780. 若从圆O外一点P向该圆作互相垂直的两条割线PAB、PCD，则



$$S_{\triangle OAC}=S_{\triangle OBD}.$$

解 $\quad\angle P=\angle BCD-\angle ABC=\angle R$，

$\therefore\quad 2\angle BCD-2\angle ABC=2\angle R$，

$\begin{cases}2\angle BCD=\text{优角 }BOD\text{(圆心角)},\\2\angle ABC=\angle AOC\text{(圆心角)}.\end{cases}$

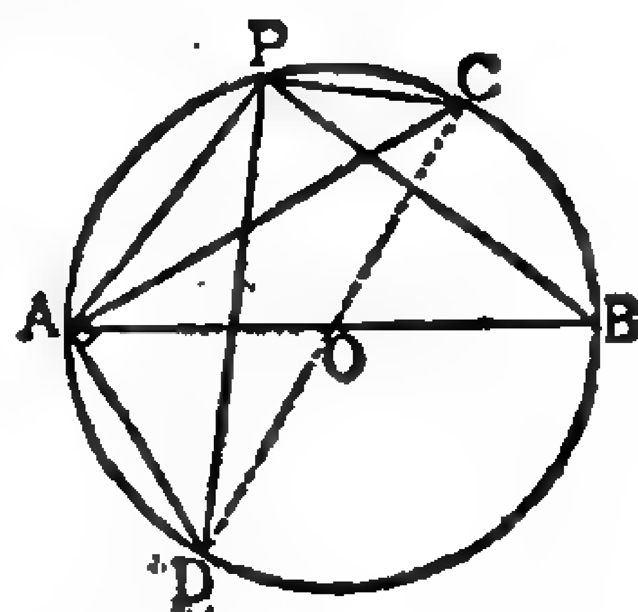
$\therefore\quad (4\angle R-\angle BOD)-\angle AOC=2\angle R$，

即 $\quad\angle BOD+\angle AOC=2\angle R$，

由问题 738 得

$$S_{\triangle OAC}=S_{\triangle OBD}.$$

781. 过圆O直径AB的一端A作互相垂直的两弦AC、AD，若在劣弧AC上取一点P，则



$S_{\triangle APB}=S_{\triangle APC}+S_{\triangle APD}.$

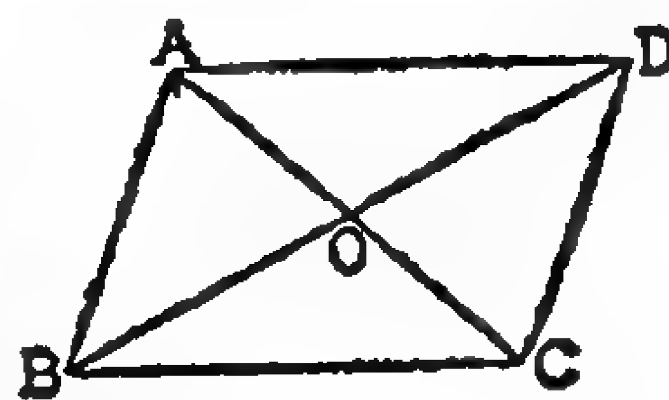
解 在同底边AP上的两个三角形APC、APD中，连结顶点CD，由于$\angle DAC=\angle R$，有CD过圆心O。所以由问题 742 有$S_{\triangle APC}+S_{\triangle APD}=2S_{\triangle APO}$。

又 $\quad 2S_{\triangle APO}=S_{\triangle APB}$，

$\therefore\quad S_{\triangle APC}+S_{\triangle APD}=S_{\triangle APB}.$

3. 平行四边形的面积

782. 平行四边形的两条对角线把它分为四个面积相等的三角形。



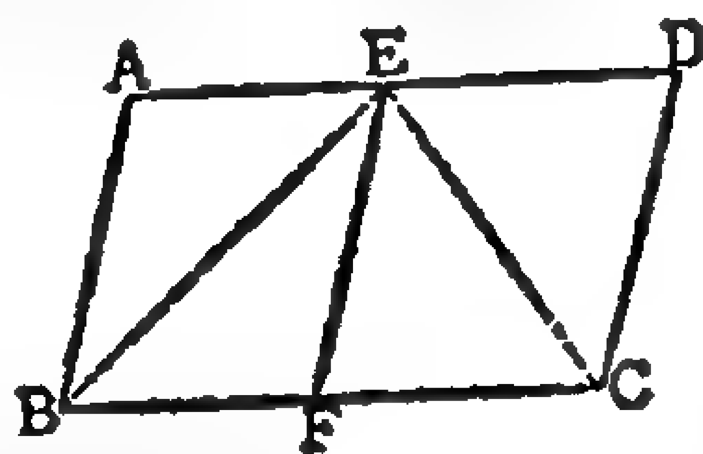
解 设平行四边形为$ABCD$，它的对角线的交点为O，在$\triangle ABD$中，O是BD的中点，所以

$$S_{\triangle ABO}=S_{\triangle AOD}.$$

同理，在$\triangle BAC$中$S_{\triangle BAO}=S_{\triangle BCO}$，在$\triangle CBD$中$S_{\triangle CBO}=S_{\triangle COD}$。

$\therefore\ S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OCD}=S_{\triangle ODA}.$

783. 在平行四边形 $ABCD$ 的一边 AD 上任取一点 E，若连接 EB、EC，则 $\triangle EBC$ 的面积等于平行四边形 $ABCD$ 面积的一半。

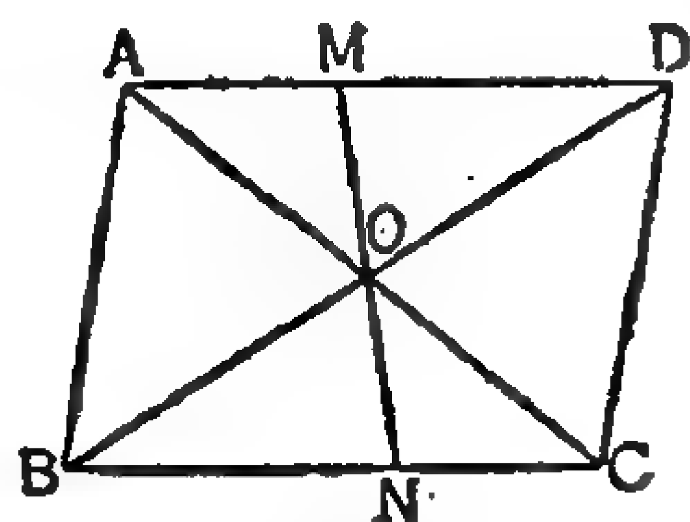


解 过 E 作 AB 的平行线 EF 与 BC 的交点为 F，则有

$$S_{\triangle EBF}=S_{\triangle EBA},\ S_{\triangle ECF}=S_{\triangle ECD}.$$

$$\therefore\ S_{\triangle EBC}=\frac{1}{2}\square ABCD\text{ 的面积.}$$

784. 过平行四边形的对角线交点的任意直线，将它分为两个相等的四边形。



解 设任意直线过平行四边形 $ABCD$ 对角线交点 O，与边 AD、BC 的交点分别为 M、N，则

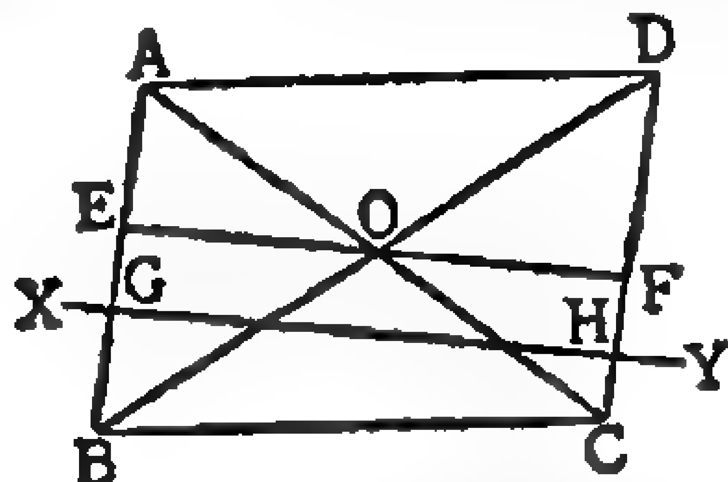
$$\triangle OMA\cong\triangle ONC,\ \triangle OAB\cong\triangle OCD,$$
$$\triangle OBN\cong\triangle ODM.$$

将各等式的两边分别相加，得

四边形 $ABNM$ 的面积

$=$四边形 $CDMN$ 的面积。

785. 若一直线 XY 平分平行四边形 $ABCD$ 的面积，则 XY 过对角线交点 O。



解 设 XY 不过点 O，则过点 O 作 XY 的平行线，与边 AB、CD 的交点分别为 E、F，由上题有

四边形 $AEFD$ 的面积

$$=\frac{1}{2}\square ABCD\text{ 的面积,}$$

但因四边形 $AGHD$ 的面积$\neq$四边形 $AEFD$ 的面积。

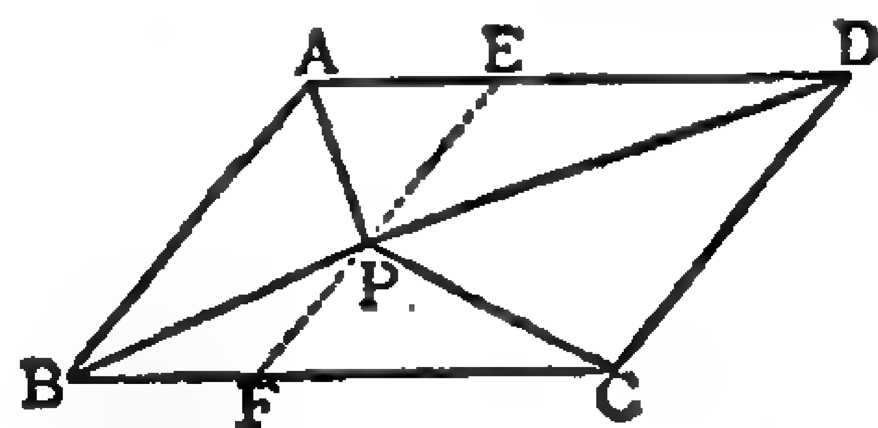
因此四边形 $AGHD$ 的面积$\neq$四边形 $GBCH$ 的面积，这与假设矛盾。

故 XY 必过点 O。

786. 在平行四边形 $ABCD$ 内任取一点 P，若连接 PA, PB, PC, PD，则

$$S_{\triangle APB}+S_{\triangle CPD}=S_{\triangle APD}+S_{\triangle BPC}.$$

解 过 P 点作 AB 的平行线 EPF 与 AD、BC 交于 E、F，于是 $ABFE$、$EFCD$ 都是平行四边形。由问题 783 有



$$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\square ABFE\text{ 的面积,}$$

$$S_{\triangle CPD}=\frac{1}{2}\square EFCD\text{ 的面积.}$$

$$\therefore\ S_{\triangle APB}+S_{\triangle CPD}=\frac{1}{2}\square ABCD\text{的面积.}$$

因此

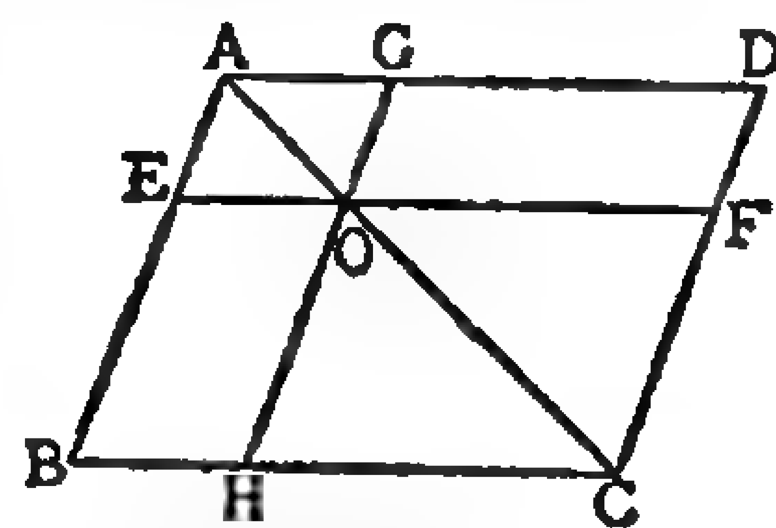
$$S_{\triangle APD}+S_{\triangle BPC}=\frac{1}{2}\square ABCD\text{ 的面积,}$$

$$\therefore\ S_{\triangle APB}+S_{\triangle CPD}=S_{\triangle APD}+S_{\triangle BPC}.$$

787. 过平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上的任意点 O，作与各边平行的直线，与 AB、CD 及 AD、BC 的交点分别为 E、F 及 G、H，则

$\square EBHO$ 的面积$=\square GOFD$ 的面积。

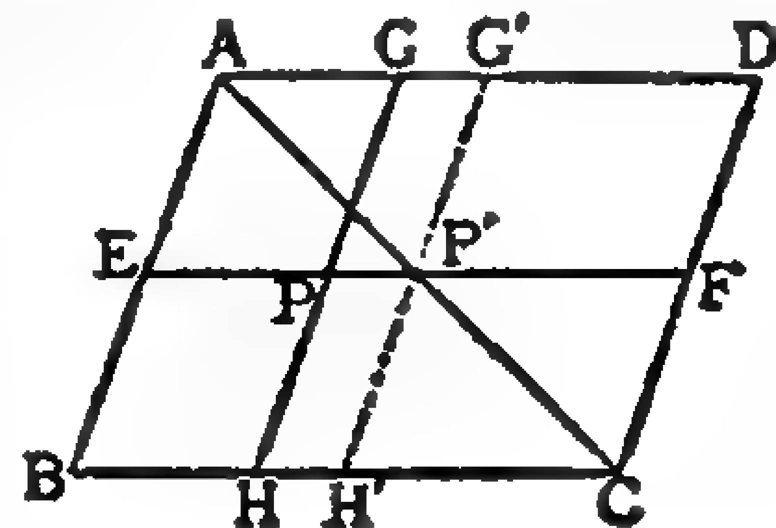
解 因为 $AEOG$、$EBHO$、$OHCF$、$OFDG$ 都是平行四边形，所以它们的一条对角线把它分为两个全等的三角形。所以



$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD},$$
$$S_{\triangle AEO}=S_{\triangle AGO},\ S_{\triangle OHC}=S_{\triangle OFC}.$$

故　$\square EBHO$ 的面积$=\square GOFD$ 的面积。

788. 过平行四边形 $ABCD$ 内的一点 P 作各边的平行线 EF、GH，若 $\square EBHP$ 的面积$=\square GPFD$ 的面积，则 P 在 AC 上。



解 设 P 不在 AC 上，EF 和 AC 的交点为 P'。根据上题

$\square EBH'P'$ 的面积$=\square G'P'FD$ 的面积，

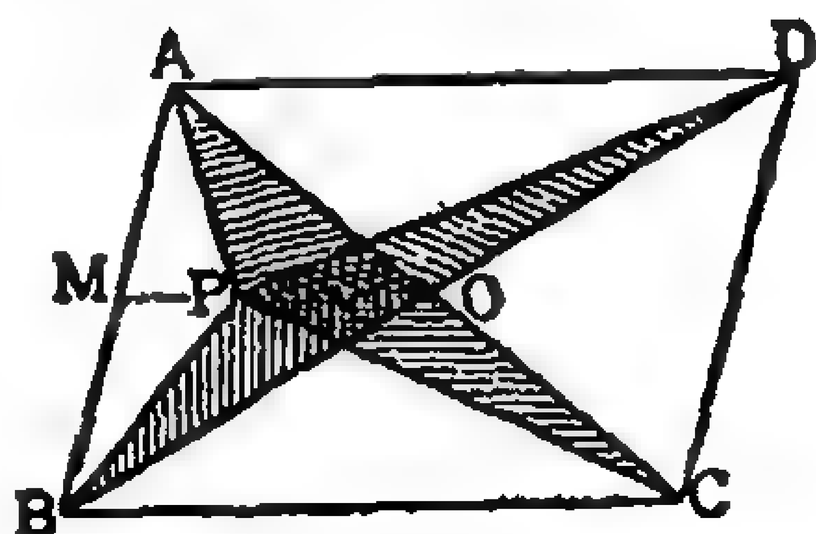
而 P 在 EP' 上，则

$\square EBHP$ 的面积$<\square EBH'P'$ 的面积

$=\square G'P'FD$ 的面积$<\square GPFD$ 的面积。

∴ □$EBHP$的面积<□$GPFD$的面积，这与假设矛盾. 所以P在AC上.

789. 设平行四边形$ABCD$的对角线AC、BD的交点为O, P为三角形AOB内的一点,试比较三角形APC和BPD的面积大小.



解 若$OP\parallel AD$, 则

$$S_{\triangle APO}=S_{\triangle DPO}, S_{\triangle BPO}=S_{\triangle CPO}.$$

$$\therefore S_{\triangle APC}=S_{\triangle BPD}.$$

其次, 设AB的中点为M, 若P与B在OM的同侧,则

$$\left.\begin{array}{l}S_{\triangle APO}>S_{\triangle DPO}\\ S_{\triangle CPO}>S_{\triangle BPO}\end{array}\right\} \quad \therefore S_{\triangle APC}>S_{\triangle BPD}.$$

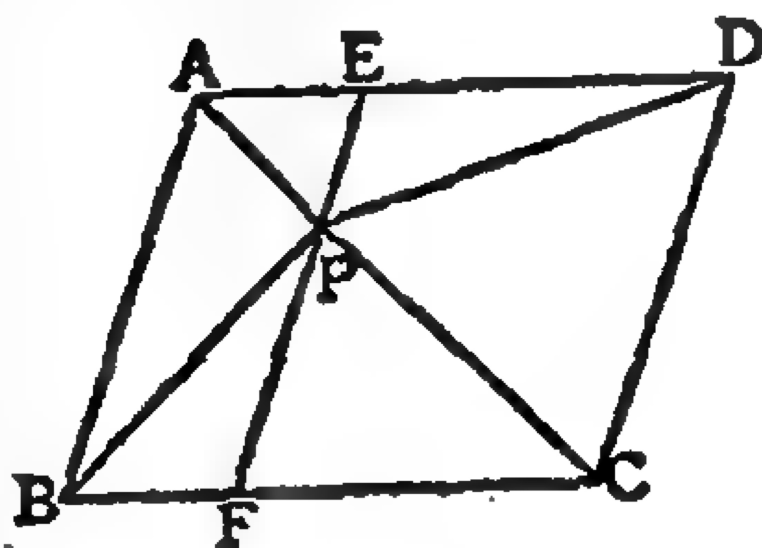
又若P与A在OM的同侧时, 则与上式相反,有$S_{\triangle APC}<S_{\triangle BPD}$.

790. 在四边形内任取一点P, 设

$$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}$$

是定值,则$ABCD$为平行四边形.

解 过P作AB的平行线EF, 与AD、BC的交点分别为E、F, 因为点P在EF上, 所以$S_{\triangle PAB}$为定值. 根据假设$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}$是定值,所以$S_{\triangle PCD}$必须也是定值.



因此 $EF\parallel CD$, ∴ $AB\parallel CD$.

其次在四边形$ABCD$中,若

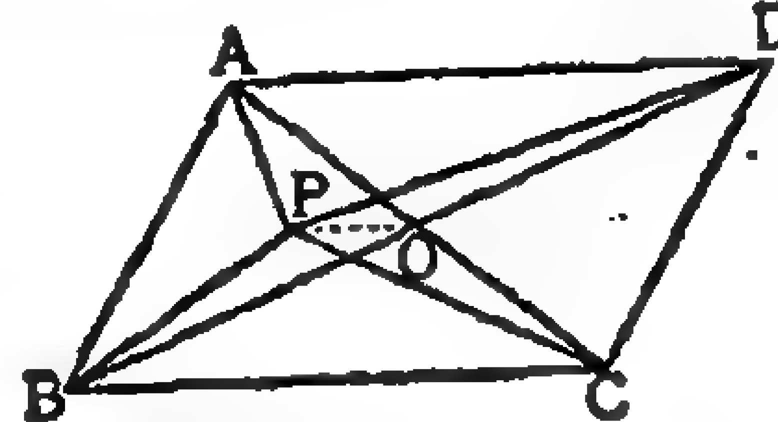
$$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}$$

一定,则

$$S_{\triangle APD}+S_{\triangle BPC}$$

也一定. 同理,有$AD\parallel BC$,所以$ABCD$为平行四边形.

791. 设平行四边形$ABCD$内的一点P在$\triangle ABD$内,则



$$S_{\triangle PBD}=S_{\triangle PBC}-S_{\triangle PAB}.$$

解 连结底边BP上两个三角形ABP和CBP的顶点AC, 设线段AC的中点为O, 则 $S_{\triangle CBP}-S_{\triangle ABP}=2S_{\triangle OBP}$(问题 742).

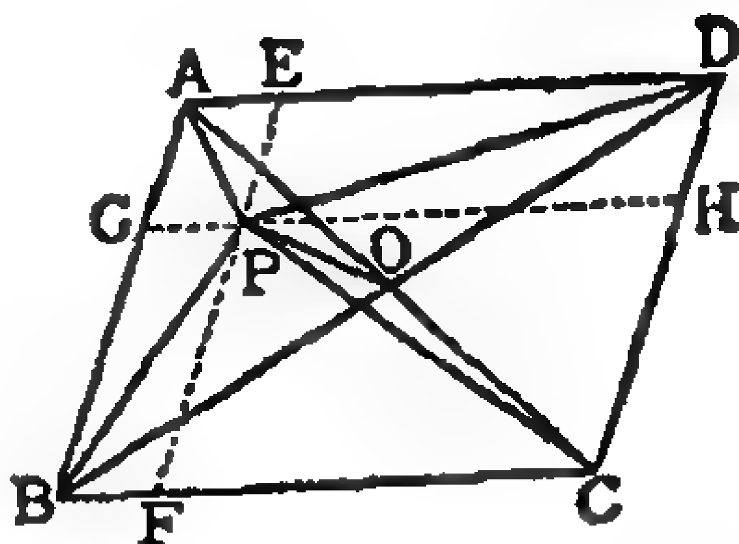
由于O为平行四边形对角线的交点,所以

$$BO=OD,$$

故 $S_{\triangle PBC}-S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBD}$.

792. 设P为平行四边形$ABCD$内的一点,则

$$S_{\triangle PCD}\sim S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PAC}.$$



解 设$EF\parallel AB$, $GH\parallel BC$, 则

□$PFCH$的面积−□$AGPE$的面积

$=2S_{\triangle PBD}$ ①

(参照问题 796),

□$EPHD$的面积−□$GBFP$的面积

$=2S_{\triangle PAC}$. ②

①+②,则

□$PFCH$的面积+□$EPHD$的面积

−(□$AGPE$的面积

+□$GBFP$的面积)

$=2(S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PAC})$.

又 □$PFCH$的面积+□$EPHD$的面积

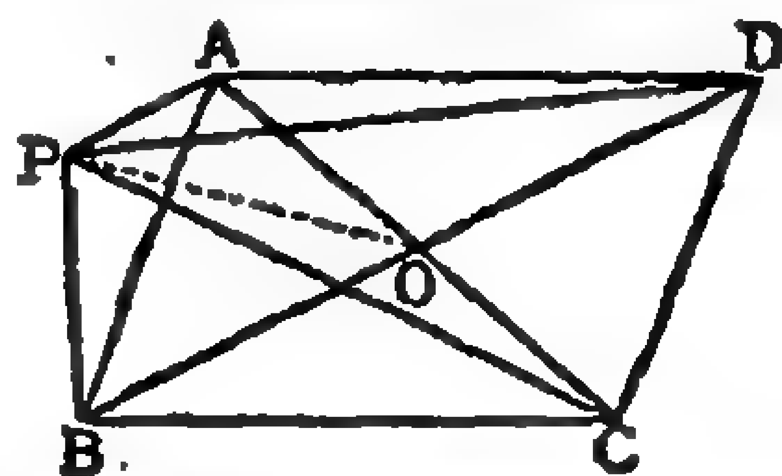
$=2S_{\triangle PCD}$(问题 783),

□$AGPE$的面积+□$GBFP$的面积

$=2S_{\triangle PAB}$,

$$\therefore S_{\triangle PCD}\sim S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PAC}.$$

793. 若在平行四边形$ABCD$的平面上取一点P,则三角形PBD的面积等于两个三角形PAB、PBC的面积之和或差.



解 设对角线的交点为O,则$AO=OC$,若A、C在PB的同侧,则

$$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}=2S_{\triangle PBO}$$

$=S_{\triangle PBD}$(问题 742).

若A、C在PB的异侧,则

$$S_{\triangle PAB}\sim S_{\triangle PBC}=2S_{\triangle PBO}$$

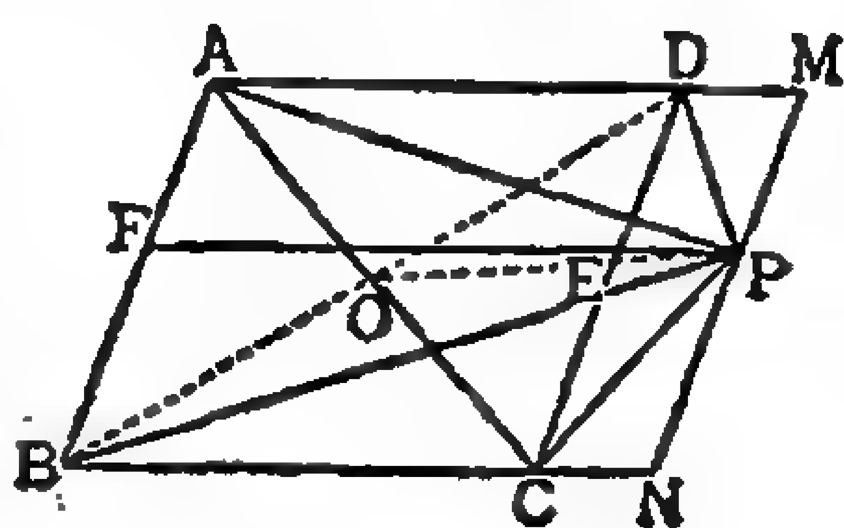
$=S_{\triangle PBD}$(问题 742).

794. 设P为平行四边形$ABCD$外的任一点(不在AB、CD的延长线之间),则

$$S_{\triangle APB}\sim S_{\triangle DPC}=\frac{1}{2}\ \square ABCD\text{的面积};$$

又过P作各边的平行线,则平行四边形$PFBN$、$PMDE$的面积之和或差等于$\triangle APC$

的面积的两倍.



解 过 P 作 AB 的平行线,与 AD、BC 的延长线的交点分别为 M、N, 则

$$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\ \square ABNM \text{ 的面积},$$

$$S_{\triangle DPC}=\frac{1}{2}\ \square DCNM \text{ 的面积}.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle APB}\sim S_{\triangle DPC}$$
$$=\frac{1}{2}\ \square ABNM \text{ 的面积}$$
$$-\frac{1}{2}\ \square DCNM \text{ 的面积}$$
$$=\frac{1}{2}\ \square ABCD \text{ 的面积}.$$

其次过 P 点引 AD 的平行线与 AB、CD 的交点为 F、E, AC、BD 的交点为 O, 则

$\square FBNP$ 的面积$+\square DEPM$ 的面积

$=\square FBCE$ 的面积$+\square DCNM$ 的面积

$=2(S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PDC})$

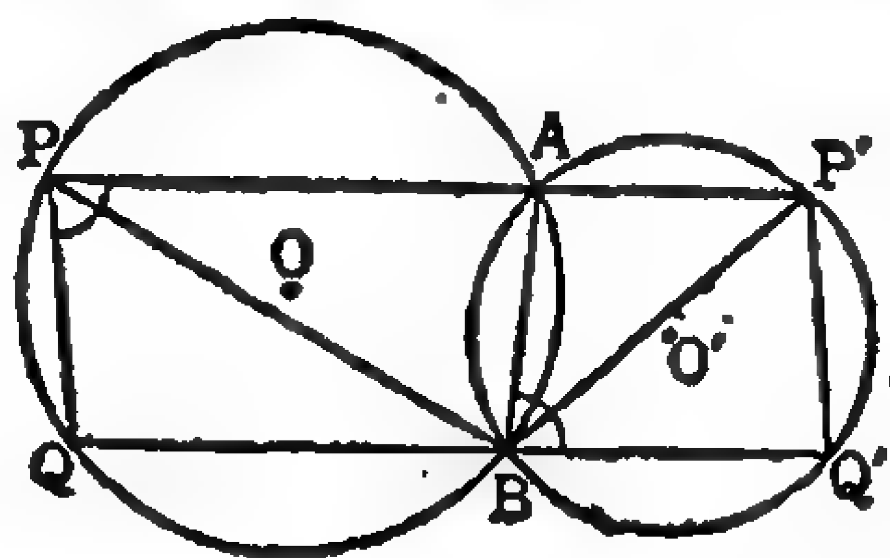
$=4S_{\triangle POC}$(问题 **742**) $=2S_{\triangle APC}$.

若 P 不在平行线 AD、BC 之间,则为差.

795. 两个圆 O、O' 相交于 A、B, 过点 A 的直线与圆 O、O' 分别交于 P、P', 过点 B 作 P、P' 的平行线与两圆 O、O' 分别相交于 Q、Q'.

(1) 试证 $PQQ'P'$ 为平行四边形.

(2) 在什么情况下,此平行四边形的面积最大?



解 (1) 在图中 $APQB$ 是圆 O 的内接四边形,所以$\angle APQ=\angle ABQ'$.又由于 $ABQ'P'$ 为圆 O' 的内接四边形,有

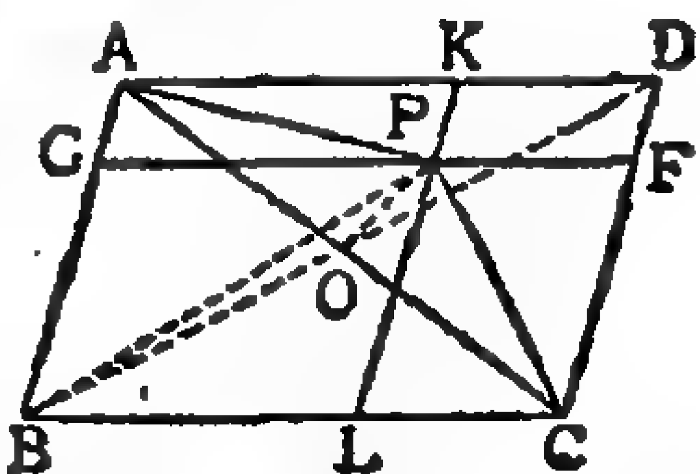
$$\angle ABQ'+\angle AP'Q'=2\angle R,$$
$$\therefore\quad \angle APQ+\angle AP'Q'=2\angle R,$$
$$\therefore\quad PQ\parallel P'Q'.$$

根据假设 $PP'\parallel QQ'$, 所以 $PQQ'P'$ 为平行四边形.

(2) 平行四边形 $PQQ'P'$ 的面积等于 $\triangle PBP'$ 面积的两倍,要使平行四边形面积最大,问题可以转化为使 $\triangle PBP'$ 的面积最大. 在$\triangle PBP'$ 中 $\angle P$、$\angle P'$ 在两圆 O、O' 上弦 AB 所对的弧是一定的,所以这两个角一定,因此 $\triangle PBP'$ 的形状一定(这是自身相似图形). 所以只要求出这个三角形的任何一边为最大就可以了. 因此, 如使 PB 为圆 O 的直径时,$\triangle PBP'$ 的面积最大.

注 PB 为直径时, $\angle PAB=\angle R$, 因此 BP' 成为圆 O' 的直径,有 $AB\perp PP'$.

796. 过平行四边形 $ABCD$ 内一点 P, 引 BC、AB 的平行线 GPF、KPL, 与 AB、CD、AD、BC 的交点依次为 G、F、K、L. 如果 P 在 $\triangle ACD$ 内,那么



$\square GBLP$ 的面积$-\square KPFD$ 的面积

$=2S_{\triangle PAC}$.

解 设 AC、BD 的交点为 O,

$\square GBLP$ 的面积$-\square KPFD$ 的面积

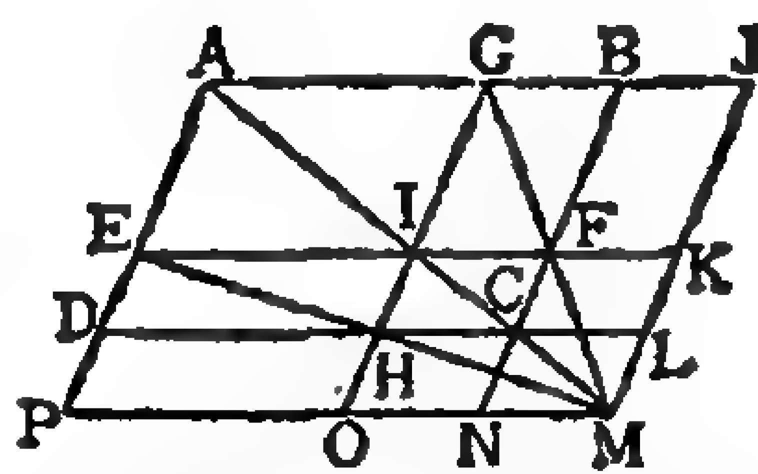
$=\square GBCF$ 的面积$-\square KLCD$ 的面积

$=2(S_{\triangle PBC}-S_{\triangle PDC})$

$=4S_{\triangle POC}$(问题 **742**) $=2S_{\triangle PAC}$.

797. 作平行四边形 $ABCD$ 的两条边 AB、BC 的平行线 EF、GH, 则四个平行四边形中的两条对角线 EH、GF 与四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 共点.

解 设 EH、GF 的交点为 M,过 M 分别作平行于 AB、BC 的平行线 MP、MJ。又 AD、GH、BC 和 MP 的交点分别为 P、O、N, AB、EF、DC 和 MJ 的交点依次为 J、K、L,则



$\square IONF$ 的面积$=\square BFKJ$ 的面积

(问题 **787**).

在等式两边加上 $\square FCLK$, 得

$\square IONF$ 的面积$+\square FCLK$ 的面积

$=\square CLJB$ 的面积.

在 $\square DPOH=\square IHLK$

的两边加上 $\square HONC$, 得

$\square DPNC$ 的面积

$=\square IHLK$ 的面积$+\square HONC$ 的面积,

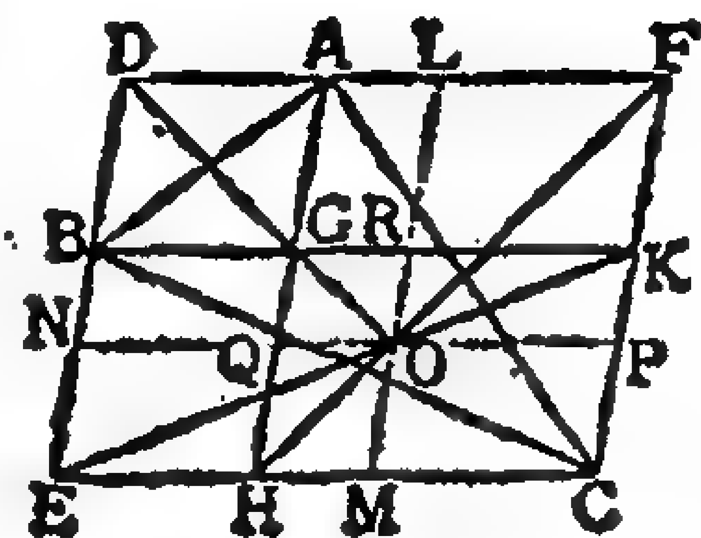
但是

□$IONF$ 的面积+□$FCLK$ 的面积

　=□$IHLK$ 的面积+□$HONC$ 的面积，

因而□$DPNC$ 的面积=□$CLJB$ 的面积，所以 C 在对角线 AM 上(问题 788)。

798. 过三角形 ABC 各顶点引两条定直线的平行线，作成三个平行四边形 $ADBG$、$BECK$、$AHCF$，则 DG、EK、HF 交于一点。



解 设 DG、HF 的交点为 O，则在□$AHCF$ 上有

□$AQOL$ 的面积

　=□$OMCP$ 的面积(问题 787)。

又过 O 作 DE、DF 的平行线，与 DF、EC 及 DE、CF 的交点依次为 L、M、N、P，则

□$AGRL$ 的面积=□$BNQG$ 的面积。

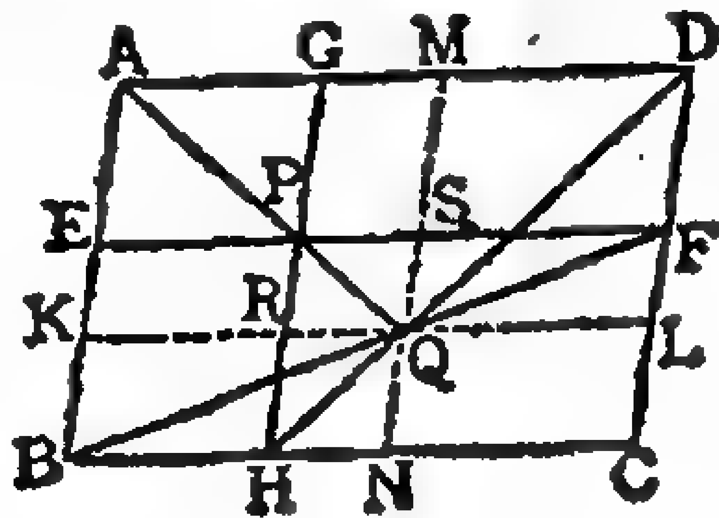
在等式两边加上□$GQOR$，得

□$BNOR$ 的面积=□$AQOL$ 的面积。

∴ □$BNOR$ 的面积=□$OMCP$ 的面积，

所以 O 在 EK 上(问题 788)。即 DG、EK、HF 交于一点。

799. 过平行四边形 $ABCD$ 内一点 P，作边 AB、BC 的平行线 GPH、EPF，与 AB、CD、AD、BC 分别交于点 E、F、G、H，设 BF、DH 的交点为 Q，则点 A、P、Q 在一直线上。



解 如图所示，过 Q 作 AB、BC 的平行线 MN、KL，则 Q 是□$GHCD$ 的对角线 HD 上的一点(问题 787)，所以

□$GRQM$ 的面积=□$QNCL$ 的面积。

又 Q 在□$EBCF$ 对角线 BF 上，

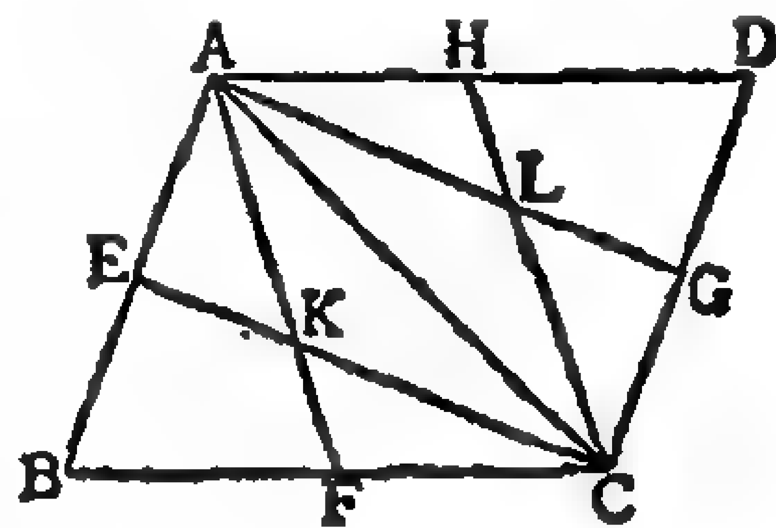
□$EKQS$ 的面积=□$QNCL$ 的面积，

∴ □$GRQM$ 的面积=□$EKQS$ 的面积，

从而□$GPSM$ 的面积=□$EKRP$ 的面积。

因此 P 在□$AKQM$ 对角线 AQ 上(问题 788)，即 A、P 及 Q 在一条直线上。

800. 设平行四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 E、F、G、H，则连结 AF，CH，AG，CE 所成的四边形为平行四边形，它的面积等于四边形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{3}$。



解 设 AF、CE 的交点为 K，AG、CH 的交点为 L，则由 $AB=DC$，E 及 G 分别为 AB、CD 的中点，知 $AE \underline{\parallel} GC$。因此　$AG \parallel EC$，　同理　$AF \parallel HC$。所以 $AKCL$ 为平行四边形。又连结 AC，因为 K 是△ABC 的重心，有

$$AK=\frac{2}{3}AF.$$

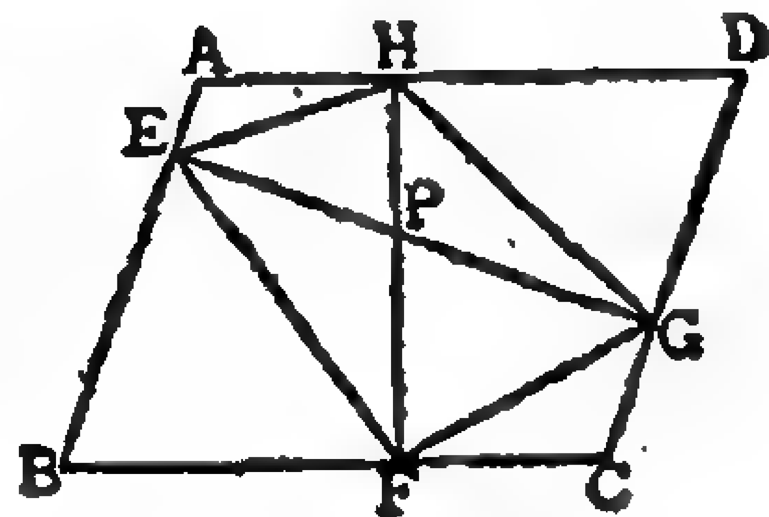
因此

□$AKCL$的面积$=\frac{2}{3}$□$AFCH$ 的面积

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$□$ABCD$ 的面积

$=\frac{1}{3}$□$ABCD$ 的面积。

801. 由平行四边形内任意一点向各边作垂线，以垂足为顶点的四边形的面积是定值。



解 若由平行四边形 $ABCD$ 内任意一点 P 向各边作垂线的垂足分别为 E、F、G、H，由 $AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，有 E、P、G，H、P、F 分别成为一直线，且其长是一定的，由

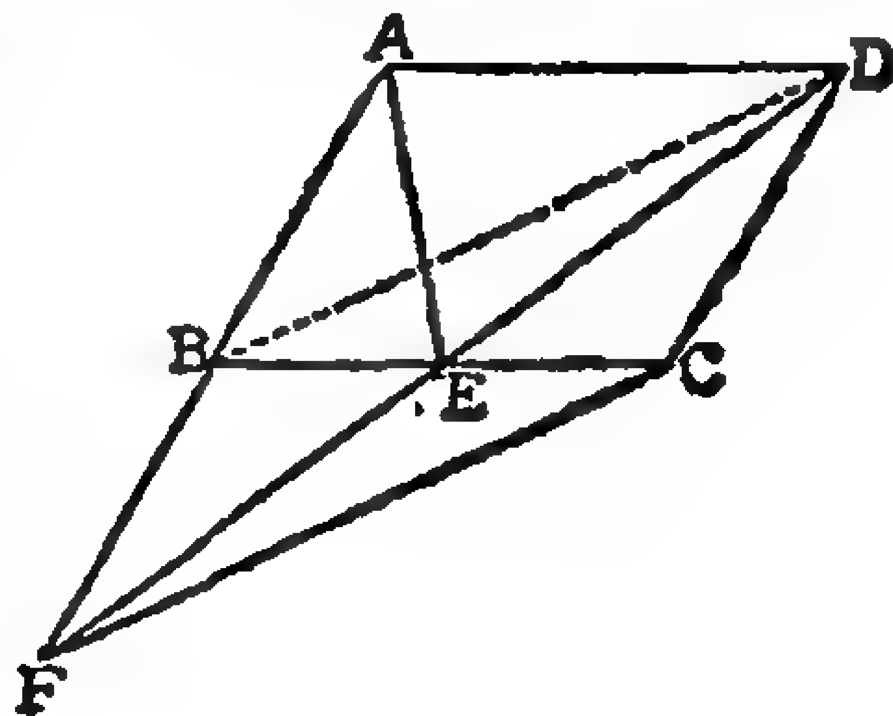
$$\angle AEP=\angle R=\angle AHP,$$

$$\therefore\quad \angle EAH+\angle EPH=2\angle R.$$

因为 $\angle EAH$ 是一定的，所以 $\angle EPH$ 也是一定的，由此两条对角线的长度与其夹角都是一定的。根据问题 829 知，四边形 $EFGH$ 的面积是定值。

802. 作过平行四边形 $ABCD$ 的顶点 D 的直线，与边 BC 交于 E，与边 AB 的延长线交于 F，则

$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CEF}$.



解 连结 BD，因　$AD \parallel BE$，有

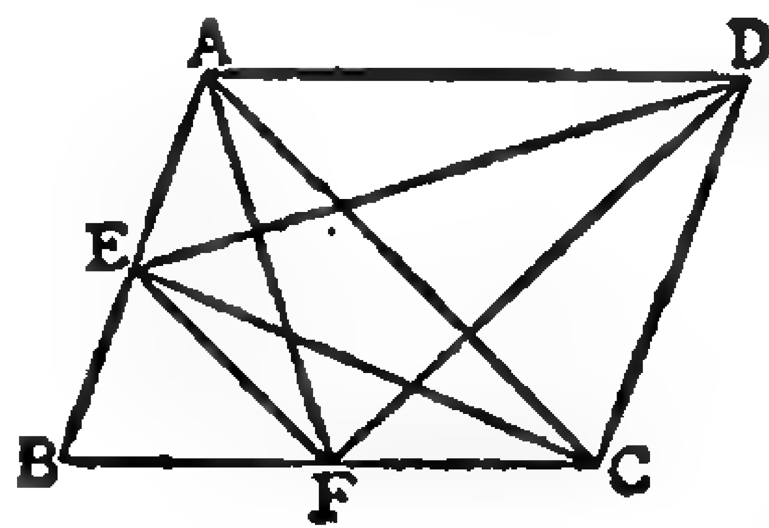
$$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle DBE}.$$

又 $BF \parallel CD$,

有 $S_{\triangle BED}=S_{\triangle CEF}$(问题737).

$\therefore$ $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CEF}$.

803. 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 的平行线与 AB、BC 的交点分别为 E、F, 则 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}$.



解 因为 $AB \parallel DC$,

$\therefore$ $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ACE}$.

又 $AD \parallel BC$,

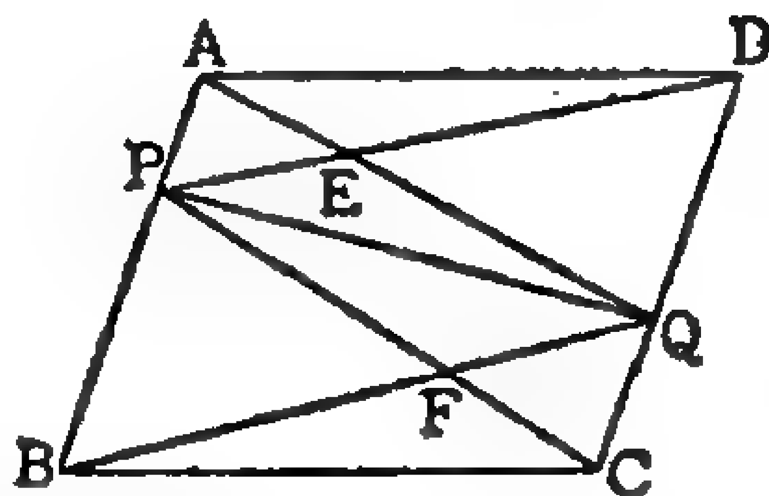
$\therefore$ $S_{\triangle CDF}=S_{\triangle CAF}$.

但是 $AC \parallel EF$,

$\therefore$ $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle CAF}$,

故 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}$.

804. 在平行四边形$ABCD$的边 AB、CD 上, 分别取点 P、Q, 若 AQ、DP 的交点为 E; BQ、CP 的交点为 F, 则



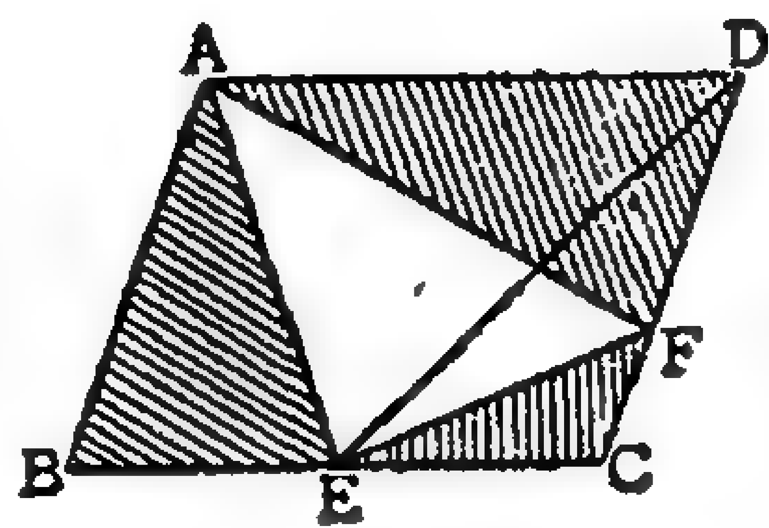
$S_{\triangle AED}+S_{\triangle BFC}=$四边形 $PFQE$ 的面积.

解 由于 $AB \parallel DC$ 有 $S_{\triangle AED}=S_{\triangle PEQ}$,

$S_{\triangle BFC}=S_{\triangle PFQ}$.

$\therefore$ $S_{\triangle AED}+S_{\triangle BFC}=$四边形 $PFQE$ 的面积.

805. 若在平行四边形 $ABCD$ 的两边 BC、CD 上分别取点 E、F, 则 $S_{\triangle AEF}$ 小于 $\frac{1}{2}\square ABCD$ 的面积.



解 因为 $S_{\triangle ADF}>S_{\triangle DEF}$,

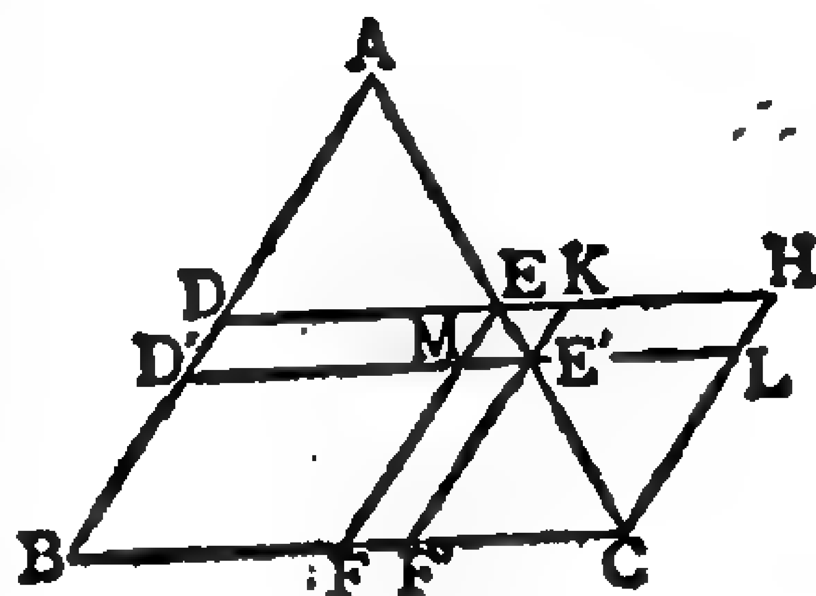
$\therefore$ $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ADF}+S_{\triangle CEF}>S_{\triangle ABE}$
$+S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF}$
$=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle DEC}$
$=\frac{1}{2}\square ABCD$ 的面积.

$\therefore$ $S_{\triangle AEF}<\frac{1}{2}\square ABCD$ 的面积.

806. 设$\triangle ABC$的各边中点分别为 D、E、F, 作平行四边形 $DBFE$, 又作任意内接平行四边形 $D'BF'E'$, 则

$\square DBFE$ 的面积$>\square D'BF'E'$ 的面积.

解 在图中, 过点 C 引 BD 的平行线与 DE 的延长线交于点 H, 则 $DBCH$ 为平行四边形, 设 $D'E'$ 与 EF、HC 分别交于点 M、L, 延长 $F'E'$ 与 DH 交于点 K, 因 E 是 DH 的中点, 有



$\square EDD'M$ 的面积$=\square EMLH$ 的面积. ①

又因为 E' 是$\square EFCH$ 的对角线 CE 上的点, 有

$\square KE'LH$ 的面积
$=\square MFF'E'$ 的面积,

$\therefore$ $\square EMLH$ 的面积$>\square MFF'E'$ 的面积. ②

由①、②有

$\square EDD'M$ 的面积$>\square MFF'E'$ 的面积,

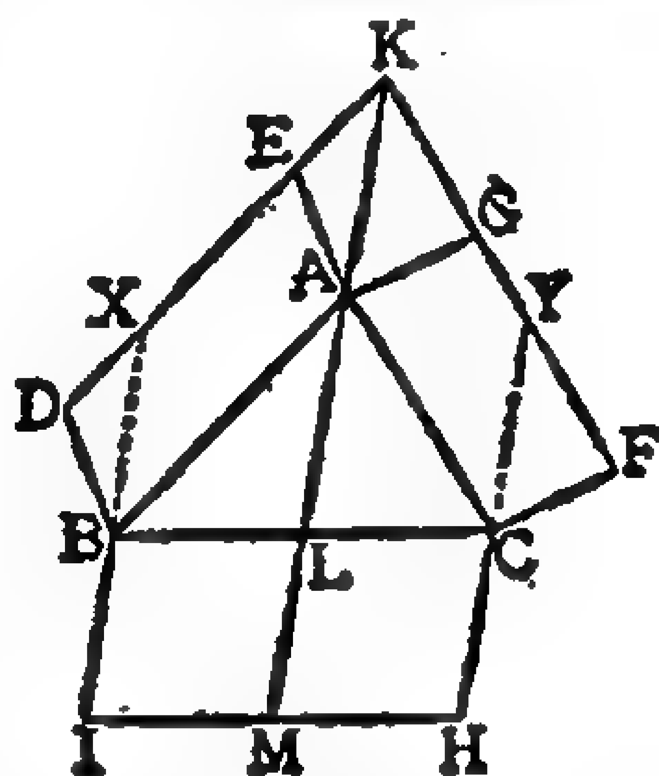
两边加上$\square D'BFM$ 得

$\square DBFE$ 的面积$>\square D'BF'E'$ 的面积.

807. 在三角形 ABC 的边 AB、AC 上, 向外侧分别作任意平行四边形 $ABDE$、$ACFG$, 设 DE 和 FG 的延长线交于点 K, 又作以 BC 为底边, 另一边与 KA 平行且等于 KA 的平行四边形 $BCHI$, 则

$\square EDBA$ 的面积$+\square GACF$ 的面积
$=\square BIHC$ 的面积. [帕普斯定理]

解 设 KA 的延长线与 BC 及 IH 的交点分别为 L、M, IB、HC 的延长线同 KD、KF 的交点分别为 X、Y, 因此$\square ABDE$ 和$\square ABXK$ 的底边及高都相等, 所以面积相等. 但是$\square ABXK$ 与$\square LMIB$ 的底边 $KA=LM$, 并且 $KM \parallel XI$, 所以等底上所对的高也相等.



因此

$\square KXBA$ 的面积$=\square BIML$ 的面积,

从而

$\square DBAE$ 的面积$=\square BIML$ 的面积.

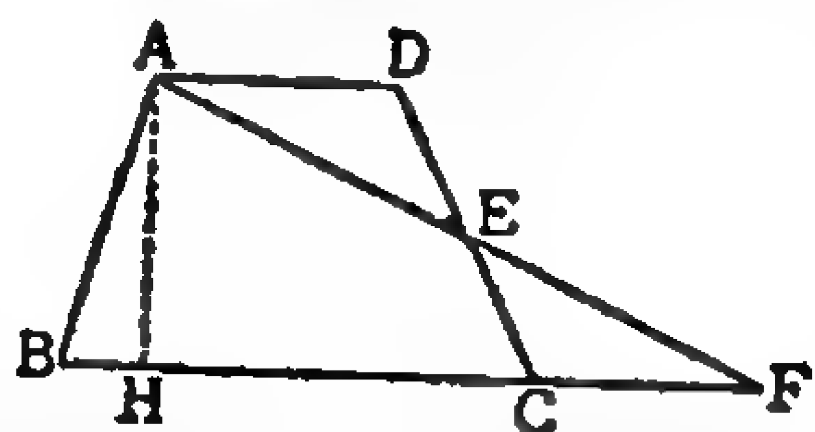
同理,

□$ACFG$ 的面积=□$KACY$ 的面积
=□$LMHC$ 的面积。

∴ □$DBAE$ 的面积+□$ACFG$ 的面积
=□$BIHC$ 的面积。

4. 梯形、矩形、正方形的面积

808. 梯形面积等于两底之和的一半与两底间的距离所围成的长方形的面积。



解 设 $ABCD$ 为梯形，$AD\parallel BC$，连结 DC 的中点 E 与 A，并与 BC 的延长线相交于点 F，因为

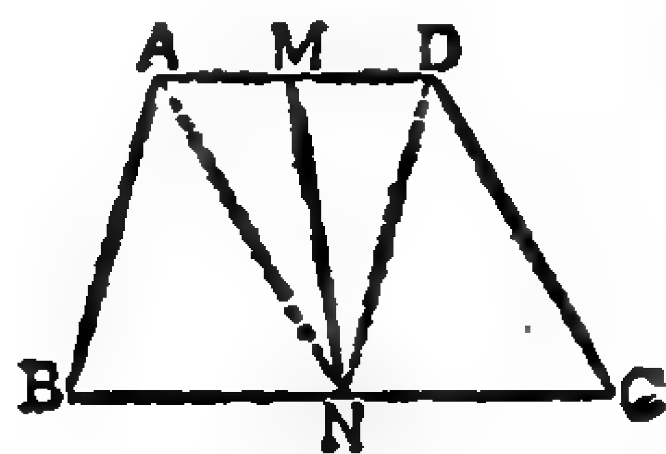
$$DE=EC,\ \angle ADE=\angle FCE,$$
$$\angle DEA=\angle CEF,$$
$$\therefore\ \triangle ADE\cong\triangle FCE.$$

在等式两边都加上四边形 $ABCE$ 得梯形 $ABCD$ 的面积=$\triangle ABF$ 的面积，而 $AD=CF$，

$$\therefore\ BF=AD+BC.$$

但 $\triangle ABF$ 的面积是以 BF 为底边，AH 为高的长方形面积的一半，所以它与 BF 的一半和 AH 所围成的长方形面积相等。故梯形 $ABCD$ 的面积 $=\frac{1}{2}(AD+BC)AH$。

809. 梯形的面积被其两底中点的连线所平分。



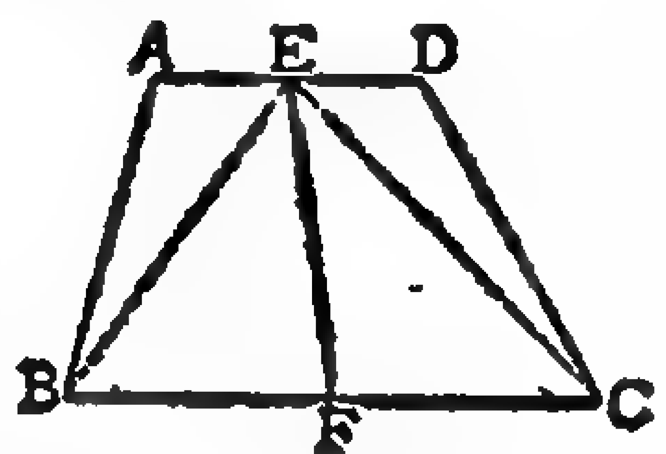
解 设梯形 $ABCD$ 的两底 AD、BC 的中点分别为 M、N，连结 AN，DN，则因 $AD\parallel BC$，且 $BN=NC$，有 $S_{\triangle ABN}=S_{\triangle DNC}$。又因为 $AM=MD$，有 $S_{\triangle NAM}=S_{\triangle NMD}$，

$$\therefore\ S_{\triangle ABN}+S_{\triangle NAM}=S_{\triangle DNC}+S_{\triangle NMD},$$

即 四边形 $ABNM$ 的面积
=四边形 $MNCD$ 的面积。

810. 连结四边形 $ABCD$ 一组对边 AD、BC 中点的直线 EF，若平分这个四边形的面积，则

$$AD\parallel BC.$$



解 由 $BF=CF$，

$$\therefore\ S_{\triangle EBF}=S_{\triangle ECF}.$$

但 四边形 $ABFE$ 的面积
=四边形 $EFCD$ 的面积，

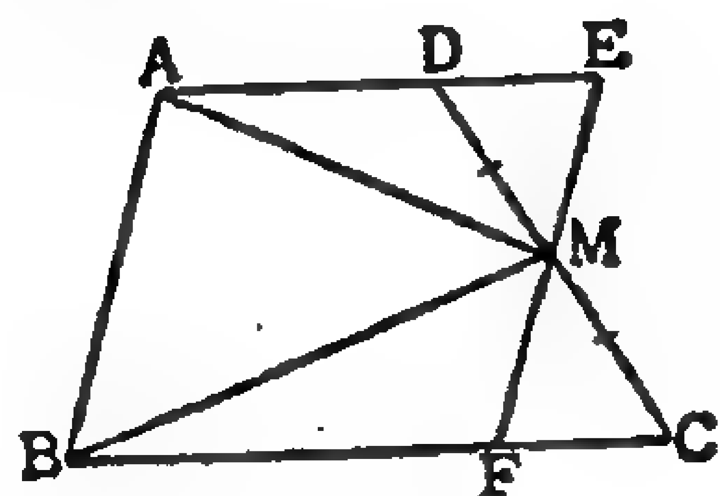
$$\therefore\ S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ECD}.$$

在这两个三角形中 $AE=DE$，因而由点 B、C 到 AD 上的高也相等。

$$\therefore\ AD\parallel BC.$$

811. 设梯形 $ABCD$ 的底边为 AD、BC，若 CD 的中点为 M，则

$S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}$(梯形 $ABCD$ 的面积)。



解 设过 M 作 AB 的平行线与 AD、BC 分别交于点 E、F，因为 $MD=MC$，所以

$\triangle DME\cong\triangle CMF$(两角夹边)，

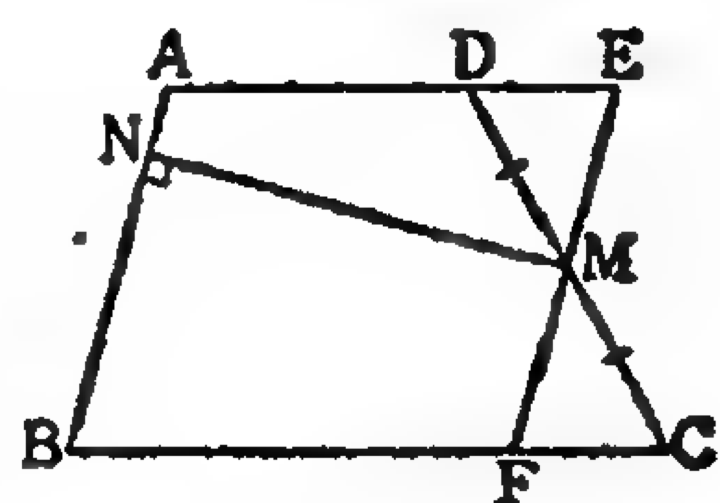
∴ 梯形 $ABCD$ 的面积
=□$ABFE$ 的面积。

但 $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}$□$ABFE$ 的面积，

∴ $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}$(梯形 $ABCD$ 的面积)。

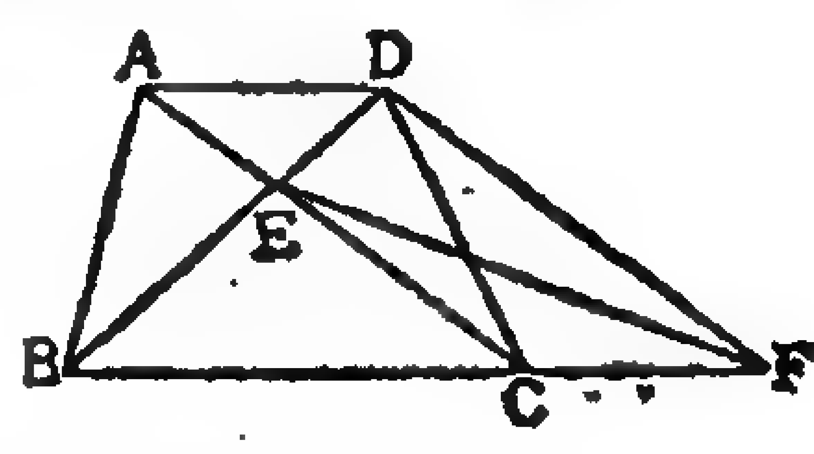
812. 梯形的面积等于以一条不平行边与从其对边的中点作这条边的垂线所围成的长方形面积。

解 在梯形 $ABCD$ 中，设 $AD\parallel BC$，过 CD 的中点 M 作 AB 的平行线 EF，与 AD、BC 的交点分别为 E、F，由上题知□$ABFE$ 的面积=梯形 $ABCD$ 的面积，但四边形 $ABFE$ 是平行四边形，从点 M 到 AB 的垂线为 MN，



∴ $AB\cdot MN$=□$ABFE$ 的面积
=梯形 $ABCD$ 的面积。

813. 设梯形 $ABCD$ 对角线的交点为 E，若在平行边的一边 BC 的延长线上取点 F，使 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle EBF}$，则 $DF\parallel AC$。



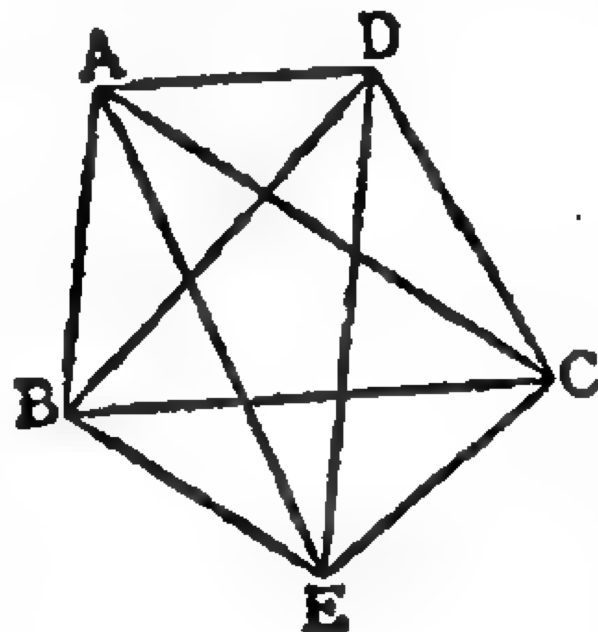
解 因为 $AD\parallel BC$，所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}$，根据假设 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle EBF}$，

$\therefore\quad S_{\triangle DBC}=S_{\triangle EBF}.$

从等式两边减去 $\triangle BEC$，得 $S_{\triangle DEC}=S_{\triangle FEC}$.

$\therefore\quad DF\parallel AC.$

814. 在梯形 $ABCD(AD\parallel BC)$中，从 B、D 分别作 AC、AB 的平行线，若两平行线的交点为 E，则



$$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BEC}.$$

解　因 $AD\parallel BC$，所以 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABD}$.

又因 $AB\parallel DE$，

$\therefore\quad S_{\triangle ABD}=S_{\triangle EAB}.$

$\because\quad AC\parallel BE,\quad \therefore\quad S_{\triangle EAB}=S_{\triangle BEC},$

故　$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BEC}.$

815. 设梯形 $ABCD$ 的边 BC 上一点为 P，AC、BD 的交点为 E，则

$$S_{\triangle AEP}+S_{\triangle DEP}=S_{\triangle EAB}.$$

解　在同底等高的三角形中，$S_{\triangle PAD}=S_{\triangle BAD}$，从等式两边减去 $\triangle AED$，得

$$S_{\triangle AEP}+S_{\triangle DEP}=S_{\triangle EAB}.$$

816. 设矩形 $ABCD(AB>BC)$，在边 AB、BC 和 CD 上分别取点 E、G 和 F，并使

$BE=CG$，$BG=CF$；又 EF 的中点为 O，则

$$S_{\triangle EGF}\geqq S_{\triangle BOC}.$$

解　由题意 $\triangle BGE\cong\triangle CFG$(两边夹角)，

$\therefore\quad EG=GF.$

又由 $EO=OF$，$GO\perp EF$，所以四边形 $BGOE$、$CFOG$ 为圆内接四边形.

$\because\quad \angle OFG=\angle OCG,\ \angle OEG=\angle OBG.$

$\therefore\quad \triangle EGF\backsim\triangle BOC$(两角).

显然，$EF\geqq BC$，$\therefore\quad S_{\triangle EGF}\geqq S_{\triangle BOC}.$

817. 设矩形 $ABCD$ 内有点 P，使

$$\angle PBC=\angle PDC.$$

(1) $\angle APB$ 和 $\angle CPD$ 之间有何关系？

(2) 证明以 PA、PC 为两边的长方形的面积与以 PB、PD 为两边的长方形面积之和等于长方形 $ABCD$ 的面积.

解　(1) 如图，由假设知 $PE\perp\!\!\!\!\!\!=AB$，从而有 $CD\perp\!\!\!\!\!\!=PE$，所以 $ABPE$、$DCPE$ 都是平行四边形.

$\therefore\quad \angle EAD=\angle PBC$
$=\angle PDC=\angle EPD$，

即 $\angle EAD=\angle EPD$.

由此四边形 $EAPD$ 是圆内接四边形.

因此　$\angle EAP+\angle EDP=2\angle R$，

而　$\angle EAP=\angle APB$，$\angle EDP=\angle DPC$，

$\therefore\quad \angle APB+\angle DPC=2\angle R.$

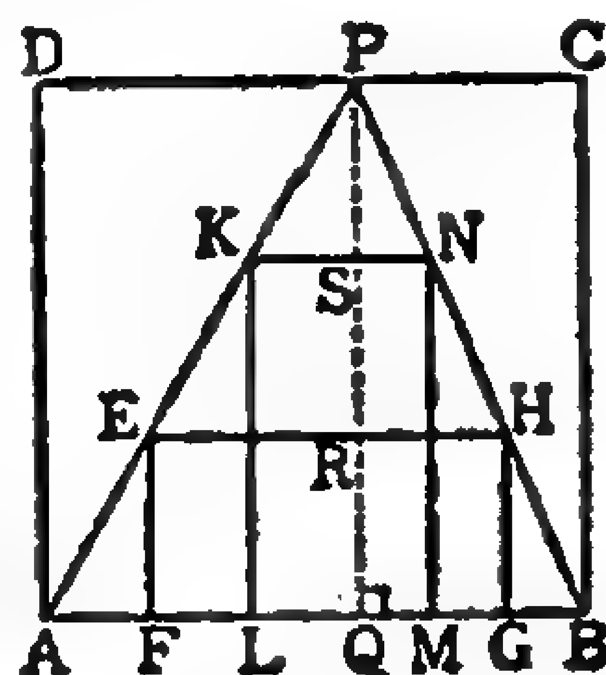
(2) 由于 $APDE$ 是圆内接四边形，根据托勒密定理(问题 500)

$$PA\cdot ED+EA\cdot PD=EP\cdot AD.\qquad ①$$

但 $ED=PC$，$EA=PB$，$EP=AB$，代入①，则得

$$PA\cdot PC+PB\cdot PD=AB\cdot AD.$$

818. 在正方形 $ABCD$ 中，在以 AB 为底边，以边 CD 上的一点 P 为顶点的 $\triangle PAB$ 中，以底边在 AB 上作甲、乙两个内接矩形，若甲矩形的宽是长的一半，乙矩形的长是宽的一半，则矩形甲、乙的面积相等.



解　设内接矩形为 $EFGH$、$KLMN$；由 P 向 AB 作垂线 PQ，与 EH、KN 的交点分别为 R、S，则 $PQ=AB$.

$\therefore\quad EH=PR,\ PS=KN,$

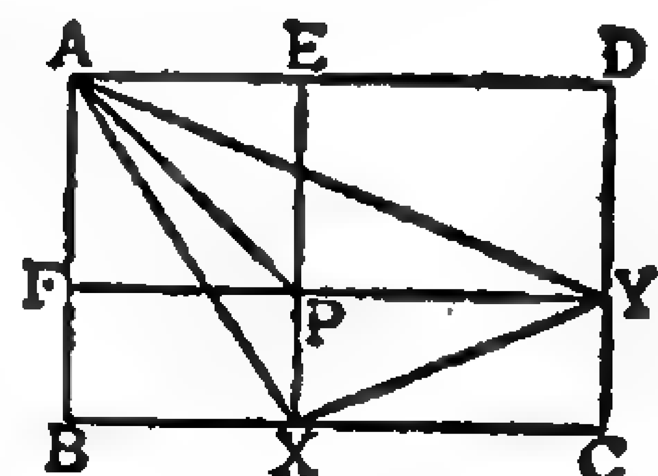
又 $2EF=EH$．$2RQ=PR$，$KL=2KN$．

于是　$SQ=2SP$，

即 PQ 被 R、S 三等分，$EF=KN$，$EH=KL$.

故　矩形 $EFGH$ 的面积
$=$矩形 $KLMN$ 的面积.

819. 若在矩形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上，分别取任意点 X、Y，则



$$2S_{\triangle AXY}+BX\cdot DY=\square ABCD\text{的面积}.$$

解　过 X、Y 分别作 AB、AD 的平行线

XE、YF，其交点为 P，则 $\triangle APY$ 和矩形 $EPYD$ 共底边 PY，且高相等．所以

$$\square EPYD\text{的面积}=2S_{\triangle APY}. \quad ①$$

同理

$$\square PXCY\text{的面积}=2S_{\triangle PXY}. \quad ②$$

又

$$\square FBXP\text{的面积}=2S_{\triangle APX}, \quad ③$$

且　　$PF=BX$，$PE=DY$．

$$\therefore\ \square AFPE\text{的面积}=BX\cdot DY. \quad ④$$

将以上四式两边分别相加得

$$\square ABCD\text{的面积}=2S_{\triangle AXY}+BX\cdot DY.$$

820.　在锐角三角形 ABC 中，作如图所示的内接矩形 $DEFG$，则

(1) 矩形 $DEFG$ 的面积何时最大，最大的面积如何？

(2) 矩形的一边在三角形的另外一边上时，长方形的最大面积是否有所改变？

解　如图所示，若 E、F 关于 DG 的对称点为 E'、F'，则

$$S_{\triangle DBE}=S_{\triangle DKE'},\ S_{\triangle GFC}=S_{\triangle GF'L}.$$

所以　　矩形 $E'EFF'$ 的面积

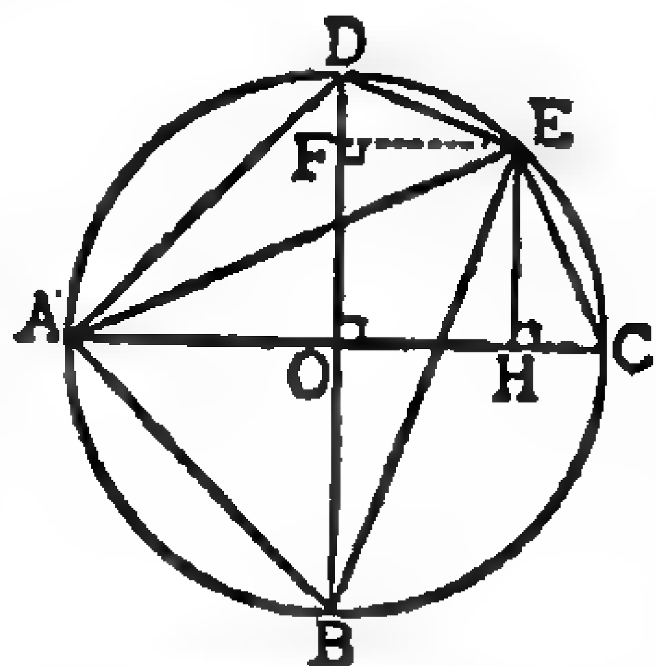
$=$梯形 $KBCL$ 的面积

$=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AKL}$，

因而　$2\square DEFG$ 的面积 $=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AKL}$．

要使 $\square DEFG$ 的面积最大，则 $\triangle AKL$ 越小越好，而且最好 $E'F'$ 过顶点 A，所以 D、G 恰好是给定的 AB、AC 的中点．这时长方形 $DEFG$ 的面积最大，且等于 $\triangle ABC$ 面积之半．长方形的一边在另一边上时也一样．

821.　在一个圆中有互相垂直的两条直径 AC、BD．若在劣弧 DC 上取任意点 E，证明 AE 上的正方形的面积等于四边形 $ABED$ 面积的两倍．



解　若从 E 作 AC、BD 的垂线 EH、EF，则

$$\angle AEC=\angle R,$$

所以

$$AE^2=AC\cdot AH. \quad ①$$

又

$$S_{\triangle DEB}=\frac{1}{2}DB\cdot EF,\ S_{\triangle DAB}=\frac{1}{2}DB\cdot AO,$$

$\therefore$　四边形 $ABED$ 的面积

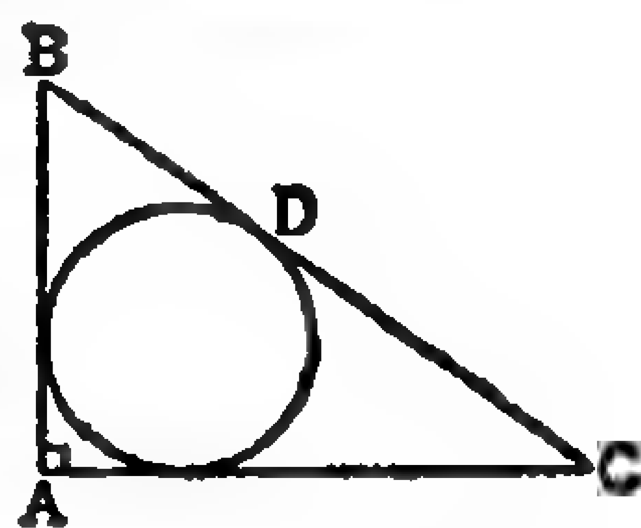
$$=\frac{1}{2}BD(EF+AO)$$

$$=\frac{1}{2}BD\cdot AH. \quad ②$$

因为在①、②中 $AC=BD$，所以

$$AE^2=2(\text{四边形}ABED\text{的面积}).$$

822.　若直角三角形 ABC 的内切圆与斜边 BC 相切于点 D，则三角形 ABC 的面积等于以 BD，DC 为边的矩形面积．



解　若 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$a+b+c=2S$，则 $CD=S-c$，$BD=S-b$．

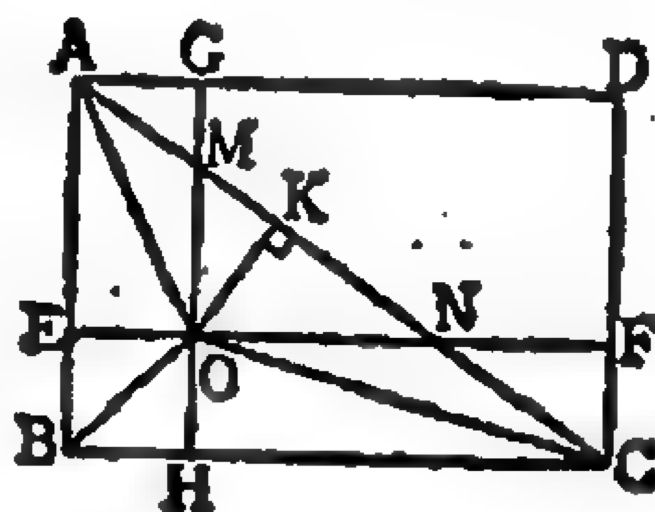
$$\begin{aligned}\therefore\ CD\cdot BD&=S^2-S(b+c)+bc\\&=S(S-b-c)+bc\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(a-b-c)+bc\\&=\frac{1}{4}\{a^2-(b+c)^2\}+bc\\&=\frac{1}{4}\{a^2-(b-c)^2\}\\&=\frac{1}{2}bc=S_{\triangle ABC}\ (\because\ a^2=b^2+c^2).\end{aligned}$$

823.　设四边形 $ABCD$ 是矩形，O 是三角形 ABC 的内心，若从 O 作 AD、CD 的垂线 OG、OF，则

$$\square OFDG\text{的面积}=\frac{1}{2}\square ABCD\text{的面积}.$$

解　延长 GO、FO 与 BC、AB 分别交于点 H、E．O 是内心，$OH\perp BC$，$OE\perp AB$，

$\therefore$　$FC=OH=OE=GA$．



又从 O 作 AC 的垂线 OK，则 $OK=OE$，

$$\therefore\ AG=OK=FC.$$

因此 $\triangle AGC\cong\triangle OKA$，$\triangle OFC\cong\triangle CKO$，若

GO、FO 与 AC 的交点分别为 M、N，则

$\triangle AGM \cong \triangle OKM$，$\triangle OKN \cong \triangle CFN$。

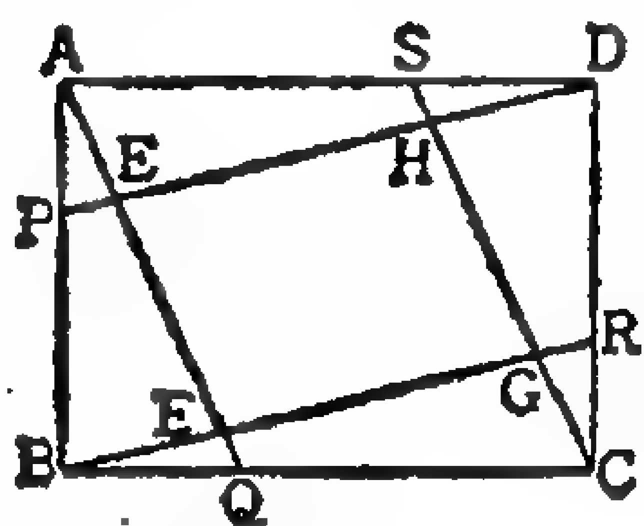
$\therefore\ S_{\triangle ADC} = \square OFDG$ 的面积，

故 $\square OFDG$ 的面积 $= \frac{1}{2}\square ABCD$ 的面积。

824. 在矩形 ABCD 中，$AB=a$，$BC=b$，若在 AB、BC、CD、DA 上取点 P、Q、R、S，使

$$\frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RD}=\frac{DS}{SA}=\frac{1}{2},$$

把由直线 AQ、BR、CS、DP 构成的平行四边形 EFGH 的面积用 a、b 表示。



解 设 $\square EFGH$ 的面积为 S，因为 $PD \parallel BR$，所以

$$AE:EF=AP:PB=1:2,$$

同理 $AQ \parallel CS$，所以

$$DH:HE=DS:SA=1:2.$$

因此 $S_{\triangle AEH}=\frac{1}{2}S_{\triangle EFH}=\frac{1}{4}S$，

$$\therefore\ S_{\triangle ADE}=\frac{3}{2}S_{\triangle AEH}=\frac{3}{8}S.$$

同理 $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle BCG}=S_{\triangle CDH}=\frac{3}{8}S$，

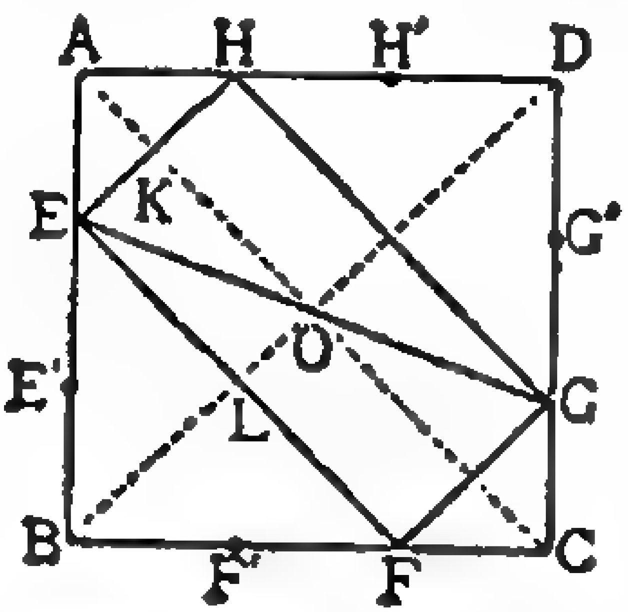
$\therefore\ \square ABCD$ 的面积 $=4S_{\triangle ADE}+S=\frac{5}{2}S$。

故 $S=\frac{2}{5}ab$。

825. 在正方形 ABCD 中，有一内接矩形 EFGH（不包括正方形的情况），其中点 E 在 AB 上，且 $AE \neq BE$，则

$\square EFGH$ 的面积 $=2AE\cdot BE$。

解 因为矩形 EFGH 的中心与正方形 ABCD 的中心重合，所以点 E 关于点 O 的对称点 G 是矩形的顶点，而矩形的两对角线相等，所以以 O 为圆心，OE 为半径的圆与 BC、AD 的交点为 F′、F 及 H、H′。矩形的对角线有 F′H′、FH 两种情况。若取 F′H′ 为对角线，则矩形 EF′GH′ 是正方形；若取 FH 为对角线，则四边形 EFGH 是适合本问题的矩形。因为



$$EH \perp AC,\ EF \perp BD,$$

$$\therefore\ EH=\sqrt{2}AE,\ EF=\sqrt{2}BF,$$

故 $\square EFGH$ 的面积 $=2AE\cdot BF$。

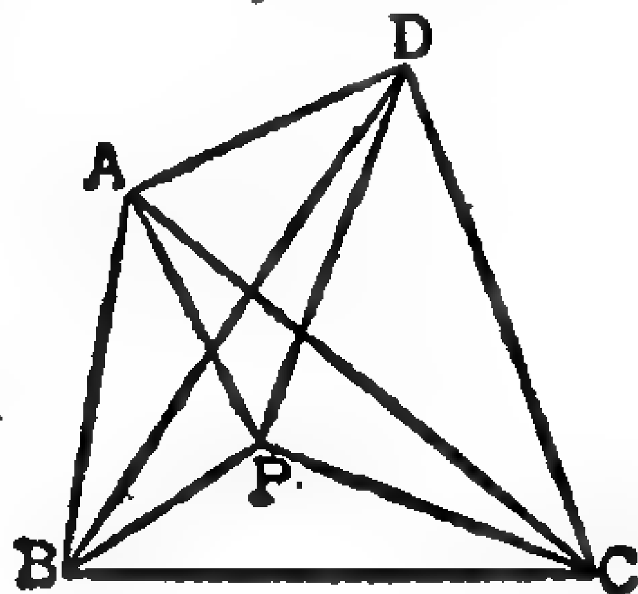
5. 任意四边形的面积

826. 若从任意四边形的对角线外一点，向四个顶点引直线，则不能将四边形分成四个相等的三角形。

解 设四边形 ABCD 内一点 P，使

$$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PDC}.$$

由 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAD}$，则 PA 过 BC 的中点（问题 **743**）。又 $S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PDC}$，则 PC 过 BC 的中点，因此 P 是对角线 BD 的中点。由



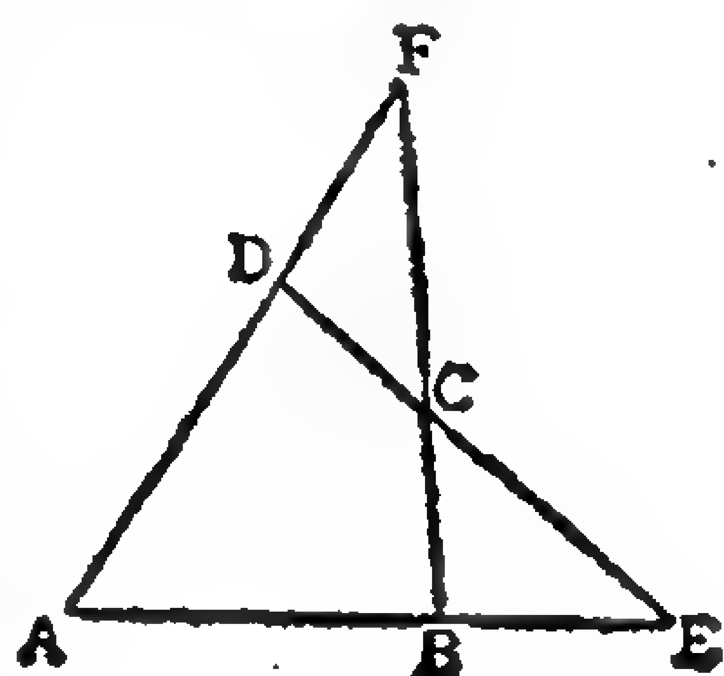
$$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCB},$$

则 PB 过对角线 AC 的中点。由

$$S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PAD},$$

则 PD 过对角线 AC 的中点，P 也是对角线 AC 的中点。因此从对角线外一点作四个顶点的直线不可能将四边形分成四个相等的三角形。

827. 在四边形 ABCD 中，$\angle B=\angle R$，$\angle CAD=2\angle ACB$，若 AC、BD 的交点为 E，则



$$S_{\triangle CED}\sim S_{\triangle AED}=2S_{\triangle AEB}.$$

解 设 AC 的中点为 F，则 $S_{\triangle CED}\sim S_{\triangle AED}=2S_{\triangle DEF}$，因为

$$\angle ABC=\angle R（问题 **742**），$$

有 $\angle AFB=2\angle ACB=\angle CAD$。

$$\therefore\ AD \parallel BF,\ S_{\triangle ABF}=S_{\triangle DBF},$$

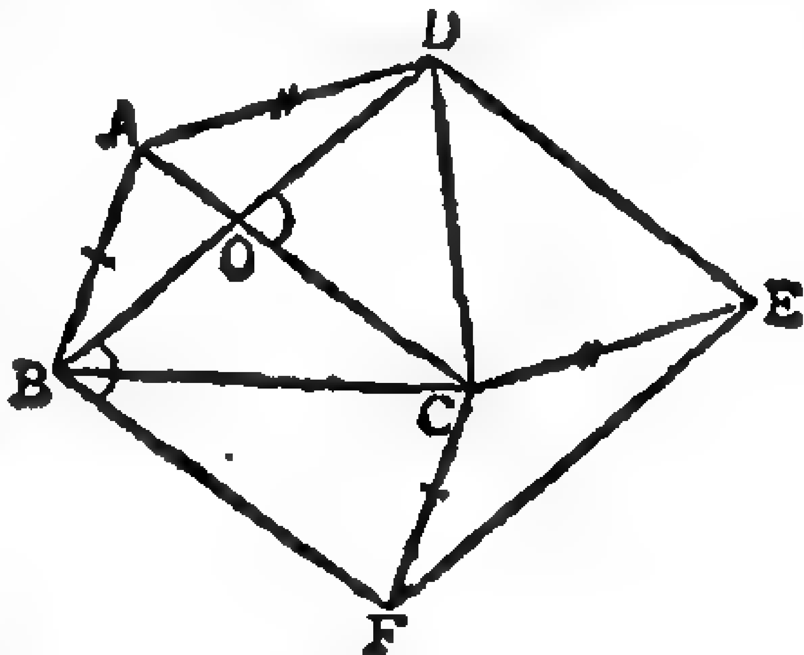
从而 $S_{\triangle AEB}=S_{\triangle DEF}$。

$$\therefore\ S_{\triangle CED}\sim S_{\triangle AED}=2S_{\triangle AEB}.$$

828. 若延长四边形 ABCD 的各边，在其外部作成两个三角形 BCE、CDF 的面积相等，证明此四边形被一条对角

线平分。

解 因为 $S_{\triangle BCE}=S_{\triangle CDF}$，两边都加上 $\triangle BCD$ 得



$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle BDF}$.

$\therefore$ $EF \parallel BD$,

因此

$AB:BE$

$=AD:DF$,

这个等式两边分别等于

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle BCE},\quad S_{\triangle ACD}:S_{\triangle CDF},$$

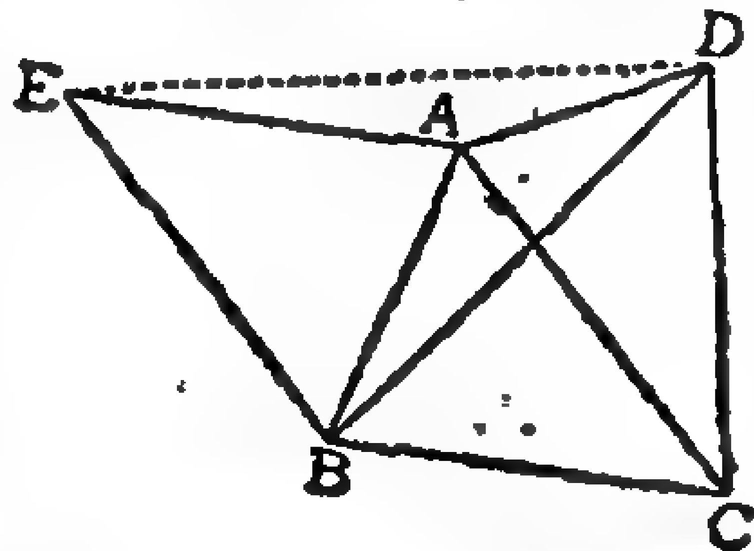
有 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ACD}:S_{\triangle CDF}$.

但 $S_{\triangle BCE}=S_{\triangle CDF}$,

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}$,

即四边形 $ABCD$ 被 AC 平分。

829. 若四边形 $ABCD$ 对角线的交点为 O，则这个四边形的面积等于以 AC、BD 为两边，夹角等于 $\angle DOC$ 的平行四边形面积的一半。



解 过 B、D 作平行于 AC 且长等于 AC 的直线 DE、BF，显然 $DBFE$ 是平行四边形。所以

有 2 四边形 $ABCD$ 的面积

$=\square DBFE$ 的面积。

注 若四边形的面积为 S，两条对角线的长为 a、b，其夹角为 θ，则

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

830. 过四边形 $ABCD$ 的顶点 A 作 BC 的平行线，过 B 作 AC 的平行线，这两条直线的交点为 E，证明 $\triangle BED$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 的面积。

解 由题意有 $EB\perp AC$，所以 $\triangle EBD$ 是以四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 为两边，以其夹角为角的三角形，故根据上题得

$S_{\triangle EBD}=$四边形 $ABCD$ 的面积。

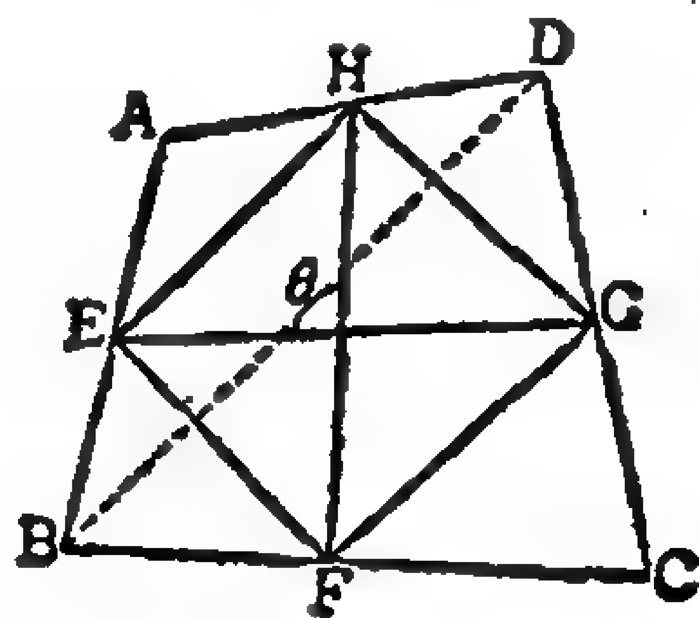
831. 在对角线之和一定的四边形中，面积最大的四边形是怎样的形状？说明其理由。

解 设对角线的长为 X、Y，其夹角为 θ 的四边形面积为 S，根据问题 **829** 的注，得

$$S=\frac{1}{2}XY\sin\theta,$$

当 X、Y 一定，$\theta=90°$ 时，S 最大。如果 $X+Y$ 一定(X、Y 是正数)则当 $X=Y$ 时，XY 最大。因此对角线相等，且垂直相交时面积 S 最大。

832. 连结凸四边形 $ABCD$ 的对边的中点，两线段 EG、FH 的长分别为 a、b，其夹角为 θ，求四边形 $ABCD$ 的面积。



解 因为 $EH \parallel BD$，且

$$EH=\frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore\ S_{\triangle AEH}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABD}.$$

同理 $S_{\triangle CFG}=\frac{1}{4}S_{\triangle CBD}$,

$\therefore$ $S_{\triangle AEH}+S_{\triangle CFG}$

$=\frac{1}{4}$ 四边形 $ABCD$ 的面积。

同理，$S_{\triangle DHG}+S_{\triangle BEF}$

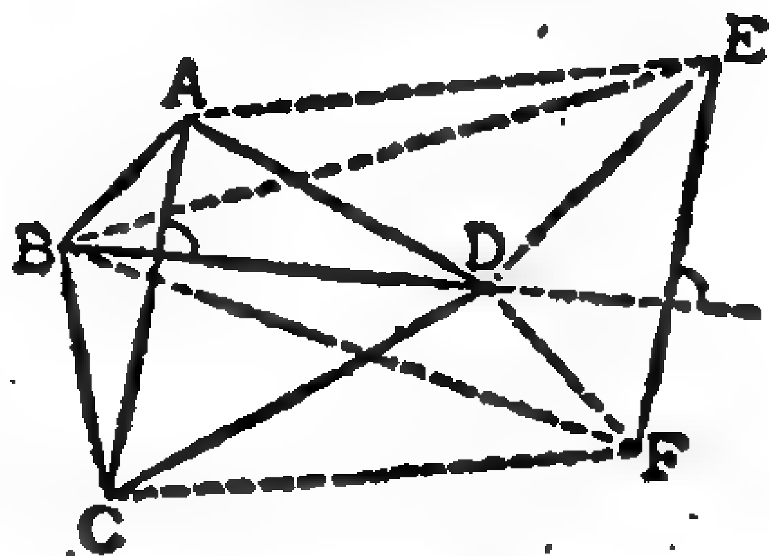
$=\frac{1}{4}$ 四边形 $ABCD$ 的面积，

$\therefore$ $\square EFGH$ 的面积

$=\frac{1}{2}$ 四边形 $ABCD$ 的面积。

但 $\square EFGH$ 的面积$=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\theta$(问题 **829**)，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积$=ab\sin\theta$.



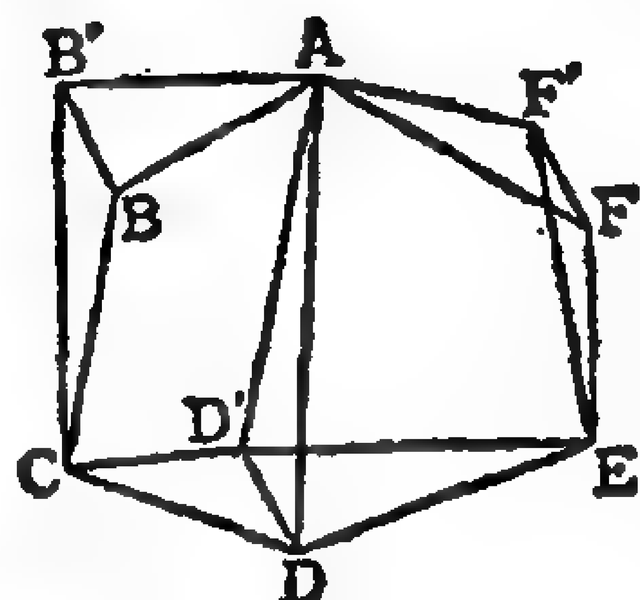
833. 若四边形的一组相对的顶点，沿同方向、以等距离移动，则其面积不变。

解 四边形 $ABCD$ 的相对顶点 A、C，沿同方向且使 $AE=CF$ 移动到点 E、F，作成四边形 $EBFD$，则在四边形 $ABCD$ 和 $EBFD$ 中对角线 BD 公共，另一对角线 AC 与 EF 平行且相等，因

此这两个四边形由于两对角线不变，且其交角不变，根据问题 829 知，这两个四边形等积。

834. 把六边形每相隔一个顶点沿同一方向等距离移动，其面积不变。

解 如图，设六边形 $ABCDEF$ 相隔一个顶点的顶点为 B、D、F，分别沿同一方向等距离移动到 B'、D'、F' 的位置，根据上题有

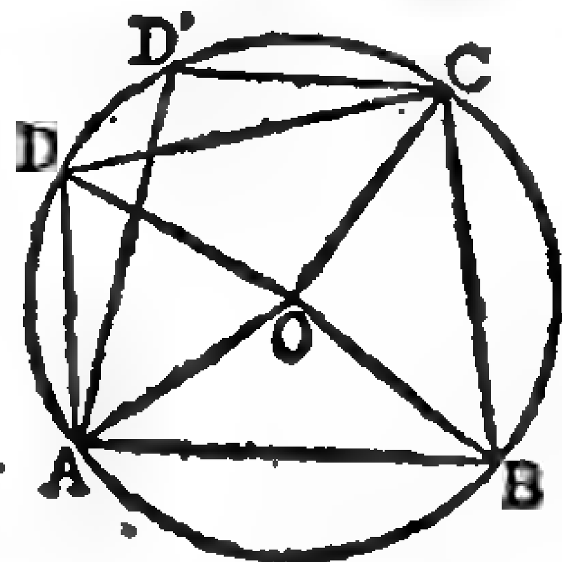


四边形 $ABCD$ 的面积
=四边形 $AB'CD'$ 的面积，
四边形 $ADEF$ 的面积
=四边形 $AD'EF'$ 的面积.

两式相加得

六边形 $ABCDEF$ 的面积
=六边形 $AB'CD'EF'$ 的面积.

835. 若圆内接任意四边形的四条边为定长，则其面积与边在圆内排列顺序无关，但角的大小随边的顺序改变而变化.



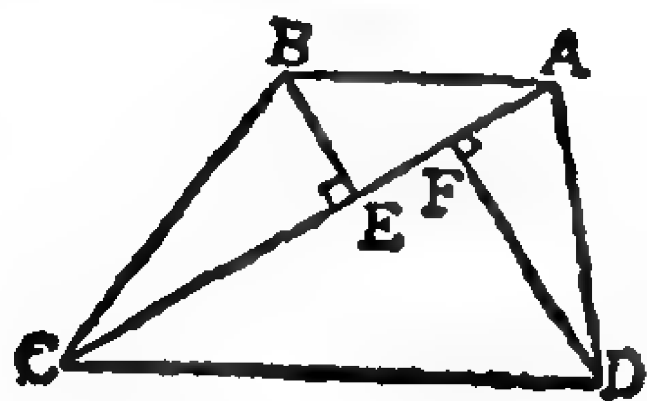
解 设 $ABCD$ 为圆内接四边形，且各边的长度一定. 设外接圆的圆心为 O，把点 O 与各顶点连结，得四个三角形 OAB、OBC、OCD、ODA. 如果改变四边形各边的顺序，因每个三角形的边是由四边形的一条边与外接圆的两条半径组成的，所以其面积一定，从而其和也一定.

其次，设 $CD>AD$，改变其顺序，设 $AD'=CD$，弧 $BAD'>$弧 BAD，所以

$$\angle BAD'<\angle BAD.$$

因而改变边的顺序，其角的大小也随之改变.

836. 若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 是由 B 和 D 分别向它所作垂线的等差中项，则四边形 $ABCD$ 的面积等于以 AC 为一边的正方形面积.



解 设 $AC=d$，$BE=p$，$DF=q$，按题意有

$$d=\frac{1}{2}(p+q), \quad ①$$

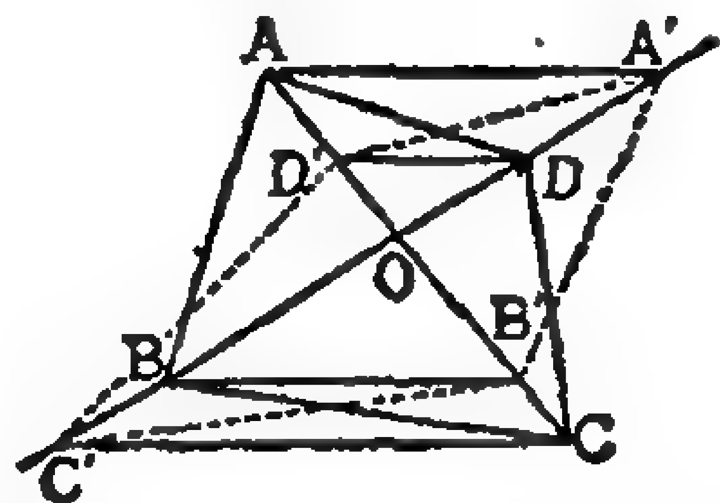
而

$$\text{四边形 } ABCD \text{ 的面积}=\frac{1}{2}d(p+q). \quad ②$$

将①代入②式得

四边形 $ABCD$ 的面积$=d^2$.

837. 从四边形 $ABCD$ 的各顶点引已知直线的平行线，分别与不过此顶点的对角线相交于点 A'、B'、C'、D'，则四边形 $A'B'C'D'$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 面积.



解 因为

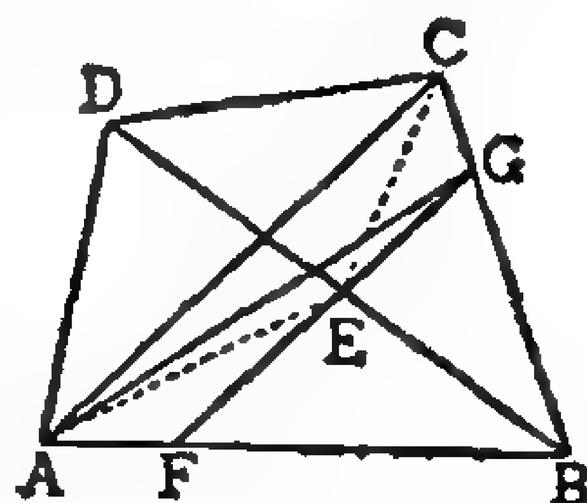
$AA'\parallel BB'$，$\therefore$ $S_{\triangle ABB'}=S_{\triangle A'BB'}$；
$BB'\parallel CC'$，$\therefore$ $S_{\triangle CBB'}=S_{\triangle C'BB'}$；
$AA'\parallel DD'$，$\therefore$ $S_{\triangle ADD'}=S_{\triangle A'DD'}$；
$CC'\parallel DD'$，$\therefore$ $S_{\triangle CDD'}=S_{\triangle C'DD'}$.

将这些等式两边分别相加得

$$S_{\triangle ABB'}+S_{\triangle CBB'}+S_{\triangle ADD'}+S_{\triangle CDD'}$$
$$=S_{\triangle A'BB'}+S_{\triangle C'BB'}+S_{\triangle A'DD'}+S_{\triangle C'DD'},$$

即 四边形 $ABCD$ 的面积
=四边形 $A'B'C'D'$ 的面积.

838. 过四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 的中点 E，作 AC 的平行线 FEG，与 AB、BC 的交点分别为 F、G，则 AG 或 CF 平分此四边形.



解 因 E 为 BD 的中点，所以 $S_{\triangle DCE}=S_{\triangle BCE}$，$S_{\triangle DAE}=S_{\triangle BAE}$.

四边形 $AECD$ 的面积
$=\frac{1}{2}$ 四边形 $ABCD$ 的面积.

而 $EG\parallel AC$，所以 $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle AGC}$，

四边形 $AGCD$ 的面积
=四边形 $AECD$ 的面积
$=\frac{1}{2}$ 四边形 $ABCD$ 的面积.

所以 AG 将四边形 $ABCD$ 二等分. 同理，CF 也将四边形 $ABCD$ 二等分.

839. 若过四边形 $ABCD$ 的两条对角线

AC、BD 的中点 E、F，分别作对角线的平行线，连结其交点 P 与各边的中点，则此四条线段将原来的四边形面积四等分。

解　设 A'、B' 分别为 AB、BC 的中点，则 $\triangle BA'F$、$\triangle BB'F$ 分别等于 $\triangle ABD$、$\triangle DCB$ 的 $\frac{1}{4}$. 所以

四边形 $FA'BB'$ 的面积

$=\frac{1}{4}$ 四边形 $ABCD$ 的面积.

又 $PF \parallel A'B'$，有 $S_{\triangle PA'B'}=S_{\triangle FA'B'}$，

$\therefore$　四边形 $PA'BB'$ 的面积

=四边形 $FA'BB'$ 的面积

$=\frac{1}{4}$ 四边形 $ABCD$ 的面积.

同理，四边形 $PB'CC'$、$PC'DD'$、$PD'AA'$ 都等于原四边形的四分之一，所以 PA'、PB'、PC'、PD' 四等分四边形 $ABCD$ 的面积.

840.　设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 的中点分别为 E、F，直线 EF 与边 AB、CD 的交点分别为 P、Q，则

$$S_{\triangle PCD}=S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积.}$$

解　$S_{\triangle PCD}=S_{\triangle DEC}+S_{\triangle DPE}+S_{\triangle CPE}$，

因　　$BF=FD$，

$\therefore$　$S_{\triangle DPE}=S_{\triangle PBE}$，$AE=EC$，

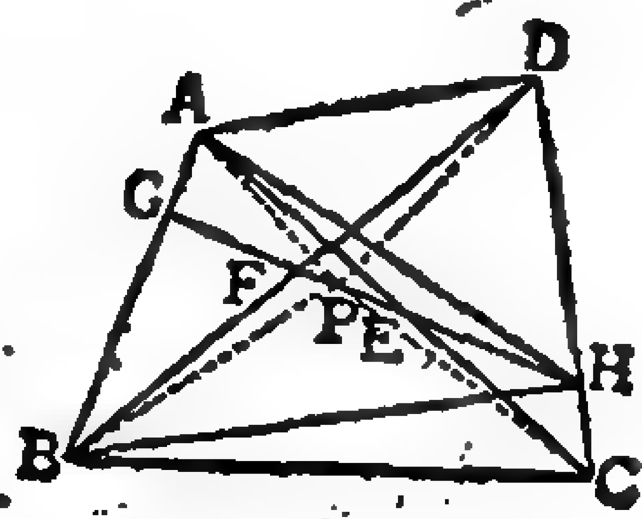
$S_{\triangle CPE}=S_{\triangle APE}$，

故

$$S_{\triangle PCD}=S_{\triangle DEC}+S_{\triangle PBE}+S_{\triangle APE}$$
$$=S_{\triangle DEC}+S_{\triangle AEB}$$
$$=\frac{1}{2}\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积.}$$

对于 $\triangle QAB$ 也同理可证.

841.　过四边形 $ABCD$ 的两对角线中点 E、F 的直线，与边 AB、CD 的交点分别为 G、H，若在 GH 上任取一点 P，则



$$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积.}$$

解　由上题，

$$S_{\triangle HAB}=\frac{1}{2}\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积,}$$

因　$S_{\triangle HAB}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAH}+S_{\triangle PBH}$，

由 $AE=EC$，得 $S_{\triangle PAH}=S_{\triangle PCH}$；

又 $BF=DF$，得 $S_{\triangle PBH}=S_{\triangle PDH}$.

$\therefore$　$S_{\triangle HAB}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCH}+S_{\triangle PDH}$

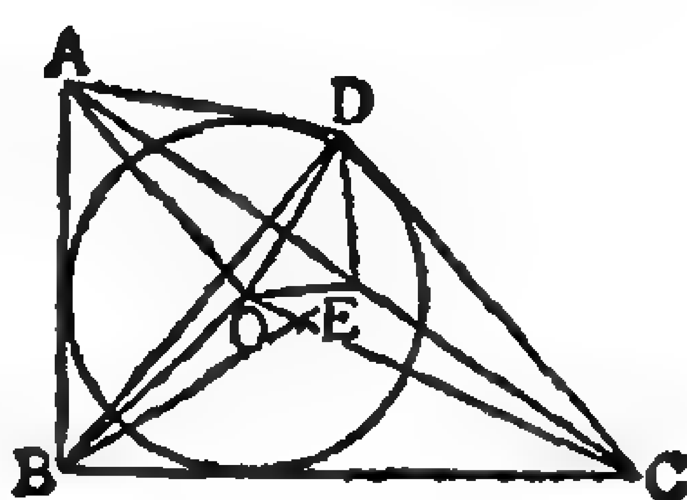
$=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}$，

$\therefore$　$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}$

$=\frac{1}{2}$ 四边形 $ABCD$ 的面积.

842.　若圆 O 的外切四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点为 E，则

$S_{\triangle BOE}=S_{\triangle DOE}$.



解　因为 $ABCD$ 为圆的外切四边形，所以

$$AB+CD=AD+BC.$$

设 r 为圆 O 的半径，用 $\frac{1}{2}r$ 乘上式得

$$\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}CD\cdot r=\frac{1}{2}AD\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r.$$

因此

$$S_{\triangle OAB}+S_{\triangle ODC}=S_{\triangle OAD}+S_{\triangle OBC}$$
$$=\frac{1}{2}\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积.}\quad ①$$

又因 E 为 AC 的中点，

$$S_{\triangle ABE}+S_{\triangle DEC}$$
$$=\frac{1}{2}\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积.}\quad ②$$

由①、②得

$S_{\triangle OAB}+S_{\triangle ODC}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle DEC}$，

即　$S_{\triangle ODC}-S_{\triangle DEC}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle OAB}$，

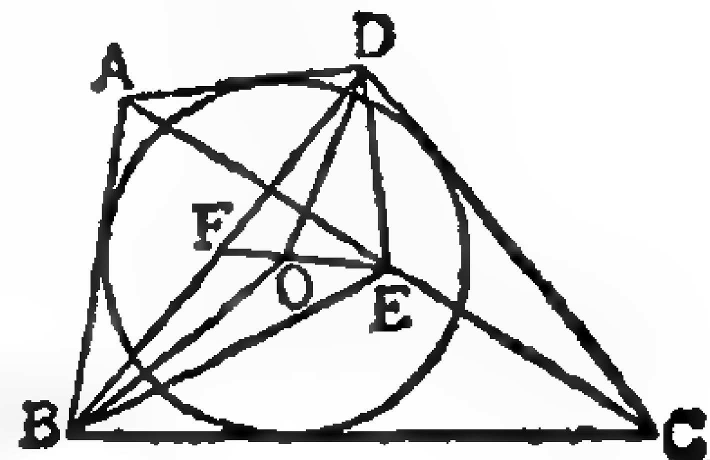
因此　$S_{\triangle DOE}+S_{\triangle COE}=S_{\triangle BOE}+S_{\triangle AOE}$.

由于 E 是 AC 的中点，有

$S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COE}$，

$\therefore$　$S_{\triangle DOE}=S_{\triangle BOE}$.

843.　设圆 O 的外切四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 的中点分别为 E、F，则 E、O、F 在一直线



上。[牛顿定理]

解 根据上题有 $S_{\triangle DOE}=S_{\triangle BOE}$。因为 B、D 在直线 EO 的异侧，所以 EO 的延长线过 BD 的中点 F，即 E、O、F 在一直线上。

844. 设四边形 $ABCD$ 的边 BA、CD 的延长线相交于点 G，对角线 BD、AC 的中点为 E、F，则

$$S_{\triangle GEF}=\frac{1}{4}\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积}.$$

解 $S_{\triangle GEF}=S_{\triangle ECG}-(S_{\triangle ECF}+S_{\triangle GCF})$。

由 E 为 BD 的中点，所以

$$S_{\triangle ECG}=\frac{1}{2}S_{\triangle GBC}. \quad ①$$

又 F 为 AC 的中点，所以

$$S_{\triangle ECF}=\frac{1}{2}S_{\triangle AEC}, \quad ②$$

$$S_{\triangle GCF}=\frac{1}{2}S_{\triangle AGC}. \quad ③$$

把①、②、③代入最初的式中，

$$\therefore\ S_{\triangle GEF}=\frac{1}{2}[S_{\triangle GBC}-(S_{\triangle AEC}+S_{\triangle AGC})]$$

$$=\frac{1}{2}\text{四边形 }ABCE\text{ 的面积}.$$

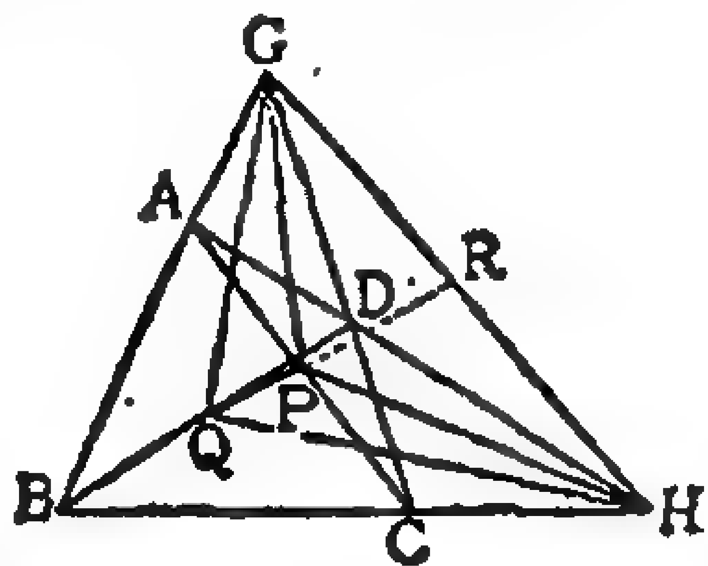
而 E 为 BD 的中点，所以

四边形 $ABCE$ 的面积

$$=\frac{1}{2}\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积},$$

故 $$S_{\triangle GEF}=\frac{1}{4}\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积}.$$

845. 任意四边形的两条对角线的中点，两组对边延长线交点的线段的中点，则这三点在一条直线上。[牛顿线]



解 设四边形为 $ABCD$，对角线 AC、BD 的中点为 P、Q，两组对边延长线的交点为 G、H，根据上题有

$$S_{\triangle GPQ}=S_{\triangle HPQ}$$

$$=\frac{1}{4}\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积}.$$

所以 $\triangle GPQ$ 与 $\triangle HPQ$ 等积，G、H 在 PQ 的异侧，因此 QP 的延长线过 GH 的中点 R，即 P、Q、R 在一直线上。

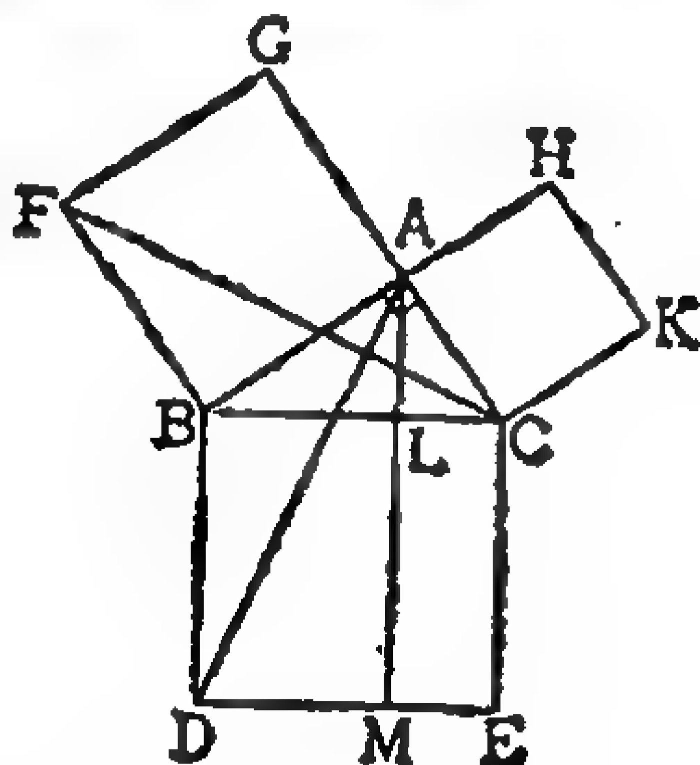
6. 平方关系

(1) 勾股定理及其应用

846. 直角三角形斜边上正方形的面积等于另外两边上正方形的面积之和。

[勾股定理或毕达哥拉斯定理]

解 设在以 A 为直角顶点的直角三角形 ABC 的外侧，分别作正方形 $BCED$、$ABFG$、$ACKH$，从 A 引 BC 的垂线 AL，AL 的延长线与 DE 的交点为 M，则



$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\square BDML\text{ 的面积},$$

$$S_{\triangle FBC}=\frac{1}{2}\text{正方形 }BFGA\text{ 的面积}.$$

因为 $BA=BF$，$BD=BC$，$\angle ABD=\angle FBC$，

所以 $\triangle ABD\cong\triangle FBC$，

$\therefore$ $\square BDML$ 的面积

$=$正方形 $BFGA$ 的面积。

同理

$\square CLME$ 的面积$=$正方形 $ACKH$ 的面积。

$\therefore$ 正方形 $BDEC$ 的面积

$=\square BDML$ 的面积

$+\square CLME$ 的面积

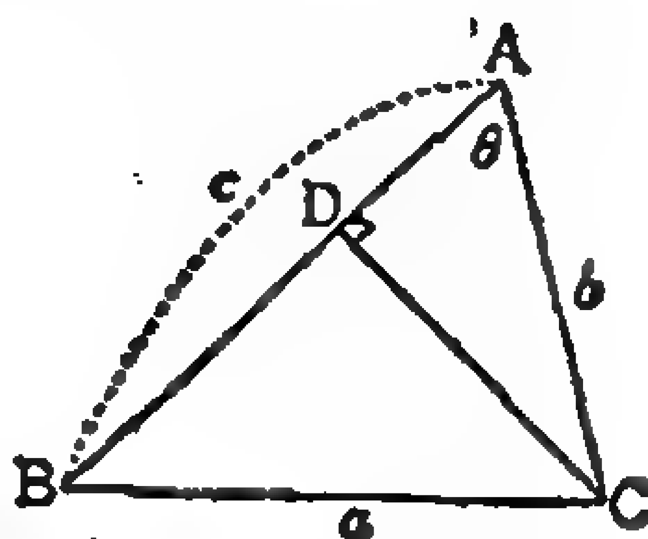
$=$正方形 $BFGA$ 的面积

$+$正方形 $ACKH$ 的面积，

即 $$BC^2=AB^2+AC^2.$$

847. 设 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 分别为 a、b、c，角 A 为 θ，则

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\theta.$$

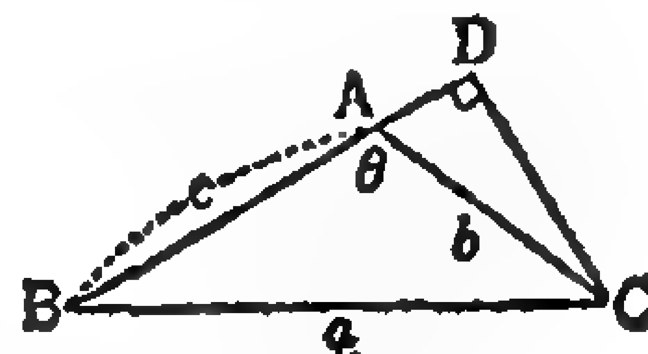


解 从 C 向 AB 引垂线，垂足为 D。

(1) 当 θ 是锐角时，

$BD=c-b\cos\theta$,

$CD=b\sin\theta$.



在直角三角形 BDC 中，

$$a^2=(c-b\cos\theta)^2+(b\sin\theta)^2$$

$$=c^2+b^2-2cb\cos\theta.$$

(2) 当 θ 是钝角时，

$$BD=c+b\cos(180°-\theta)=c-b\cos\theta,$$
$$CD=b\sin(180°-\theta)=b\sin\theta.$$

得到与θ为锐角时相同的结果.

848. 在直角三角形ABC($\angle C=90°$)的斜边AB上向外侧作正方形$ADEB$，在另外两边上向外侧作正方形$ACLK$、$CBMN$，从C作DE的垂线CF，从D作BC的垂线DG，CF与DG的交点为H，则

正方形$ACLK$的面积$=\square ADHC$的面积，
正方形$CBMN$的面积$=\square CHEB$的面积.

解 在$\triangle KAB$、$\triangle CAD$中，$AK=AC$，$AB=AD$，$\angle KAB=\angle CAD$，

$$\therefore\quad \triangle KAB\cong\triangle CAD.$$

因$KA\parallel CL$，

$$\therefore\quad 正方形AKLC的面积=2S_{\triangle AKB}.$$

又$AD\parallel CH$，$AC\parallel DG$，

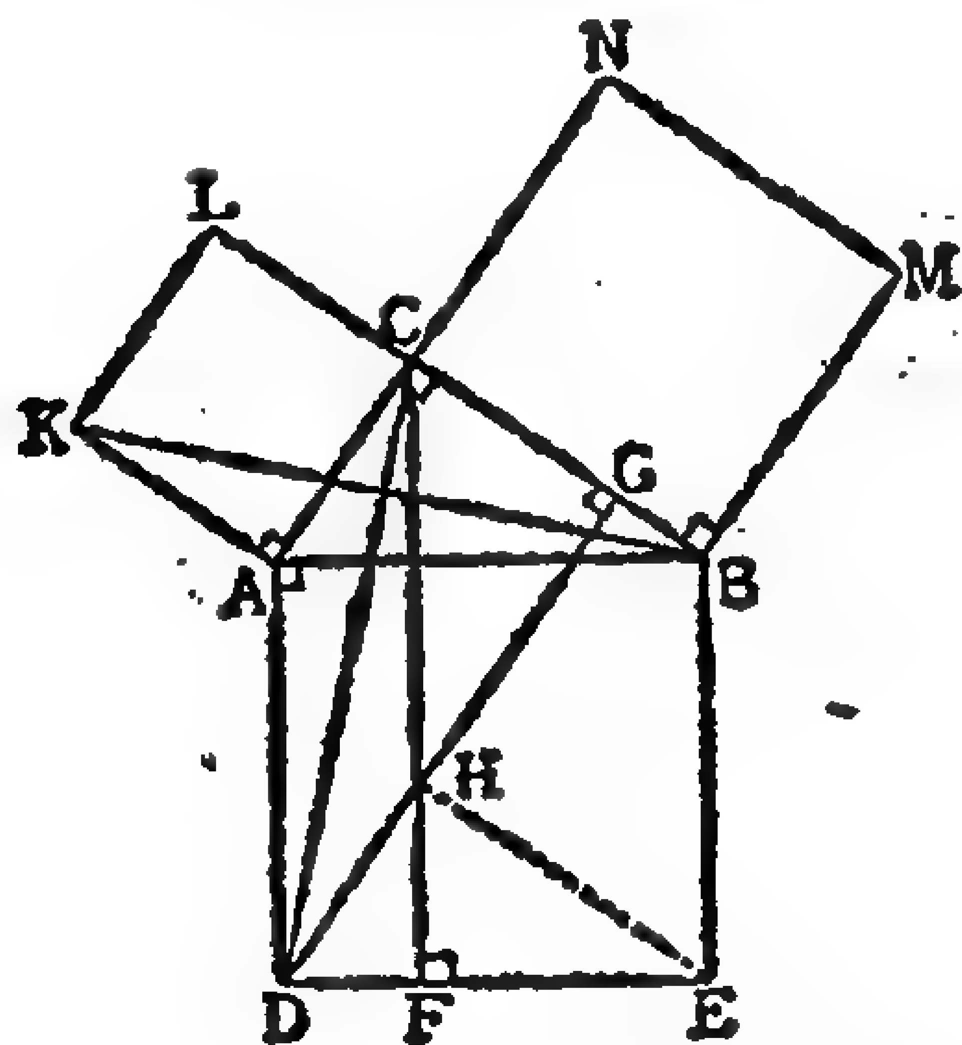
$$\therefore\quad \square ADHC的面积=2S_{\triangle ADC}.$$

因此

正方形$ACLK$的面积$=\square ADHC$的面积.

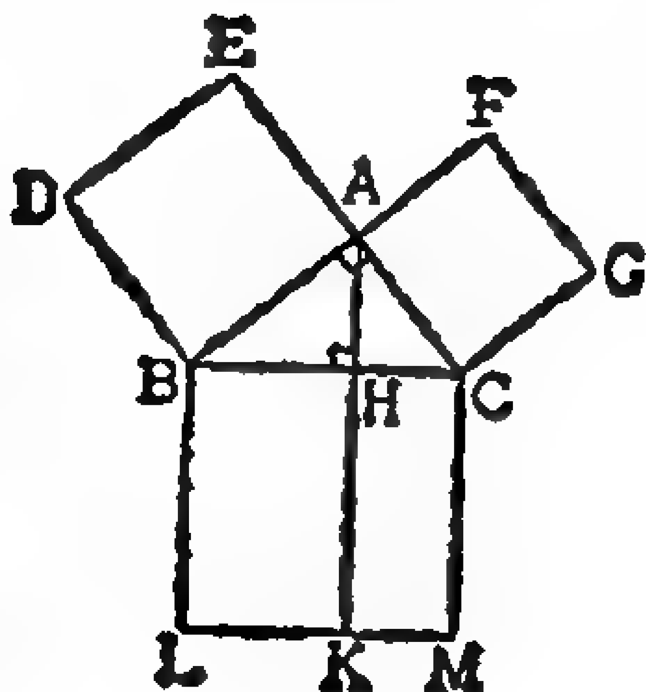
同理

正方形$CBMN$的面积
$=\square CHEB$的面积.



849. 若从直角三角形ABC的直角顶点A作斜边BC的垂线AH，则

(1) $AB^2=BH\cdot BC$，(2) $AC^2=HC\cdot BC$，
(3) $AH^2=BH\cdot HC$.



解 (1) 如图所示，设AH的延长线与LM的交点为K(参考问题846的解)，则正方形$ABDE$的面积

$=\square BLKH$的面积，

即 $AB^2=BH\cdot BL$.

但因 $BL=BC$，

$$\therefore\quad AB^2=BH\cdot BC.$$

(2) 同理 正方形$ACGF$的面积
$=\square HKMC$的面积，

即 $AC^2=HC\cdot CM$.

因 $CM=BC$，

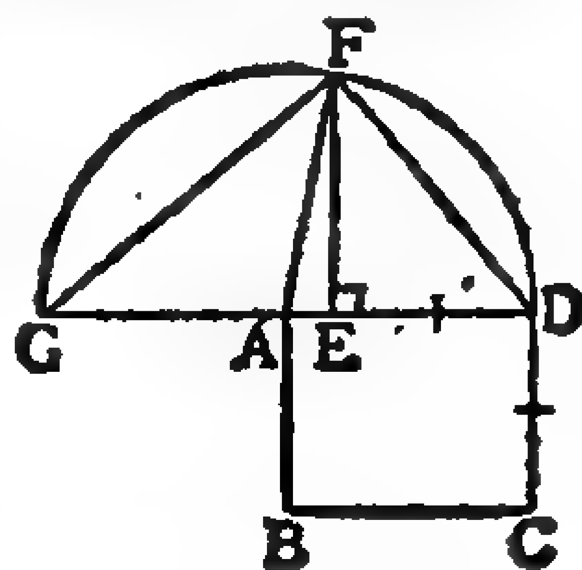
$$\therefore\quad AC^2=HC\cdot BC.$$

(3) 在直角三角形ABH中$AH^2=AB^2-BH^2$，因为

$AB^2=BH\cdot BC$，所以

$$AH^2=BH\cdot BC-BH^2$$
$$=BH(BC-BH)=BH\cdot HC.$$

850. 在矩形$ABCD$的边AD上取点E，使$DE=DC$，作EF垂直于AD，与以A为圆心、AD为半径的圆弧交于点F，则$DF^2=2\square ABCD$的面积.



解 设DAG为圆的直径，有$\angle DFG=\angle R$，由上题知

$$FD^2=DE\cdot DG=2CD\cdot AD$$
$$=2\square ABCD的面积$$
$$(\because\quad DE=DC,\ DG=2AD).$$

851. 在三角形ABC中，若$AB^2=BC^2+CA^2$，则是直角三角形.

解 作$\triangle A'B'C'$，使$A'C'=AC$，$B'C'=BC$且$\angle A'C'B'=\angle R$. 根据毕达哥拉斯定理得

$$A'B'^2=B'C'^2+A'C'^2.$$

根据假设$AB^2=AC^2+BC^2$，而$B'C'=BC$，$C'A'=CA$，所以$A'B'=AB$. 因而

$$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$

故 $\angle ACB=\angle A'C'B'=\angle R$，

即$\triangle ABC$是直角三角形.

852. 用下式表示三边长的三角形是直角三角形，为什么?

(1) m^2-n^2，$2mn$，m^2+n^2;

(2) $4P^2-1$，$4P$，$4P^2+1$.

解 根据上题，要判定三角形是否为直角三角形，只要看两条小边的平方和是否等于最大边的平方.

(1) $(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$

$=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2$

$=m^4+2m^2n^2+n^4=(m^2+n^2)^2$,

所以 $(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$.

因此这个三角形是直角三角形。

(2) $(4P^2-1)^2+(4P)^2$

$=16P^4-8P^2+1+16P^2$

$=16P^4+8P^2+1=(4P^2+1)^2$,

因此这个三角形也是直角三角形。

853. 设三条线段的长为 a、b、c, 如果满足 $a^2<b^2+c^2$、$b^2<c^2+a^2$、$c^2<a^2+b^2$, 那么用这些线段能否作出三角形。

解 因为 $a^2<b^2+c^2$, 所以

$$a^2<b^2+2bc+c^2,$$

即 $a^2<(b+c)^2$. 因为 a、b、c 都是正数，所以 $a<b+c$. 同理有

$$b<c+a,\ c<a+b,$$

即 a、b、c 中的任何一条线段都小于另外两条的和，所以用这三条线段能作出三角形。

854. 直角三角形斜边上的正三角形等于另外两边上的正三角形之和。

解 设 $\triangle ABC$ 为直角三角形($\angle A=\angle R$), 在 AB、BC、CA 上作正三角形，依次为 ABF、BCD、CAE, 则

$$\triangle ABF=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2,$$

$$\triangle BCD=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2,$$

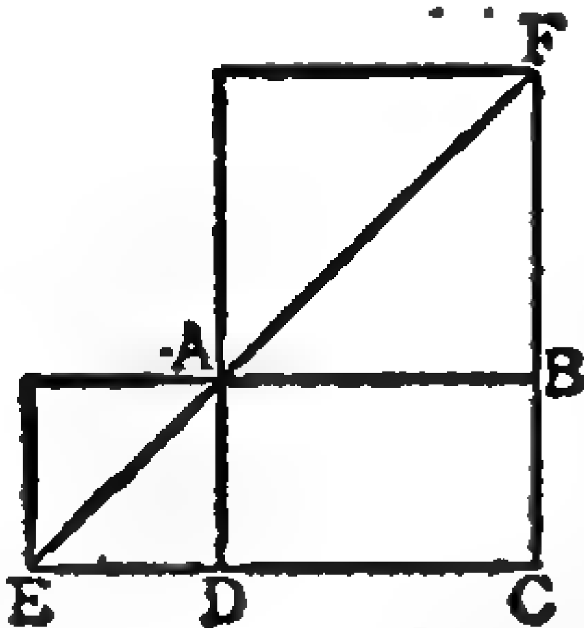
$$\triangle ACE=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2.$$

根据毕达哥拉斯定理，$AB^2+AC^2=BC^2$.

$$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2+\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2,$$

$$\therefore\ S_{\triangle ABF}+S_{\triangle ACE}=S_{\triangle BDC}.$$

855. 矩形面积等于在该矩形相邻两边上所作两个正方形的对角线为边的矩形面积之半。



解 设在矩形 $ABCD$ 的两条邻边 AB、AD 上分别作正方形，引对角线 AF、AE, 因为 $\angle ABF=\angle R$; 所以

$$AF^2=AB^2+BF^2=2AB^2.$$

同理 $AE^2=2AD^2$.

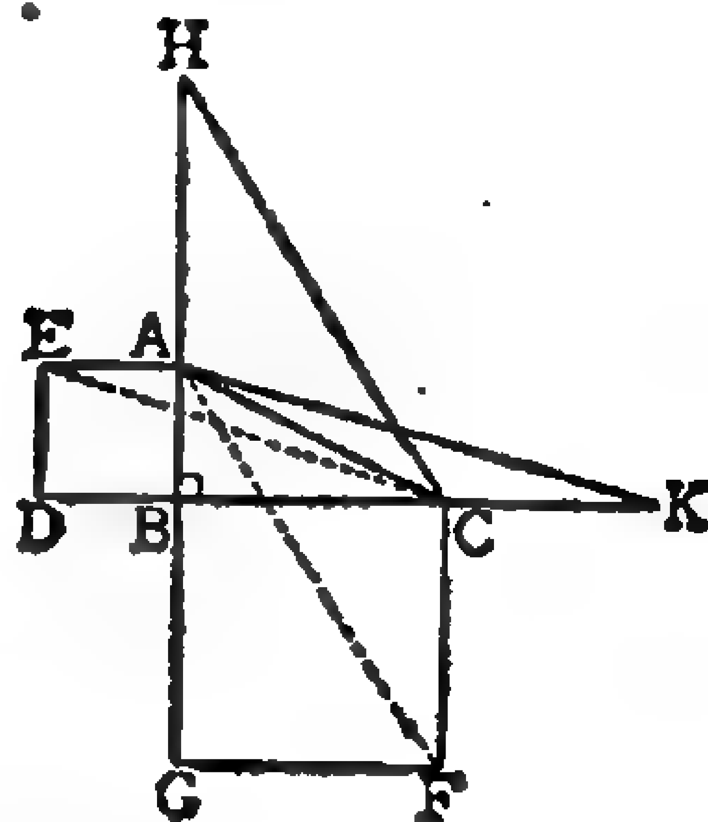
$$\therefore\ AF^2\cdot AE^2=4AB^2\cdot AD^2,$$

$$AF\cdot AE=2AB\cdot AD,$$

故 $AB\cdot AD=(AF\cdot AE)\div 2$.

因此矩形 $ABCD$ 的面积等于以 AF、AE 为边的矩形面积之一半。

856. 在直角三角形 ABC 的两直角边 AB、BC 上向外侧作正方形 $ABDE$、$BCFG$, 延长 BA、BC 分别到 H、K, 使 $BH=CE$, $BK=AF$, 则 $CH=AK$.



解 根据毕达哥拉斯定理，

$$CH^2=BH^2+BC^2=CE^2+BC^2$$

$$(\because\ BH=CE).$$

$$CE^2=CD^2+ED^2=CD^2+AB^2,$$

$$\therefore\ CH^2=CD^2+AB^2+BC^2.$$

同理，

$$AK^2=BK^2+AB^2=AF^2+AB^2$$

$$=AG^2+GF^2+AB^2$$

$$=CD^2+BC^2+AB^2$$

$$=CD^2+AB^2+BC^2.$$

$$\therefore\ CH=AK.$$

857. 若直角三角形的一个锐角是另一个锐角的两倍，则在两条直角边中，大边上的正方形等于小边上正方形的三倍。



解 在 $\angle B$ 为直角的三角形中，$\angle C=2\angle A$.

所以 $\angle A=30^\circ$, $\angle C=60^\circ$.

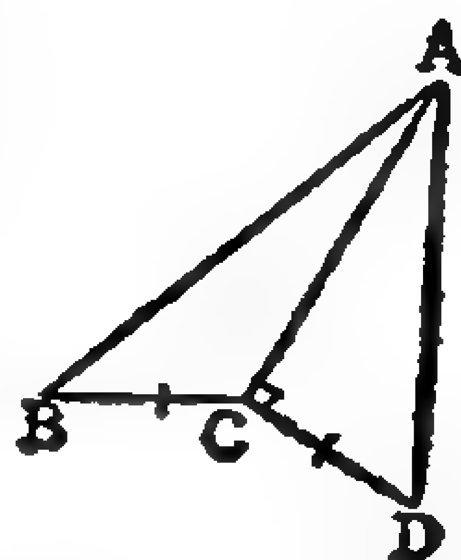
AC 是 BC 的两倍，

所以 $AC^2=(2BC)^2=4BC^2$.

$$AB^2=AC^2-BC^2,$$

$$\therefore\ AB^2=4BC^2-BC^2=3BC^2.$$

858. 若三角形一边上的正方形大于、等于、或小于另外两边上的正方形的和，则此边所对的角为钝角、直角或锐角。



解 在 $\triangle ABC$ 中，从 C 作 AC 的垂线 CD, 使 $CD=CB$, 连结 AD, 则

$\triangle ACD$ 是直角三角形，所以

$$AD^2=AC^2+CD^2=AC^2+BC^2.$$

若 $AB^2>AC^2+BC^2$，则 $AB^2>AD^2$.

$$\therefore\quad AB>AD,$$

即 $\triangle ACB$ 和 $\triangle ACD$ 中的两边相等，第三边 AB 比 AD 大，所以 $\angle ACB>\angle ACD$ 即 $\angle ACB>\angle R$.

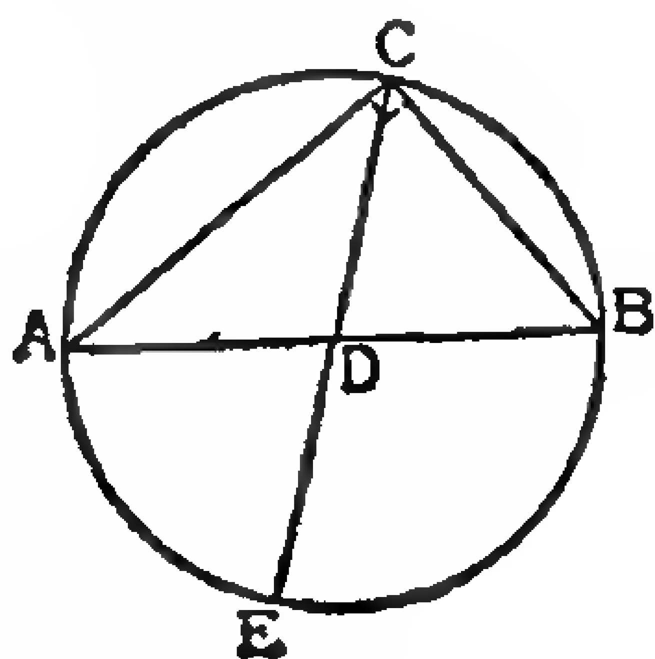
若 $AB^2=AC^2+BC^2$，则 $AB=AD$,

$$\therefore\quad \angle ACB=\angle ACD=\angle R.$$

若 $AB^2<AC^2+BC^2$，则 $AB<AD$,

$$\therefore\quad \angle ACB<\angle ACD=\angle R.$$

859. 在直角三角形 ABC 的斜边 AB 上有一点 D，若 $AD\cdot DB=CD^2$，则 D 是 AB 的中点，或直线 CD、AB 垂直.



解　因为

$$\angle C=\angle R,$$

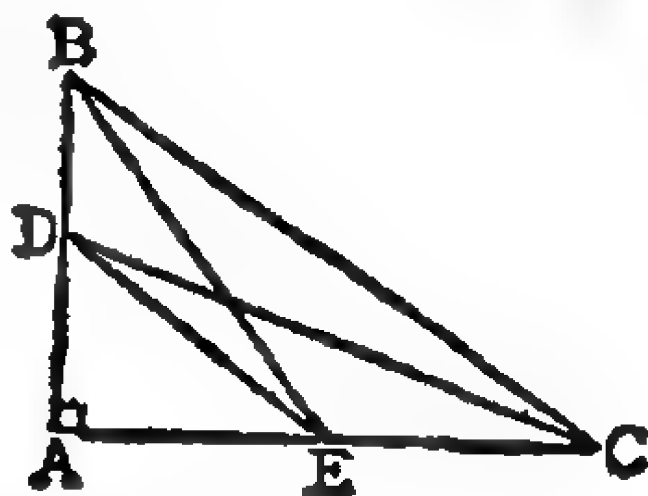
所以以 AB 为直径的圆，过点 C. 设 CD 的延长线与圆周的交点为 E，则由方幂定理有 $AD\cdot DB=CD\cdot DE$，因 $AD\cdot DB=CD^2$,

$$\therefore\quad CD=DE.$$

因 AB 是直径，所以 D 是 AB 的中点. 当 $CD\perp AB$ 时也成立.

860. 在直角 $\triangle ABC$ 中，若引一线段 DE 使其两端 D、E 分别在直角边 AB、AC 上，则

$$CD^2+BE^2=DE^2+BC^2.$$



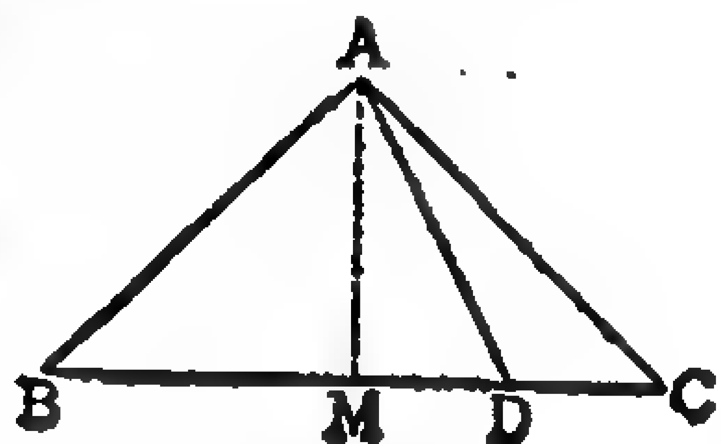
解　因为 $CD^2=AD^2+AC^2$,

$$BE^2=AB^2+AE^2.$$

两边相加得:

$$CD^2+BE^2=AD^2+AE^2+AC^2+AB^2=DE^2+BC^2.$$

861. 若在等腰直角三角形 ABC 的斜边 BC 上，取任意一点 D，则 $2AD^2=BD^2+DC^2$.



解　由问题 **736**，设 M 为 BC 的中点，则

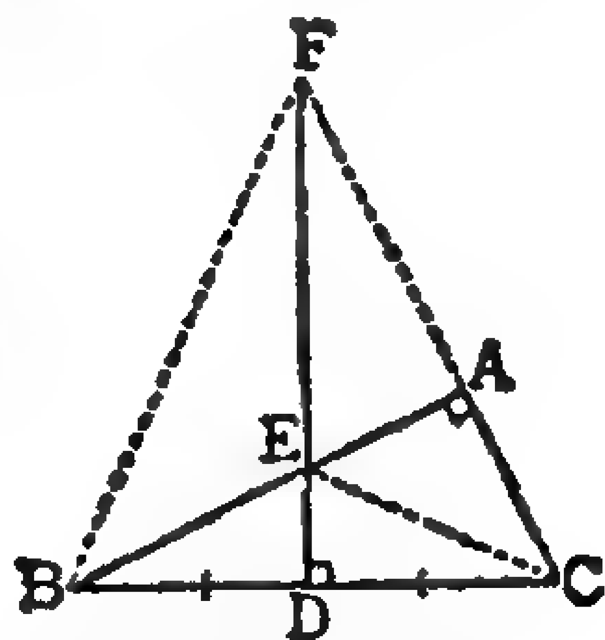
$$BD^2+DC^2=2(BM^2+DM^2).$$

由于 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，有 $AM=BM$ 且 $AM\perp BM$.

$$\therefore\quad BD^2+DC^2=2(AM^2+DM^2)=2AD^2.$$

862. 在直角三角形 ABC 中，若斜边 BC 的垂直平分线与边 AB、AC 或其延长线分别相交于点 E、F，则

$$BE^2-EA^2=AC^2,$$
$$CF^2-AF^2=AB^2.$$



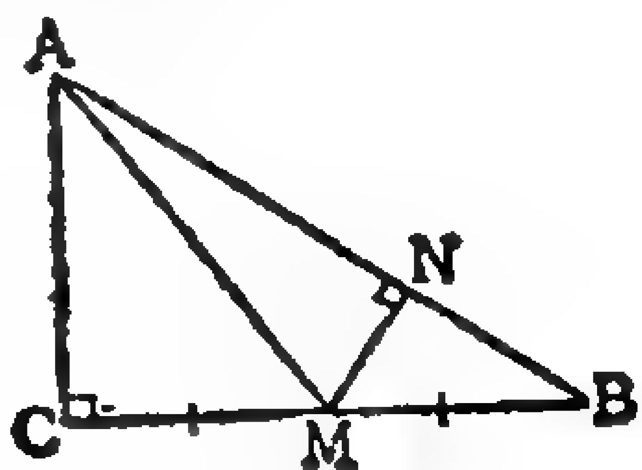
解　连结 EC, FB，因为 EF 是 BC 的垂直平分线，所以 $BE=CE$, $BF=CF$. 在直角三角形 AEC 中，$CE^2-AE^2=AC^2$,

$$\therefore\quad BE^2-AE^2=AC^2.$$

在直角三角形 FAB 中，$BF^2-AF^2=AB^2$,

$$\therefore\quad CF^2-AF^2=AB^2.$$

863. 若从直角三角形 ABC 的一边 BC 的中点 M，作斜边 AB 的垂线 MN，则 $AN^2-BN^2=AC^2$.



解　$\because\quad \angle ANM=\angle R$,

$$\therefore\quad AN^2=AM^2-MN^2. \qquad ①$$

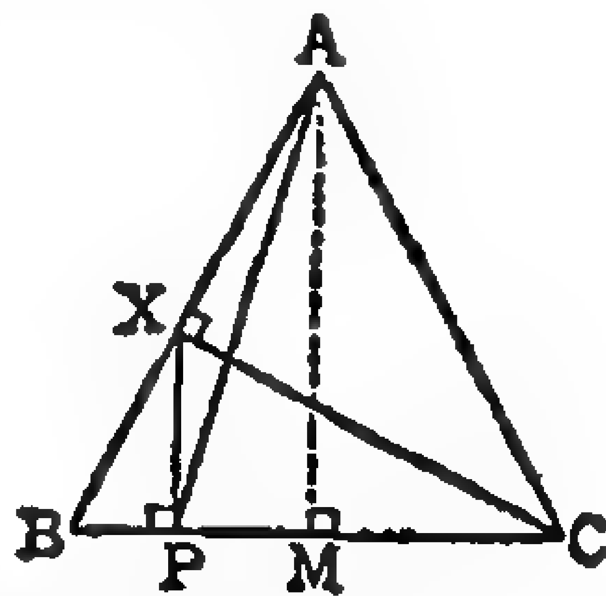
又 $\angle BNM=\angle R$,

$$\therefore\quad BN^2=BM^2-MN^2=CM^2-MN^2. \qquad ②$$

由①－②得:

$$AN^2-BN^2=AM^2-CM^2=AC^2.$$

864. 若三角形 ABC 是以 A 为顶点的等腰三角形，CX 是 AB 的垂线，XP 是 BC 的垂线，则 $AB^2=PA^2+PX^2$.



解　$\triangle ABC$ 是等腰三角形，设 $AM\perp BC$，则 $BM=MC$,

$$\begin{aligned}\therefore\quad AB^2-AP^2&=(AM^2+BM^2)-(AM^2+PM^2)\\&=BM^2-PM^2\\&=(BM-PM)(BM+PM)\\&=BP\cdot PC.\end{aligned}$$

因 $\angle BXC=\angle R$，由问题 **849** 有 $BP\cdot PC=XP^2$.

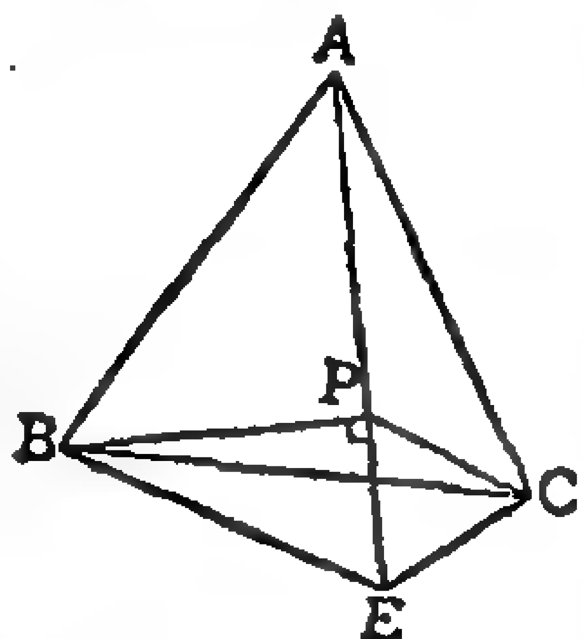
$$\therefore\quad AB^2-AP^2=XP^2,$$

故 $\qquad AB^2=AP^2+XP^2.$

865. 在正三角形 ΔABC 内取一点 P，若

$PB^2+PC^2=PA^2$,

则 $\angle BPC=150°$.



解 如图所示，在 CP 上作正三角形 CPE，则 $\triangle APC\cong\triangle BEC$（两边夹角），所以 $PA=BE$.

因 $PC=PE$,

根据假设 $PE^2+PC^2=PA^2$,

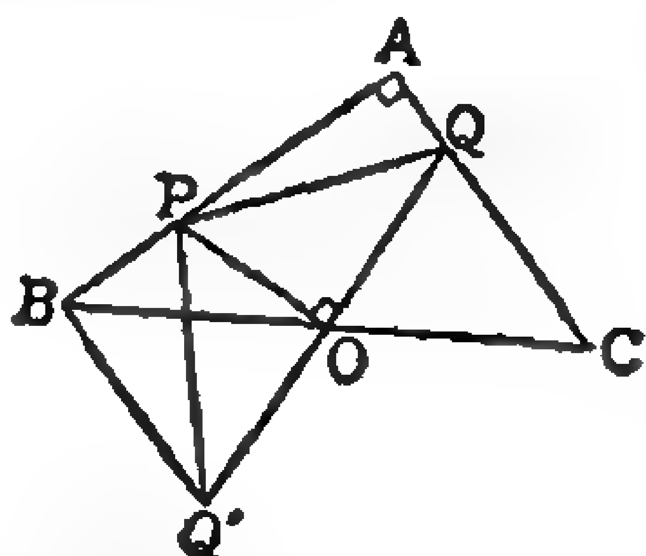
$\therefore\ PB^2+PE^2=BE^2$.

因此 $\triangle PBE$ 是直角三角形，$\angle BPE=90°$.

$\therefore\ \angle BPC=90°+60°=150°$.

866. 从直角三角形 ΔABC 的斜边 BC 的中点 O 向 AB、AC 引直线 OP、OQ，使 $\angle POQ$ 为直角，则

$BP^2+CQ^2=PQ^2$.



解 延长 QO 到 Q'，使 $OQ=OQ'$，连结 PQ'，由 $PO\perp QQ'$，有 $PQ=PQ'$.

根据假设 O 是 BC 的中点，$OQ=OQ'$,

所以 $BQ'=CQ$（$BQ'CQ$ 是平行四边形），

$\therefore\ BP^2+CQ^2=BP^2+BQ'^2$.

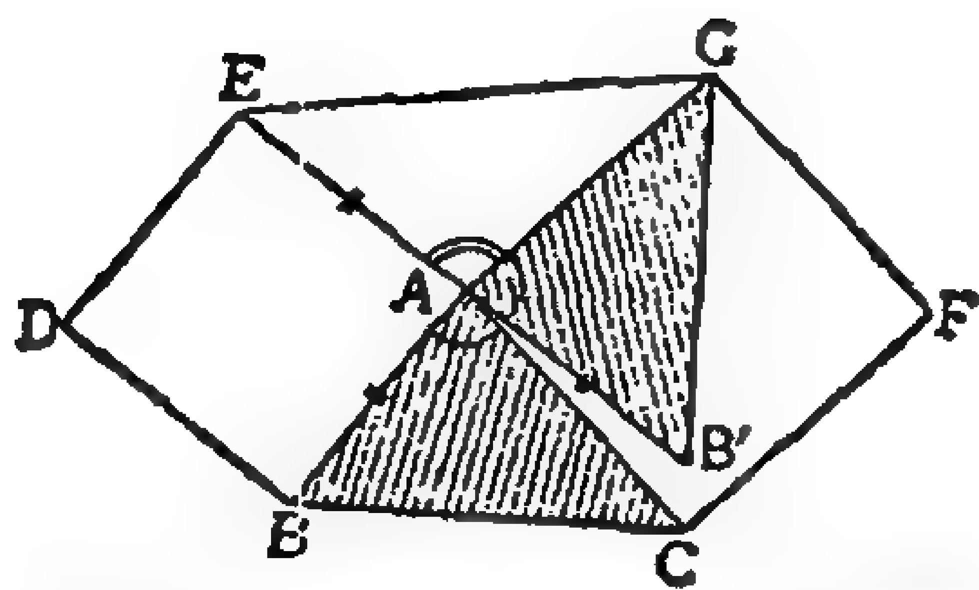
因 $AC\parallel BQ'$，且 $\angle A=\angle R$，有 $\angle PBQ'=\angle R$.

$\therefore\ BP^2+BQ'^2=PQ'^2$,

$\therefore\ BP^2+CQ^2=PQ^2$.

867. 若在 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 上作正方形 $ABDE$、$ACFG$，连结 EG，则

$$EG^2+BC^2=2(AB^2+AC^2).$$



解 以 A 为中心，旋转 $\triangle ABC$，使 AC 与 AG 重合，点 B 的位置为 B'. 由

$$\angle BAC+\angle EAG=2\angle R$$

有 $\angle GAB'+\angle EAG=2\angle R$,

所以 E、A、B' 是一直线，且 $EA=AB'$，根据问题 **874** 有

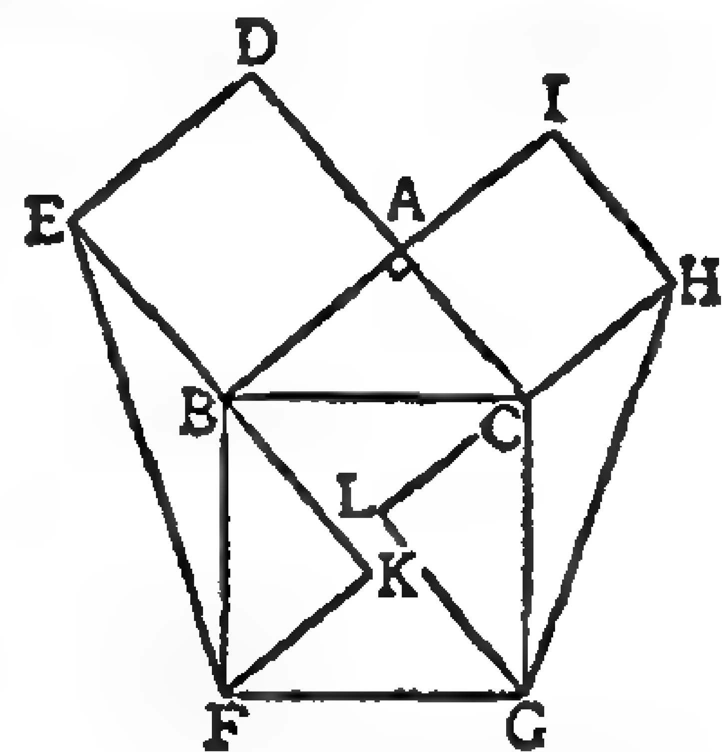
$$EG^2+GB'^2=2(AG^2+AB'^2),$$

$\therefore\ EG^2+BC^2=2(AC^2+AB^2)$.

868. 设在 $\angle A$ 为直角的三角形 ΔABC 的各边上向外侧作正方形 $BADE$、$CBFG$、$ACHI$，连结 EF，GH，则

FE^2+GH^2

$=5BC^2$.



解 从 F 向 EB 的延长线作垂线 FK，因直角三角形 ΔABC、BFK 的斜边 BC、BF 相等，$\angle ABC=\angle KBF$,

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle KBF$,

$\therefore\ AB=KB,\ AC=KF$.

$EK=2AB$.

所以在直角三角形 EFK 中，

$$EF^2=EK^2+KF^2=(2AB)^2+AC^2.$$

同理，$HG^2=(2AC)^2+AB^2$.

把上两式的两边相加，得

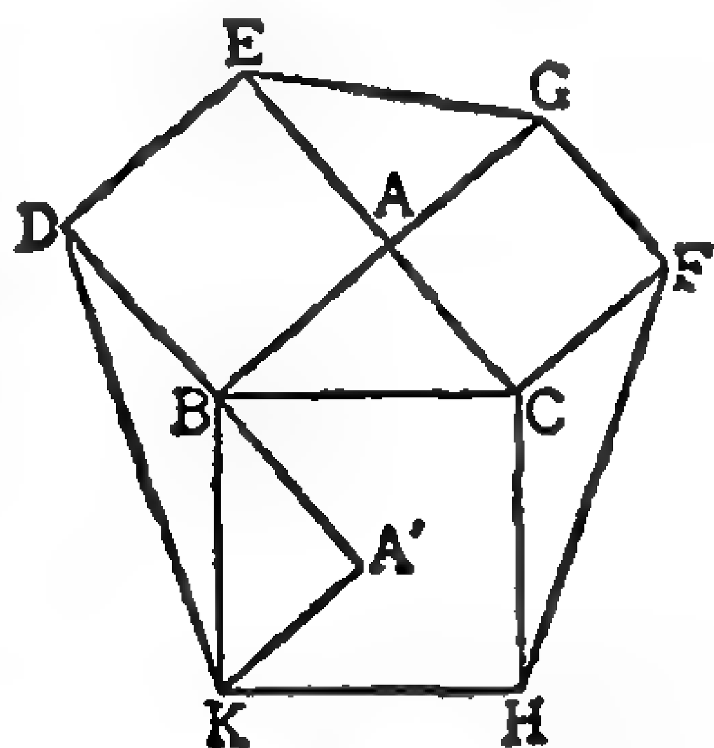
EF^2+HG^2

$=(2AB)^2+AC^2+(2AC)^2+AB^2$

$=5AB^2+5AC^2=5(AB^2+AC^2)$

$=5BC^2$.

869. 设在 $\triangle ABC$ 各边上外侧的正方形分别为 $ABDE$、$ACFG$、$BCHK$，连结 EG，FH，KD 作成六边形，则六边形各边上的正方形之和是三角形三边上正方形之和的 4 倍．若 $\angle BAC$ 是直角，则六边形各边上正方形之和等于斜边 BC 上正方形的 8 倍.



解 由问题 **867** 有

$EG^2=2(AB^2+AC^2)-BC^2$,

$DK^2=2(AB^2+BC^2)-AC^2$,

$FH^2=2(AC^2+BC^2)-AB^2$,

$\therefore\ EG^2+DK^2+FH^2$

$=3(AB^2+AC^2+BC^2)$,

因而

$EG^2+ED^2+DK^2+KH^2+HF^2+FG^2$

$=4(AB^2+AC^2+BC^2)$.

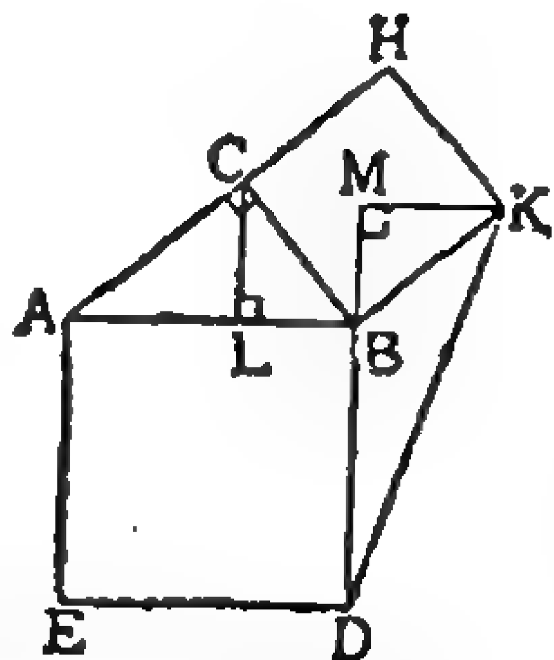
其次，若 $\angle BAC=\angle R$，则

$$BC^2=AB^2+AC^2,$$

所以 $4(AB^2+AC^2+BC^2)=8BC^2$.

870. 在直角三角形 ABC 的边 BC 和 AB 上向外侧作正方形 $BCHK$ 与 $ABDE$, 若从 C 作 AB 的垂线 CL, 则

$$DK^2-CL^2=(AB+BL)^2.$$



解 由 K 作 DB 的垂线其垂足为 M, 则

$$\angle KBM=\angle CBL=\angle R-\angle MBC.$$

因 $BK=BC$, $\angle KMB=\angle CLB=\angle R$,

$$\therefore\quad \triangle KBM\cong\triangle CBL,$$

$$KM=CL,\ BM=BL.$$

在直角三角形 KMD 中

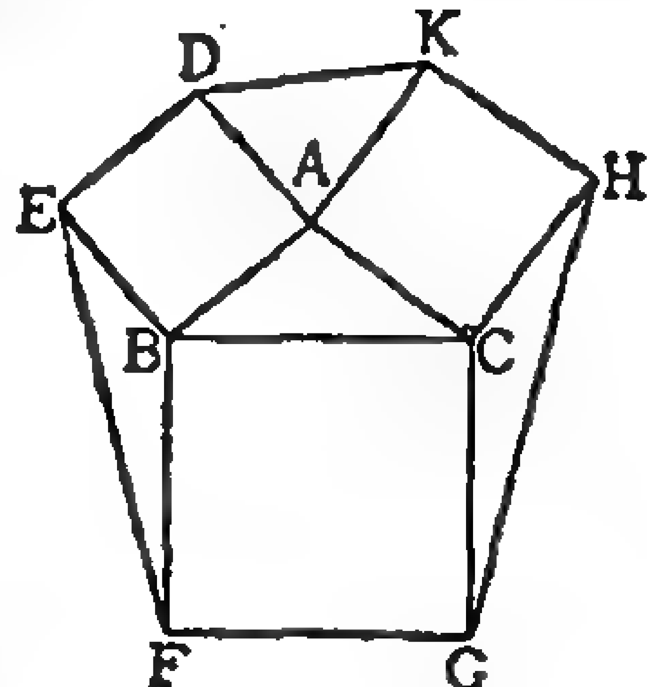
$$DK^2-KM^2=DM^2,$$

所以

$$DK^2-CL^2=(DB+BM)^2=(BD+BL)^2=(AB+BL)^2.$$

871. 若在三角形 ABC 的外侧，作各边上的正方形 $ABED$、$BCGF$、$ACHK$, 则六边形 $DEFGHK$ 的面积为

$$AB^2+BC^2+CA^2+4S_{\triangle ABC}.$$

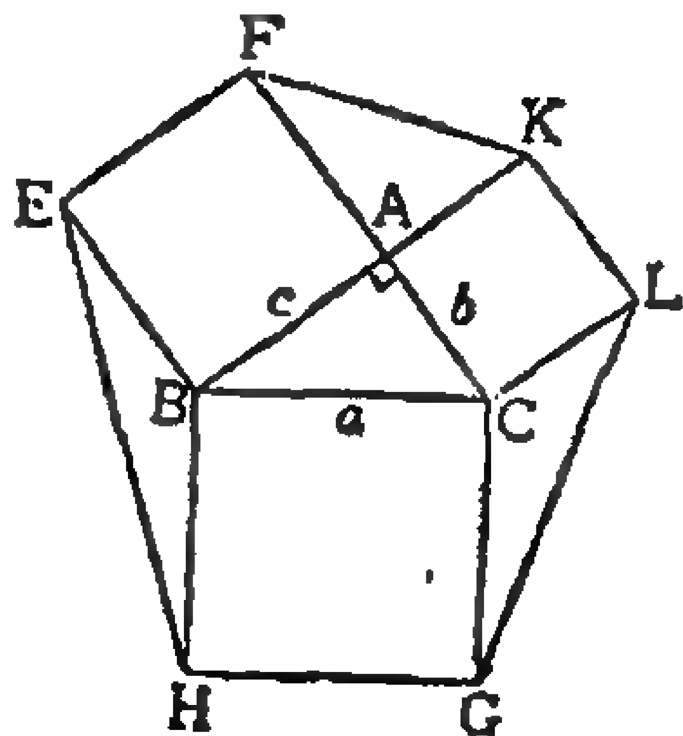


解 由问题 **779** 有

$$S_{\triangle AKD}=S_{\triangle BEF}=S_{\triangle CGH}=S_{\triangle ABC},$$

因此六边形的面积等于三个正方形的面积与四个 $\triangle ABC$ 面积之和.

872. 在三角形 ABC 中, $\angle A=90°$, 三角形各边外侧的正方形分别为 $ABEF$、$BCGH$、$CAKL$, 若连结 EH, GL, KF, 则六边形 $EHGLKF$ 的面积等于 $2(a^2+bc)$, 其中 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.



解 $\triangle AFK\cong\triangle ABC$; 又在 $\triangle EBH$ 和 $\triangle ABC$ 中，其两边分别相等，且其夹角互补，所以 $S_{\triangle EBH}=S_{\triangle ABC}$.

同理, $S_{\triangle LGC}=S_{\triangle ABC}$.

$\therefore$ 六边形 $EHGLKF$

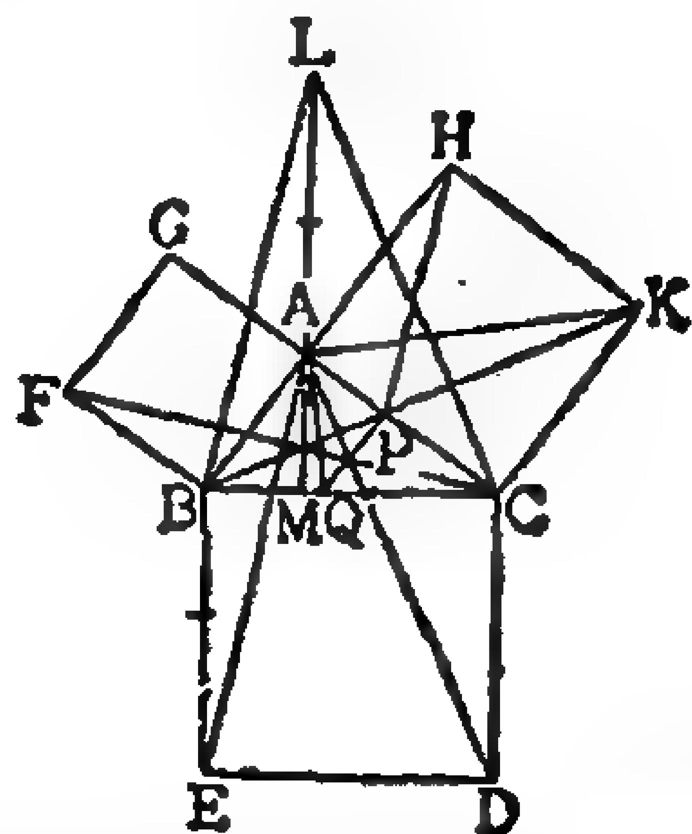
$$=BC^2+CA^2+AB^2+4S_{\triangle ABC}$$

$$=a^2+b^2+c^2+4\times\frac{1}{2}bc$$

$$=2a^2+2bc=2(a^2+bc).$$

873. 在以 $\angle A$ 为直角的三角形 ABC 的外侧，作各边上的正方形 $BCDE$、$CAHK$、$BAGF$.

(1) 若由 A 向 BC 作垂线 AM, 则 AM、FC、BK 过同一点.



(2) 过 BK 和 AC 的交点 P 作 CA 的垂线 PQ, 设 PQ 与 BC 的交点为 Q, 则 AQ 平分 $\angle A$.

解 (1) 延长 MA, 在其上取一点 L, 设 $AL=BE$, 则四边形 $BLAE$ 为平行四边形.

因为 $FC\perp AE$ (参照问题 **237**),

$$\therefore\quad FC\perp BL.$$

同理, $BK\perp LC$, $LM\perp BC$, 即 BK、CF、LM 过三角形 BCL 的各顶点，并与对边垂直，所以这三条直线通过同一点.

(2) 由 $AB\parallel CK$,

$\therefore\quad S_{\triangle BCK}=S_{\triangle ACK}$. $\therefore\quad S_{\triangle BPC}=S_{\triangle APK}$.

由 $PQ\perp AC$, $AB\perp AC$, 有 $PQ\parallel AB$,

$$\therefore\quad S_{\triangle BPC}=S_{\triangle AQC}.$$

又 $S_{\triangle APK}=S_{\triangle APH}$,

$$\therefore\quad S_{\triangle AQC}=S_{\triangle APH}.$$

又 $AC=AH$, $PQ\perp AC$, $PA\perp AH$,

$\therefore\quad PQ=PA$, $\therefore\quad \angle QAP=\frac{1}{2}\angle R$.

因 $\angle BAC=\angle R$, $\therefore\quad \angle QAC=\angle BAQ$,

故 AQ 平分 $\angle A$.

(2) 三角形的中线、重心，a^2+b^2 型

874. 若 AM 为 $\triangle ABC$ 的中线，则

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

[中线定理]

解 由点 A 向 BC 作垂线其垂足为 H, 则

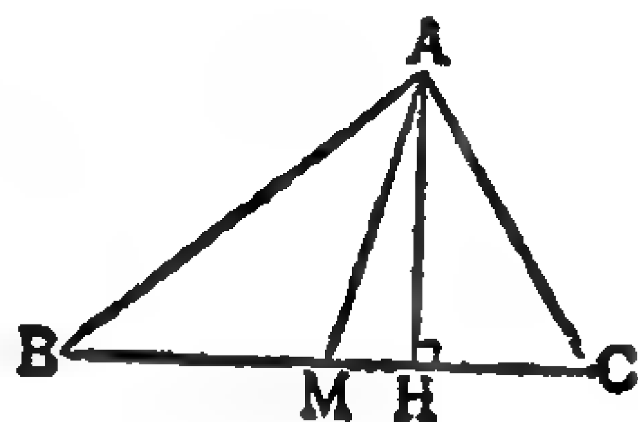
$$AB^2=AH^2+BH^2=AM^2+BH^2-MH^2,$$

$$AC^2=AH^2+CH^2=AM^2+CH^2-MH^2,$$

$\therefore\quad AB^2+AC^2$

$=2AM^2+(BH^2+CH^2-2MH^2)$.

根据问题**736**有



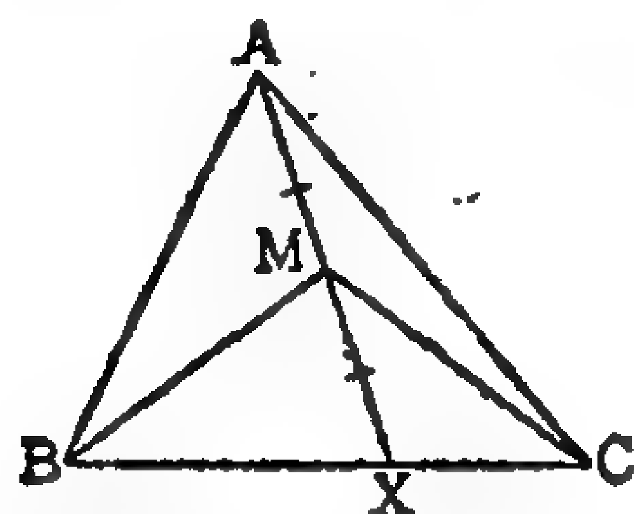
BH^2+CH^2

$=2BM^2+2MH^2$,

$\therefore\quad AB^2+AC^2$

$=2AM^2+2BM^2$.

875. 在$\triangle ABC$的BC上取一点X，若$AC^2-AB^2=BX^2-CX^2$，AX的中点为M，则



$MB=MC$.

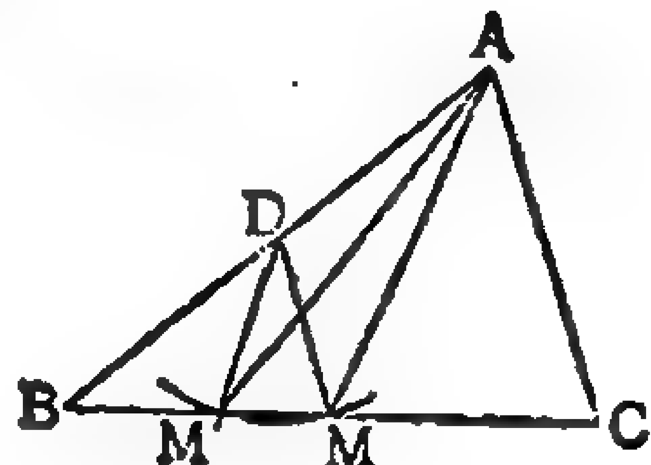
解 由假设，$AC^2+CX^2=AB^2+BX^2$，根据上题$AC^2+CX^2=2(CM^2+MX^2)$，

$AB^2+BX^2=2(BM^2+MX^2)$.

由上两式得$CM^2+MX^2=BM^2+MX^2$，从而$CM^2=BM^2$，

$\therefore\quad CM=BM$.

876. 在三角形ABC的边BC上取一点M，若



AB^2+AC^2

$=2(AM^2+BM^2)$，

则M是不是边BC的中点。

解 M不一定是BC的中点．设AB的中点为D，则在$\triangle AMB$中，$AM^2+BM^2=2(MD^2+AD^2)$，

$\therefore\quad 2(AM^2+BM^2)=4(MD^2+AD^2)$. ①

根据假设

$2(AM^2+BM^2)=AB^2+AC^2$. ②

由①、②有$4(MD^2+AD^2)=AB^2+AC^2$，

因为D是AB的中点，所以

$4AD^2=(2AD)^2=AB^2$,

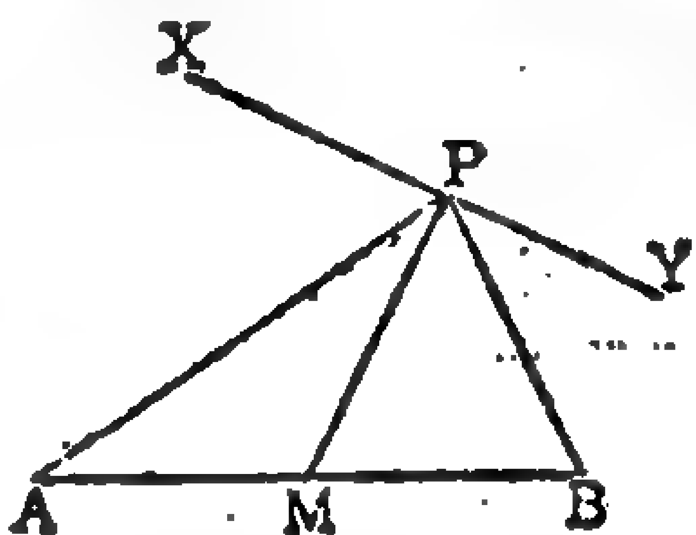
$\therefore\quad 4MD^2=AC^2$,

即 $2MD=AC$.

要使本问题成立，MD必须等于$\frac{1}{2}AC$，因此以D为圆心，以$\frac{1}{2}AC$为半径的圆弧，一般与BC相交于两点，其中一点为BC的中点，而另一点不是中点，所以M不一定是BC的中点。

877. 已知直线XY与不在直线上的两点A、B，在直线XY上求一点，使AP^2+BP^2为最小。

解 如图，设AB的中点为M，根据问题**874**得



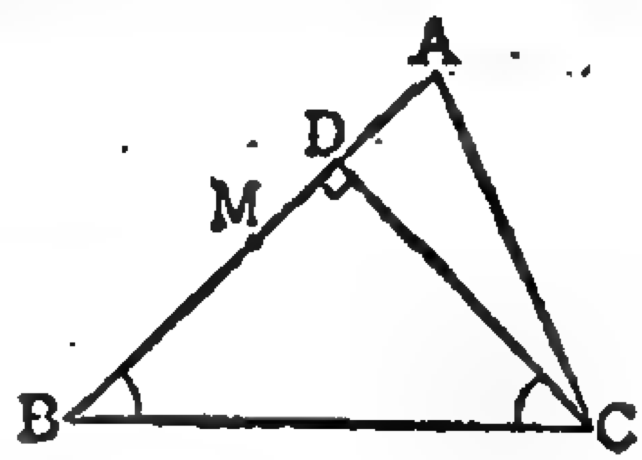
AP^2+BP^2

$=2(AM^2+PM^2)$

$=\frac{1}{2}AB^2+2PM^2$,

要使AP^2+BP^2最小，只要使PM最小即可．因为P是XY上的一点，要使PM最小，则须使P为由M向XY所作垂线的垂足．因此点M在直线XY上的垂足P，是使AP^2+BP^2为最小的点。

878. 在三角形ABC中$\angle B$是$45°$，AB的中点为M，D为高CD的垂足，则



$AC^2=2(AM^2+MD^2)$.

解 因为$\angle B=45°$，$\angle CDB=90°$，所以

$BD=CD$.

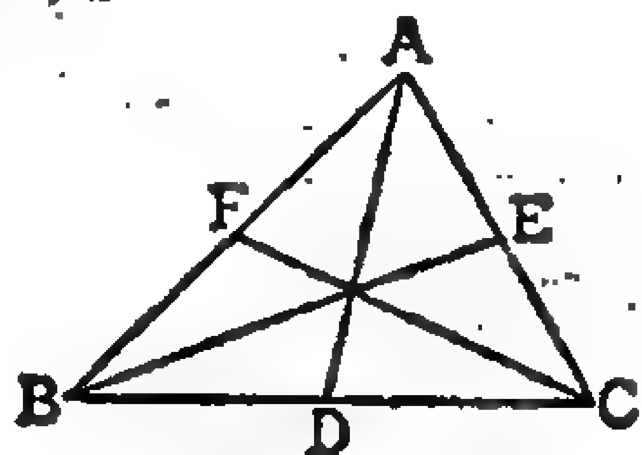
故

$AC^2=CD^2+AD^2=BD^2+AD^2$

$=(AM+MD)^2+(AM-MD)^2$

$=2(AM^2+MD^2)$.

879. 三角形的三边平方和的三倍等于三条中线平方和的四倍。



解 设$\triangle ABC$的三条中线为AD、BE、CF，由问题**874**得

$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$,

$AB^2+BC^2=2(BE^2+CE^2)$,

$AC^2+BC^2=2(CF^2+AF^2)$.

又 $BD=\frac{1}{2}BC$, $CE=\frac{1}{2}AC$, $AF=\frac{1}{2}AB$.

将上面三式两边相加，得

$2(AB^2+BC^2+AC^2)$

$=2(AD^2+BE^2+CF^2)$

$+\frac{1}{2}(AB^2+BC^2+AC^2)$,

$\therefore\quad 3(AB^2+BC^2+AC^2)$

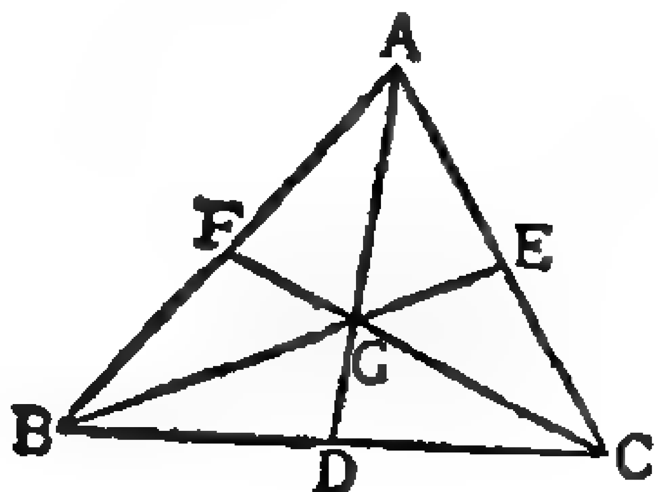
$=4(AD^2+BE^2+CF^2)$.

880. 设$\triangle ABC$的重心为G，则

$AB^2+BC^2+CA^2=3(AG^2+BG^2+CG^2)$.

解　由上题有，

$$AB^2+BC^2+CA^2=\frac{4}{3}(AD^2+BE^2+CF^2).$$



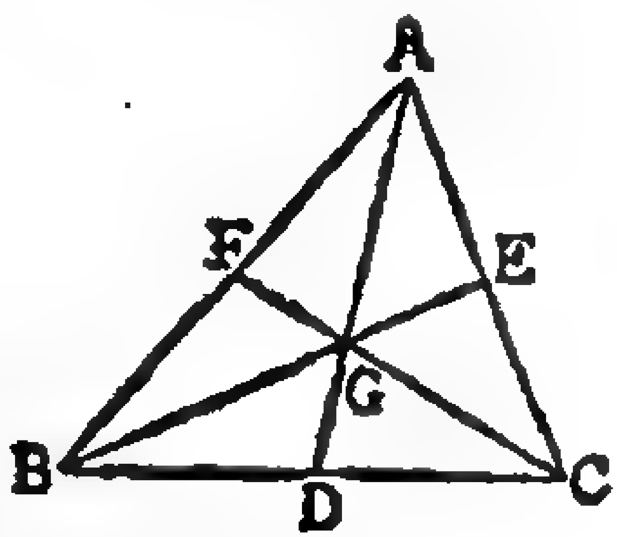
但因为

$$AD=\frac{3}{2}AG,\ BE=\frac{3}{2}BG,\ CF=\frac{3}{2}CG,$$

所以 $AB^2+BC^2+CA^2=3(AG^2+BG^2+CG^2)$.

881. 设$\triangle ABC$的重心为G，则

$$AB^2+AC^2=4AG^2+BG^2+CG^2.$$



解　设延长AG、BG、CG与对边的交点分别为D、E、F，则D、E、F分别是边BC、CA、AB的中点，又$AG=2GD$，$AD=3GD$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad AB^2+AC^2&=2(AD^2+BD^2)\\&=2(9GD^2+BD^2)\\&=2(2AG^2+GD^2+BD^2)\\&=4AG^2+BG^2+CG^2\end{aligned}$$

$\because$ $BG^2+CG^2=2(GD^2+BD^2)$(问题 874).

882. 证明以三角形各边为直径的三个圆面积之和与以各中线为直径的三个圆面积之和的比是定值.

解　设三角形的三边为a、b、c，三条中线为l、m、n，根据问题 879 得，

$$3(a^2+b^2+c^2)=4(l^2+m^2+n^2),$$

$\therefore$ $(a^2+b^2+c^2):(l^2+m^2+n^2)=4:3$.

以a、b、c为直径的三个圆面积的和为

$$S_1=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2+c^2),$$

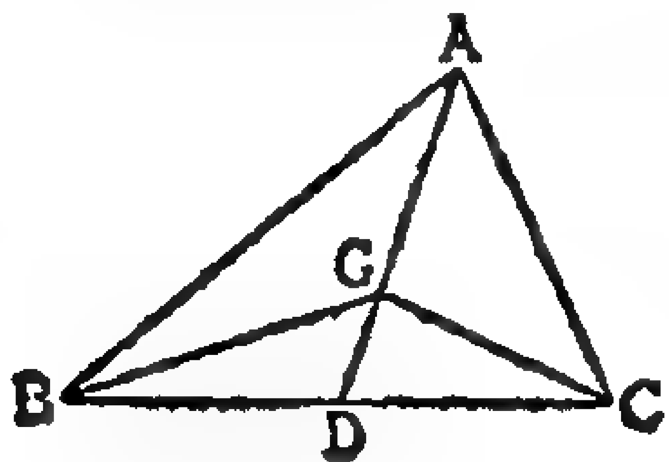
以l、m、n为直径的圆面积的和为

$$S_2=\frac{\pi}{4}(l^2+m^2+n^2),$$

$\therefore$ $S_1:S_2=4:3$ 是定值.

883. 设三角形ABC的重心为G，则

$$BC^2+3AG^2=AC^2+3BG^2=AB^2+3CG^2.$$



解　由
$$\begin{cases}BG^2+CG^2=2GD^2+2BD^2\ (\text{问题 }874),\\ GD=\dfrac{1}{2}AG,\end{cases}$$

得 $BG^2+CG^2=\dfrac{1}{2}AG^2+2BD^2$,

$\therefore$ $2(BG^2+CG^2+AG^2)=3AG^2+BC^2$.

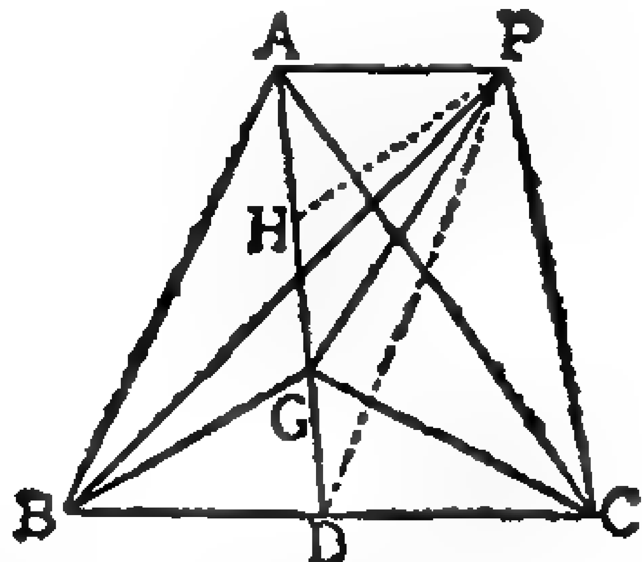
其它也同理可证．因此

$$\begin{aligned}3AG^2+BC^2&=3BG^2+AC^2\\&=3CG^2+AB^2\\&=2(BG^2+CG^2+AG^2).\end{aligned}$$

884. 设$\triangle ABC$的重心为G，P为任意一点，则

$$AP^2+BP^2+CP^2=AG^2+BG^2+CG^2+3PG^2.$$

解　设BC的中点为D，AG的中点为H，连结PH，PD，则



$$PB^2+PC^2=2(PD^2+BD^2),\quad ①$$

$$PA^2+PG^2=2(PH^2+GH^2),\quad ②$$

$$2(PD^2+PH^2)=4(PG^2+GH^2).\quad ③$$

①、②、③两边相加，整理得

$$PA^2+PB^2+PC^2=3PG^2+4GH^2+2(BD^2+GH^2),$$

$\because$ $4GH^2=(2GH)^2=AG^2$,

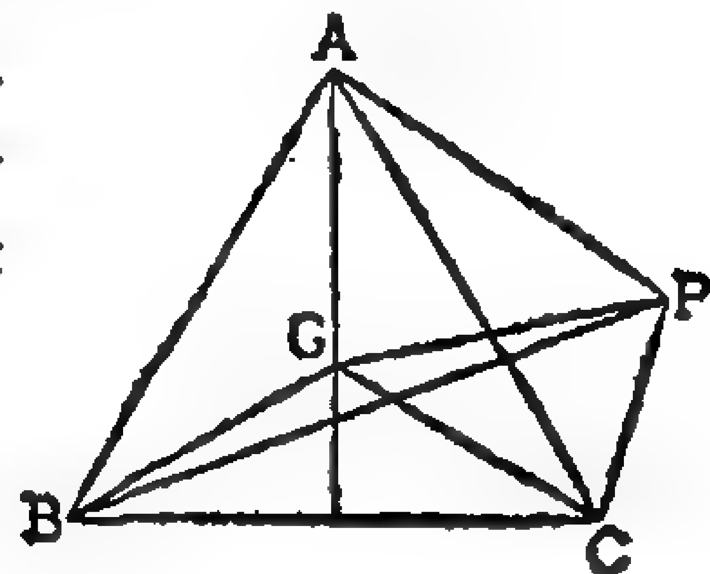
$$2(BD^2+GH^2)=2(BD^2+GD^2)=BG^2+CG^2.$$

代入上式得

$$PA^2+PB^2+PC^2=3PG^2+AG^2+BG^2+CG^2.$$

885. 设P是边长为a的正三角形ABC所在平面上任意一点，证明

$$PA^2+PB^2+PC^2\geqq a^2.$$



解　设正三角形ABC的重心为G，则有

$$AG=BG=CG=\frac{1}{\sqrt{3}}a.$$

根据上题，

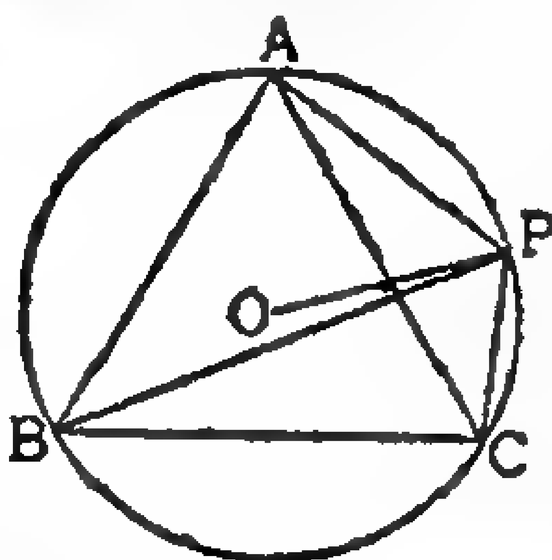
$$PA^2+PB^2+PC^2=AG^2+BG^2+CG^2+3PG^2,$$

$$PA^2+PB^2+PC^2=\frac{1}{3}a^2\times3+3PG^2,$$

$$\therefore\quad PA^2+PB^2+PC^2\geqq a^2.$$

注 在 $PG=0$ 时等式成立，即 P 与重心 G 重合。

886. 正三角形外接圆周上的任意一点到三顶点的距离平方之和是定值。



解 因为正三角形 ABC 的外接圆心 O 也是重心。

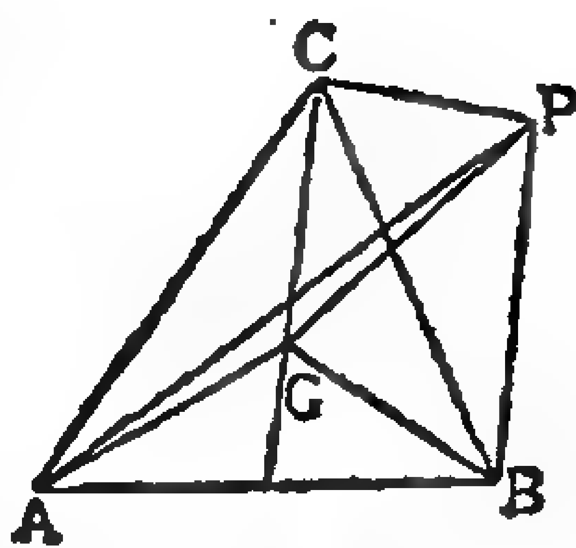
设 P 为外接圆周上的一点，则 OP 为半径，并且 OA、OB、OC 都等于半径，根据问题 **884** 得

$$AP^2+BP^2+CP^2=6(\text{半径})^2(\text{定值}).$$

887. 设平面上 n 个点 A、B、C、D、…、N 的重心为 O，若 P 为任意一点，则

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2+\cdots+PN^2$$
$$=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2+\cdots$$
$$+ON^2+n\cdot OP^2.$$

解 设三点 A、B、C 的重心为 G，根据问题 **884**，



$$PA^2+PB^2+PC^2$$
$$=GA^2+GB^2+GC^2$$
$$+3PG^2.\quad ①$$

第四点为 D，设在 GD 上取点 G'，使

$$G'G:G'D=1:3,$$

那么 G' 是 A、B、C、D 的重心，根据问题 **890**，

$$3PG^2+PD^2$$
$$=3GG'^2+G'D^2$$
$$+4PG'^2.\quad ②$$

①+②得

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$$
$$=(GA^2+GB^2+GC^2+3GG'^2)$$
$$+G'D^2+4PG'^2\quad ④$$

与①同理，得

$$GA^2+GB^2+GC^2+3GG'^2$$
$$=G'A^2+G'B^2+G'C^2.$$

将上式代入④得

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$$
$$=G'A^2+G'B^2+G'C^2+G'D^2+4PG'^2.\quad ③$$

其次，设第 5 点为 E，设 G'' 为重心，则有

$$G'G'':G''E=1:4,$$

在三角形 $PG'E$ 中，由问题 **890** 得

$$4PG'^2+PE^2=4G'G''^2+G''E^2+5PG''^2.\quad ④$$

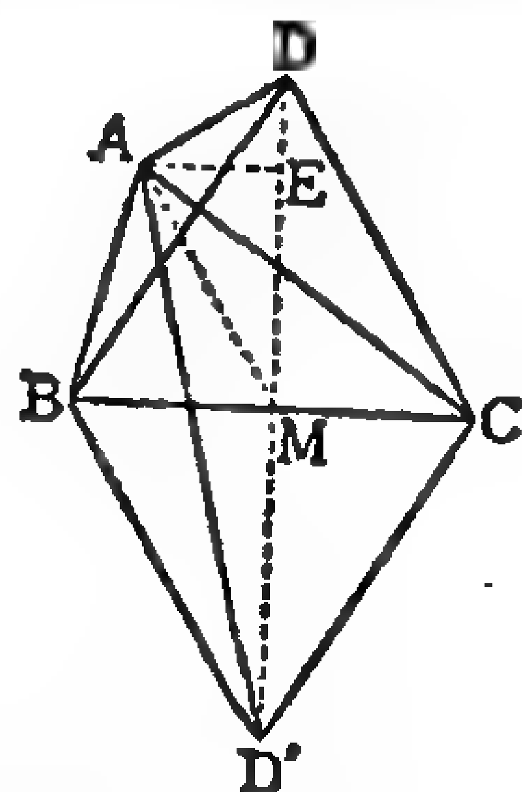
③+④得，

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2+PE^2$$
$$=(G'A^2+G'B^2+G'C^2+G'D^2$$
$$+4G'G''^2)+G''E^2+5PG''^2$$
$$=G''A^2+G''B^2+G''C^2$$
$$+G''D^2+G''E^2+5PG''^2.\quad ⑤$$

继续这样作下去，设第 n 个点为 N，并设 O 为其重心，则得下式

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2+\cdots+PN^2$$
$$=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2+\cdots$$
$$+ON^2+n\cdot OP^2.$$

888. 若在 $\triangle ABC$ 的边 BC 的两侧作正三角形 DBC、$D'BC$（D 和 A 在 BC 的同侧），则有



(1) $AD^2+AD'^2=AB^2+BC^2+CA^2$,

(2) $AD'^2-AD^2=4\sqrt{3}\,S_{\triangle ABC}$.

解 设 DD' 和 BC 的交点为 M，则 M 为 DD' 的中点。

(1) 由 $AD^2+AD'^2=2(AM^2+DM^2)$,

因 $\quad DM=\frac{\sqrt{3}}{2}BD=\sqrt{3}BM,$

$$\therefore\quad AD^2+AD'^2$$
$$=2AM^2+6BM^2$$
$$=(2AM^2+2BM^2)+4BM^2$$
$$=AB^2+AC^2+BC^2.$$

(2) 由 A 作 $D'D$ 的垂线 AE，则

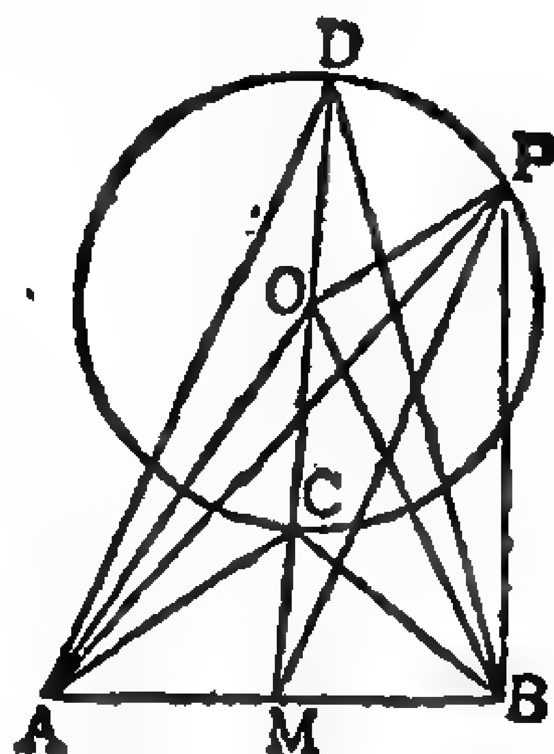
$$AD'^2-AD^2=D'E^2-DE^2$$
$$=4DM\cdot EM=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}BC\cdot EM$$
$$=4\sqrt{3}\,S_{\triangle ABC}.$$

889. 设由圆 O 外两定点 A、B 到圆周上一点的距离平方之和的最小点为 C、最大点为 D，直线 AB 的中点为 M，若 AB 等于

圆的直径，则

$$MC^2+MD^2=AO^2+BO^2.$$

解 若圆周上一点为P，则



$$PA^2+PB^2=2(AM^2+MP^2),$$

因为AM是一定的，所以PA^2+PB^2最大或最小由MP是最大还是最小来决定。连结MO的直线和圆周交点离M近的点为C、离M远的为D。因为O是线段CD的中点，所以

$$MC^2+MD^2=(OM-OC)^2+(OM+OD)^2$$
$$=(OM-OC)^2+(OM+OC)^2$$
$$=2(OM^2+OC^2).$$

由假设 $AB=CD$， ∴ $OC=AM$.

因此 $MC^2+MD^2=2(OM^2+AM^2)$.

在$\triangle ABO$中，M是AB的中点，有

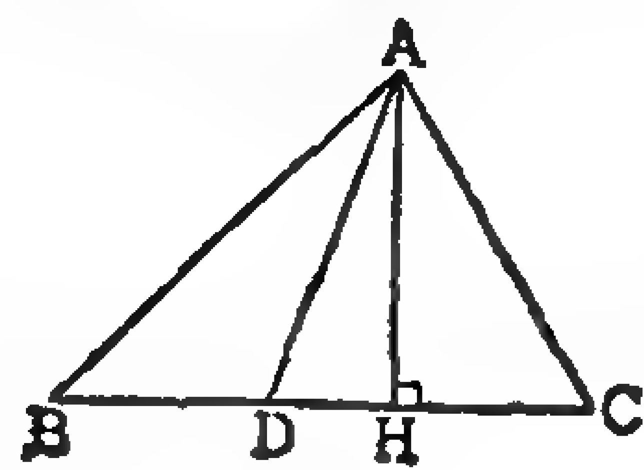
$$AO^2+BO^2=2(OM^2+AM^2),$$

∴ $MC^2+MD^2=AO^2+BO^2$.

890. 在$\triangle ABC$的底边BC上取一点D，若$BD:DC=m:n$，则

$$nAB^2+mAC^2=nBD^2+mDC^2+(m+n)AD^2.$$

解 如图，若由A向BC作垂线AH，则



$$AB^2=AH^2+BH^2$$
$$=(AD^2-DH^2)+(BD+DH)^2$$
$$=AD^2+BD^2+2BD\cdot DH. \quad ①$$

同理，

$$AC^2=AD^2+DC^2-2DC\cdot DH. \quad ②$$

由①×n+②×m得

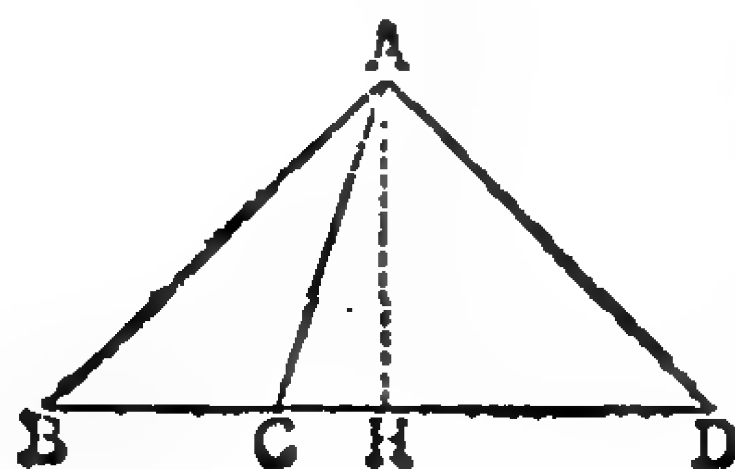
$$nAB^2+mAC^2=(m+n)AD^2+nBD^2+mDC^2+2(nDB-mDC)\times DH. \quad ③$$

根据假设

$BD:DC=m:n$， ∴ $nBD-mDC=0$.

代入③式得

$$nAB^2+mAC^2=(m+n)AD^2+nBD^2+mDC^2.$$



注 当D为外分点，由$BD:CD=m:n$，得①式为

$$AB^2=AD^2+BD^2-2BD\cdot HD,$$

由①×n−②×m得

$$nAB^2-mAC^2=(n-m)AD^2+nBD^2-mCD^2.$$

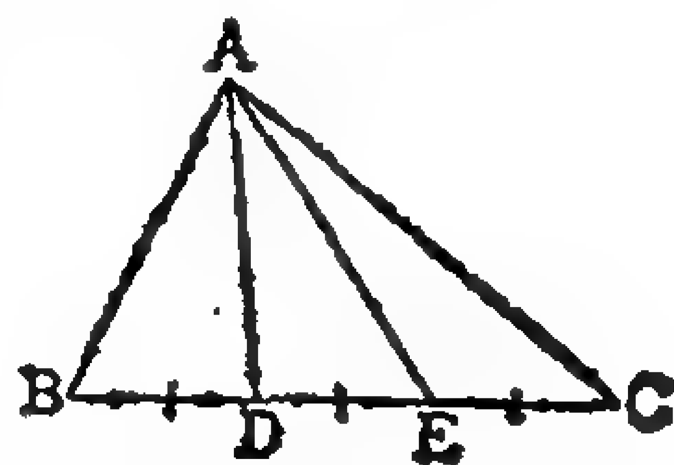
891. 在$\triangle ABC$的边BC上取两点D、E，若$BD=DE=EC$，则

(1) $AB^2+AC^2=AD^2+AE^2+4DE^2$,

(2) $2AB^2+AC^2=6DE^2+3AD^2$.

解 (1) $AB^2+AE^2=2(AD^2+BD^2)$,

$AC^2+AD^2=2(AE^2+DE^2)$,



∴ $AB^2+AC^2=AD^2+AE^2+4DE^2$

(∵ $BD=DE$).

(2) 由 $BD:DC=1:2$，在上题中令$m=1$，$n=2$有

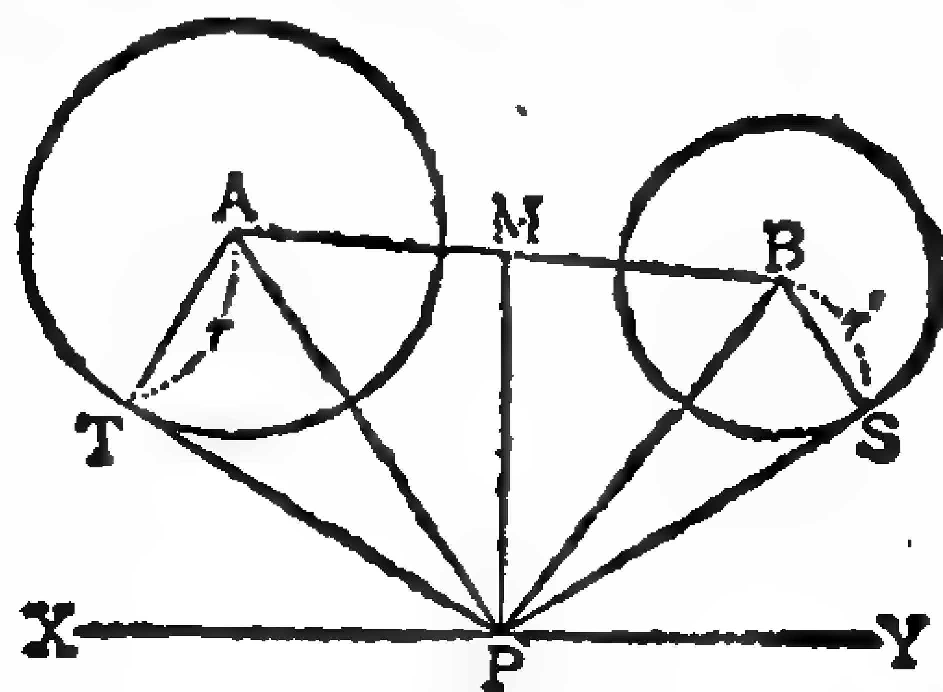
$$2AB^2+AC^2=2BD^2+DC^2+3AD^2,$$

由 $BD=DE=EC$

有$BD=DE$，$DC=2DE$，代入上式得

$$2AB^2+AC^2=2DE^2+4DE^2+3AD^2$$
$$=6DE^2+3AD^2.$$

892. 在平面上有不相交的两圆A、B、直线XY，试在直线XY上求一点P，使从P向两圆所作切线长的平方和为最小。



解 设两条切线为PT、PS，圆A、B的半径为r、r'，则

$$PT^2=PA^2-r^2,\quad PS^2=PB^2-r'^2,$$

∴ $PT^2+PS^2=PA^2+PB^2-(r^2+r'^2)$.

在两圆中，因为r、r'是一定的，若要PT^2+PS^2最小，只要PA^2+PB^2最小即可. 设AB的中点为M，由中线定理（问题**874**）得

$$PA^2+PB^2=2PM^2+2AM^2,$$

而AM是一定的，所以只要使PM最小即可。由M向XY作垂线，其垂足即为所求的点。

893. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$为直角，若作中线BE、CF，则

$$4(BE^2+CF^2)=5BC^2.$$

解 $\angle A=\angle R$,

$$\therefore\quad 4BE^2=4AB^2+4AE^2,\qquad ①$$

$$4CF^2=4AC^2+4AF^2.\qquad ②$$

将①、②两边相加，得

$$\begin{aligned}4(BE^2+CF^2)&=4(AB^2+AC^2)+4(AE^2+AF^2)\\&=4BC^2+4EF^2=4BC^2+(2EF)^2\\&=4BC^2+BC^2=5BC^2.\end{aligned}$$

(3) 三角形的垂线，a^2-b^2 型

894. 设由$\triangle ABC$的顶点A向对边BC作垂线AH和中线AM，则

$$AB^2\sim AC^2=BH^2\sim HC^2=2BC\cdot MH.$$

解 在直角三角形ABH中

$AB^2=AH^2+BH^2$. ①

在直角三角形ACH中

$AC^2=AH^2+HC^2$. ②

由①～②有

$$AB^2\sim AC^2=BH^2\sim HC^2,$$

而 $BH^2\sim HC^2=(BH+HC)(BH\sim HC)$,

又M是BC的中点，所以

$$BH=BM\pm MH,\ HC=BM\mp MH.$$

$$\therefore\quad BH\sim HC=2MH,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad AB^2\sim AC^2&=(BH+HC)(BH\sim HC)\\&=BC\cdot 2MH=2BC\cdot MH.\end{aligned}$$

895. 在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，设边BC的中点为M，由A引BC的垂线AH，则

$$(AB+AC):2BC=MH:(AB-AC).$$

解 根据上题有

$$AB^2-AC^2=2BC\cdot MH,$$

$$\therefore\quad (AB+AC)(AB-AC)=2BC\cdot MH,$$

$$\therefore\quad (AB+AC):2BC=MH:(AB-AC).$$

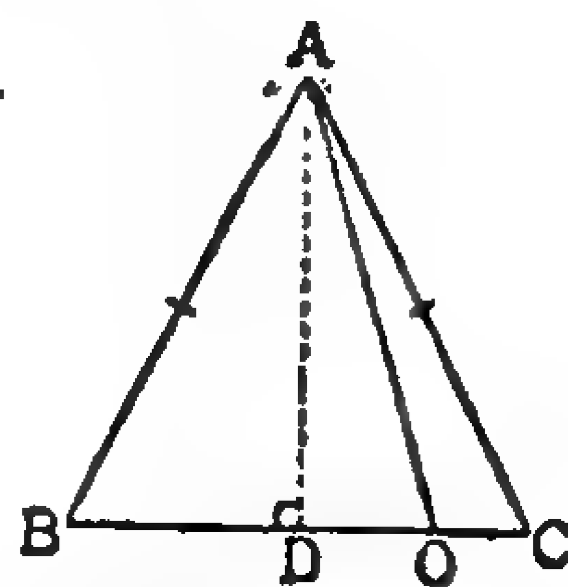
896. 设在等腰三角形ABC的底边BC或其延长线上任取一点O，则

$$OA^2\sim AB^2=OB\cdot OC.$$

解 若由A向BC作垂线AD，则D为BC的中点．在$\triangle ABO$中，$AD\perp BO$，当O在DC上时，则

$$AB^2-AO^2=BD^2-DO^2.$$

由

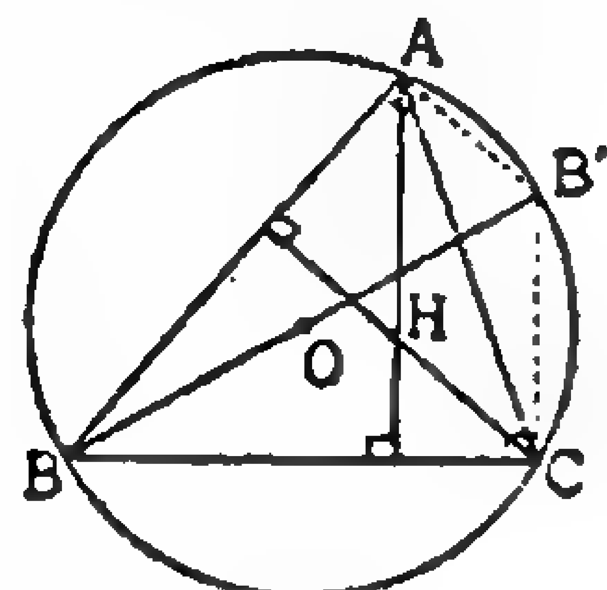


$$\begin{aligned}&BD^2-DO^2\\&=(BD+DO)(BD-DO)\\&=BO(DC-DO)\\&=BO\cdot OC,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad AB^2-OA^2=OB\cdot OC.$$

897. 若$\triangle ABC$的垂心为H，外接圆半径为R，则

$$AH^2+BC^2=BH^2+CA^2=CH^2+AB^2=4R^2.$$

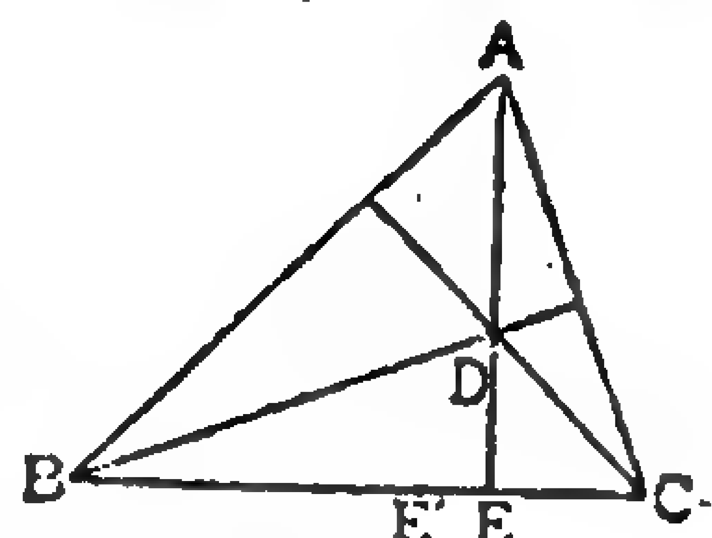


解 作$\triangle ABC$的外接圆O，若过B的直径为BB'，则$AB'\parallel HC$、$AH\parallel B'C$，于是$AH=B'C$.

$$\therefore\quad AH^2+BC^2=B'C^2+BC^2=4R^2,$$

对其他情况同理可证．

898. 设A、B、C、D是平面上的四个点，若$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=BC^2+AD^2$，则连结这四个点中任意两点的直线与连结另外两点的直线垂直．



解 设连结AD的直线与连结BC的直线相交于点E，由A向BC作垂线的垂足为E'，则

$$AB^2\sim AC^2=BE'^2\sim CE'^2.$$

由假设得 $AB^2\sim AC^2=BD^2\sim CD^2$,

$$\therefore\quad BD^2\sim CD^2=BE'^2\sim CE'^2,$$

所以DE'垂直于BC．在点E'上作BC的垂线只有一条，所以AE'和DE'重合．因此这条直线是连结AD的直线，E'和E重合，即AD垂直于BC．同理可证，连结A、B、C、D中的任何两点的直线垂直于连结另外两点的直线．

899. 由$\triangle ABC$中的任一点O向边BC、CA、AB作垂线，其垂足分别为D、E、F，则

$$AF^2+BD^2+CE^2=FB^2+DC^2+EA^2.$$

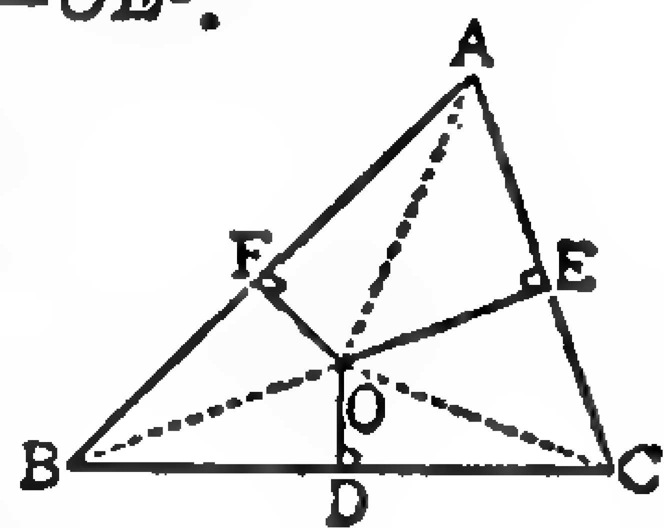
解 根据毕达哥拉斯定理，在$\triangle OAF$中，

$$AF^2=OA^2-OF^2.$$

又在 $\triangle OBD$ 中，$BD^2=OB^2-OD^2$；

在 $\triangle OCE$ 中，$CE^2=OC^2-OE^2$.

$$\therefore\ AF^2+BD^2+CE^2$$
$$=OA^2+OB^2+OC^2-OF^2-OD^2-OE^2.$$



同理，对于 $\triangle OBF$，$\triangle OCD$，$\triangle OAE$，根据毕达哥拉斯定理，则得

$$FB^2+DC^2+EA^2$$
$$=OB^2+OC^2+OA^2-OF^2-OD^2-OE^2.$$

$$\therefore\ AF^2+BD^2+CE^2=FB^2+DC^2+EA^2.$$

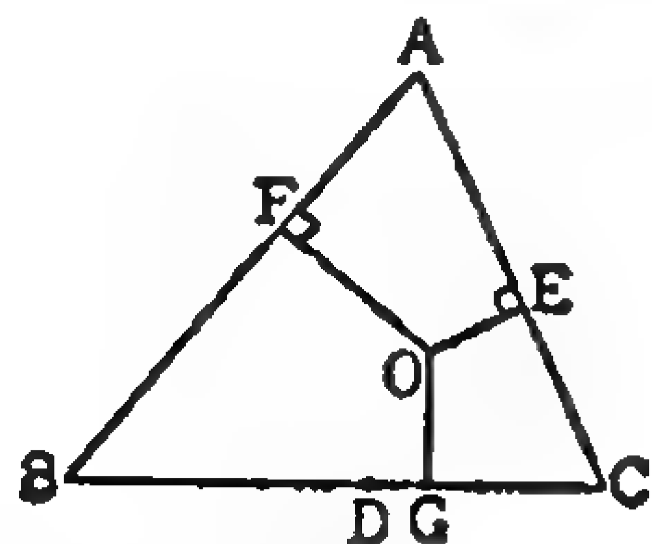
900. 在 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上分别取点为 D、E、F，若

$$AF^2+BD^2+CE^2=FB^2+DC^2+EA^2,$$

则从 D、E、F 向各边所作的垂线相交于一点。

解 设由 E、F 向 AC、AB 所作的垂线交于点 O，由 O 向 BC 作垂线 OG. 根据上题有

$$AF^2+BG^2+CE^2$$
$$=FB^2+GC^2+EA^2,$$



又根据假设，

$$AF^2+BD^2+CE^2=FB^2+DC^2+EA^2.$$

两式相减得 $BG^2-BD^2=GC^2-DC^2$.

若 D 在 BG 上，则

$$BG>BD,\ DC>GC,$$

所以 $BG^2-BD^2=GC^2-DC^2$ 不合理。同理，D 在 GC 上也不合理。因此 G 和 D 必需重合，故由 D、E、F 向各边所作垂线相交于一点。

901. 若在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，向外侧作矩形 $BEFC$，则有

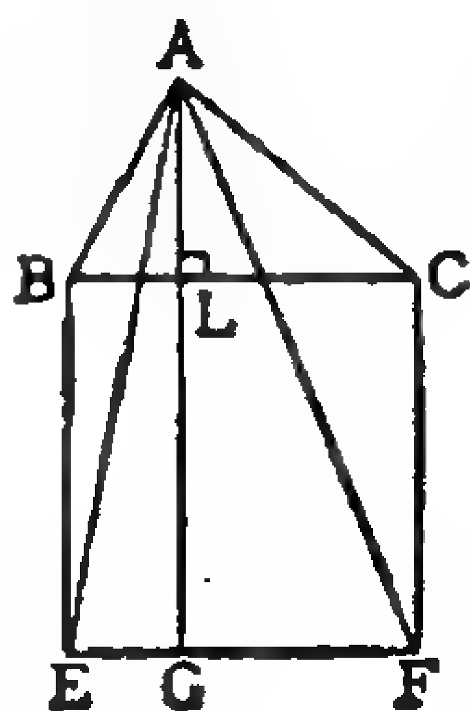
$$AE^2\sim AF^2=AB^2\sim AC^2.$$

解 由 A 向 BC 或其延长线作垂线 AL，AL 的延长线与 EF 的交点为 G，则

$$AB^2\sim AC^2=BL^2\sim LC^2,$$
$$AE^2\sim AF^2=EG^2\sim GF^2.$$

因为 $BL=EG$，$LC=GF$，

$$\therefore\ AB^2\sim AC^2=AE^2\sim AF^2.$$



902. 若由 $\triangle ABC$ 的顶点 A 向对边 BC 作垂线 AH，则

(1) 当 $\angle C$ 为锐角时，有

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot CH.$$

(2) 当 $\angle C$ 为钝角时，有

$$AB^2=AC^2+BC^2+2BC\cdot CH.$$

解 (1) 设 $\angle C$ 为锐角，在 $\triangle ABH$ 中，

$$AB^2=AH^2+BH^2,$$
$$AH^2=AC^2-CH^2,$$

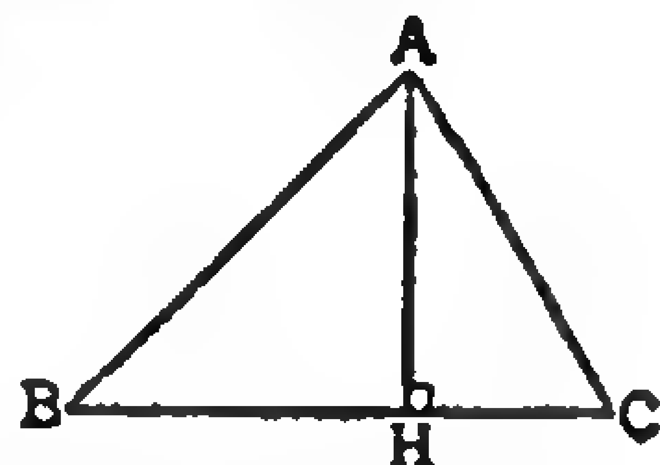
又
$$BH=BC-CH,$$

$$\therefore\ AB^2=(AC^2-CH^2)+(BC-CH)^2$$
$$=AC^2-CH^2+BC^2+CH^2-2BC\cdot CH$$
$$=AC^2+BC^2-2BC\cdot CH,$$

即 $AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot CH$.

(2) 设 $\angle C$ 为钝角，则 H 在 BC 的延长线上。所以

$$BH=BC+CH,$$



由上面的证明

$$AB^2=AC^2+BC^2+2BC\cdot CH.$$

903. 把菱形 $ABCD$ 的一对顶点 A、C 与形外一点 P 连结，若 $PA=PC$，则

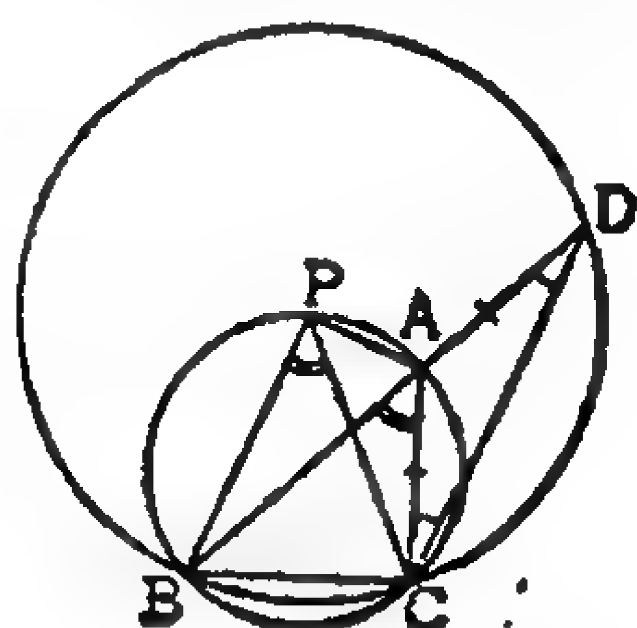
$$PB\cdot PD=PA^2-AB^2.$$

解 由 $PA=PC$，且 $ABCD$ 是菱形，所以 P 在 BD 的延长线上，且 $AO\perp BP$，

$$\therefore\ AP^2-AB^2$$
$$=OP^2-OB^2=(OP+OB)(OP-OB).\quad ①$$

因为 $ABCD$ 是菱形，有

$$OP-OB=OP-OD=PD.$$



因此由①得

$$AP^2-AB^2=PB\cdot PD.$$

904. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆弧 BAC 的中点为 P，在 BA 的延长线上取点 D，使 $AD=AC$，证明

$$PB=PC=PD,$$
$$AB\cdot AC=BP^2-AP^2.$$

解 因为

$$AD=AC,$$

所以

$$\angle D=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BPC,$$

且 $PB=PC$。所以 P 为过 B、D、C 三点的圆的圆心。因而

$$PB=PC=PD.$$

又对在圆 P 内的点 A，由圆幂定理得

$$BA\cdot AD=PB^2-PA^2,$$

由 $AC=AD$ 有 $AB\cdot AC=BP^2-AP^2$。

905. 在等腰三角形 ABC 中，若底角为顶角 A 的两倍，则

$$AB^2=BC^2+AB\cdot BC.$$

解 设 $\angle B$ 的平分线与边 AC 的交点为 D，由 B 向 AC 作垂线 BE，则由

$$\angle ABC=2\angle A,$$

有 $\angle ABD=\angle A$，$\therefore$ $BD=DA$。

又 $\angle BDC=\angle A+\angle ABD=\angle ABC=\angle C$，因此 $\triangle BDC$ 也是等腰三角形，且 E 为 DC 的中点。

又 $BD=BC=AD$，所以在直角三角形 ABE 中，

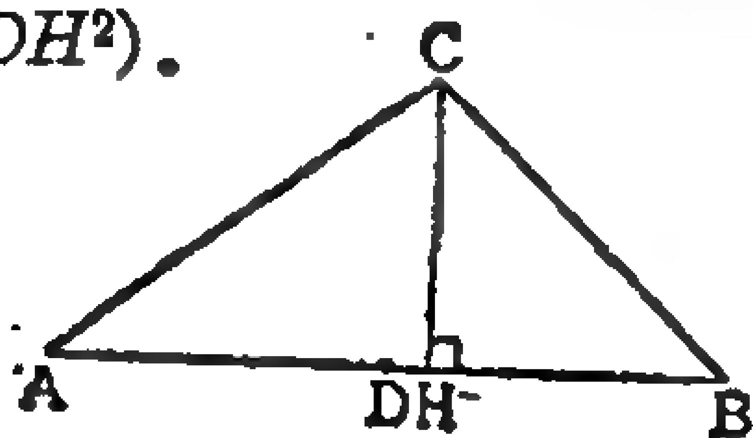
$$AB^2=AE^2+BE^2=AE^2+(BC^2-CE^2)$$
$$=BC^2+AE^2-CE^2.$$

因 $AE^2-CE^2=(AE+CE)(AE-CE)$
$$=AC(AE-DE)$$
$$=AB\cdot AD=AB\cdot BC,$$

$$\therefore\ AB^2=BC^2+AB\cdot BC.$$

906. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C>\angle R$，$\angle B=\frac{1}{2}\angle R$，$D$ 为 AB 的中点，若由 C 向 AB 作垂线 CH，则

$$AC^2=2(AD^2+DH^2).$$



解 由

$$\angle B=\frac{1}{2}\angle R,$$
$$\angle CHB=\angle R,$$
$$\therefore\ \angle HCB=\frac{1}{2}\angle R.$$

因 $\angle ACB>\angle R$，

$$\therefore\ \angle ACB>\frac{1}{2}\angle R.$$

又 $\angle CHA=\angle R$，$\therefore$ $\angle A<\frac{1}{2}\angle R$，

$$\therefore\ AH>CH.$$

又 $CH=HB$，$\therefore$ $AH>HB$，

由此 D 在 A 和 H 之间。

$$\therefore\ AC^2=AH^2+CH^2$$
$$=(AD+DH)^2+HB^2$$
$$=(AD+DH)^2+(DB-DH)^2$$
$$=(AD+DH)^2+(AD-DH)^2$$
$$=2(AD^2+DH^2).$$

907. 在 $\triangle ABC$ 中，

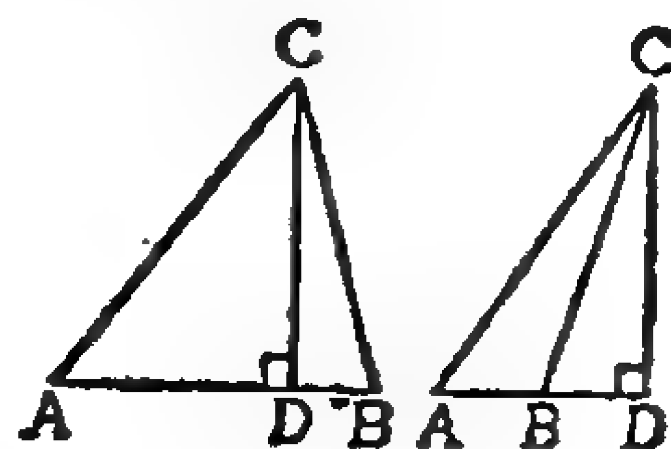
(1) 若 $\angle A=\frac{2}{3}\angle R$，则

$$BC^2=AB^2+AC^2-AB\cdot AC.$$

(2) 若 $\angle A=\frac{4}{3}\angle R$，则

$$BC^2=AB^2+AC^2+AB\cdot AC.$$

解 设由 C 向 AB 所作垂线为 CD。



(1) 由 $\angle A=60°$，有 $BD=AB\sim AD$，

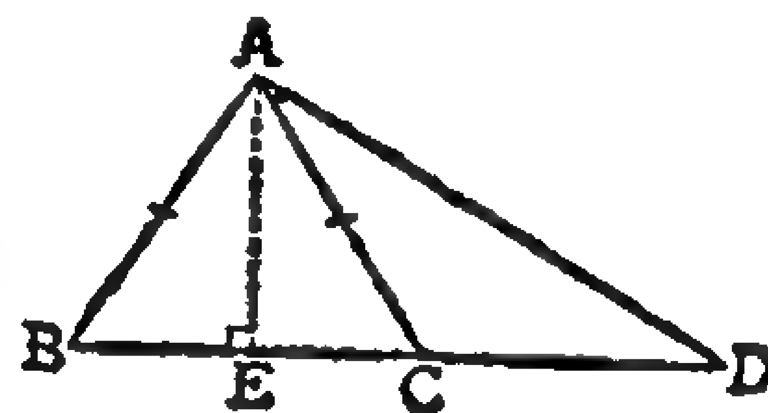
$$2AD=AC.$$

所以 $BC^2=BD^2+CD^2$
$$=(AB\sim AD)^2+(AC^2-AD^2)$$
$$=AB^2-2AB\cdot AD+AD^2+AC^2-AD^2$$
$$=AB^2+AC^2-AB(2AD)$$
$$=AB^2+AC^2-AB\cdot AC.$$

(2) 因为 $\angle A=120°$，所以 D 在 BA 的延长线上，$2AD=AC$。所以

$$BC^2=BD^2+CD^2$$
$$=(AB+AD)^2+AC^2-AD^2$$
$$=AB^2+2AB\cdot AD+AD^2+AC^2-AD^2$$
$$=AB^2+AC^2+AB(2AD)$$
$$=AB^2+AC^2+AB\cdot AC.$$

908. 由等腰三角形 ABC 的顶点 A 作直线 AD 与 BC 的延长线相交于点 D，若



$$BD\cdot CD=AB^2,$$

则 $$AD^2=2AB^2.$$

解 若由 A 向对边作垂线 AE，则

$$AD^2=DE^2+AE^2$$
$$=(BD-BE)^2+(AB^2-BE^2)$$

$$=BD^2-2BD\cdot BE+AB^2$$
$$=BD(BD-2BE)+AB^2$$
$$=BD(BD-BC)+AB^2$$
$$=BD\cdot CD+AB^2$$
$$=AB^2+AB^2=2AB^2.$$

909. 若从锐角三角形 ABC 的顶点 B、C 分别向对边作垂线 BE、CF，则

$$BC^2=AB\cdot BF+AC\cdot CE.$$

解 $AC^2=AF^2+CF^2$
$$=(AB-BF)^2+CF^2$$
$$=AB^2-2AB\cdot BF+BF^2+(BC^2-BF^2)$$
$$=AB^2+BC^2-2AB\cdot BF.$$

同理，$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot CE.$

将两式相加

$$AC^2+AB^2=AC^2+AB^2+2BC^2-2AB\cdot BF+2AC\cdot CE,$$

$\therefore\ 2BC^2=2AB\cdot BF+2AC\cdot CE,$

即 $BC^2=AB\cdot BF+AC\cdot CE.$

910. 作等腰三角形 ABC 底边 BC 的平行线 XY，与 AB、AC 分别相交于点 X、Y，则

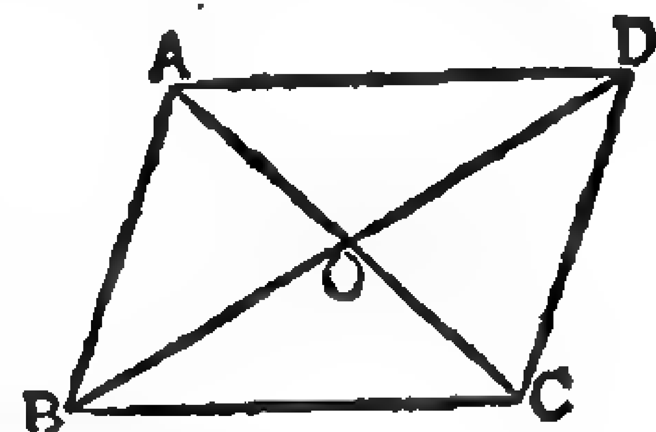
$$BY^2-CY^2=BC\cdot XY.$$

解 由 Y 向 BC 作垂线 YH；由 Y 作 AB 的平行线交 BC 于点 M，则 $\triangle YMC$ 为等腰三角形，H 为 MC 的中点，$XYMB$ 为平行四边形，所以

$$BY^2-CY^2=BH^2-HC^2$$
$$=(BH+HC)(BH-HC)$$
$$=BC\cdot BM=BC\cdot XY.$$

(4) 四边形

911. 平行四边形各边上的正方形之和等于两对角线上正方形之和.



解 设平行四边形 $ABCD$ 两对角线的交点为 O，则 AO 是 $\triangle ABD$ 的中线，根据问题 **874** 得

$$AB^2+AD^2=2AO^2+2BO^2.$$

同理，$BC^2+CD^2=2CO^2+2BO^2,$

$$\therefore\ AB^2+AD^2+BC^2+CD^2=2AO^2+2CO^2+4BO^2.$$

因为 $AO=OC$，所以

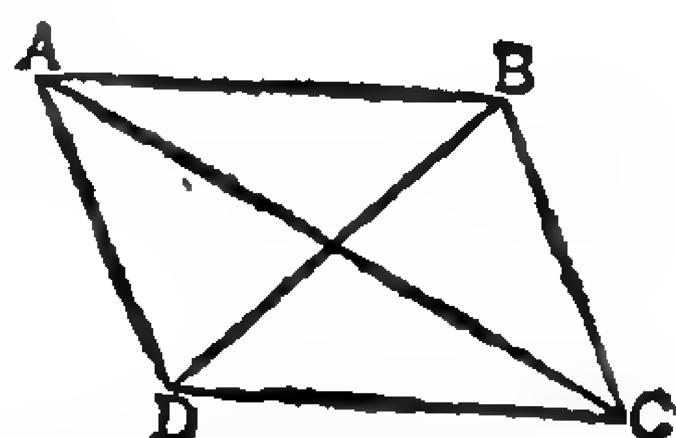
$$2AO^2+2CO^2=4AO^2=AC^2.$$

同理，$4BO^2=BD^2,$

$$\therefore\ AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2.$$

912. 在平行四边形 $ABCD$ 中，若 $AB=BD$，则

$$BD^2=AC^2-2BC^2.$$



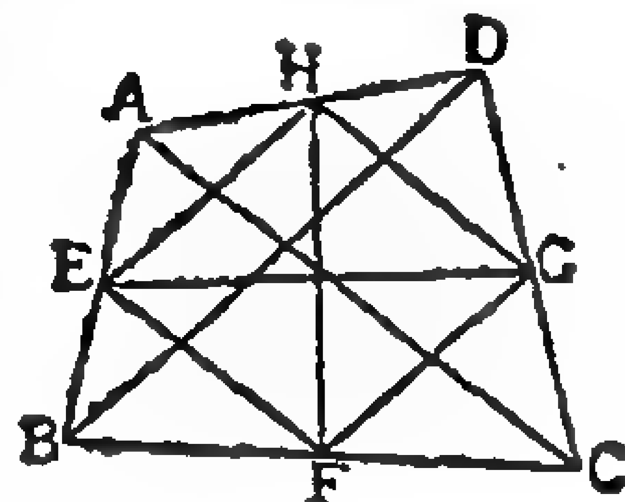
解 根据上题 $AC^2+BD^2=2AB^2+2BC^2.$

因 $AB=BD,$

$\therefore\ AC^2+BD^2=2BD^2+2BC^2,$

$\therefore\ BD^2=AC^2-2BC^2.$

913. 四边形 $ABCD$ 的两对角线 AC、BD 上的正方形之和，等于连结两组对边中点的线段 EG、FH 上的正方形之和的两倍.



解 因为 E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点，有

$$BD=2EH,\ AC=2GH,$$

$$\therefore\ AC^2+BD^2=4(EH^2+GH^2).\quad ①$$

因为四边形 $EFGH$ 是平行四边形，根据问题 **911** 得

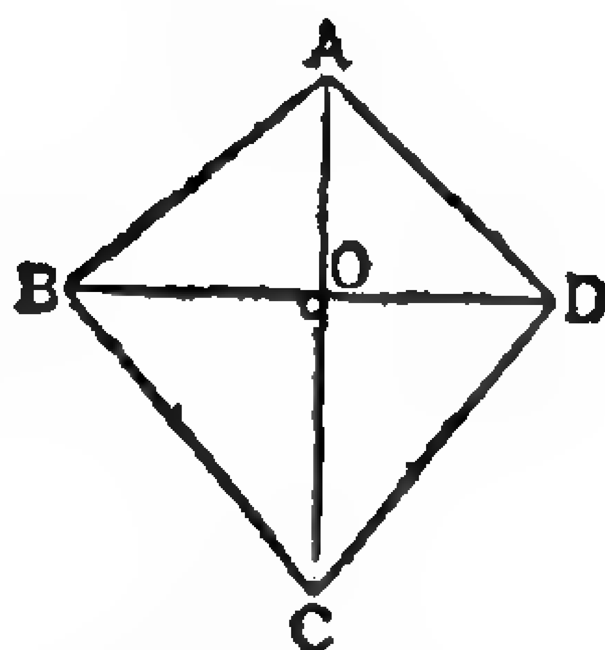
$$2(EH^2+GH^2)=EG^2+FH^2,\quad ②$$

由①、②得

$$AC^2+BD^2=2(EG^2+FH^2).$$

914. 若四边形的对角线垂直相交，则

$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2.$$



解 设对角线的交点为 O；则在直角三角形 ABO 和 CDO 中，

$$AB^2=AO^2+BO^2,\ CD^2=CO^2+DO^2,$$

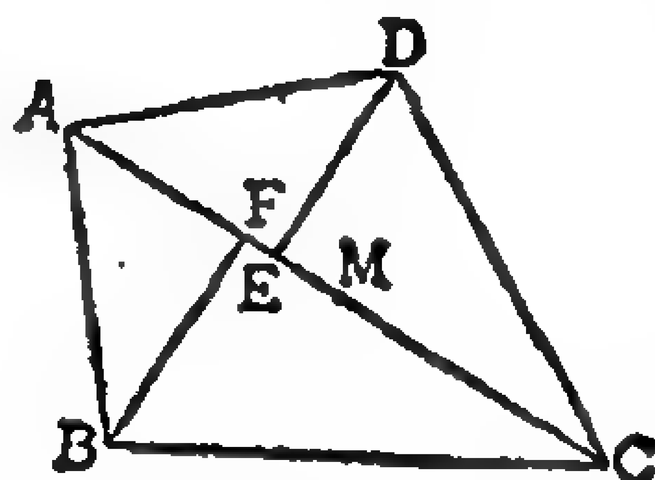
$$\therefore\ AB^2+CD^2=AO^2+BO^2+CO^2+DO^2.$$

同理，在直角三角形 BOC、AOD 中有

$$BC^2+AD^2=BO^2+CO^2+AO^2+DO^2,$$

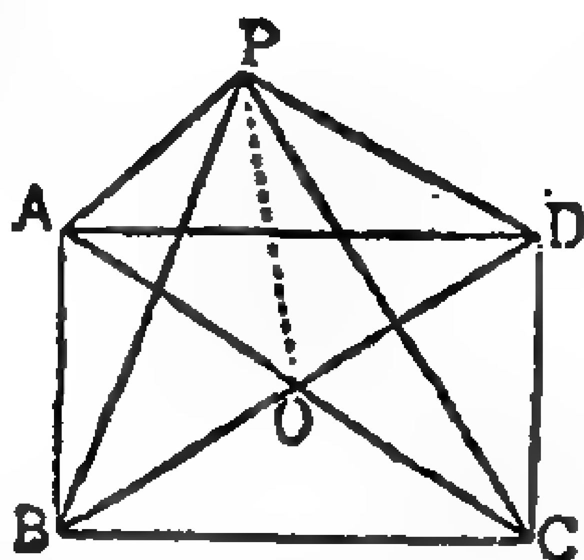
$\therefore\quad AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$.

915. 在四边形 $ABCD$ 中，若
$$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2,$$
则 $AC\perp BD$。



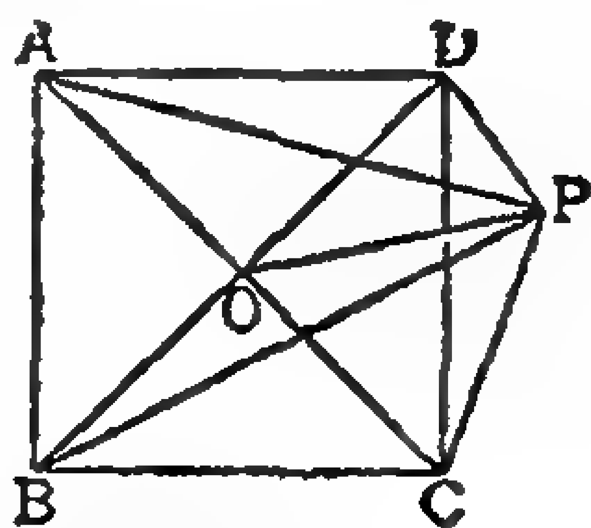
解 若 $CD>AD$，由假设得 $BC>AB$。从 B 和 D 作 AC 的垂线 BF、DE，设 AC 的中点为 M，则
$$CD^2-AD^2=CE^2-AE^2=2AC\cdot EM.$$
同理，
$$BC^2-AB^2=CF^2-AF^2=2AC\cdot FM.$$
又根据假设得
$$CD^2-AD^2=BC^2-AB^2,$$
$\therefore\quad 2AC\cdot EM=2AC\cdot FM,\ EM=FM.$
由 $CD>AD$，$BC>AB$，E、F 都在点 M 同侧，所以 E 和 F 重合，
$$\therefore\quad AC\perp BD.$$

916. 连结任意一点 P 与矩形 $ABCD$ 的各顶点，则
$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$



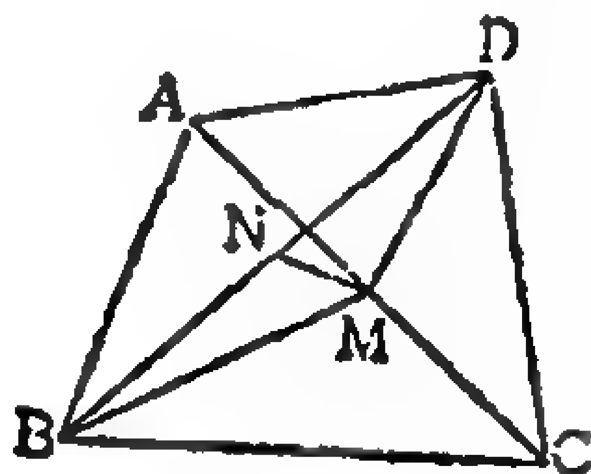
解 设对角线的交点为 O，连结 PO，因为 PO 是 $\triangle PAC$ 和 $\triangle PBD$ 的中线，有
$$PA^2+PC^2=2PO^2+2AO^2$$
和 $\quad PB^2+PD^2=2PO^2+2BO^2,$
又矩形对角线相等，有 $AO=BO$，
$$\therefore\quad PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

917. 设正方形 $ABCD$ 对角线的交点为 O，若 P 为任意一点，则
$$AP^2+BP^2+CP^2+DP^2=4(AO^2+OP^2).$$



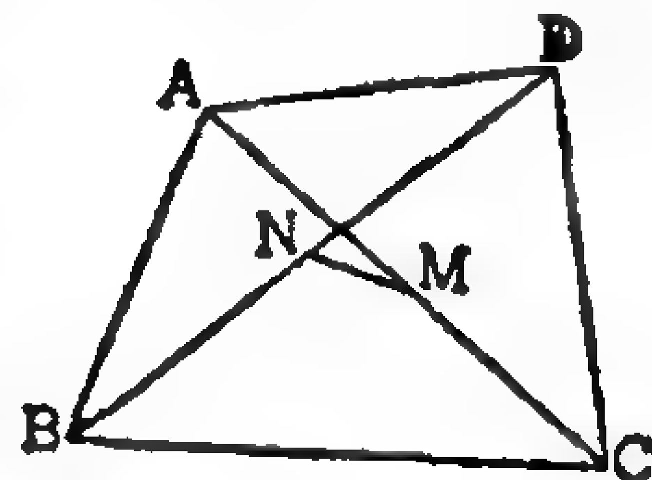
解 因为 O 为 AC、BD 的中点，所以
$$AP^2+CP^2=2AO^2+2OP^2.$$
同理，
$$BP^2+DP^2=2BO^2+2OP^2=2AO^2+2OP^2,$$
$$\therefore\quad AP^2+BP^2+CP^2+DP^2=4(AO^2+OP^2).$$

918. 四边形各边上的正方形之和，等于其对角线上的正方形以及连结两对角线中点线段上正方形的四倍的和。



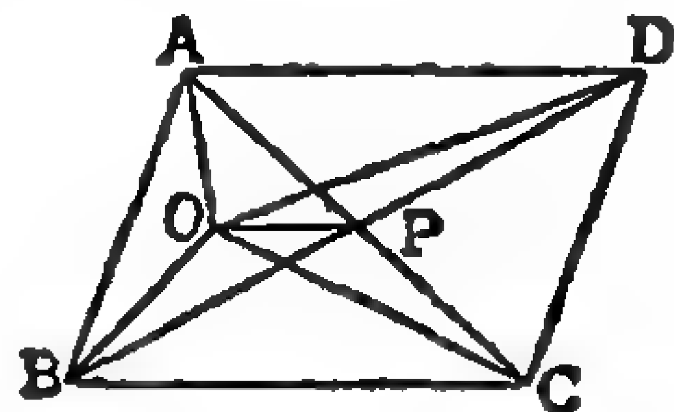
解 设 M、N 分别为 AC、BD 的中点，则
$$AB^2+BC^2=2BM^2+2AM^2,$$
$$AD^2+CD^2=2DM^2+2AM^2.$$
两式相加得
$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=2(BM^2+DM^2)+4AM^2. \quad ①$$
因为 $\quad BM^2+DM^2=2BN^2+2MN^2,$
$$4AM^2=AC^2,\ 4BN^2=BD^2,$$
由① $\quad AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$
$$=4BN^2+4MN^2+4AM^2$$
$$=BD^2+4MN^2+AC^2$$
$$=BD^2+AC^2+4MN^2.$$

919. 若四边形 $ABCD$ 各边上的正方形之和等于两条对角线上正方形之和，则此四边形为平行四边形。



解 设两对角线的中点分别为 M、N，由上题有
$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2. \quad ①$$
根据假设
$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2,$$
由①知 $MN=0$ 即 AC、BD 在其中点处相交，故四边形 $ABCD$ 为平行四边形。

920. 设 O 为平行四边形 $ABCD$ 中任意一点，则
$$OA^2+OC^2$$
与 $\quad OB^2+OD^2$
之差等于两对角线 AC、BD 上的正方形之差的一半。



解 设 AC、BD 的交点为 P，连结 OP，有
$$OA^2+OC^2=2(AP^2+OP^2)$$
和 $\quad OB^2+OD^2=2(BP^2+OP^2),$
$$(OA^2+OC^2)\sim(OB^2+OD^2)$$
$$=2(AP^2\sim BP^2)=\frac{1}{2}(4AP^2\sim 4BP^2)$$
$$=\frac{1}{2}(AC^2\sim BD^2).$$

921. 过平行四边形 $ABCD$ 内任意一点 P，在形内分别作与 AD、AB 的平行线 EF、GH，与 AB、BC、CD、DA 分别交于点 E、H、F、G，则

$$(EH^2+GF^2)\sim(GE^2+FH^2)$$

为定值。

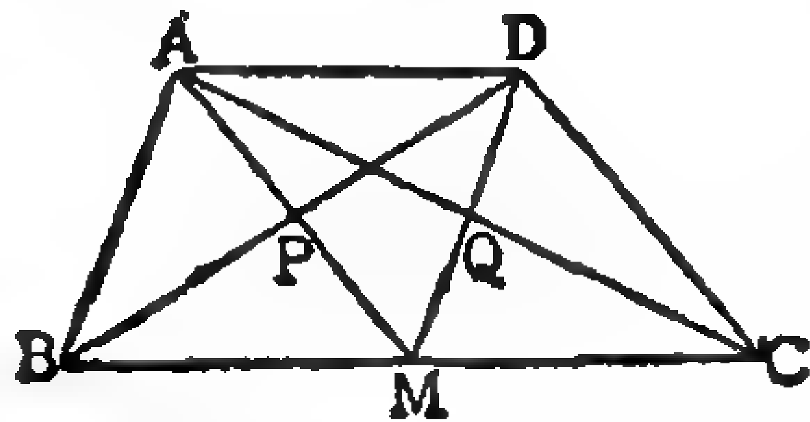
解 由 G、H 向 EF 作垂线，其垂足分别为 K、L，若 $\angle EPG>\angle B$，则

$$GE^2=PG^2+PE^2+2PE\cdot PK,$$
$$GF^2=PG^2+PF^2-2PF\cdot PK,$$
$$\therefore\ GE^2-GF^2=PE^2-PF^2+2EF\cdot PK.$$

同理，

$$FH^2-EH^2=PF^2-PE^2+2EF\cdot PL,$$
$$\therefore\ (GE^2+FH^2)\sim(EH^2+GF^2)=2EF\cdot KL(\text{定积}).$$

922. 若梯形的一条底边等于另一底边的两倍，则两对角线上的正方形之和等于两腰上的正方形与大底边上的正方形之和。



解 在梯形 $ABCD$ 中，设底边 $BC=2AD$，BC 的中点为 M，由 $BM\mathrel{\underline{\parallel}}AD$，$MC\mathrel{\underline{\parallel}}AD$，四边形 $ABMD$、$AMCD$ 都是平行四边形。设 AM 和 BD 的交点为 P，DM 和 AC 的交点为 Q，则平行四边形两对角线上的正方形之和等于四边上正方形之和，即有

$$AC^2+DM^2=AD^2+CD^2+CM^2+AM^2=2(AD^2+CD^2),\qquad ①$$
$$BD^2+AM^2=AD^2+DM^2+BM^2+AB^2=2(AD^2+AB^2).\qquad ②$$

①、②两边分别相加，得

$$AC^2+BD^2+DM^2+AM^2=4AD^2+2CD^2+2AB^2.$$

因 $DM=AB$，$AM=CD$，$2AD=BC$，

$$\therefore\ AC^2+BD^2=BC^2+CD^2+AB^2.$$

923. 四边形两对角线上的正方形与相对两边上的正方形之和，等于其另外两边上正方形的和与连结其对边中点线段上正方形的四倍之和。

解 设四边形 $ABCD$ 对边 AD、BC 的中点分别为 E、F，连结 AF、DF，则

$$AC^2+AB^2=2AF^2+2BF^2,\qquad ①$$
$$BD^2+CD^2=2DF^2+2BF^2.\qquad ②$$

①+②得

$$AC^2+BD^2+AB^2+CD^2=2(AF^2+DF^2)+4BF^2.\qquad ③$$

将 $AF^2+DF^2=2EF^2+2AE^2$，$4BF^2=BC^2$ 代入③的右边得

$$2(AF^2+DF^2)+4BF^2=4FE^2+4AE^2+BC^2=4EF^2+AD^2+BC^2.\qquad ④$$

由③、④得

$$AC^2+BD^2+AB^2+CD^2=AD^2+BC^2+4EF^2.$$

924. 若在正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上任取一点 P，则 $PB^2+PD^2=2AP^2$。

解 设 O 为对角线的交点，由问题 **736** 有

$$BP^2+PD^2=2(BO^2+OP^2).$$

在正方形中　$BO=AO$，

$$\therefore\ PB^2+PD^2=2(AO^2+OP^2)=2AP^2\quad(\because\ AC\perp BD).$$

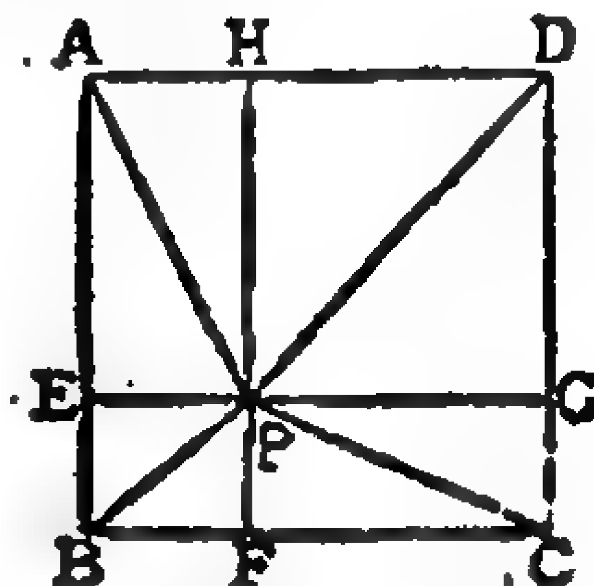
925. 若由正方形 $ABCD$ 内任意一点 P，分别向 AB、BC、CD、DA 作垂线 PE、PF、PG、PH，则

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=2(PE^2+PF^2+PG^2+PH^2).$$

解 $PA^2=AE^2+PE^2=PH^2+PE^2$，

同理　$PB^2=PE^2+PF^2$，

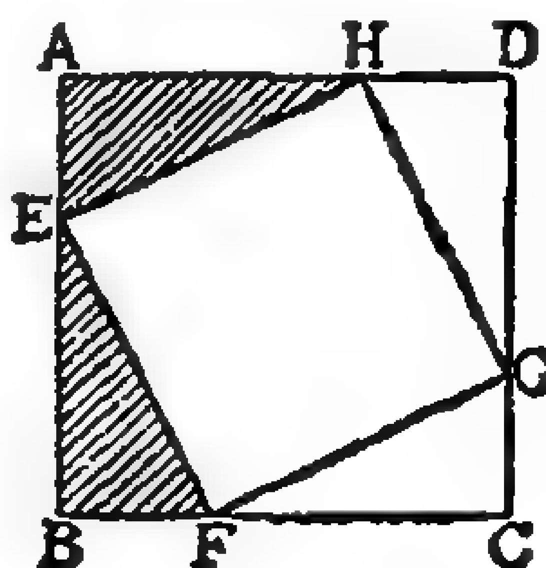
$$PC^2=PF^2+PG^2,$$
$$PD^2=PG^2+PH^2.$$



$$\therefore\ PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=2(PE^2+PF^2+PG^2+PH^2).$$

926. 若正方形 $EFGH$ 内接于正方形 $ABCD$，则正方形 $EFGH$ 的面积等于 AE^2+BE^2，其中设 E 在 AB 上。

解 在 $\triangle AEH$ 和 $\triangle BFE$ 中，

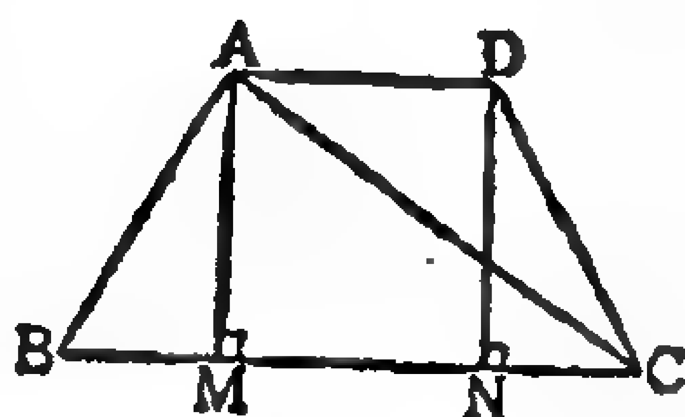


$\angle A=\angle B=\angle R$,
$\angle AHE=\angle BEF$
(都为$\angle AEH$的余角),
$EH=EF$.
$\therefore\ \triangle AEH\cong\triangle BFE$,
$AE=BF$,
$\therefore\ EF^2=BF^2+EB^2=AE^2+BE^2$.

927. 若AC为等腰梯形$ABCD$的对角线,则

$$AC^2=AB^2+AD\cdot BC.$$

解 由A和D向BC作垂线AM、DN,在直角三角形AMC中



$$AC^2=AM^2+MC^2, \quad ①$$

又

$$AM^2=AB^2-BM^2, \quad ②$$

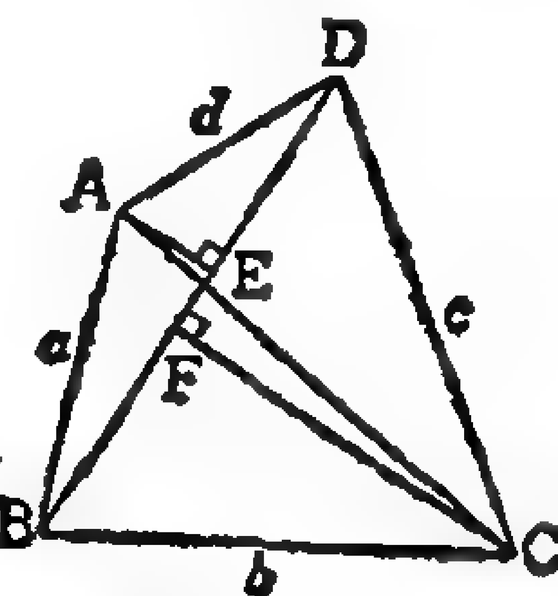
$$\therefore\ AC^2=AB^2+MC^2-BM^2$$
$$=AB^2+(MC+BM)(MC-BM). \quad ③$$

根据假设$ABCD$为等腰梯形,所以

$$BM=NC,$$
$$MC-BM=MC-NC=MN=AD,$$

由③得 $AC^2=AB^2+AD\cdot BC$.

928. 在四边形$ABCD$中,设$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $BD=m$, 若由A、C向BD作垂线的垂足分别为E、F,则



$$EF=\frac{1}{2m}\{(b^2+d^2)\sim(a^2+c^2)\}.$$

解 因为$AE\perp BD$,所以

$$a^2\sim d^2=BE^2\sim DE^2=(BE+DE)(BE\sim DE)$$
$$=BD(BE\sim DE),$$
$$c^2\sim b^2=DF^2\sim BF^2=BD(DF\sim BF).$$

两式相加得

$$(a^2+c^2)\sim(b^2+d^2)$$
$$=BD\{(BE\sim DE)+(DF\sim BF)\}$$
$$=2BD\cdot EF.$$

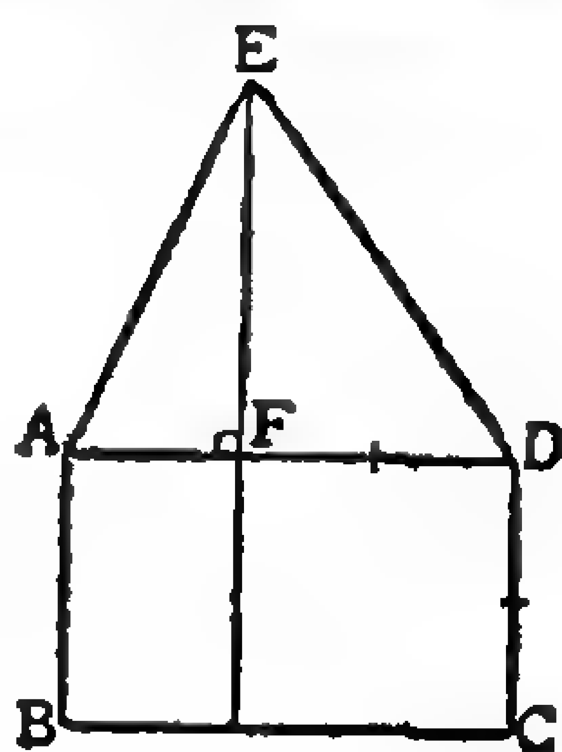
$$\therefore\ EF=\frac{1}{2BD}[(a^2+c^2)\sim(b^2+d^2)],$$

故 $EF=\dfrac{1}{2m}[(b^2+d^2)\sim(a^2+c^2)]$.

929. 在矩形$ABCD$的边DA或其延长线上取点F,使

$$DF=DC,$$

设以A为圆心,AD为半径的圆周和过F且与AD垂直的直线相交于E,则



$$ED^2=2\square ABCD.$$

解 在$\triangle EAD$中有$EF\perp AD$,当F在边AD上时,

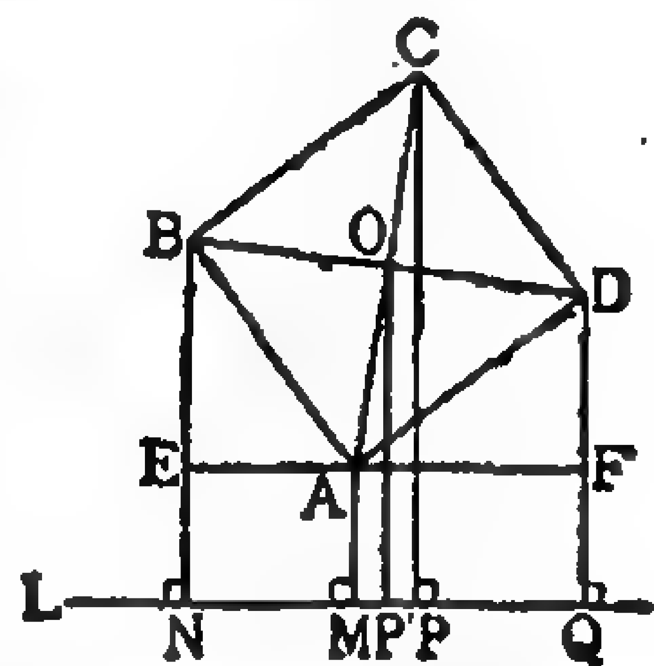
$$ED^2=AE^2+AD^2-2AD\cdot AF,\ DF=DC,$$
$$AE=AD,\ AF=AD-DC.$$

所以 $ED^2=AD^2+AD^2-2AD(AD-DC)$
$$=2AD\cdot DC=2\square ABCD.$$

当F在DA的延长线上时

$$ED^2=AE^2+AD^2+2AD\cdot AF$$
$$=AD^2+AD^2+2AD(DC-AD)$$
$$=2\square ABCD.$$

930. 从正方形的各顶点向任一直线作垂线,其相对顶点垂线上的正方形之和大于以另外相对顶点的垂线为边的矩形面积的两倍,也大于正方形的面积。



解 设$ABCD$为正方形,L为任一直线,从各顶点向L作垂线分别为AM、BN、CP、DQ,从对角线交点O向L作垂线OP',过A作L的平行线EF,因为$\angle BAD$为直角,所以

$$\angle BAE+\angle DAF$$
$$=\angle R=\angle BAE+\angle ABE,$$
$$\therefore\ \angle ABE=\angle DAF,$$

而$\angle BEA=\angle R=\angle AFD$, $AB=AD$, $AE=DF$,又$AM=a$, $BE=b$, $DF=c$,则$BN=a+b$, $DQ=a+c$,而O是AC、BD的中点,有

$$BN+DQ=2OP'=AM+CP.$$
$$\therefore\ (a+b)+(a+c)=2OP'=a+CP,$$
$$CP=a+b+c.$$

那么

$$BN^2+DQ^2-2AM\cdot CP$$
$$=(a+b)^2+(a+c)^2-2a(a+b+c)$$
$$=b^2+c^2=BE^2+DF^2=BE^2+EA^2=BA^2,$$

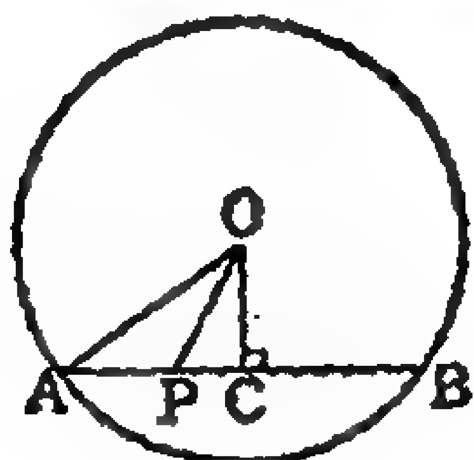
即 BN^2+DQ^2 比 $2AM\cdot CP$、比正方形 $ABCD$ 面积都大。

(5) 圆

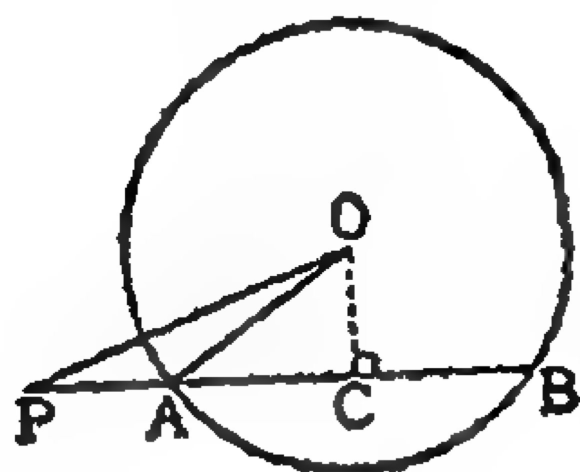
931. 若过点 P 作与圆 O 相交的任意割线与圆周交于点 A、B，则

$PA\cdot PB=OA^2\sim OP^2$.

[圆幂定理]



解 当 P 在圆内时，由 O 作 AB 的垂线 OC，则 C 为 AB 的中点。在直角三角形 OAC、OPC 中，



$OA^2=AC^2+OC^2$,

$OP^2=PC^2+OC^2$,

$\therefore\ OA^2-OP^2=AC^2-PC^2$

$=(AC+PC)(AC-PC)$.

因为 $AC+PC=BC+PC=PB$,

$AC-PC=AP$,

$\therefore\ PA\cdot PB=OA^2-OP^2$.

当 P 在 AB 的延长线上时，则

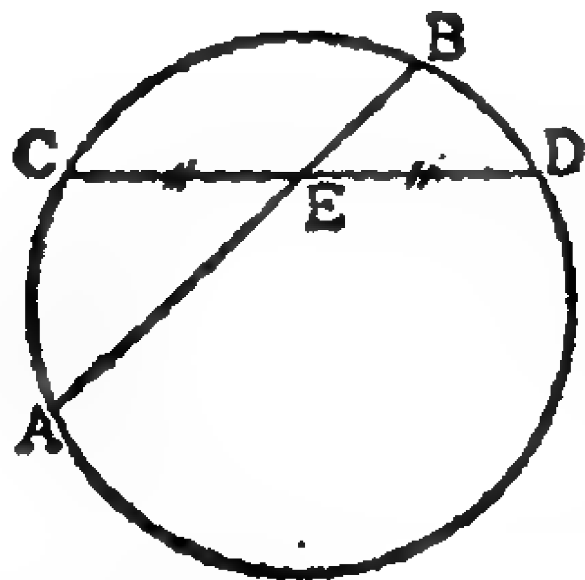
$PA\cdot PB=OP^2-OA^2$.

注 由此定理知，过点 P 所有的割线两部分的积都相等。

932. 设过圆弦 CD 的中点 E 的另一弦为 AB，则

$CE^2=AE\cdot EB$,

反之亦成立。



解 由上题

$CE\cdot ED=AE\cdot EB$,

因 $CE=ED$,

$\therefore\ CE^2=AE\cdot EB$.

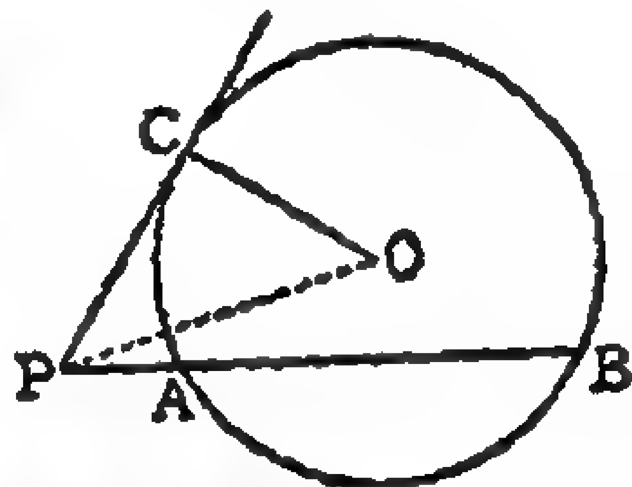
反之，$CE^2=AE\cdot EB$ 时，延长 CE 与圆周的交点为 D，由上题 $CE\cdot ED=AE\cdot EB$.

$\therefore\ CE^2=CE\cdot ED$, $CE=ED$.

933. 若过圆外一点 P，作此圆的割线 PAB、切线 PC (C 为切点)，则

$PC^2=PA\cdot PB$,

反之亦成立。



解 设圆心为 O，由问题 931 得

$PA\cdot PB=PO^2-CO^2$.

因 $\angle PCO=\angle R$, $\therefore\ PA\cdot PB=PC^2$.

反之，由 P 作割线 PAB，因为点 C 在圆周上，因此 $PA\cdot PB=PC^2$.

因为 $PA\cdot PB=PO^2-CO^2$,

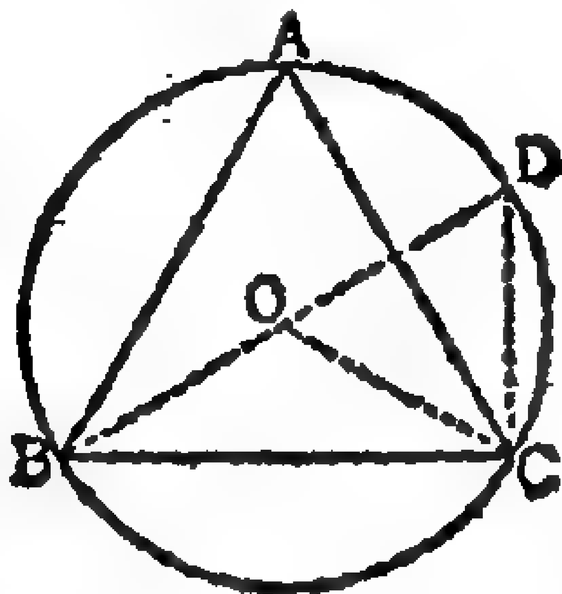
有 $PO^2-CO^2=PC^2$.

$\therefore\ PO^2=PC^2+CO^2$, $\angle PCO=\angle R$,

故 PC 是圆 O 的切线。

934. 若正三角形 ABC 的外接圆半径为 r，则 $BC^2=3r^2$.

解 设外接圆心为 O，连结 BO，延长 BO 与圆周的交点为 D，则



$\angle COD=2\angle CBD$

$=60°$,

所以 $\triangle OCD$ 为正三角形，

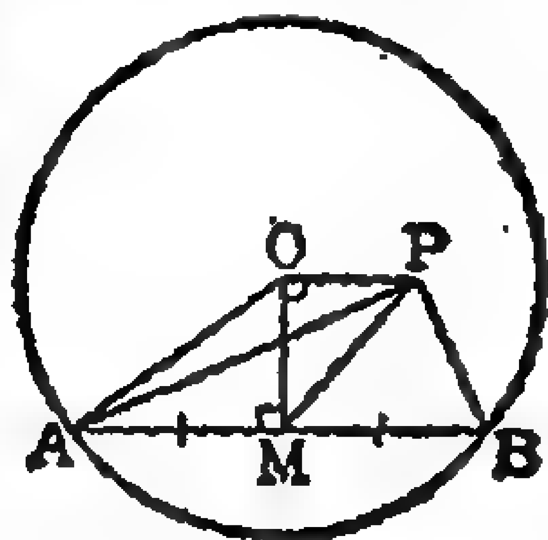
$\therefore\ CD=OC=r$, 而 $\angle BCD=\angle R$,

$\therefore\ BC^2=BD^2-CD^2=(2r)^2-r^2=3r^2$.

935. 设点 P 为圆 O 所在平面上的一点，AB 是平行 OP 的任意弦，则

PA^2+PB^2

$=2(OA^2+OP^2)$.



解 设弦 AB 的中点为 M，连结 OM，PM，则

$OM\perp AB$, $OP\parallel AB$,

从而 $OM\perp OP$。所以在 $\triangle PAB$ 中

PA^2+PB^2

$=2(AM^2+PM^2)$

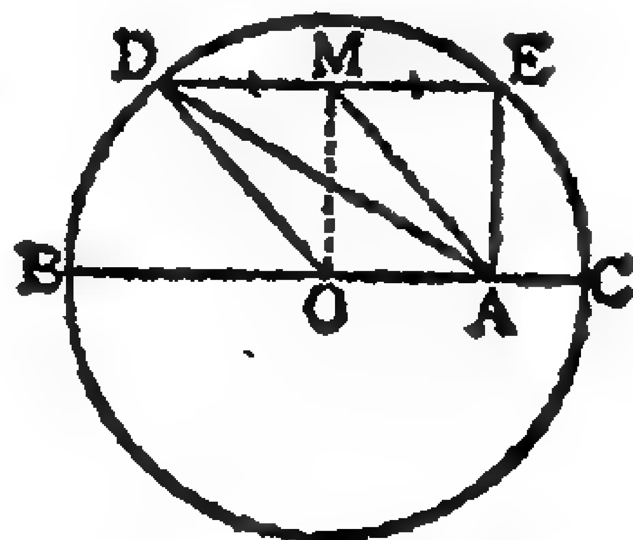
$=2[(OA^2-OM^2)+(OM^2+OP^2)]$

$=2(OA^2+OP^2)$.

936. 设 A 为圆 O 内一点，过 A 作直径 BC 平行于弦 DE，则

AB^2+AC^2

$=AD^2+AE^2$.



解 若 M 为 DE 的中点，根据问题 874，有

$$AD^2+AE^2=2(AM^2+DM^2). \quad ①$$

$\because\ DE\parallel BC$, $OM\perp DE$,

$\therefore\ AM^2=OM^2+OA^2$,

$DM^2=OD^2-OM^2$.

将它们代入①得

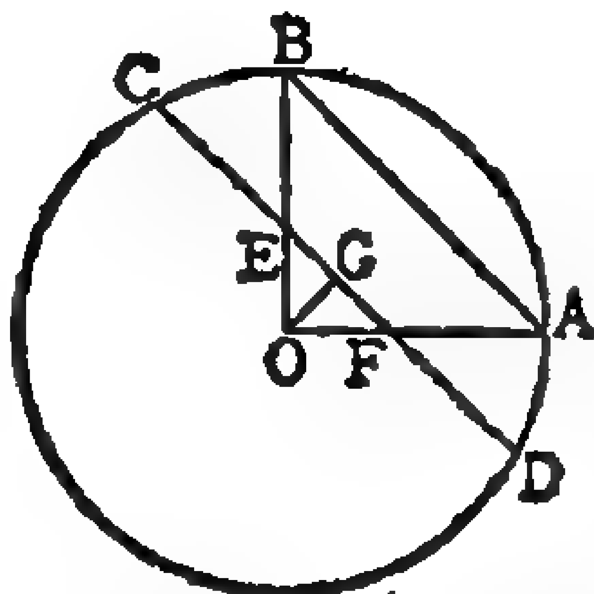
$$AD^2+AE^2=2(OM^2+OA^2+OD^2+OM^2)$$
$$=2(OA^2+OD^2)$$
$$=2(OA^2+OB^2). \qquad ②$$

因为 $OB=OC$,

$$\therefore\ AB^2+AC^2=(OB+OA)^2+(OB-OA)^2$$
$$=2(OB^2+OA^2)$$
$$=2(OA^2+OB^2). \qquad ③$$

由②、③得 $AB^2+AC^2=AD^2+AE^2$.

937. 设 OA、OB 为圆 O 内垂直相交的两条半径，弦 CD 平行 AB，与 OA、OB 的交点分别为 F、E，则



$$CE^2+DE^2=AB^2.$$

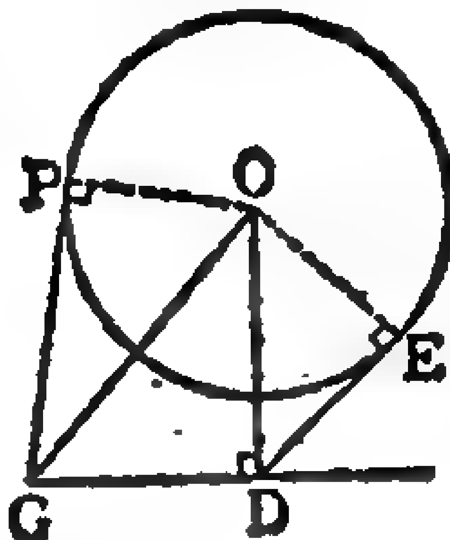
解 由 O 作 CD 的垂线，垂足为 G，则 G 为 CD 的中点，也是 EF 的中点.

$$\therefore\ CE^2+DE^2=(CG-EG)^2+(CG+EG)^2$$
$$=2(CG^2+EG^2).$$

因 $\triangle OEF$ 为等腰直角三角形，有 $EG=OG$.

$$\therefore\ CE^2+DE^2=2(CG^2+OG^2)=2OC^2$$
$$=OA^2+OB^2=AB^2.$$

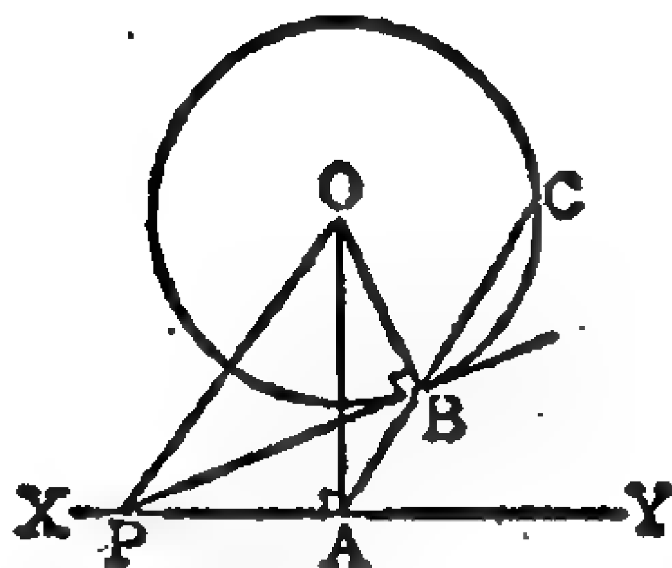
938. 若圆的切线 AE 和割线 EDC 垂直相交，则连结点 D、C 与切点 A 的线段上的正方形之和等于直径上的正方形.



解 作直径 AB，连结 BC, BD，则 $\angle ABD=\angle ACD=\angle BAC$,

$$\angle ADB=\angle R=\angle ACB.$$
$$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle BAD,\ AC=BD,$$
$$\therefore\ AD^2+AC^2=AD^2+BD^2=AB^2.$$

939. 由圆心 O 向圆外一条直线作垂线，垂足为 D，在这条直线上另外任取点 G，若由 D、G 作此圆的切线 DE、GP，则



$$GP^2=GD^2+DE^2.$$

解 $GP^2=OG^2-OP^2$. $OD\perp GD$,

$$\therefore\ OG^2=GD^2+OD^2,$$
$$\therefore\ GP^2=GD^2+OD^2-OP^2$$
$$=GD^2+OD^2-OE^2=GD^2+DE^2.$$

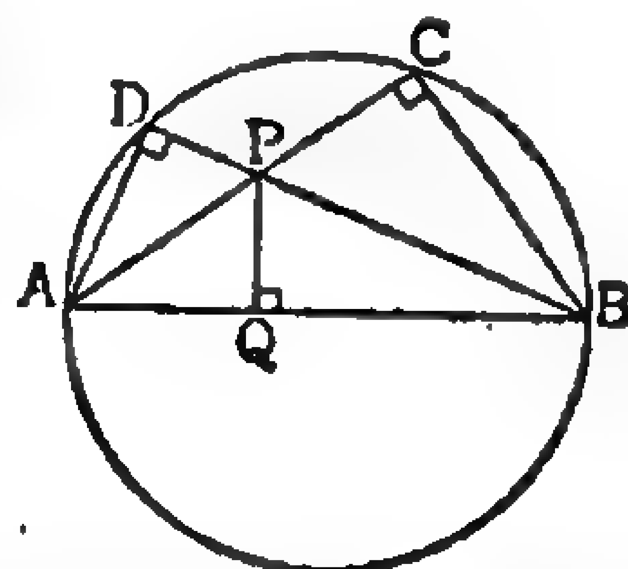
940. 设由圆心 O 向圆外一条直线 XY 所作垂线的足为 A，从 A 作圆的割线与圆周的交点为 B、C，在点 B 的切线与直线 XY 的交点为 P，则

$$BP^2-AP^2=AB\cdot AC.$$

解 由问题 931 得

$$AB\cdot AC=AO^2-OB^2.$$
$$\because\ \left.\begin{aligned}AO^2=OP^2-AP^2,\\ OB^2=OP^2-BP^2,\end{aligned}\right\}$$
$$\therefore\ AB\cdot AC=BP^2-AP^2.$$

941. 设 AB 为圆的直径，两条弦 AC、BD 相交于圆内一点 P，则



$$AB^2=AC\cdot AP+BD\cdot BP.$$

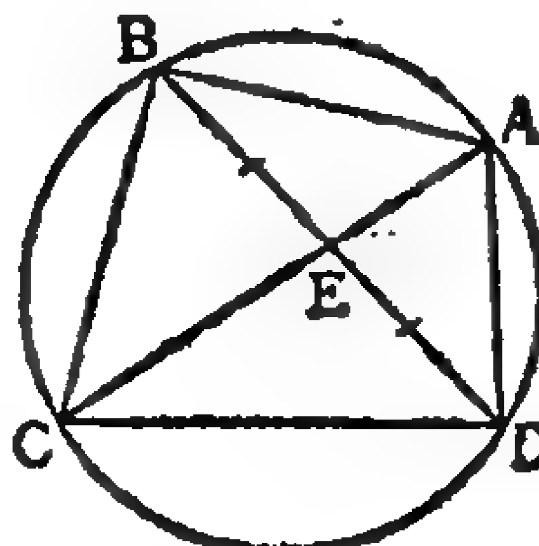
解 作 $PQ\perp AB$，四边形 $PQBC$ 是圆内接四边形，根据问题 931

$$AP\cdot AC=AQ\cdot AB.$$

又四边形 $PQAD$ 也是圆内接四边形，由问题 931 得 $BP\cdot BD=BQ\cdot BA$.

$$\therefore\ AP\cdot AC+BP\cdot BD=AB^2.$$

942. 若圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 等分 BD，则各边上的正方形之和等于 AC 上正方形的两倍.



解 设 AC、BD 的交点为 E，根据假设 $BE=DE$,

$$\therefore\ AB^2+AD^2=2AE^2+2BE^2.$$

同理，$BC^2+CD^2=2CE^2+2BE^2$.

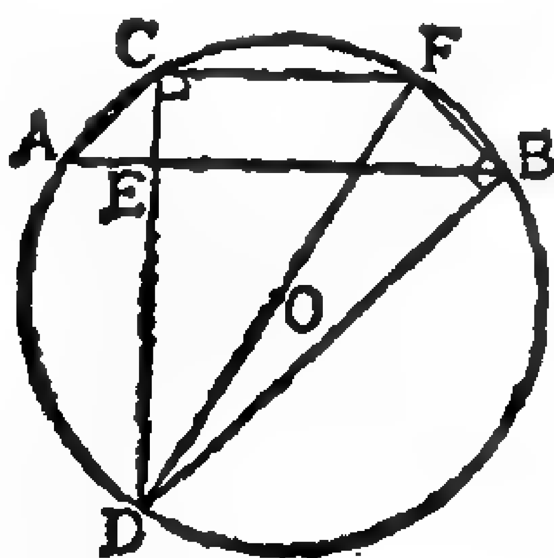
两式分别相加，得

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$$
$$=2AE^2+2CE^2+4BE^2$$
$$=2(AE^2+CE^2+2BE^2)$$
$$=2(AE^2+CE^2+2AE\cdot CE)$$
$$=2(AE+CE)^2=2AC^2$$
$$(\because\ BE^2=BE\cdot DE=AE\cdot CE).$$

943. 若两弦 AB、CD 在圆 O 内垂直相交于点 E，则

$$AE^2+BE^2+CE^2+DE^2=(\text{直径})^2.$$

解　因为 $AB\perp CD$，所以根据毕达哥拉斯定理



$AE^2+CE^2=AC^2$，

$BE^2+DE^2=BD^2$。

设由点 D 引直径 DOF 与圆 O 的交点为 F，则

$\angle FCD=\angle R=\angle BED$。

$\therefore\ AB\parallel CF,\ AC\parallel BF$，

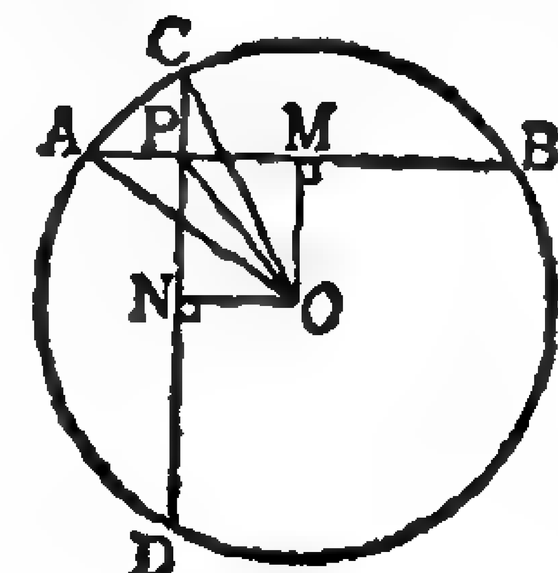
$\therefore\ AC^2+BD^2=BF^2+BD^2$。

因为 DF 为圆 O 的直径，有 $\angle FBD=\angle R$。

$\therefore\ BF^2+BD^2=DF^2=(\text{直径})^2$，

即　$AE^2+BE^2+CE^2+DE^2=(\text{直径})^2$。

944.　若两弦 AB、CD 在圆 O 内垂直相交于点 P，则 $AB^2+CD^2=8r^2-4OP^2$。其中 r 为圆 O 的半径。



解　若由 O 向 AB、CD 作垂线 OM、ON，则 M、N 分别为 AB、CD 的中点，因而有

AB^2+CD^2

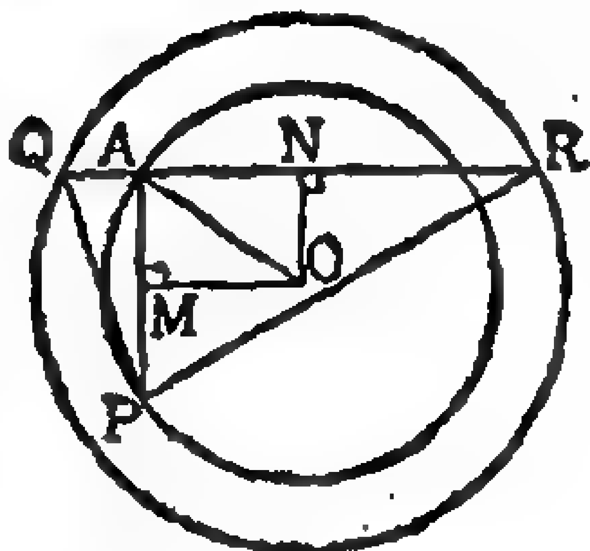
$=(2AM)^2+(2CN)^2=4AM^2+4CN^2$

$=4(AO^2-OM^2)+4(CO^2-ON^2)$

$=4(r^2-OM^2)+4(r^2-ON^2)$

$=8r^2-4OP^2$。

945.　由两个同心圆的小圆上一点 A 作小圆的弦 AP，若作与 AP 垂直的大圆的弦 QAR，则



(1) $AP^2+AQ^2+AR^2$ 是定值。(2) $\triangle PQR$ 各边上的正方形之和是定值。

解　(1) 若由圆心 O 向 AP、QR 引垂线 OM、ON，则

$AP^2=(2AM)^2=4(OA^2-OM^2)$，

$AQ^2+AR^2=(NQ-NA)^2+(NR+NA)^2$

$=2(NR^2+NA^2)$。

$\therefore\ AP^2+AQ^2+AR^2$

$=4OA^2+2(NR^2+NA^2-2OM^2)$

$=4OA^2+2(NR^2-NA^2)$

$(\because\ OM=NA)$，

$\therefore\ AP^2+AQ^2+AR^2$

$=4OA^2+2(NR+NA)(NR-NA)$

$=4OA^2+2AR\cdot AQ$。

设外圆、内圆的半径分别为 R、r，根据问题 **931** 有 $AR\cdot AQ=R^2-r^2$，

$\therefore\ AP^2+AQ^2+AR^2$

$=4r^2+2(R^2-r^2)=2(R^2+r^2)$

$=$定值。

(2) $QR^2+RP^2+PQ^2$

$=(AR+AQ)^2+RP^2+PQ^2$

$=AR^2+AQ^2+2AQ\cdot AR$

$+(AP^2+AR^2)+(AP^2+AQ^2)$

$=2(AP^2+AQ^2+AR^2)$

$+2AQ\cdot AR$，

由(1)得

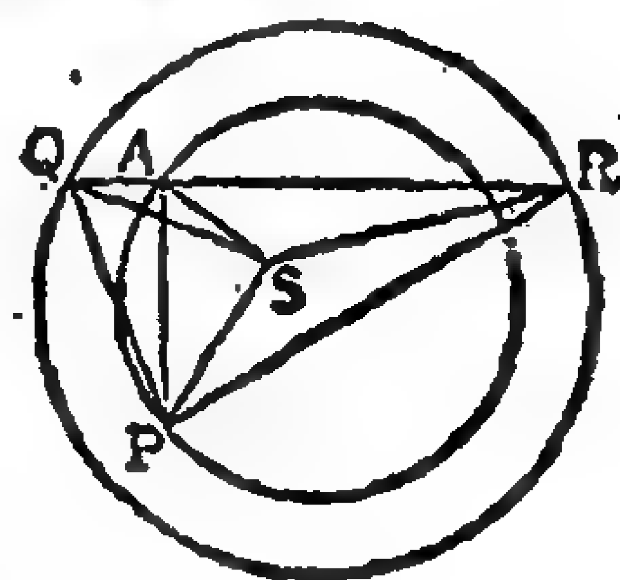
$PQ^2+QR^2+RP^2$

$=4(R^2+r^2)+2(R^2-r^2)$

$=6R^2+2r^2$(定值)。

946.　在上题中，若 S 为三角形 PQR 的重心，则 AS 为定长。

解　因为 S 为 $\triangle PQR$ 的重心，根据问题 **884** 得



$PA^2+QA^2+RA^2$

$=SP^2+SQ^2+SR^2$

$+3SA^2$。

又由问题 **880** 有

$SP^2+SQ^2+SR^2$

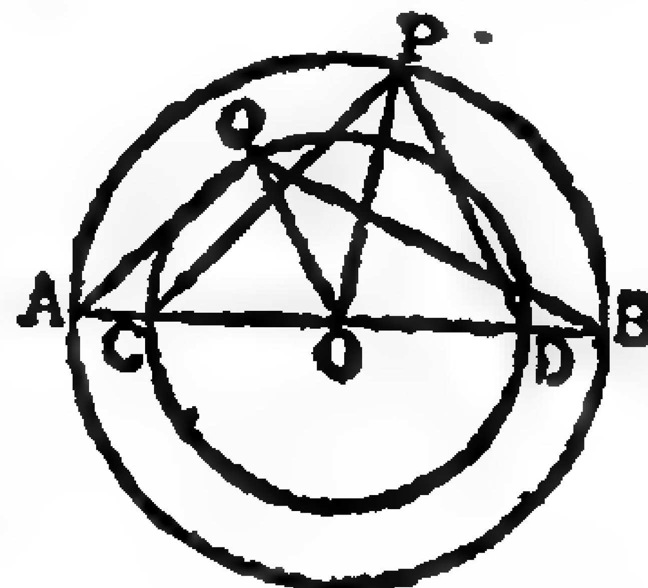
$=\dfrac{1}{3}(PQ^2+QR^2+RP^2)$，

$\therefore\ SA^2=\dfrac{1}{3}(PA^2+QA^2+RA^2)$

$-\dfrac{1}{9}(PQ^2+QR^2+RP^2)$。

根据上题，上式的右边为定值，所以 SA 是定长。

947.　设两个同心圆的公共直径为 $ACDB$，P、Q 分别为外圆和内圆周上的点，则



PC^2+PD^2

$=QA^2+QB^2$。

解　若 O 为同心圆心，在 $\triangle PCD$ 中，

$PC^2+PD^2=2CO^2+2PO^2$。　①

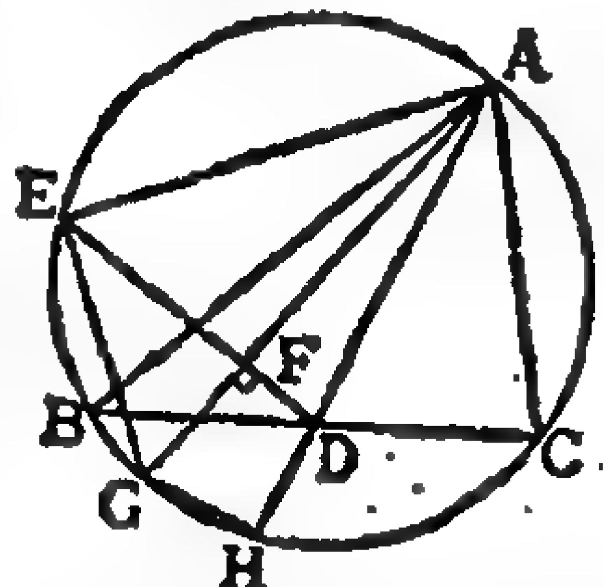
在 $\triangle QAB$ 中，

$QA^2+QB^2=2AO^2+2QO^2$。　②

因 $CO=QO$, $PO=AO$. 由①、②得

$$PC^2+PD^2=QA^2+QB^2.$$

948. 由$\triangle ABC$底边BC的中点D, 向外接圆过点A的直径AG作垂线, 延长垂线与外接圆相交于E, 则$AB^2+AC^2=2AE^2$.



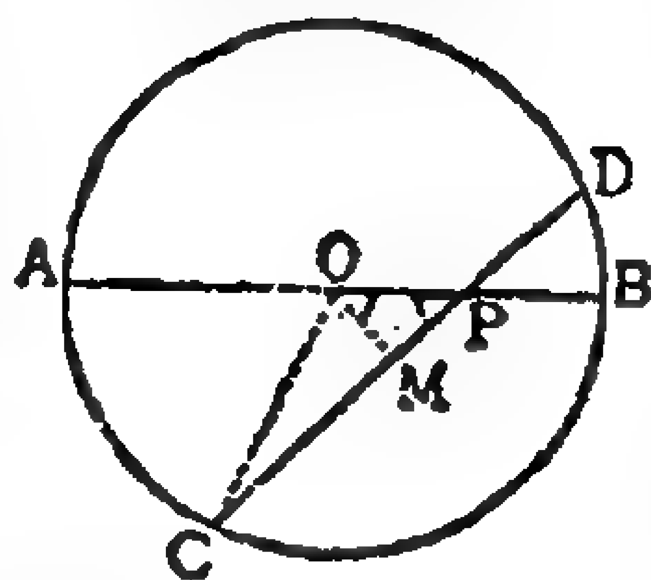
解 设AG和DE的交点为F, AD的延长线与圆周的交点为H, 分别连结GH, GE, 则$\angle AHG=\angle R=\angle DFG$. 四边形$DFGH$是圆内接四边形, 由此得

$$AD\cdot AH=AF\cdot AG=AE^2.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad AB^2+AC^2&=2(AD^2+BD^2)\\&=2(AD^2+AD\cdot DH)\\&=2AD(AD+DH)\\&=2AD\cdot AH=2AF\cdot AG=2AE^2.\end{aligned}$$

949. 设半径为R的圆O的直径AB与弦CD的夹角为$45°$, 若AB和CD的交点为P, 则

$$CP^2+DP^2=2R^2.$$



解 设M为CD的中点, 则

$$\begin{aligned}CP^2+DP^2&=(CM+PM)^2+(CM-PM)^2\\&=2(CM^2+PM^2).\end{aligned}$$

又 $\angle OPC=45°$, $OM\perp CD$,

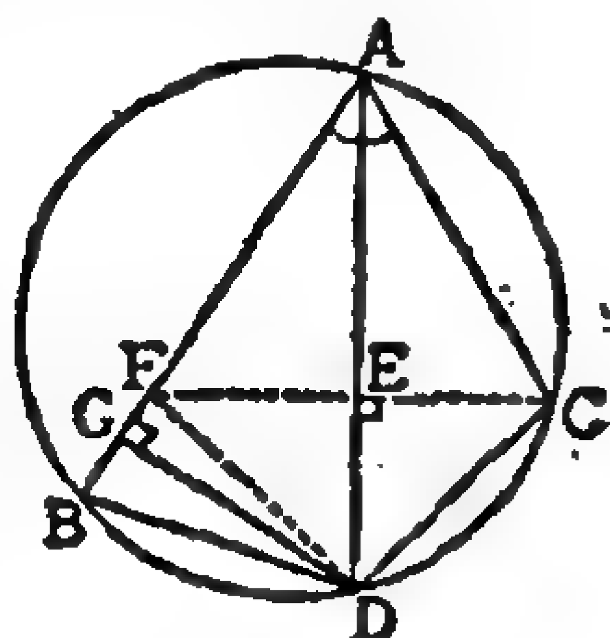
有 $PM=OM$.

$$\therefore\quad CM^2+PM^2=CM^2+OM^2=R^2,$$

$$\therefore\quad CP^2+DP^2=2R^2.$$

950. 由圆周上一点A引任意两条弦AB、AC, 作平分$\angle BAC$的弦AD, 若连结BD, 则

$$AD^2-BD^2=AB\cdot AC.$$



解 由C向AD引垂线CE, 并延长与AB的交点为F, 则

$$\triangle AEC\cong\triangle AEF,$$

$$\therefore\quad AC=AF,\ \triangle DEC\cong\triangle DEF,$$

$$\therefore\quad DC=DF=DB.$$

若由D引FB的垂线DG, 则G为FB的中点. 在$\triangle DAB$中, $DG\perp AB$, 所以

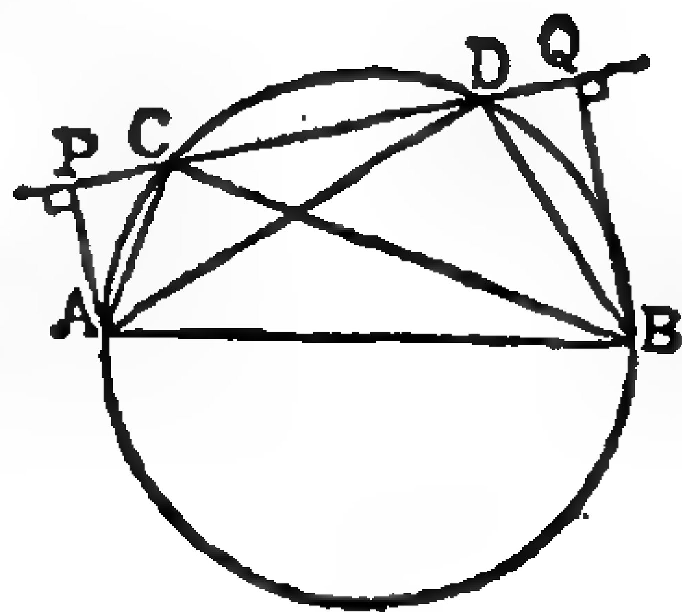
$$\begin{aligned}AD^2-BD^2&=AG^2-GB^2\\&=(AG+GB)(AG-GB)\\&=AB(AG-GF)\\&=AB\cdot AF=AB\cdot AC.\end{aligned}$$

951. 在圆内接三角形ABC中, 设D为弧BAC的中点, 则

$$BD^2-AD^2=AB\cdot AC.$$

解 由D向AB作垂线DE, 则

$$\begin{aligned}BD^2-AD^2&=BE^2-AE^2\\&=(BE+AE)(BE-AE)\\&=AB(BE-AE).\quad ①\end{aligned}$$



在BE上取BF等于AC, 由$DB=DC$, $\angle DBE=\angle DCA$, $BF=AC$, 有$\triangle DBF\cong\triangle ACD$.

$$\therefore\quad DA=DF,$$

因$DE\perp AF$, 有$AE=EF$.

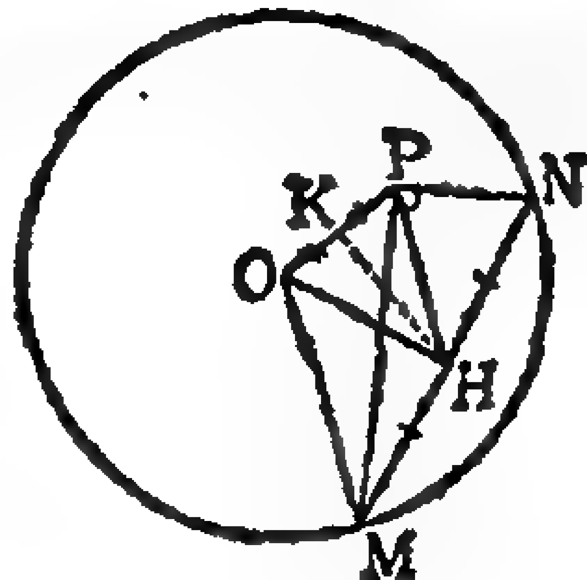
由①得

$$\begin{aligned}BD^2-AD^2&=AB(BE-AE)\\&=AB(BE-EF)\\&=AB\cdot BF=AB\cdot AC,\end{aligned}$$

即 $BD^2-AD^2=AB\cdot AC$.

952. 设圆的直径AB和弦CD, 由A、B分别作CD或其延长线上的垂线AP、BQ, 则

$$CP^2+CQ^2=DP^2+DQ^2.$$



解 由 $CP^2=AC^2-AP^2$,

$CQ^2=BC^2-BQ^2$,

$$\begin{aligned}\therefore\quad CP^2+CQ^2&=AC^2+BC^2-(AP^2+BQ^2)\\&=AB^2-(AP^2+BQ^2).\end{aligned}$$

同理, $DP^2+DQ^2=AB^2-(AP^2+BQ^2)$,

$$\therefore\quad CP^2+CQ^2=DP^2+DQ^2.$$

953. 从圆心为O的定圆内的定点P作相互垂直的两条直线, 与圆周的交点分别为M、N, 则弦MN的中点H和OP的中点K的距离是定长.

解 由

$$\angle MPN=\angle R,\ MH=NH,$$

$\therefore\quad PH=HM.$

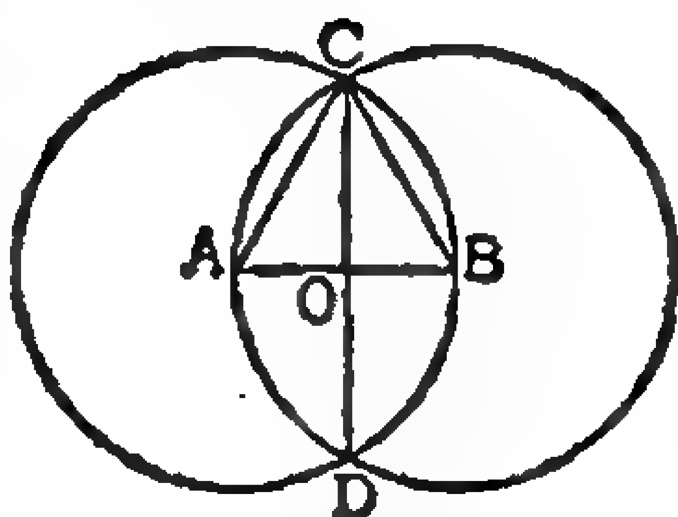
因 $2KP^2+2KH^2$

$$=OH^2+HP^2=OH^2+HM^2=OM^2,$$

$$\therefore\quad KH^2=\frac{1}{2}OM^2-KP^2.$$

因为 OP 是定线段，KP 也是定线段，OM 为半径，所以一定．故 KH 也是定长．

954． 若两等圆的圆心 A、B 在彼此的圆周上，则其公共弦 CD 上的正方形等于半径上正方形的三倍．



解 假定 AB、CD 的交点为 O，则 $\triangle ABC$ 为正三角形；AB、CD 相互垂直平分，

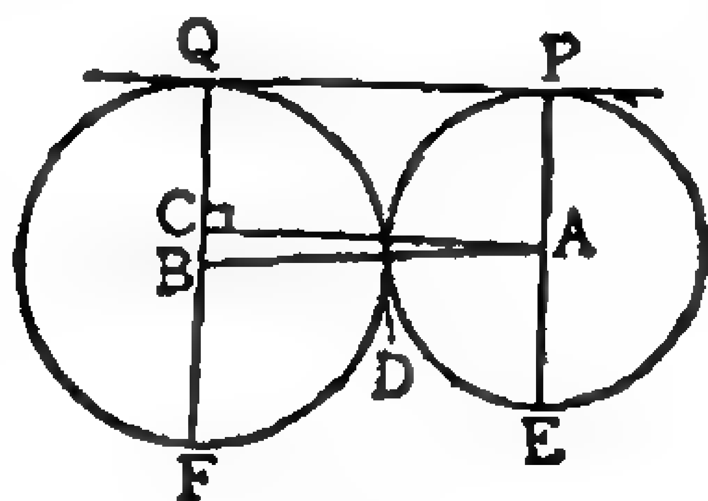
$$\therefore\quad AC^2=CO^2+AO^2,$$

$$4AC^2=4(CO^2+AO^2),$$

即 $$4AC^2=CD^2+AB^2.$$

又 $AC^2=AB^2$，$\therefore\quad 3AC^2=CD^2.$

955． 若两圆相互外切，则其外公切线两切点间线段上的正方形，等于两圆的直径为边矩形的面积．



解 设两圆 A、B 在点 D 外切，引外公切线 PQ，过切点 P、Q 分别作两圆直径 PE、QF，又由 A 引 QF 的垂线 AC，则 $\angle ACB=\angle R$，

$$\therefore\quad AC^2=AB^2-BC^2$$

$$=(AB+BC)(AB-BC).\qquad ①$$

因 $AP=CQ$，$BF+BC=CF$，

$$BF-BC=BQ-BC=CQ=AP,$$

因此 $AB+BC=QF$，$AB-BC=PE$．

由①有 $AC^2=PQ^2=QF\cdot PE$，

设圆 A、B 的半径分别为 r、R，则

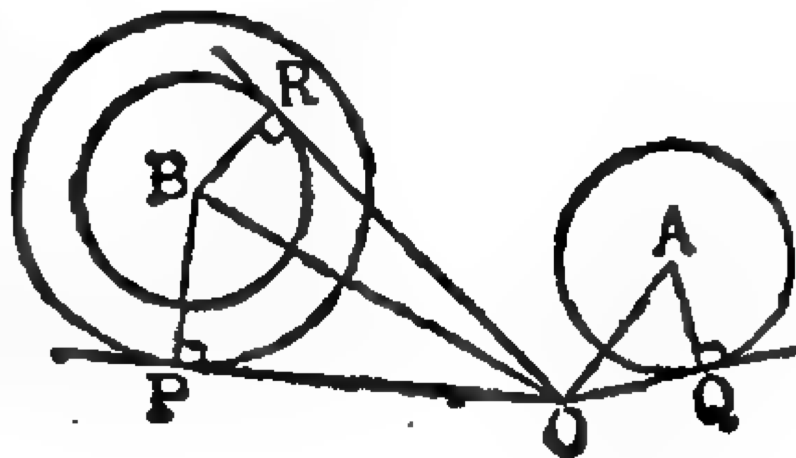
$$AB=R+r,\ BC=R-r,$$

$$\therefore\quad PQ^2=AC^2=AB^2-BC^2$$

$$=(R+r)^2-(R-r)^2$$

$$=4Rr=2R\cdot 2r.$$

956． 在两等圆 A、B 外取一点 O，以 B 为圆心作半径等于 OA 的圆，若由 O 向三个圆引切线，则以这三条切线为边可以作一个直角三角形．



解 若由 O 作的三条切线 OP、OQ、OR，则

$$OP^2=OB^2-BP^2,\ OQ^2=OA^2-AQ^2,$$

$$OR^2=OB^2-BR^2,$$

又 $$BP=OA,\ BR=AQ.$$

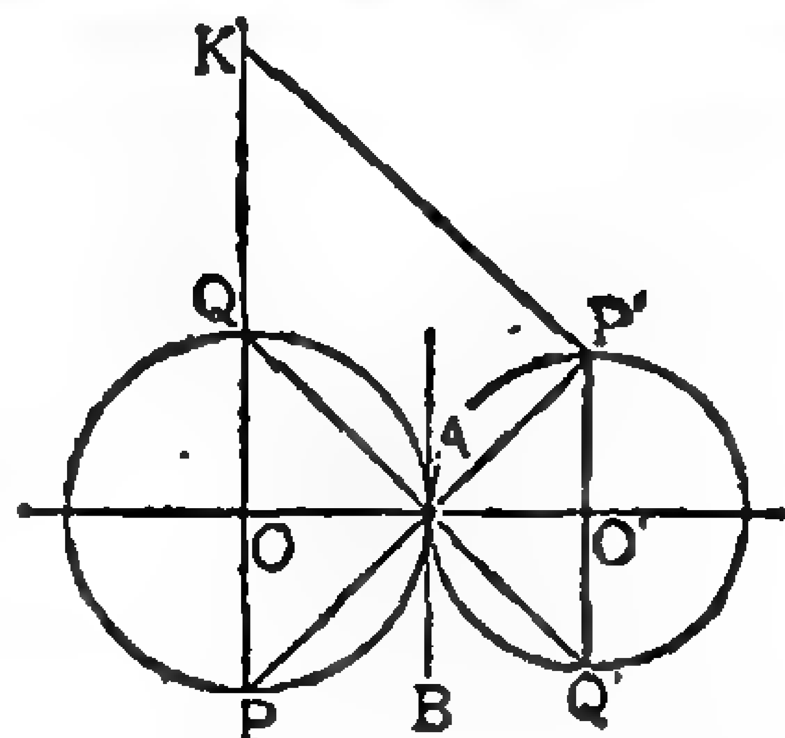
$$\therefore\quad OP^2+OQ^2$$

$$=OB^2-BP^2+OA^2-AQ^2$$

$$=OB^2-AQ^2=OB^2-BR^2=OR^2,$$

由 $OP^2+OQ^2=OR^2$ 知，以 OP、OQ、OR 为边可以作直角三角形．

957． 设两圆 O、O' 在点 A 相互外切，过点 A 作相互垂直的两条直线，若它们被圆周所截的两条线段为 PAP'、QAQ'，则 $PP'^2+QQ'^2$ 是定值．



解 因为 $PP'\perp QQ'$，所以 PQ、$P'Q'$ 分别为圆 O、O' 的直径，过 P' 作 QQ' 的平行线 $P'K$ 与 PQ 交于点 K，在点 A 的公切线为 AB，则

$$\angle Q'P'A=\angle BAQ'=\angle QPA,$$

$$\therefore\quad P'Q'\parallel PQ.$$

因此 $QQ'P'K$ 为平行四边形，所以 $QQ'=P'K$，又 $P'K\perp PP'$．

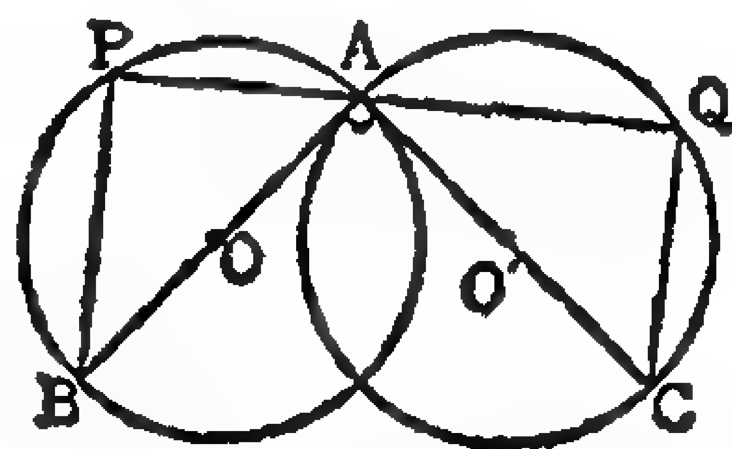
$$\therefore\quad PP'^2+QQ'^2=PP'^2+P'K^2=PK^2$$

$$=(PQ+P'Q')^2,$$

这里 PQ、$P'Q'$ 分别为圆 O、O' 的直径，所以是定长．

$$\therefore\quad PP'^2+QQ'^2=(\text{定值}).$$

958． 若两等圆 O、O' 在点 A 处垂直相交，即在交点上引两圆的切线相交成直角，过点 A 引两圆的割线 PAQ，则 AP^2+AQ^2 为定值．



解 由于两圆垂直相交，引直径 AB、AC，则 $\angle BAC=\angle R$，$AB=AC$ 有

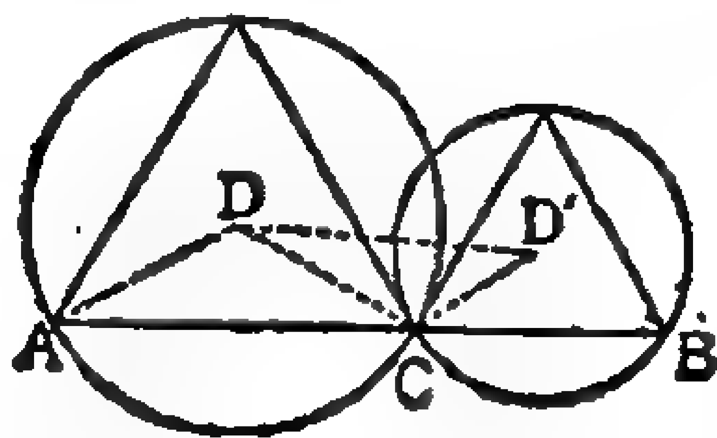
$$\triangle ABP\cong\triangle CAQ.$$

$$\therefore\quad AQ=BP,$$

$$\therefore\quad AP^2+AQ^2=AP^2+BP^2=AB^2.$$

故 AP^2+AQ^2 是定值。

959. 线段 AB 被点 C 分成两条线段，在 AB 的同侧分别以 AC、CB 为底作正三角形，设它们外接圆心为 D、D'，则



$$6DD'^2=AB^2+AC^2+BC^2.$$

解 在 $\triangle DCD'$ 中，$\angle DCD'=120°$。

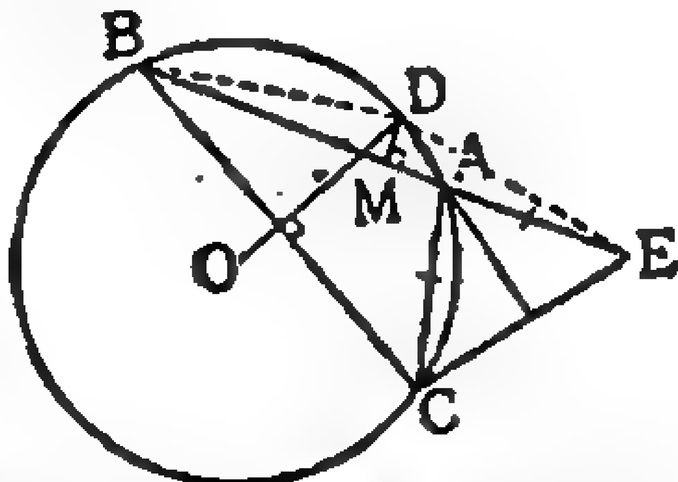
$$\therefore\quad 6DD'^2=6(CD^2+CD'^2-2CD\cdot CD'\cos 120°)$$
$$=6(CD^2+CD'^2+CD\cdot CD').$$

因 $$CD=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}AC\right)=\frac{AC}{\sqrt{3}},$$

同理 $$CD'=\frac{BC}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad 6CD^2=2AC^2,\ 6CD'^2=2BC^2,$$
$$6CD\cdot CD'=2AC\cdot BC$$
$$=(AC+BC)^2-AC^2-BC^2$$
$$=AB^2-AC^2-BC^2,$$
$$\therefore\quad 6DD'^2$$
$$=2AC^2+2BC^2+(AB^2-AC^2-BC^2)$$
$$=AB^2+AC^2+BC^2.$$

960. 以等腰三角形 ACE 的腰 AC 为弦，作圆心与 E 点在 AC 异侧的任意圆，延长 EA 与圆交于 B，设弦 BC 的垂直平分线与弧 BAC 的交点为 D，则



(1) $DA\perp EC$; (2) D 是三角形 BCE 的外心; (3) $AB\cdot AC=BD^2-AD^2$。

解 (1) 连结 AD，因为 D 是 $\widehat{BC}$ 的中点，所以 DA 平分 $\angle BAC$ 的外角，即平分 $\angle CAE$。

因为 $\triangle CAE$ 是等腰三角形，所以 $DA\perp EC$，

(2) 显然 D 为 BC 及 CE 的垂直平分线的交点，所以 D 为 $\triangle BCE$ 的外心。

(3) 由 D 向 BE 引垂线 DM，则

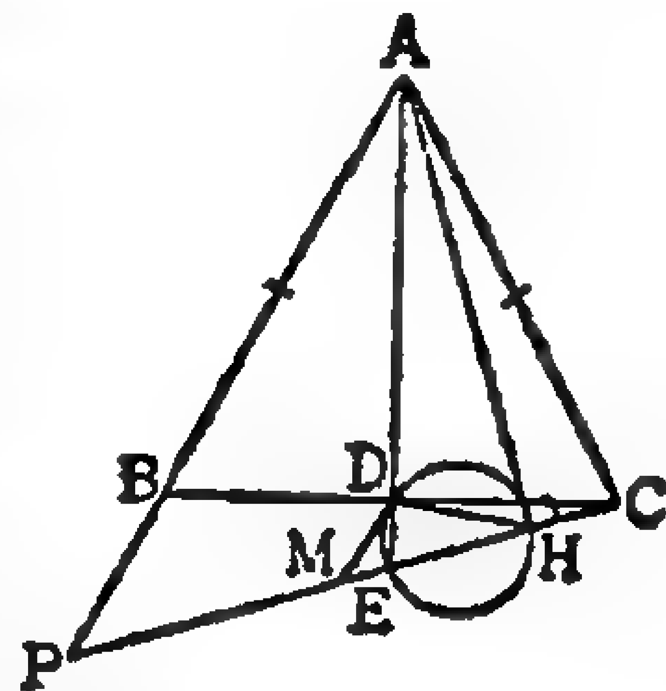
$$BD^2-AD^2=BM^2-AM^2$$
$$=(BM+AM)(BM-AM).\quad ①$$

又 $BD=DE$，$\therefore\ BM=ME$。由①得

$$BD^2-AD^2=(BM+AM)(ME-AM)$$
$$=AB\cdot AE.$$

因 $$AE=AC,$$
$$\therefore\quad AB\cdot AC=BD^2-AD^2.$$

961. 由等腰三角形 $ABC(AB=AC)$ 的顶点 A 向底边 BC 引垂线 AD，在 AB 的延长线上取点 P，连结 PC，设 AH 垂直于 PC，M 为 PC 的中点，E 为 AD 的延长线与 PC 的交点，试证



(1) MD 与圆 DEH 相切，

(2) $BP^2=4ME\cdot MH$。

解 (1) 因为 $AD\perp BC$，$AH\perp PC$，

$$\therefore\quad \angle ADC=\angle R=\angle AHC,$$

所以四边形 $ADHC$ 是圆内接四边形，因此

$$\angle CAD=\angle DHE.$$

又 D、M 分别为 BC、PC 的中点，有

$$AP\parallel DM,$$
$$\therefore\quad \angle DAB=\angle MDE.$$

因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，AD 垂直于 BC，有

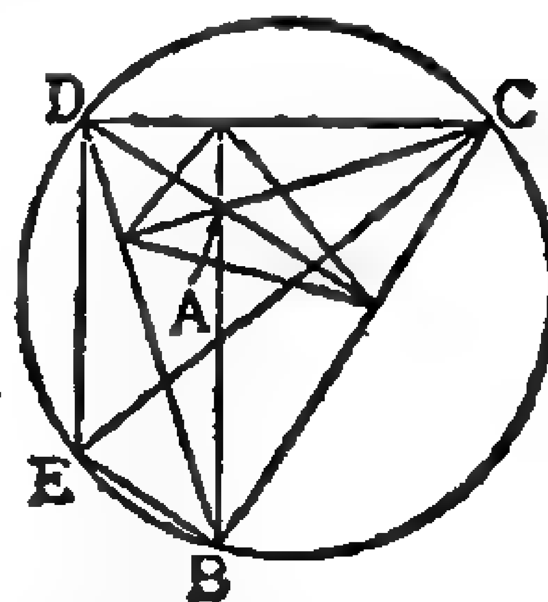
$$\angle BAD=\angle CAD,$$
$$\therefore\quad \angle MDE=\angle PAD=\angle DAC=\angle DHE,$$

故直线 DM 与圆 DEH 相切。

(2) 因为 MD 与圆 DEH 相切，有

$$MD^2=ME\cdot MH,\quad MD=\frac{1}{2}BP,$$
$$\therefore\quad 4MD^2=BP^2,$$
$$\therefore\quad BP^2=4ME\cdot MH.$$

962. 设三角形的内心为 A，三个旁心分别为 B、C、D，三角形 BCD 的外接圆直径为 CE，则



$$AB^2+CD^2=CE^2.$$

解 A 为三角形的内心，B、C、D 为旁心，所以 AB、AC、AD 分别垂直于 DC、DB、BC（问题 **443**）。作直径 CE，则 $\angle CDE=\angle R$，且 $BA\perp CD$ 有 $DE\parallel AB$。

同理，$EB\parallel DA$，所以四边形 $ADEB$ 为平行四边形。

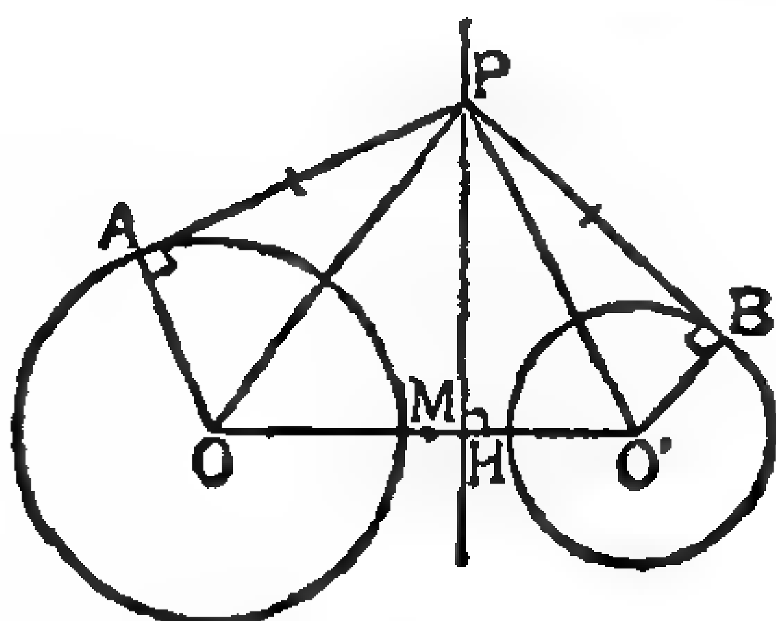
$$\therefore\quad AB=DE,$$
$$\therefore\quad AB^2+CD^2=ED^2+CD^2.$$
$$\because\quad \angle CDE=\angle R,$$

有　　$ED^2+CD^2=CE^2$，

$\therefore\ AB^2+CD^2=CE^2$。

7. 根轴、根心及其应用

963. 已知两圆 O、O'，由点 P 作两圆的切线 PA、PB，切点分别为 A、B，则使 $PA=PB$ 成立的点 P 总在定直线上。[此直线称为两圆的根轴]



解 连结 PO，PO'，则在两个直角三角形 PAO，PBO' 中

$PA^2=PO^2-AO^2$，$PB^2=PO'^2-BO'^2$。

根据假设 $PA=PB$，

$\therefore\ PO^2-AO^2=PO'^2-BO'^2$，

即　　$PO^2-PO'^2=AO^2-BO'^2$。

设圆 O、O' 的半径分别为 r、r' $(r>r')$，则

$$PO^2-PO'^2=r^2-r'^2。\qquad ①$$

由 P 向 $O'O$ 作垂线 PH，$O'O$ 的中点为 M，

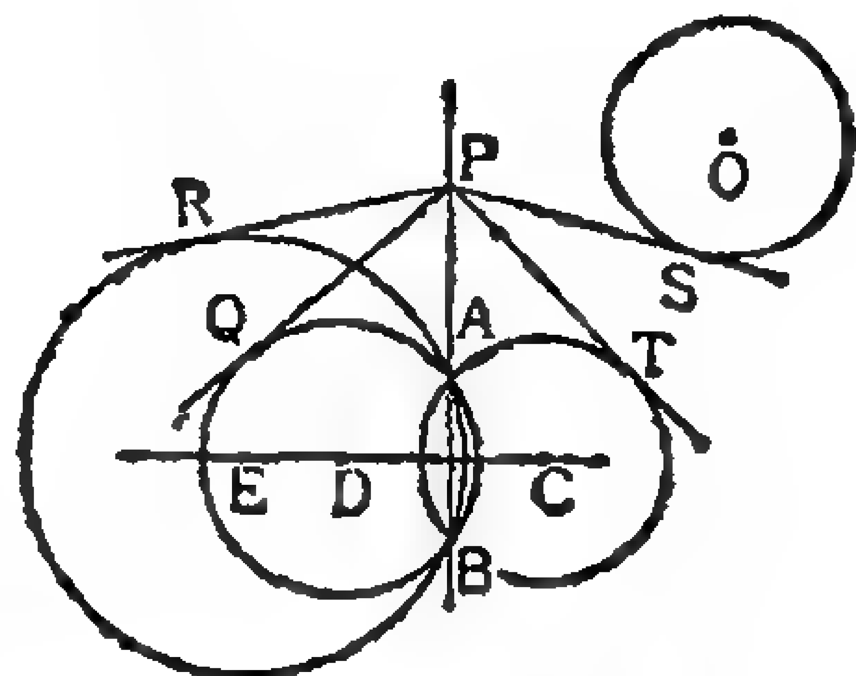
则　　$PO^2-PO'^2=2OO'\cdot MH$。

由①有

$$r^2-r'^2=2OO'\cdot MH。\qquad ②$$

上式中 r、r' 及 OO' 的值一定，M 为 OO' 的中点，所以 MH 也一定，H 是定点。因此 P 在过定点 H 且垂直于 OO' 的定直线上。

964. 两圆的根轴平分其公切线。



解 设两圆 O、O' 的公切线的切点分别为 A、B，AB 与两圆 O、O' 根轴的交点为 P，则

$$PO^2-PO'^2=r^2-r'^2\qquad ①$$

(r，r' 为两圆的半径，$r>r'$)。

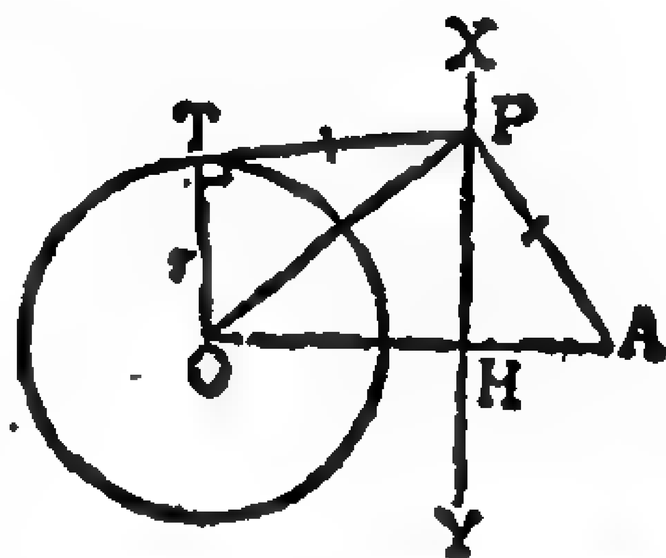
$$PO^2-PO'^2=(PA^2+r^2)-(PB^2+r'^2)$$
$$=PA^2-PB^2+r^2-r'^2。\qquad ②$$

由①、②得，　$PA^2-PB^2=0$，

$\therefore\ PA=PB$。

965. 已知定点 A，定圆 O。若由点 P 向圆 O 引切线 PT，使它等于 PA，试证 P 总在定直线上。

解 设圆 O 的半径为 r，则



$PT^2=PO^2-TO^2$

$=PO^2-r^2$，

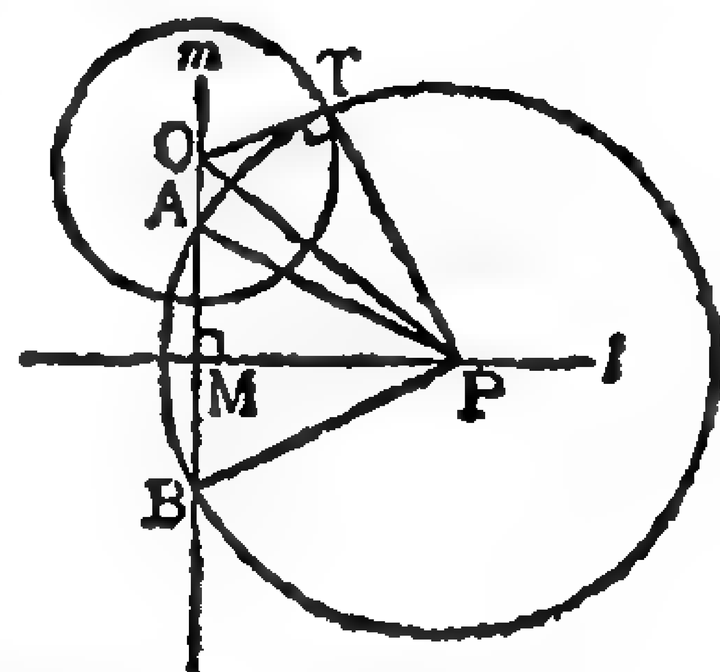
因　$PT=PA$，

有　$PA^2=PO^2-r^2$。

$\therefore\ PO^2-PA^2=r^2$。

因此由 P 到两定点 O、A 的距离平方差为 r^2(定值)，根据问题 **1834**，点 P 在垂直于 OA 的定直线上。

966. 已知定圆 O 及与圆不相交的定直线 l。若过圆心 O 与 l 垂直的直线为 m；由 l 上的动点 P 作圆 O 的切线，切点为 T；作以 P 为圆心、PT 为半径的圆，试证此圆通过 m 上的两定点。



解 设 l、m 的交点为 M，以 P 为圆心，PT 为半径的圆与直线 m 的交点为 A、B，由 OT 为圆 P 的切线，根据问题 **933** 有

$$OT^2=OA\cdot OB。\qquad ①$$

设 $OM=h$，$OT=n$，$AM=MB=x$，由①得

$$n^2=(OM-AM)(OM+MB)$$
$$=(h-x)(h+x)，$$
$$\therefore\ n^2=h^2-x^2，\ x^2=h^2-n^2，$$

因此 x 是一定的，A、B 是定点。这就证明了圆 P 过定点 A、B。

967. 过两定点 A、B 的圆与一个定圆的根轴，与过 A、B 的直线是相交，还是平行？

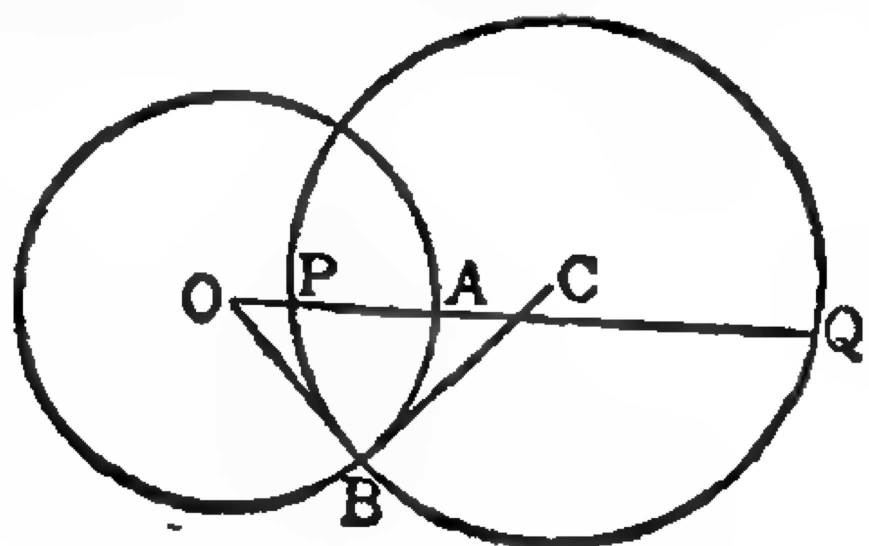
解 设过 A、B 的各圆的圆心为 C、D、E 等，定圆的圆心为 O，圆 C、圆 D 的根轴与圆 C、圆 O 的根轴交于点 P，则由 P 向三个圆作的切线 PT、PQ、PS 相等。因 P 在 AB 上，所以若从 P 作圆 E 的切线为 PR，则

$$PT=PR，\quad \therefore\ PR=PS。$$

因此圆 E、圆 O 的根轴也通过点 P，其它的根轴都过 P。若 O 在 CD 上时，圆 C 和圆 O、圆 D 和圆 O 的根轴都垂直于 CD，所以都平行

于 AB。

968. 已知点 P 在圆 O 半径 OA 上，在 OA 的延长线上取一点 Q，使 $OP\cdot OQ=OA^2$，试证过两点 P、Q 的一切圆与圆 O 垂直相交。



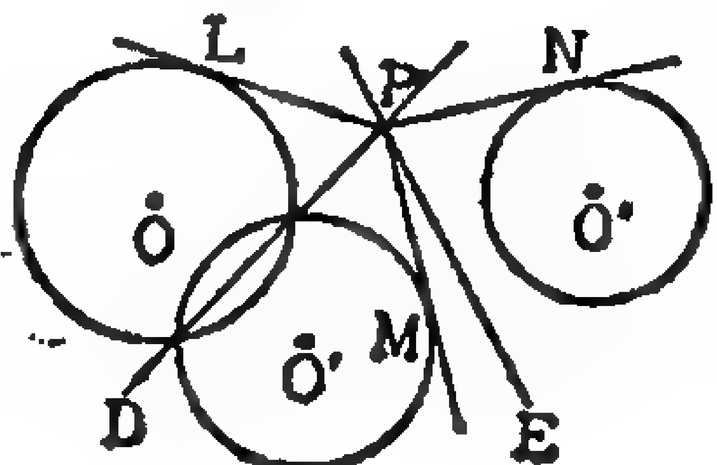
解 设两圆垂直相交，即在其交点上引两圆的切线相交成直角，设过 P、Q 的任意圆为 C，圆 C 和圆 O 的交点为 B，则 $OA=OB$，由此得

$$OP\cdot OQ=OA^2=OB^2,$$

于是 OB 与圆 C 相切．从而 $OB\perp BC$，总之因为 OB 与圆 C 相切，并且 BC 在点 B 与圆 O 相切，所以这两个切线垂直相交，故这两个圆垂直相交。

969. 三个圆每两个的根轴是通过同一点，还是互相平行．

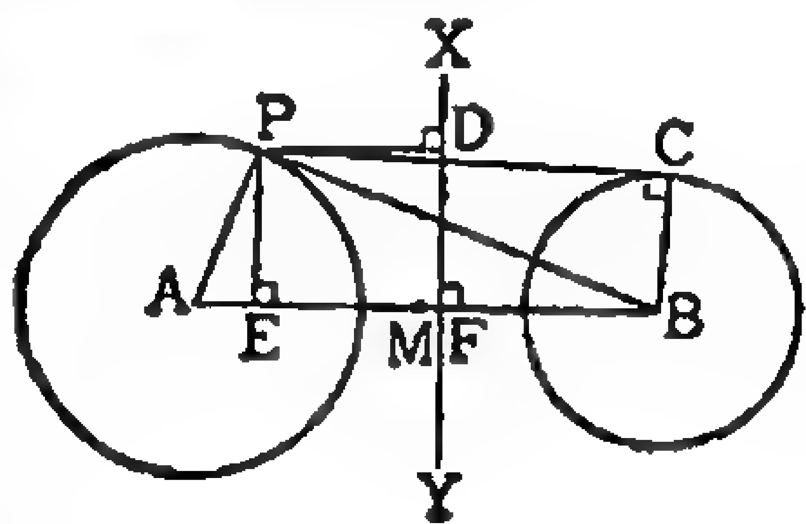
解 设两圆 O、O' 的根轴 PD 和两圆 O'、O'' 的根轴 PE 的交点为 P，从点 P 作三个圆的切线 PL、PM、PN，则有 $PL=PM$，$PM=PN$，



$$\therefore\quad PL=PN.$$

因此 P 在两圆 O、O'' 的根轴上，即三个根轴过同一点 P(此点称为根心)．由于两圆的根轴垂直于圆心线，因此当三个圆的圆心在同一条直线上时，则三个根轴互相平行。

970. 设两圆 A、B 的根轴为 XY，由圆 A 上任意一点 P 作圆 B 的切线 PC，由 P 作 PD 垂直 XY，则 $PC^2=2AB\cdot PD$。



解 由 P 作 AB 的垂线 PE，设 AB 的中点为 M，则

$$PB^2-PA^2=2AB\cdot EM. \qquad ①$$

又 $\angle PCB=\angle R$，

$$\therefore\quad PC^2=PB^2-BC^2. \qquad ②$$

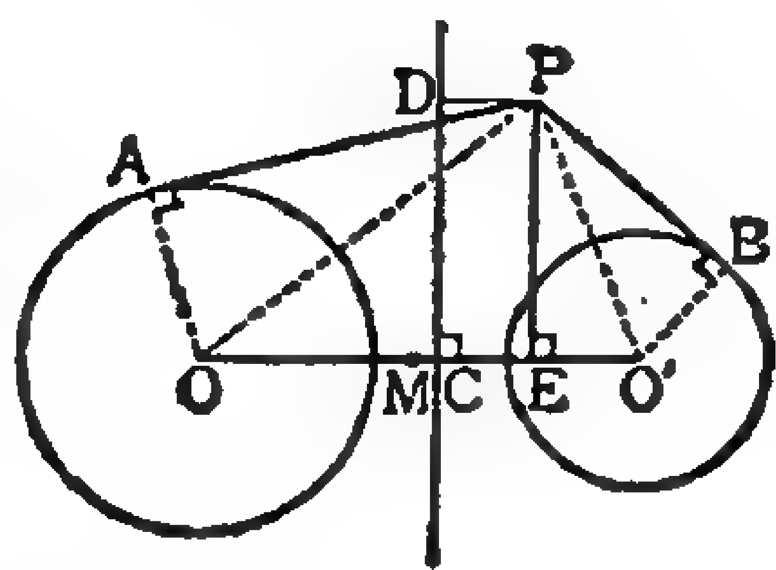
设 XY 和 AB 的交点为 F，则 F 是根轴 XY 上的点，根据问题 **963**

$$PA^2-BC^2=2AB\cdot MF. \qquad ③$$

由①+②+③得

$$PC^2=2AB(ME+MF)$$
$$=2AB\cdot EF=2AB\cdot PD.$$

971. 由一点 P 作两圆 O、O' 的切线 PA、PB，若由 P 作两圆的根轴 CD 的垂线 PD，则



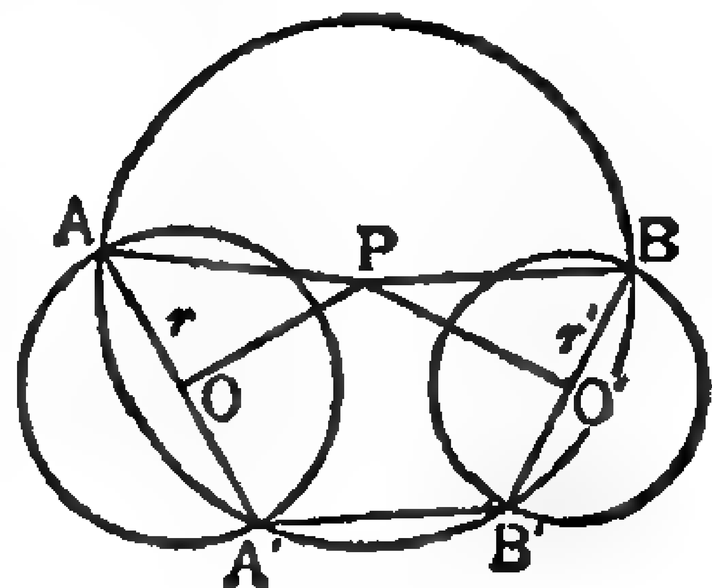
$$PA^2\sim PB^2=2OO'\cdot PD.$$

解 由 P 作 OO' 的垂线 PE，设 OO' 的中点为 M，$PA>PB$，则

$$PA^2-PB^2=(PO^2-PO'^2)-(OA^2-O'B^2)$$
$$=(OE^2-O'E^2)-(OC^2-O'C^2)$$
$$=2OO'\cdot EM-2OO'\cdot CM$$
$$=2OO'(EM-CM)$$
$$=2OO'\cdot PD.$$

若 $PA<PB$ 时，结论也成立。

972. 作一圆分别平分两定圆 O、O' 的圆周，设其圆心为 P，则 P 在定直线上。



解 设圆 P 与两圆 O、O' 的交点分别为 A、A' 及 B、B'，则 AA'、BB' 分别为 O、O' 的直径，连结 PA、PB，则

$$PA^2=PO^2+r^2(r\text{ 为圆 }O\text{ 的半径}),$$
$$PB^2=PO'^2+r'^2(r'\text{ 为圆 }O'\text{ 的半径}).$$

因为 PA、PB 是圆 P 的半径，所以相等．因此

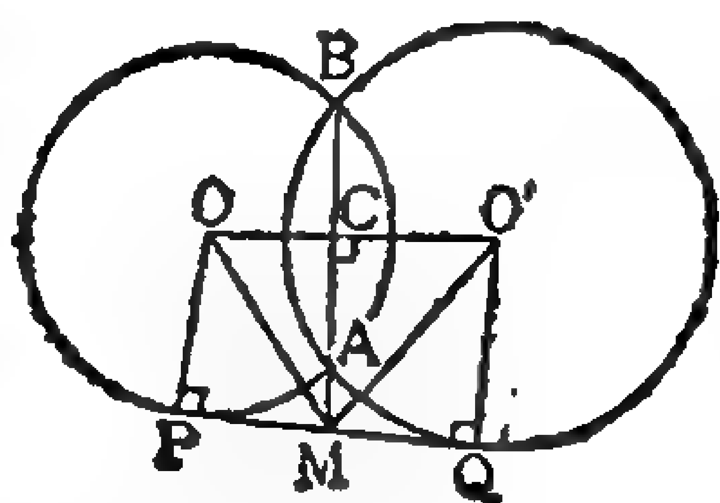
$$PO^2+r^2=PO'^2+r'^2,$$
$$\therefore\quad PO^2-PO'^2=r'^2-r^2(\text{定值}).$$

由 O、O' 为定点知 $PO^2-PO'^2$ 是定值，所以点 P 在垂直于 OO' 的定直线上。

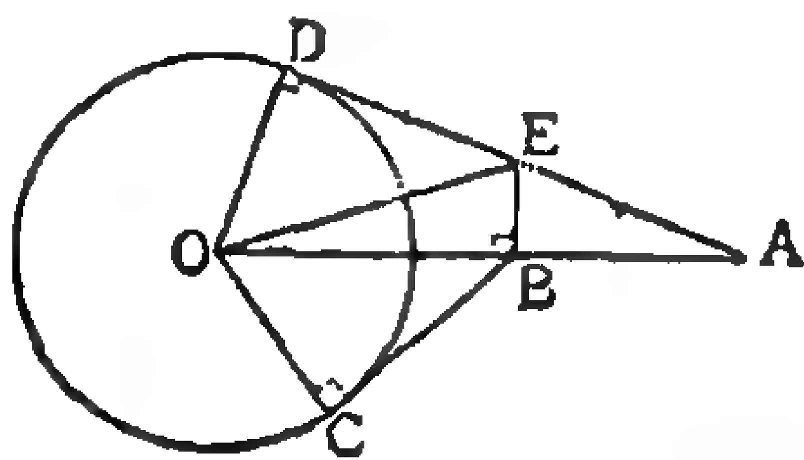
注 在问题 **963** 中，$PO^2-PO'^2=r^2-r'^2$，而在本题中，$PO^2-PO'^2=r'^2-r^2$，右边 r 和 r' 的位置相反。这两问题中的点 P 所在的直线是关于 OO' 的中点对称。

973. 由两相交圆 O、O' 的公切线 PQ 的中点 M，作连心线 OO' 的垂线是两圆的公共弦。

解　因为两圆的公共弦 AB 就是两圆的根轴．设 AB 与公切线 PQ 的交点为 M，根据问题 **964**，M 为 PQ 的中点，而且 $AB\perp OO'$．所以由 PQ 的中点向 OO' 作的垂线与 AB 重合．



974.　由一点 A 作圆 O 的切线 AD，再由 AD 的中点 E 作 OA 的垂线 EB，若由B点引切线 BC，则 $BC=AB$．



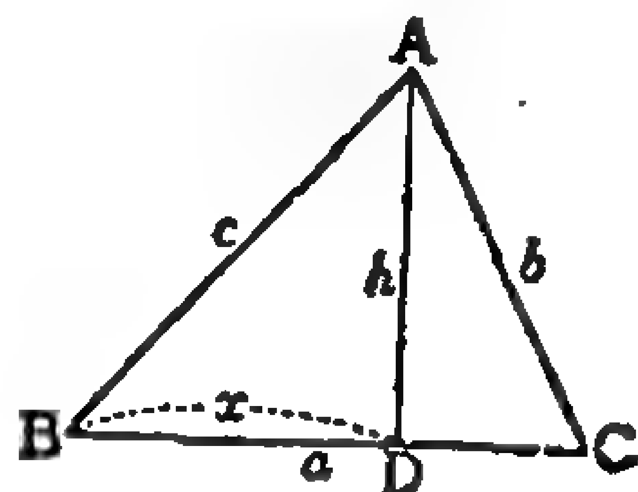
解　因为

$$BC^2=OB^2-OC^2=OE^2-EB^2-OC^2$$
$$=OE^2-OD^2-EB^2=DE^2-EB^2$$
$$=AE^2-EB^2=AB^2,$$
$$\therefore\quad BC=AB.$$

8．海伦公式及其应用

975.　设三角形三边为 a、b、c，面积为 S，则 $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$，其中 $P=\frac{1}{2}(a+b+c)$．　　[海伦公式]

解　由 A 作 BC 的垂线 AD，设 $BD=x$，$AD=h$，则



$$AD^2=AB^2-BD^2$$
$$=AC^2-CD^2,$$

即　　$h^2=c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$．

解　　$c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$，

得　　$x=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$．

代入 $h^2=c^2-x^2$ 得

$$h=\sqrt{c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{4}{a^2}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}$$
$$\times\sqrt{\left(\frac{c+a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}.$$

因 $P=\frac{a+b+c}{2}$，

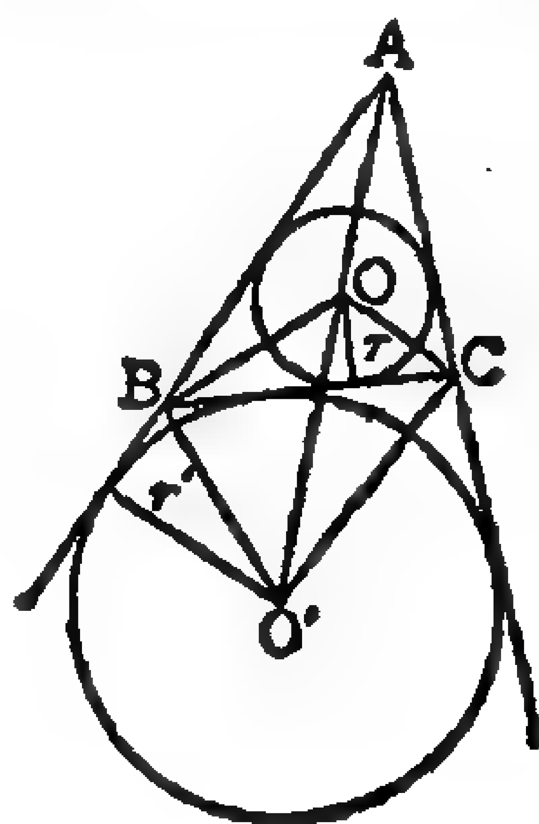
所以　$h=\frac{2}{a}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$，

由 $S=\frac{1}{2}ah$，得

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}.$$

注　上面是锐角三角形的证明．若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，由 A 向 BC 作垂线的垂足在底边 BC 的延长线上，同样可证明其结果．

976.　设三角形三边之长为 a、b、c，求此三角形的内切圆、旁切圆的半径．



解　设 $\triangle ABC$ 内心为 O，内切圆半径为 r，则

$$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}ar,$$

$$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}br,\quad S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}cr.$$

而 $\triangle ABC$ 是这三个三角形之和，所以将这三个式子相加，得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(a+b+c)r=Pr.\qquad ①$$

由海伦公式得

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}.\qquad ②$$

由①、②得

$$\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=P\cdot r,$$
$$\therefore\quad r=\frac{\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}{P}$$
$$=\sqrt{\frac{(P-a)(P-b)(P-c)}{P}}.$$

为求 $\angle A$ 内旁切圆的半径 r'（设旁切圆为 O'），由

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABO'}+S_{\triangle ACO'}-S_{\triangle BOC'}$$
$$=\frac{1}{2}(c+b-a)r'=(P-a)r'$$

得　　$r'=\sqrt{\frac{P(P-b)(P-c)}{P-a}}$

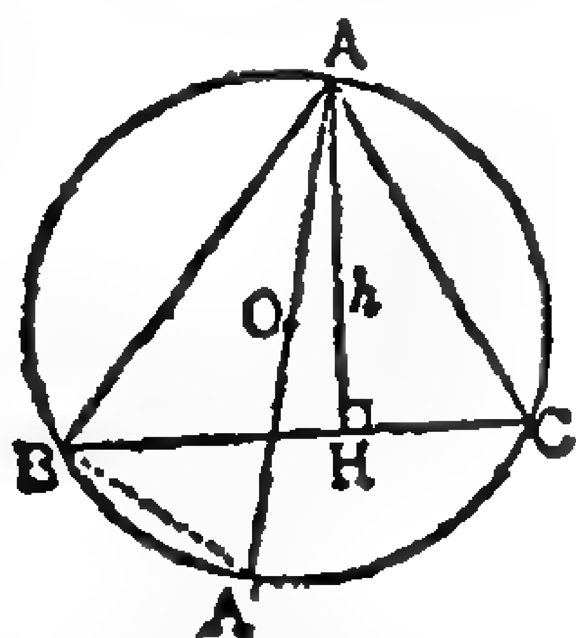
同理，若在 $\angle B$、$\angle C$ 内的旁切圆半径分别为 r''、r'''，则

$$r''=\sqrt{\frac{P(P-c)(P-a)}{P-b}},$$

$$r'''=\sqrt{\frac{P(P-a)(P-b)}{P-c}}.$$

977. 设三角形 ABC 三边定长为 a、b、c，其外接圆的半径为 R，面积为 S，BC 上的高为 h，则

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{bc}{2h}.$$



解 过 A 作直径 AA'，则

$$\angle ABA'=\angle R=\angle AHC,\ \angle C=\angle AA'B,$$

$\therefore$ $\triangle ABA'\backsim\triangle AHC$（两角相等），

$$AB:AA'=AH:AC,$$

$$AB\cdot AC=AA'\cdot AH,$$

即 $cb=2R\cdot h$，$\therefore$ $abc=2R\cdot ah=4R\cdot S$.

因此 $$R=\frac{abc}{4S}=\frac{bc}{2h}.$$

978. 若三角形的内切圆半径为 r，三个旁切圆的半径为 r_1、r_2、r_3，则三角形的面积为 $S=\sqrt{r\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3}$.

解 由问题 976 有

$$r=\sqrt{\frac{(P-a)(P-b)(P-c)}{P}},$$

$$r_1=\sqrt{\frac{P(P-b)(P-c)}{P-a}},$$

$$r_2=\sqrt{\frac{P(P-c)(P-a)}{P-b}},$$

$$r_3=\sqrt{\frac{P(P-a)(P-b)}{P-c}}.$$

将四式相乘得

$r\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3=P(P-a)(P-b)(P-c)=S^2$（问题 975）.

$$\therefore\ S=\sqrt{r\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3}.$$

979. 设三角形的内切圆及旁切圆的半径分别为 r、r_1、r_2、r_3，则

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3},$$

$$rr_1=(P-b)(P-c).$$

解 因为 $S=rP=r_1(P-a)=r_2(P-b)=r_3(P-c)$（问题 976），

$$\therefore\ \frac{1}{r}=\frac{P}{S},\ \frac{1}{r_1}=\frac{P-a}{S},$$

$$\frac{1}{r_2}=\frac{P-b}{S},\ \frac{1}{r_3}=\frac{P-c}{S}.$$

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{P-a+P-b+P-c}{S}$$

$$=\frac{3P-a-b-c}{S}.$$

$\because$ $2P=a+b+c$，$\therefore$ $3P-a-b-c=P$，

故 $$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{P}{S}.$$

因此 $$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}.$$

其次 $$r=\frac{S}{P},\ r_1=\frac{S}{P-Q},$$

$$\therefore\ rr_1=\frac{S^2}{P(P-a)}$$

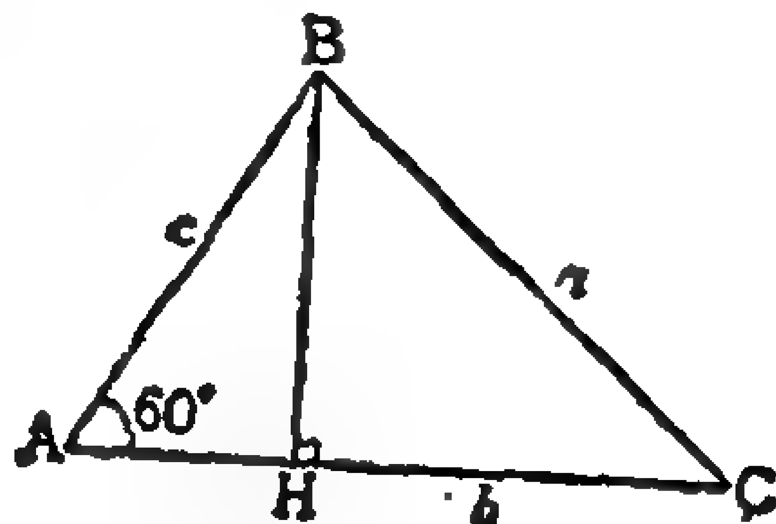
$$=\frac{P(P-a)(P-b)(P-c)}{P(P-a)}$$

$$=(P-b)(P-c).$$

980. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 为 60°，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，则

$$(a+b+c)(b+c-a)=3bc.$$

解 由 B 作 AC 的垂线 BH，则



$$AH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}c,$$

$$CH=b-\frac{1}{2}c,\quad BH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\because\ BC^2=CH^2+BH^2,$$

$$\therefore\ a^2=\left(b-\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2$$

即 $$a^2=b^2+\frac{c^2}{4}-bc+\frac{3}{4}c^2.$$

$$a^2-b^2-c^2+bc=0,$$

$$b^2+c^2+2bc-a^2-3bc=0,$$

即 $$(b+c)^2-a^2=3bc.$$

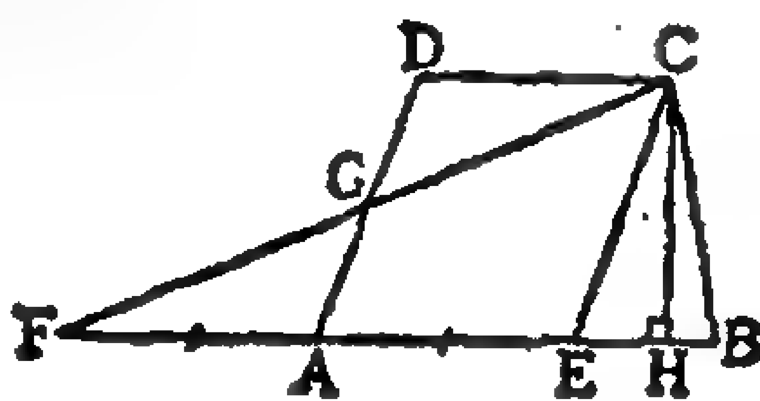
故 $$(a+b+c)(b+c-a)=3bc.$$

981. 设梯形的边为 a、b、c、d（a、c 为底），面积为 S，则

$$S=\frac{1}{4}\times\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(b+d+a-c)(b+d+c-a)}$$

$$\times\sqrt{(a-c+b-d)(a-c+d-b)}.$$

解 如图，设 $CE\parallel DA$，$EA=AF$，



则 $\triangle CDG \cong \triangle FAG$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $= S_{\triangle CFB}$,

$$\frac{\text{四边形 } ABCD \text{ 的面积}}{S_{\triangle CEB}} = \frac{S_{\triangle CFB}}{S_{\triangle CEB}}.$$

因为 $S_{\triangle CFB} = \frac{1}{2} FB \cdot CH$ (CH 为高),

$$S_{\triangle CEB} = \frac{1}{2} EB \cdot CH.$$

$$\therefore \frac{\text{四边形 } ABCD \text{ 的面积}}{S_{\triangle CEB}} = \frac{FB}{EB} = \frac{a+c}{a-c},$$

即 四边形 $ABCD$ 的面积 $= \frac{a+c}{a-c} \times S_{\triangle CEB}$.

又 $\triangle CEB$ 的三边为 $a-c$、b、d, 根据海伦公式(问题 **975**)的计算得 $\triangle CEB$ 的面积是

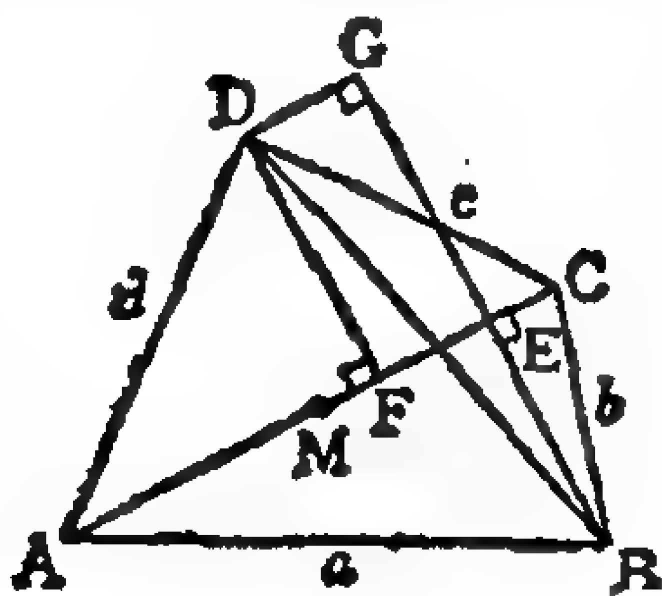
$$\frac{1}{4}\sqrt{(b+d+a-c)(b+d+c-a)} \times \sqrt{(a-c+b-d)(a-c+d-b)}$$

将它代入上式即可证明本题.

982. 设四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 及对角线 AC、BD 依次为 a、b、c、d 及 m、n, 则其面积 S 为

$$\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)} \times \sqrt{(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)}.$$

解 由 B、D 向对角线 AC 作垂线 BE、DF, AC 的中点为 M, 若由 D 向 BE 的延长线作垂线 DG, 则



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE,$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DF.$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积

$$= \frac{1}{2} AC(BE+DF) = \frac{1}{2} m \cdot BG.$$

若 $a>b$, $d>c$, 则

$$a^2-b^2 = AE^2-CE^2 = 2AC \cdot ME,$$
$$d^2-c^2 = AF^2-FC^2 = 2AC \cdot MF.$$

$$\therefore a^2-b^2+c^2-d^2 = 2AC \cdot (ME-MF) = 2AC \cdot EF = 2m \cdot EF.$$

上式两边分别加上 $2m \cdot n$ 及由 $2mn$ 再减去此等式, 得

$$2m \cdot n+a^2-b^2+c^2-d^2 = 2m \cdot n+2mEF = 2m(n+EF)$$

和

$$2m \cdot n-a^2+b^2-c^2+d^2 = 2m \cdot n-2m \cdot EF = 2m(n-EF).$$

两式相乘

$$(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2) \times (2mn-a^2+b^2-c^2+d^2) = 4m^2(n^2-EF^2).$$

可是 $EF = DG$, $BD^2-DG^2 = BG^2$,

$$\therefore n^2-EF^2 = BG^2.$$

两边乘以 $4m^2$, 得

$$4m^2(n^2-EF^2) = 4m^2 \cdot BG^2,$$

$$\therefore (2m \cdot n+a^2-b^2+c^2-d^2) \times (2m \cdot n-a^2+b^2-c^2+d^2) = 4m^2 \cdot BG^2.$$

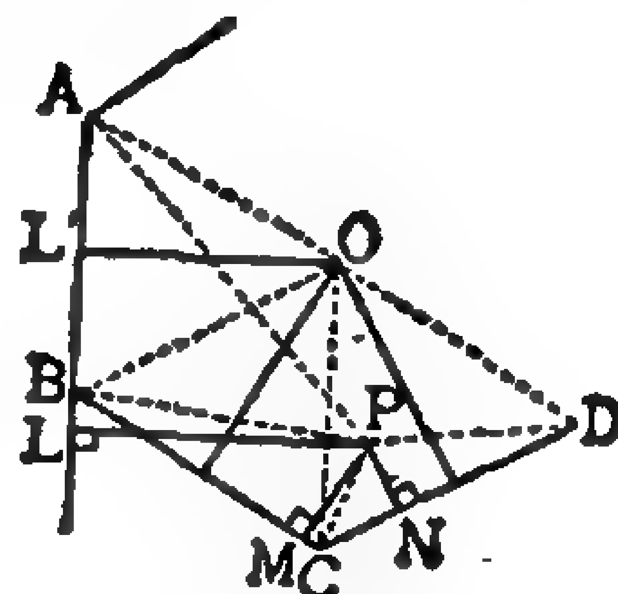
因 $S = \frac{m \cdot BG}{2}$,

故 $S = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-c^2+c^2-a^2)} \times \sqrt{(2m \cdot n-a^2+b^2-c^2+a^2)}$.

9. 多边形的面积

983. 从正 n 边形 $ABCD\cdots$ 内一点 P 向各边作垂线 PL、PM、PN、$\cdots$ 之和一定.

解 设正多边形中心为 O, 内切圆的半径为 r, 面积为 S, 则



$$S = \frac{1}{2} nAB \cdot r.$$

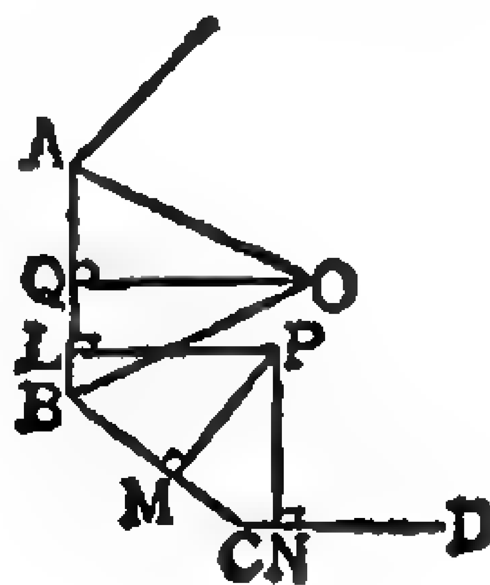
又由 P 向各边作垂线为 PL、PM、PN、$\cdots$

则 $S = \frac{1}{2} AB \cdot PL + \frac{1}{2} BC \cdot PM + \frac{1}{2} CD \cdot PN + \cdots = \frac{1}{2} n \cdot ABr.$

而 $AB = BC = CD = \cdots\cdots$

$$\therefore PL+PM+PN+\cdots = nr = (\text{定值}).$$

984. 从正 n 边形 $ABCD\cdots$ 内一点 P, 分别向各边 AB、BC、CD、$\cdots$ 作垂线 PL、PM、PN、$\cdots$ 再由正多边形中心 O 作 AB 边的垂线 OQ, 则



$$PL+PM+PN+\cdots = n \cdot OQ.$$

解　因正多边形的面积为

$$\frac{n}{2}AB\cdot OQ, \quad ①$$

或 $\frac{1}{2}(PL\cdot AB+PM\cdot BC+PN\cdot CD+\cdots)$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot(PL+PM+PN+\cdots). \quad ②$$

由①、②有

$$\frac{1}{2}AB(PL+PM+PN+\cdots)=\frac{n}{2}AB\cdot OQ,$$

$$\therefore\quad PL+PM+PN+\cdots=n\cdot OQ.$$

985.　在正五边形 $ABCDE$ 中，三角形 BAE 的面积小于正五角形的面积的 $\frac{1}{3}$，大于其 $\frac{1}{4}$。

解　因为 $\triangle BAE\cong\triangle CDE\cong\triangle CGE$,

$\therefore\quad S_{\triangle BAE}<\frac{1}{3}$

$\times$(五边形的面积)。

$\because\quad S_{\triangle BCG}<S_{\triangle BCA}$,

$\therefore\quad S_{\triangle BAE}>\frac{1}{4}$

$\times$(五边形的面积)。

986.　任意五边形各边上的正方形之和的三倍，等于对角线上的正方形之和，再加上连结由不同顶点对角线中点的线段上的正方形的和的四倍。

解　设五边形为 $ABCDE$ 的对角线为 AC、BD、CE、AD、BE。连结 AC、BD 中点的线段为 a，连结 BD、CE 中点的线段为 b，连结 CE、AD 中点的线段为 c，连结 AD、BE 及 BE、AC 中点的线段分别为 d、e，则由问题 **918** 知

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4a^2, \quad ①$$

$$BC^2+CD^2+DE^2+EB^2=BD^2+CE^2+4b^2, \quad ②$$

$$CD^2+DE^2+EA^2+AC^2=CE^2+DA^2+4c^2, \quad ③$$

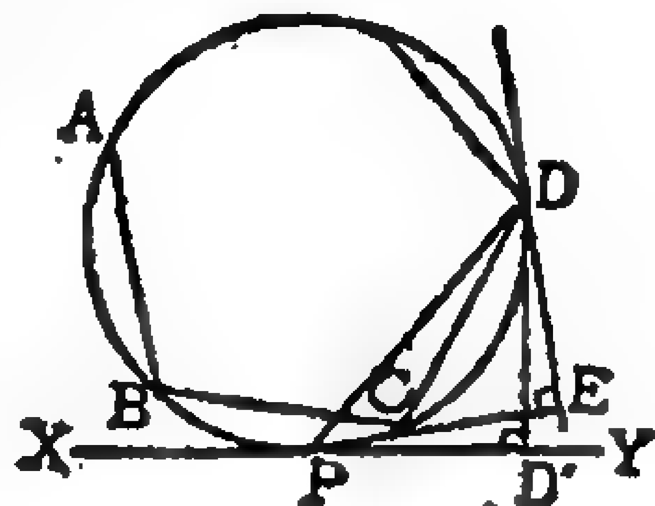
$$DE^2+EA^2+AB^2+BD^2=DA^2+EB^2+4d^2, \quad ④$$

$$EA^2+AB^2+BC^2+CE^2=EB^2+AC^2+4e^2. \quad ⑤$$

①+②+③+④+⑤,

$$3(AB^2+BC^2+CD^2+DE^2+EA^2)=AC^2+BD^2+CE^2+AD^2+BE^2+4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2).$$

987.　由正 n 边形 $ABCD\cdots$ 的各顶点向过外接圆周上一点 P 的切线 XY 所作垂线之和等于半径的 n 倍。

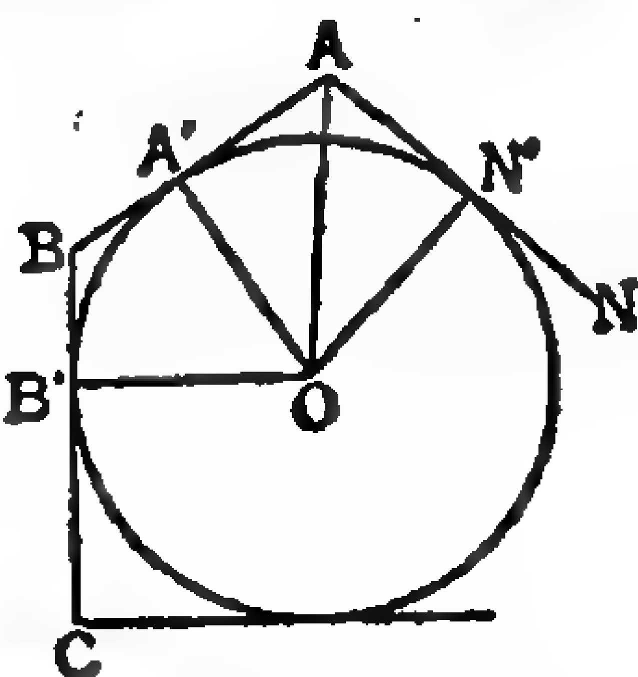


解　因为从 D 作 XY 的垂线 DD' 等于从 P 向过点 D 的切线作垂线 PE，显然有

$$\triangle DPE\cong\triangle PDD'.$$

因此从正多边形各顶点向 XY 所作垂线之和等于从点 P 作各顶点切线的垂线之和，这些切线就构成边数为 n 的外切正多边形，P 成为外切多边形内的一点，根据问题 **984** 知，这些垂线之和等于多边形外接圆半径的 n 倍。

988.　圆外切多边形的面积，等于其多边形的周长和圆的半径为边矩形面积的一半。



解　设圆 O 的外切 n 边形为 $ABC\cdots N$，连结各顶点和圆心 O，则得 $\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\cdots n$ 个三角形。

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}AB\cdot OA',$$

$$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}BC\cdot OB',\ \cdots,$$

$$S_{\triangle ONA}=\frac{1}{2}NA\cdot ON'.$$

因为 $OA'=OB'=\cdots=ON'$（等于圆的半径），所以多边形 $ABCD\cdots N$ 的面积

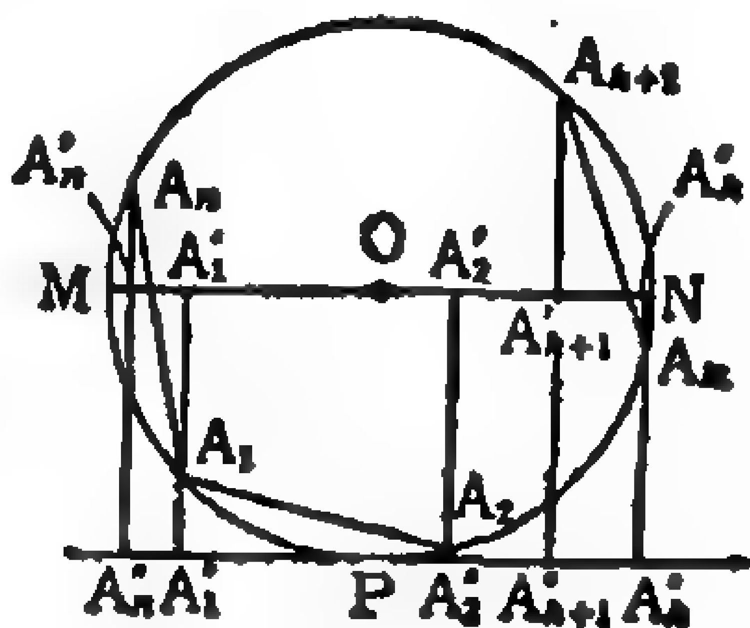
$$=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+\cdots+S_{\triangle ONA}$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot OA'+\frac{1}{2}BC\cdot OB'+\cdots+\frac{1}{2}NA\cdot ON'$$

$$=\frac{1}{2}(AB+BC+\cdots+NA)\cdot OA'.$$

989.　从正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的各顶点

向外接圆的直径 MN 作垂线，则在 MN 一侧的垂线之和等于另一侧垂线之和。



解 由顶点 A_1、A_2、…、A_k、A_{k+1}、…、A_n 作直径 MN 的垂线和平行 MN 的切线 XY 的垂线，垂足为 A'_1、A'_2、…、A'_k、A'_{k+1}、…、A'_n 及 A''_1, A''_2、…、A''_k、A''_{k+1}、…、A''_N，设圆心为 O，切点为 P，由问题 **987** 得

$$A_1A''_1+A_2A''_2+\cdots+A_{k+1}A''_{k+1}+\cdots+A_nA''_n=2PO.$$

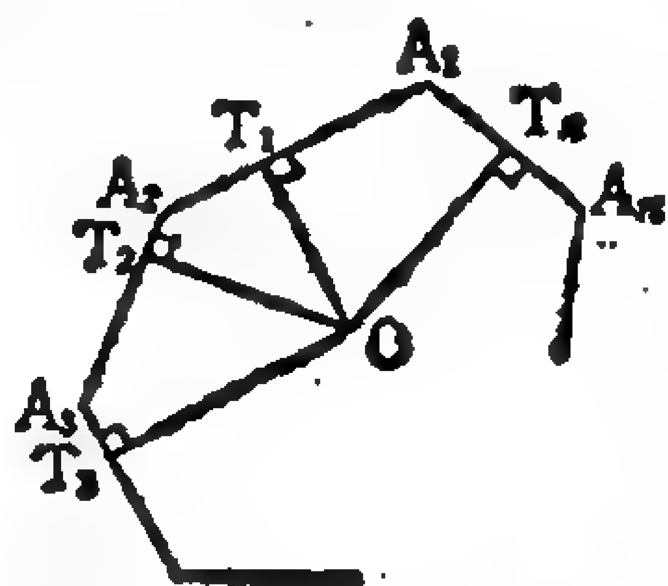
又 $$A'_1A''_1+A'_2A''_2+\cdots+A'_{k+1}A''_{k+1}+\cdots+A'_nA''_n=2PO,$$

$$A_1A''_1<A'_1A''_1,\ A_2A''_2<A'_2A''_2,\ \cdots,$$
$$A_{k+1}A''_{k+1}<A'_{k+1}A''_{k+1}\cdots,$$

两边相减，移项得

$$A_1A'_1+A_2A'_2+\cdots+A_kA'_k=A_{k+1}A'_{k+1}+\cdots+A_nA'_n.$$

990. 从平面上一点作多边形各边的垂线，将各边分为两部分，则其每相隔部分上的正方形的和相等。



解 设多边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，从其平面上一点 O 作各边的垂线，垂足为 T_1、T_2、T_3、…、T_n。先取其中的一份，从 A_1T_1 开始到 A_nT_n。因为

$$A_1T_1^2=OA_1^2-OT_1^2,$$
$$A_2T_2^2=OA_2^2-OT_2^2,\ \cdots,$$
$$A_nT_n^2=OA_n^2-OT_n^2.$$

这些等式之和为

$$(OA_1^2+OA_2^2+\cdots+OA_n^2)-(OT_1^2+OT_2^2+\cdots+OT_n^2).$$

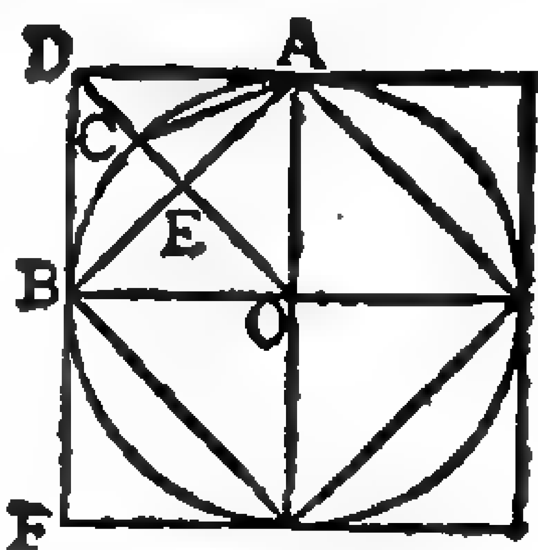
又 $A_2T_1^2=OA_2^2-OT_1^2$, $A_3T_2^2=OA_3^2-OT_2^2$, …, $A_1T_n^2=OA_1^2-OT_n^2$.

这些等式之和与上式相同，所以

$$A_1T_1^2+A_2T_2^2+\cdots+A_nT_n^2=A_2T_1^2+A_3T_2^2+\cdots+A_1T_n^2.$$

991. 圆内接正八边形的面积等于圆内接正方形的一边 AB 和外切正方形的一边 DF 为边矩形的面积。

解 设圆 O 内接正方形的一边为 AB，过点 A、B 分别作圆 O 的切线交点为 D、DO 与 $\widehat{AB}$、弦 AB 的交点分别为 C、E，则 AC 为内接正八边形的一边，而 $AB\perp OD$,

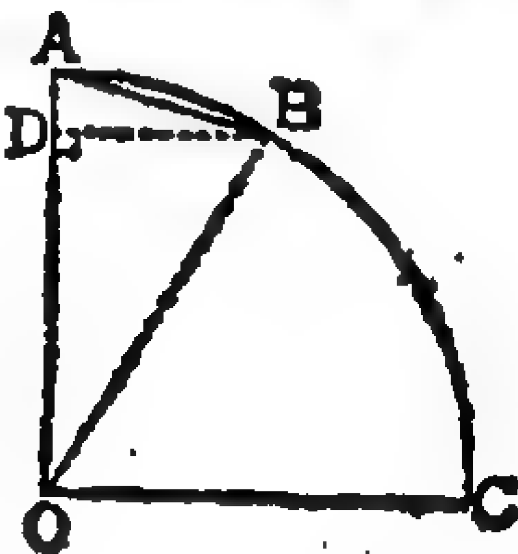


$$\therefore\ S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}OC\cdot AE=\frac{1}{2}\times\frac{DF}{2}\cdot\frac{AB}{2}=\frac{DF\cdot AB}{8}$$

(因为 DF 为外切正方形的一边)。

故 $$\text{内接正八边形}=\frac{DF\cdot AB}{8}\times 8=AB\cdot DF.$$

992. 正十二边形的面积等于外接圆半径 OA 平方的三倍。



解 设正十二边形的一边为 AB，则

$$\angle AOB=360°\div 12=30°,$$

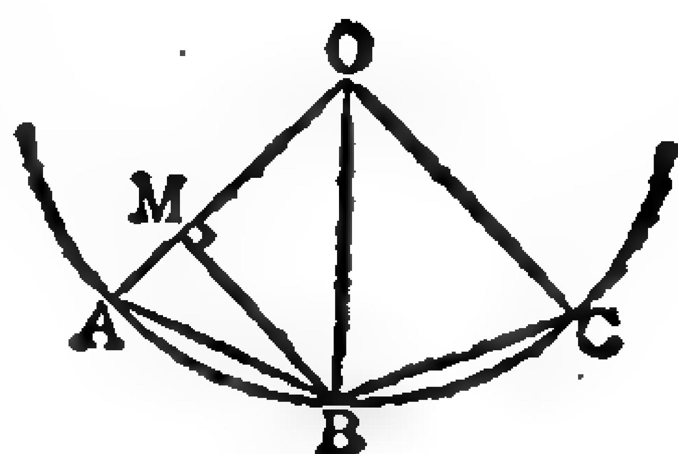
从 B 向 OA 作垂线 BD,

则 $$BD=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}OA.$$

$$\therefore\ S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot BD=\frac{1}{2}OA\cdot\frac{1}{2}OA=\frac{1}{4}OA^2,$$

故正十二边形的面积 $=3\cdot OA^2$.

993. 求半径为 r 的圆内接正八边形的面积。



解 设圆心为 O，内接正八边形为 $ABCD\cdots$，则其面积 S 为三角形 AOB 的八倍。由 B 向 OA 作垂线 BM，因为

$$\angle BOM=\frac{1}{2}\angle R,$$

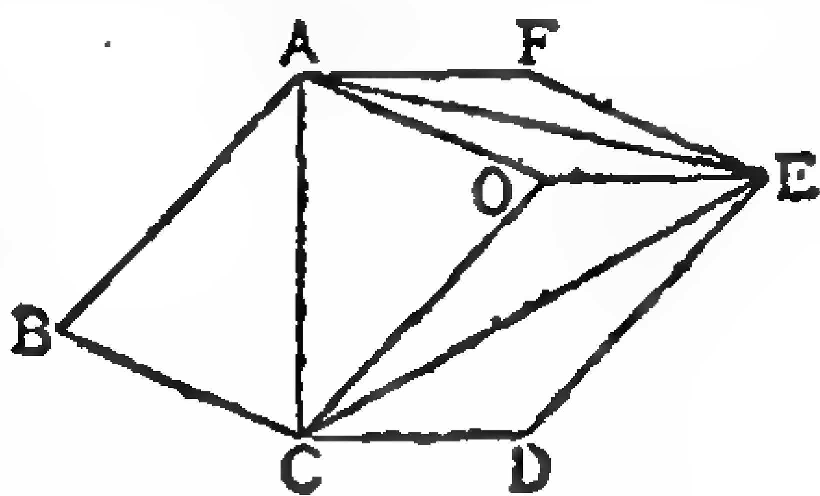
知 $\triangle MOB$ 是等腰直角三角形。

$$\therefore\ BM=\frac{1}{\sqrt{2}}OB=\frac{1}{\sqrt{2}}OA,$$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot BM=\frac{1}{2}OA\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}OA\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}OA^2,$$

$$\therefore\quad S=8\times\frac{1}{2\sqrt{2}}r^2=2\sqrt{2}r^2.$$

994. 在凸六边形中，若各对边相等且平行，连结凸六边形每相隔一个顶点所成的三角形的面积等于原六边形面积的一半。



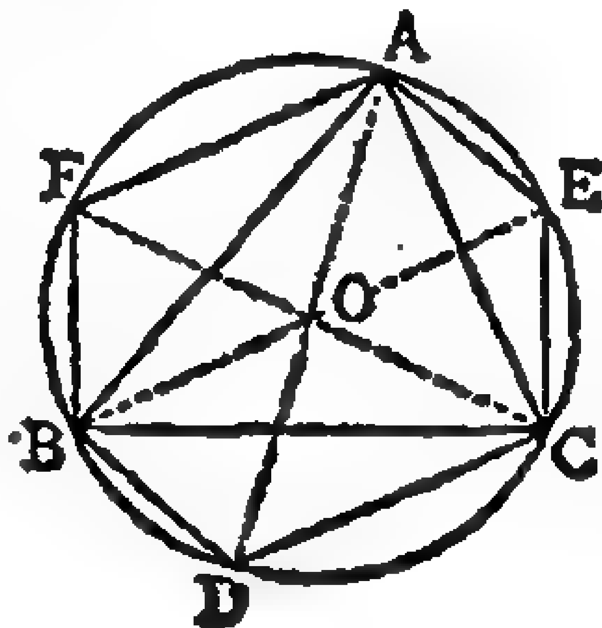
解 设凸六边形为 $ABCDEF$，$AB \perp\!\!\!\!= DE$，$BC \perp\!\!\!\!= EF$，$CD \perp\!\!\!\!= FA$。以 CD、DE 为边作平行四边形 $CDEO$，连结 AO、CO，则 AC、CE、EA 都是平行四边形的对角线。

因此 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOC}$，$S_{\triangle CDE}=S_{\triangle COE}$，

$$S_{\triangle AFE}=S_{\triangle AOE}.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\text{六边形 } ABCDEF \text{ 的面积}.$$

995. 过锐角三角形 ABC 的顶点 A、B、C 作外接圆的三条直径，其另一端分别为 D、E、F，则六边形 $AFBDCE$ 的面积等于三角形 ABC 面积的两倍。



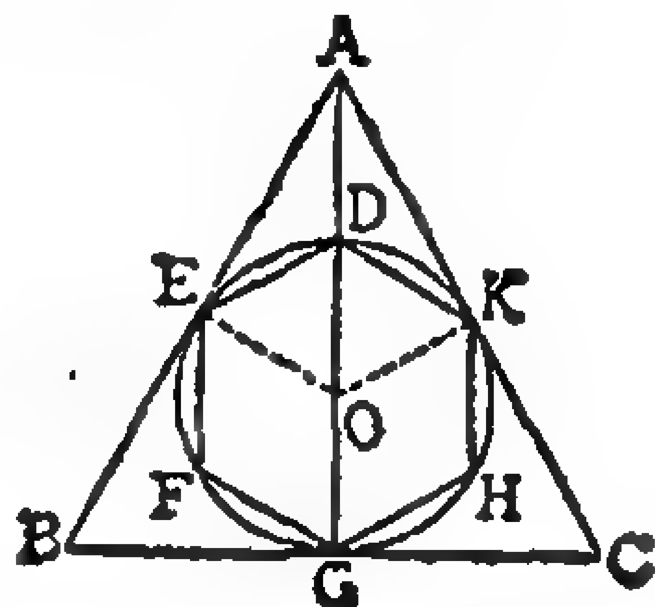
解 设外接圆心为 O，则 $AO=DO$，$FO=CO$。所以 $AF \perp\!\!\!\!= CD$。

同理 $BF \perp\!\!\!\!= CE$，$BD \perp\!\!\!\!= AE$。

根据上题，

六边形 $AFBDCE$ 的面积 $=2S_{\triangle ABC}$。

996. 圆 O 的外切正三角形 ABC 的面积，等于此圆内接正六边形 $DEFGHK$ 面积的两倍。



解 O 是正三角形及正六边形的中心，又 A、D、O、G 在一条直线上，则 O 也是 $\triangle ABC$ 的重心，因而 $OA=2GO=2DO$，

$$\therefore\quad S_{\triangle OKA}=2S_{\triangle OKD}.$$

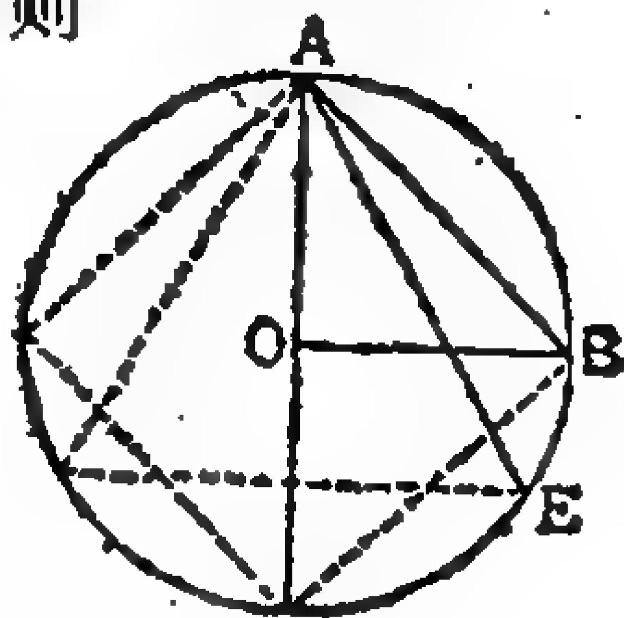
因为 $S_{\triangle OKA}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$，

又 $S_{\triangle OKD}=\frac{1}{6}$(六边形 $DEFGHK$ 的面积)，

$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=2$(六边形 $DEFGHK$ 的面积)。

997. 若 AB、AE 分别为同圆的内接正方形和正三角形的一边，则

$$AB^2=\frac{2}{3}AE^2.$$



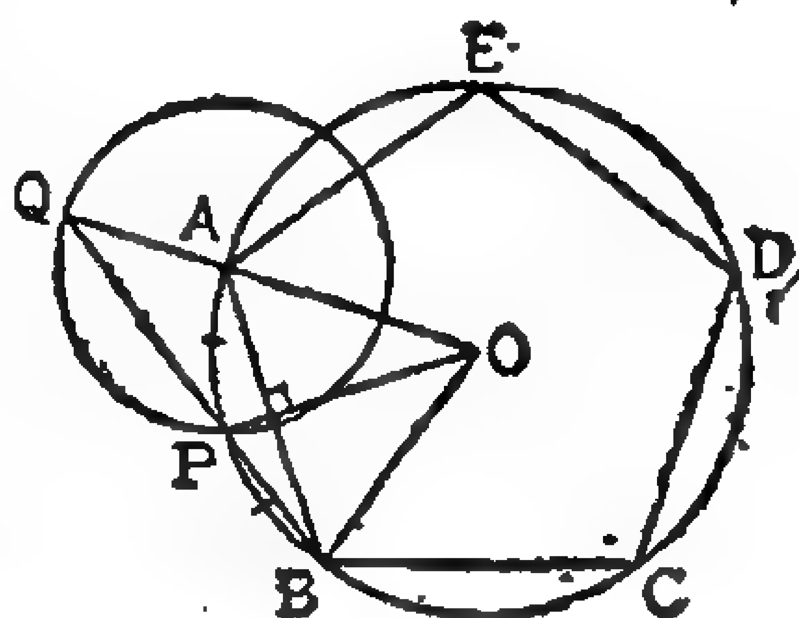
解 设圆的半径为 OB，内接正方形及内接正三角形的一边分别为 AB、AE，

则 $AB=\sqrt{2}OB$，

$AE=\sqrt{3}OB$，

$$\therefore\quad AB^2=\frac{2}{3}AE^2.$$

998. 圆内接正五边形一边上的正方形，等于在同圆的内接正十边形一边上的正方形及半径上的正方形之和。



解 设半径为 r 的圆 O 内接正五边形为 $ABCDE$，弧 AB 的中点为 P，延长 BP、OA 交于点 Q，则 $\angle AOP=36°$。

$\angle OAP=\angle OPA=(180°-36°)\div2=72°$。

$\therefore\quad \angle PAQ=180°-72°=108°$，

又 $\angle PAB=\angle PBA=36°\div2=18°$，

$\therefore\quad \angle APQ=18°+18°=36°$，

$\angle AQP=180°-(108°+36°)=36°$，

因而 $\angle APQ=\angle AQP$，$\therefore\quad AP=AQ$。

以圆心为 A，半径为 AP 作圆，由问题 **931**，

$$BP\cdot BQ=AB^2-AP^2$$

($\because$ B 为圆外一点)。

其次，由 $\angle POB=36°=\angle OQP$ 知，OB 与 $\triangle OPQ$ 的外接圆在点 O 处相切，因此

$BP\cdot BQ=BO^2=r^2$，

$\therefore\quad AB^2-AP^2=r^2$，即 $AB^2=AP^2+r^2$

(AB 表示内接正五边形的一边，AP 表示内接正十边形的一边)。

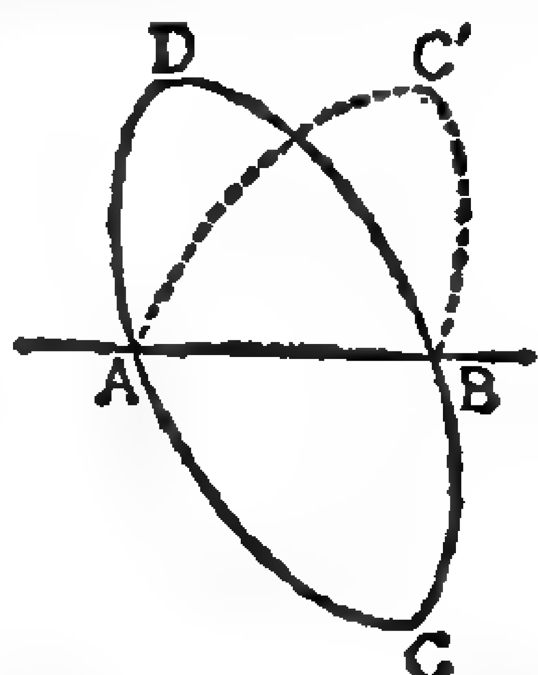
10. 杂题

999. 被定直线 AB 平分的周长一定的图形中，关于 AB 对称的图形面积最大。

解 设周长一定的图形为 $ACBD$，若图形 ACB 与图形 ADB 关于 AB 不对称，设

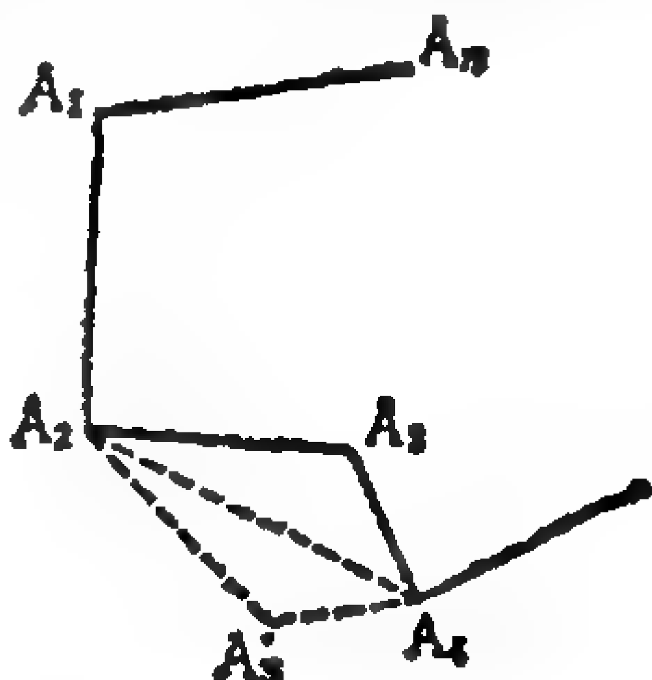
ACB 的面积 $\geqq ADB$ 的面积，

若作图形 ACB 关于 AB 对称的图形 $AC'B$，则图形 $ACBC'$ 的面积 $=2\times$(图形 ACB 的面积) $\geq ACBD$ 的面积，而图形 $ACBC'$ 的周长等于图形 $ACBD$ 的周长一定，且定直线 AB 平分其周长，因此按照题意，关于 AB 对称且平分其周长的图形面积比其它图形的面积大。



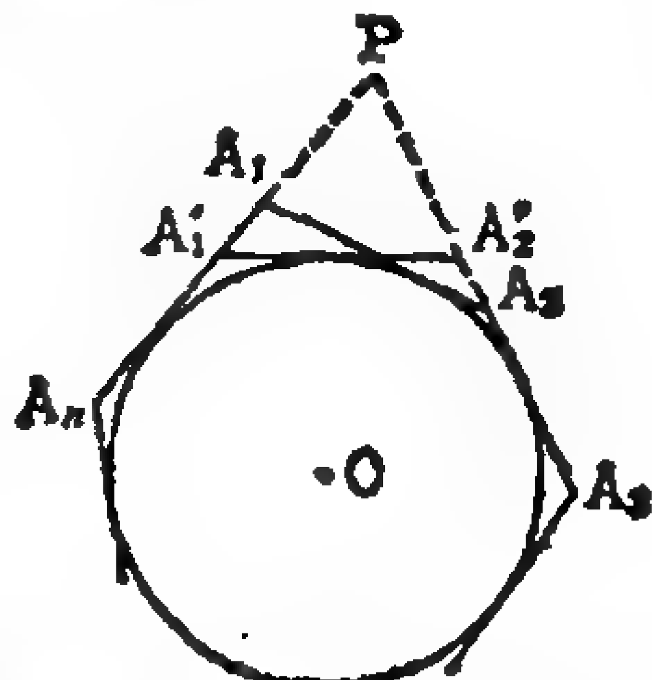
1000. 在周长一定的平面图形中，凸图形的面积比凹图形的面积大。

解 设图形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_n$ 为凹形，其凹形部分为 $A_2A_3A_4$。若作图形 $A_2A_3A_4$ 关于 A_2A_4 对称图形 $A_2A_3'A_4$，则 $A_1A_2A_3'A_4\cdots A_n$ 比原图形大。因此若图形有凹部，将其割除，全部变成凸部，则其面积增大。



1001. 在同圆上边数相同的外切多边形中，面积最小的是正多边形。

解 作圆 O 的外切多边形为 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，其中 $\angle A_1\neq\angle A_2$。如图中作外切多边形 $A_1'A_2'A_3\cdots A_n$，其中 $\angle A_1'=\angle A_2'$。设 A_1A_1'、A_2A_2' 的交点为 P，则 $A_1'A_2'<A_1A_2$(参照问题 2715)，因为 $\triangle OA_1A_2$、$\triangle OA_1'A_2'$ 的高等于圆 O 的半径，所以 $\triangle OA_1A_2>\triangle OA_1'A_2'$。

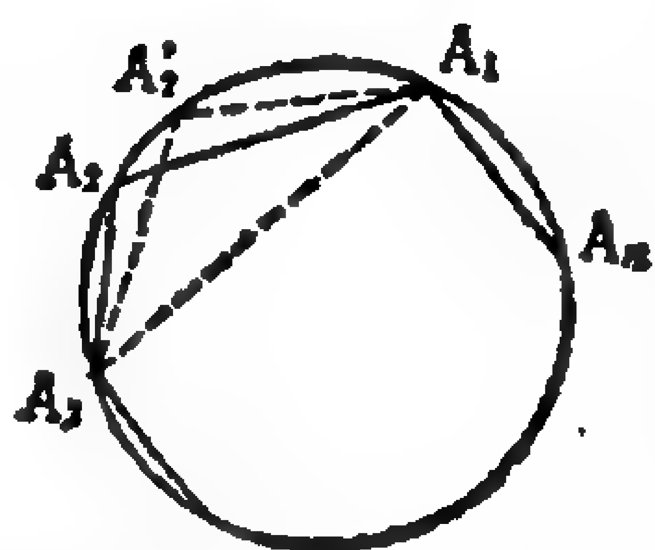


$\therefore$ 多边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$

$>$多边形 $A_1'A_2'A_3\cdots A_n$。

同理，各角相等的多边形面积最小，因此圆外切等角多边形即正多边形的面积最小。

1002. 在圆内接边数相同的多边形中，面积最大的是正多边形。



解 设内接多边形为 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，$A_1A_2\neq A_2A_3$，若 $\overset{\frown}{A_1A_3}$ 的中点为 A_2'，则

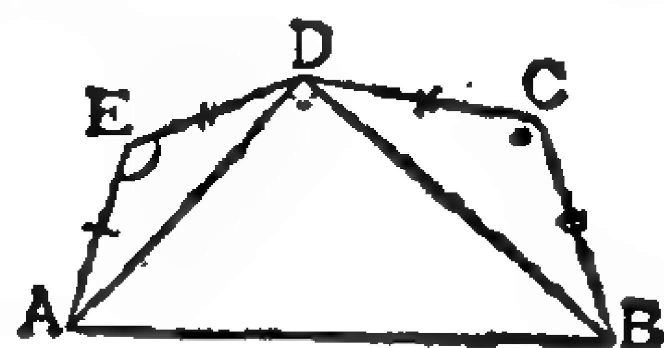
$$\triangle A_1A_2'A_3>\triangle A_1A_2A_3,$$

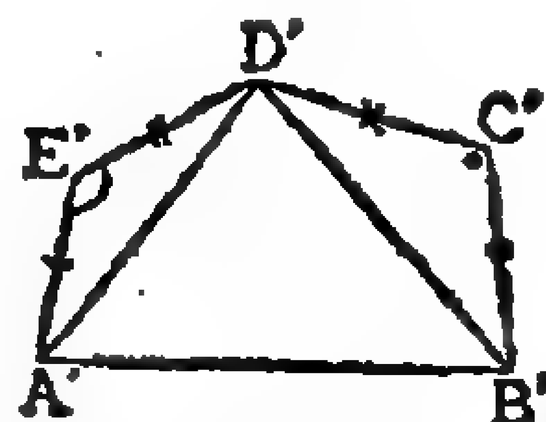
因此

多边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n<$多边形 $A_1A_2'A_3\cdots A_n$，即 $A_1A_2\neq A_2A_3$，若使 $A_1A_2=A_2A_3$ 时，多边形的面积增大。根据相同的理由，当 $A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_nA_1$ 时，多边形的面积最大，因此内接等边多边形即正多边形的面积最大。

1003. 除一边 AB 外，在其他边都定长的凸多边形中，面积最大的是各顶点在以 AB 为直径的半圆周上。

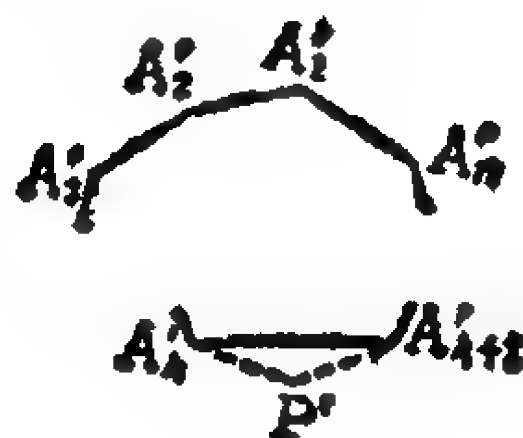
解 在多边形 $ABCDE$ 和 $A'B'C'D'E'$ 中，设 $AE=A'E'$，$ED=E'D'$，$DC=D'C'$，$CB=C'B'$，$AB\neq A'B'$。在 $\angle E=\angle E'$，$\angle C=\angle C'$ 上，设 $\angle ADB=\angle R$，$\angle A'D'B'\neq\angle R$，则在 $\triangle ADB$、$\triangle A'D'B'$ 中 $AD=A'D'$，$DB=D'B'$。因为 $\angle ADB=\angle R$，有 $S_{\triangle ADB}>S_{\triangle A'D'B'}$。又 $\triangle DAE\cong\triangle D'A'E'$，$\triangle DCB\cong\triangle D'C'B'$，所以多边形 $ABCDE>A'B'C'D'E'$，即在多边形 $ABCDE$ 中，顶点 D 不在以 AB 为直径的半圆周上时，即 $\angle ADB$ 不是直角时，AB 以外的边的大小以及 $\angle E$，$\angle C$ 的大小不变，而 AB 的大小变化时，使 $\angle ADB$ 为直角的面积增大。即在适合于本题条件的多边形最大时，D 在以 AB 为直径的半圆周上。同理，E、C 也在此圆周上，也就是各顶点都在以 AB 为直径的半圆周上时，其面积最大。





1004. 在各边长一定的多边形中，面积最大的是圆内接多边形。





解 设 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 为圆内接多边形，$A_1'A_2'A_3'\cdots A_n'$ 不是该圆内接多边形，但 $A_1A_2=A_1'A_2'$，$A_2A_3=A_2'A_3'$，$\cdots$，$A_nA_1=A_n'A_1'$。作过 A_1 的直径 AP，若作 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 和

$\triangle P'A'_kA'_{k+1}$ 全等，则由 $A_1A_2=A'_1A'_2$，$A_2A_3=A'_2A'_3$，…，$A_kP=A'_kP'$，且 A_2、A_3、…、A_k 是在以 AP 为直径的半圆周上，由上题知，多边形 $A_1A_2\cdots A_kP$ 面积 $>A'_1A'_2\cdots A'_kP'$ 面积，同理有多边形 $A_1A_n\cdots A_{k+1}P$ 面积 $>A'_1A'_n\cdots A'_{k+1}P'$ 面积，

∴　多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 面积

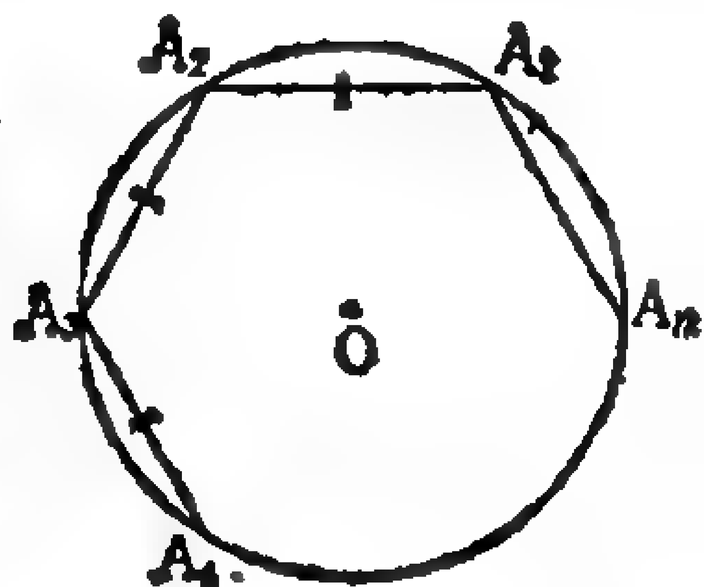
$>$ 多边形 $A'_1A'_2\cdots A'_n$ 面积。

1005.　在周长一定的两个正多边形中，边数越多面积越大。



解　设周长一定的两个正多边形为 $A_1A_2\cdots A_n$，$A'_1A'_2\cdots A_{n+1}$，前者边数为 n，后者边数为 $(n+1)$。若在前者的一边 A_1A_2 上取一点 P 时，可以认为此多边形是由 $A_1PA_2\cdots A_n$ 形成的 $(n+1)$ 边形，但这个多边形不是正多边形，它的周长等于圆内接 $n+1$ 边的正多边形的周长，由上题知，后者比前者的面积大。

1006.　在各边长一定的等边多边形中，面积最大的是正多边形。



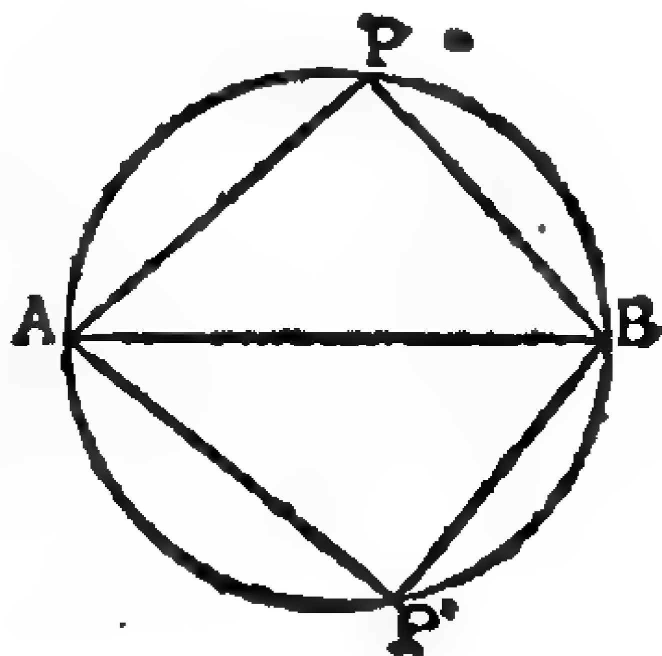
解　由问题 **1004** 知，此多边形为圆内接多边形时，其面积最大，但是圆内接等边多边形是正多边形。

1007.　在周长一定的 n 边多边形中，面积最大的是正多边形。

解　作圆内接 n 边多边形，则此多边形比各边都相等另一个不是圆内接多边形的面积大(问题 **1004**)，而由问题 **1002** 知，在同圆内的内接边数相同的多边形中，正多边形的面积最大。

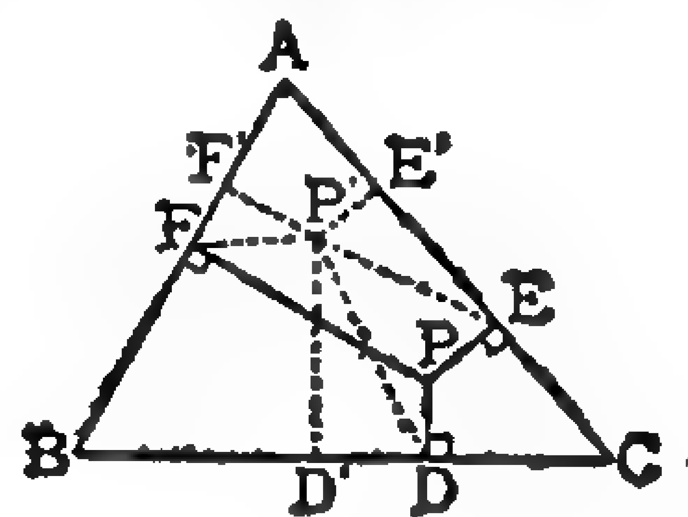
1008.　在周长一定的平面图形中，面积最大的是圆。

解　作直线 AB 等分图形的周长，根据问题 **999** 知，这个图形 $APBP'$ 必须是关于 AB 对称，又设在此图形上任取一点 P，根据问题 **1003**，当 P 在以 AB 为直径的圆周上时，$\triangle APB$ 的面积最大。



若在 AB 的另一侧任取点 P' 时，则 P' 在以 AB 为直径的圆周上时，$\triangle P'AB$ 的面积最大，即要使这个图形的面积最大，图形上的点都在以 AB 为直径的圆周上。因此所求的最大面积的图形是圆。

1009.　在 $\triangle ABC$ 中，延长 BC 至点 D，使 $CD=BC$，若 BC 的中点为 E，$AD=2AE$，则 $AB=BC$。



解　因 $BC=CD$，

所以　$AD^2+AB^2=2AC^2+2BC^2$。　①

因 $BE=EC$，所以

$AC^2+AB^2=2AE^2+2BE^2$。

∵　$2AE=AD$，$2BE=BC$，

$$AC^2+AB^2=\frac{1}{2}AD^2+\frac{1}{2}BC^2,$$

∴　$AD^2+BC^2=2AC^2+2AB^2$。　②

由①、②得　$3AB^2=3BC^2$，

∴　$AB=BC$，

1010.　从 $\triangle ABC$ 内一点 P 向 BC、CA、AB 作垂线 PD、PE、PF，又在三角形内另取一点 P'，则

$PD\cdot BC+PE\cdot CA+PF\cdot AB<P'D\cdot BC+P'E\cdot CA+P'F\cdot AB$。

解　若由 P' 向三条边作垂线 $P'D'$、$P'E'$、$P'F'$，

则　$P'D'\cdot BC+P'E'\cdot CA+P'F'\cdot AB$

$=PD\cdot BC+PE\cdot CA+PF\cdot AB$

$=2S_{\triangle ABC}$。

∵　$P'D\geqq P'D'$，$P'E\geqq P'E'$，$P'F\geqq P'F'$ (等号全部不成立)。

∴　$P'D\cdot BC+P'E\cdot CA+P'F\cdot AB$

$>PD\cdot BC+PE\cdot CA+PF\cdot AB$。

1011.　弓形 ACB 的面积等于弧 AB 与其两倍弧 ABD 所对弦的一半之差乘以半径

OB之积的一半。

解 弓形ACB=扇形$OAB-\triangle OAB$，而扇形

OAB面积$=\frac{1}{2}\cdot\overset{\frown}{ACB}\cdot OB$.

设AD和OB的交点为E，则$AE\perp OB$，且

$$AE=\frac{1}{2}AD.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}OB\cdot AE=\frac{1}{4}OB\cdot AD,$$

$\therefore$ 弓形ACB面积$=\frac{1}{2}\cdot\overset{\frown}{ACB}\cdot OB$

$$-\frac{1}{4}OB\cdot AD=\frac{1}{2}OB\cdot\left(\overset{\frown}{ACB}-\frac{1}{2}AD\right).$$

1012. 设以等腰直角三角形ABC的直角顶点A为圆心，作弓形BDC，以BC中点E为圆心，作半圆BAC，则

弓形BDC的面积=弓形BFA的面积+弓形AGC的面积。

解 因为弓形BDC的面积

$=\frac{1}{4}$圆$ABDC$的面积

$-\triangle ABC$的面积，

因为$AB^2=2AE^2$，所以

$\frac{1}{4}$圆$ABDC$的面积

$=2\left(\frac{1}{4}\text{圆}EAFB\text{的面积}\right)$，

$\because$ 弓形BDC的面积

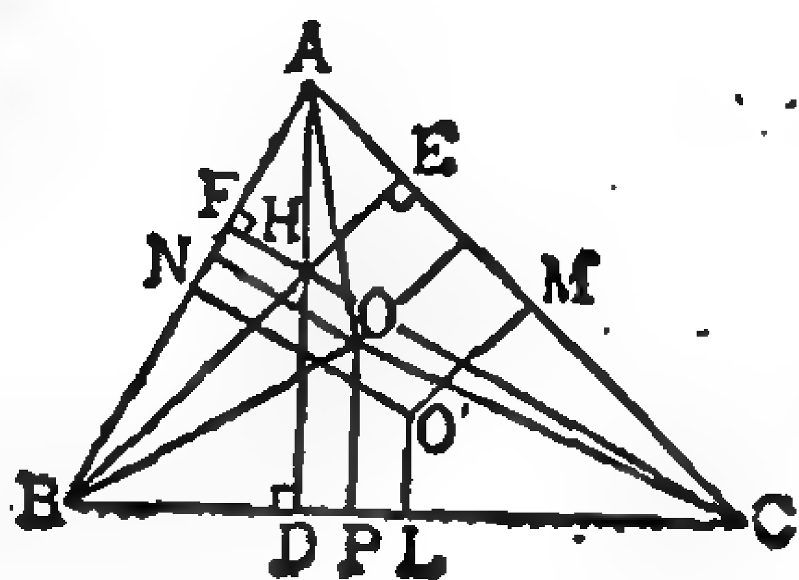
$=2\left(\frac{1}{4}\text{圆}EAFB\text{的面积}\right)-2S_{\triangle EAB}$

$=2$弓形BFA的面积

$=$弓形BFA的面积

$+$弓形AGC的面积。

1013. 设三角形ABC的三条垂线的垂足为D、E、F，各边的中点为L、M、N，则在$DL\cdot BC$、$EM\cdot AC$、$FN\cdot AB$中，两个之和与另一个相等。



解 设重心为H，外心为O'，若由HO'的中点O作BC的垂线OP，则

$$CP^2\sim BP^2=2BC\cdot PL.$$

$$\because\quad 2PL=DL,$$

$$\therefore\quad DL\cdot BC=PC^2\sim BP^2=OC^2\sim OB^2.$$

同理，$\quad EM\cdot AC=OC^2\sim OA^2,$

$\quad FN\cdot AB=OB^2\sim OA^2,$

其中设 $\quad OC>OB>OA,$

则 $\quad DL\cdot BC+FN\cdot AB=EM\cdot AC.$

1014. 由定点P作定圆O的任意割线PAB，过P和A，在点A处作圆O的切圆，过P和B，在点B处作圆O的切圆，设此两个圆的第二个交点为Q，则PQ^2+QO^2是定值。

解 在图中设过P、A的圆心为C，过P、B的圆心为D，则PQ是两圆C、D的公共弦，因此CD垂直平分PQ。 ①

又$BD\parallel PC$，$CO\parallel PD$，所以$PDOC$为平行四边形。设PO、CD的交点为S，则$PC\underline{\parallel}OD$以及

$$PS=SO. \qquad ②$$

由Q作PC的平行线与DC交于点E，则

$$QE\underline{\parallel}PC.$$

由此式与②得

$$QE\underline{\parallel}OD. \qquad ③$$

由③知，$QEDO$为平行四边形，$QO\parallel ED$，即$QO\parallel CD$。由①知CD垂直平分PQ，所以QO垂直PQ，$\angle PQO=\angle R$，因为P、O是定点，所以Q在以定线段PO为直径的圆周上。

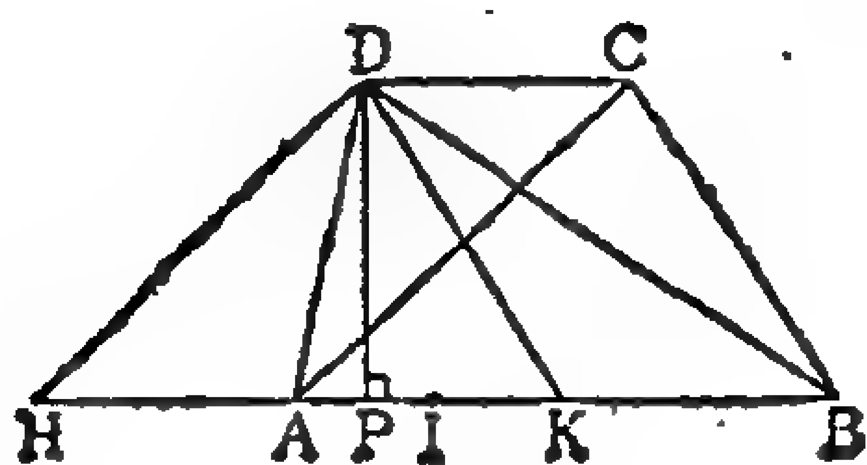
$$\therefore\quad SP=SQ=SO.$$

因而 $\quad PQ^2+QO^2=PO^2$(定值)。

1015. 在梯形$ABCD$上，设$AB\parallel DC$，$AB=a$，$DC=b$，$BC=c$，$DA=d$，$BD=e$，$AC=f$，则

$$\frac{e^2-f^2}{c^2-d^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

解 设过D作BC的平行线与AB的交点为K，从D作AC的平行线与BA的延长线交于点H。由D作AB的垂线DP，若HB



的中点为 I,

则　$BD^2-DH^2=2HB\cdot IP$(问题 894),

　　$DK^2-DA^2=2AK\cdot IP$(问题 894),

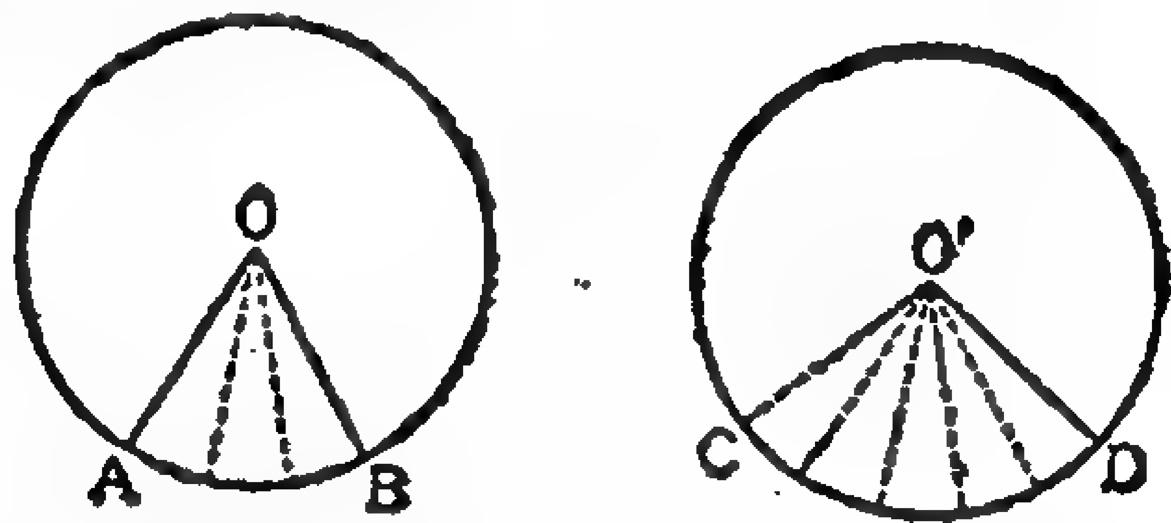
$$\therefore\quad \frac{BD^2-DH^2}{DK^2-DA^2}=\frac{HB}{AK}=\frac{AB+DC}{AB-DC},$$

$$\therefore\quad \frac{e^2-f^2}{c^2-d^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

第四章　比　　例

1. 基本性质

1016. 在同圆或等圆中，圆心角的比等于它们所对弧的比。



解　设在相等的两个圆 O、O' 中，圆心角 AOB、$CO'D$ 分别等于一个定角的 m 倍(图中 3 倍)，n 倍(图中 5 倍)，则

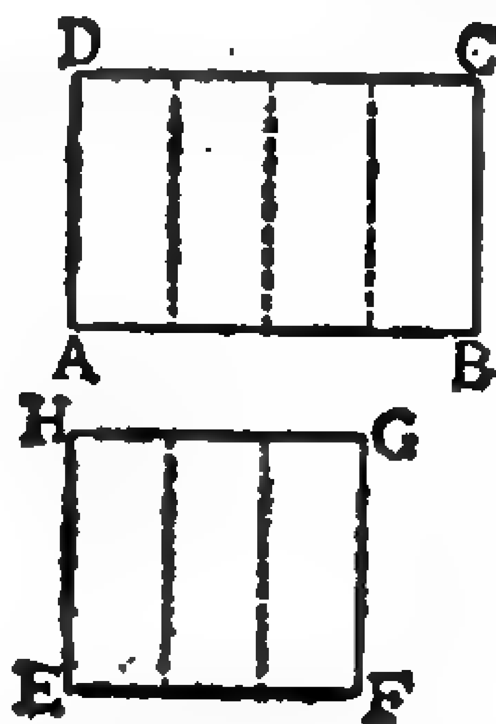
$$\frac{\angle AOB}{\angle CO'D}=\frac{m}{n};$$

其次，把 $\angle AOB$ 分成 m 等分，$\angle CO'D$ 分成 n 等分，则它们所对的弧也相应的被分成 m 等分(3 等分)和 n 等分(5 等分)。

$$\therefore\quad \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}}=\frac{m}{n}.$$

由此可得，$$\frac{\angle AOB}{\angle CO'D}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}}.$$

1017. 高相等的两个矩形的面积的比等于它们底边长的比。



解　设在矩形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 中 $AD=EH$.

$\because$　矩形 $ABCD$ 的面积 $=AB\cdot AD$,

　矩形 $EFGH$ 的面积 $=EF\cdot EH$,

而　　$AD=EH$.

$$\therefore\quad \frac{\text{矩形 } ABCD \text{ 的面积}}{\text{矩形 } EFGH \text{ 的面积}}=\frac{AB\cdot AD}{EF\cdot EH}=\frac{AB}{EF}.$$

1018. 高相等(或底边相等)的平行四边形的面积与它们的底边长(或高)成比例。

解　在平行四边形 $ABCD$、$A_1B_1C_1D_1$ 和 $A'B'C'D'$ 中，设第一、第二两个平行四边形的高都等于 h，第一、第三两个平行四边形的底边 BC、$B'C'$ 相等。

于是，　$\square ABCD$ 的面积 $=BC\cdot h$,

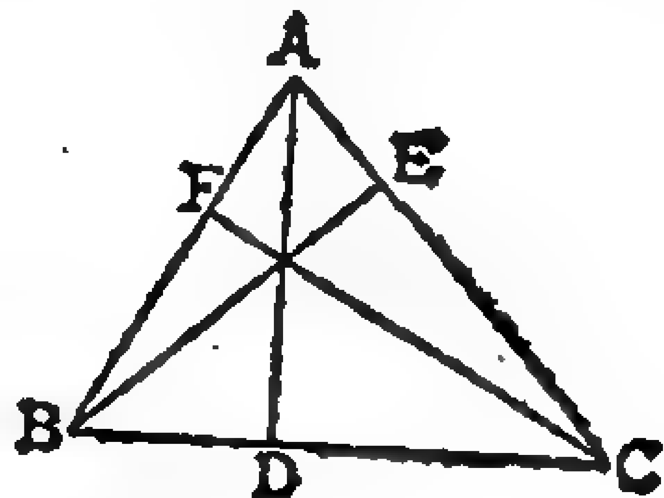
　　$\square A_1B_1C_1D_1$ 的面积 $=B_1C_1\cdot h$.

从而得出，

$$\frac{\square ABCD \text{ 的面积}}{\square A_1B_1C_1D_1 \text{ 的面积}}=\frac{BC\cdot h}{B_1C_1\cdot h}=\frac{BC}{B_1C_1},$$

或者 $$\frac{\square ABCD \text{ 的面积}}{\square A'B'C'D' \text{ 的面积}}=\frac{BC\cdot h}{B'C'\cdot h'}=\frac{h}{h'}.$$

1019. 在三角形中，两边的长与它们的对应高成反比例。



解　在 $\triangle ABC$ 中，设三条高分别为 AD、BE、CF，则

$$\triangle ABC \text{ 的面积}=\frac{1}{2}CF\cdot AB=\frac{1}{2}BE\cdot AC.$$

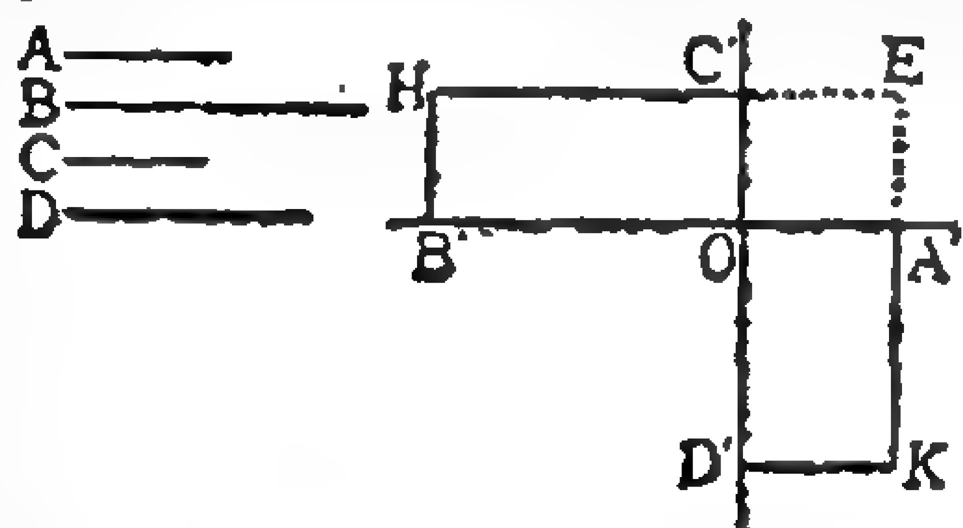
$$\therefore\quad CF\cdot AB=BE\cdot AC.$$

$$\therefore\quad AB:AC=BE:CF.$$

同理可得，　$AB:BC=AD:CF$.

这就是两边的长与它们对应的高成反比例.

1020. 设四条线段成比例时，用外项两条线段为边作成矩形的面积等于用内项两条线段为边作成矩形的面积.



解 设有四条线段 A、B、C、D 成比例,即

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

设两条直线 $A'B'$、$C'D'$ 垂直相交于点 O,且 $A'O=A$, $OB'=B$, $OC'=C$, $OD'=D$,作矩形 $HB'OC'$, $OA'EC'$、$OD'KA'$. 因为矩形 $OA'EC'$ 和矩形 $HB'OC'$ 它们的高相等,所以

$$\frac{\text{矩形 }OA'EC'\text{ 的面积}}{\text{矩形 }HB'OC'\text{ 的面积}}=\frac{A'O}{OB'}=\frac{A}{B}.$$

同理可得,

$$\frac{\text{矩形 }OA'EC'\text{ 的面积}}{\text{矩形 }OD'KA'\text{ 的面积}}=\frac{C'O}{OD'}=\frac{C}{D}.$$

而 $$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

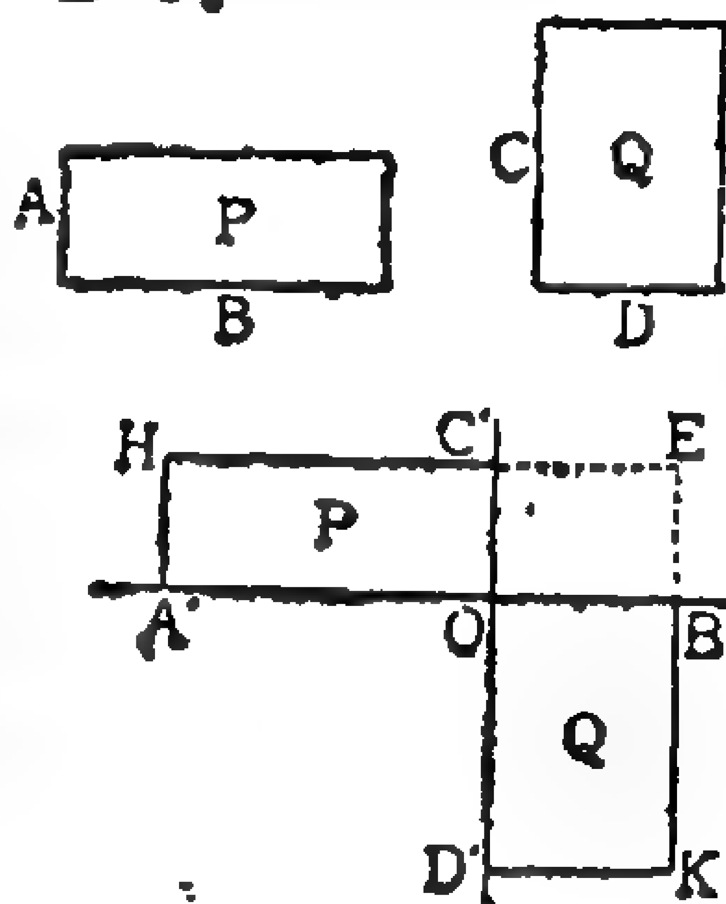
$$\therefore\ \frac{\text{矩形 }OA'EC'\text{ 的面积}}{\text{矩形 }HB'OC'\text{ 的面积}}=\frac{\text{矩形 }OA'EC'\text{ 的面积}}{\text{矩形 }OD'KA'\text{ 的面积}}.$$

$\therefore$ 矩形 $HB'OC'$ 的面积 $=$矩形 $OD'KA'$ 的面积.

$$\therefore\ OB'\cdot OC'=OA'\cdot OD',$$

即 $$A\cdot D=B\cdot C.$$

1021. 设两个矩形的面积相等，则它们的两条邻边的四条线段成比例. 其中一个矩形的两条邻边是外项，另一个的两条邻边是内项.



解 设矩形 P、Q 的两条邻边分别为 A 与 B、C 与 D, 且

矩形 P 的面积$=$矩形 Q 的面积.

如果在两条垂直相交的直线 $A'B'$、$C'D'$ 上作矩形 $HA'OC'$、$OD'KB'$, 使它们分别等于矩形 P、Q, 那么

$$\frac{\text{矩形 }OB'EC'\text{ 的面积}}{\text{矩形 }HA'OC'\text{ 的面积}}=\frac{OB'}{OA'}=\frac{D}{B},$$

$$\frac{\text{矩形 }OB'EC'\text{ 的面积}}{\text{矩形 }OD'KB'\text{ 的面积}}=\frac{OC'}{OD'}=\frac{A}{C}.$$

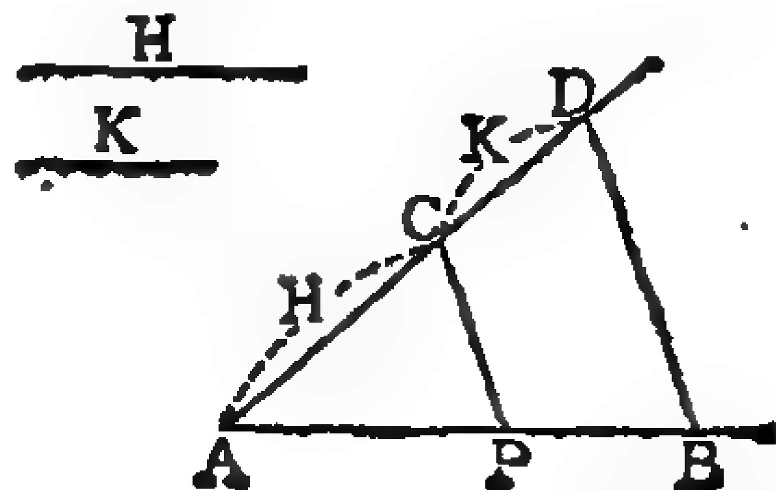
而 矩形 $HA'OC'$ 的面积

$=$矩形 $OD'KB'$ 的面积.

$$\therefore\ \frac{A}{C}=\frac{D}{B}.$$

2. 平行线的比例线段

1022. 分一线段成定比的内分点或外分点都是唯一的. 但在外分一线段时，比值不能为1.



解 设给定线段 AB, H、K 为给出定比的两条线段.

(1) 内分情况:

从 A 引任意直线 AD,在AD上取 $AC=H$, $CD=K$, 连结 DB. 又从 C 引直线平行于 DB 且与 AB 相交于点 P, 则

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AC}{CD}=\frac{H}{K}.$$

所以点 P 是分线段 AB 为定比 $H:K$ 的内分点.

其次设除点 P 以外,还有一点 P' 内分 AB 成定比 $H:K$, 即

$$\frac{AP'}{P'B}=\frac{H}{K}=\frac{AP}{PB}.$$

$$\therefore\ \frac{AP'}{AP'+P'B}=\frac{AP}{AP+PB},$$

即 $\dfrac{AP'}{AB}=\dfrac{AP}{AB}$. $\therefore$ $AP'=AP$,

从而得出,除点 P 以外,不可能还有一点 P' 内分 AB 成定比 $H:K$.

所以分 AB 成定比的内分点是唯一的.

(2) 外分情况:

在任意的直线 AC 上，取 $AC=H$, $CD=K$, 连结 DB. 又从 C 作直线平行于 DB 与 AB 的延长线相交于点 Q, 则

$$\frac{AQ}{BQ}=\frac{AC}{DC}=\frac{H}{K}.$$

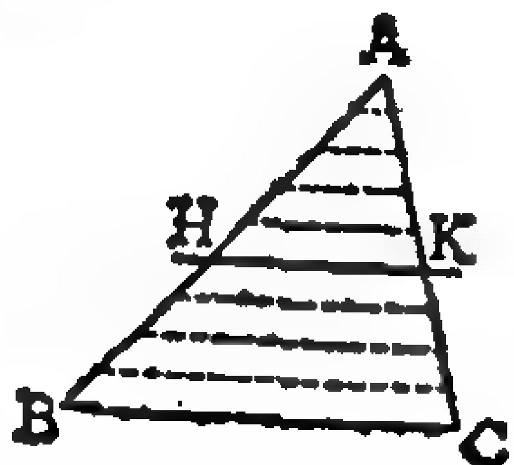
所以，点 Q 是外分 AB 成定比 $H:K$ 的点。用(1)里的证法可以得出，除外分点 Q 以外还有点 Q' 外分 AB 成定比 $H:K$ 是不可能的。所以分 AB 成定比的外分点也是唯一的。

注1 定比 $H:K$ 中，如果 $H>K$，那么内分点 P 靠近点 B，外分点 Q 在 AB 的延长线上；如果 $H<K$，那么点 P 靠近点 A，Q 则在 BA 的延长线上；如果 $H=K$ 那么内分点 P 就是 AB 的中点，但这时，不存在外分点。

2 当 P 是内分 AB 成定比的点，Q 是外分 AB 成同一定比的点时，则称点 P 和点 Q 把线段 AB 调和分割，而四点 A、B、P、Q 叫做调和点列，点 P 和点 Q 叫做点 A 和点 B 的调和分割的共轭点(简称调和共轭点)。



1023. 平行于三角形底边的直线内分或外分其他两边成相等的比。



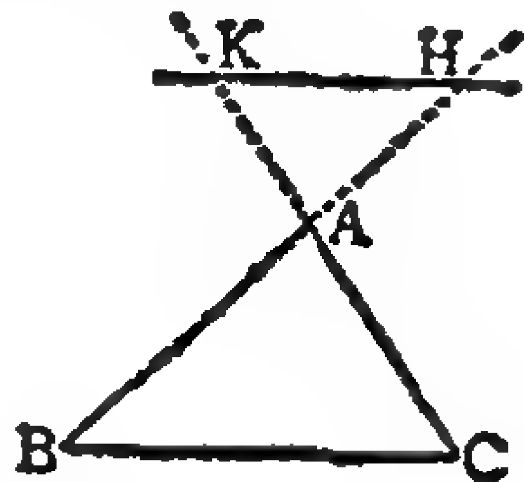
解 在 $\triangle ABC$ 中，设 HK 是平行于底边 BC 的直线。

首先，设 $AH:HB=p:q$ (其中 p、q 为正整数)，即把 AB 分成 $(p+q)$ 个等分时，AH 分成 p 等分，HB 分成 q 等分。过每个分点引平行于 BC 的直线，因为这些分点把 AB 分成 $(p+q)$ 等分，所以所引的平行线也把 AC 分成 $(p+q)$ 等分，也就是把 AK 分成 p 等分，把 KC 分成 q 等分。从而得出，

$$AK:KC=p:q.$$

而 $$AH:HB=p:q.$$

$$\therefore\ AH:HB=AK:KC.$$



注1 当点 H、点 K 分别在 BA、CA 的延长线上时，用同样方法可以证得上面这个定理也成立。

2 上面只对

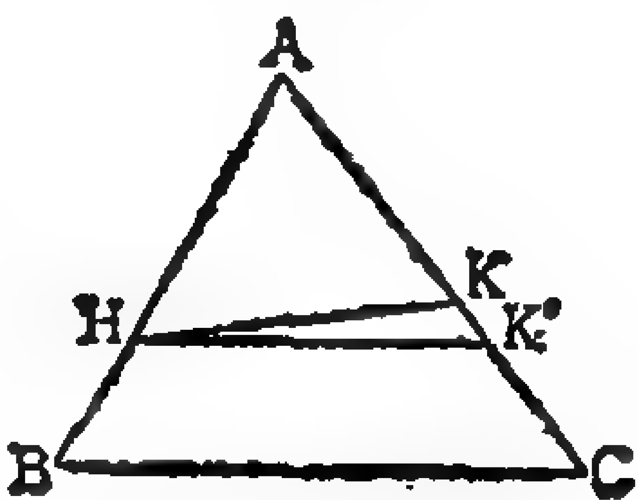
$$AH:HB=p:q,$$

且 p、q 都是正整数的情况作了证明，但对于 p、q 都是有理数或无理数的情况，本定理也成立。

1024. 内分或外分三角形的两边成相等的比的直线平行于第三边。

解 设在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上分别取点 H、K，使

$$AH:HB=AK:KC. \quad ①$$



假定过 H 引 BC 的平行线与 AC 交于 K'，则由 $HK' \parallel BC$，得 $$AH:HB=AK':K'C.$$

由①得 $AK':K'C=AK:KC$.

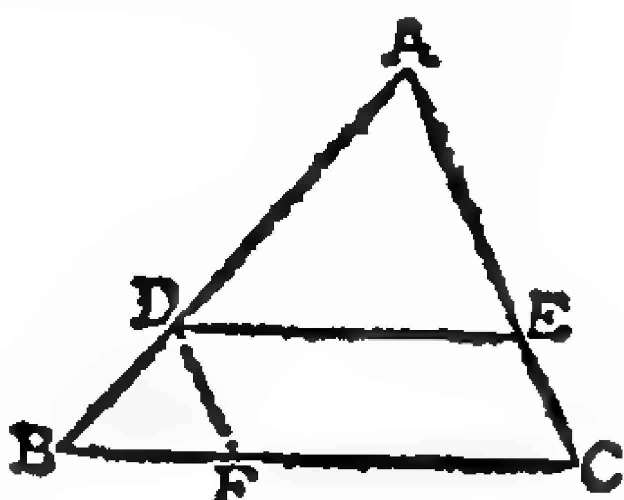
从而得出，K' 与 K 相重合。所以，HK' 与 HK 相重合，

即 $$HK \parallel BC.$$

用同样方法可证明 H、K 分别是 AB、AC 的外分点的情况。

1025. 在 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 上分别取点 D、E，使 $DE \parallel BC$，则

$$BC:DE=AB:AD$$
$$=AC:AE.$$



解 过 D 引平行于 AC 的直线与 BC 交于点 F，则 $DFCE$ 是平行四边形。所以

$$FC=DE.$$

而由 $DF \parallel AC$，得 $BC:FC=AB:AD$.

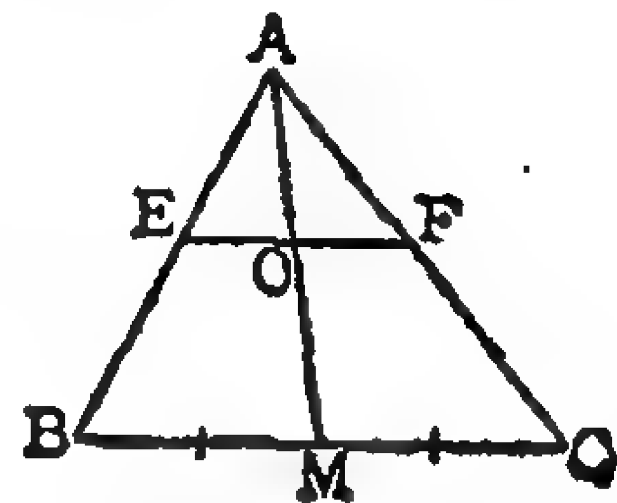
$$\therefore\ BC:DE=AB:AD.$$

又由 $DE \parallel BC$，得 $AB:AD=AC:AE$.

$$\therefore\ BC:DE=AB:AD=AC:AE.$$

1026. 在 $\triangle ABC$ 的中线 AM 上任取一点 O，过 O 引 BC 的平行线与 AB、AC 的交点分别为 E、F，则

$$OE=OF.$$

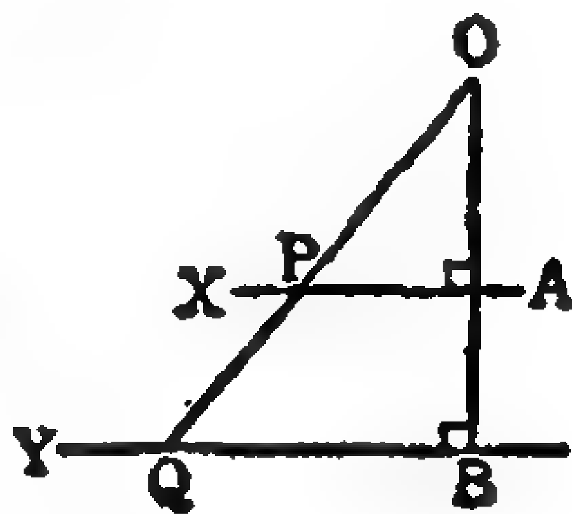


解 由 $OE \parallel BM$，得 $EO:BM=AO:AM$.
又由 $OF \parallel MC$，得 $OF:MC=AO:AM$,

$$\therefore\ EO:BM=OF:MC.$$

而 $BM=MC$. $\therefore\ OE=OF$.

1027. 过定点 O 引任意直线与给定的两条平行线 X、Y 的交点分别为 P、Q，则 $OP:OQ$ 是定值。



解 从 O 向给定的两条平行线 X、Y 作公共垂线，设交点分别为 A、

B，则 $OP:OQ=OA:OB$。

而 $OA:OB$ 是定值，所以 $OP:OQ$ 是定值。

1028. 过点 O 向两条平行线引三条直线，它们的交点分别为 A、A'，B、B'，C、C'，则 $AB:A'B'=BC:B'C'$。

解 在 $\triangle OA'B'$ 中，$AB\parallel A'B'$，

$\therefore\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{OB}{OB'}$。

又在 $\triangle OB'C'$ 中，$BC\parallel B'C'$，

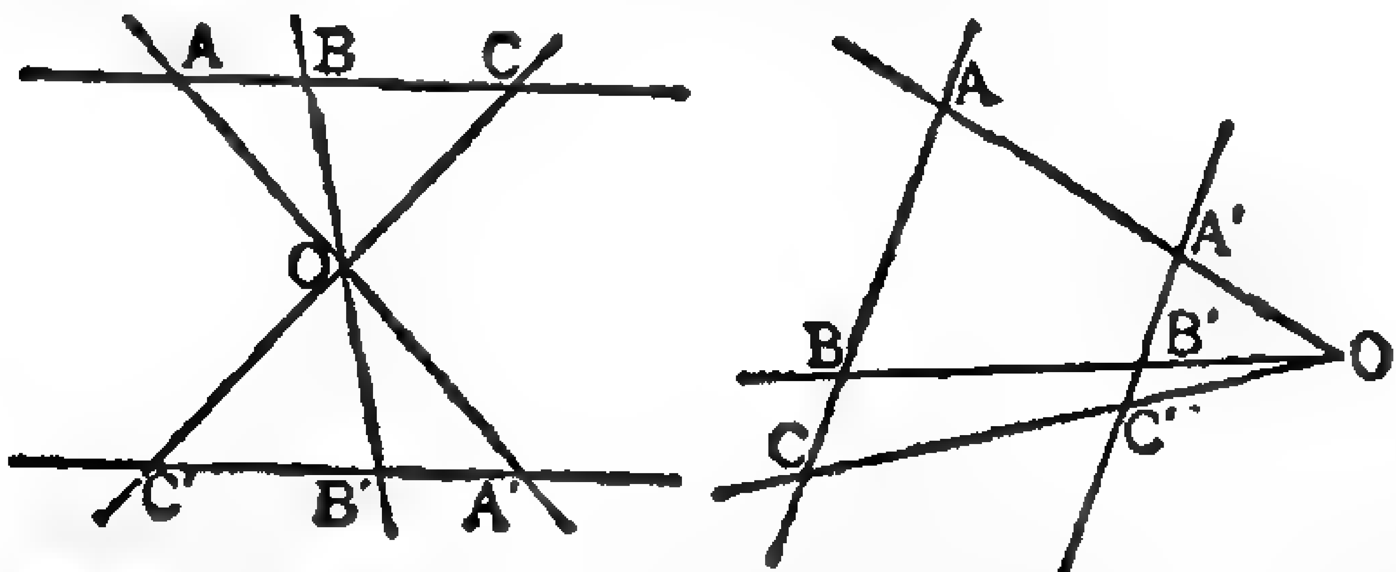
$\therefore\ \dfrac{OB}{OB'}=\dfrac{BC}{B'C'}$。

所以 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$。

1029. 设在两条平行线上分别取点 A、B、C，A'、B'、C'，使

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}\ (AB\neq A'B'),$$

则直线 AA'、BB'、CC' 相交于一点。



解 设 CC' 与 BB' 的交点为 O，则由 $BC\parallel B'C'$，得

$$\frac{CO}{C'O}=\frac{BC}{B'C'}.$$

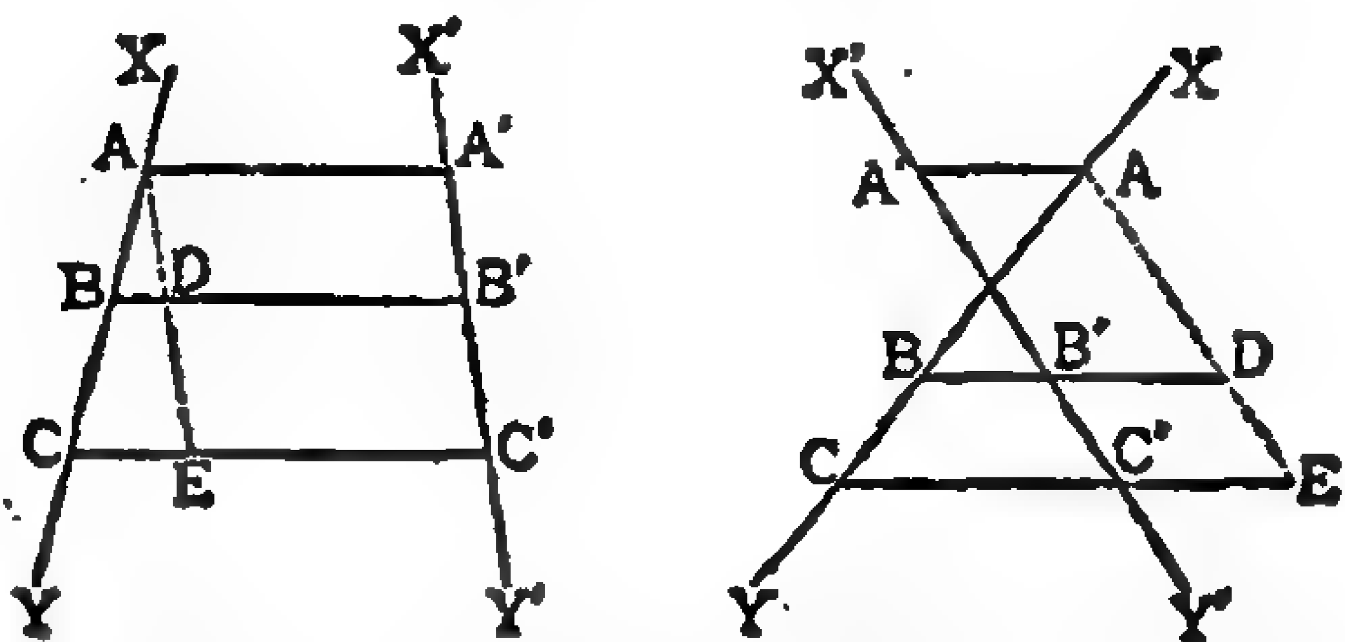
即直线 CC' 被直线 BB' 内分或外分成两条线段的比为 $\dfrac{BC}{B'C'}$，

而 $\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AB+BC}{A'B'+B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$。

由此可知，AA' 和 CC' 的交点把 CC' 内分或外分成两条线段的比，也等于 $\dfrac{BC}{B'C'}$。因为一条直线被分成定比的内分点或外分点是唯一的，所以 AA' 与 CC' 的交点也是 O。这就是说，直线 AA'，BB'，CC' 相交于一点 O。

1030. 几条平行线截两条直线 XY、$X'Y'$，所得的线段对应成比例。

解 设 $AA'\parallel BB'\parallel CC'$，从 A 引平行于 $X'Y'$ 的直线与 BB'、CC'（或它们的延长线）的交点分别为 D、E，则在 $\triangle ACE$ 中，$BD\parallel CE$，$\therefore\ \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DE}$。

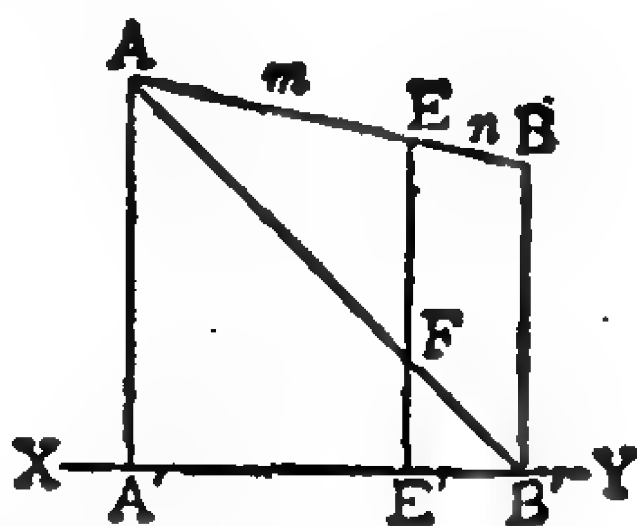


而 $ADB'A'$、$DEC'B'$ 都是平行四边形。所以 $AD=A'B'$，$DE=B'C'$。

由此可得，$\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$。

所以 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$。

1031. 设 E 为线段 AB 上的一个点，且 $AE:EB=m:n$，XY 是与 AB 不相交的任意直线。由 A、B、E 向 XY 作垂线，垂足分别为 A'、B'、E'，则



$$(m+n)EE'=nAA'+mBB'.$$

解 连结 AB' 和 EE'，设它们的交点为 F。

由 $BB'\parallel EF$，$AA'\parallel FE'$，得

$AE:EB=AF:FB'=A'E':E'B'=m:n$。

又 $\quad BB':EF=AB:AE$。

$\therefore\ BB':EF=(AE+EB):AE$。

而 $\quad (AE+EB):AE=(m+n):m$。

$\therefore\ BB':EF=(m+n):m$。

$\therefore\ mBB'=(m+n)EF \qquad ①$

又 $\quad AA':FE'=A'B':E'B'$

$=(A'E'+E'B'):E'B'$

$=(m+n):n$。

$\therefore\ nAA'=(m+n)FE'$。 $\qquad ②$

①+②，得

$mBB'+nAA'=(m+n)(EF+FE')$

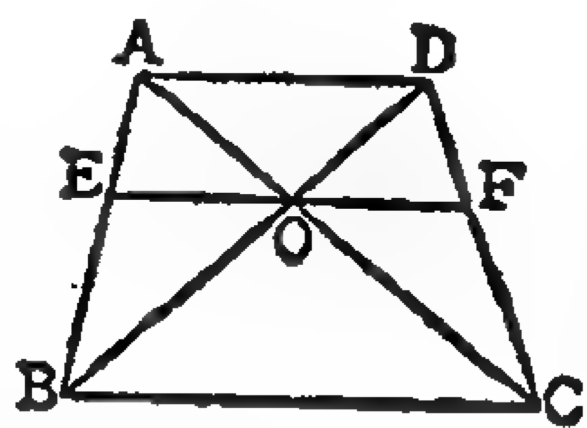
$=(m+n)EE'$。

即 $\quad (m+n)EE'=nAA'+mBB'$。

1032. 过梯形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 的交点 O，作底 BC 的平行线与 AB、CD 分别相交于 E、F，则 $OE=OF$。

解 在 $\triangle ABC$ 中，$BC\parallel OE$，

$\therefore\quad \frac{OE}{BC}=\frac{AE}{AB}$.　①



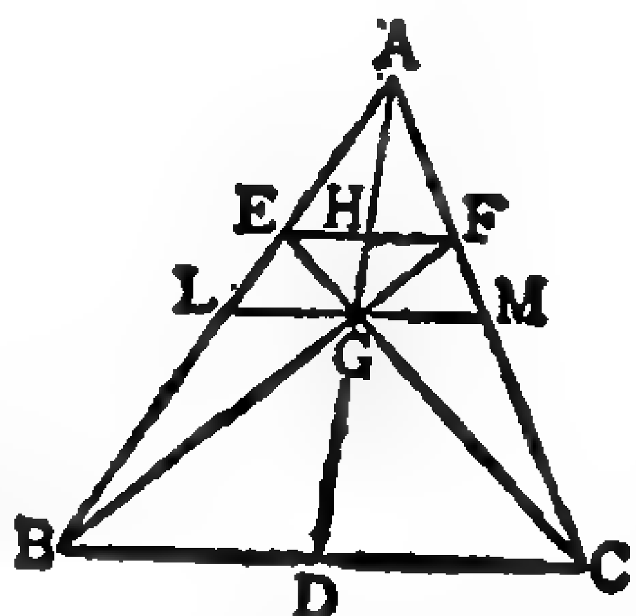
又在 $\triangle DBC$ 中，$BC \parallel OF$，

$\therefore\quad \frac{OF}{BC}=\frac{DF}{DC}$.　②

而 $BC\parallel EF\parallel AD$. $\therefore\ \frac{AE}{AB}=\frac{DF}{DC}$.

由此可得，$\frac{OE}{BC}=\frac{OF}{BC}$. $\therefore\quad OE=OF$.

1033. 设平行于 $\triangle ABC$ 的一边 BC 的直线与另两边 AB、AC 的交点分别为 E、F，则 BF、CE 的交点在 $\triangle ABC$ 的中线 AD 上。



解　设 $EF\parallel BC$，BF、CE 的交点为 G，过 G 引 BC 的平行线与 AB、AC 分别相交于 L、M，则 $EBCF$ 是梯形。

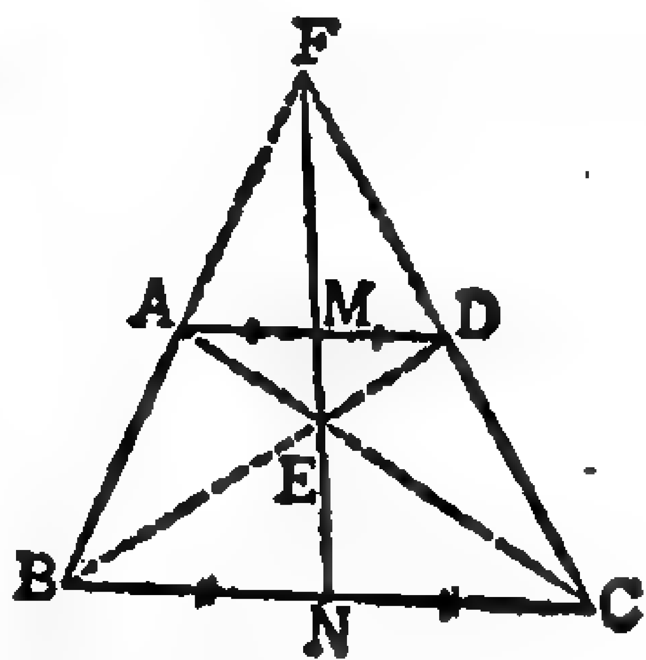
根据上题可知，$LG=GM$. 延长 AG 交 BC 于 D，则

$$BD:DC=LG:GM=1:1,$$

$$\therefore\quad BD=DC.$$

由此可得，BF、CE 的交点 G 在中线 AD 上。

1034. 试证：在梯形中，延长梯形两腰所得的交点，对角线的交点，以及上、下两底的中点在同一条直线上。



解　设梯形 $ABCD$ 的上底 AD、下底 BC 的中点分别为 M、N，对角线 AC、BD 的交点为 E，则

$$AM:NC=AD:BC=AE:EC,$$

连结 ME、EN，又 $\angle MAE=\angle NCE$，

$$\therefore\quad \triangle MAE\backsim\triangle NCE.$$

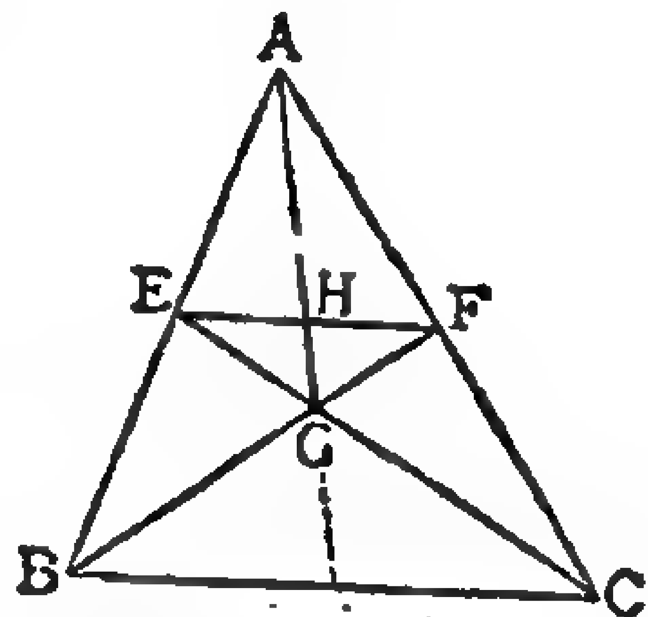
$$\therefore\quad \angle AEM=\angle NEC.$$

所以，点 M、E、N 在一条直线上。

又 $AD\parallel BC$，点 M、N 是上、下底的中点，由此可知 AB、CD 的交点 F 在 MN 上。

所以，N、E、M、F 在同一条直线上。

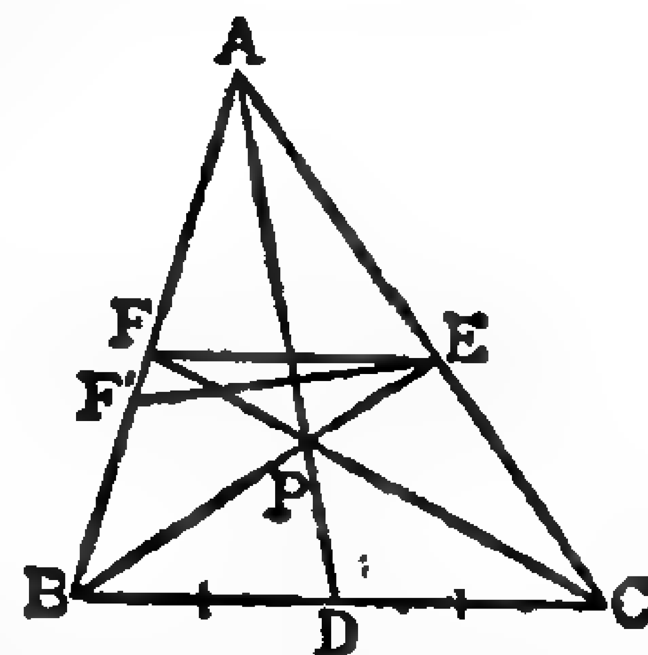
1035. 在 $\triangle ABC$ 中，引平行于 BC 的直线 EF，与 AB、AC 分别相交于 E、F，又 BF、CE 的交点为 G，则 $\triangle AGE$ 与 $\triangle AGF$ 等积。



解　设 AG 与 EF 的交点为 H. 根据上题可知，$EH=FH$. 从而得出 $\triangle AGE$ 与 $\triangle AGF$ 有共底边 AG，且它们的高也相等。

$$\therefore\quad S_{\triangle AGE}=S_{\triangle AGF}.$$

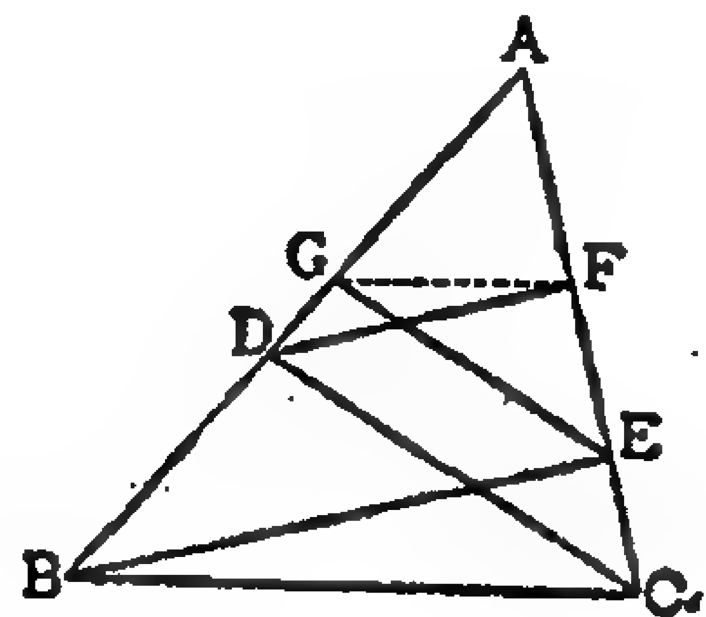
1036. 在 $\triangle ABC$ 的中线 AD 上任取一点 P，连结 BP、CP，并延长 BP 交边 AC 于 E，延长 CP 交 AB 于 F，则 $EF\parallel BC$.



解　从 E 引 CB 的平行线 EF'，根据上题可知 CF'、BE 的交点在中线 AD 上。

因为 BE、AD 相交于 P，所以 CF' 一定过点 P. 而 CP 过点 F. 由此可知，F' 和 F 相重合。也就是 EF' 和 EF 相重合，所以 EF 平行于 BC.

1037. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上分别取点 D、E，设从 D 引 BE 的平行线与 AC 相交于点 F，从 E 引 CD 的平行线与 AB 相交于点 G，求证：$GF\parallel BC$.



解　要证明 $BC\parallel GF$，只要知道 $\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AF}$.

而　$$\frac{AB}{AG}=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AD}{AG}.$$

由 $BE\parallel DF$，$CD\parallel EG$，得

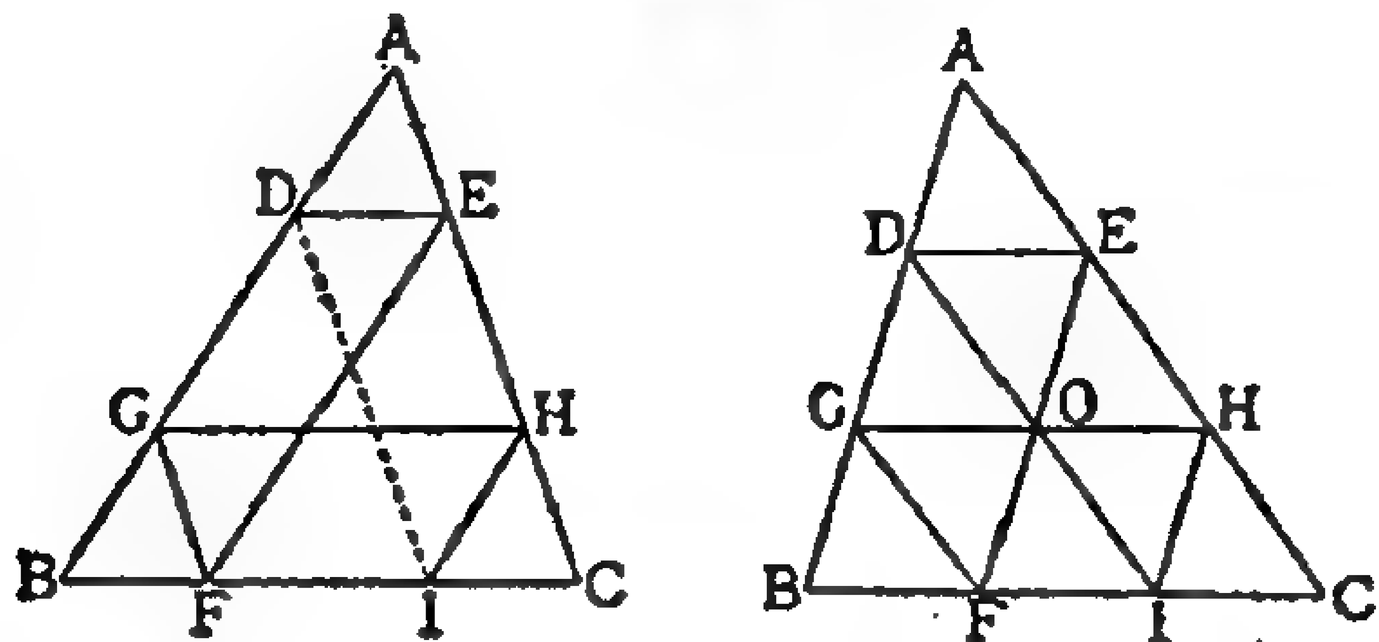
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AF},\quad \frac{AD}{AG}=\frac{AC}{AE}.$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{AG}=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{AC}{AE}=\frac{AC}{AF},$$

从而得出　$BC\parallel FG$.

1038. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上任取一点 D，从 D 引 BC 的平行线 DE 交 AC 于点 E，从 E 引 AB 的平行线 EF 交 BC 于点 F，继续这个方法引出 FG、GH、HI、IJ，证明 D

与 J 重合．又 EF、DI、GH 相交于一点时，求点 D 在 AB 上的位置．



解 由 $BC\parallel DE\parallel GH$，$CA\parallel FG\parallel IJ$，$AB\parallel EF\parallel HI$，可以得到

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{BF}{FC}=\frac{BG}{GA}=\frac{CH}{HA}$$

$$=\frac{CI}{IB}=\frac{AJ}{JB}.$$

$$\because\quad \frac{AD}{DB}=\frac{AJ}{JB},$$

$$\therefore\quad \frac{AD+DB}{DB}=\frac{AJ+JB}{JB},$$

即

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AB}{JB}.$$

从而得出，$DB=JB$．即 D 与 J 相重合．

又设 DI、EF、GH 相交于一点 O，因为

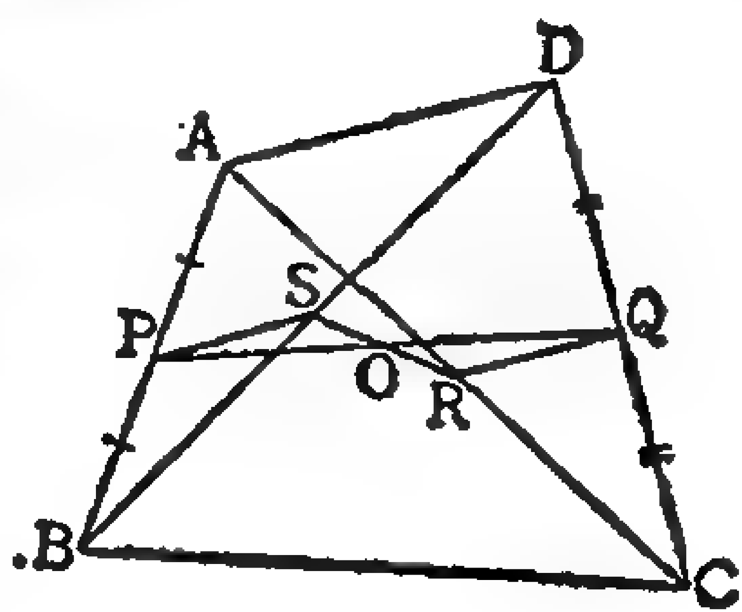
$$DE\parallel GH\parallel BC,\ GF\parallel DI\parallel AC,$$
$$HI\parallel EF\parallel AB,$$

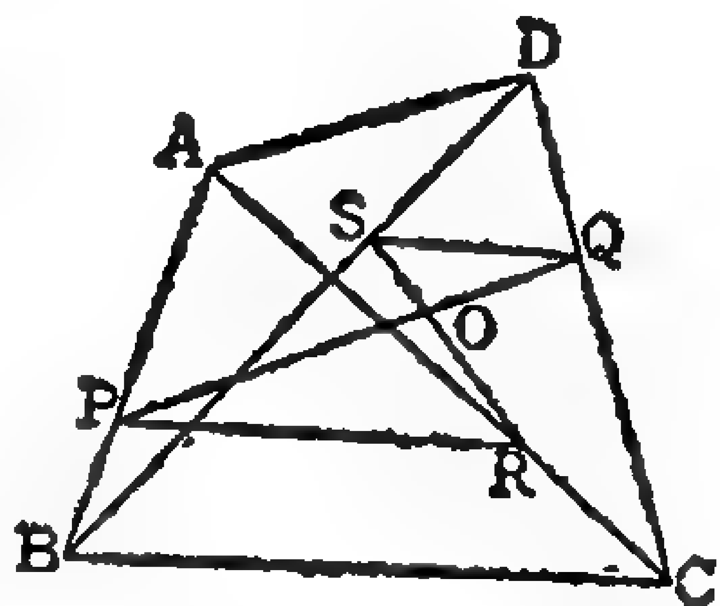
根据平行四边形的性质，得

$$DE=GO=OH=BF=FI=IC.$$

所以 F、I 三等分 BC．从而得出，D、G 三等分 AB，E、H 三等分 AC．

1039． 设四边形 $ABCD$ 的两边 AB、CD 及对角线 AC、BD 上的中点分别为 P、Q、R、S，求证：两线段 PQ、RS 的交点 O 是线段 PQ 的中点．又在两边 AB、CD 及对角线 AC、BD 上分别取内分点 P、Q、R、S，使 $AP:PB$、$CQ:DQ$、$AR:RC$、$BS:SD$ 都等于 $m:n$，设线段 PQ、RS 的交点 O，则比 $PO:OQ$ 的值如何？





解 因为 P、S 分别是 BA、BD 的中点，所以

$$PS\underset{=}{\parallel}\frac{1}{2}AD.$$

同样，R、Q 分别是 CA、CD 的中点，

$$\therefore\quad RQ\underset{=}{\parallel}\frac{1}{2}AD.$$

所以 $$PS\underset{=}{\parallel}RQ.$$

由此可得，$PRQS$ 是平行四边形．所以 RS、PQ 的交点平分 PQ．

同理可得，在 $\triangle ABC$、$\triangle DBC$ 中，

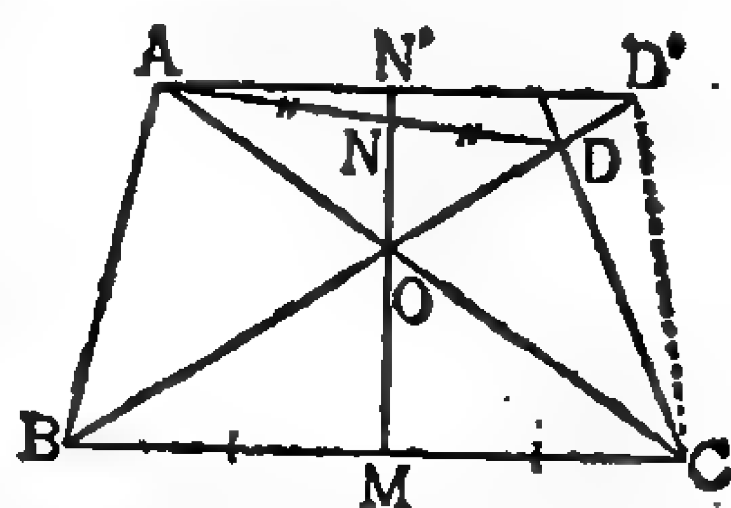
$$\because\quad AP:PB=AR:RC,\ BS:SD=CQ:QD,$$
$$\therefore\quad PR\parallel BC,\ SQ\parallel BC.$$

从而得出，$PR\parallel SQ$，且

$PR:BC=m:(m+n)$，
$SQ:BC=n:(m+n)$． （问题 **1025**）

$$\therefore\quad PR:SQ=m:n.$$
$$\therefore\quad PO:OQ=m:n.$$

1040． 若四边形一组对边中点的连线过对角线的交点，则这四边形是梯形．



解 在四边形 $ABCD$ 中，设 BC、AD 的中点分别为 M、N，对角线的交点为 O，且 N、O、M 在一条直线上．

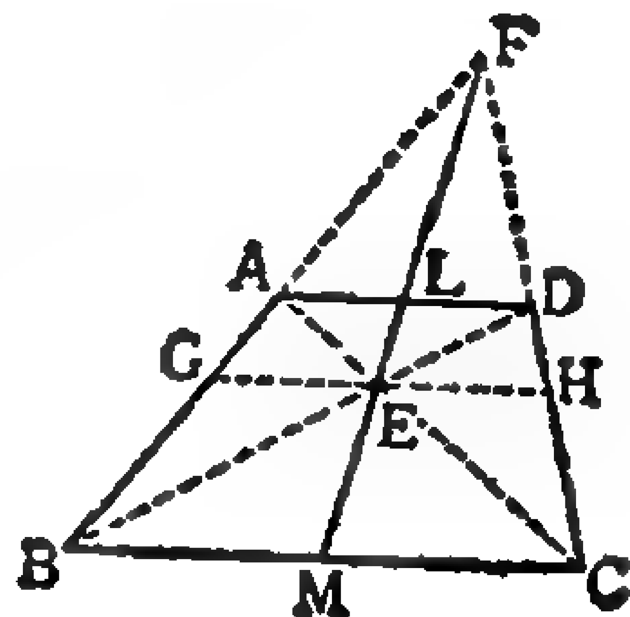
若 AD、BC 不平行，过 A 引 BC 的平行线与 BD 的延长线相交于 D'，则 $ABCD'$ 是梯形．设 MO 的延长线与 AD' 相交于 N'，则 N' 是 AD' 的中点．

又由 $AN=ND$，可知 $NN'\parallel DD'$．

而 NN' 和 DD' 在点 O 相交．这就和 $NN'\parallel DD'$ 相矛盾．从而得出，AD 与 AD' 相重合．

即 $$AD\parallel BC.$$

1041． 在梯形 $ABCD$ 中，设 AC 和 BD 相交于点 E，BA、CD 的延长线相交于点 F，EF 的延长线与 AD、BC 的交点分别为 L、M，则



$EL:EM=FL:FM$。

解 过E引直线平行于BC，设它与AB、CD的交点分别为G、H，则

$EG=EH$。(问题**1032**)

从而得出，L、M分别是AD、BC的中点。

而

$$FL:FM=LD:MC。\quad ①$$

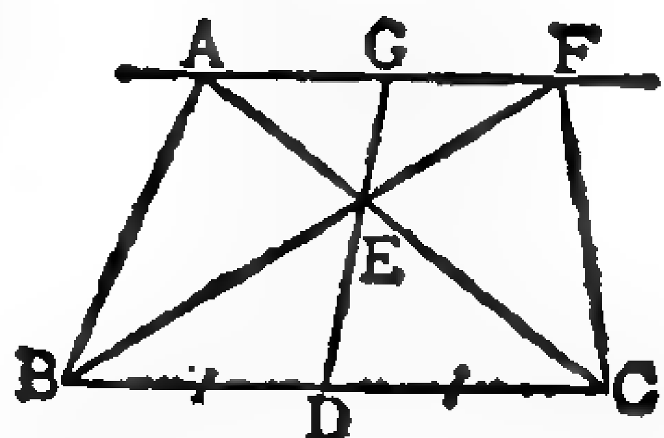
又 $\triangle EDL\backsim\triangle EBM$。

$$\therefore\ LD:MB=EL:EM。\quad ②$$

而$MB=MC$。由①、②，就得到

$EL:EM=FL:FM$。

1042. 在$\triangle ABC$中，边BC的中点为D，边AC上一点E，过A引BC的平行线与BE、DE的交点分别为F、G，且



$AG=GF$，

问：直线AB、DE、CF是相交在一点呢，还是互相平行呢？

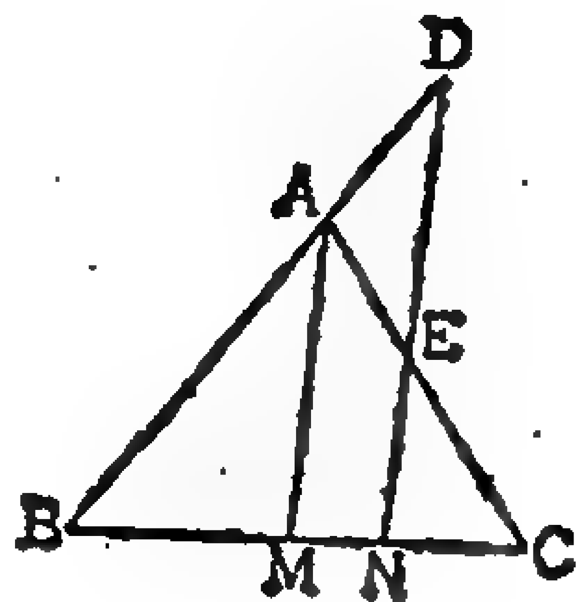
解 在梯形$ABCF$中，E是对角线的交点，D是BC的中点，所以AF和DE的交点G是AF的中点。从而得出，BA、DG和CF不是互相平行，而是相交于一点。

其次，如果$AB\parallel CF$，那么$ABCF$是平行四边形。这时，$AG=GF$，从而得出，$ABDG$、$GDCF$都是平行四边形。所以

$AB\parallel GD\parallel FC$。

1043. 在$\triangle ABC$中，引直线平行于中线AM，设此直线交AB于D，交AC于E，则

$AD:AE=AB:AC$。



解 设DE与BC的交点为N。

$$\because\ DE\parallel AM,$$

$$\therefore\ AD:AB=MN:MB,$$

$$AE:AC=MN:MC。$$

而M是BC的中点，即$MB=MC$。

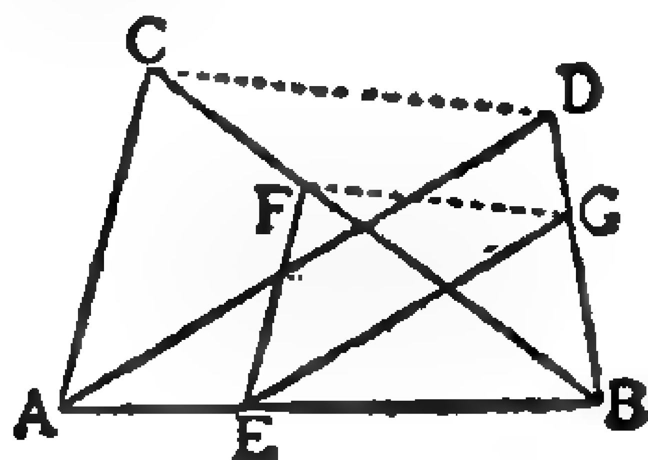
$$\therefore\ AD:AB=AE:AC。$$

$$\therefore\ AD:AE=AB:AC。$$

1044. 设有共底边的两个三角形ABC、ABD。从AB上任一点E引两条直线分别平行于AC、AD，且与BC、BD分别交于点F、G，则$FG\parallel CD$。

解 在$\triangle ABC$中，$CA\parallel FE$，

$$\therefore\ \frac{BE}{BA}=\frac{BF}{BC}。$$



又在$\triangle DAB$中，$AD\parallel EG$，

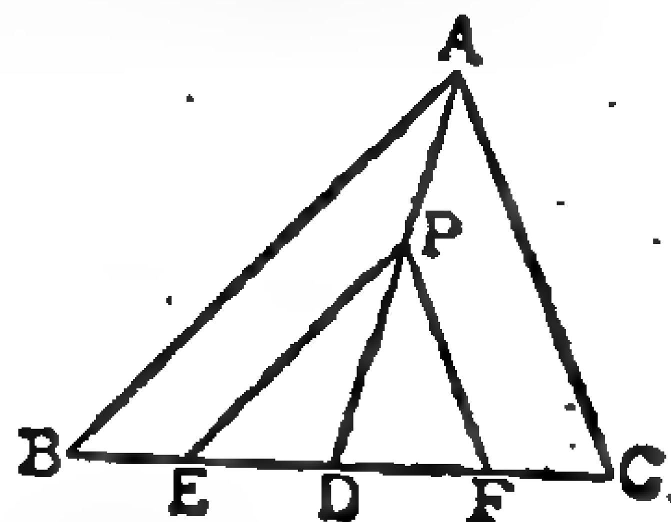
$$\therefore\ \frac{BE}{BA}=\frac{BG}{BD}。$$

所以，$$\frac{BF}{BC}=\frac{BG}{BD}。$$

由此可得，$FG\parallel CD$。

1045. 设P是$\triangle ABC$的中线AD上一点，过P引平行于AB、AC的直线，与BC分别相交于E、F，则

$BE=CF$。



解 $\because\ PE\parallel AB$，

$$\therefore\ \frac{BD}{BE}=\frac{AD}{AP}。$$

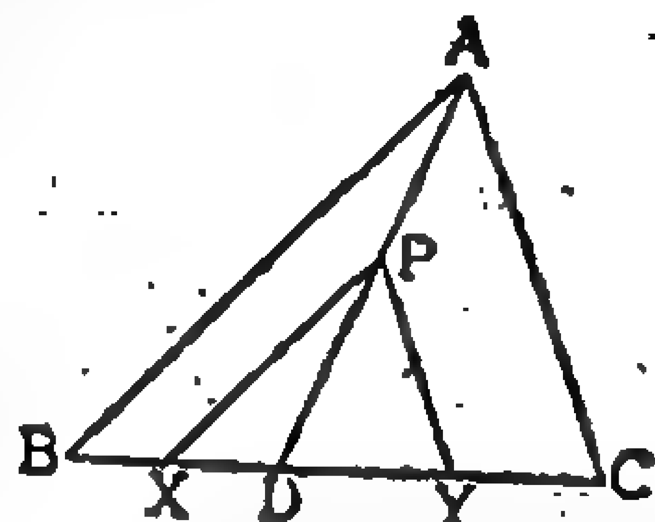
$\because\ PF\parallel AC$，

$$\therefore\ \frac{CD}{CF}=\frac{AD}{AP}。$$

$$\therefore\ \frac{BD}{BE}=\frac{CD}{CF}。$$

而$BD=CD$。$\therefore\ BE=CF$。

1046. 设D是$\triangle ABC$的底边BC上一定点，又在AD上任取一点P，从P引AB、AC的平行线PX、PY，与BC分别相交于点X、Y，则$BX:CY$是与点P的位置无关的定值。



解 $\because\ PX\parallel AB,\ PY\parallel AC$，

$$\therefore\ \frac{BX}{BD}=\frac{AP}{AD},\quad \frac{CY}{CD}=\frac{AP}{AD}。$$

$$\therefore\ \frac{BX}{BD}=\frac{CY}{CD}。$$

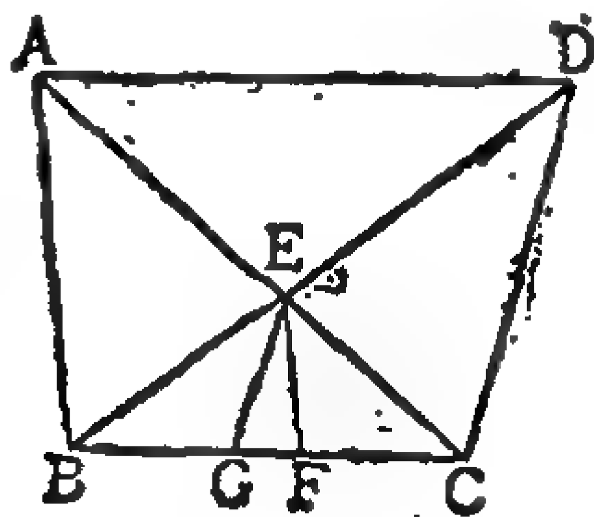
$$\therefore\ \frac{BX}{CY}=\frac{BD}{CD},$$

$$BX:CY=BD:CD。$$

而D是BC上的定点。所以，$BD:CD$是定值。由此可得，$BX:CY$是定值。

1047. 在BC的同侧有两个等积的$\triangle ABC$、$\triangle DBC$，若AC、BD的交点为E，$EF\parallel AB$，$EG\parallel CD$，EF、EG与BC的交点分别为F、G，则$CF=BG$。

解 由题设条件可知，



$$\frac{CF}{BC}=\frac{CE}{CA},$$

$$\frac{BG}{BC}=\frac{BE}{BD}.$$

又 $$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}.$$

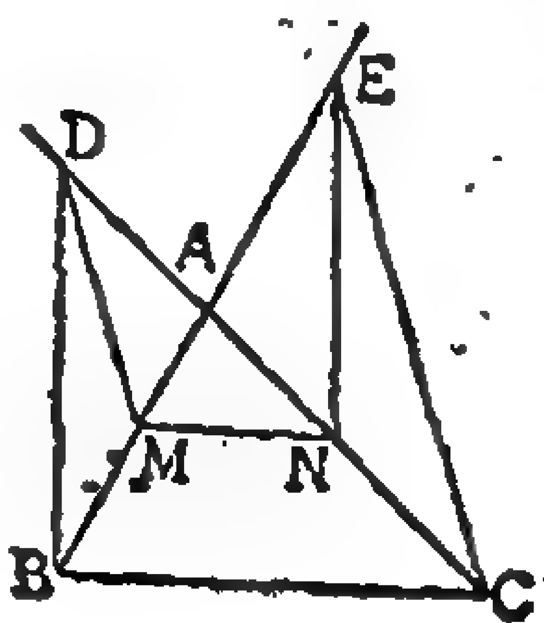
$$\therefore\ AD\parallel BC.$$

从而得出，$\frac{CE}{CA}=\frac{BE}{BD}$.

由此可得，$\frac{CF}{BC}=\frac{BG}{BC}$.

$$\therefore\ CF=BG.$$

1048. 在 $\triangle ABC$ 中，设平行于 BC 的直线 MN 与 AB、AC 的交点分别为 M、N，在 CA 的延长线上取一点 D，过 N 引 BD 的平行线交 BA 的延长线于点 E，则 $CE\parallel MD$.



解 由 $MN\parallel BC$，得

$$\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{AC}.$$

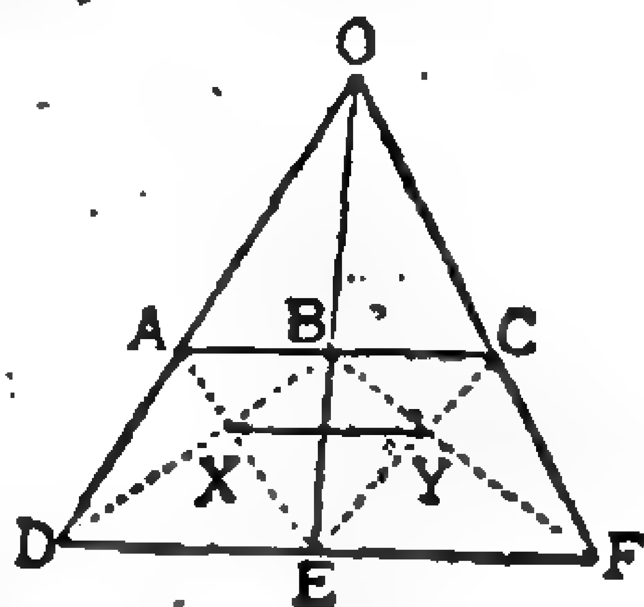
又 $NE\parallel BD$. $\therefore\ \frac{AN}{AD}=\frac{AE}{AB}$.

两等式的两边分别相乘，得

$$\frac{AM}{AD}=\frac{AE}{AC}.\quad\therefore\quad\frac{AM}{AE}=\frac{AD}{AC}.$$

由此可得，$CE\parallel MD$.

1049. 过已知点 O 引三条直线 OAD、OBE、OCF，截两条平行线分别于 A, B, C、D, E, F，设 AE、BD 的交点为 X，CE、BF 的交点为 Y，则 XY 与这两条平行线平行。



解 由 $AC\parallel DF$，得 $AB:DE=BC:EF$.（问题 1028）

而 $$AB:DE=BX:XD,$$

$$BC:EF=BY:YF.$$

$$\therefore\ BX:XD=BY:YF.$$

由此可得，$XY\parallel DF\parallel AC$.

1050. 过梯形 $ABCD$ 的对角线交点 O 引两底 AD、BC 的平行线，与两腰分别相交于 M、N，则

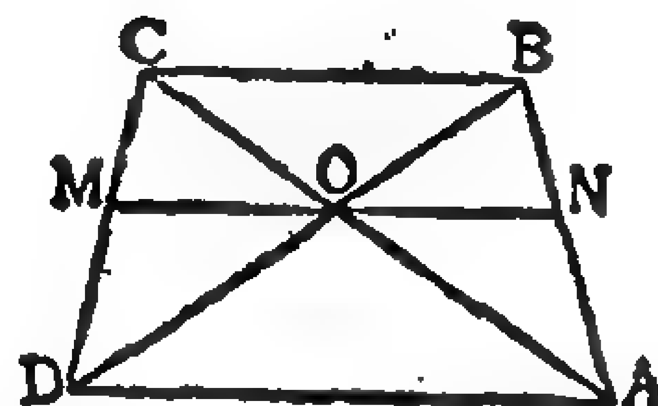
$$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{MN}.$$

解 由 O 是梯形的对角线的交点，$MON\parallel AD$，得

$$MO=ON,\ \frac{MO}{DA}=\frac{MC}{DC}.$$

$$\therefore\ \frac{MN}{DA}=\frac{2MC}{DC}.$$

由此可得，



$$\frac{1}{DA}=\frac{2MC}{MN\cdot DC}.\qquad ①$$

又由 $NO\parallel BC$，得

$$\frac{NO}{BC}=\frac{AN}{AB}.\quad\therefore\quad\frac{NO}{BC}=\frac{DM}{DC}.$$

$$\therefore\ \frac{MN}{BC}=\frac{2DM}{DC}.$$

由此可得，

$$\frac{1}{BC}=\frac{2DM}{MN\cdot DC}.\qquad ②$$

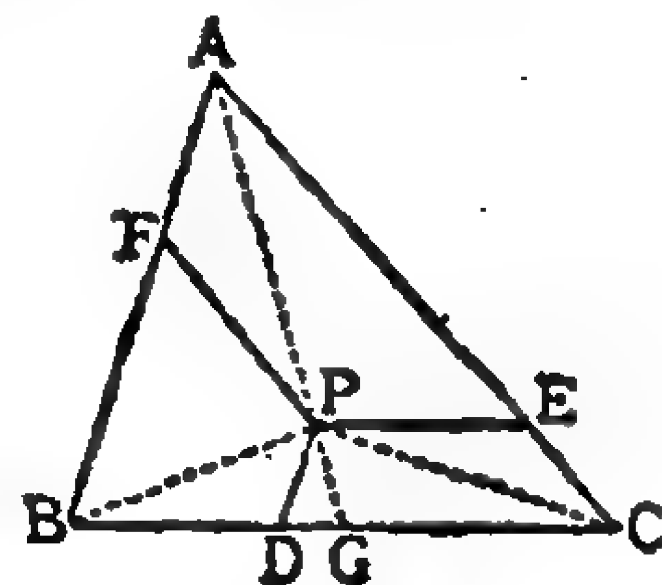
①+②，得

$$\frac{1}{DA}+\frac{1}{BC}=\frac{2(MC+DM)}{MN\cdot DC}$$

$$=\frac{2DC}{MN\cdot DC}=\frac{2}{MN}.$$

1051. 过 $\triangle ABC$ 内的一点 P 引平行于 AB、BC、CA 的直线，与 BC、CA、AB 分别相交于 D、E、F，则

$$\frac{CE}{AC}+\frac{AF}{AB}+\frac{BD}{BC}=1.$$



解 延长 AP 与 BC 相交于点 G，则

$$\frac{CE}{AC}=\frac{PG}{AG}=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}.\qquad ①$$

同理可得，

$$\frac{AF}{AB}=\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle BAC}},\qquad ②$$

$$\frac{BD}{BC}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle CAB}}.\qquad ③$$

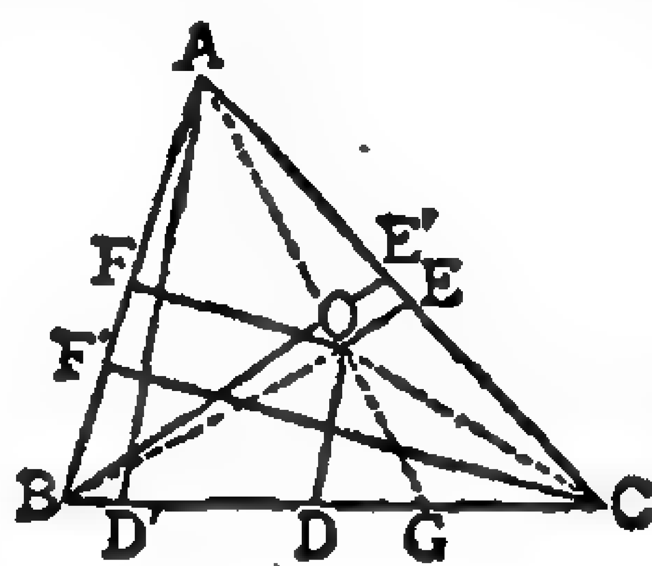
①+②+③，得

$$\frac{CE}{AC}+\frac{AF}{AB}+\frac{BD}{BC}$$

$$=\frac{S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1.$$

1052. 从 $\triangle ABC$ 内的一点 O 向三边引

直线 OD、OE、OF，又从顶点 A、B、C 分别引平行于 OD、OE、OF 的直线 AD'、BE'、CF'，则



$$\frac{OD}{AD'}+\frac{OE}{BE'}+\frac{OF}{CF'}=1.$$

解 设延长 AO 与 BC 交于点 G，则

$$\frac{OD}{AD'}=\frac{OG}{AG}=\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}.$$

同理可得，

$$\frac{OE}{BE'}=\frac{S_{\triangle OCA}}{S_{\triangle BCA}},\quad \frac{OF}{CF'}=\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle CAB}}.$$

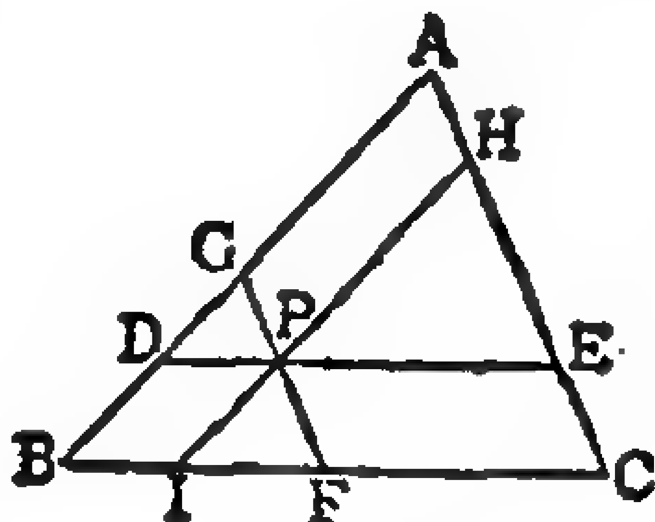
把上面三个等式的两边分别相加，得

$$\frac{OD}{AD'}+\frac{OE}{BE'}+\frac{OF}{CF'}$$

$$=\frac{S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}+S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1.$$

注 当点 O 在三角形的外面时，上面三个式子中一个为正，两个取负。

1053. 设 $\triangle ABC$ 内一点 P，过 P 在三角形内引 BC、CA、AB 的平行线，它们分别是 DE、FG、HI，求证：



$$\frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{HI}{AB}=2.$$

解 ∵ $DE=DP+PE=BI+FC$，

$$\frac{FG}{CA}=\frac{BF}{BC},\quad \frac{HI}{AB}=\frac{IC}{BC},$$

$$\therefore\ \frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{HI}{AB}$$

$$=\frac{(BI+FC)+BF+IC}{BC}.$$

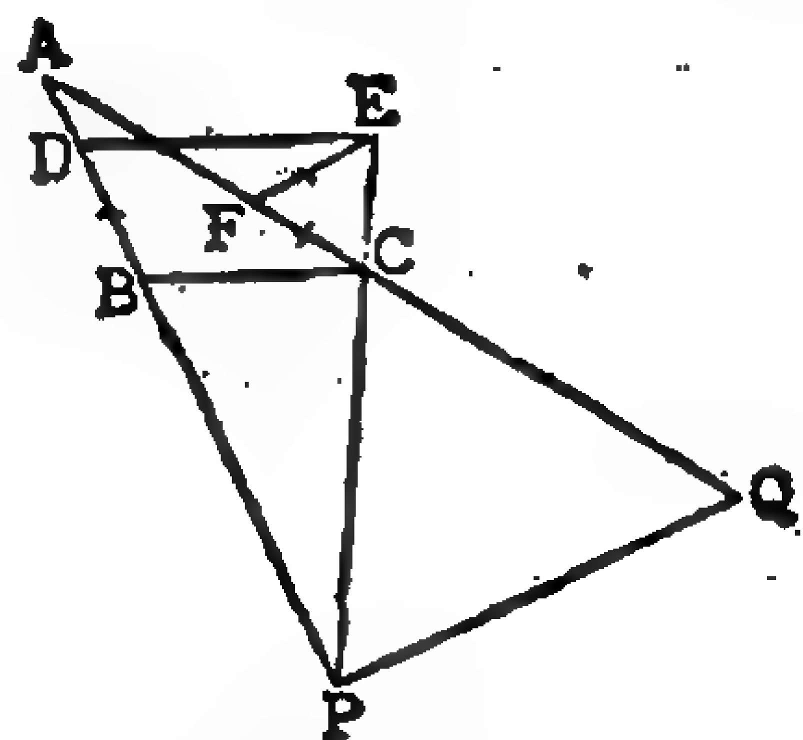
而 $BF=BI+IF$，$IC=IF+FC$。

$$\therefore\ \frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{HI}{AB}$$

$$=\frac{BI+FC+BI+IF+IF+FC}{BC}$$

$$=\frac{2(BI+IF+FC)}{BC}=\frac{2BC}{BC}=2.$$

1054. 设 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点，过 D 引直线平行于 BC，在这直线上取点 E，在 AC 上取点 F，使 $BD=CF=FE$。又延长 EC、AB，它们相交于点 P。从 P 引 EF 的平行线 PQ 与 AC 的延长线相交于点 Q，则



$$BP=QP=QC.$$

解 ∵ $\angle QCP=\angle FCE=\angle CEF=\angle QPC$，

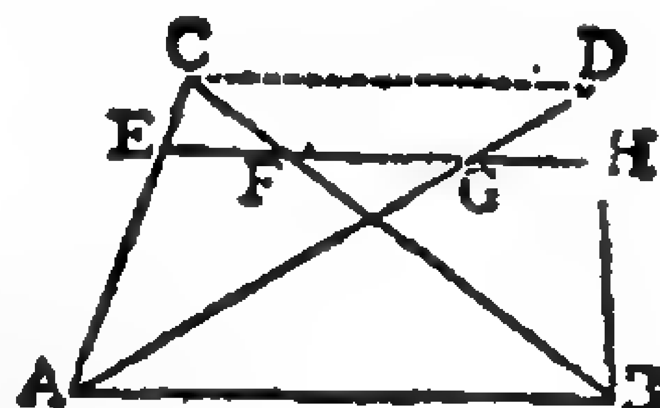
$\therefore\ QP=QC$。

又 $$\frac{CF}{CQ}=\frac{CE}{CP}=\frac{BD}{BP}.$$

∵ $CF=BD$，∴ $CQ=BP$。

∴ $BP=QP=QC$。

1055. 从 $\triangle ABC$ 的顶点 C 和 AB 的中点 D 引任意的两条平行线 CF、DE，分别与边 AB 的延长线、AC 相交于 F、E，则



$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

解 ∵ $DE\parallel CF$，

∴ $AD:AE=AF:AC$，

即 $AE\cdot AF=AD\cdot AC$。

而 $$AD=\frac{1}{2}AB.$$

$$\therefore\ AE\cdot AF=\frac{1}{2}AB\cdot AC.$$

由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AEF$ 共角 A，

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AE\cdot AF}{AB\cdot AC}=\frac{1}{2}.$$

即 $$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

1056. 设有两个共底边且在底边同侧的三角形，若平行于底边的直线被两三角形的其他两边所截得线段长相等，则这两个三角形等积。

解 设直线 $EFGH$ 平行于 AB，且 $EF=GH$，则

$CE:CA=EF:AB$，

$DH:DB=GH:AB$。

∴ $CE:CA=DH:DB$。

由此可得，

$CE:(CA-CE)=DH:(DB-DH)$,

即　$CE:EA=DH:HB$.

$\therefore\quad CD\parallel AB,\ S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}$.

1057. 在平面内设有两条不平行的直线 LM、$L'M'$，不同的三条平行线 AA'、BB'、CC' 与 LM 的交点分别为 A、B、C，与 $L'M'$ 的交点分别为 A'、B'、C'，试答：

(1) 若直线 AB' 与 BC' 互相平行，则 AA'、BB'、CC' 成等比数列；

(2) 若直线 AC' 与 BB' 的交点 O 是 BB' 的中点，则 AA'、BB'、CC' 成调和数列；

(3) 若 AA'、BB'、CC' 成等差数列，则这三条平行线的位置如何？

解 (1) $\because\ \triangle AA'B'\backsim\triangle BB'C'$,

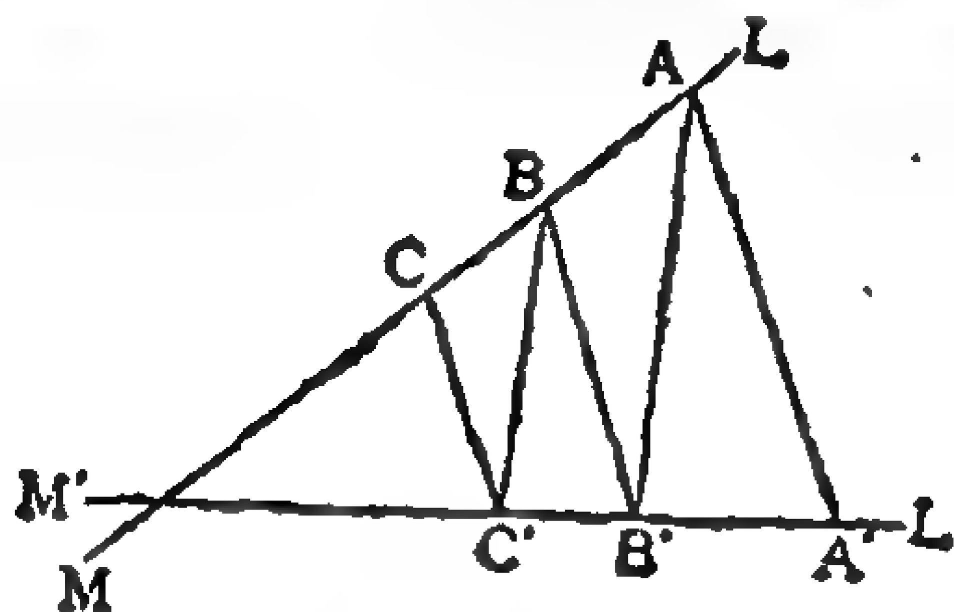
$\therefore\quad AA':BB'=AB':BC'$.　①

又　$\triangle ABB'\backsim\triangle BCC'$,

$\therefore\quad BB':CC'=AB':BC'$.　②

由①、②，得 $AA':BB'=BB':CC'$.

由此可得，AA'、BB'、CC' 成等比数列。



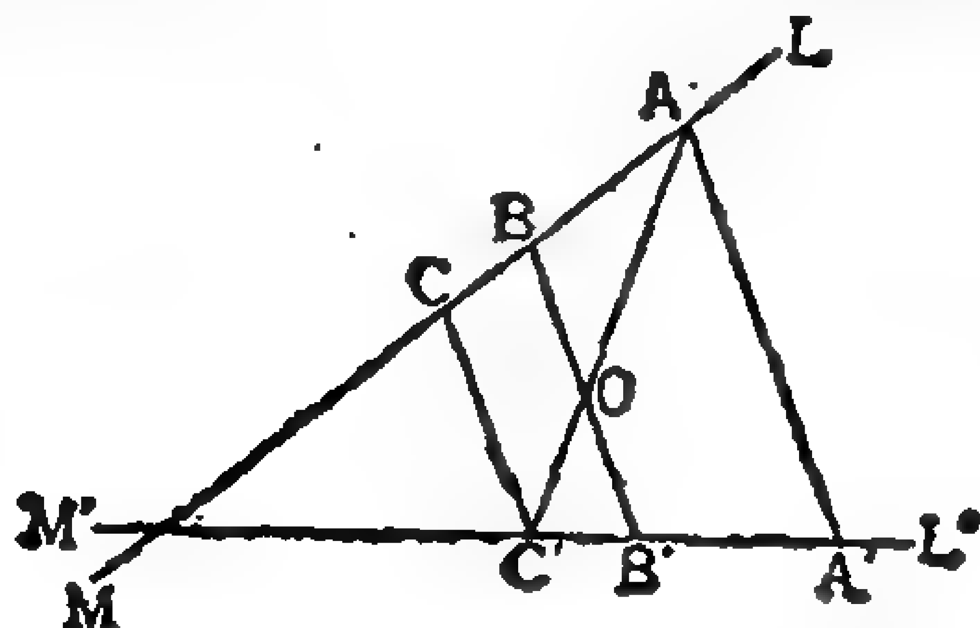
(2) $\because\ \dfrac{BO}{CC'}=\dfrac{AO}{AC'},\ \dfrac{OB'}{AA'}=\dfrac{OC'}{AC'}$,

$\therefore\ \dfrac{BO}{CC'}+\dfrac{OB'}{AA'}=\dfrac{AO+OC'}{AC'}=1$.

又　$BO=OB'$,

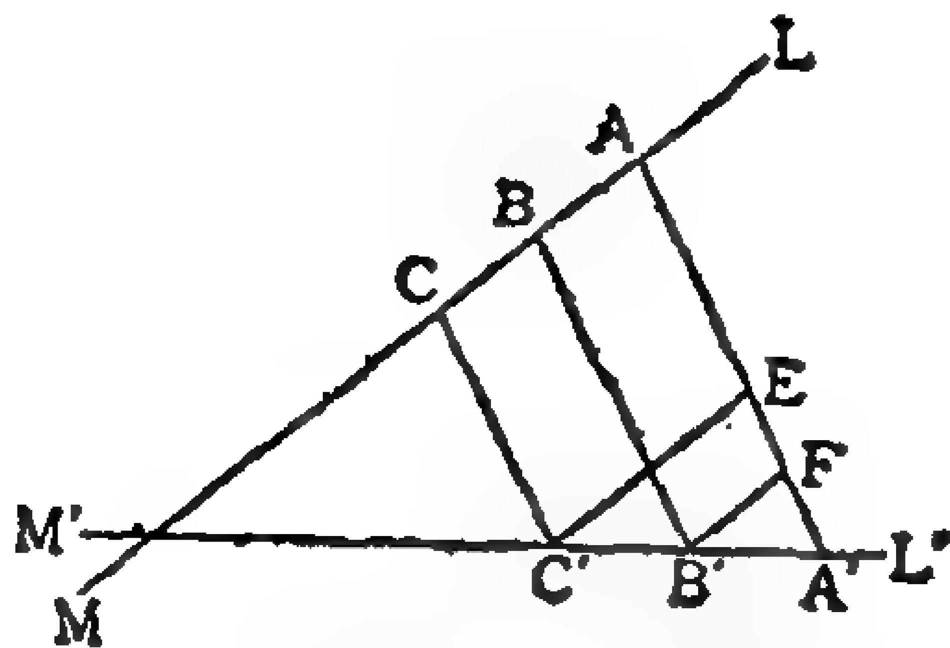
$\therefore\ \dfrac{1}{CC'}+\dfrac{1}{AA'}=\dfrac{1}{BO}=\dfrac{2}{BB'}$.

由此可得，AA'、BB'、CC' 成调和数列。



(3) 从 B'、C' 各引 AC 的平行线分别与 AA' 相交于 F、E，则

$FA'=AA'-BB',\ FE=BB'-CC'$.



$\therefore\quad FA'-FE=AA'-2BB'+CC'$.

而 AA'、BB'、CC' 成等差数列，即

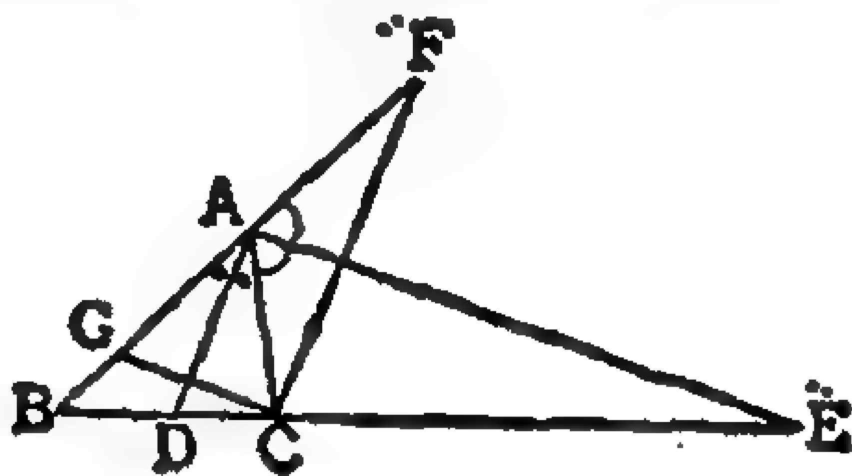
$AA'+CC'=2BB'$.

$\therefore\quad FA'=FE$.

由此可得，　$A'B'=B'C'$.

3. 角平分线的比例线段

1058. 三角形的内角平分线分对边所得的两条线段和这个角的两边对应成比例；它的外角平分线外分对边所得两条线段和这个角的两边对应成比例。



解 设 AD 是 $\angle A$ 的平分线，AE 是外角 CAF 的平分线，AD、AE 与底边的交点分别为 D、E. 从 C 引 AD 的平行线与 BA 延长线交于 F，则

$\angle F=\angle BAD,\ \angle ACF=\angle DAC$.

而　$\angle BAD=\angle DAC$.

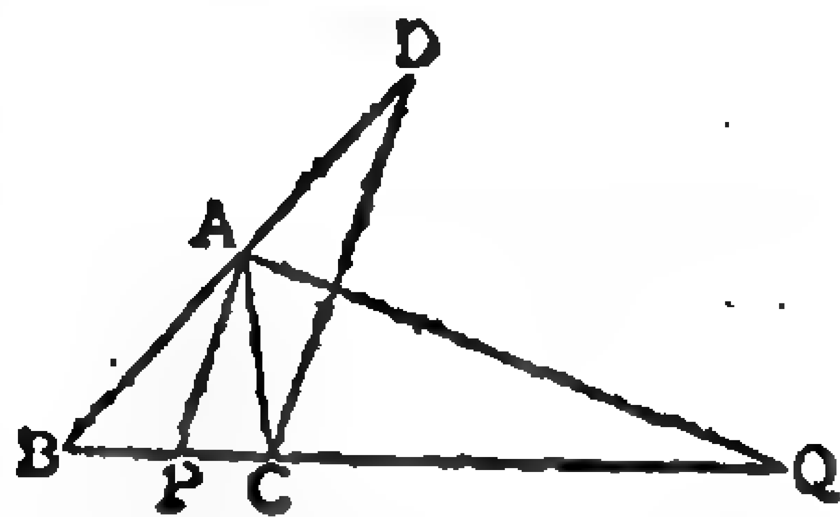
$\therefore\quad \angle F=\angle ACF.\ \therefore\quad AC=AF$.

又由 $AD\parallel CF$，得 $BD:DC=BA:AF$.

$\therefore\quad BD:DC=AB:AC$.

对于外角平分线的情况，可引 CG 平行 AE，再仿照上面的证法即可得证。

1059. $\triangle ABC$ 的边 BC 被内分或外分成两线段，它们的比都等于其他两边的比，设内分点、外分点分别为 P、Q，则 PA 和 QA 分别平分 $\angle A$、与 $\angle A$ 相邻的外角。



解 从 C 引 AP 的平行线与 BA 的延长线相交于点 D，则

$$\frac{BP}{PC}=\frac{BA}{AD}.$$

根据假设，得 $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{AB}{AC}$.

$\therefore\ \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AB}{AC}$. $\therefore\ AD=AC$.

由此可得，$\angle ADC=\angle ACD$.

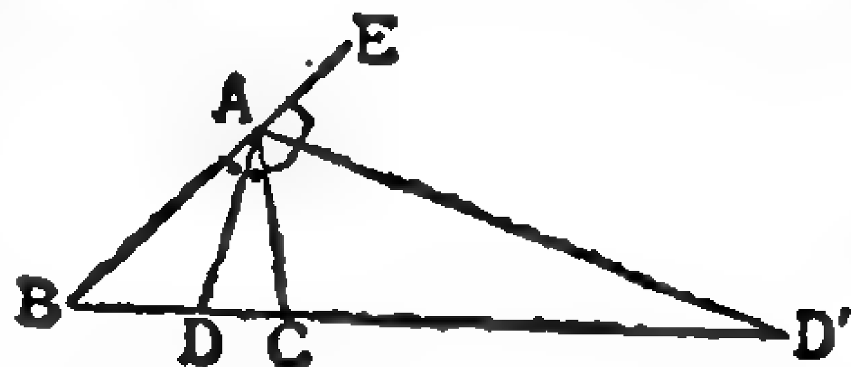
而 $\angle ADC=\angle BAP$, $\angle ACD=\angle PAC$.

$\therefore\ \angle BAP=\angle PAC$.

即 AP 是 $\angle A$ 的平分线。

同理可证得外分的情况。

1060. 设 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 分别为 a、b、c，$\angle A$ 和外角 CAE 的平分线分别与 BC 相交于 D 和 D'，则 $DD'=\dfrac{2abc}{b^2\sim c^2}$.



解 由上题，得

$$BD:DC=c:b. \quad ①$$

设 $BD=x$，则 $DC=a-x$.

由①，得 $x:(a-x)=c:b$.

$$\therefore\ x=\frac{ac}{b+c}. \quad ②$$

当 $b<c$ 时，设 $BD'=y$，则 $CD'=y-a$.

$\therefore\ y:(y-a)=c:b$.

由此可得，

$$y=\frac{ac}{c-b}. \quad ③$$

当 $b>c$ 时，设 $BD'=y$，则 $CD'=y+a$.

$\therefore\ y:(y+a)=c:b$.

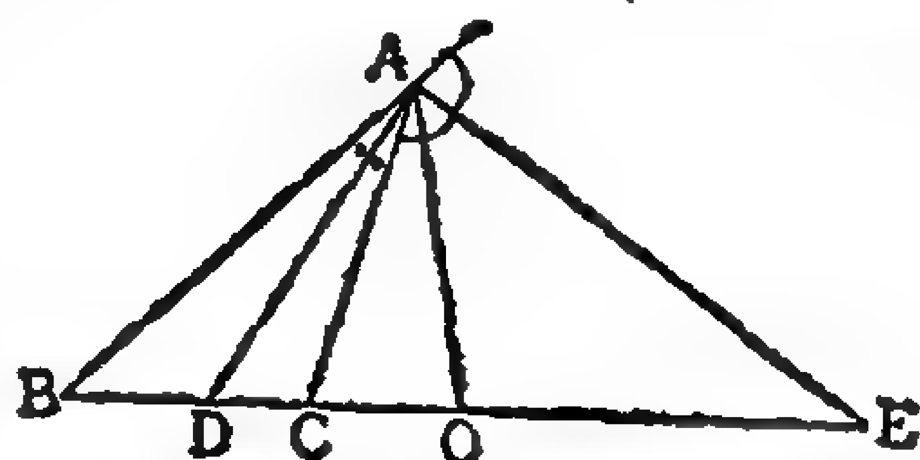
由此可得，

$$y=\frac{ac}{b-c}. \quad ③'$$

③－②或③'＋②，得

$$DD'=\frac{2abc}{c^2-b^2},\quad 或\quad DD'=\frac{2abc}{b^2-c^2}.$$

1061. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 与 $\angle A$ 相邻的外角平分线分别交 BC 和它的延长线于 D、E，设 DE 的中点是 O，则 OA 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线。



解 在 $\triangle ABC$ 中，设 AD、AE 分别是 $\angle A$、与 $\angle A$ 相邻的外角的平分线，则

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BE}{EC}.$$

根据题设条件，得 $DO=OE$。设 $BO=x$，$CO=y$，$DO=z$，则

$$\frac{x-z}{z-y}=\frac{x+z}{z+y}.$$

$\therefore\ (x-z)(z+y)=(x+z)(z-y)$.

$\therefore\ z^2=xy$.

即 $DO^2=BO\cdot CO$.

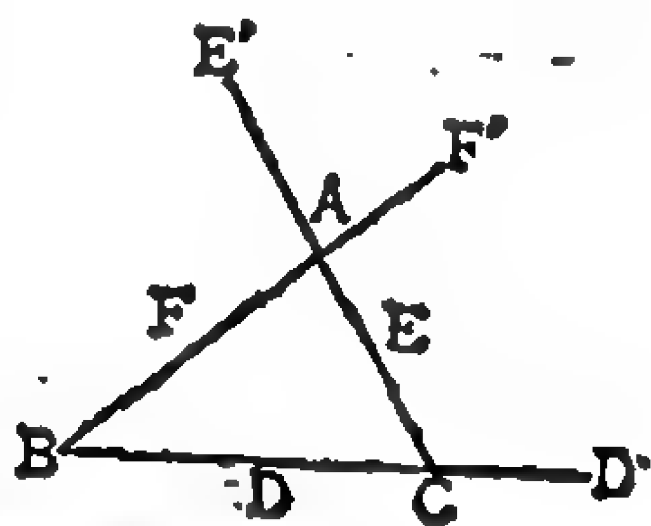
而 $DO=AO$. ($\because\ \angle DAE=90°$).

$\therefore\ AO^2=BO\cdot CO$.

即 $OA^2=OB\cdot OC$,

这就是说，OA 与 $\triangle ABC$ 的外接圆在点 A 相切。

1062. $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线以及相应的外角的平分线与对边的交点分别为 D、D'，E、E'，F、F'。当 DD'、EE'、FF' 与 $BC(=a)$、$CA(=b)$、$AB(=c)$ 同向时取正值，反向时取负值，则



$$\frac{1}{DD'}+\frac{1}{EE'}+\frac{1}{FF'}=0,$$

$$\frac{a^2}{DD'}+\frac{b^2}{EE'}+\frac{c^2}{FF'}=0.$$

解 D' 在 BC 的延长线上，所以 DD' 取正值。如图，$DD'>0$, $EE'>0$, $FF'<0$.

根据问题 **1060**，得

$$\frac{1}{DD'}=\frac{c^2-b^2}{2abc},\quad \frac{1}{EE'}=\frac{a^2-c^2}{2abc},$$

$$\frac{1}{FF'}=\frac{b^2-a^2}{2abc}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{DD'}+\frac{1}{EE'}+\frac{1}{FF'}=0.$$

同理可得，$\dfrac{a^2}{DD'}=\dfrac{a^2(c^2-b^2)}{2abc}$,

$$\frac{b^2}{EE'}=\frac{b^2(a^2-c^2)}{2abc},$$

$$\frac{c^2}{FF'}=\frac{c^2(b^2-a^2)}{2abc}.$$

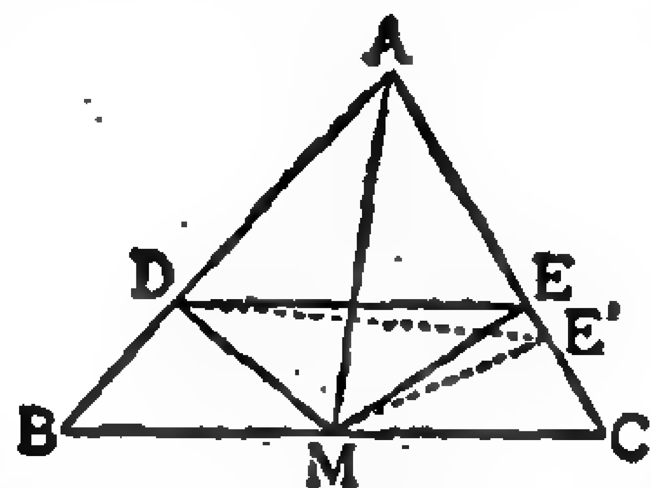
$$\therefore\ \frac{a^2}{DD'}+\frac{b^2}{EE'}+\frac{c^2}{FF'}=0.$$

1063. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线分别交它的对边 $BC(=a)$、$CA(=b)$、

$AB(=c)$ 于 D、E、F，试证六条线段 BD、DC，CE、EA，AF、FB 中每隔一个取三条线段的积为

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

解　根据题意，可知 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三个内角的平分线，则由问题 **1058**，得



$c:a=AE:EC$,

$\therefore\quad c:(c+a)=AE:(AE+EC)$,

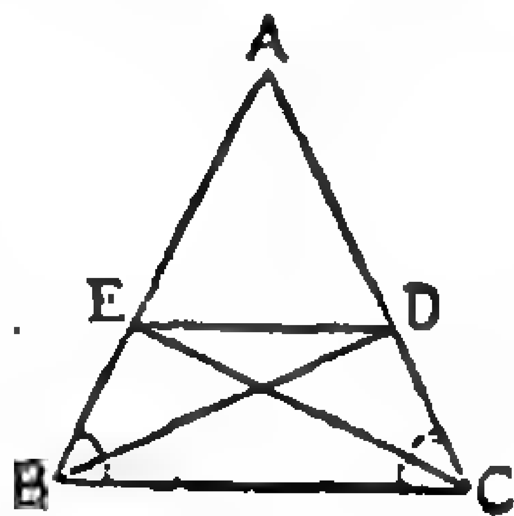
$c:(c+a)=AE:b$.

$\therefore\quad AE=\dfrac{bc}{c+a}$.

同理可得，$FB=\dfrac{ca}{a+b}$，$DC=\dfrac{ba}{c+b}$.

$\therefore\quad EA\cdot FB\cdot DC=\dfrac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

1064.　在 $\triangle ABC$ 中，引平行于 BC 的直线 DE，交 AB、AC 分别于点 D、点 E，设 BC 的中点为 M，且 MD 是 $\angle AMB$ 的平分线，则 ME 是 $\angle AMC$ 的平分线.



解　假设 $\angle AMC$ 的平分线与 AC 的交点为 E'，则

$AE':E'C=AM:MC$,

$AD:DB=AM:MB$.

而 M 是 BC 的中点，即 $MB=MC$.

$\therefore\quad AE':E'C=AD:DB$.

$\therefore\quad DE'\parallel BC$.

而 $DE\parallel BC$. 所以点 E' 与点 E 相重合. 即 ME 是 $\angle AMC$ 的平分线.

1065.　在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle B$ 的平分线交 AC 于点 D，$\angle C$ 的平分线交 AB 于点 E，且 $BE=CD$，则 $AB=AC$.

解　因为 CE、BD 分别是 $\angle C$、$\angle B$ 的平分线，所以

$AE:BE=AC:BC$,

$AD:CD=AB:BC$.

而　$BE=CD$,

$\therefore\quad AE:AD=AC:AB$.

$\therefore\quad AE:AC=AD:AB$.

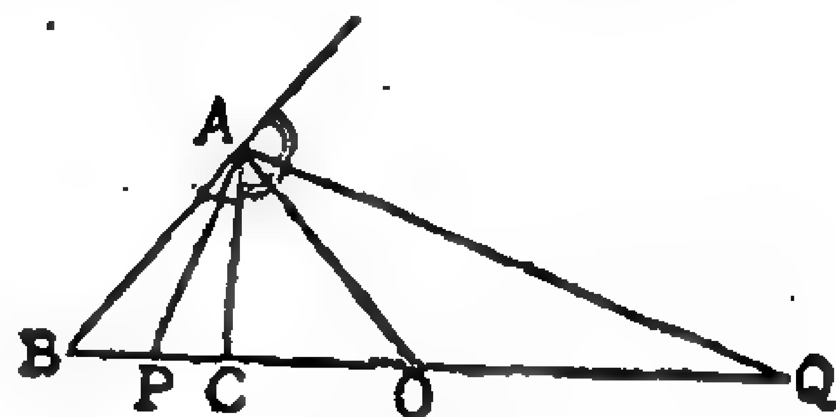
在 $\triangle ABD$、$\triangle ACE$ 中，$\angle A$ 是公共角，$AE:AC=AD:AB$，所以 $\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

$\therefore\quad \angle ABD=\angle ACE$.

从而得出，$\angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore\quad AB=AC$.

1066.　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 及与 $\angle A$ 相邻的外角的平分线分别交对边 BC 及其延长线于点 P、Q，设线段 PQ 的中点为 O，则 $OB:OC=AB^2:AC^2$.



解　根据问题 **1061**，得

$OA^2=OB\cdot OC$. 即 $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OC}{OA}$,

由此可得，$\triangle OAB\backsim\triangle OCA$.

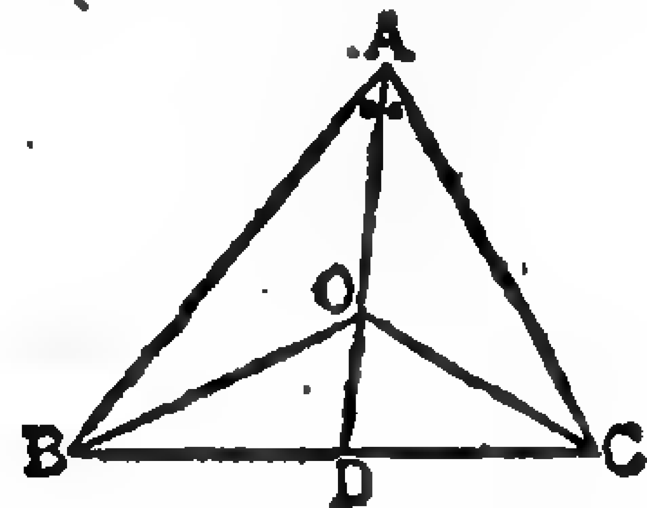
$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OCA}}=\frac{AB^2}{CA^2},$$

又　$$\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OCA}}=\frac{OB}{OC},$$

$$\therefore\quad \frac{AB^2}{AC^2}=\frac{OB}{OC},\ \text{即}\ \frac{OB}{OC}=\frac{AB^2}{AC^2}.$$

1067.　设 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的平分线为 AD，它的内心为 O，则

$$\frac{AB+AC}{BC}=\frac{AO}{OD}.$$



解　由 O 是 $\triangle ABC$ 内心可知，BO、CO 分别是 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线.

$$\therefore\quad \frac{AO}{OD}=\frac{AB}{BD},\ \frac{AO}{OD}=\frac{AC}{DC},$$

$$\therefore\quad \frac{AO}{OD}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}.$$

$$\because\quad \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}=\frac{AB+AC}{BD+DC},$$

即　$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}=\frac{AB+AC}{BC},$$

$$\therefore\quad \frac{AB+AC}{BC}=\frac{AO}{OD}.$$

1068.　$\triangle ABC$ 中，$AC>AB$，在 $\angle A$ 的平分线 AD 上取一点 P，则

$$\frac{PC}{PB}>\frac{AC}{AB}.$$

若点 P 在 DA 的延长线上，则

$$\frac{PC}{PB}<\frac{AC}{AB}.$$

解 如图(1)在 AB 的延长线上取 C'，使 $AC'=AC$，则

$\triangle AC'P\cong\triangle ACP$.

(1)

从而得出，$\angle CPD=\angle C'PD$.

$\therefore\quad \angle CPD<\angle BPD$.

引 $\angle BPC$ 的平分线 PD'，则 D' 在 D 与 B 之间，即

$BD>BD'$.

而 $\dfrac{PC}{PB}=\dfrac{CD'}{BD'}$,

$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BD}$.

(2)

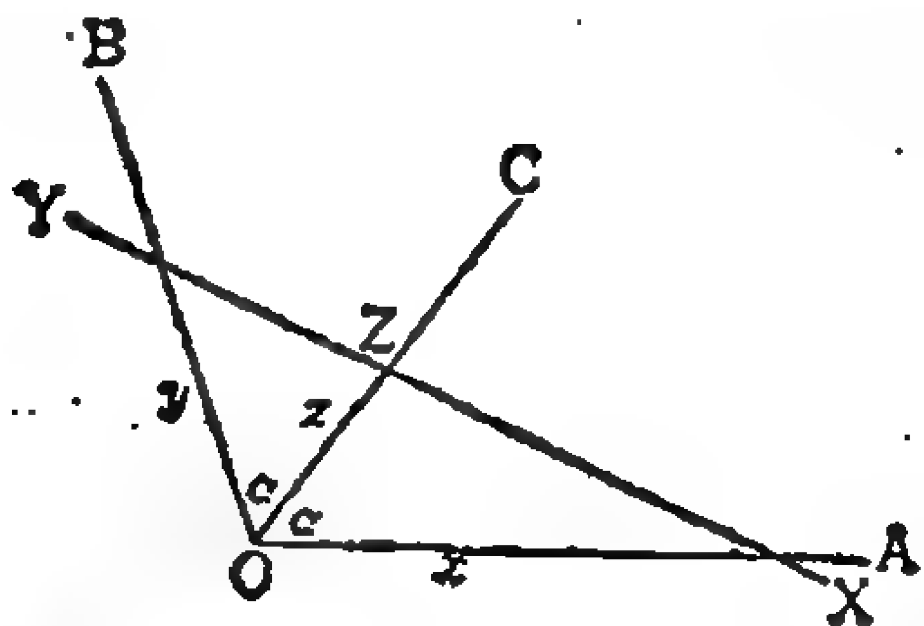
$$\therefore\quad \frac{PC}{PB}>\frac{AC}{AB}.$$

若点 P 在 DA 的延长线上(图2)，则 D' 在 C 与 D 之间。

$$\therefore\quad \frac{PC}{PB}<\frac{AC}{AB}.$$

1069. 如下图，$\angle AOB=2\alpha$，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线。设一直线与 OA、OB、OC 分别交于 X、Y、Z，且 $OX=x$、$OY=y$、$OZ=z$，证明 x、y、z 之间有下列关系：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2\cos\alpha}{z}.$$



解 由 $S_{\triangle XOZ}+S_{\triangle YOZ}=S_{\triangle XOY}$ 可得，

$$\frac{1}{2}OX\cdot OZ\sin\alpha+\frac{1}{2}OY\cdot OZ\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}OX\cdot OY\sin 2\alpha,$$

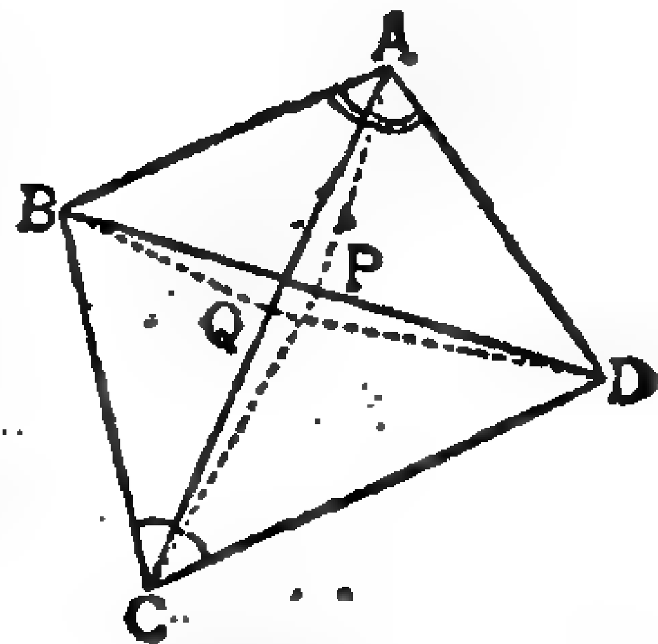
即 $\quad (xz+yz)\sin\alpha=xy\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha.$

$$\therefore\quad xz+yz=2xy\cos\alpha.$$

等式两端同除以 xyz，得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2\cos\alpha}{z}.$$

1070. 在四边形 $ABCD$ 中，设 $\angle A$、$\angle C$ 的平分线的交点在对角线 BD 上，则另一组对角 B、D 的平分线的交点在对角线 AC 上。



解 设 $\angle A$、$\angle C$ 的平分线的交点 P 在 BD 上，则

$$AB:AD=BP:PD,\ BC:CD=BP:PD.$$

$$\therefore\quad AB:AD=BC:CD,$$

$$\therefore\quad AB:BC=DA:CD. \qquad ①$$

设 $\angle B$ 的平分线与 AC 的交点为 Q，则

$$BA:BC=AQ:QC. \qquad ②$$

由①、②得 $DA:CD=AQ:QC$.

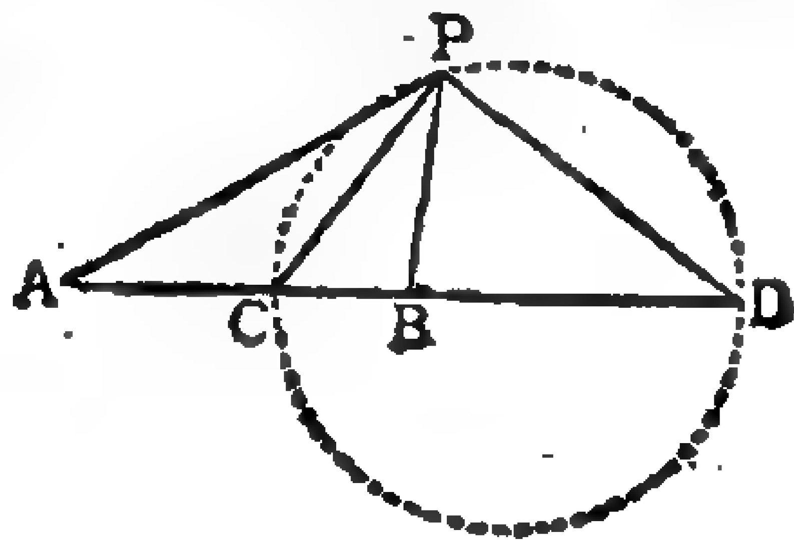
由此可知，DQ 是 $\angle D$ 的平分线，即 $\angle B$、$\angle D$ 的平分线的交点在对角线 AC 上。

1071. 若动点 P 到两定点 A、B 的距离 PA、PB 的比等于定比 $m:n$，则点 P 在把线段 AB 内分和外分成定比 $m:n$ 的两个点的连结线段为直径的圆上。(但 $m\neq n$)

[阿波罗尼斯定理]

解 设在 $\triangle APB$ 中，$PA:PB=m:n$，作 $\angle P$ 的平分线 PC，则

$AC:CB=m:n$.

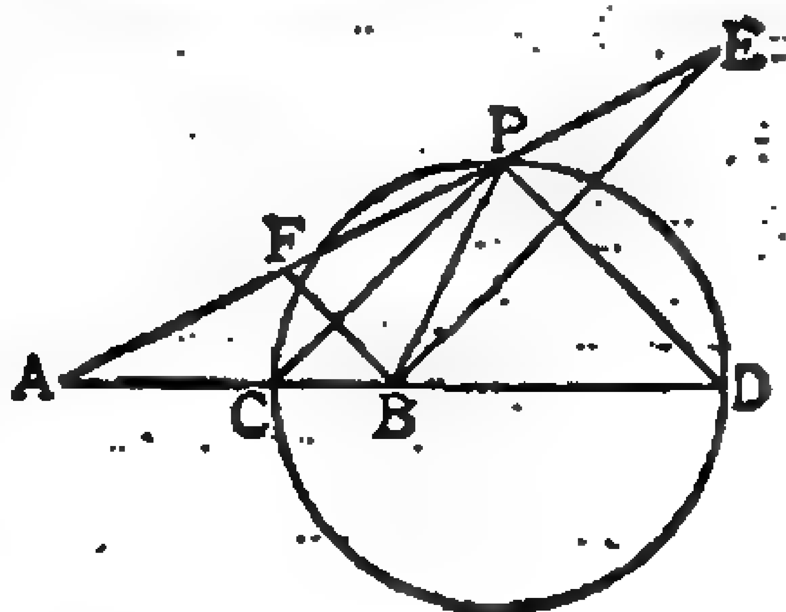


又作与 $\angle P$ 相邻的外角的平分线 PD，则

$$AD:BD=m:n.$$

而 $\angle CPD=90°$. 所以点 P 在以 CD 为直径的圆上，即在以把 AB 内分和外分成定比 $m:n$ 的两个点 C、D 的连结线段 CD 为直径的圆上。

1072. 设把给定线段 AB 内分和外分成定比 $m:n$ 的点分别为 C、D，P 为以 CD 为直径的圆上任



意一点，则 $PA:PB=m:n$。(上一定理的逆定理)

解　过点 B 引 PC、PD 的平行线与 AP 的延长线、AP 的交点分别为 E、F，则

$$PA:PE=AC:CB=m:n,$$
$$PA:PF=DA:DB=m:n.$$
$$\therefore\ PA:PE=PA:PF.$$
$$\therefore\ PE=PF.$$

又 P 是以 CD 为直径的圆上的点，所以

$$\angle CPD=90^\circ.$$
$$\because\ BE\parallel PC,\ BF\parallel PD,$$
$$\therefore\ \angle FBE=90^\circ.$$

而　$PE=PF$。$\therefore$　$PB=PE=PF$。

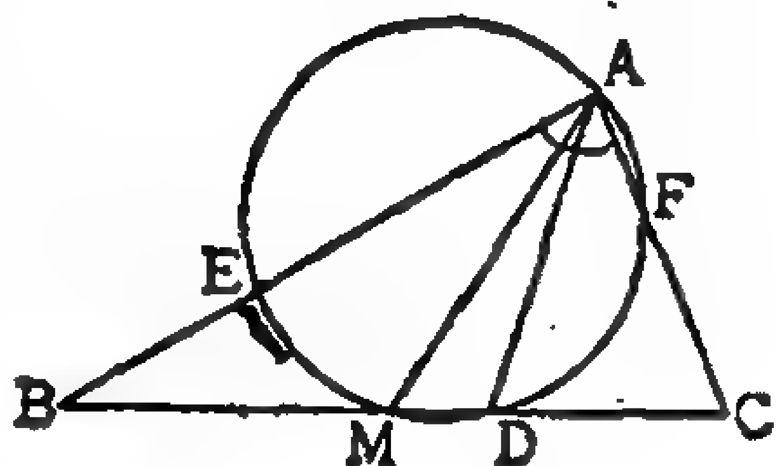
由此可得，　$PA:PB=PA:PE$。

即　　$PA:PB=AC:CB=m:n$，

这就是说，以 CD 为直径的圆上的任意一点 P 都必须满足条件

$$PA:PB=m:n.$$

1073.　设 $\triangle ABC(AB\neq AC)$ 的 $\angle A$ 的平分线与边 BC 的交点为 D，BC 的中点为 M，过点 A、D、M 的圆与 AB、AC 的交点分别为 E、F，则



$$BE=CF.$$

解　$\because$　$BM\cdot BD=BE\cdot BA$,

$$CD\cdot CM=CF\cdot CA,$$

而 $CM=BM$，

$$\therefore\ \frac{BD}{CD}=\frac{BE}{CF}\cdot\frac{BA}{CA}.$$

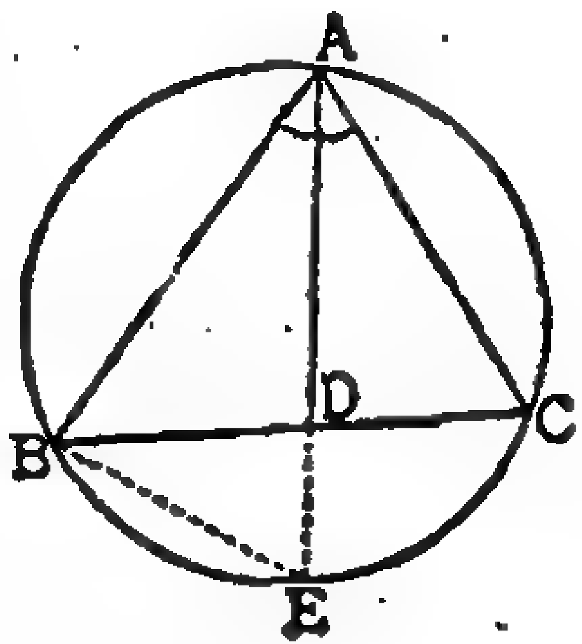
因为 AD 是 $\angle A$ 的平分线，所以

$$\frac{BA}{CA}=\frac{BD}{CD}.$$

由此可得 $\dfrac{BE}{CF}=1$。$\therefore$　$BE=CF$。

1074.　设 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的平分线与底边、外接圆的交点分别为 D、E，则

$$AB\cdot AC=AD\cdot AE.$$



解　连结 BE。在 $\triangle ABE$、$\triangle ADC$ 中，

$\angle E=\angle C$, $\angle BAE=\angle DAC$,

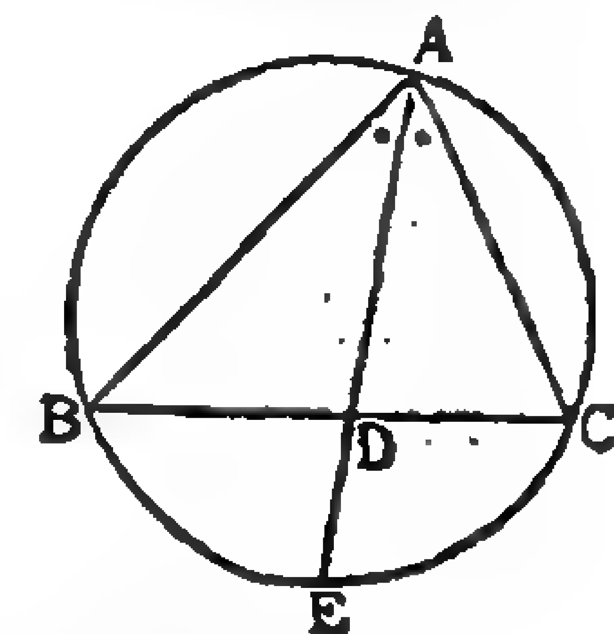
$$\therefore\ \triangle ABE\backsim\triangle ADC.$$

从而得出，$AB:AE=AD:AC$。

即　　　$AB\cdot AC=AD\cdot AE$。

1075.　设 $\triangle ABC$ 的边 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $a+b+c=2s$，$\angle A$ 的平分线与 BC 交于点 D，则

$$AD^2=\frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}.$$



解　延长 AD 交 $\triangle ABC$ 外接圆于点 E，根据上题可得

$$AB\cdot AC=AD\cdot AE.$$

即　　$AB\cdot AC=AD(AD+DE)$

$$=AD^2+AD.ED,$$

而　　$AD\cdot DE=BD\cdot DC$。

又　$BD=\dfrac{ca}{b+c}$，$DC=\dfrac{ba}{b+c}$。

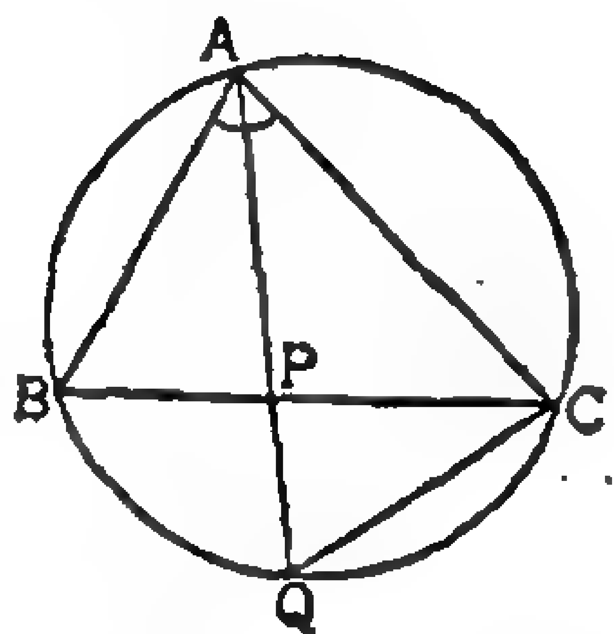
(问题 **1060**)

$$\therefore\ cb=AD^2+\frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

$$\therefore\ AD^2=\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}.$$

1076.　设 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的平分线与底边交于点 P，延长 AP，并在 AP 的延长线上取点 Q，使以 AP、AQ 为边的矩形与 AB、AC 为边的矩形等积，则点 Q 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上(问题 **1074** 的逆命题)。



解　由假设，得 $AB\cdot AC=AP\cdot AQ$，即

$$AB:AP=AQ:AC.$$

在 $\triangle ABP$、$\triangle AQC$ 中，$\angle BAP=\angle CAQ$ (假设)，

$$AB:AP=AQ:AC,$$
$$\therefore\ \triangle ABP\backsim\triangle AQC.$$
$$\therefore\ \angle ABP=\angle AQC.$$

由此可得，点 A、B、Q、C 共圆．也就是点 Q 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上。

1077.　设 AB 是半径为 a 的圆 O 的直径，M 是 AB 的内分点，且 $AM:MB=7:1$，

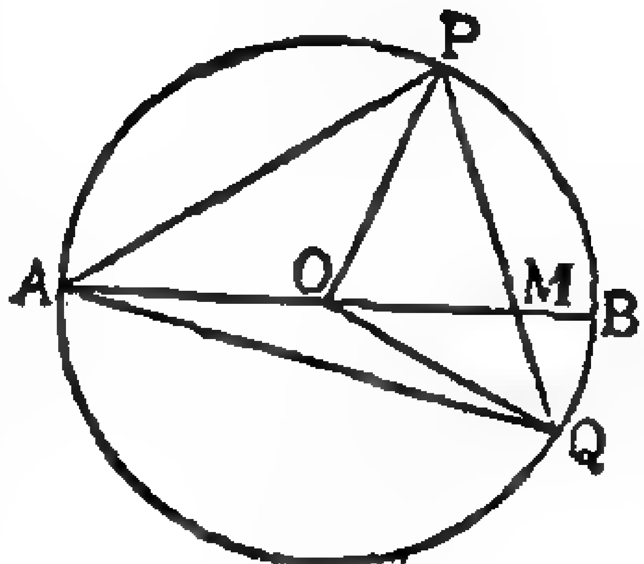
过 M 引弦 PQ，则 $\triangle APQ$ 面积的最大值是 $\frac{7}{6}a^2$。

解　$\triangle APQ$ 与 $\triangle OPQ$ 公有底边 PQ，

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle APQ}}=\frac{OM}{AM}.$$

$\because\ AM:MB=7:1,\quad \therefore\ AM:OM=7:3.$

所以，$\quad S_{\triangle OPQ}=\frac{3}{7}S_{\triangle APQ}.$



由此可知，要使 $\triangle APQ$ 的面积取得最大值，只要使 $S_{\triangle OPQ}$ 的面积取得最大值即可．而 OP、OQ 都是圆 O 的半径，它们都等于 a，是定值．又

$$S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}OP\cdot OQ\sin\angle POQ.$$

所以，当 $\angle POQ=90°$ 时，$\triangle POQ$ 的面积取得最大值，这时，

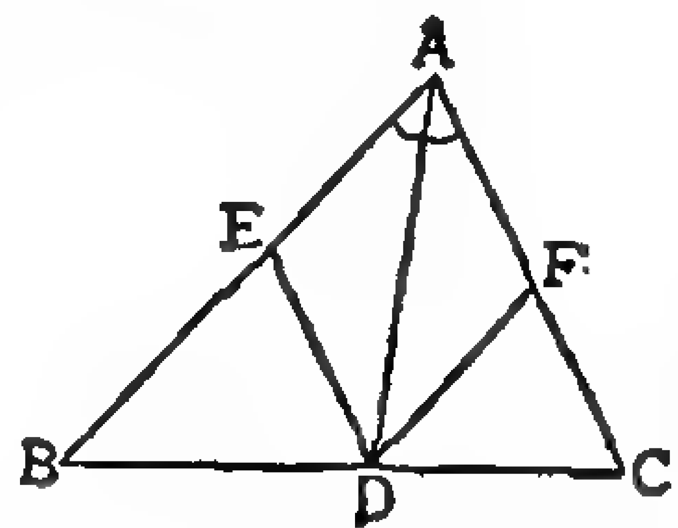
$$S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}a^2.$$

由此可得，$\triangle APQ$ 面积的最大值

$$=\frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{7}{6}a^2.$$

1078.　若 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的大小及其平分线 AD 的长度一定，则顶角 A 两夹边的倒数的和 $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$ 是一定值。

解　过 D 作 AC、AB 的平行线，它们分别交 AB 于点 E，交 AC 点 F，则



$$\frac{DF}{AB}=\frac{DC}{BC},\qquad ①$$

$$\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}.\qquad ②$$

①+②，得

$$\frac{DF}{AB}+\frac{DE}{AC}=\frac{DC+BD}{BC}=\frac{BC}{BC}=1.\qquad ③$$

又 AD 是 $\angle A$ 的平分线，且 $DE\parallel AF$，$DF\parallel AE$，所以 $AEDF$ 是菱形。根据题设条件，可知，AD、$\angle A$ 的大小是定值．由此可得，菱形是一定的，所以 $DE=DF$，且其长一定，设为 m，则由③可知，

$$\frac{m}{AB}+\frac{m}{AC}=1.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{m}.\ (定值)$$

1079.　如图，若 OP、OQ、OR、OS 的长分别为 p、q、r、s，且

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s},$$

又 RS、PQ 相交于 T，证明 OT 是 $\angle POQ$ 的平分线。

解　设 $\angle POS$ 的平分线与 PQ、RS 的交点分别为 D、E，则由上题可得

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{1}{m},\quad \frac{1}{OR}+\frac{1}{OS}=\frac{1}{m'}.$$

但由假设，得

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{1}{OR}+\frac{1}{OS}.\quad \therefore\quad m=m',$$

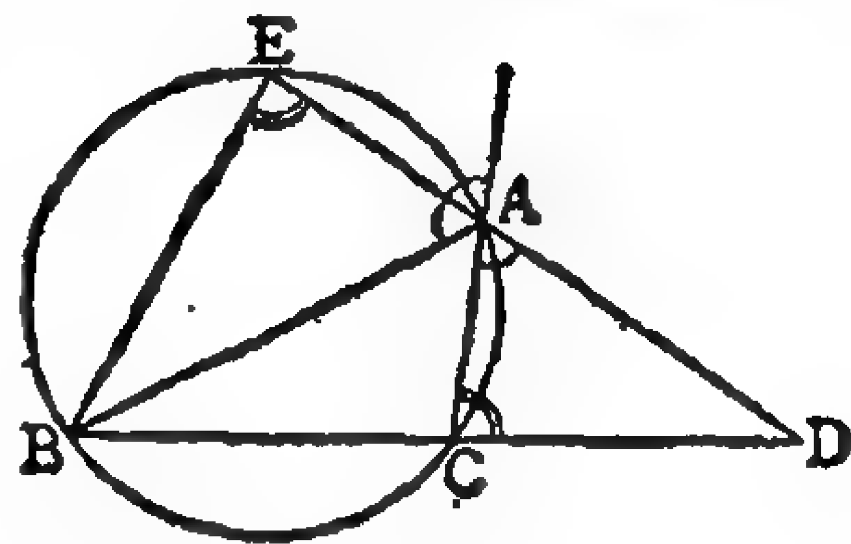
而 $\quad m=\frac{DO}{2}\sec\frac{\angle POQ}{2},$

$\quad m'=\frac{EO}{2}\sec\frac{\angle ROS}{2}.$　（问题 1069）

$$\therefore\quad DO=EO.$$

因此，O、E 在点 T 处相重合，从而得出 TO 是 $\angle POQ$ 的平分线。

1080.　在 $\triangle ABC$ 中，与 $\angle A$ 相邻的外角的平分线与三角形的外接圆的另一交点为 E，与边 BC 的延长线的交点为 D，则



$$AB\cdot AC=AD\cdot AE,$$

$$AD^2=DB\cdot DC-AB\cdot AC.$$

解　设 AE 是与 $\angle A$ 相邻的外角平分线，所以

$$\angle EAB=\angle DAC.$$

又四边形 $EACB$ 是圆内接四边形，

$$\therefore\quad \angle E=\angle ACD.$$

$$\therefore\quad \triangle AEB\backsim\triangle ACD.$$

从而得出，$\quad AB:AE=AD:AC.$

$$\therefore\quad AB\cdot AC=AD\cdot AE.$$

把 $AE=DE-AD$ 代入上式，得

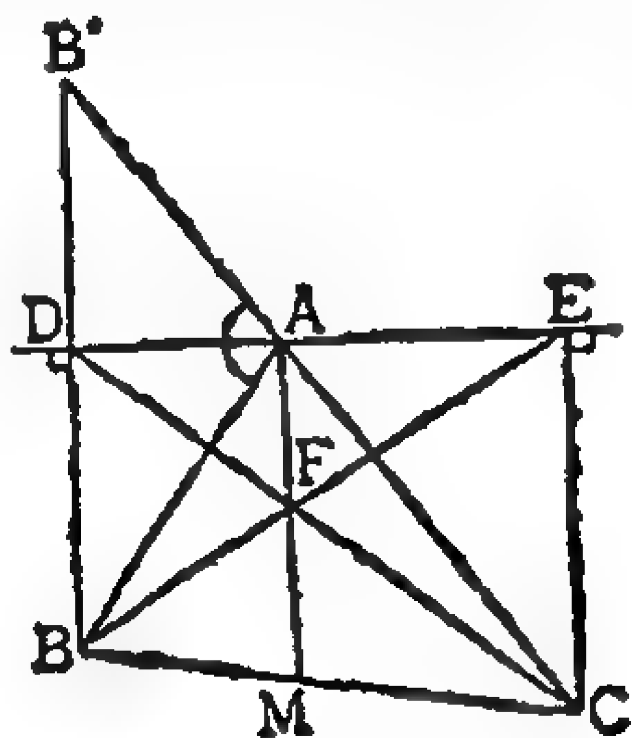
$$AB\cdot AC=AD(DE-AD)$$
$$=AD\cdot DE-AD^2.$$

而 $AD\cdot DE=DB\cdot DC.$

$\therefore\ AB\cdot AC=DB\cdot DC-AD^2.$

$\therefore\ AD^2=DB\cdot DC-AB\cdot AC.$

1081. 在$\triangle ABC$中，从B、C向与$\angle A$相邻的外角的平分线引垂线，设垂足分别为D、E，则两直线BE、CD的交点在$\angle A$的平分线上。



解 设延长BD与CA的延长线相交于点B'。因为AD是$\angle BAB'$的平分线，且$BB'\perp AD$，所以

$$DB=DB'.$$

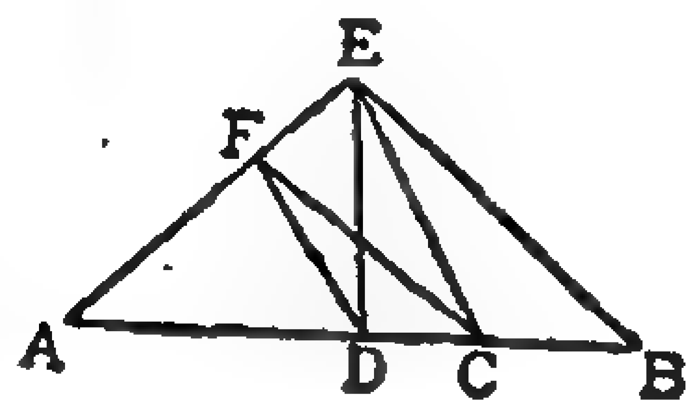
若$\angle A$的平分线为AM，则$AM\parallel BB'$。设DC与AM的交点F，则有

$$AF:FM=B'D:BD.$$

而$B'D=BD$所以F是AM的中点，即CD过AM的中点F。

同理可得，BE也过AM的中点F。这就是说，BE、CD的交点(F)在$\angle A$的平分线AM上。

1082. 设直线AB被点C、D所内分，且$AB:AC=AC:AD$，过A引等于AC的另一线段AE，则EC是$\angle BED$的平分线。



解 设过C引BE的平行线与AE的交点为F，则

$$AB:AC=AE:AF.$$

又 $AB:AC=AC:AD.$

$\therefore\ AE:AF=AC:AD.$

而 $AE=AC.\ \therefore\ AF=AD.$

由此可得， $CD=EF.$

又 $\angle ACE=\angle AEC,$

$\therefore\ \triangle CED\cong\triangle ECF.$

$\therefore\ \angle DEC=\angle FCE.$

$\because\ EB\parallel FC,\ \therefore\ \angle FCE=\angle CEB.$

$\therefore\ \angle DEC=\angle CEB.$

即EC是$\angle BED$的平分线。

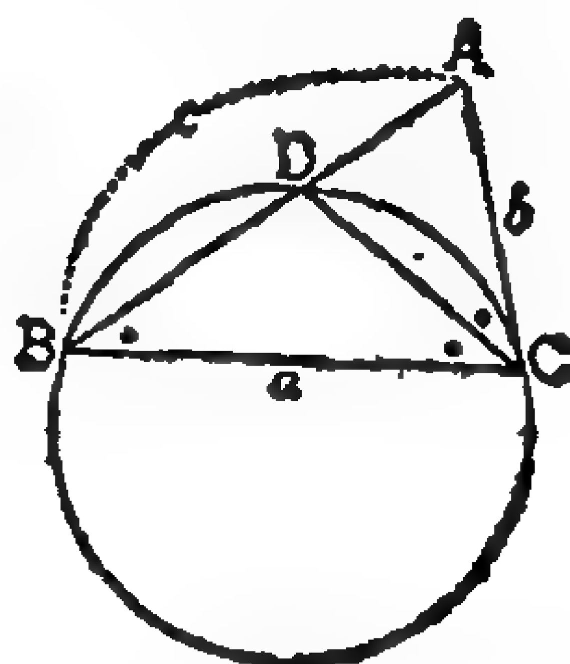
1083. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=2\angle B$，设$\angle C$的平分线交对边于D，则

$$CD=\frac{ab}{c},$$

其中a、b、c分别是$\triangle ABC$的边BC、CA、AB的长。

解 设$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$2\angle B=\angle C$，CD是$\angle C$的平分线，则三角形BCD是等腰三角形。所以

$$BD=CD.$$



又

$$\angle BCD=\angle ACD$$
$$=\angle ABC,$$

$\therefore\ \angle ABC=\angle ACD.$

由此可知，AC是$\triangle BCD$的外接圆的切线。所以，

$AC^2=AD\cdot AB.$ 即 $b^2=AD\cdot c.$

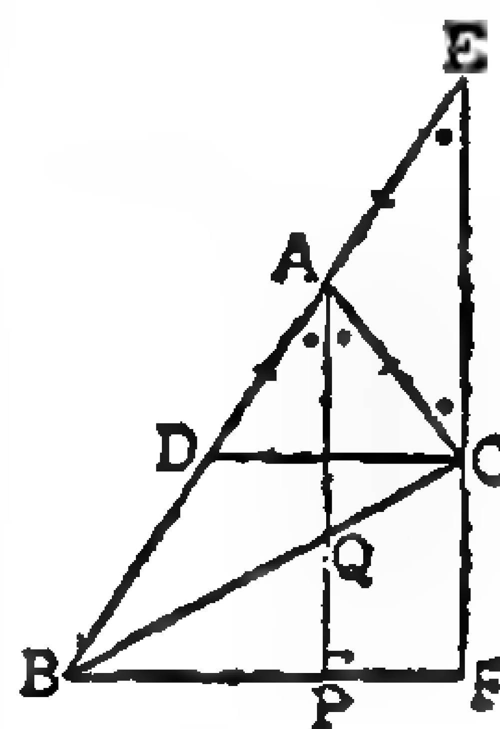
又 $\because\ AD:BD=b:a,$

$$\therefore\ BD=\frac{b^2}{c}\cdot\frac{a}{b}=\frac{ab}{c}.$$

而$BD=CD.$ $\therefore\ CD=\dfrac{ab}{c}.$

1084. 在$\triangle ABC$中，$AB=nAC$，由B向$\angle A$的平分线作垂线，设其垂足为P，BC、AP的交点为Q，则

$$PQ:QA=(n-1):2.$$



解 过C引AP的平行线，与BA的延长线、BP的延长线的交点分别为E、F，又因为AP是$\angle A$的平分线，所以$AE=AC$。

在AB上截取AD使$AD=AC$。显然，$DC\parallel BP$。

$\therefore\ PQ:QA=FC:CE=BD:DE.$

而 $AB=nAC.$

$\therefore\ BD:DE=(n-1)AC:2AC.$

$\therefore\ PQ:QA=(n-1):2.$

1085. 在$\triangle ABC$中，CD是$\angle C$的平分线，CD的垂直平分线与AB的延长线交于点E，则$EA\cdot EB=ED^2$。

解 由题设条件可得，$\angle ECD=\angle EDC$。

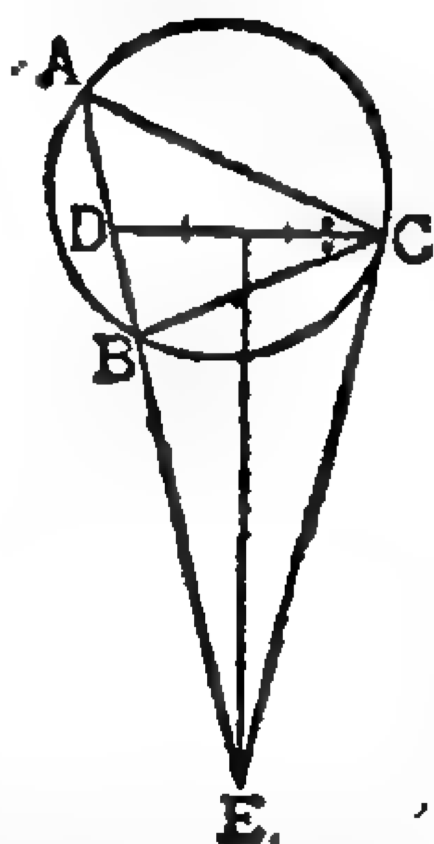
$\because\ \angle ECD=\angle BCE+\angle BCD,$

$\angle EDC=\angle A+\angle ACD,$

且　$\angle BCD=\angle ACD$,

∴　$\angle BCE=\angle A$.

从而得出，CE 是圆 ABC 的切线。



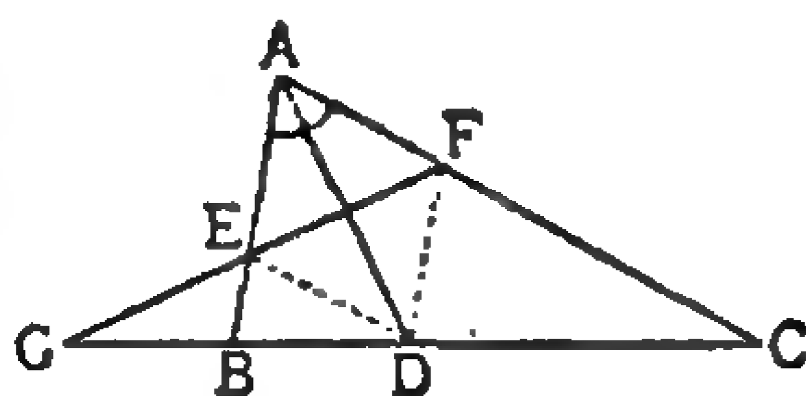
∴　$EA\cdot EB=EC^2$.

即　$EA\cdot EB=ED^2$.

1086. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC=2AB$，$\angle A$ 的平分线与底边 BC 交于 D，过 D 引 AB、AC 的平行线 DF、DE，与 AB，AC 的交点分别为 E、F，又 FE、CB 的延长线相交于点 G，则 $EF=EG$，且

$$S_{\triangle EBG}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}.$$

解　由 AD 是 $\angle A$ 平分线且 $AC=2AB$ 可知，



$DB:DC$

$=AB:AC=1:2$.

又 $DE\parallel AC$，$DF\parallel AB$，所以

$$\triangle BDE\backsim\triangle DCF.$$

$$\therefore\quad BE:DF=BD:DC=1:2.$$

而　$GB:GD=BE:DF$.

$$\therefore\quad GB:GD=1:2.$$

$$\therefore\quad GB=BD.\quad\therefore\quad S_{\triangle EBG}=S_{\triangle EBD}.$$

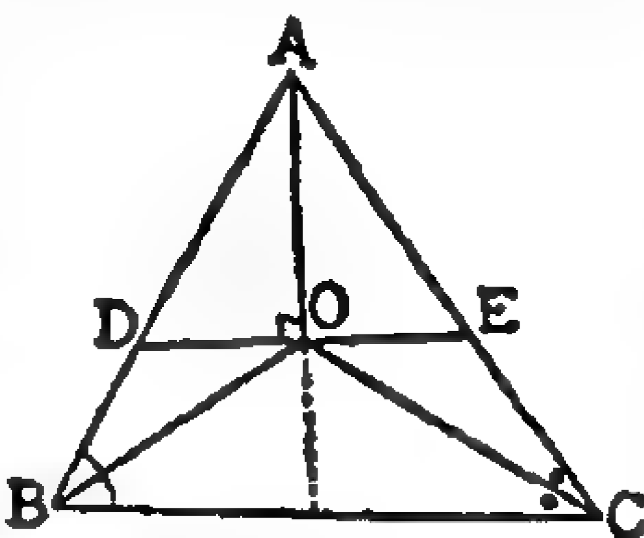
$$\because\quad \triangle EBD\backsim\triangle ABC,$$

$$\therefore\quad S_{\triangle EBD}:S_{\triangle ABC}=BD^2:BC^2=1^2:3^2=1:9.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle EBD}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC},$$

即　$$S_{\triangle EBG}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}.$$

1087. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$、$\angle B$ 的平分线相交于 O，过 O 引 AO 的垂线与边 AB、AC 分别交于 D、E，则 OD 是 BD、CE 的比例中项（同理 OE 也是 BD、CE 的比例中项）。



解　由题意可知 O 是 $\triangle ABC$ 的内心。连结 OC，则

$$\angle COE=\left(180^\circ-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle C}{2}\right)-90^\circ$$

$$=90^\circ-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle C}{2}=\frac{\angle B}{2}.$$

同理　$$\angle BOD=\frac{\angle C}{2}.$$

由此可得，$\triangle OBD\backsim\triangle COE$.

所以　$BD:OE=OD:CE$.

而　$OD=OE$.

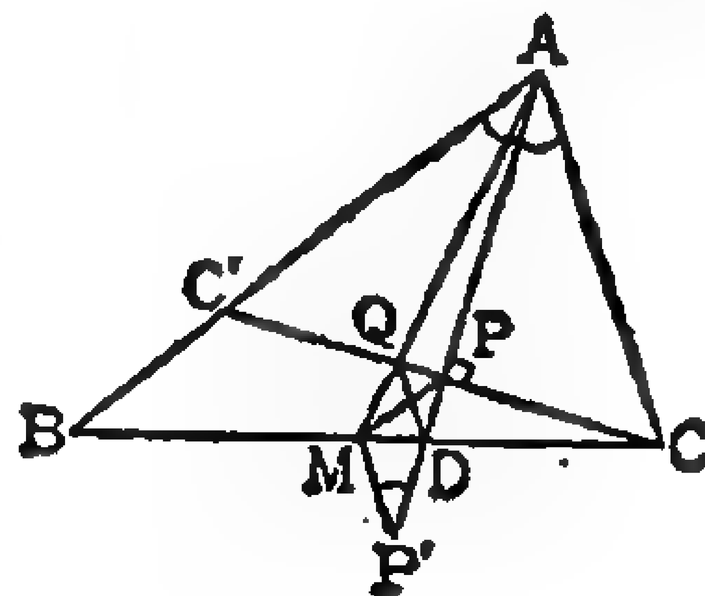
∴　$BD:OD=OD:CE$（或 $BD:OE=OE:CE$）.

即 OD 是 BD 与 CE 的比例中项（OE 也是 BD、CE 的比例中项）。

1088. 若 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的平分线交 BC 于 D，$\angle ADB$ 的平分线交边 AB 于 E，$\angle ADC$ 的平分线交 AC 于 F，则

$$S_{\triangle BEF}:S_{\triangle CEF}=AB:AC.$$

解　$$\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle CEF}}=\frac{BE}{AE}.$$



由 DE 是 $\angle ADB$ 的平分线，得

$$\frac{BE}{AE}=\frac{BD}{AD}.$$

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{BD}{AD},\qquad ①$$

同理可得

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle CEF}}=\frac{AF}{CF}=\frac{AD}{CD}.\qquad ②$$

由①、②，得

$$\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle CEF}}=\frac{BD}{CD}.\qquad ③$$

而 AD 是 $\angle A$ 的平分线.

$$\therefore\quad \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}.$$

代入③，得

$$S_{\triangle BEF}:S_{\triangle CEF}=AB:AC.$$

1089. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle A$ 的平分线交对边 BC 于点 D，BC 的中点为 M，从 C 向 AD 或其延长线引垂线 CP 与 AM 或其延长线的交点为 Q，则 QD 平行于 AC.

解　设延长 CQ 与 AB 交于 C'，则 $AC'=AC$. 因为 M 是 BC 的中点，P 是 CC' 的中点，所以

$$MP\parallel AB.$$

$$\therefore\quad AC':PM=AQ:QM.\qquad ①$$

由 M 引 AC 平行线与 AD 的延长线交于点 P'。

而　　$\angle BAP'=\angle P'AC$。

由此可得　$\angle MPP'=\angle MP'P$。

$$\therefore\quad MP=MP'.$$

又

$$AC:MP'=DC:MD. \qquad ②$$

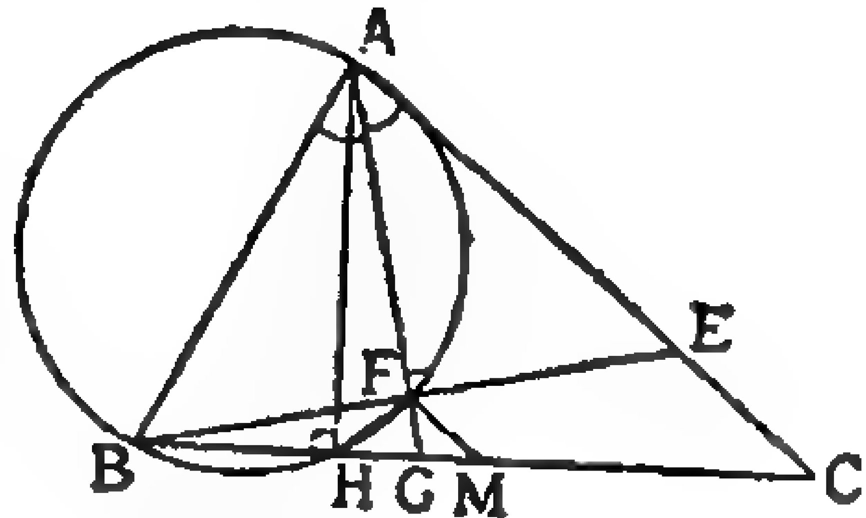
由①、②，得 $AQ:QM=DC:MD$。

$$\therefore\quad QD\parallel AC.$$

1090. 在 $\triangle ABC$ 中，设边 BC 的中点为 M。由 A 向 BC 引垂线 AH，$\angle A$ 的平分线 AG，则

$$MH\cdot MG=\frac{1}{4}(AC\sim AB)^2.$$

解　由 B 引 $BF\perp AG$，设垂足为 F，BF 的延长线与 AC 的交点为 E，所以 $BF=FE$。



$$\therefore\quad MF\parallel AC.$$

且　　$MF=\frac{1}{2}CE=\frac{1}{2}(AC\sim AB)$。

又四边形 $AFHB$ 是圆内接四边形，所以 $\angle FHG=\angle BAF=\angle FAE=\angle GFM$。

由此可得，MF 是圆 HFG 在点 F 处的切线。

$$\therefore\quad MH\cdot MG=MF^2=\frac{1}{4}(AC\sim AB)^2$$

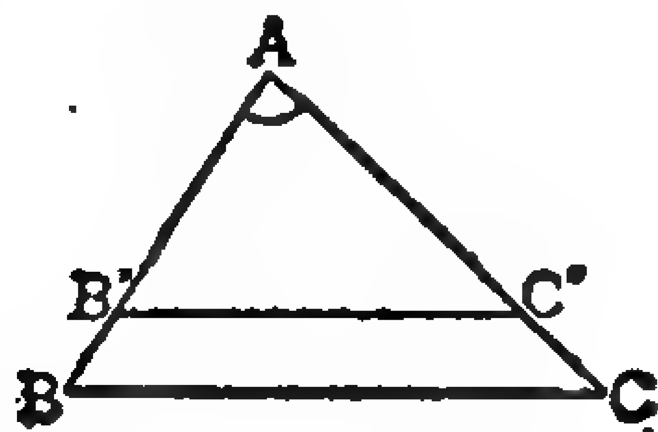
4. 相似三角形、相似多边形、位似中心

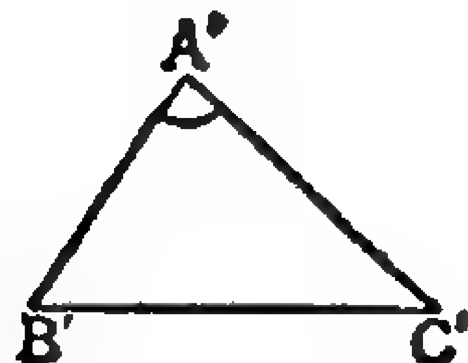
1091. 如果一个三角形的三个角和另一个三角形的三个角对应相等，那么这两个三角形相似。

解　在 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中，设

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C'.$$

如果在 AB、AC 上分别截取 AB''、AC''，使





$AB''=A'B'$，$AC''=A'C'$，连结 $B''C''$，那么 $\triangle AB''C''\cong\triangle A'B'C'$。

$$\therefore\quad \angle AB''C''=\angle B'=\angle B.$$

$$\therefore\quad B''C''\parallel BC.$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{AB''}=\frac{AC}{AC''}=\frac{BC}{B''C''}.$$

$$\therefore\quad \triangle ABC\backsim\triangle AB''C''.$$

从而得出，　$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$。

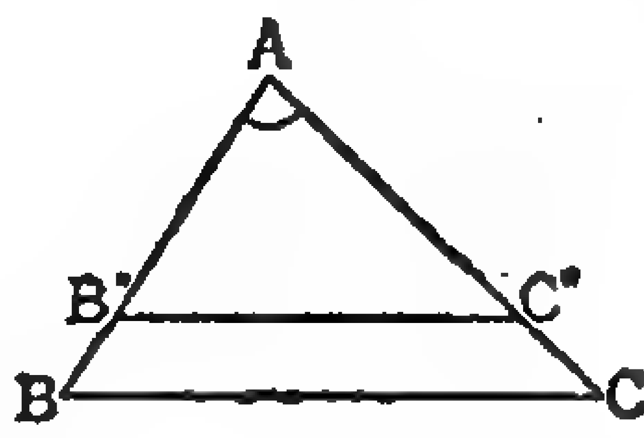
1092. 如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似。

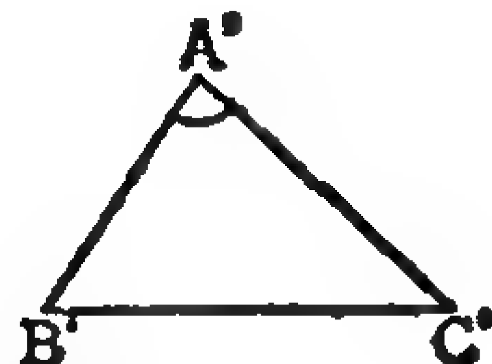
解　在 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中，

$$\angle A=\angle A',\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

在 AB 上截取 $AB''=A'B'$，从 B'' 作 BC 的平行线交 AC 于 C''，则在 $\triangle ABC$、$\triangle AB''C''$ 中，$\angle A$ 公有，$\angle B=\angle B''$，$\angle C=\angle C''$，

$$\therefore\quad \triangle ABC\backsim\triangle AB''C''. \qquad ①$$





又　　$AC:AC''=AB:AB''$，

$AB:A'B'=AC:A'C'$。

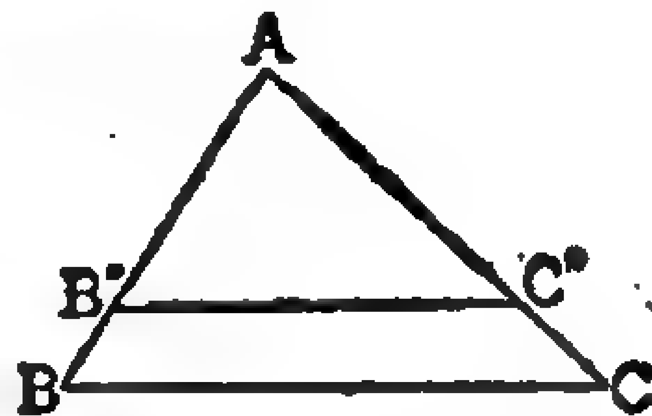
$$\therefore\quad AC:AC''=AC:A'C'.$$

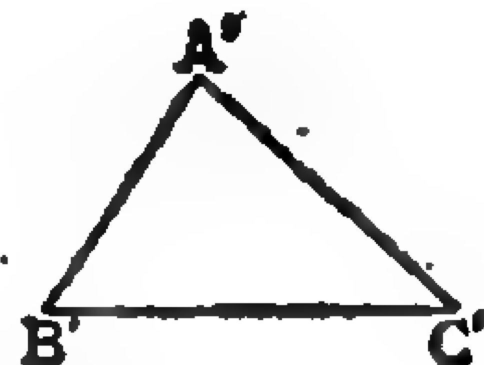
$$\therefore\quad AC''=A'C',$$

$$\therefore\quad \triangle AB''C''\cong\triangle A'B'C'. \qquad ②$$

由①、②可知，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$。

1093. 如果一个三角形的三条边和另一个三角形三条边对应成比例，那么这两个三角形相似。





解　在 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中，

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}.$$

在 AB、AC 上分别截取 $AB''=A'B'$，$AC''=A'C'$，则 $AB:AB''=AC:AC''$。

$$\therefore\quad B''C''\parallel BC.$$

因此 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB''C''$ 的角对应相等，且

三组边对应成比例，

$$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle AB''C''. \qquad ①$$

又 $\because \dfrac{AB}{AB''}=\dfrac{BC}{B''C''}$,

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}, \quad AB''=A'B',$$

$$\therefore B''C''=B'C'.$$

$$\therefore \triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'. \qquad ②$$

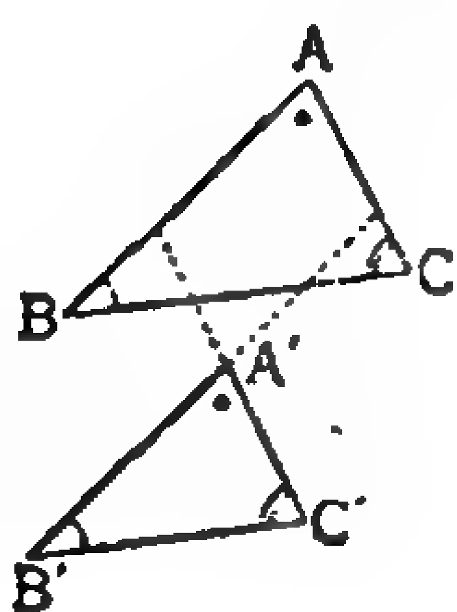
由①、②，得 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

1094. 三组对应边分别平行或垂直的两个三角形相似。

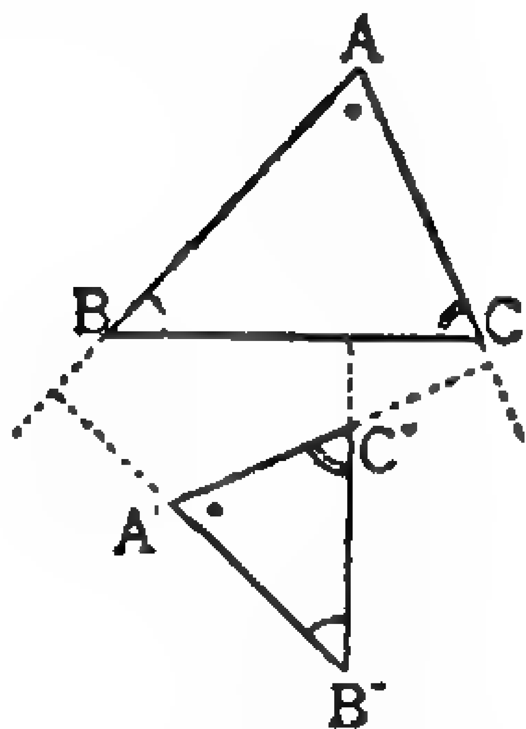
解 如图(1)，在 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中，设 $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$，则

$$\angle A=\angle A', \angle B=\angle B', \angle C=\angle C',$$

$$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$



(1)



(2)

如图(2)，在 $\triangle ABC$、$\triangle A''B''C''$ 中，设 $AB \perp A''B''$, $BC \perp B''C''$, $CA \perp C''A''$，则

$$\angle A=\angle A'', \angle B=\angle B'', \angle C=\angle C'',$$

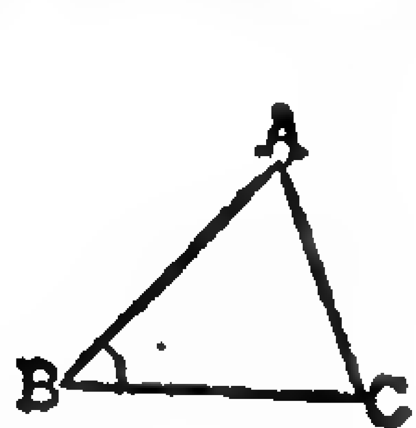
$$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A''B''C''.$$

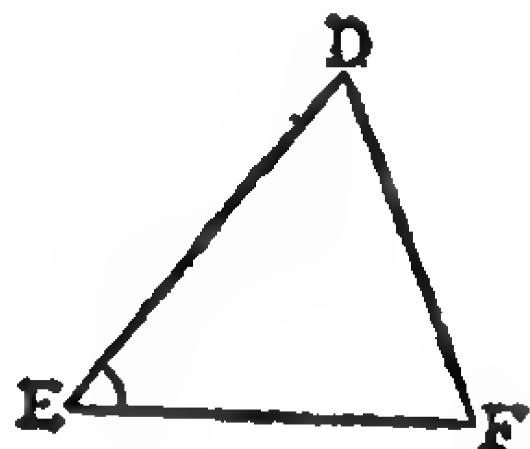
1095. 在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中，设

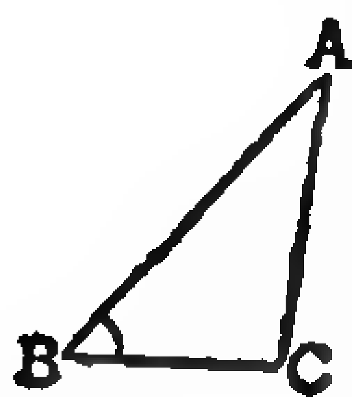
$$\angle B=\angle E, \quad \frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF},$$

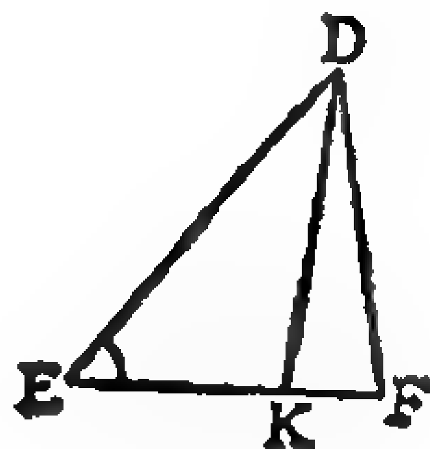
则 $\angle C$ 与 $\angle F$ 相等，或与 $\angle F$ 互补。

解 当 $\angle A=\angle D$ 时，则两个三角形由于两个角对应相等而相似，所以 $\angle C=\angle F$。









当 $\angle A \neq \angle D$ 且 $\angle D>\angle A$ 时，设

$$\angle EDK=\angle A,$$

则 $\triangle ABC \backsim \triangle DEK$.

$$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DK}.$$

而 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DE}{DF}$. $\therefore DK=DF$.

从而得出，$\angle DKF=\angle DFK$.

所以，$\angle DKE$ 即 $\angle C$ 与 $\angle DFK$ 互补。

1096. 求证：若 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 适合于下列两个条件，则这两个三角形相似：

(i) $AB:BC=A'B':B'C'$;

(ii) $\angle A=\angle A'$，且 $\angle A'>90°$.

又若条件(ii)改为下面的条件(iii)，上面的结论是否成立？

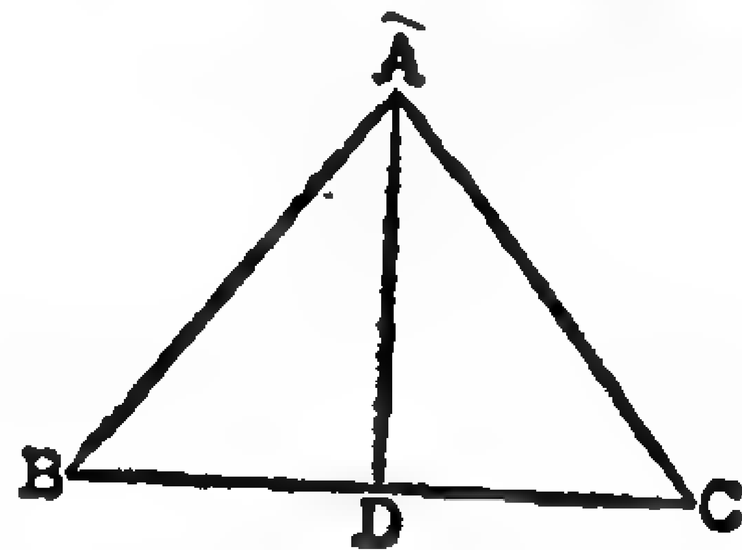
(iii) $\angle A=\angle A'$ 且 $\angle A'<90°$.

解 假设 $\angle A=\angle A'$，且 $\angle A'>90°$，则 $\angle C$、$\angle C'$ 都小于 $90°$。这时 $\angle C$、$\angle C'$ 不能构成补角，所以 $\angle C=\angle C'$.（根据上题），可得

$$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$

若 $\angle A=\angle A'$，且 $\angle A'<90°$，则 $\angle C$、$\angle C'$ 必须构成补角关系。这时这两个三角形不一定能相似。

1097. 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 引适当的直线把 $\triangle ABC$ 分成两个相似三角形，则 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形。



解 引直线 AD 把 $\triangle ABC$ 分为两个相似的三角形 ABD、ACD. 下面分 $\angle B=\angle C$ 或者 $\angle B=\angle CAD$ 两种情况来讨论。

(i) 当 $\angle B=\angle C$ 时，则可以就 $\angle BAD=\angle CAD$ 还是 $\angle BAD=\angle ADC$ 两种情况进行考察。当 $\angle ADC>\angle BAD$ 时，得 $\angle BAD=\angle CAD$，此外不可能还有其他情况，从而得出 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

(ii) 当 $\angle B=\angle CAD$ 时，得

$$\angle BAD=\angle C, \angle BAC=\angle B+\angle C.$$

所以 $\angle A=90°$，因此 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

1098. 在两个四边形 $ABCD$、$A'B'C'D'$ 中，若角按相同顺序对应相等，对应的两邻边

的比相等，则这两个四边形相似。

解 设 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$，$\angle B=\angle B'$，

则 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$。

$\therefore\ \frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$， ①

$\angle ACB=\angle A'C'B'$。

而 $\angle C=\angle C'$。

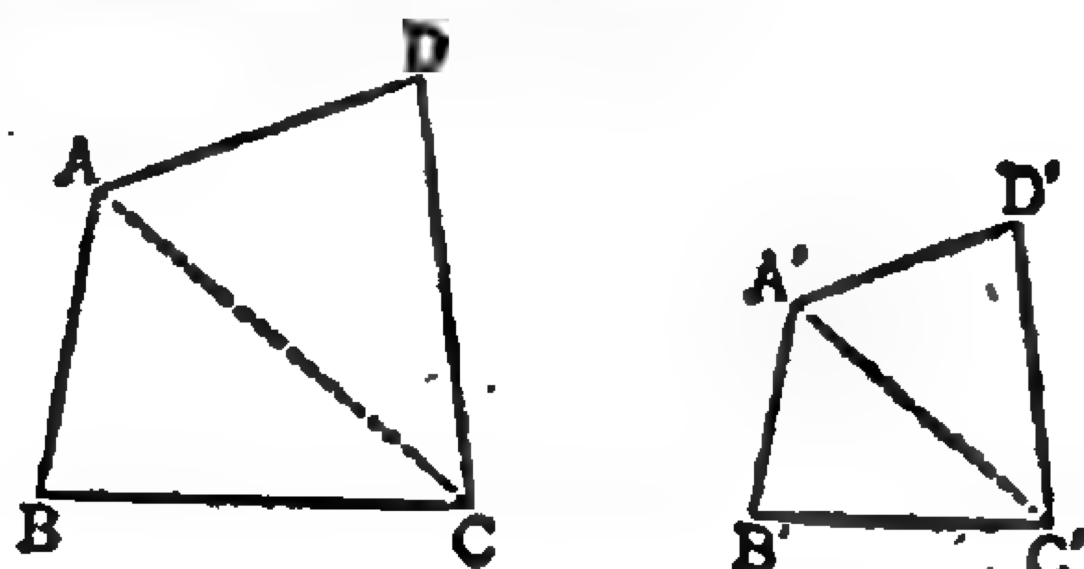
由此可得，$\angle ACD=\angle A'C'D'$，

又 $\angle D=\angle D'$。$\therefore\ \triangle ACD\backsim\triangle A'C'D'$。

从而得出，

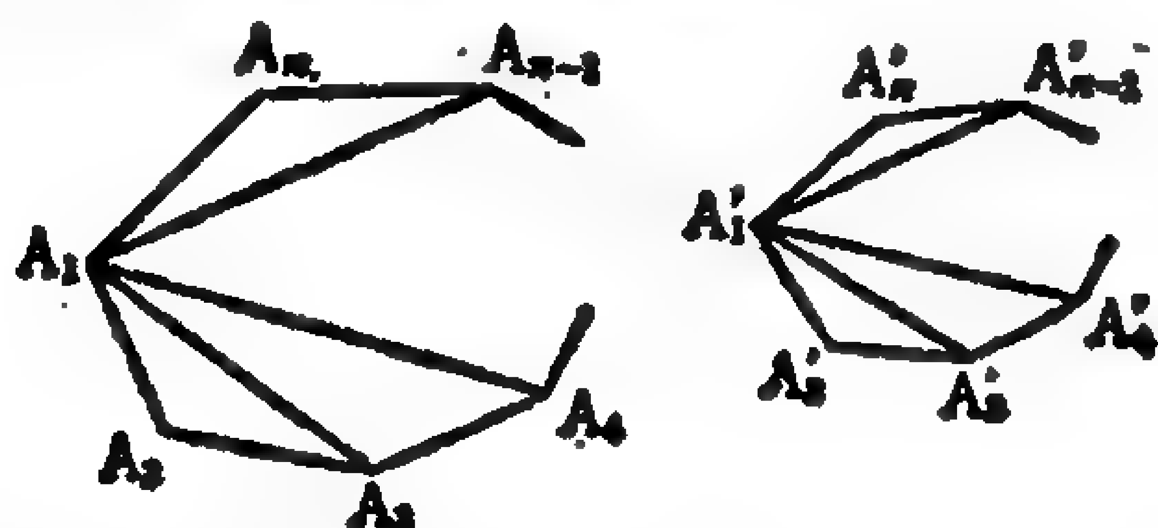
$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}。\quad ②$$

由①、②可知，两个四边形的对应边成比例。因此，这两个四边形相似。



1099. 相似多边形能分成个数相同的相似三角形。从而得出相似多边形的面积的比等于相似比的平方。

解 在相似多边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 与 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 中，设 A_1 与 A_1'，A_2 与 A_2'，…，A_n 与 A_n' 为对应的顶点，连结 A_1A_3、A_1A_4、…、A_1A_{n-1}，$A_1'A_2'$、$A_1'A_3'$、…、$A_1'A_{n-1}'$，把两个多边形分成个数相同的三角形。



在 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle A_1'A_2'A_3'$ 中，$\angle A_2=\angle A_2'$，$A_1A_2:A_2A_3=A_1'A_2':A_2'A_3'$，

$\therefore\ \triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle A_1'A_2'A_3'$。

$\therefore\ \angle A_2A_3A_1=\angle A_2'A_3'A_1'$。

因为 $\angle A_2A_3A_4=\angle A_2'A_3'A_4'$，

$\therefore\ \angle A_1A_3A_4=\angle A_1'A_3'A_4'$。 ①

又 $A_2A_3:A_2'A_3'=A_1A_3:A_1'A_3'$，

$A_2A_3:A_2'A_3'=A_3A_4:A_3'A_4'$，

$\therefore\ A_1A_3:A_1'A_3'=A_3A_4:A_3'A_4'$。 ②

由①、②，得 $\triangle A_1A_3A_4\backsim\triangle A_1'A_3'A_4'$。

同理可以证明其余对应的两个三角形都相似。设相似比为 $\frac{a}{b}$，则

$$\frac{S_{\triangle A_1A_2A_3}}{S_{\triangle A_1'A_2'A_3'}}=\frac{S_{\triangle A_1A_3A_4}}{S_{\triangle A_1'A_3'A_4'}}=\cdots$$

$$=\frac{S_{\triangle A_1A_{n-1}A_n}}{S_{\triangle A_1'A_{n-1}'A_n'}}=\frac{a^2}{b^2}。$$

$$\therefore\ \frac{a^2}{b^2}$$

$$=\frac{S_{\triangle A_1A_2A_3}+S_{\triangle A_1A_3A_4}+\cdots+S_{\triangle A_1A_{n-1}A_n}}{S_{\triangle A_1'A_2'A_3'}+S_{\triangle A_1'A_3'A_4'}+\cdots+S_{\triangle A_1'A_{n-1}'A_n'}}$$

$$=\frac{\text{多边形 } A_1A_2A_3\cdots A_n \text{ 的面积}}{\text{多边形 } A_1'A_2'A_3'\cdots A_n' \text{ 的面积}}。$$

1100. 相似多边形的周长的比等于相似比。

解 设 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 与 $A_1'A_2'A_3'\cdots A_n'$ 是相似多边形，且

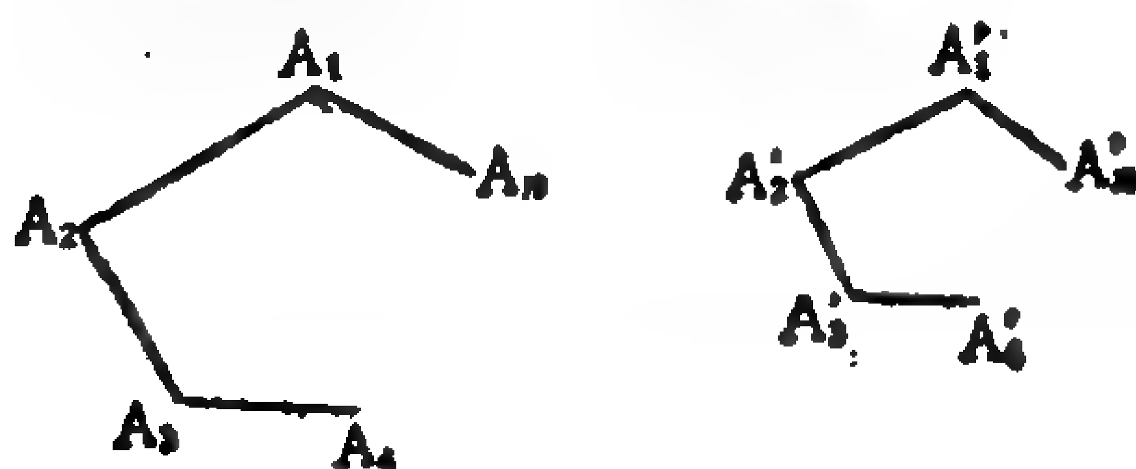
$$\frac{A_1A_2}{A_1'A_2'}=\frac{A_2A_3}{A_2'A_3'}=\frac{A_3A_4}{A_3'A_4'}=\cdots$$

$$=\frac{A_nA_1}{A_n'A_1'}=\frac{a}{b}，$$

于是

$$\frac{a}{b}=\frac{A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+\cdots+A_nA_1}{A_1'A_2'+A_2'A_3'+A_3'A_4'+\cdots+A_n'A_1'}$$

$$=\frac{\text{多边形 } A_1A_2\cdots A_n \text{ 的周长}}{\text{多边形 } A_1'A_2'\cdots A_n' \text{ 的周长}}。$$



1101. 设两个凸四边形$ABCD$、$A'B'C'D'$，则这两个四边形相似是

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}，\ \angle A=\angle A'$$

成立的必要条件吗？充分条件吗？必要充分条件吗？哪一个正确？

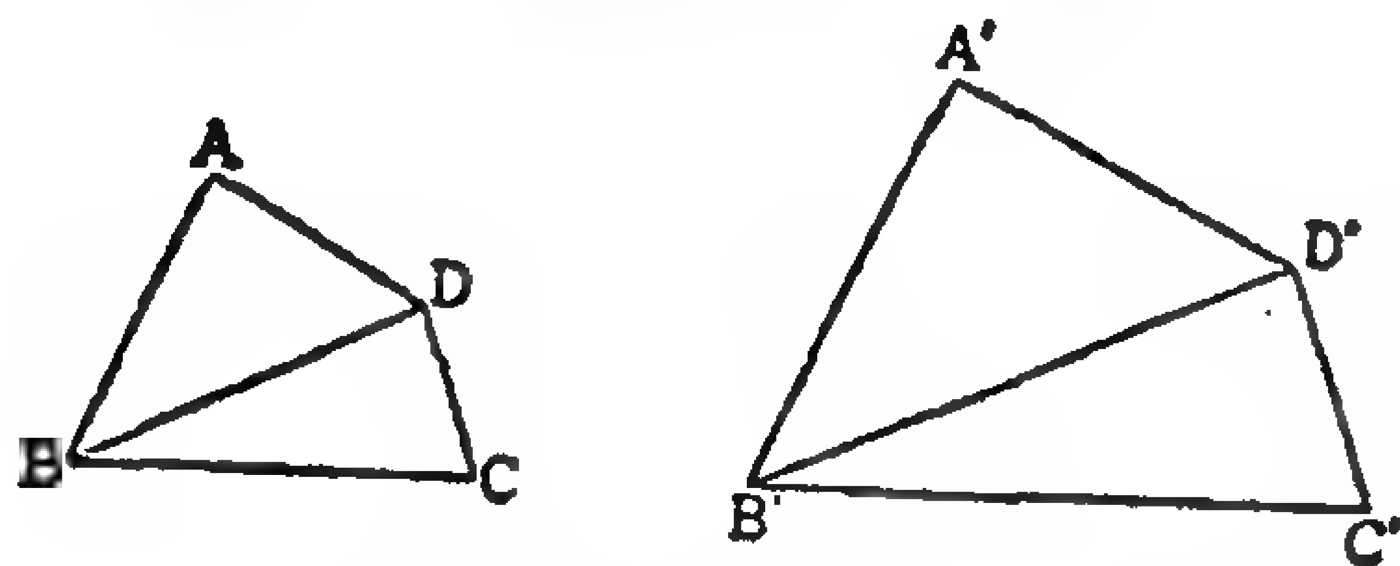
解 若两个凸四边形 $ABCD$、$A'B'C'D'$ 相似，则

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}，$$

$$\angle A=\angle A'。$$

所以

是这两个凸四边形相似的必要条件。



又若 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$，$\angle A=\angle A'$，连结 BD、$B'D'$，则

$$\because\quad \angle A=\angle A',\ AB:A'B'=AD:A'D',$$

$$\therefore\quad \triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'.$$

$$\therefore\quad AB:A'B'=BD:B'D',$$

$$\angle ABD=\angle A'B'D',$$

$$BD:B'D'=BC:B'C'=CD:C'D'.$$

$$\therefore\quad \triangle BCD\backsim\triangle B'C'D'.$$

由此可得，

$$\angle CBD=\angle C'B'D',$$

$$\angle C=\angle C'.$$

而这两个四边形都是凸多边形。所以

$$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC,$$

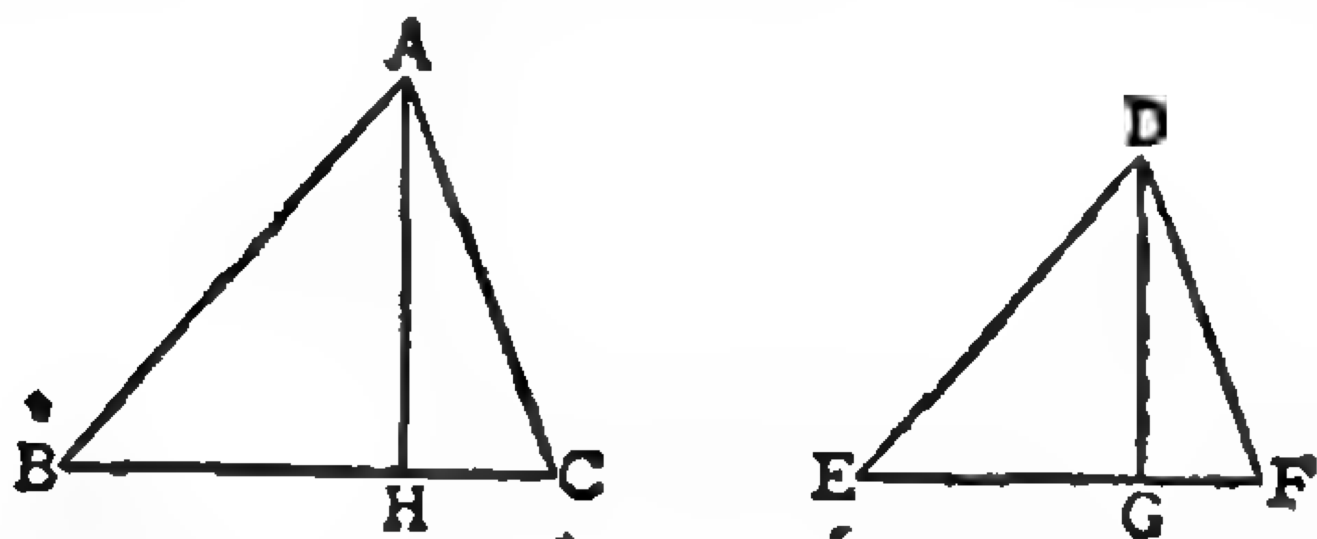
$$\angle A'B'C'=\angle A'B'D'+\angle D'B'C'.$$

$$\therefore\quad \angle ABC=\angle A'B'C'.$$

于是在这两个四边形中，因为 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，所以 $\angle D=\angle D'$。又由假设对应边成比例，可知这两个多边形相似。

所以，这条件也是两个凸四边形相似的充分条件。由此可知，它是必要充分条件(条件都正确)。

1102. 相似三角形的对应边上的高的比等于相似比。对应的中线的比也等于相似比。



解 设 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，$AH\perp BC$，$DG\perp EF$。

$$\because\quad \angle B=\angle E,$$

$$\angle AHB=\angle DGE=90^\circ,$$

$$\therefore\quad \triangle ABH\backsim\triangle DEG.$$

$$\therefore\quad AH:DG=AB:DE.$$

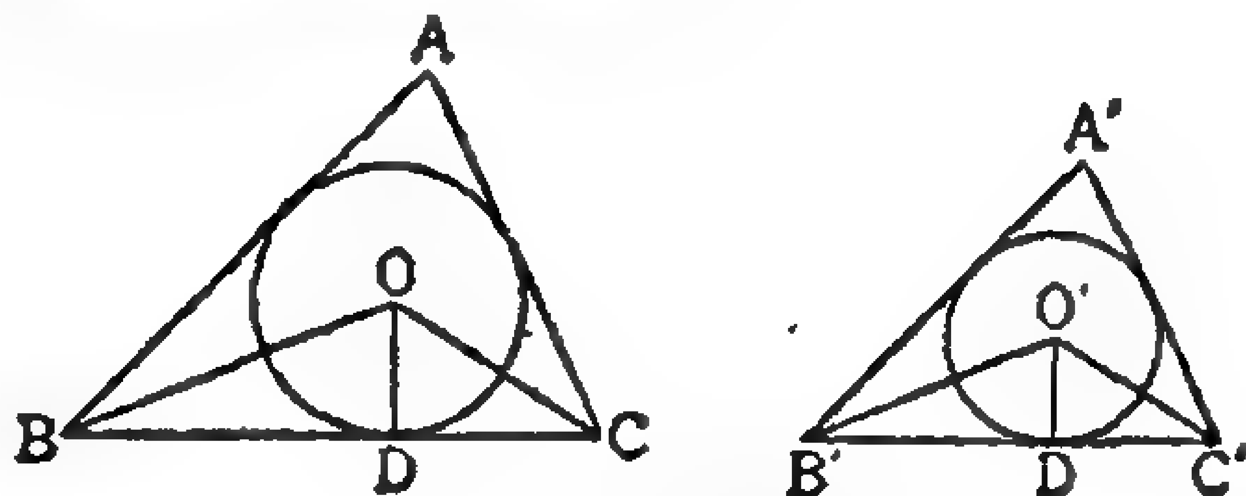
又设 BC 的中点为 M，EF 的中点为 N，同理可证得

$$\triangle ABM\backsim\triangle DEN.$$

$$\therefore\quad AM:DN=AB:DE.$$

1103. 相似三角形的内切圆半径的比等于相似比。

解 设 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$OB$、$OC$ 分别为 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线，$O'B'$、$O'C'$ 分别为 $\angle B'$、$\angle C'$ 的平分线，OD、$O'D'$ 分别为这两个三角形内切圆的半径。



由 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ 可知，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$。

$$\therefore\quad \angle OBC=\angle O'B'C',\ \angle OCB=\angle O'C'B'.$$

$$\therefore\quad \triangle OBC\backsim\triangle O'B'C'.$$

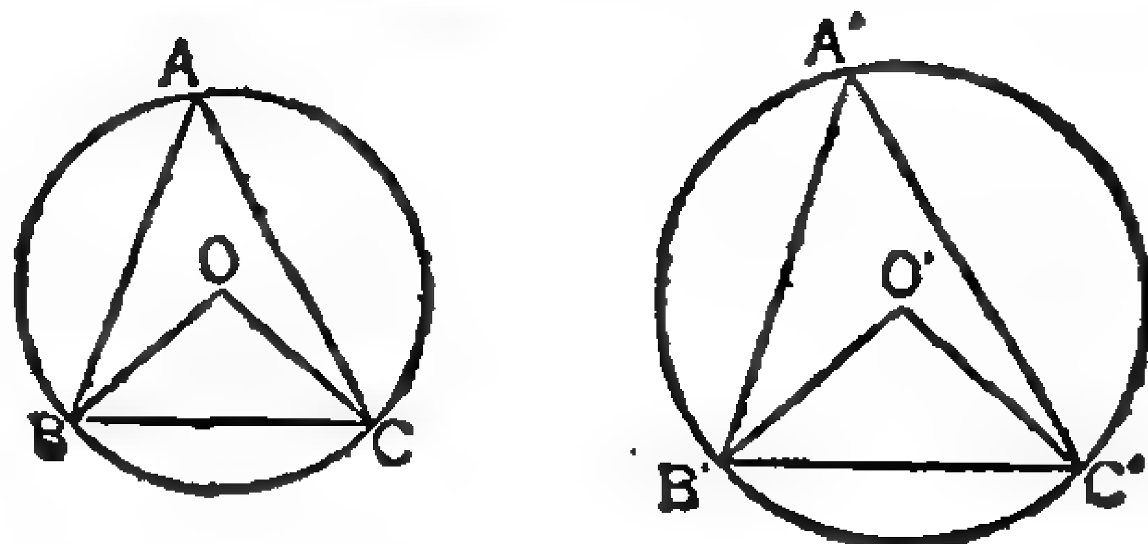
从而得出，$\frac{OB}{O'B'}=\frac{BC}{B'C'}$。

又 $\qquad \angle ODB=\angle O'D'B'=90^\circ.$

$$\therefore\quad \triangle OBD\backsim\triangle O'B'D'.$$

$$\therefore\quad \frac{OD}{O'D'}=\frac{OB}{O'B'}.\quad \therefore\quad \frac{OD}{O'D'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

1104. 两个相似三角形外接圆的半径的比等于这两个三角形的对应边的比。



解 设 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，它们的外心分别为 O 与 O'，则

$$\angle BOC=2\angle A,\ \angle B'O'C'=2\angle A'.$$

而 $\angle A=\angle A'$。$\therefore\ \angle BOC=\angle B'O'C'$。

又 $\qquad OB=OC,\ O'B'=O'C'.$

$$\therefore\quad \triangle OBC\backsim\triangle O'B'C'.$$

$$\therefore\quad OB:O'B'=BC:B'C'.$$

即 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 的外接圆的半径的比等于这两个三角形的对应边的比。

1105. 两个相似三角形的重心到对应顶

点的距离的比等于相似比。

解 设$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，它们的对应中线分别为$AD$、$A'D'$，重心分别为$G$、$G'$。

由$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，得

$$\angle B=\angle B',\ AB:A'B'=BC:B'C'.$$

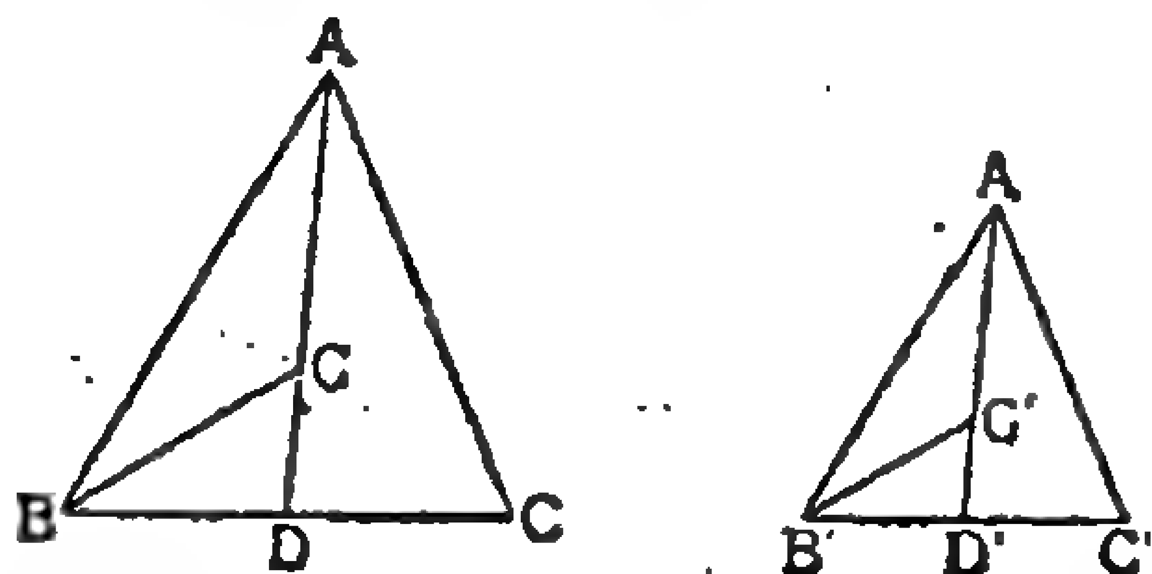
又D、D'分别是边BC、$B'C'$的中点。

$$\therefore\quad BC:B'C'=BD:B'D'.$$

在$\triangle ABD$与$\triangle A'B'D'$中，$\angle B=\angle B'$，$AB:A'B'=BD:B'D'$，

$$\therefore\quad \triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'.$$

$$\therefore\quad AD:A'D'=AB:A'B'.$$

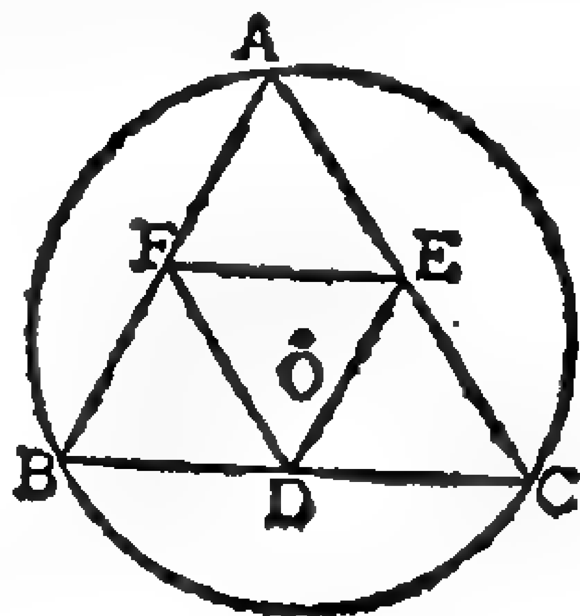


而 $AG:A'G'=\frac{2}{3}AD:\frac{2}{3}A'D'=AD:A'D'$.

$$\therefore\quad AG:A'G'=AB:A'B'.$$

同理可证得其他的对应中线的比也都等于相似比。

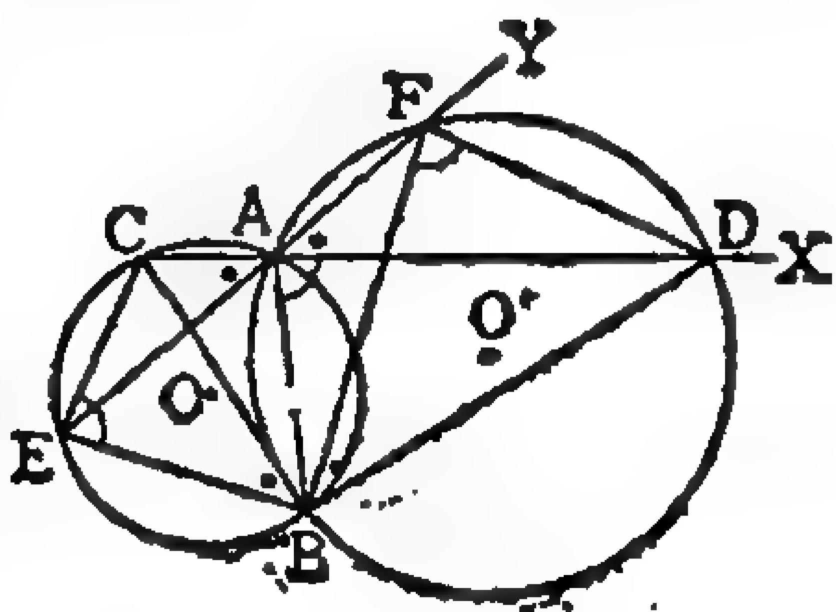
1106. 设$\triangle ABC$内接于定圆O，则不论其形状如何，过三边中点的圆的大小一定。



解 顺次连结$\triangle ABC$三边的中点构成$\triangle DEF$，则$\triangle DEF$与$\triangle ABC$的对应边互相平行，它们是相似三角形。所以这两个三角形的外接圆半径的比等于相似比，即$DE:AB=1:2$。

$\triangle ABC$外接圆的半径一定，而过D、E、F的圆的半径是圆O半径的$\frac{1}{2}$，因此它的大小也一定。

1107. 设圆O与圆O'相交于A、B两点，过A作两条直线AX、AY，AX与圆O、O'的交点分别为C、D，AY与圆O、O'的交点分别为E、F，则$\triangle BCE$与$\triangle BDF$相似。



解 连结AB。在$\triangle BCE$、$\triangle BDF$中，

$$\angle CBE=\angle CAE=\angle DAF=\angle DBF,$$

$$\angle BEC=\angle BAD=\angle BFD,$$

所以这两个三角形相似。

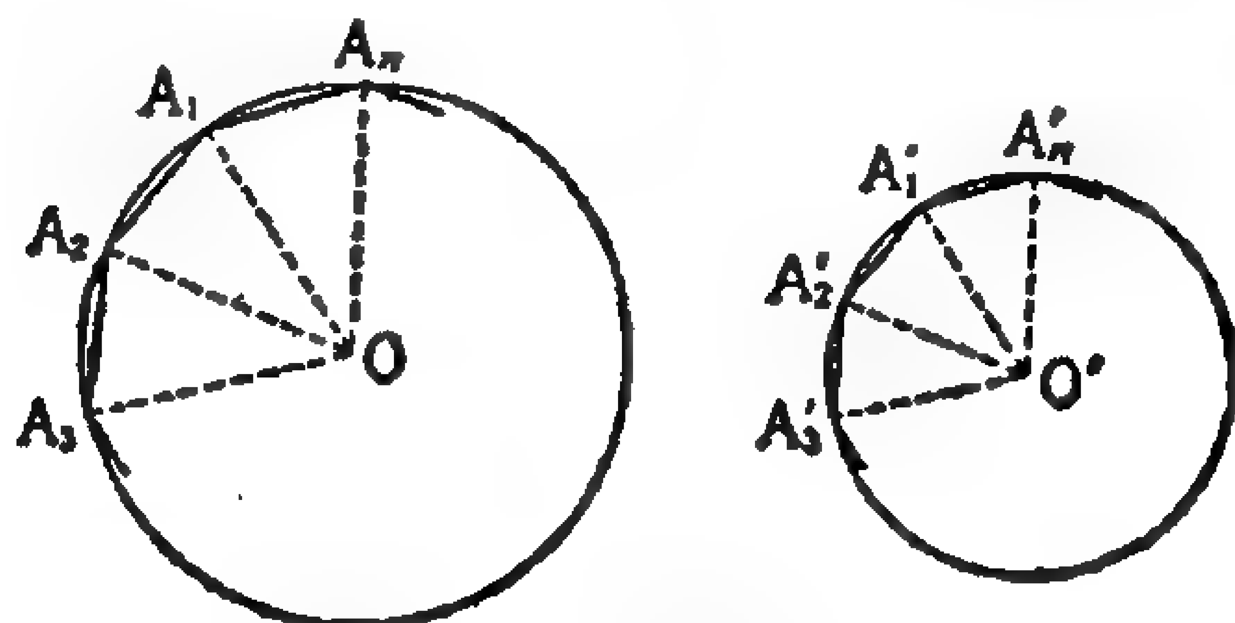
1108. 边数相同的两个正多边形的周长的比等于它们外接圆半径的比。

解 设两个正多边形$A_1A_2\cdots A_n$，$A'_1A'_2\cdots A'_n$的外接圆的圆心分别为O、O'，则

$$A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_nA_1,$$

$$A'_1A'_2=A'_2A'_3=\cdots=A'_nA'_1.$$

又 $\angle A_1OA_2=\frac{2\pi}{n}$，$\angle A'_1O'A'_2=\frac{2\pi}{n}$。



在$\triangle A_1OA_2$与$\triangle A'_1O'A'_2$中，

$$\angle A_1OA_2=\angle A'_1O'A'_2,$$

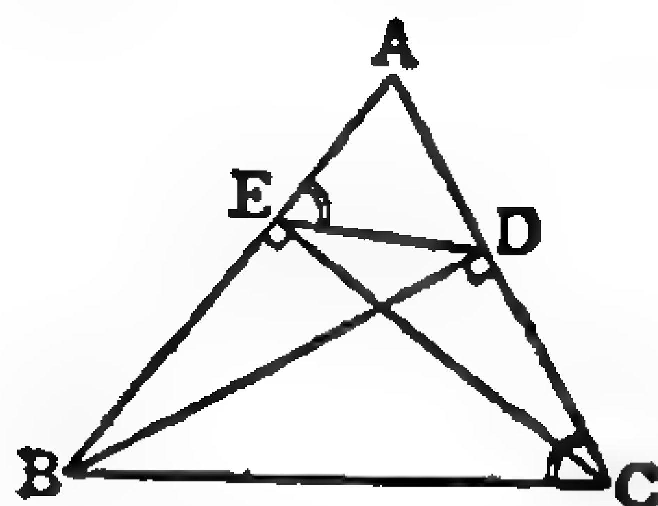
且它们都是等腰三角形，所以

$$\triangle A_1OA_2\backsim\triangle A'_1O'A'_2.$$

$$\therefore\quad \frac{A_1A_2}{A'_1A'_2}=\frac{A_1O}{A'_1O'}.$$

$$\therefore\quad \frac{\text{多边形 }A_1A_2\cdots A_n\text{ 的周长}}{\text{多边形 }A'_1A'_2\cdots A'_n\text{ 的周长}}=\frac{nA_1A_2}{nA'_1A'_2}=\frac{A_1A_2}{A'_1A'_2}=\frac{A_1O}{A'_1O'}.$$

1109. 从锐角$\triangle ABC$的顶点B、C分别向对边引垂线BD、CE，则$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$。



解 因为

$$\angle BEC=\angle BDC=90°,$$

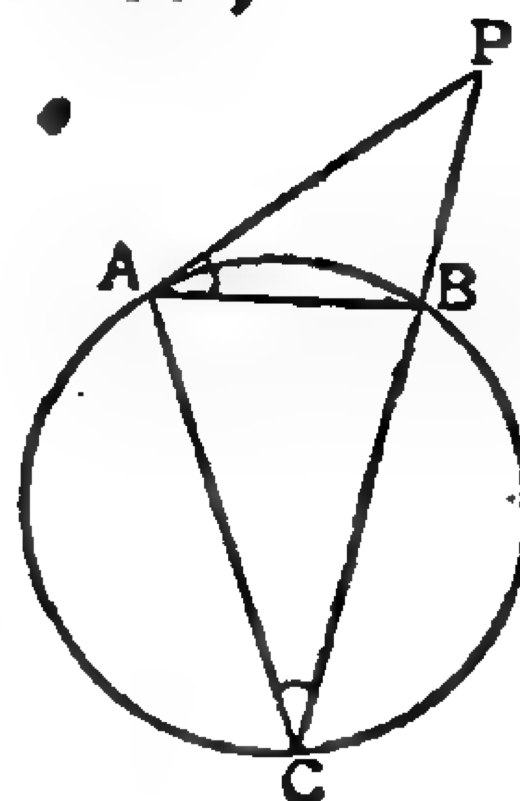
所以$BEDC$是圆内接四边形。

$$\therefore\quad \angle AED=\angle ACB,$$

$$\angle ADE=\angle ABC.$$

$$\therefore\quad \triangle ADE\backsim\triangle ABC.$$

1110. 从圆外一点P向圆引切线PA，引割线PBC，设PBC与圆相交



于点 B、C, 连结 AB、AC, 则 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAC$ 相似。

解 设 PA 是圆的切线,所以

$$\angle PAB=\angle C.$$

在 $\triangle PAB$、$\triangle PCA$ 中, $\angle P=\angle P$, $\angle PAB=\angle C$,

$$\therefore\quad \triangle PAB\backsim\triangle PCA.$$

1111. 从圆外一点 P 向圆引两条割线 PAB、PCD, 分别交圆于 A、B、C、D, 连结 AD、BC, 则

$\triangle PBC\backsim\triangle PDA$,

$\triangle PAC\backsim\triangle PDB$.

解 $\because$ $\angle PBC=\angle PDA$,

$\angle P$ 是 $\triangle PBC$、$\triangle PDA$ 的公共角,

$$\therefore\quad \triangle PBC\backsim\triangle PDA.$$

同理可证得 $\triangle PAC\backsim\triangle PDB$.

1112. 设有等长线段 AB、CD, 若 AC、BD 的垂直平分线相交于点 O, 则

$$\triangle OAC\backsim\triangle OBD.$$

解 根据题意, 得

$OA=OC$,

$OB=OD$.

又 $AB=CD$,

$\therefore$ $\triangle OAB\cong\triangle OCD$.

$$\therefore\quad \angle AOB=\angle COD.$$

两边都加上角 $\angle BOC$, 得

$$\angle AOC=\angle BOD.$$

而 $\triangle OAC$、$\triangle OBD$ 都是等腰三角形.

$$\therefore\quad \triangle OAC\backsim\triangle OBD.$$

1113. 一直线上有四点 A、B、C、D. 在 AC、BD 上作相似三角形 APC 和 BQD, 设对应边 $AP\parallel BQ$, $CP\parallel DQ$, PQ 与 AD 相交于点 O, 则 $OA\cdot OD=OB\cdot OC$.

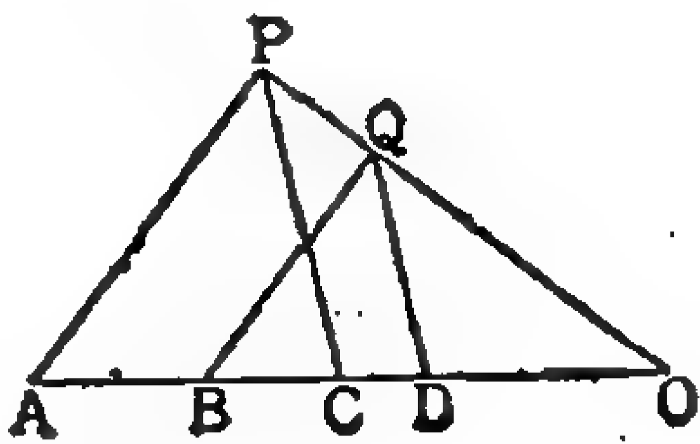
解 $\because$ $PA\parallel QB$,

$$\therefore\quad OA:OB=OP:OQ.$$

又 $PC\parallel QD$,

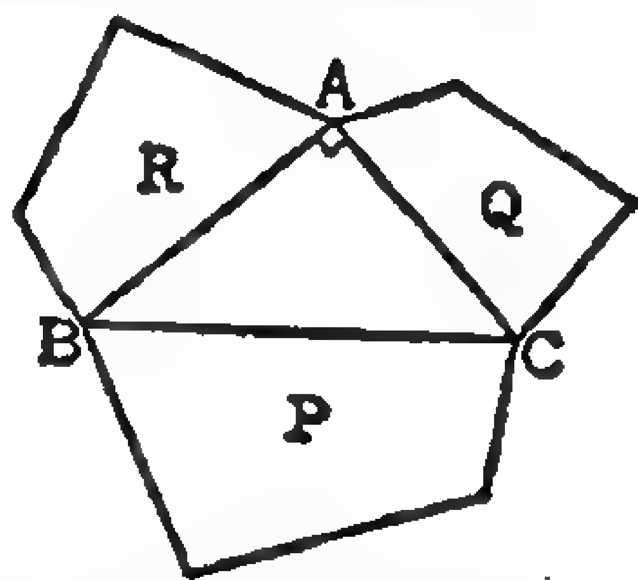
$\therefore$ $OC:OD=OP:OQ$.

$\therefore$ $OA:OB=OC:OD$.



即 $OA\cdot OD=OB\cdot OC$.

1114. 若在直角三角形各边上分别作对应的相似多边形, 则斜边上多边形的面积与其他两边上多边形面积的和相等。



解 设 P、Q、R 分别为直角 $\triangle ABC$ 各边上所作的相似多边形. 如果 BC 为斜边, $P\backsim Q$, BC 与 AC 为对应边,则

$$\frac{P}{Q}=\frac{BC^2}{AC^2},\ 或\ \frac{P}{BC^2}=\frac{Q}{AC^2}.$$

同理可得, $\dfrac{Q}{AC^2}=\dfrac{R}{AB^2}$.

$$\therefore\quad \frac{P}{BC^2}=\frac{Q}{AC^2}=\frac{R}{AB^2}.$$

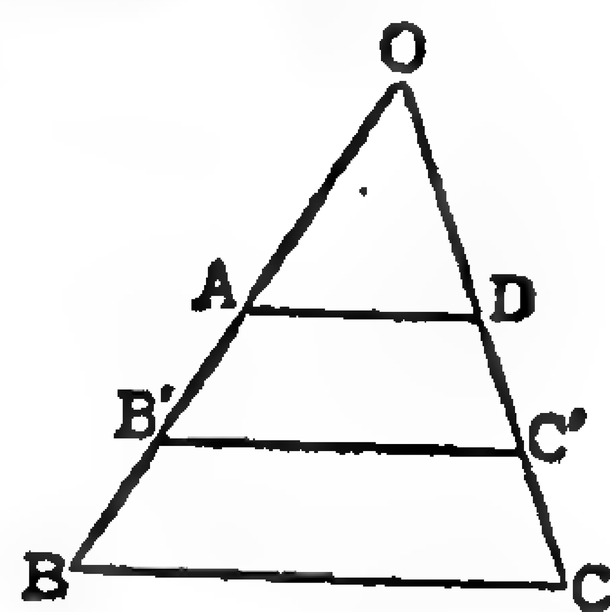
$$\therefore\quad \frac{P}{BC^2}=\frac{Q+R}{AC^2+AB^2}.$$

而 $AC^2+AB^2=BC^2$, $\therefore$ $P=Q+R$.

1115. 引平行于梯形 $ABCD(AD\parallel BC)$ 的底边 BC 的直线 $B'C'$, 则所构成的两个梯形 $AB'C'D$、$B'BCC'$ 与原梯形 $ABCD$ 相似吗? 又这两个梯形在什么情况下相似?

解 由 $B'C'\parallel BC$, 可以得到几对同位角都相等. 但是, 由 $AB\neq AB'$, 得

$$\frac{AD}{AB}\neq\frac{AD}{AB'}.$$



因此,梯形 $AB'C'D$ 与梯形 $ABCD$ 不相似. 同理, 梯形 $B'BCC'$ 与梯形 $ABCD$ 也不相似.

又,若 $B'C'$ 是 AD 与 BC 的比例中项,则梯形 $AB'C'D\backsim$ 梯形 $B'BCC'$.

事实上,延长 BA、CD 相交于点 O, 则

$$\frac{OA}{OB'}=\frac{AD}{B'C'}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{OB'}{OB}.$$

假设 $\dfrac{AD}{B'C'}=\dfrac{B'C'}{BC}$. 又 $\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{OB'}{OB}$.

$$\therefore\quad \frac{OA}{OB'}=\frac{OB'}{OB}.$$

$$\therefore\quad \frac{OA}{OB'-OA}=\frac{OB'}{OB-OB'},$$

$$\therefore\quad \frac{OA}{AB'}=\frac{OB'}{B'B}. \qquad ①$$

又

$$\frac{OA}{AD}=\frac{OB'}{B'C'}.\qquad ②$$

由①÷②，得 $\frac{AD}{AB'}=\frac{B'C'}{B'B}$.

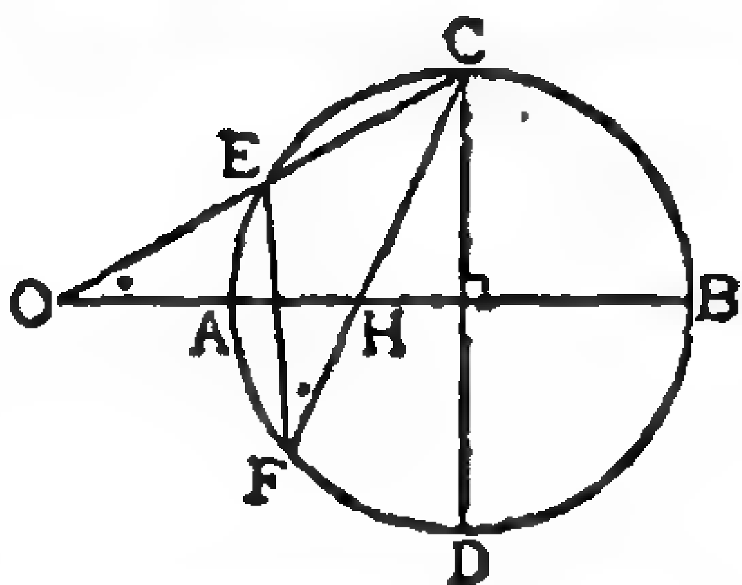
同理 $\frac{AD}{DC'}=\frac{B'C'}{C'C}$.

由假设 $\frac{AD}{B'C'}=\frac{B'C'}{BC}$,

得 $\frac{AD}{B'C'}=\frac{AB'}{B'B}=\frac{DC'}{C'C}=\frac{B'C'}{BC}$.

又这两个梯形的四个角对应相等，所以它们相似。

1116. 设 AB、CD 是定圆的互相垂直的直径．引任意弦 EF，设 CE、CF 与 AB 的交点分别为 O、H，则 $\triangle CHO$ 与 $\triangle CEF$ 相似。



解 $\angle F$ 是 $\widehat{EC}$ 所对的圆周角，$\angle O$ 等于 $\widehat{BC}$ 与 $\widehat{AE}$ 的差所对的圆周角．而弧 BC、AC 相等．所以

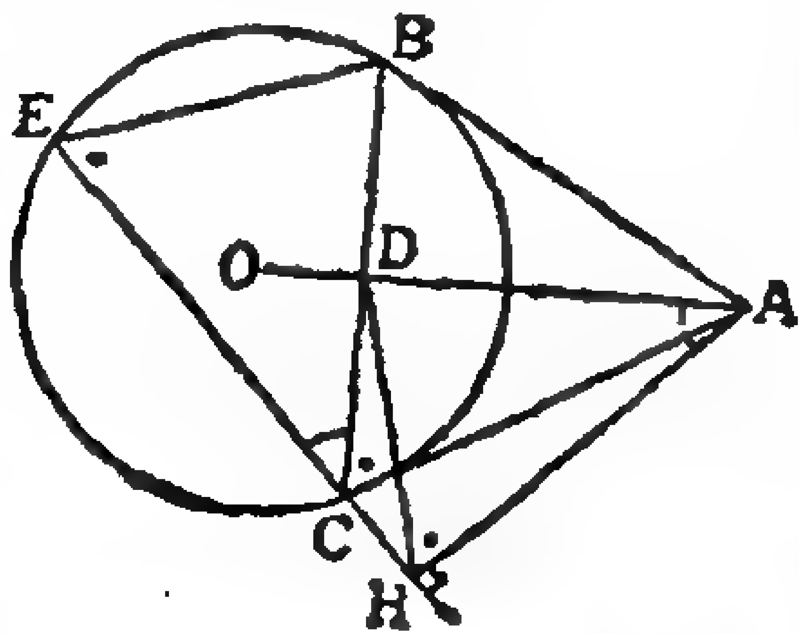
$$\widehat{BC}-\widehat{EA}=\widehat{AC}-\widehat{EA}=\widehat{EC}.$$

由此可得，$\angle F=\angle O$.

又 $\angle ECF$ 是 $\triangle CHO$，$\triangle CEF$ 的公共角，

$\therefore\ \triangle CHO\backsim\triangle CEF$.

1117. 从圆 O 外一点 A 向圆引两条切线 AB、AC，连结切点 B、C 的弦与 OA 的交点为 D，过 C 引任意弦 CE，从 A 向 CE 或其延长线作垂线，设垂足为 H，则 $\triangle ADH\backsim\triangle CBE$.



解 因为 $AD\perp BC$，$AH\perp CH$，所以四边形 $ADCH$ 是圆内接四边形．从而得出，

$$\angle DAH=\angle BCE.\qquad ①$$

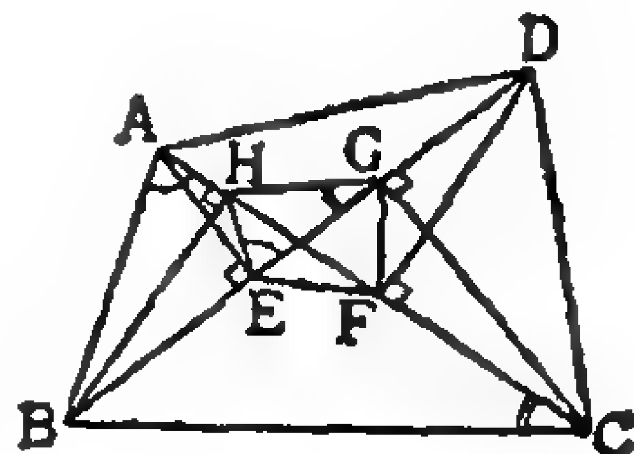
又 $\angle AHD=\angle ACD$.

又 AC 是圆 O 的切线，所以 $\angle ACD=\angle E$.

$$\therefore\ \angle ACD=\angle AHD.\qquad ②$$

由①、②得 $\triangle ADH\backsim\triangle CBE$.

1118. 从四边形的各顶点向不过这顶点的对角线引垂线，顺次连结垂足所得的四边形与原四边形相似。



解 从四边形 $ABCD$ 的顶点 A、C 向 BD 作垂线，设垂足分别为 E、G．又从 B、D 向 AC 作垂线，设垂足分别为 H、F．由假设，得

$$\angle BHC=90^\circ=\angle BGC.$$

由此可得，B、H、G、C 四点共圆．

$\therefore\ \angle HGB=\angle HCB$.

同理可得，A、H、E、B 四点共圆．

$\therefore\ \angle HEG=\angle HAB$,

$\therefore\ \triangle HEG\backsim\triangle BAC$.

又同理可得，$\triangle EFG\backsim\triangle ADC$.

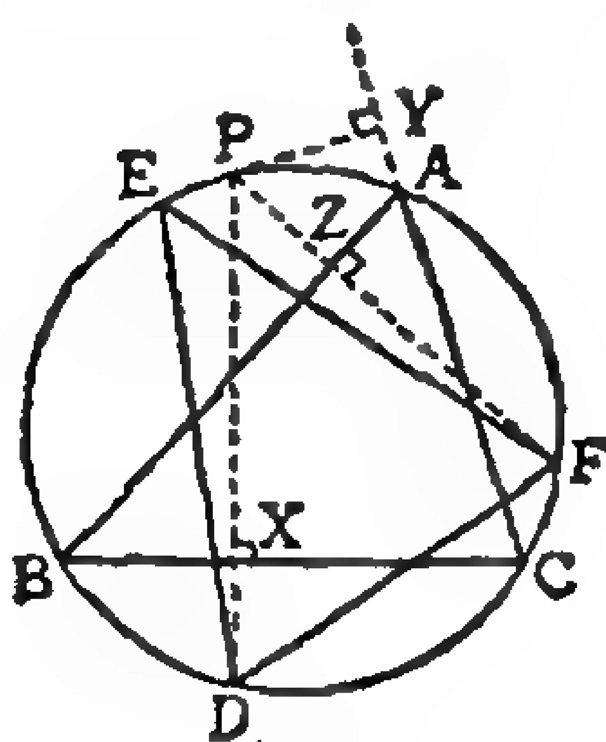
从而得出，$\frac{AB}{EH}=\frac{BC}{HG}=\frac{AC}{EG}$,

$$\frac{CD}{GF}=\frac{AD}{EF}=\frac{AC}{EG}.$$

$$\therefore\ \frac{AB}{EH}=\frac{BC}{HG}=\frac{CD}{GF}=\frac{AD}{EF}.$$

又 $\angle A=\angle E$，$\angle B=\angle H$，$\angle C=\angle G$，$\angle D=\angle F$．所以，四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $EHGF$.

1119. 设从 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点 P 向三边 BC、CA、AB 或其延长线上作垂线，设垂线与圆的交点分别为 D、E、F，则 $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.



解 从 P 向 BC、CA、AB 作垂线．设垂足分别为 X、Y、Z，

则 $\angle BZP=90^\circ=\angle BXP$.

所以，B、X、Z、P 在同一圆上．

$\therefore\ \angle XBZ=\angle XPZ$.

即 $\angle CBA=\angle DPF=\angle DEF$.

又 P、X、C、Y 也在同一圆上．

$\therefore\ \angle BCA=\angle EPX=\angle EFD$.

由此可得，$\angle CAB=\angle FDE$,

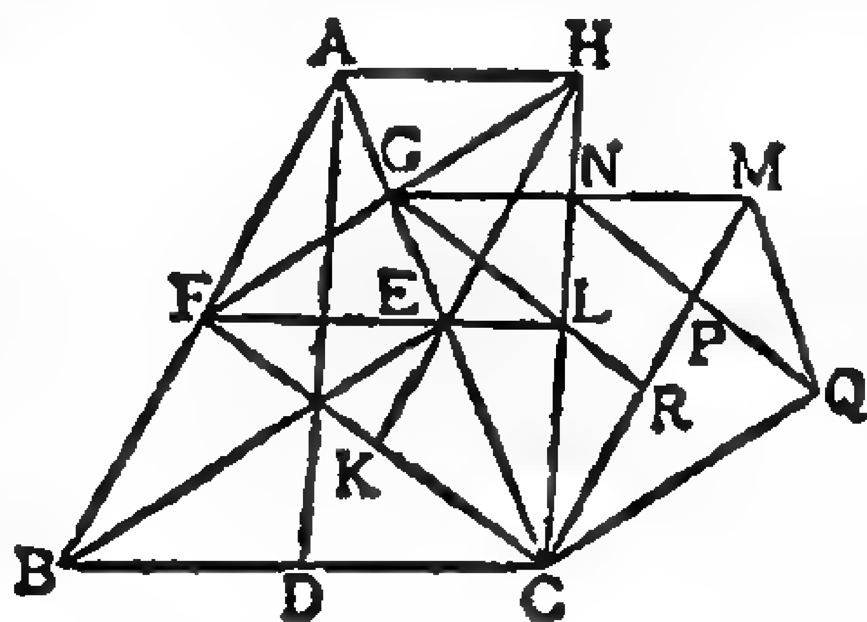
所以，$\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.

1120. 用三角形的三条中线为边构成一个三角形，再用这第二个三角形的三条中线构成第三个三角形，这样地继续下去所得到的三角形与第一个三角形相似。

解 设 AD、BE、CF 为 $\triangle ABC$ 的三条中线，AE 的中点为 G，在 FG 的延长线上取点 H，使 $GH=FG$，则 $AFEH$ 是平行四边形。所以

$$AF \perp\!\!\!= HE \perp\!\!\!= FB,\ FE \perp\!\!\!= AH \perp\!\!\!= DC.$$

由此可得 $FBEH$、$ADCH$ 都是平行四边形，$\triangle CHF$ 是以 $\triangle ABC$ 的三条中线为边的三角形，且 CG 是它的一条中线，E 是它的重心。



又延长 FE 与 CH 的交点为 L，HL 的中点为 N，在 GN 的延长线上取一点 M 使

$$NM=GN,$$

则 $\triangle CGM$ 是以 $\triangle CHF$ 的三条中线为边的三角形，

$$CM \parallel HE \parallel AB,\ MG \parallel FE \parallel BC.$$

而 GC 与 CA 重合。因此，由 $\triangle CMG$ 的三个角与 $\triangle ABC$ 的三个角对应相等可知，

$$\triangle CMG \backsim \triangle ACB.$$

同理，其余情况也可得证。

1121. 设 $\triangle ABC$ 的各边中点分别为 A'、B'、C'，垂心为 H，外心为 O，则 $\triangle HAB$ 和 $\triangle OA'B'$ 相似，且其相似比为 2:1. 从而得出重心 G 在 OH 上，$OG=\frac{1}{3}OH$。

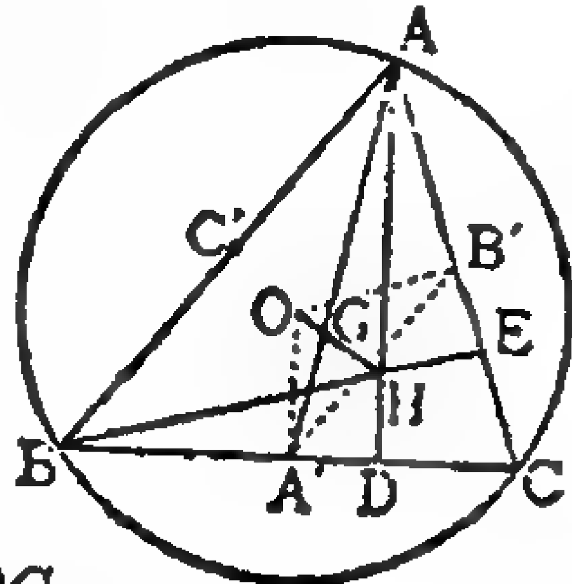
解 由问题 **500** 可知，

$$AH:OA'=2:1,\ BH:OB'=2:1.$$

又 $AH \parallel OA'$，

$BH \parallel OB'$.

$\therefore\ \triangle HAB \backsim \triangle OA'B'$，且相似比为 2:1. 设 AA' 与 HO 的交点为 G，则



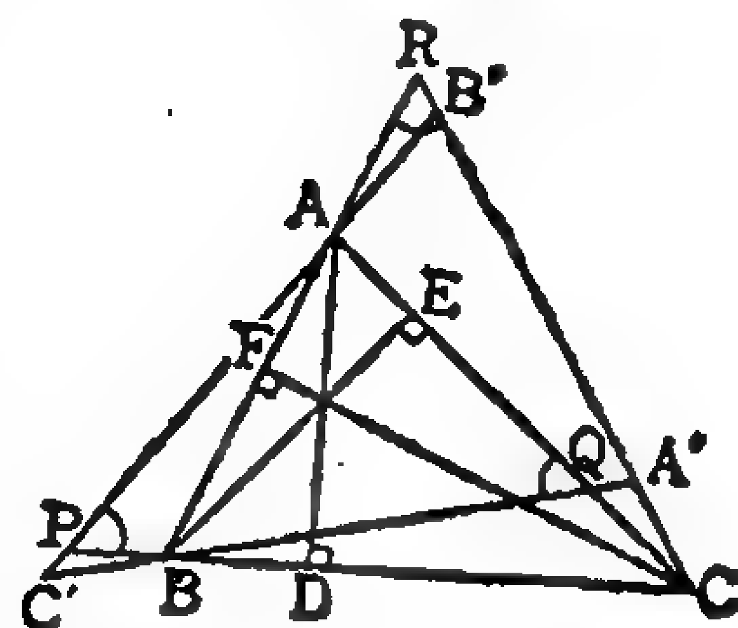
$$\therefore\ AG:A'G=HG:OG$$
$$=AH:A'O=2:1.$$

这就是说，AA' 是 $\triangle ABC$ 的中线，点 G 内分中线 AA' 成定比 2:1，所以 G 是 $\triangle ABC$ 的重心。

而由 $HG:OG=2:1$，得 $OG:GH=1:2$。

从而得出， $OG=\frac{1}{3}OH$。

1122. 过 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别向把对边旋转相同方向所得的对边引夹角为 α 的三条直线 AP、BQ、CR，则这三条直线作出的 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 相似。又当 $\angle\alpha=60°$ 时，这两个三角形全等。



解 设 $\angle BRC=\angle\alpha=\angle AQB$，

则 A、Q、A'、R 共圆．从而得出，

$$\angle BAC=\angle B'A'C',$$
$$\angle ABC=\angle\alpha+\angle BAP$$
$$=\angle\alpha+\angle B'AR=\angle A'B'C'.$$

由此可得，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

又当 $\angle\alpha=60°$ 时，设 $\triangle ABC$ 的三条垂线分别为 AD、BE、CF，则由

$$\angle C'PC=\angle C'QC,$$

可知 C'、P、Q、C 共圆．

$$\therefore\ AP\cdot AC'=AQ\cdot AC. \quad ①$$

同理可得，

$$AP\cdot AB'=AB\cdot AR. \quad ②$$

而

$$AC\cdot AE=AB\cdot AF. \quad ③$$

①+②+③，得

$$AP(AB'+AC')$$
$$=AB(AF+AR)+AC(AQ-AE).$$
$$\therefore\ AP\cdot B'C'=AB\cdot RF+AC\cdot QE. \quad ④$$

因为 $\angle\alpha=60°$，

所以 $AP=\frac{2}{\sqrt{3}}AD$，

又 $RF=\frac{1}{\sqrt{3}}CF$，$QE=\frac{1}{\sqrt{3}}BE$。

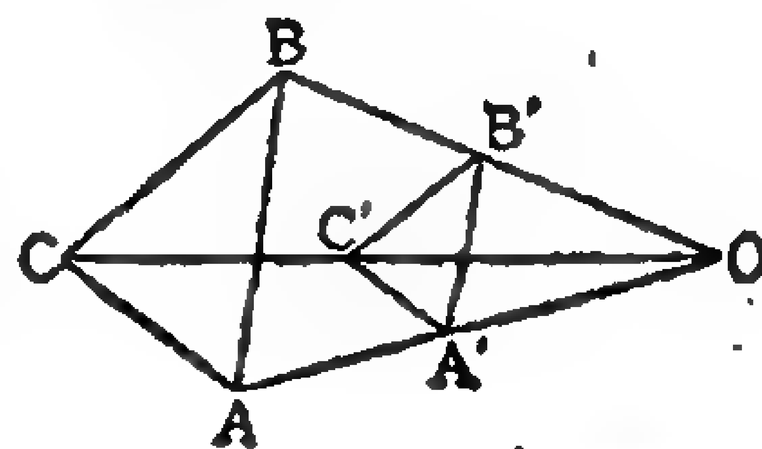
由④，得 $2AD\cdot B'C'=AB\cdot CF+AC\cdot BE$。

即 $2AD\cdot B'C'=4S_{\triangle ABC}=2AD\cdot BC$。

$$\therefore\ B'C'=BC.$$

因此， $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

1123. 若两个三角形的三边分别平行，则对应顶点的连线相交于一点或者互相平行。

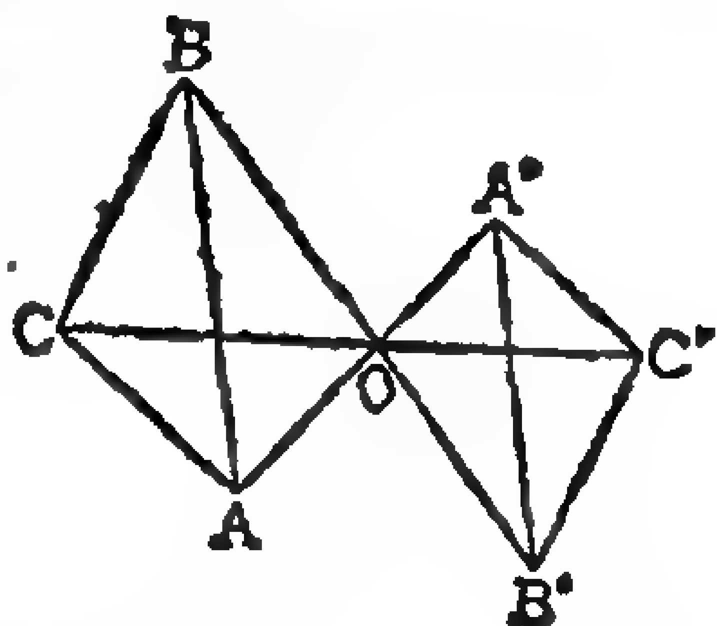


解 在 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中，$BC \parallel B'C'$，

$CA /\!/ C'A'$, $AB /\!/ A'B'$.

设 AA' 与 CC' 不平行，它们的交点为 O，则由 $AC /\!/ A'C'$，得

$$\frac{AO}{A'O}=\frac{CO}{C'O}. \quad ①$$



设 OB 与 $A'B'$ 或其延长线的交点为 B''，又

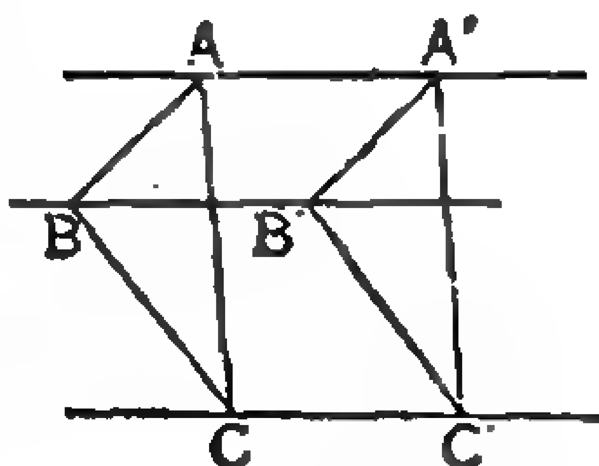
$AB /\!/ A'B''$,

$$\therefore \quad \frac{AO}{A'O}=\frac{BO}{B''O}. \quad ②$$

由①、②，得 $\dfrac{CO}{C'O}=\dfrac{BO}{B''O}$.

从而得出， $BC /\!/ B''C'$.

而 $BC /\!/ B'C'$。所以点 B'' 与 B' 相重合，即 BB' 也过点 O. 由此可知，AA'、BB'、CC' 相交于点 O.



若 $AA' /\!/ CC'$，则 $ACC'A'$ 是平行四边形。从而得出，

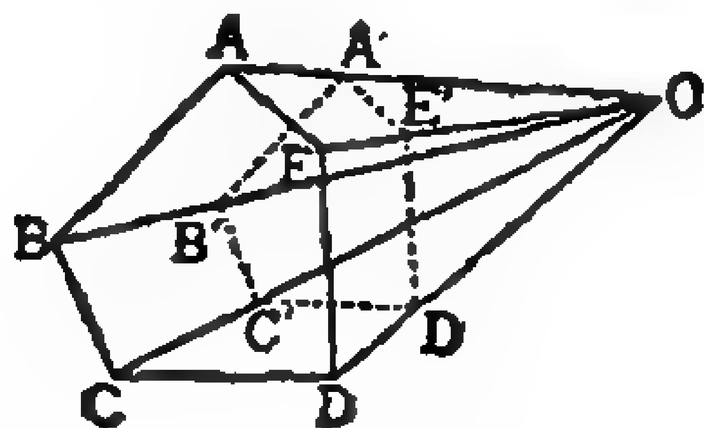
$$AA' \mathrel{\underline{\parallel}} CC'.$$

从 B 引 AA' 的平行线与 $A'B'$ 交于 B''，则 $ABB''A'$ 也是平行四边形。因此

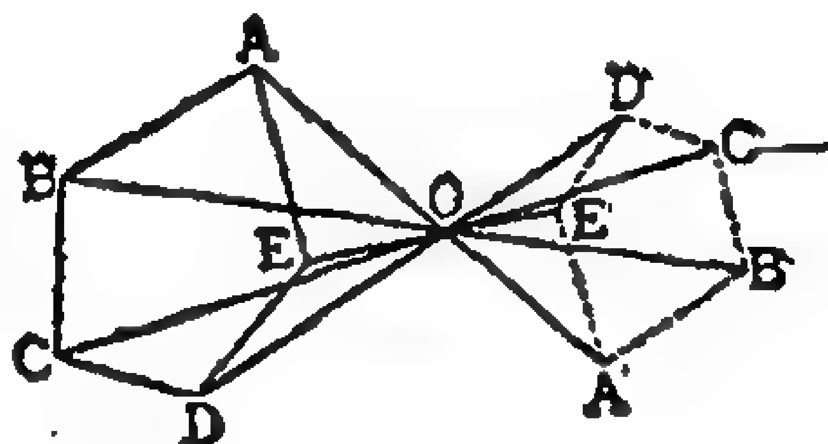
$$BB''=AA' \quad 且 \quad BB''=CC'.$$

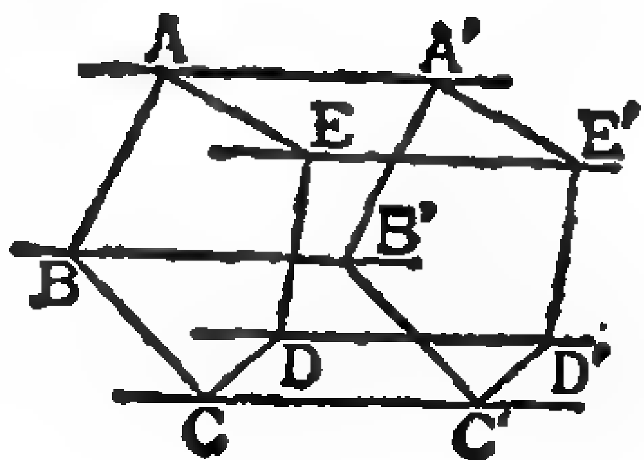
所以，$BCC'B''$ 也是平行四边形。由此可得，$BC /\!/ B''C'$。 而 $BC /\!/ B'C'$。所以点 B'' 与 B' 相重合，即

$AA' /\!/ BB' /\!/ CC'$.

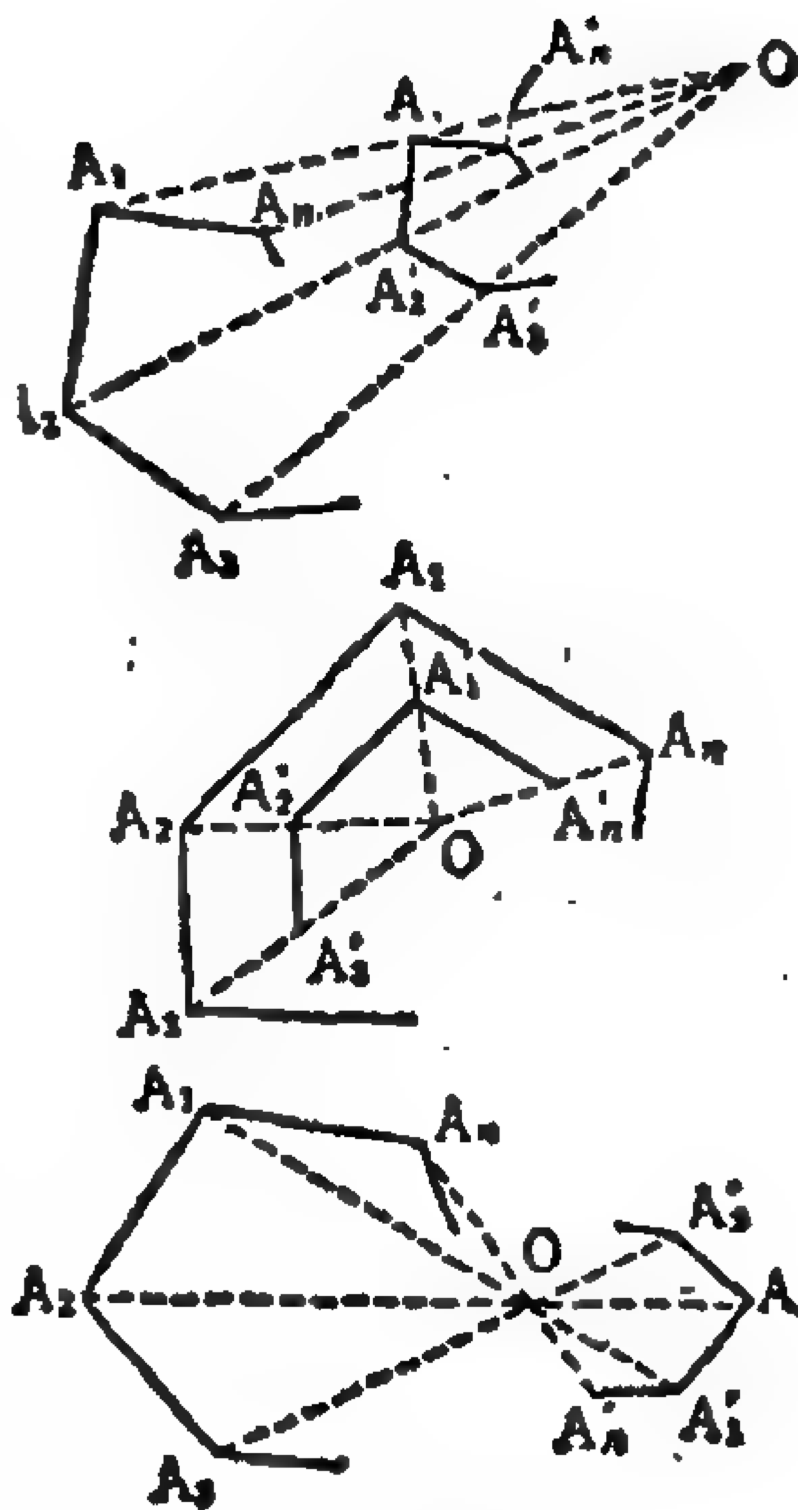


注 一般地，若两个相似多边形的对应边互相平行，则对应顶点的连线相交于一点，或者互相平行。若对应顶点的连线相交于一点，则这点叫做这两个多边形的位似中心。若对应顶点的连线平行时，则这两个多边形全等。





1124. 把一点和多边形的各顶点分别连结成线段，再按照定比内分或外分这些线段，则顺次连结各分点所得的多边形和原多边形相似。



解 按照定比把点 O 和多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的各顶点的连线内(外)分，设分点为 A_1', A_2', …, A_n'，则由条件

$$\frac{OA_1'}{OA_1}=\frac{OA_2'}{OA_2}=\cdots=\frac{OA_n'}{OA_n}$$

可得，$A_1'A_2' /\!/ A_1A_2$, $A_2'A_3' /\!/ A_2A_3$, …,

$$A_n'A_1' /\!/ A_nA_1.$$

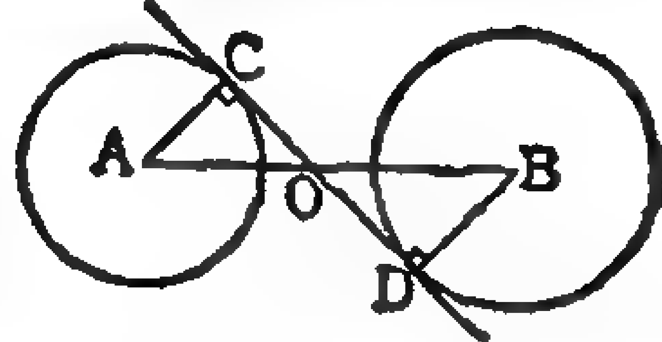
由此可得，$\angle A_1'=\angle A_1$, $\angle A_2'=\angle A_2$, …, $\angle A_n'=\angle A_n$,

且 $\dfrac{OA_1'}{OA_1}=\dfrac{A_1'A_2'}{A_1A_2}=\dfrac{OA_2'}{OA_2}=\dfrac{A_2'A_3'}{A_2A_3}=\cdots$.

即 $\dfrac{A_1'A_2'}{A_1A_2}=\dfrac{A_2'A_3'}{A_2A_3}=\cdots=\dfrac{A_n'A_1'}{A_nA_1}$.

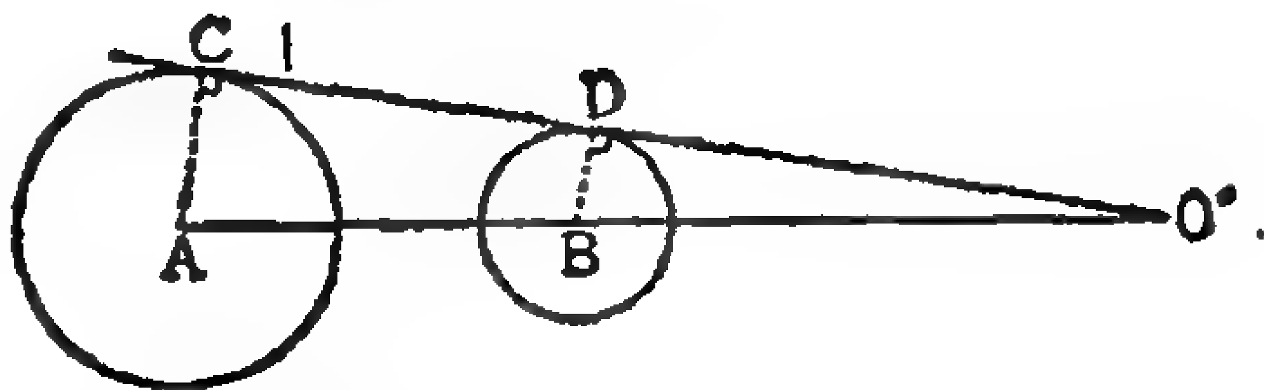
所以，这两个多边形相似。

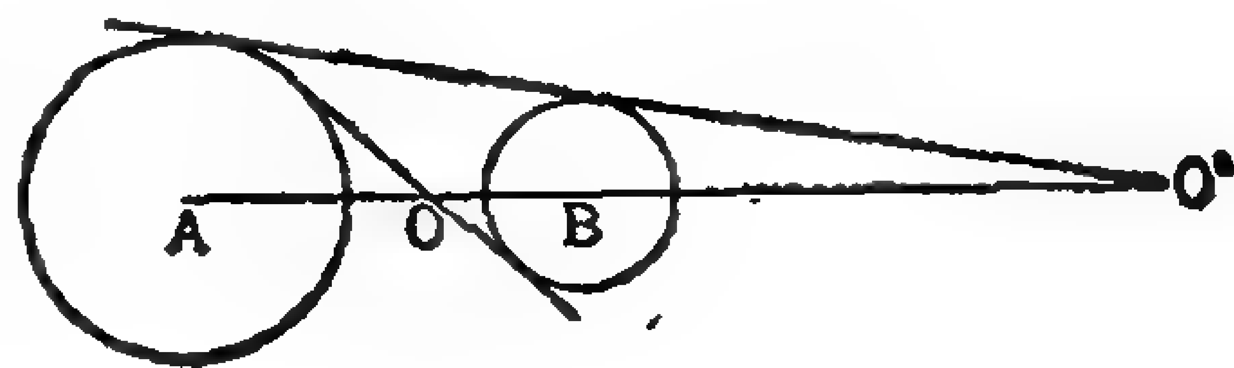
1125. 两圆的公切线和连心线的交点，按照两圆的半径的比内分或外分连心线。



解 设 CD 为两圆 A、B 的一条公切线，连心线 AB 与 CD 的交点为 O 或 O'，两圆的半径分别为 R、r，连结 AC、BD，则

$$\angle ACO=\angle BDO, \quad \therefore \quad AC /\!/ BD,$$





$\therefore\quad AO:OB=AC:BD=R:r$.

同理可得，$AO':BO'=R:r$.

注 $AO:OB=AO':BO'(=R:r)$,

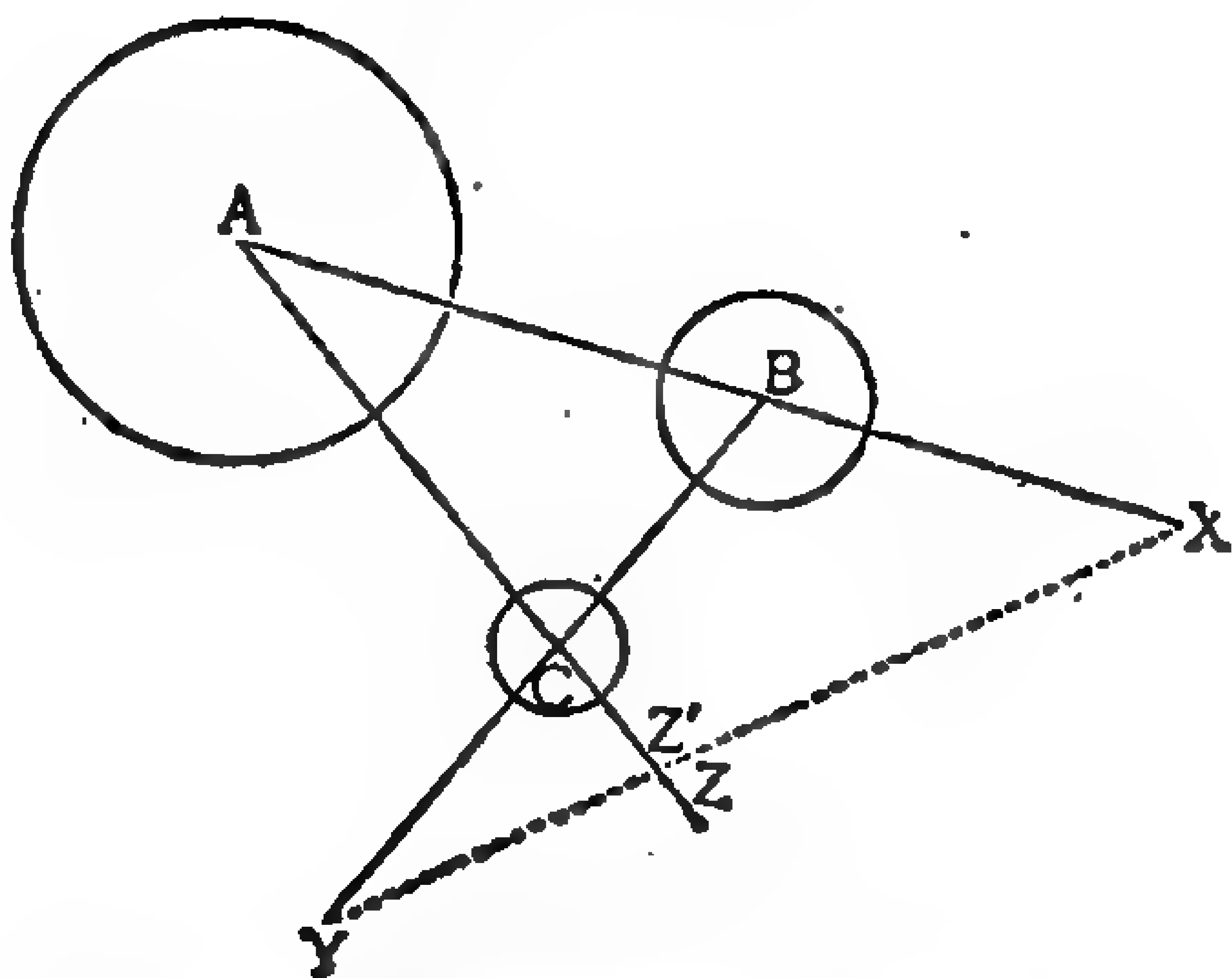
则 A、O、B、O' 四点成调和点列. 把两个圆的连心线分成两线段的比，等于两个圆的半径的比的点叫做位似中心，如果这点是内分点，叫做内位似中心，如果是外分点，则叫做外位似中心. 简称为位似内心和位似外心.

1126. 若三个圆 A、B、C 的每两个圆的外位似中心依次为 X、Y、Z，则 X、Y、Z 在一条直线上.

解 若圆 A、B、C 的半径分别为 r、r'、r''，则

$$\frac{AX}{BX}=\frac{r}{r'},\quad \frac{BY}{CY}=\frac{r'}{r''},$$

$$\frac{AZ}{CZ}=\frac{r}{r''}.$$



设 XY 与 AC 的交点为 Z'，则

$$\frac{r}{r'}=\frac{AX}{BX}=\frac{S_{\triangle AXY}}{S_{\triangle BXY}},$$

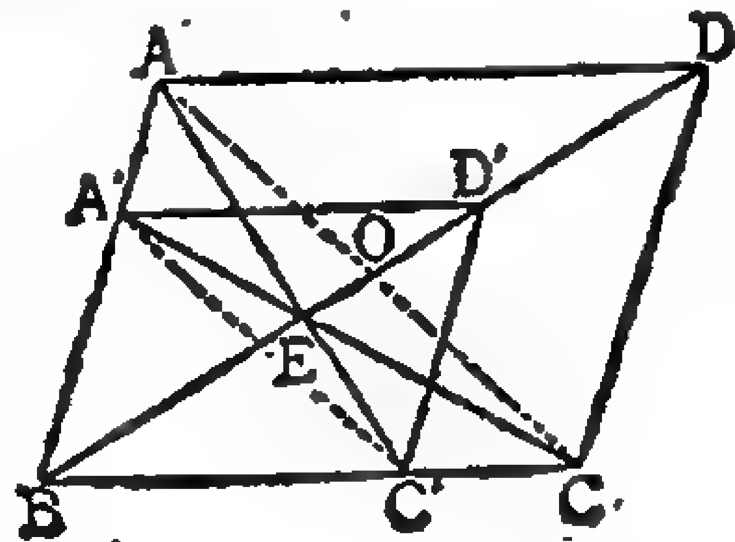
$$\frac{r'}{r''}=\frac{BY}{CY}=\frac{S_{\triangle BXY}}{S_{\triangle CXY}}.$$

由此可得，$\dfrac{r}{r''}=\dfrac{S_{\triangle AXY}}{S_{\triangle CXY}}=\dfrac{AZ'}{CZ'}$.

$$\therefore\ \frac{AZ}{CZ}=\frac{AZ'}{CZ'}.$$

因此，点 Z 与 Z' 相重合，从而得出 X、Y、Z 在一条直线上.

1127. 若两个相似的平行四边形 $ABCD$、$A'BC'D'$ 公有 $\angle B$，则 AC'、$A'C$、BD 相交于一点.

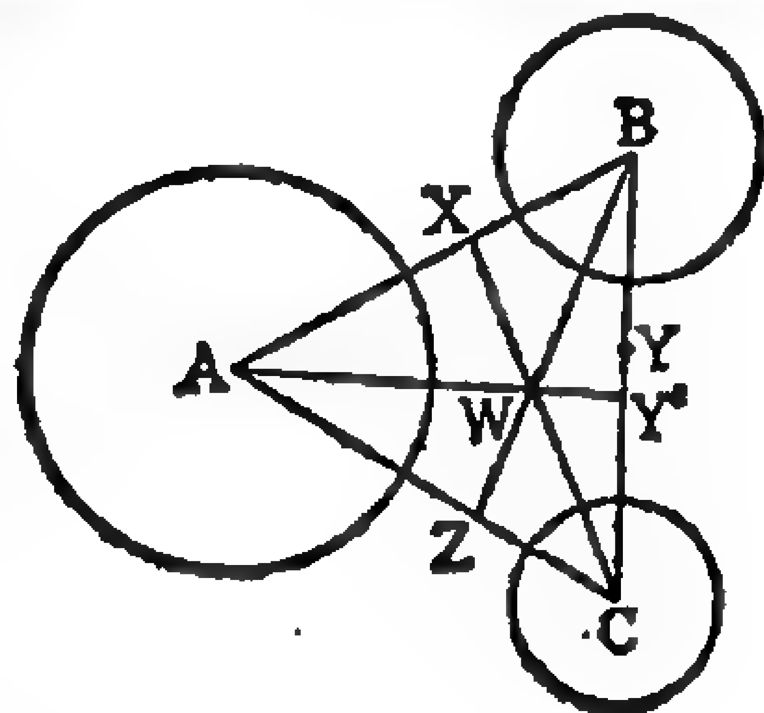


解 若 AC、BD 的交点为 O，则点 O 是 AC 的中点.

$$\because\ \frac{BA'}{BA}=\frac{BC'}{BC},\quad \therefore\ A'C'\parallel AC.$$

由此可知，在 $\triangle ABC$ 中，AC'、$A'C$ 的交点在中线 BO 上. 即 AC'、$A'C$、BD 相交于一点.

1128. 若三个圆 A、B、C 中的每两圆的内位似中心依次为 X、Y、Z，则 AY、BZ、CX 相交于一点.



解 设三个圆 A、B、C 的半径分别为 r、r'、r''，X 是圆 A、B 的内位似中心，则 $\dfrac{AX}{BX}=\dfrac{r}{r'}$.

同理 $\dfrac{BY}{CY}=\dfrac{r'}{r''}$，$\dfrac{CZ}{AZ}=\dfrac{r''}{r}$.

设 BZ、CX 的交点为 W，连结 AW，并延长 AW 与 BC 相交于 Y'，则

$$\frac{r}{r'}=\frac{AX}{BX}=\frac{S_{\triangle AWC}}{S_{\triangle BWC}},\qquad ①$$

$$\frac{r''}{r}=\frac{CZ}{AZ}=\frac{S_{\triangle BWC}}{S_{\triangle BWA}}.\qquad ②$$

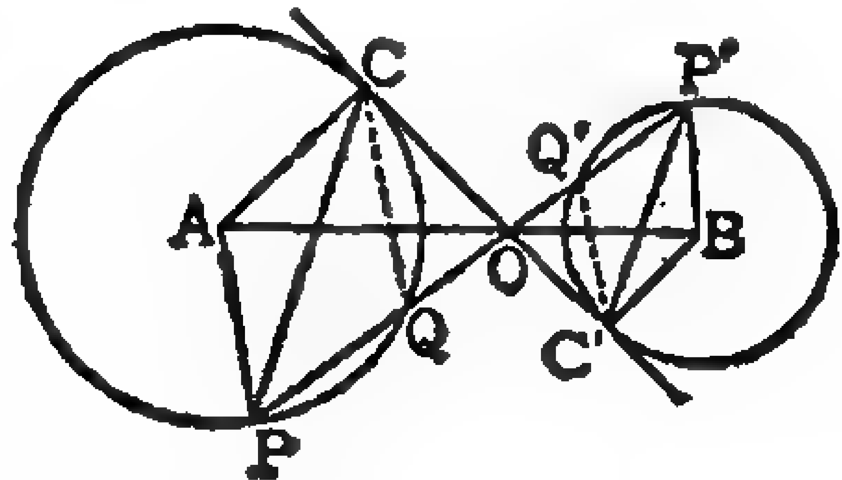
由①、②，得

$$\frac{r''}{r'}=\frac{S_{\triangle AWC}}{S_{\triangle BWA}}=\frac{CY'}{BY'}.$$

$$\therefore\ \frac{CY}{BY}=\frac{CY'}{BY'}.$$

由此可知 Y 和 Y' 相重合. 所以，AY、BZ、CX 相交于一点.

1129. 设 O 为两圆的位似中心，过 O 作两圆的公切线，设切点分别为 C、C'，过 O 引任意割线与一个圆交于 P、Q，与另一圆交于 P'、Q'，则四条直线 CP、CQ、$C'P'$、$C'Q'$ 是每两条互相平行. 这时，不管割线位置如何 $OP\cdot OQ'=OP'\cdot OQ$ 的值一定.



解 设 A、B 为两圆中心，由 B 引 AP 的平行直线与 PP' 的交点为 P''，r、r' 为半径，则

$$\frac{AO}{OB}=\frac{AP}{BP''}=\frac{r}{r'}.$$

$$\therefore \quad \frac{AP}{r}=\frac{BP''}{r'}.$$

由此可得，P'' 与 P' 相重合．所以

$AP \parallel BP'$，且 $\frac{AO}{OB}=\frac{OP}{OP'}$.

又 $\triangle CAO \backsim \triangle C'BO$,

$\therefore \quad \frac{AO}{OB}=\frac{OC}{OC'}$. $\therefore \quad \frac{OP}{OP'}=\frac{OC}{OC'}$.

而 $\angle COP=\angle C'OP'$.

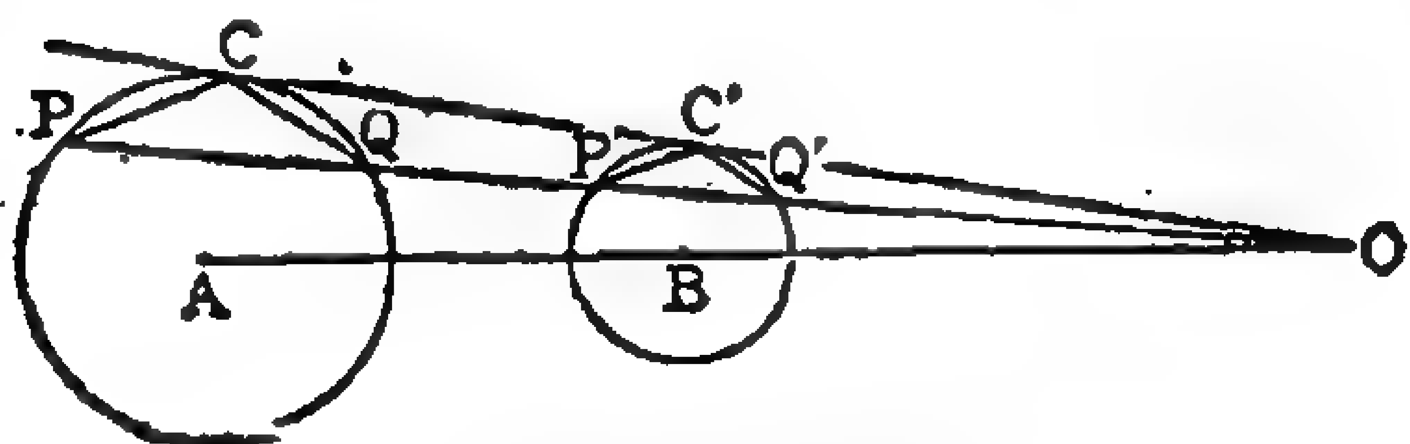
$\therefore \quad \triangle OPC \backsim \triangle OP'C'$.

$\therefore \quad PC \parallel P'C'$.

同理可得，$AQ \parallel BQ'$，$\frac{OQ}{OQ'}=\frac{OC}{OC'}$.

$\therefore \quad CQ \parallel C'Q'$.

又 $\angle QCO=\angle OC'Q'=\angle OP'C'$．所以 C、Q、C'、P' 在同一圆上．



$\therefore \quad OP' \cdot OQ=OC \cdot OC'$.

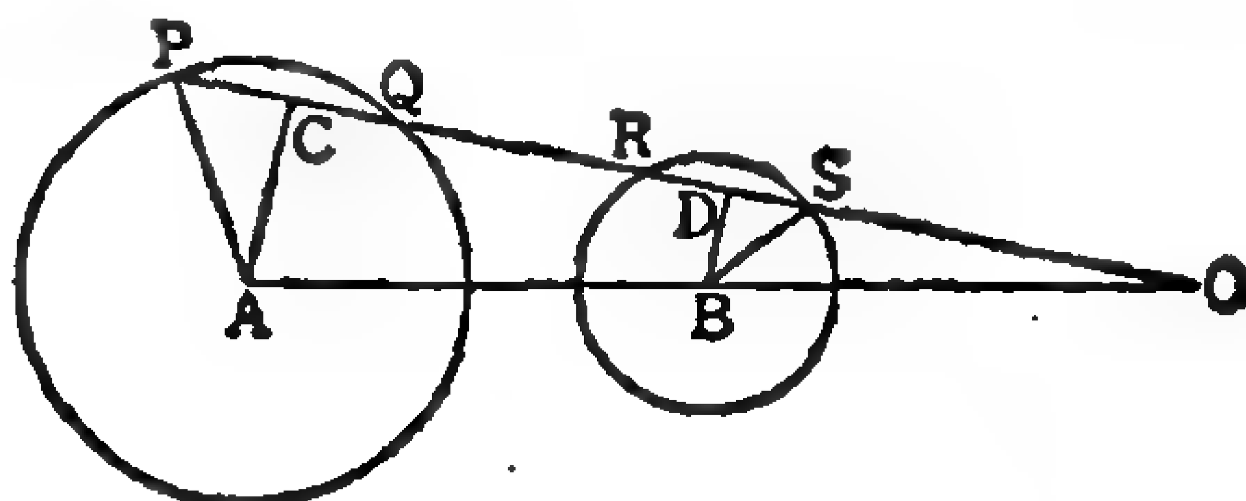
又 $\angle Q'C'O=\angle OCQ=\angle CPQ$．所以 C、P、C'、Q' 在同一圆上，

$\therefore \quad OP \cdot OQ'=OC \cdot OC'$.

$\therefore \quad OP \cdot OQ'=OP' \cdot OQ=OC \cdot OC'$.

而 $OC \cdot OC'$ 是定值，所以 $OP \cdot OQ'$、$OP' \cdot OQ$ 也都是定值．

1130． 过两圆的位似中心的直线，与两圆相交，所截得的弦的比等于两圆半径的比．



解 设过相似中心 O 的任意直线与两圆 A、B 的交点分别为 P、Q，R、S．又两圆的半径分别为 r、r'．从 A、B 向 PS 分别引垂线 AC、BD．连结 AP、BS．因为 O 是两圆的位似中心，所以

$$\frac{AO}{OB}=\frac{r}{r'}=\frac{AP}{BS}.$$

又 $\frac{AO}{BO}=\frac{AC}{BD}$. $\therefore \quad \frac{AP}{BS}=\frac{AC}{BD}$.

由此可得，两个直角三角形 APC 与 BSD 相似．

$$\therefore \quad \frac{PC}{SD}=\frac{AP}{BS}=\frac{r}{r'}.$$

而 $PQ=2PC$，$RS=2SD$.

$$\therefore \quad \frac{PQ}{RS}=\frac{PC}{SD}=\frac{r}{r'}.$$

1131． 作任意圆 C 与给定的两圆 M、N 外切，设切点分别为 Q、R，则过 Q、R 的直线必过两圆的外位似中心．

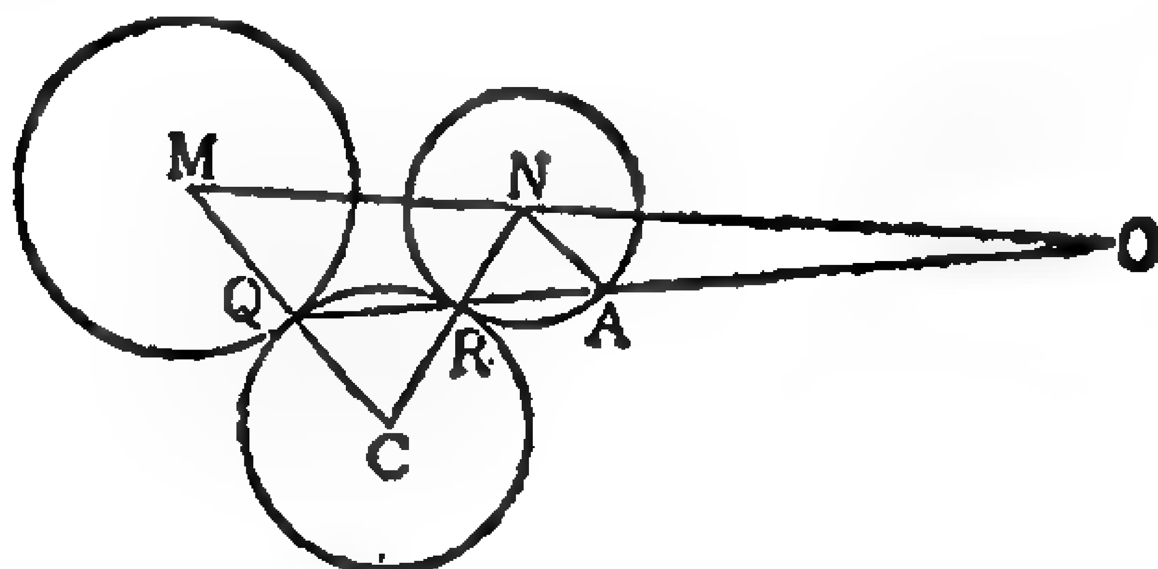
解 设延长 QR 与圆 N 的交点为 A，则 $\triangle CQR$、$\triangle NAR$ 是三个角对应相等的等腰三角形，

$\angle CQR=\angle RAN$，$\therefore \quad QC \parallel NA$.

即 $MQ \parallel NA$.

设两直线 MN、QR 的延长线相交于点 O，则 $\triangle MQO \backsim \triangle NAO$.

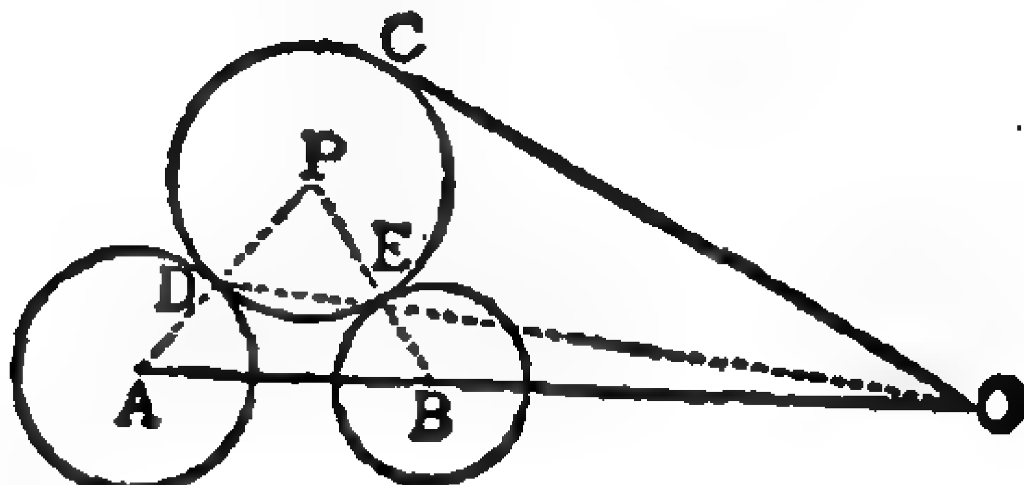
$\therefore \quad MO:NO=MQ:NA$.



即 QR 的延长线与 MN 的交点 O 是两个给定圆 M、N 的外位似中心．由此可知，直线 QR 过两圆的外位似中心．

1132． 设两定圆 A，B 的位似中心为 O，从 O 引与这两圆相切的任意圆 P 的切线 OC，则 CO 是定长．

解 设圆 P 与两定圆 A、B 的切点分别为 D、E，DE、AB 的交点为 O，由上题可知 O 是两定圆的外位似中心．而 A、B 是两个定圆，所以它们的位似中心 O 是定点．



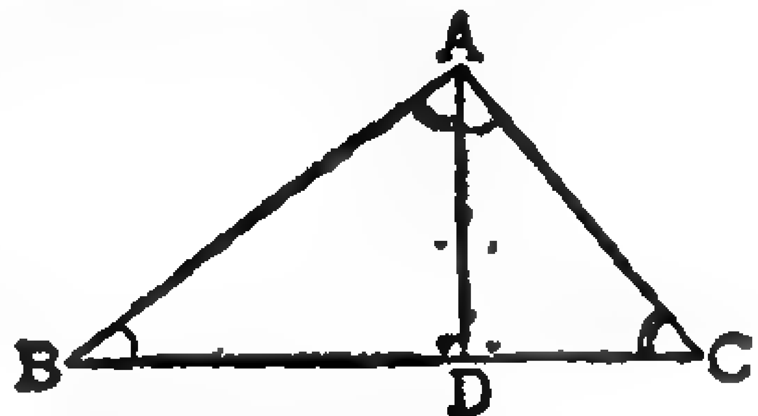
由问题 **1129** 可知，$OE \cdot OD=$定值．

设 OC 是从 O 向圆 P 所引的切线，则

$$OC^2=OE\cdot OD=\text{定值}.$$

从而得出 OC 是定长。

1133. 从 $\triangle ABC$ 的顶点 A 向边 BC 引垂线 AD，若 AD 在三角形内，且 AD 是 BD、DC 的比例中项，则 $\angle BAC$ 是直角。



解 由 AD 是 BD 与 DC 的比例中项可得

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC}.$$

而 $\qquad \angle ADB=\angle ADC=90°.$

由此可得，$\triangle ADB\backsim\triangle CDA$.

$\therefore\ \angle ABD=\angle CAD,\ \angle BAD=\angle ACD.$

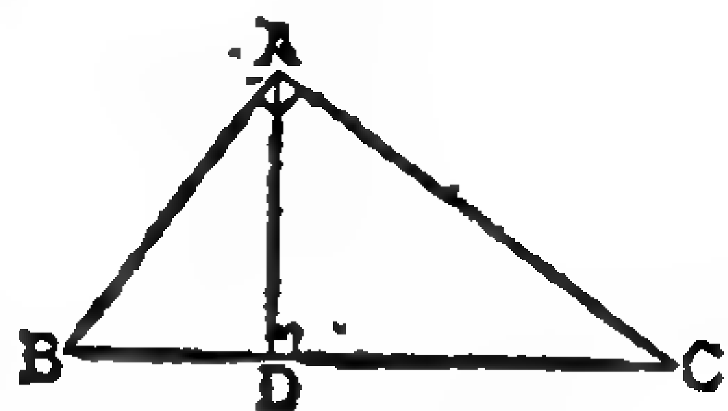
$\therefore\ \angle BAD+\angle CAD=\angle ACD+\angle ABD.$

从而得出，$\angle BAC$ 是 $\triangle ABC$ 三个内角和的一半。所以 $\angle BAC$ 是直角。

1134. 在直角三角形 ABC 中，从直角顶点 A 向斜边 BC 引垂线 AD，则

$$BA^2=BD\cdot BC,$$

$$CA^2=CD\cdot CB,\ AD^2=BD\cdot CD.$$



解 因为 $\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，所以

$$\triangle BAD\backsim\triangle BCA.$$

$$\therefore\ BA:BD=BC:BA.$$

$$\therefore\ BA^2=BD\cdot BC.$$

同理可得，$\triangle ACD\backsim\triangle BCA$.

$$\therefore\ CA:CD=CB:CA.$$

$$\therefore\ CA^2=CD\cdot CB.$$

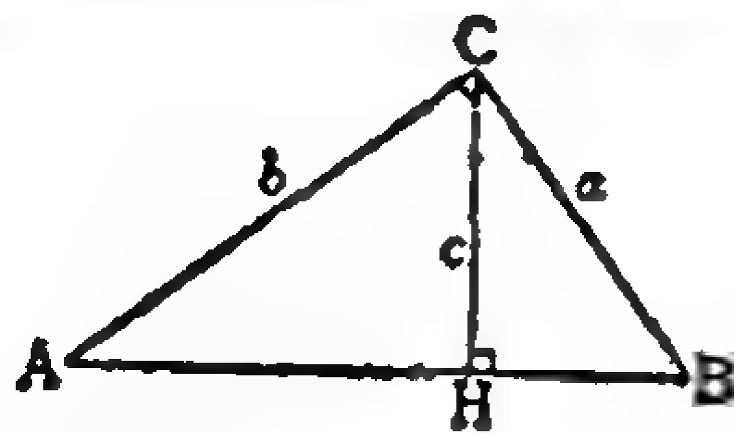
又 $\qquad \triangle ABD\backsim\triangle CAD.$

$$\therefore\ AD:BD=CD:AD.$$

$$\therefore\ AD^2=BD\cdot CD.$$

1135. 设直角三角形 ABC 的两条直角边为 a、b，从直角顶点 C 向斜边 AB 作垂线 c，则

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}.$$



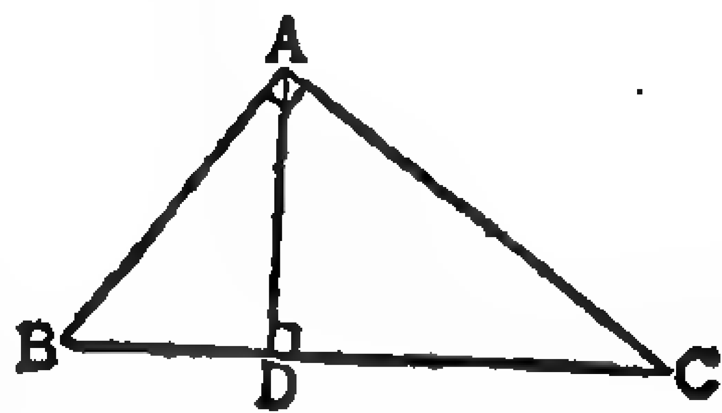
解 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S.

$$\because\ a\cdot b=2S=c\cdot\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\frac{1}{a^2}=\frac{b^2}{4S^2},\quad \frac{1}{b^2}=\frac{a^2}{4S^2},$$

$$\therefore\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{4S^2}=\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2S}\right)^2=\frac{1}{c^2}.$$

1136. 从直角三角形 ABC 的直角顶点 A 向斜边 BC 作垂线 AD，则 $AB^2:CA^2=BD:DC$.



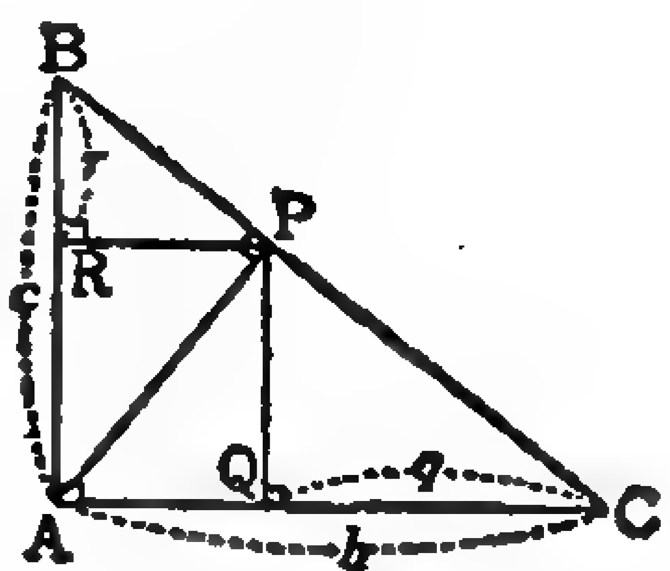
解 $\because\ \triangle BDA\backsim\triangle ADC$,

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle BDA}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{AB^2}{CA^2}.$$

又 $$\frac{S_{\triangle BDA}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{BD}{DC}.$$

$$\therefore\ AB^2:CA^2=BD:DC.$$

1137. 从直角三角形 ABC 的直角顶点 A 向斜边 BC 作垂线，设垂足为 P，从 P 向边 AC、AB 分别作垂线，设垂足分别为 Q、R，AC、AB、CQ、BR 的长分别记为 b、c、q、r，证明 $b^3:c^3=q:r$.



解 $\triangle APC$ 是直角三角形，PQ 是由直角顶点 P 向斜边所作的垂线，Q 是垂足，

$$\therefore\ CP^2=CQ\cdot CA.$$

同理，在直角三角形 APB 中，

$$BP^2=BR\cdot BA.$$

又在直角三角形 ABC 中，

$$BP\cdot BC=AB^2,\ CP\cdot BC=AC^2.$$

$$\therefore\ \frac{q}{r}=\frac{CQ}{BR}=\frac{CP^2}{CA}\cdot\frac{BA}{BP^2}$$

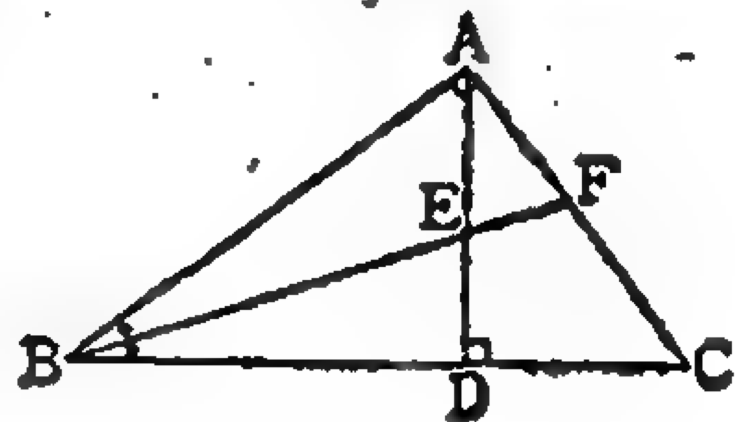
$$=\left(\frac{CP}{BP}\right)^2\cdot\frac{AB}{AC}=\left(\frac{AC^2}{AB^2}\right)^2\cdot\frac{AB}{AC}$$

$$=\frac{AC^3}{AB^3}=\frac{b^3}{c^3}.$$

即 $$\frac{b^3}{c^3}=\frac{q}{r},\ b^3:c^3=q:r.$$

1138. 从直角三角形 ABC 的直角顶点 A 向斜边作垂线 AD，又引 $\angle B$ 的平分线与 AD、AC 分别交于 E、F，则

$$\frac{DE}{AE}=\frac{AF}{CF}.$$



解 在 $\triangle ABC$ 中，BF 是 $\angle B$ 的平分线，

所以

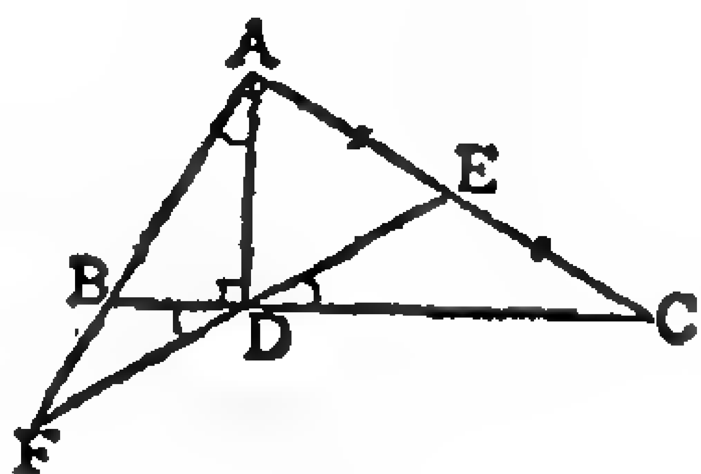
$$\frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AE}.$$

同理可得， $\frac{BA}{BC}=\frac{AF}{CF}.$

而 $\triangle ABD\backsim\triangle CBA.$

$$\therefore\ \frac{BD}{BA}=\frac{BA}{BC}.\quad\therefore\ \frac{DE}{AE}=\frac{AF}{CF}.$$

1139. 从直角三角形 ABC 的直角顶点 A 向斜边 BC 作垂线，设垂足为 D，边 AC 的中点为 E，直线 ED 与边 AB 的延长线交于点 F，证明



$$AB:AC=DF:AF.$$

解 $\because\ ED=EC=EA,$

$\therefore\ \angle CDE=\angle ECD.$

又 $\angle BDF=\angle CDE,\ \angle ECD=\angle FAD,$

$\therefore\ \angle BDF=\angle FAD.$

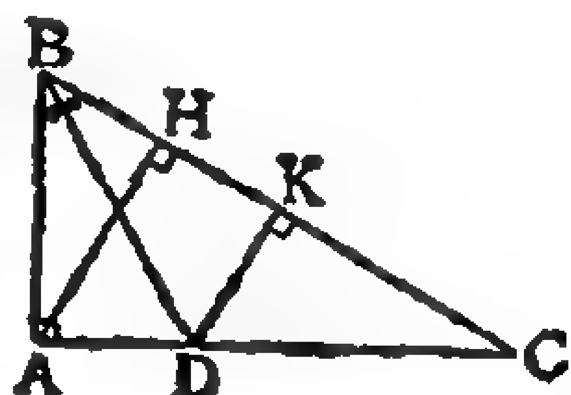
$\therefore\ \triangle DBF\backsim\triangle ADF.$

$\therefore\ DF:AF=DB:AD.$

而 $DB:AD=AB:AC.$

$\therefore\ AB:AC=DF:AF.$

1140. 直角三角形 $ABC(A=90^\circ)$ 的 $\angle B$ 的平分线与 AC 的交点为 D，由 A、D 向 BC 分别作垂线，设垂足分别为 H、K，则 BK 是 BH、BC 的比例中项。



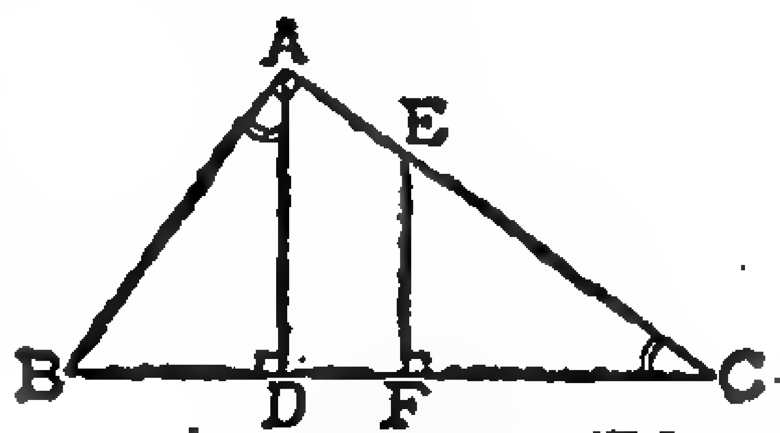
解 在 $\triangle ABD$、$\triangle KBD$ 中，$\angle A=\angle DKC=90^\circ$，$\angle ABD=\angle KBD$，$BD$ 是 $\triangle ABD$、$\triangle KBD$ 的公共边，所以这两个三角形全等，从而得出，$BA=BK$。

在直角三角形 ABC 中，AH 是直角顶点 A 向斜边作的垂线，所以 $BA^2=BH\cdot BC.$

$\therefore\ BK^2=BH\cdot BC,$

即 BK 是 BH、BC 的比例中项。

1141. 在直角三角形 ABC 中，从直角顶点 A、AC 上任一点 E 向斜边 BC 作垂线 AD、EF，则 $AB^2=BD\cdot BF+AD\cdot EF.$



解 $\because\ \angle CAB=90^\circ,\ AD\perp BC,$

$\therefore\ AB^2=BD\cdot BC.$

即

$$AB^2=BD\cdot(BF+CF)$$
$$=BD\cdot BF+BD\cdot CF.\qquad ①$$

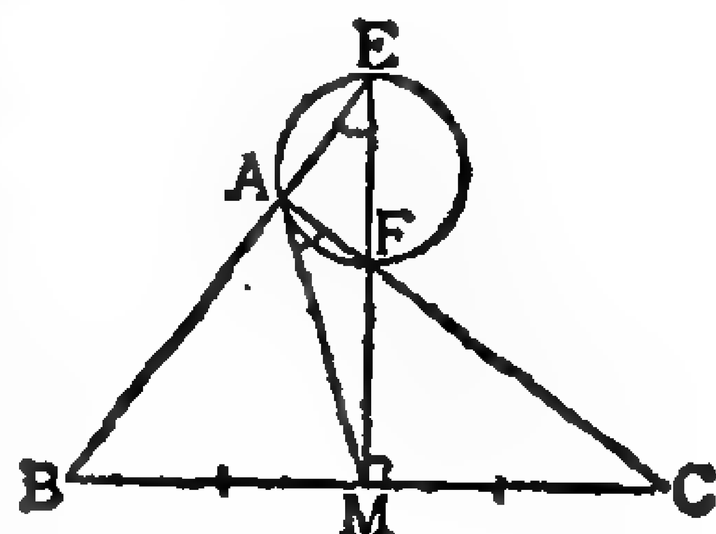
又 $\triangle ABD\backsim\triangle CEF.$

$\therefore\ AD:BD=CF:EF.$

$\therefore\ BD\cdot CF=AD\cdot EF.\qquad ②$

由①、②，得 $AB^2=BD\cdot BF+AD\cdot EF.$

1142. 过直角三角形 ABC 的斜边 BC 的中点 M 作直线垂直于 BC，交 AC、BA 的延长线分别于 F、E，则



$$AM^2=ME\cdot MF.$$

解 $\angle EMC=90^\circ=\angle EAC$，所以 E、A、M、C 四点共圆。

$\therefore\ \angle C=\angle E.\qquad ①$

而 $\triangle ABC$ 是直角三角形，M 是斜边的中点。

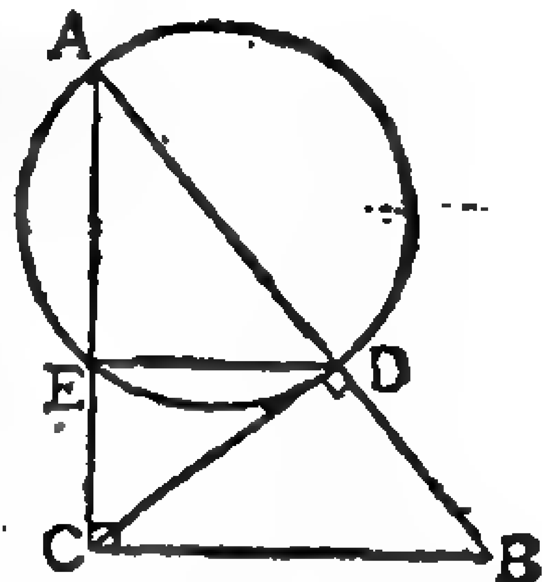
$\therefore\ \angle C=\angle MAC.\qquad ②$

由①、②，得 $\angle E=\angle MAC.$

由此可得，MA 是 $\triangle AEF$ 的外接圆在点 A 处的切线。

$\therefore\ MA^2=ME\cdot MF.$

1143. 从直角三角形 ABC 的直角顶点 C 向斜边 AB 引垂线 CD，设 D 为垂足，以 AD 为直径的圆与边 AC 的交点为 E，则 $AE:CE=AC^2:BC^2.$



解 $\because\ \angle AED=90^\circ,\ \therefore\ DE\perp AC.$

又 $BC\perp AC.\ \therefore\ BC\parallel DE.$

$\therefore\ AE:EC=AD:BD.$

而 $\triangle ADC\backsim\triangle CDB.$

$\therefore\ S_{\triangle ADC}:S_{\triangle CDB}=AC^2:CB^2.$

又 $S_{\triangle ADC}:S_{\triangle CDB}=AD:DB.$

$\therefore\ AE:CE=AC^2:CB^2,$

即 $AE:CE=AC^2:BC^2.$

1144. 直角三角形 ABC 中，$\angle A=90^\circ$，在边 AB、AC 上分别取点 P、Q，由 A 向直线 PQ 所作垂线 AF 与 BC 交于 D，则

$$BD:CD=AP\cdot AB:AQ\cdot AC.$$

解　从 B 作 $BE \parallel AC$，设 BE、AD 的交点为 E，则

$BD:CD = BE:AC$。　①

在 $\triangle APQ$ 与 $\triangle BEA$ 中，

$$\angle PAQ = \angle ABE = 90°,$$
$$\angle APQ = 90° - \angle PAF = \angle QAE = \angle BEA.$$

由此可知，这两个三角形相似。

$$\therefore \quad AP:AQ = BE:BA. \qquad ②$$

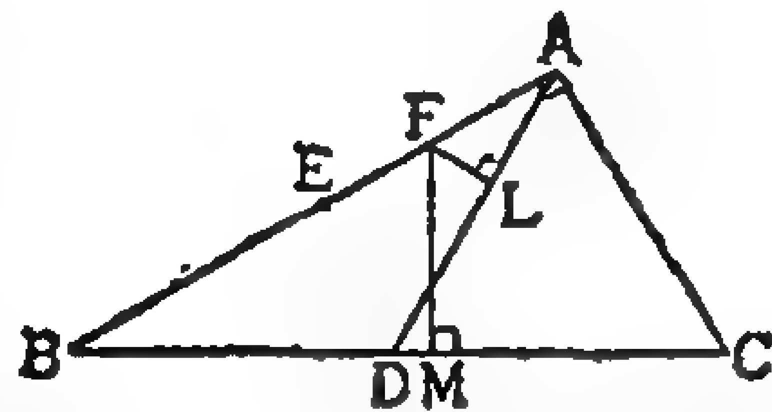
由①、②，得 $\dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{BE}{AC} \cdot \dfrac{BA}{BE}$。

$$\therefore \quad \frac{BD}{CD} \cdot \frac{AQ}{AP} = \frac{AB}{AC}.$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{CD} = \frac{AP \cdot AB}{AQ \cdot AC}.$$

即　$BD:CD = AP \cdot AB : AQ \cdot AC$。

1145.　设直角三角形 ABC 的斜边 BC 的中点为 D，AB 的中点为 E，AE 的中点为 F，若从 F 向 BC、AD 所引垂线分别为 FM、FL，则 $FM:FL = 3:1$。



解　在 $\triangle AFL$、$\triangle BFM$ 中，

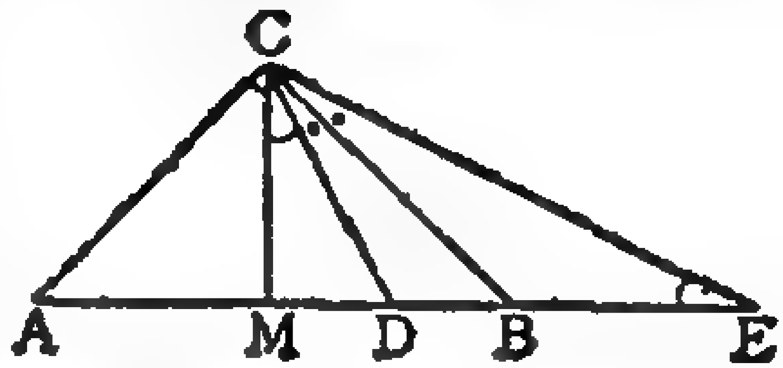
$$\angle ALF = \angle BMF = 90°.$$

又 D 为斜边 BC 的中点，所以

$$\angle FBM = \angle FAL.$$
$$\therefore \quad \triangle BFM \backsim \triangle AFL.$$
$$\therefore \quad FM:FL = BF:AF.$$

而　$BF:AF = 3:1$。$\therefore$　$FM:FL = 3:1$。

1146.　从直角三角形 ABC 的直角顶点 C 引两条直线 CD、CE，使这两直线与 BC 的夹角相等，设 CD、CE 与 AB 或其延长线交于 D、E，若 M 为 AB 的中点，则 MB 是 MD、ME 的比例中项。



解　$\triangle ABC$ 是直角三角形，C 为直角顶点，M 为 AB 的中点，所以

$$\angle MCB = \angle MBC.$$

由假设，得　$\angle DCB = \angle ECB$。

所以　$\angle MCD = \angle CEM$。

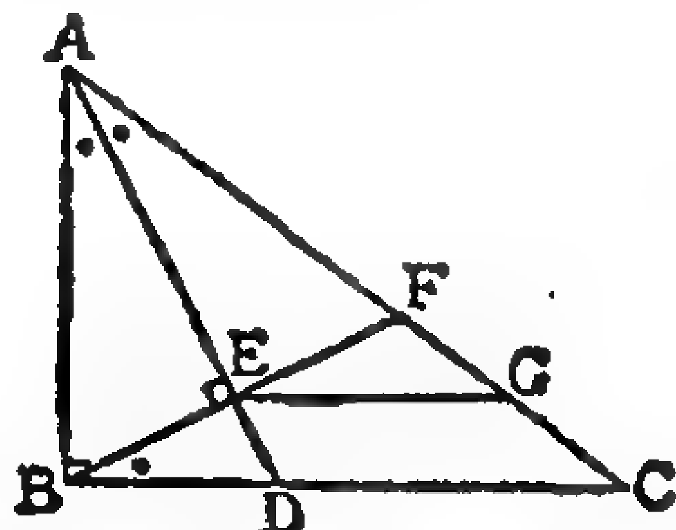
由此可知，MC 是 $\triangle DCE$ 的外接圆的切线。从而得出，$MC^2 = MD \cdot ME$。

$$\therefore \quad MB^2 = MD \cdot ME.$$

即 MB 是 MD、ME 的比例中项。

1147.　直角三角形 ABC 中，$\angle B = 90°$，$\angle A$ 的平分线与边 BC 相交于 D，则

$$\frac{AB^2}{AD^2} = \frac{BC}{2CD}.$$



解　从 B 引 AD 的垂线 BE，设 E 为垂足，BE 与 AC 交于 F，过 E 引 BC 的平行线与 AC 交于 G，则 $AB^2 = AE \cdot AD$。

$$\because \quad \angle BAD = \angle FAE,\ AE \perp BF,$$
$$\therefore \quad BE = EF.$$

又 $EG \parallel BC$。所以 $2EG = BC$。

$$\therefore \quad \frac{AB^2}{AD^2} = \frac{AE \cdot AD}{AD^2} = \frac{AE}{AD} = \frac{EG}{CD} = \frac{2EG}{2CD} = \frac{BC}{2CD}.$$

即　$\dfrac{AB^2}{AD^2} = \dfrac{BC}{2CD}$。

1148.　在直角三角形 ABC 的斜边 AB 上取一点 D，AB 的延长线上取一点 E，若

$$\angle BCD = \angle BCE = \angle A,$$

则　$DA:DB = EA^2:EC^2$。

解　由 $\angle BCD = \angle BCE = \angle A$，得

$$\angle ACB = \angle CDA = 90°.$$

$\therefore$　$DA:DB = AC^2:BC^2 = DC^2:DB^2$。　①

又在 $\triangle CDE$ 中，CB 是 $\angle DCE$ 的平分线，且 $CA \perp CB$，

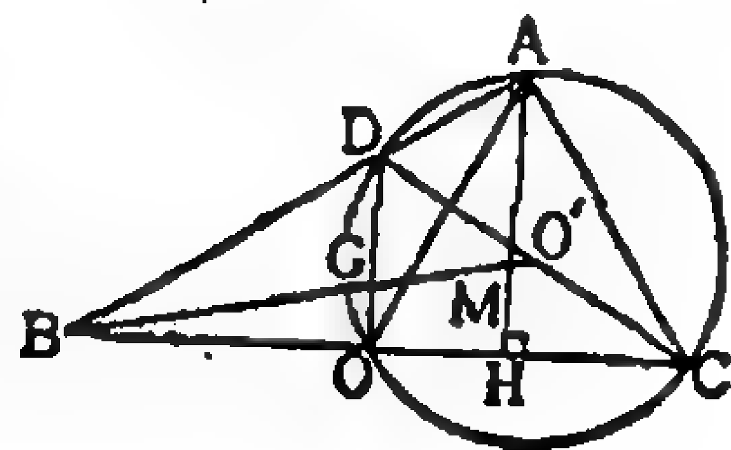
$$\therefore \quad EA:DA = EC:DC.$$
$$\therefore \quad EA:EC = DA:DC.$$

又　$DA:DC = DC:DB$，

$$\therefore \quad EA:EC = DC:DB. \qquad ②$$

由①、②，得 $DA:DB = EA^2:EC^2$。

1149.　设直角三角形 ABC 的斜边 BC 的中点为 O，$\triangle AOC$ 的外心为 O'，从 A 向 BC 作



垂线，垂足为 H，AH 与 BO' 的交点为 M，则 $AM:MH=2:1$。

解 设 AB 与圆 O' 交于 D。由 $\angle A=90°$ 可知，DC 是圆 O' 的直径。

$$\therefore\quad DO'=O'C.$$

又 $BO=OC$，BO' 与 DO 的交点 G 是 $\triangle DBC$ 的重心。所以

$$DG:GO=2:1.$$

而四边形 $DACO$ 内接于圆 O'，且 DC 是圆 O' 的直径，由此可知，$DO\perp BC$。从而得出，$DO\parallel AH$，

$$\therefore\quad AM:MH=DG:GO=2:1.$$

1150. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 为直角，设 $BD\perp AC$，$CE\perp BC$，BD 的延长线与 CE 交于 E，则 $\dfrac{AD}{DE}=\left(\dfrac{AB}{BC}\right)^3$。

解 $\because\ \triangle ADB\backsim\triangle ABC$，

$$\therefore\quad \frac{AD}{DB}=\frac{AB}{BC}. \qquad ①$$

$\because\ \triangle BDC\backsim\triangle ABC$，

$$\therefore\quad \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{BC}. \qquad ②$$

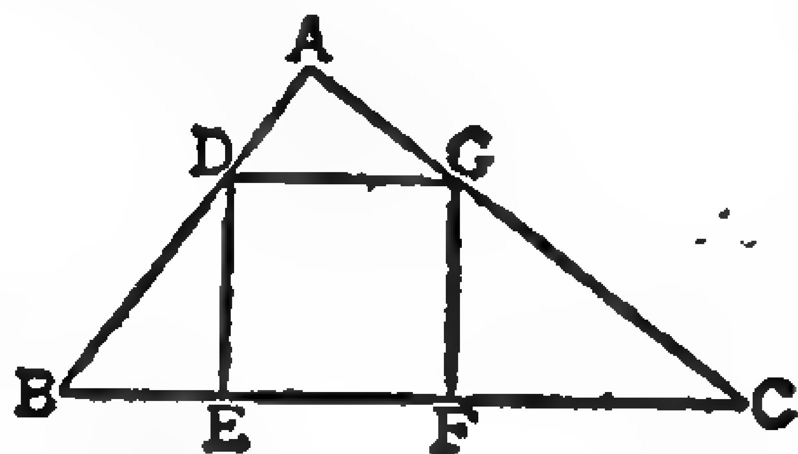
$\because\ \triangle CDE\backsim\triangle ABC$，

$$\therefore\quad \frac{CD}{DE}=\frac{AB}{BC}. \qquad ③$$

由①×②×③，得

$$\frac{AD}{DE}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^3.$$

1151. 若正方形 $DEFG$ 内接于直角三角形 $ABC(\angle A=90°)$，边 EF 在斜边 BC 上，则 EF 是 BE、FC 的比例中项。



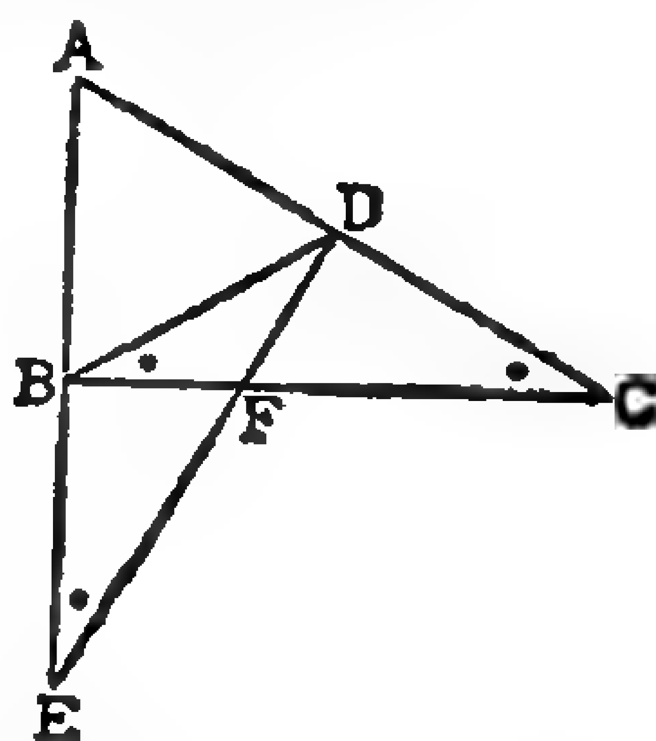
解 由 $\triangle BED\backsim\triangle GFC$，得

$$\frac{BE}{ED}=\frac{GF}{FC}.$$

而 $DE=EF=GF$。$\therefore\ \dfrac{BE}{EF}=\dfrac{EF}{FC}$。

即 EF 是 BE、FC 的比例中项。

1152. 设 D 为直角三角形 ABC 的斜边 AC 上的一点，过 D 点作 AC 的垂线与 AB 的延长线，BC 分别交于 E、F，若 $BD^2=DE\cdot DF$，则 D 是 AC 的中点。



解 在 $\triangle DBF$ 与 $\triangle DEB$ 中 $\angle D$ 是公共角，且

$$DB^2=DE\cdot DF,$$

所以 DB 是圆 BEF 在点 B 处的切线。

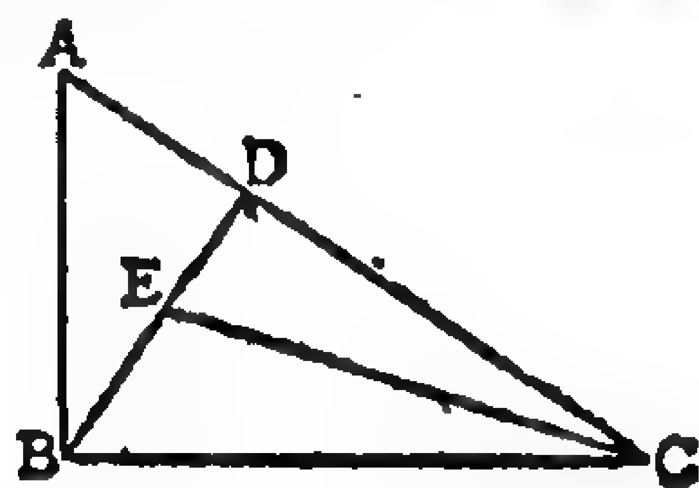
$\therefore\quad \angle DBC=\angle E.$

而 $\qquad \angle C=\angle E.$

从而得出，$DC=DB=DA$。即 D 是 AC 的中点。

1153. 从直角三角形 ABC(B 为直角)的顶点 B 向 AC 引垂线 BD，在 BD 上取一点 E，使 $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{AD}{ED}$，连结 CE，则

$$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle DEC}.$$



解 在 $\triangle ADB$、$\triangle EDC$ 中，

$$\angle ADB=90°=\angle EDC,$$

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle EDC}}=\frac{AD\cdot BD}{ED\cdot CD}.$$

而 $\qquad \dfrac{BD}{AD}=\dfrac{AD}{ED}.$

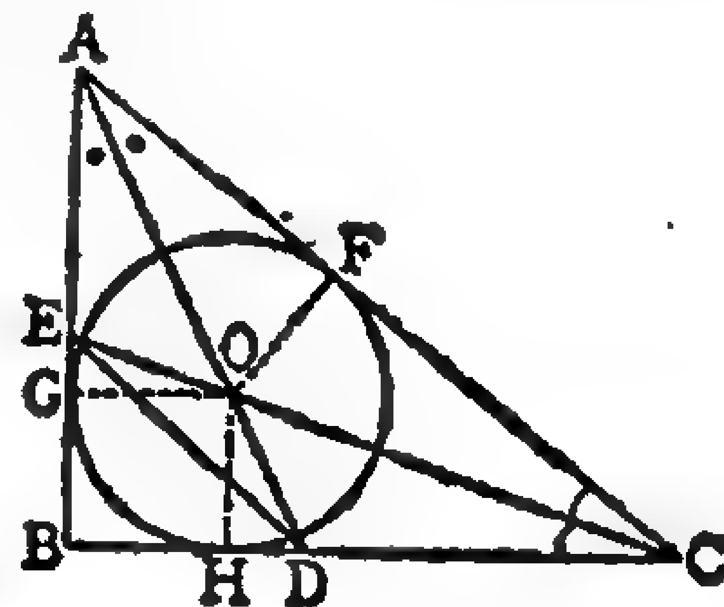
$\because\ \triangle BDC\backsim\triangle ADB$，$\therefore\ \dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AD}{BD}$。

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle DEC}}=1.$$

即 $\qquad S_{\triangle ABD}=S_{\triangle DEC}.$

1154. 直角三角形 ABC 中，B 为直角，$\angle A$、$\angle C$ 的平分线 AD、CE 的交点为 O，则 $\triangle OAC$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}$ 四边形 $AEDC$ 的面积。

解 设内切圆 O 与边 CA、AB、BC 的切点分别为 F、G、H，则 $OG\parallel BC$，$OH\parallel AB$。



$$\therefore\quad \frac{BD}{GO}=\frac{AB}{AG}, \quad ①$$

$$\frac{BE}{HO}=\frac{BC}{HC}. \quad ②$$

①×②，得 $\quad \dfrac{BD\cdot BE}{GO\cdot HO}=\dfrac{AB\cdot BC}{AG\cdot HC}.$

而 $BD\cdot BE=2\triangle BDE$ 的面积,

$GO\cdot HO=$ 正方形 $OGBH$ 的面积,

$AB\cdot BC=2\triangle ABC$ 的面积,

$AG\cdot HC=AF\cdot FC=\triangle ABC$ 的面积

(问题 822)。

$\therefore$ $\triangle BDE$ 的面积

$=$ 正方形 $OGBH$ 的面积.

从而得出,

四边形 $AEDC$ 的面积

$=(\triangle ABC$ 的面积$-$正方形 $OGBH$ 的面积$)$

$=2(\triangle OAF$ 的面积$+\triangle OCF$ 的面积$)$

$=2\triangle OAC$ 的面积.

$\therefore$ $\triangle OAC$ 的面积

$=\frac{1}{2}$ 四边形 $AEDC$ 的面积.

1155. 设直角三角形 ABC 的直角顶点为 A, 从 A 向斜边 BC 作垂线 AD, 设 D 为垂足, 则 AD 把 $\triangle ABC$ 分成两个三角形的内切圆的面积的比等于 $BD:DC$.

解 因为 $\triangle ABD\backsim\triangle CAD$, 所以这两个三角形内切圆半径的比等于对应边的比. 设这两个三角形的内切圆的半径分别为 r、r', 则

$$r:r'=AB:AC.$$

又设这两个圆的面积分别为 S、S', 则

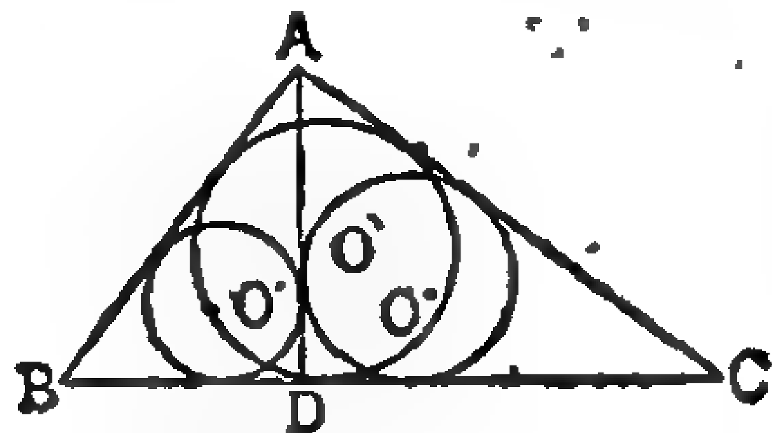
$$S:S'=r^2:r'^2=AB^2:AC^2.$$

而 $\quad AB^2:AC^2=BD:DC.$

$\therefore$ $S:S'=BD:DC.$

1156. 从直角三角形 ABC 的直角顶点 A 向 BC 引垂线 AD, 把三角形 ABC 分成两个三角形 ABD 和 ADC, 则 $\triangle ABD$、$\triangle ADC$ 的内切圆面积的和等于 $\triangle ABC$ 内切圆的面积.

解 显然, $\triangle ABC\backsim\triangle DBA\backsim\triangle DAC$. 设这三个三角形内切圆的半径分别为 R、r、r', 则



$$\frac{R^2}{BC^2}=\frac{r^2}{AB^2}=\frac{r'^2}{CA^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{R^2}{BC^2}=\frac{r^2+r'^2}{AB^2+CA^2}.$$

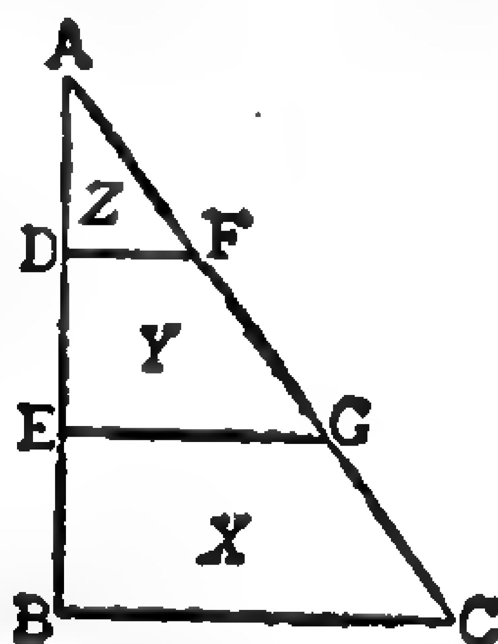
而 $\triangle ABC$ 是直角三角形. 所以

$$AB^2+CA^2=BC^2.$$

$$\therefore\quad r^2+r'^2=R^2.$$

由此可得, $\pi r^2+\pi r'^2=\pi R^2$.

1157. 在直角三角形 ABC 中, B 为直角, 把边 AB 三等分, 再过各分点引 AB 的垂线把 $\triangle ABC$ 分成三部分, 设这三部分的面积按靠近边 BC 的顺次记为 X、Y、Z, 则 $X+Z=2Y$.



解 设三等分 AB 的点为 D、E, 过 D、E 引 AB 的垂线与 AC 的交点分别为 F、G. 这时, 三个三角形 ADF, AEG, ABC 相似.

$$\therefore\quad S_{\triangle ADF}:S_{\triangle AEG}:S_{\triangle ABC}=AD^2:AE^2:AB^2.$$

而 $\quad AD:AE:AB=1:2:3,$

$$\therefore\quad S_{\triangle ADF}:S_{\triangle AEG}:S_{\triangle ABC}=1:4:9.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ADF}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle AEG}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}.$$

设 梯形 $BCGE$ 的面积$=X$,

梯形 $EGFD$ 的面积$=Y$,

$\triangle ADF$ 的面积$=Z$, 则

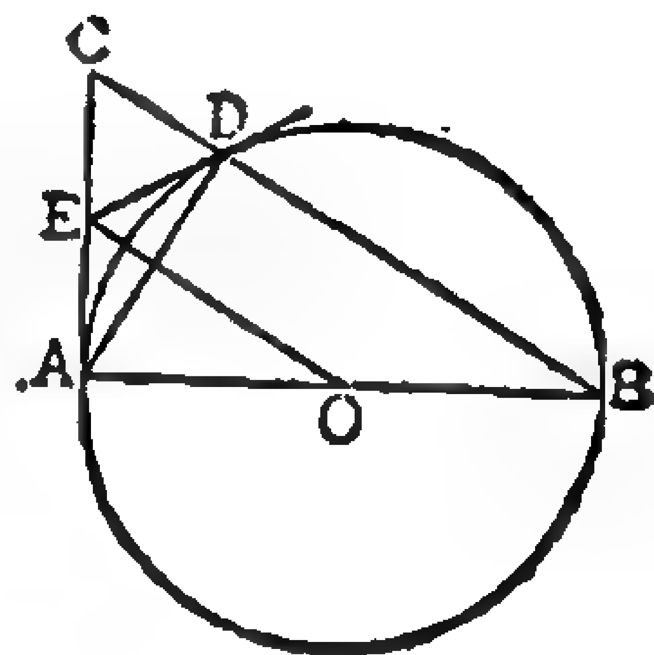
$$X=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AEG}=S_{\triangle ABC}-\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{5}{9}S_{\triangle ABC},$$

$$Y=S_{\triangle AEG}-S_{\triangle ADF}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}-\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

$$\therefore\quad X+Z=\frac{5}{9}S_{\triangle ABC}+\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}.$$

$$\therefore\quad X+Z=2Y.$$

1158. 在直角三角形 ABC 中, 以一条直角边 AB 为直径作圆与斜边 BC 交于点 D, 过 D 引圆的切线 DE, 则切线 DE 等分另一条直角边.



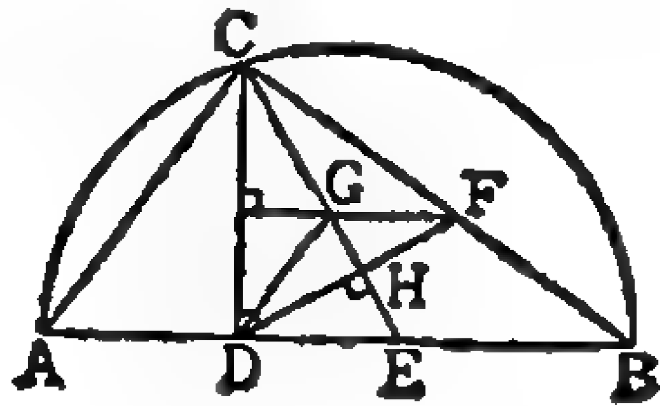
解　∵ AB 为直径，∴ $\angle ADC=90°$。又 ED、EA 分别为圆 O 的切线，

∴ $\angle EDA=\angle EAD$。

∴ $ED=EA$。

从而得出，$ED=EA=CE$。即点 E 是 AC 的中点。

1159. 以 AB 为直径的半圆 ACB 上一点 C 向 AB 引垂线 CD，设 D 为垂足。在 DB 上取一点 E，从 D 向 CE 引垂线 DH，DH 的延长线与 CB 交于点 F，则 $\dfrac{CF}{FB}=\dfrac{AD}{DE}$。



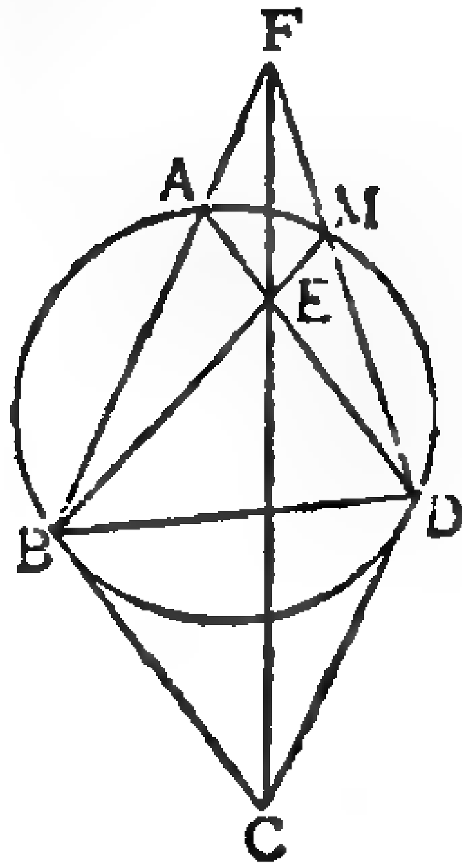
解　由 F 引 CD 的垂线与 CH 交于 G，则 G 是 $\triangle CDF$ 的垂心。

∴ $DG\perp BC$。而 $AC\perp BC$。

∴ $DG\parallel AC$。∴ $\dfrac{CF}{FB}=\dfrac{CG}{GE}=\dfrac{AD}{DE}$。

5. 正三角形、等腰三角形的比例线段

1160. 设以等腰三角形 ABC 的底边 BC 为半径，点 B 为圆心的圆与边 AC 的交点为 D，则 BC 是 AB 与 CD 的比例中项。



解　$\triangle ABC$ 与 $\triangle BDC$ 都是等腰三角形，它们的底角 C 是公共的，可知 $\angle A$ 和 $\angle DBC$ 相等。由此可得，边 BC 切圆 ADB 于点 B。

∴ $BC^2=CA\cdot CD=AB\cdot CD$。

即 BC 是 AB 与 CD 的比例中项。

1161. 设菱形 $ABCD$ 的对角线 BD 的长等于菱形的边长，连结边 AD 上的点 E 与点 C 的直线与 BA 的延长线交于点 F，又 BE 的延长线与 DF 的交点为 M，则

(1) $BF:BD=BD:DE$;

(2) $\triangle FBD\backsim\triangle BDE$;

(3) $\triangle BMD\backsim\triangle FBD$;

(4) 当点 E 在边 AD 上移动时，问点 M 形成什么图形。

解　(1) ∵ $BF:BA=CF:CE$
$=DA:DE$，

∴ $BF:BD=BD:DE$。

(2) ∵ $\angle FBD=\angle BDE$，

且　$BF:BD=BD:DE$，

∴ $\triangle FBD\backsim\triangle BDE$。

(3) 由(2)可得，

$\angle BFD=\angle DBE=\angle DBM$。

又　$\angle FDB=\angle BDM$。

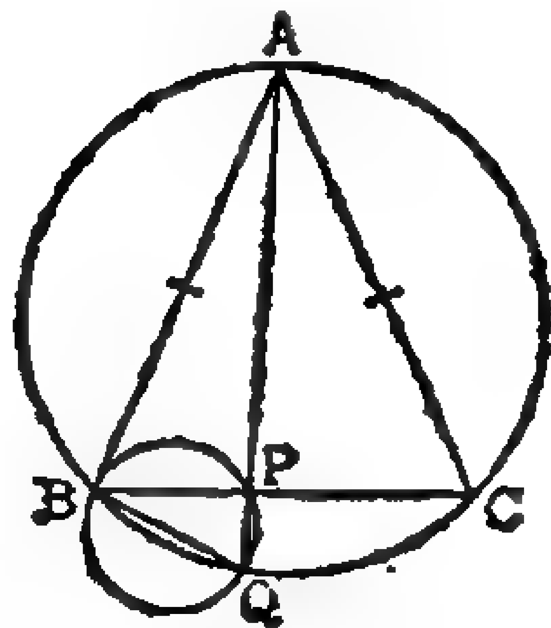
∴ $\triangle BMD\backsim\triangle FBD$。

(4) 由(3)可得，

$\angle BMD=\angle FBD=\angle BAD$。

所以四点 A、B、D、M 共圆。由此可知，当动点 E 在 AD 上从 A 移动到 D 时，点 M 则在弧 AD 上从 A 移动到 D，即点 M 在劣弧 AD 上移动。

1162. 设过等腰 $\triangle ABC$ 的顶点 A 引直线，交底边 BC 或其延长线于点 P，交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 Q。则以 AP，AQ 为邻边的矩形的面积是定值。



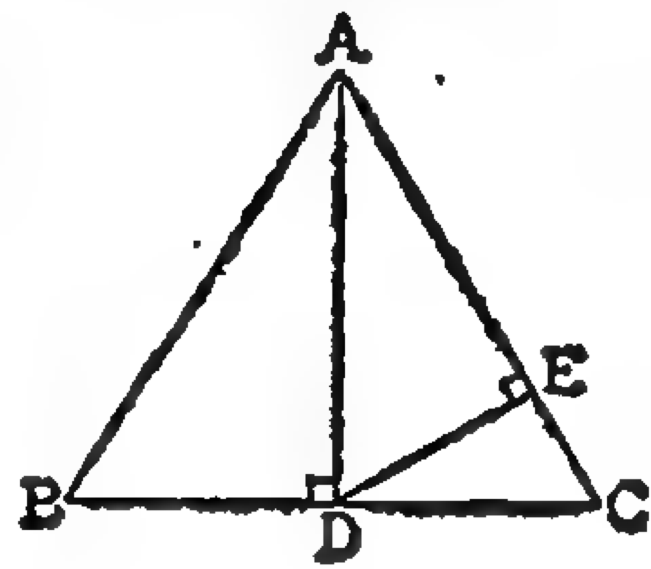
解　∵ $\angle ABC=\angle ACB=\angle AQB$，

∴ AB 切圆 BPQ 于点 B。

∴ $AP\cdot AQ=AB^2$。

而 AB^2 是定值。所以 $AP\cdot AQ$ 也是定值。即以 AP、AQ 为邻边的矩形的面积是定值。

1163. 从正三角形 ABC 的底边 BC 的中点 D 向边 AC 引垂线 DE，设垂足为 E，则 AE 是 EC 的三倍。



解　∵ $\angle ADC=90°$，且 $DE\perp AC$，

∴ $\triangle AED\backsim\triangle DEC$。

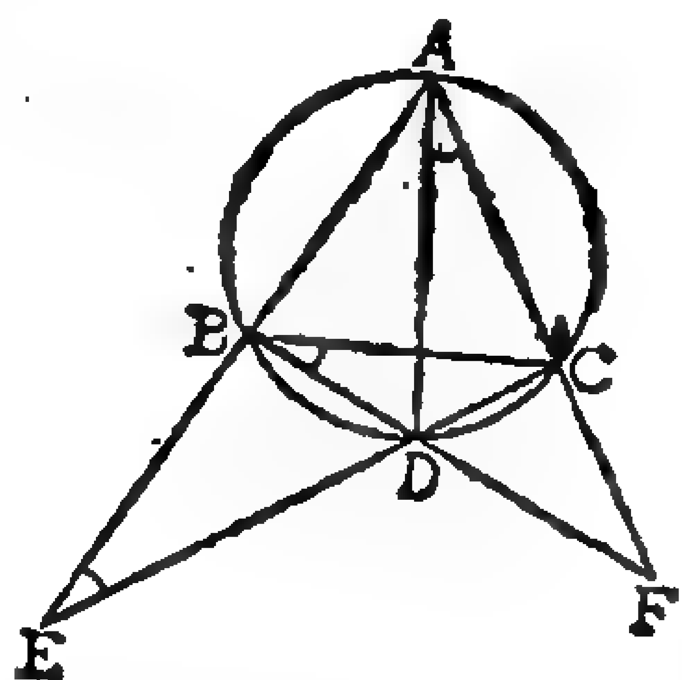
∴ $S_{\triangle AED}:S_{\triangle DEC}=AD^2:DC^2$。

而　$S_{\triangle AED}:S_{\triangle DEC}=AE:EC$。

∴ $AE:EC=(\sqrt{3}DC)^2:DC^2=3:1$。

1164. 从正三角形 ABC 的外接圆的劣弧 BC 上任取一点 D，AB、CD 的延长线交

于E，AC、BD的延长线交于F，则BC是BE、CF的比例中项。



解 连结AD。

$\because$ $\angle ADC$
$=\angle ABC$
$=\angle BAC$，

且$\angle ACD=\angle ACE$，

$\therefore$ $\triangle AEC \backsim \triangle DAC$。

$\therefore$ $\angle E=\angle DAC=\angle DBC$。

同理可得，$\angle F=\angle BCE$。

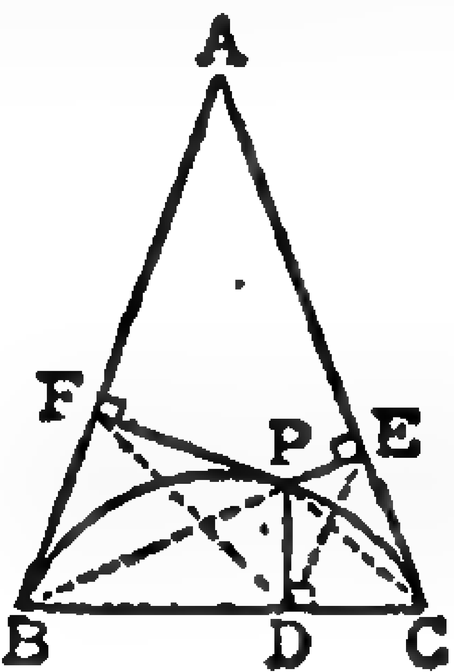
$\therefore$ $\triangle EBC \backsim \triangle BCF$。

$\therefore$ $EB:BC=BC:CF$。

即BC是BE、CF的比例中项。

1165. 从等腰三角形ABC的底边BC的一端B向AC引垂线BD，设D是垂足，则

$BC^2=2CA\cdot CD$。



解 作$AE\perp BC$，则在$\triangle AEC$与$\triangle BDC$中，$\angle C$是公共角，

$\angle AEC=\angle BDC=\angle R$，

$\therefore$ $\triangle AEC \backsim \triangle BDC$。

从而得出，$\dfrac{CA}{EC}=\dfrac{BC}{CD}$。

$\therefore$ $BC\cdot EC=CA\cdot CD$。

即 $BC\cdot\left(\dfrac{1}{2}BC\right)=CA\cdot CD$。

所以 $BC^2=2CA\cdot CD$。

1166. 设等腰三角形ABC的两腰AB、AC分别在点B、C处与过点B、C的圆相切，从圆上任一点P向边BC、CA、AB或其延长线分别引垂线PD、PE、PF，设D、E、F是垂足，则

$PD^2=PE\cdot PF$。

解 连结PB、PC、DE、DF。因为FB是切线，所以$\angle PBF=\angle PCB$。

$\because$ P、F、B、D四点共圆，$\therefore$ $\angle PBF=\angle PDF$。

$\therefore$ $\angle PDF=\angle PCB$。

又P、D、C、E四点也共圆，

$\therefore$ $\angle PCD=\angle PED$。

$\therefore$ $\angle PDF=\angle PED$。

同理可得，$\angle PFD=\angle PDE$。

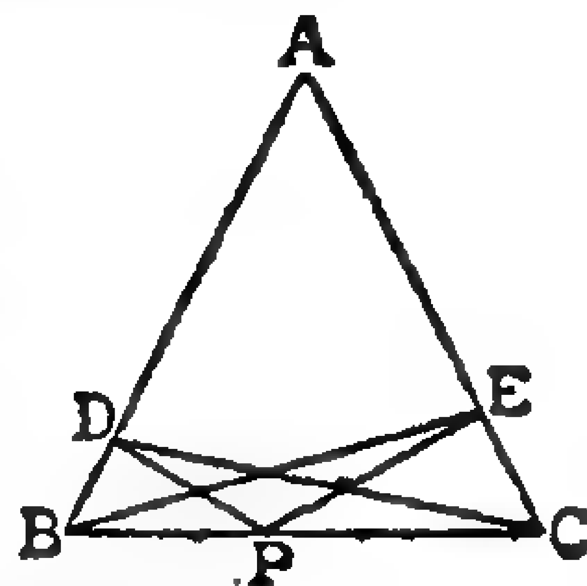
$\therefore$ $\triangle PFD \backsim \triangle PDE$。

$\therefore$ $PF:PD=PD:PE$。

即 $PD^2=PE\cdot PF$。

1167. 设在等腰三角形ABC的底边BC上取点P，从P引与BC成等角的两直线，分别交AB、AC于D、E，则

$S_{\triangle PEB}=S_{\triangle PCD}$。



解 $\because$ $\angle BPD=\angle CPE$，

$\therefore$ $\angle BPE=\angle CPD$。

$\therefore$ $\dfrac{S_{\triangle PEB}}{S_{\triangle PCD}}=\dfrac{PB\cdot PE}{PD\cdot PC}$。

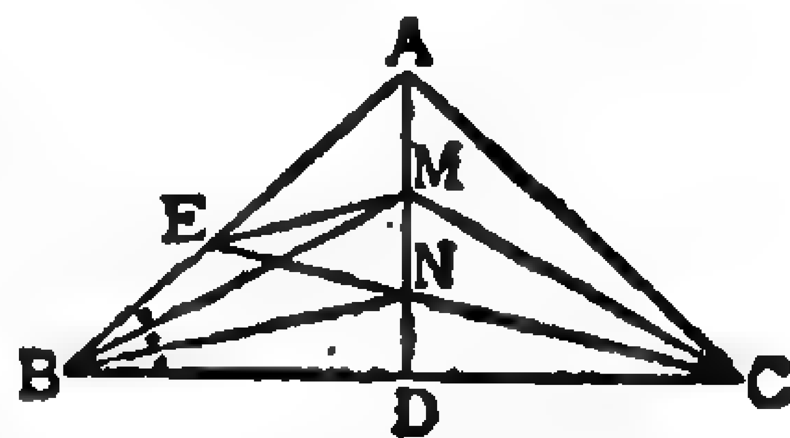
但是 $\triangle PBD \backsim \triangle PCE$。

$\therefore$ $\dfrac{PB}{PD}=\dfrac{PC}{PE}$。

$\therefore$ $PB\cdot PE=PD\cdot PC$，

$\therefore$ $S_{\triangle PEB}=S_{\triangle PCD}$。

1168. 等腰直角三角形ABC中，过B引BM、BN三等分$\angle B$，从直角顶点A向BC引垂线AD，AD与BM、BN分别相交于M、N，设CN的延长线与AB的交点为E，则EM与BN平行。



解 垂线AMN是顶角A的平分线，BM是$\angle ABN$的平分线，又

$\angle ACN=\angle ABN$，$\angle ACM=\angle ABM$，

$\therefore$ CM是$\angle ACN$的平分线。

在$\triangle AEC$中，因为M是$\angle A$、$\angle C$的平分线的交点，所以M是$\triangle AEC$的内心，因此EM是$\angle AEC$的平分线。

由此可得，

$AE:EN=AM:MN$。 ①

又由$BN=CN$可知，

$\angle ENB=2\angle NBC=\angle EBN$。

$\therefore$ $EB=EN$。

$\therefore$ $AE:EN=AE:EB$。

由①，得$AE:EB=AM:MN$，所以$EM \parallel BN$。

1169. 已知圆的圆心O在等腰三角形ABC的底边BC上，且与AB、AC相切，作

圆的任意切线与 AB、AC 的交点分别为 E、F，则 $BE\cdot CF=OB^2$。

解 在 $\triangle BEO$、$\triangle COF$ 中，$\angle B=\angle C$。又四边形 $BEFC$ 的内角和等于 $360°$，而

$\angle B=\angle C$，

$\angle BEO=\angle FEO$，

$\angle EFO=\angle CFO$，

所以

$\angle B+\angle BEO+\angle OFC=180°$。

在 $\triangle BEO$ 中，$\angle B+\angle BEO+\angle BOE=180°$。

由此可得，$\angle OFC=\angle BOE$。

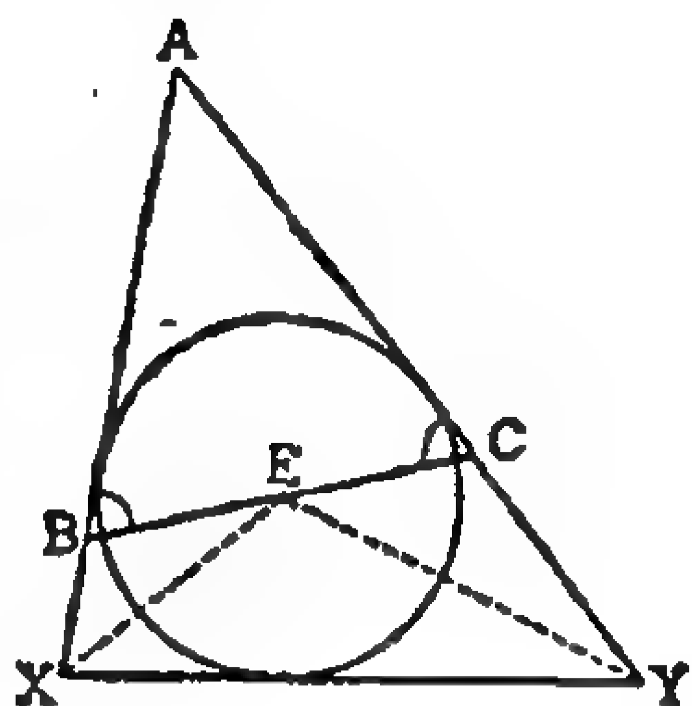
$\therefore\ \triangle BEO\backsim\triangle COF$。

从而得出，$BE:BO=CO:CF$。

$\therefore\ BE\cdot CF=BO\cdot CO$。

$\because\ BO=CO$，$\therefore\ BE\cdot CF=OB^2$。

1170. 已知圆的圆心 E 在等腰三角形 ABC 的底边 BC 上，且与 AB、AC 相切，引圆 E 的任意切线与 AB、AC 的延长线分别交于 X、Y，则 $BX\cdot CY=BE^2$。



解 与上题同理可得，

$\triangle BEX\backsim\triangle CYE$。

$\therefore\ BX:BE=CE:CY$。

$\therefore\ BX\cdot CY=BE\cdot CE$。

而 $BE=CE$。所以 $BX\cdot CY=BE^2$。

1171. 在正三角形 ABC 的一边 AC 上取点 E，在 BC 的延长线上取点 F、D，使 $CF=CE$，$CD=CA$，又 AF 与 DE 的交点为 G，则 $\dfrac{CG}{CE}=\dfrac{AC}{AC+CE}$。

解 由 $\triangle ACF\cong\triangle DCE$ 可知 CG 是 $\angle ACD$ 的平分线。

$\therefore\ \angle GCF=\angle B$。 $\therefore\ CG\parallel AB$。

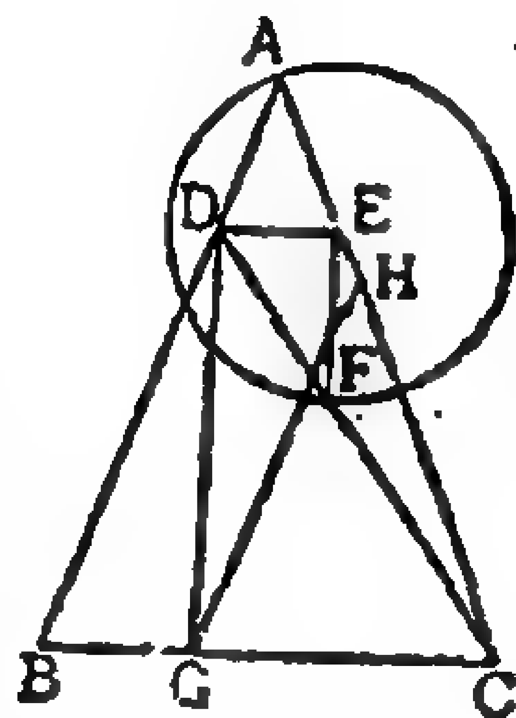
由此可得，$\dfrac{AB}{BF}=\dfrac{CG}{CF}$。

即 $$\frac{AB}{BF}=\frac{CG}{CE}. \qquad ①$$

而 $BF=BC+CF$。即 $BF=AC+CE$。又 $AB=AC$。

由①，得 $$\frac{AC}{AC+CE}=\frac{CG}{CE}.$$

1172. 过等腰三角形 ABC 的边 AB 上的一点 D 引底边 BC 的平行线，与 AC 的交点为 E，以 E 为圆心，EA 为半径的圆与直线 CD 相交于 F，引 DG 平行于 EF 与 BC 或其延长线交于点 G，引 GH 平行于 AB 与 AC 或其延长线交于点 H，则 $DG=GH$。



解 $\because\ GH\parallel AB$，$DE\parallel BC$，$EF\parallel DG$，

$\therefore\ GH:GC=AB:BC$。 ①

又 $\triangle DFE\backsim\triangle DCG$。

$\therefore\ DG:GC=EF:DE$。

而 $AD=AE$，$EF=AE$。

$\therefore\ DG:GC=AE:DE$。 ②

又 $AB:BC=AD:DE$。

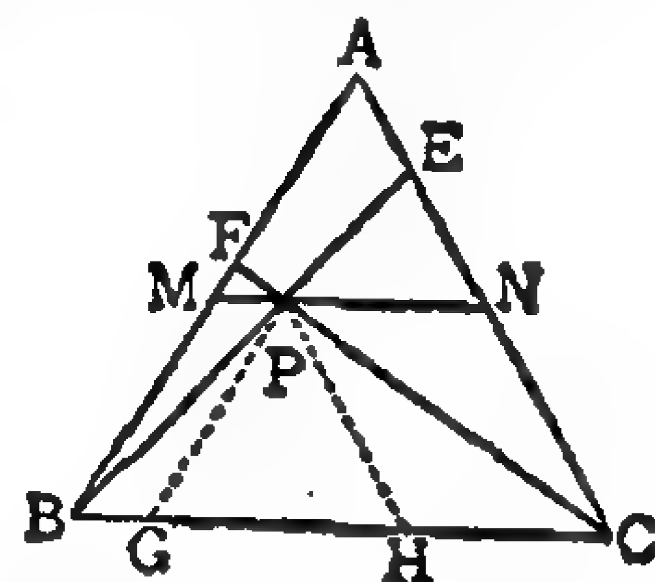
$\therefore\ AB:BC=AE:DE$ ③

由①、②、③，得

$GH:GC=AB:BC=DG:GC$。

$\therefore\ GH=DG$。

1173. 连结正三角形 ABC 的两边 AB、AC 的中点 M、N，P 为 MN 上任意点，直线 BP、CP 的延长线与边 AC、AB 的交点分别为 E、F，设 $CE=x$，$BF=y$，$BC=a$，



则 $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{a}.$$

解 从 P 引 AB、AC 的平行线与 BC 的交点分别为 G、H，则

$$\frac{BC}{CE}=\frac{BH}{PH}，\ 即\ \frac{a}{x}=\frac{BH}{PH}， \qquad ①$$

$$\frac{BC}{BF}=\frac{GC}{PG}，\ 即\ \frac{a}{y}=\frac{GC}{PG}. \qquad ②$$

而 $PH=PG=GH$。

把①、②的两边分别相加，得

$$\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=\frac{BH}{PH}+\frac{GC}{PG},$$

即 $$\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=\frac{BH+GC}{PG}. \quad ③$$

而 $PG=MB=\frac{1}{2}a.$

$\therefore\ BH+GC=BC+GH$

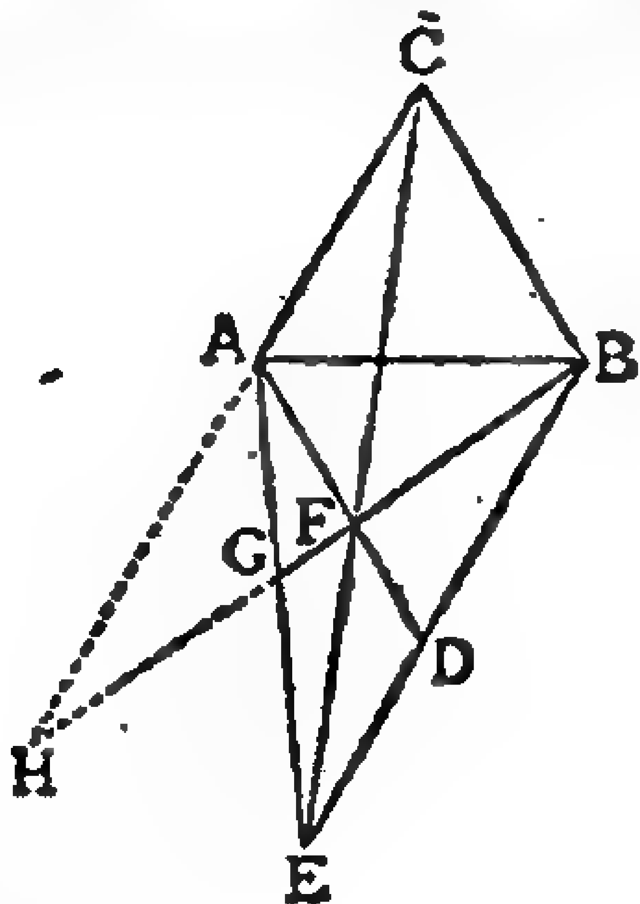
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)a=\frac{3}{2}a.$$

由③，得 $$\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=\frac{\frac{3}{2}a}{\frac{1}{2}a}=3.$$

$$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{a}.$$

1174. 在 AB 的两侧分别作正三角形 CAB 和 DBA，又在 BD 的延长线上取一点 E，若 CE、AD 的交点为 F，BF、AE 的交点为 G，则

$\angle AGB=60°.$



解 设延长 BG、CA，它们相交于 H，则 $CH\parallel BE$.

$$\therefore\ \frac{AC}{AH}=\frac{DE}{BD}. \quad ①$$

而 $AC=AB,\ BD=AD.$

$$\therefore\ \frac{AB}{AH}=\frac{DE}{AD}. \quad ②$$

又

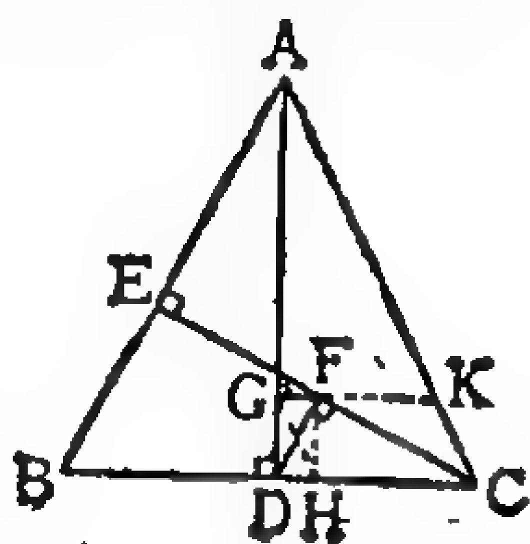
$$\angle HAB=120°=\angle ADE. \quad ③$$

由②、③，得 $\triangle ABH\backsim\triangle DEA$.

从而得出 $\angle DAE=\angle AHB=\angle HBD$，所以 A、G、D、B 共圆.

$\therefore\ \angle AGB=\angle ADB=60°.$

1175. 在等腰三角形 ABC 中，设 $AD\perp BC$，$CE\perp AB$，$DF\perp CE$，$FG\perp AD$，则 $\frac{FG}{AG}=\left(\frac{BD}{AD}\right)^3.$



解 引 $FH\perp BC$，又 GF 的延长线与 AC 的交点为 K，则

$\triangle DGF\backsim\triangle ADB.$

$$\therefore\ \frac{FG}{GD}=\frac{BD}{AD}. \quad ①$$

$\because\ \triangle CHF\backsim\triangle ADB.$

$$\therefore\ \frac{FH}{CH}=\frac{BD}{AD}. \quad ②$$

又 $\triangle AGK\backsim\triangle ADB.$

$$\therefore\ \frac{KG}{AG}=\frac{BD}{AD}. \quad ③$$

由①×②×③，得

$$\frac{FG}{GD}\cdot\frac{FH}{CH}\cdot\frac{KG}{AG}=\left(\frac{BD}{AD}\right)^3. \quad ④$$

而 $FH=GD.$

又四边形 $GHCK$ 是平行四边形.

$\therefore\ CH=KG.$

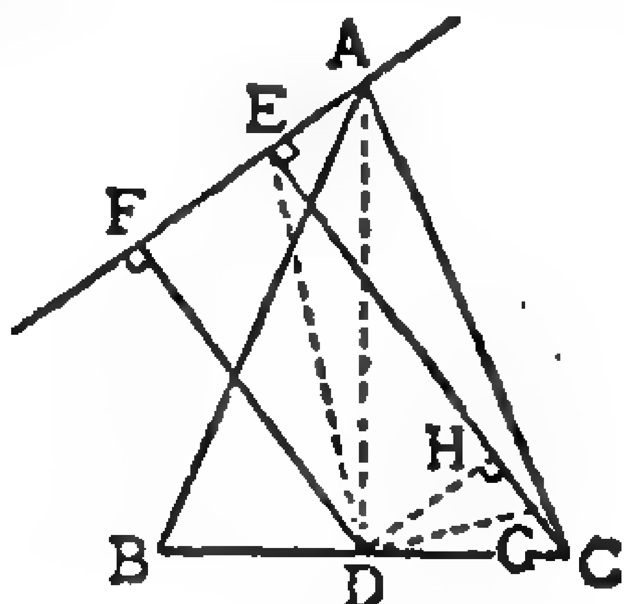
由④，得 $$\frac{FG}{AG}=\left(\frac{BD}{AD}\right)^3.$$

1176. 设等腰三角形 ABC 的边 BC 的中点为 D，从 C、D 向过 A 的任意直线引垂线 CE、DF，设 E、F 为垂足，则

$AC\cdot ED$

$=DC\cdot EF$

$+AD\cdot DF.$



解 由 A、E、D、C 共圆，得

$\angle CAD=\angle CED.$

引 $DG\perp DE$，且 G 在 EC 上，则

$\triangle ADC\backsim\triangle EDG.$

$\therefore\ \frac{ED}{EG}=\frac{AD}{AC}$. 即 $AC\cdot ED=AD\cdot EG.$

引 $DH\perp EC$，H 在 EC 上，则

$AD\cdot EG=AD\cdot(EH+HG)$

$=AD\cdot EH+AD\cdot HG.$

$\because\ EH=DF,$

$\therefore\ AD\cdot EG=AD\cdot DF+AD\cdot HG.$

而 $\triangle ACD\backsim\triangle DGH.$

$$\therefore\ \frac{AD}{DC}=\frac{DH}{HG}.$$

$\therefore\ AD\cdot HG=DC\cdot DH.$

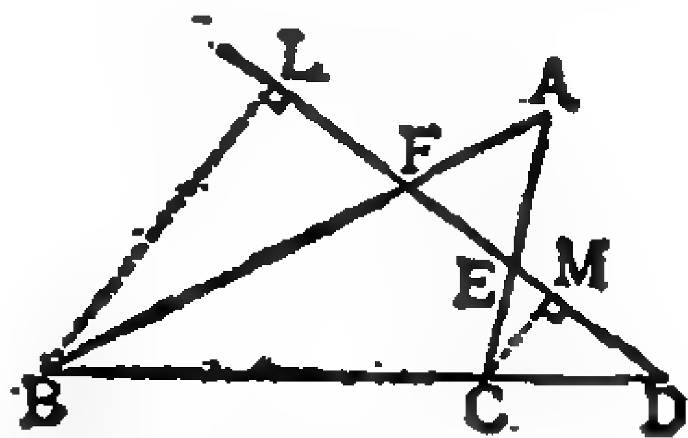
$\because\ DH=EF,\quad \therefore\ AD\cdot HG=DC\cdot EF.$

$\therefore\ AC\cdot ED=AD\cdot DF+DC\cdot EF.$

6. 任意三角形的比例线段

1177. 若一条直线与 $\triangle ABC$ 的三边

BC、CA、AB 分别交于 D、E、F，且这直线与 AB、AC 的夹角相等，则 $BD:CD=BF:CE$.



解 从 B、C 向 DEF 分别引垂线 BL、CM，设 L、M 是垂足，则

$$\angle LFB=\angle AFE=\angle AEF=\angle CEM.$$

又 $\angle BLF=\angle CME=90°$.

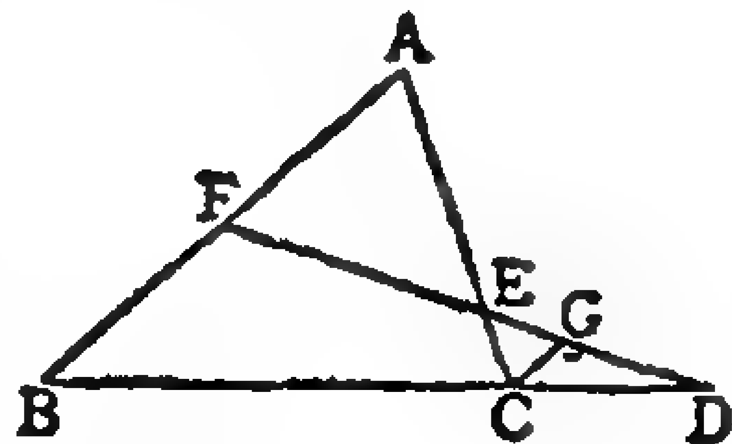
$\therefore\ \triangle BLF\backsim\triangle CME$.

$\therefore\ BL:CM=BF:CE$.

$BL\parallel CM$, $\therefore\ BL:CM=BD:CD$.

$\therefore\ BD:CD=BF:CE$.

1178. 若一条直线与 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或其延长线分别交于点 D、E、F，且 $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{BD}{CD}$，则 $AF=BF$.



解 引 $CG\parallel AB$，则

$$\frac{AF}{CG}=\frac{AE}{EC},\quad \frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CG}.$$

而 $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{BD}{CD}$. $\therefore\ \dfrac{AF}{CG}=\dfrac{BF}{CG}$.

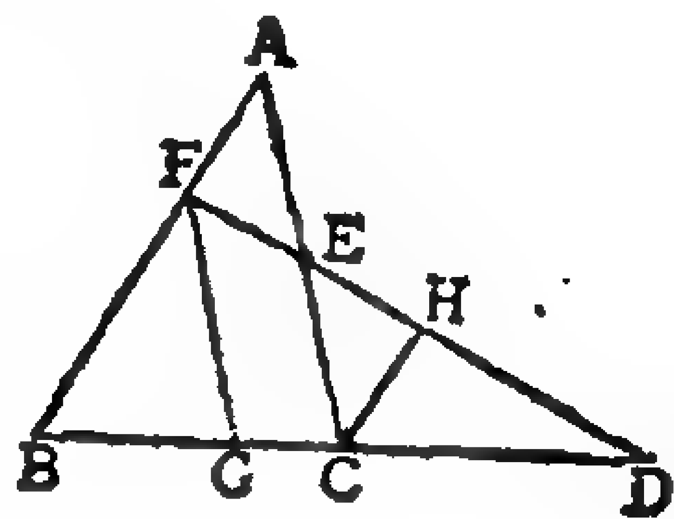
$\therefore\ AF=BF$.

1179. 把 $\triangle ABC$ 的边 BC 延长，使

$CD=BC$,

设 AC 的中点为 E，延长 DE 与边 AB 的交点为 F，则

$$\frac{FE}{DE}=\frac{1}{3}.$$



解 过点 F 引 AC 的平行线与 BD 的交点为 G，过 C 引 AB 的平行线与 DF 的交点为 H，则

$$\frac{FE}{DE}=\frac{CG}{CD}.$$

而 $CD=BC$. $\therefore\ \dfrac{FE}{DE}=\dfrac{CG}{BC}$.

又 $\dfrac{CG}{BC}=\dfrac{AF}{AB}$. $\therefore\ \dfrac{FE}{DE}=\dfrac{AF}{AB}$.

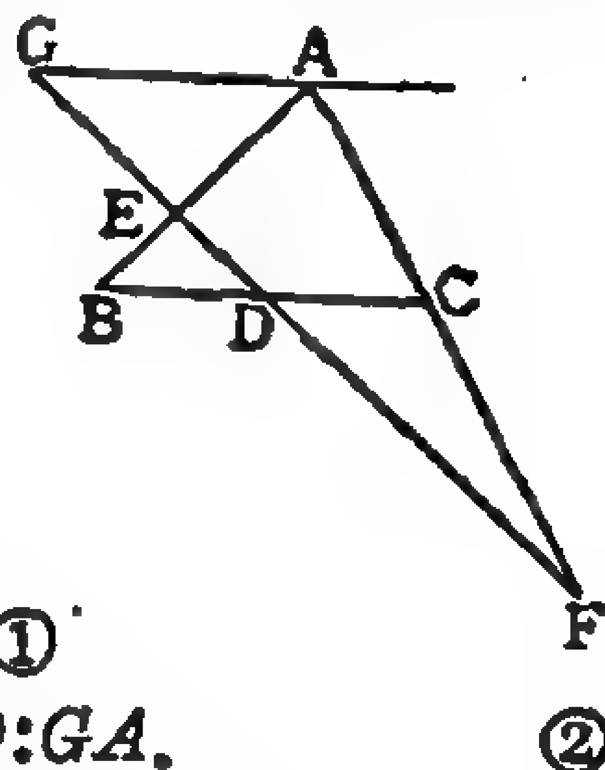
$\therefore\ AB=AF+BF=AF+2CH$

$=AF+2AF=3AF$.

$\therefore\ \dfrac{FE}{DE}=\dfrac{AF}{3AF}=\dfrac{1}{3}$.

1180. 过 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点 D 的任意直线与边 AB、AC 分别相交于 E、F，与过 A 且平行于 BC 的直线相交于 G，则

$EG\cdot FD=DE\cdot FG$.



解 $\because\ AG\parallel BC$,

$\therefore\ FD:FG=DC:GA$, ①

$DE:EG=BD:GA$. ②

而 D 是 BC 的中点，即 $DC=BD$.

由①、②，得 $FD:FG=DE:EG$.

$\therefore\ EG\cdot FD=DE\cdot FG$.

1181. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上取点 D，AC 的延长线上取点 E，若从点 C 引 AB 的平行线与 DE 的交点为 F，且

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AD}{CF},$$

则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADE}$.

解 $\because\ AD\parallel CF$，且 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AD}{CF}$,

$$\therefore\ \frac{AE}{CE}=\frac{AD}{CF}=\frac{AB}{BD}.$$

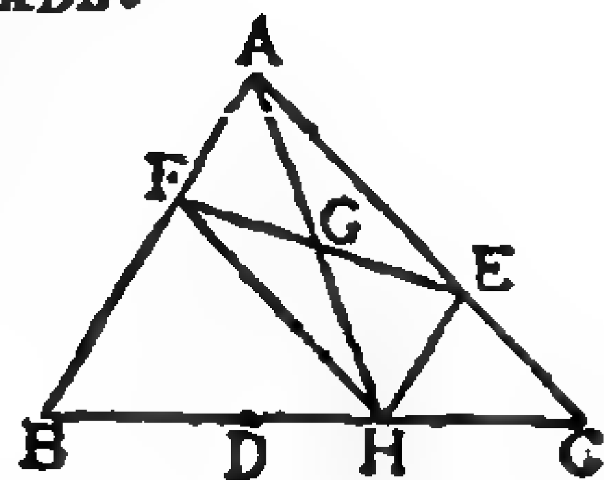
$\therefore\ DC\parallel BE$.

所以 $S_{\triangle BDC}=S_{\triangle EDC}$.

由此可得，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADE}$.

1182. 在 $\triangle ABC$ 的各边上分别取点 D、E、F，使

$$\frac{BD}{CD}=\frac{CE}{AE}=\frac{AF}{BF}.$$



若过 EF 的中点 G 的直线 AG 交 BC 于 H，则 $BD=HC$.

解 从 E 引 AB 的平行线与 BC 的交点为 H，连结 AH.

$$\because\ \frac{AF}{BF}=\frac{CE}{AE}=\frac{CH}{BH},$$

$\therefore\ AC\parallel FH$.

从而得出，AFHE 是平行四边形。所以 AH 经过 EF 的中点 G.

于是 $\dfrac{CH}{BH}=\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{BD}{CD}$.

由此可得， $\frac{CH}{BH+CH}=\frac{BD}{CD+BD}$.

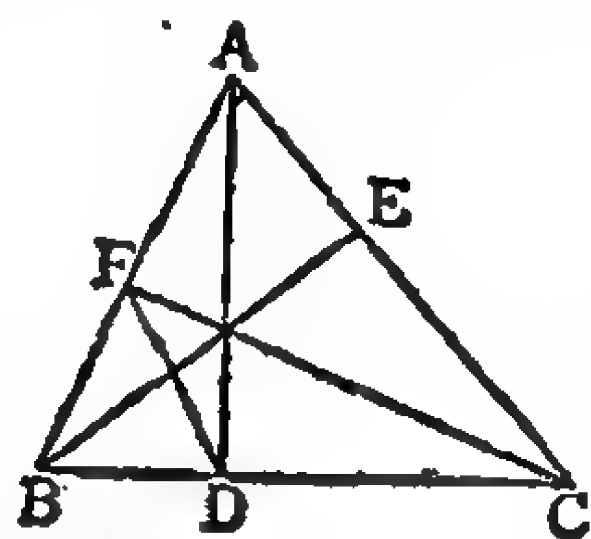
$\therefore \frac{CH}{BC}=\frac{BD}{BC}$. $\therefore HC=BD$.

1183. 从$\triangle ABC$的各顶点A、B、C向对边引垂线，设垂足分别为D、E、F，则

(1) $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle BDF}=AB^2:BD^2$;

(2) $S_{四边形AFDC}:S_{\triangle BDF}=AD^2:BD^2$.

解 (1) 在$\triangle ABC$、$\triangle DBF$中，$\angle B$是公共角，由$AFDC$是圆内接四边形，得



$\angle ACB=\angle BFD$,

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DBF$.

$\therefore S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DBF}=AB^2:BD^2$.

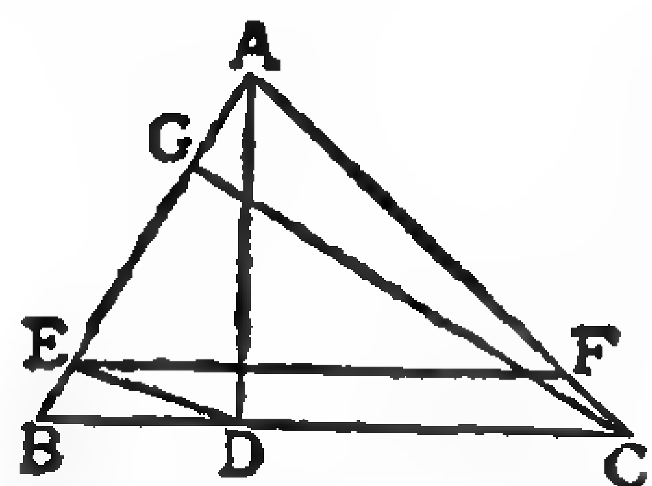
(2) 由(1)，根据分比定理可得，

$(S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BDF}):S_{\triangle BDF}=(AB^2-BD^2):BD^2$.

又 $AD^2=AB^2-BD^2$.

$\therefore S_{四边形AFDC}:S_{\triangle BDF}=AD^2:BD^2$.

1184. 从$\triangle ABC$的顶点A向BC引垂线AD，在AB上取点E，使$AE=AD$，引BC的平行线EF与AC交于点F。若从C作AB的垂线CG，则$CG=EF$。



解 $AD\cdot BC=2S_{\triangle ABC}=CG\cdot AB$. ①

$\because EF\parallel BC$, $\therefore \frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}$.

$\therefore BC\cdot AE=EF\cdot AB$.

而 $AE=AD$.

$\therefore BC\cdot AD=EF\cdot AB$. ②

由①、②，得 $CG\cdot AB=EF\cdot AB$.

$\therefore CG=EF$.

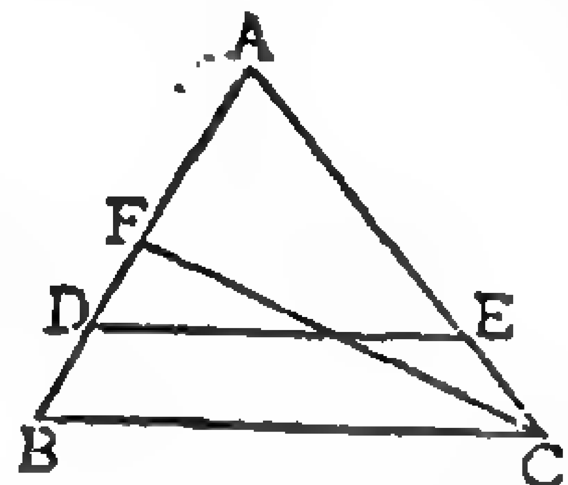
1185. 在$\triangle ABC$的边AB、AC上分别取点D、E，使

$DE\parallel BC$,

在AB上取一点F，使

$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BFC}$,

则 $AD^2=AB\cdot BF$.



解 由$DE\parallel BC$，得$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD^2}{AB^2}$. ①

根据假设，得 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BFC}$.

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle BFC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BF}{AB}$. ②

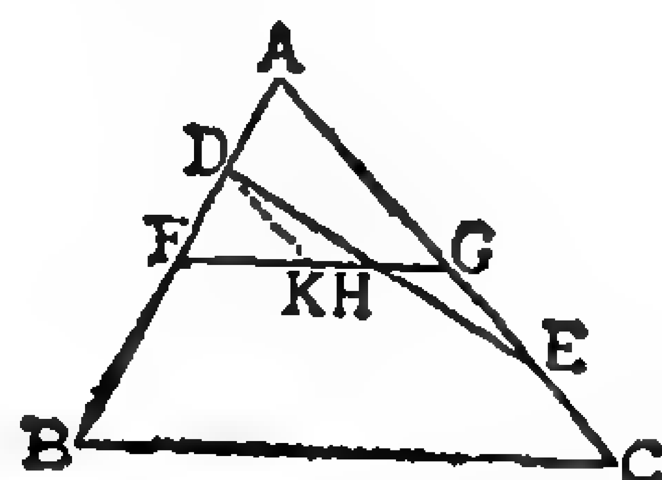
由①、②，得 $\frac{AD^2}{AB^2}=\frac{BF}{AB}$.

即 $\frac{AD^2}{AB}=\frac{BF}{1}$. $\therefore AD^2=AB\cdot BF$.

1186. 在$\triangle ABC$的两边AB、AC上分别取点D、E，使

$\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EA}$,

若AB、AC的中点分别为F、G，则FG必过DE的中点。



解 设DE、FG的交点为H，引$DK\parallel AC$，则

$$\frac{DF}{AF}=\frac{DK}{AG}. \quad ①$$

而 $$\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EA}.$$

$$\therefore \frac{DB\sim AD}{DB+AD}=\frac{EA\sim EC}{EA+EC}.$$

$$\therefore \frac{DF}{AF}=\frac{EG}{AG}. \quad ②$$

由①、②，得 $\frac{DK}{AG}=\frac{EG}{AG}$.

$\therefore DK=EG$.

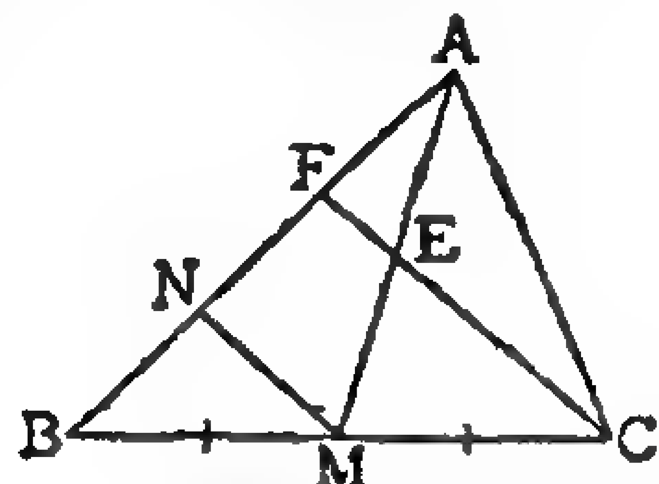
由此可得 $\triangle HDK\cong\triangle HEG$.

$\therefore DH=HE$.

这就是说，FG经过DE的中点。

1187. 设$\triangle ABC$的边BC的中点为M，过C在三角形内引任意直线与AM、AB分别交于E、F，则

$AE\cdot FB=2AF\cdot EM$.



解 由M引CF的平行线MN与AB交于N，则N是BF的中点。

而$EF\parallel MN$. $\therefore AE:EM=AF:FN$.

$\therefore AE\cdot FN=AF\cdot EM$.

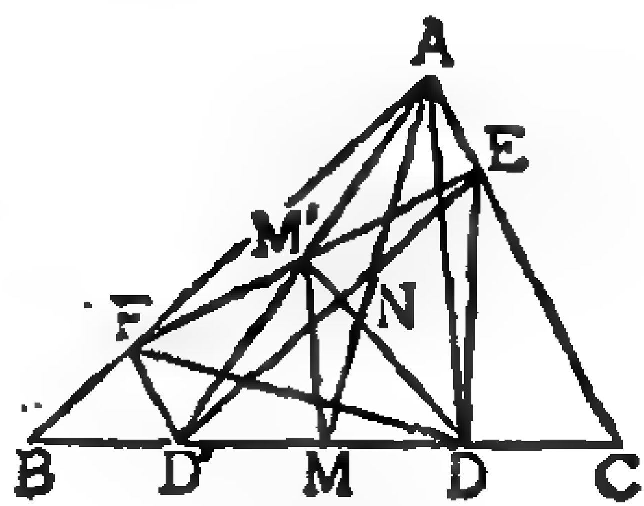
$\therefore AE\cdot\frac{FB}{2}=AF\cdot EM$,

即 $AE\cdot FB=2AF\cdot EM$.

1188. 在$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上分别取D、E、F，使

$$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=\frac{m}{n},$$

则$\triangle ABC$的重心与$\triangle DEF$的重心相重合。



解　在BC上取点D'，使$BD'=DC$，则

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{BF}{FA}. \quad \therefore \quad FD' \parallel AC.$$

又 $\dfrac{BD'}{D'C}=\dfrac{AE}{EC}$. $\quad\therefore\quad AB\parallel D'E$.

由此可得，$AFD'E$是平行四边形。从而得出，AD'、FE的交点M'是FE、AD'的中点。又M是DD'的中点。所以$MM'\parallel AD$，且$2MM'=AD$。

设$\triangle ABC$的中线AM与DM'的交点为N，则

$$DN:NM'=AN:NM=AD:MM'=2:1.$$

由此可得，$\triangle ABC$的重心与$\triangle DEF$的重心相重合。

1189.　若在$\triangle ABC$的边BC上取两点D、E，使

$$\angle BAD=\angle CAE,$$

则 $\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}$.

解　$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AEC}}=\dfrac{BD}{CE}$.

而　　$\angle BAD=\angle CAE$.

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{AB\cdot AD}{AE\cdot AC}.$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{CE}=\frac{AB\cdot AD}{AE\cdot AC}. \qquad ①$$

同理，$\dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ADC}}=\dfrac{BE}{CD}$，$\dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ADC}}=\dfrac{AB\cdot AE}{AC\cdot AD}$.

$$\therefore \quad \frac{BE}{CD}=\frac{AB\cdot AE}{AC\cdot AD}. \qquad ②$$

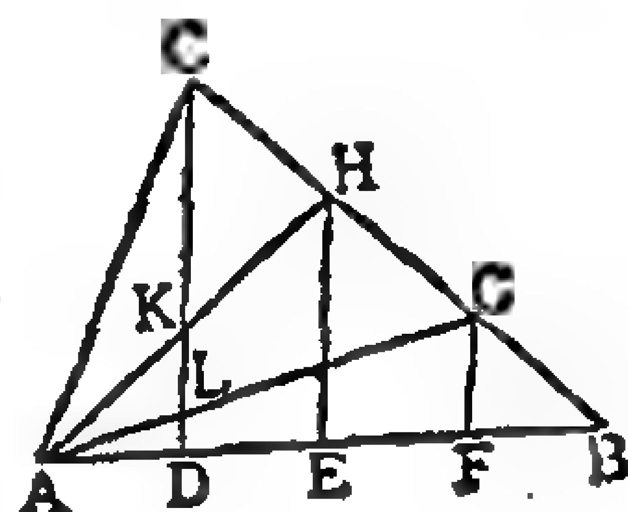
①×②，得

$$\frac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}=\frac{AB\cdot AD}{AC\cdot AE}\times\frac{AB\cdot AE}{AC\cdot AD}=\frac{AB^2}{AC^2}.$$

1190.　设点D、E、F四等分$\triangle ABC$的边AB，点G、H三等分边BC，AH、AG分别交CD于K、L，则

$$AK=\frac{1}{2}AH, \quad AL=\frac{1}{3}AG.$$

解　连结EH、FG，则$EH\parallel FG\parallel DC$，



$\therefore \quad DK\parallel EH$.

而　$AD=DE$.

$\therefore \quad AK=KH$.

$\therefore \quad AK=\dfrac{1}{2}AH$.

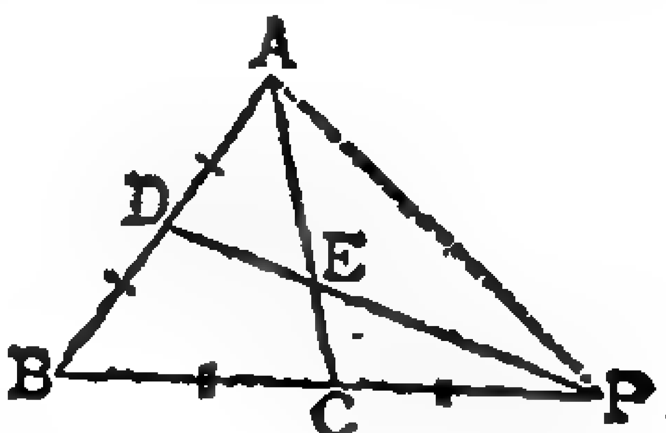
又$DL\parallel FG$，

$$AD=\frac{1}{3}AF.$$

$$\therefore \quad AL:AG=AD:AF=1:3,$$

即　　$AL=\dfrac{1}{3}AG$.

1191.　在$\triangle ABC$的边BC的延长线上取一点P，使$CP=BC$。设AB的中点为D，DP与AC的交点为E，则$DE:EP=1:2$，又$\triangle ABC$的面积与四边形$DBCE$的面积的比为$3:2$。



解　因C是BP的中点，D是AB的中点，可知E是$\triangle ABP$的重心，

$$\therefore \quad DE:EP=1:2.$$

又 $$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{AE}{AC}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

从而得出，$S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

$$\therefore \quad S_{四边形DBCE}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}.$$

1192.　在$\triangle ABC$内取一点O，设AO、BO、CO与对边的交点分别为D、E、F，则

$$\frac{OA}{OD}=\frac{AF}{BF}+\frac{AE}{CE}.$$

解　在$\triangle AOC$、$\triangle BOC$中，OC是公共边，

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{AF}{BF}.$$

同理，$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{AE}{EC}.$$

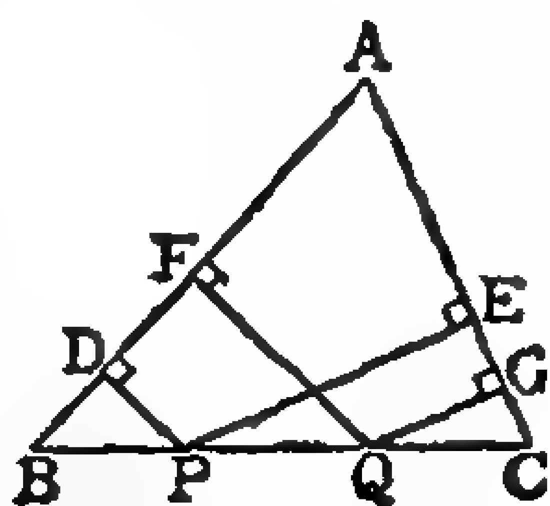
$$\therefore \quad \frac{AF}{BF}+\frac{AE}{CE}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}+\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BOC}}-1$$

$$=\frac{AD}{OD}-1=\frac{OA}{OD}.$$

即 $$\frac{OA}{OD}=\frac{AF}{BF}+\frac{AE}{CE}.$$

1193. 在$\triangle ABC$的边BC上取两点P、Q，若以点P到AB、AC的距离为邻边的矩形的面积，与以Q到AB、AC的距离为邻边的矩形的面积相等，则$BP=QC$。



解 设从P、Q到AB的垂线足分别为D、F，到AC的垂足分别为E、G。根据题意，得

$$PD\cdot PE=QF\cdot QG.$$

$$\therefore\quad PD:QF=QG:PE.$$

而$PD:QF=BP:BQ$，$QG:PE=QC:PC$。

$$\therefore\quad BP:BQ=QC:PC.$$

由分比定理，得

$$BP:BQ-BP=QC:PC-QC.$$

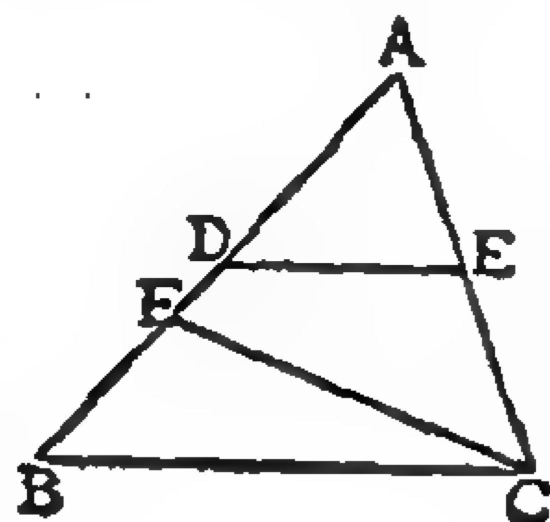
即 $$BP:PQ=QC:PQ.$$

$$\therefore\quad BP=QC.$$

1194. 引$\triangle ABC$的底边BC的平行线交AB、AC分别于D、E，若在AB上取一点F，使

$$S_{\triangle BFC}=S_{\triangle ADE},$$

则AD是BF与AB的比例中项。反之也成立。



解 由$DE\parallel BC$，得

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}. \quad ①$$

又$\angle ADE=\angle FBC$，由此可得，$\triangle ADE$、$\triangle BFC$是一个角相等的等积三角形。

$$\therefore\quad AD\cdot DE=BF\cdot BC.$$

$$\therefore\quad \frac{BF}{AD}=\frac{DE}{BC}. \quad ②$$

由①、②，得 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{BF}{AD}$.

$$\therefore\quad AD^2=AB\cdot BF.$$

反之，由$AD^2=AB\cdot BF$，得

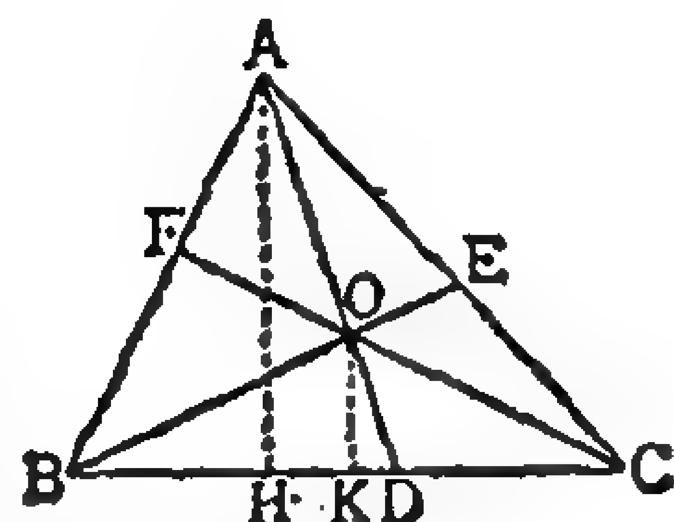
$$\frac{AD}{AB}=\frac{BF}{AD}.$$

而 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$. $\therefore\quad \dfrac{BF}{AD}=\dfrac{DE}{BC}$.

即 $$BF\cdot BC=AD\cdot DE.$$

又$\angle D=\angle B$. $\therefore\quad S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BFC}$.

1195. 设O为$\triangle ABC$内一点，把顶点A、B、C和O分别连结起来，并延长这些线段分别与对边相交，设交点为D、E、F，证明



$$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1.$$

解 从A、O向BC分别引垂线AH、OK，

则 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot BC,$$

$$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}OK\cdot BC.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle OBC}:S_{\triangle ABC}=OK:AH.$$

$\because\quad OK\parallel AH,\quad \therefore\quad OK:AH=OD:AD.$

$$\therefore\quad \frac{OD}{AD}=\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}.$$

同理可得，$$\frac{OE}{BE}=\frac{S_{\triangle OCA}}{S_{\triangle ABC}},$$

$$\frac{OF}{CF}=\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}.$$

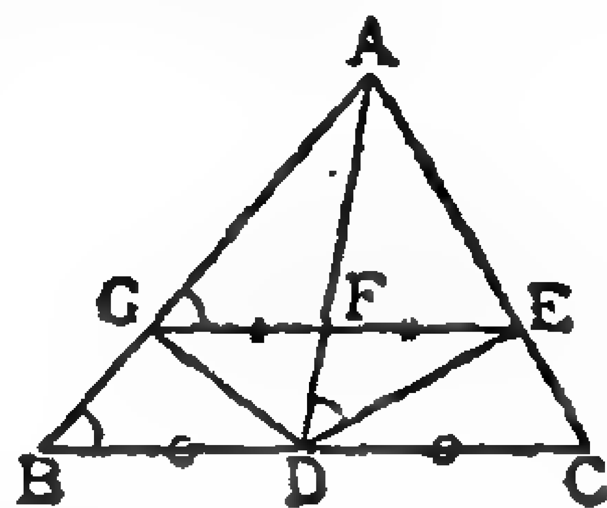
$$\therefore\quad \frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}$$

$$=\frac{S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}+S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1.$$

1196. 设D是$\triangle ABC$的边BC的中点，在边CA上取点E，使$\angle ADE=\angle ABC$，从E引BC的平行线与AD交于点F，则

$$AF\cdot FD=EF^2.$$



解 延长EF与AB交于点G，根据假设，得$\angle ABD=\angle EDF$。

$\because\quad GF\parallel BC,\quad \therefore\quad \angle ABD=\angle AGF.$

$$\therefore\quad \angle EDF=\angle AGF.$$

由此可得，四边形$AGDE$是圆的内接四边形。

$$\therefore\quad AF\cdot FD=GF\cdot FE.$$

而AD是中线，且$GE\parallel BC$，

$$\therefore\quad GF=FE.$$

$$\therefore\quad AF\cdot FD=EF^2.$$

1197. 把$\triangle ABC$的三边AB、BC、CA都三等分，设分点分别为D、E，F、G，H、

K，则 $S_{\triangle DFH}=S_{\triangle EGK}$。

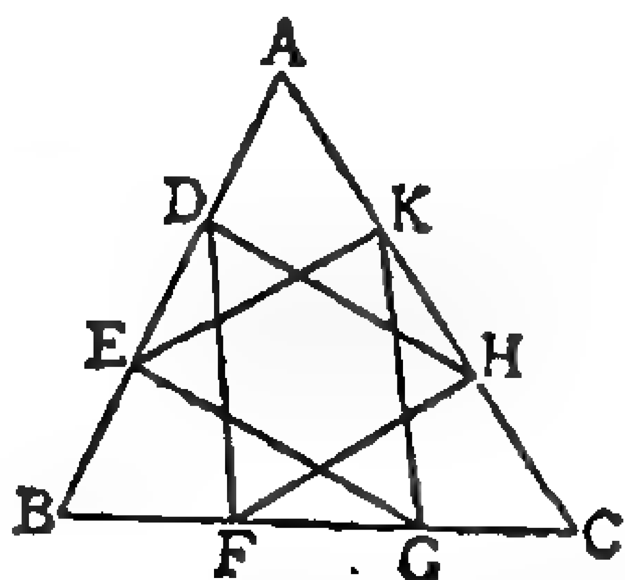
解 $\dfrac{S_{\triangle AEK}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AE\cdot AK}{AB\cdot AC}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$。

同理可得，$\dfrac{S_{\triangle EBG}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{2}{9}=\dfrac{S_{\triangle CGK}}{S_{\triangle ABC}}$。

$\therefore\ \dfrac{S_{\triangle AEK}+S_{\triangle EBG}+S_{\triangle CGK}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore\ S_{\triangle EGK}$

$=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$。



同理可得，

$S_{\triangle DFH}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$。

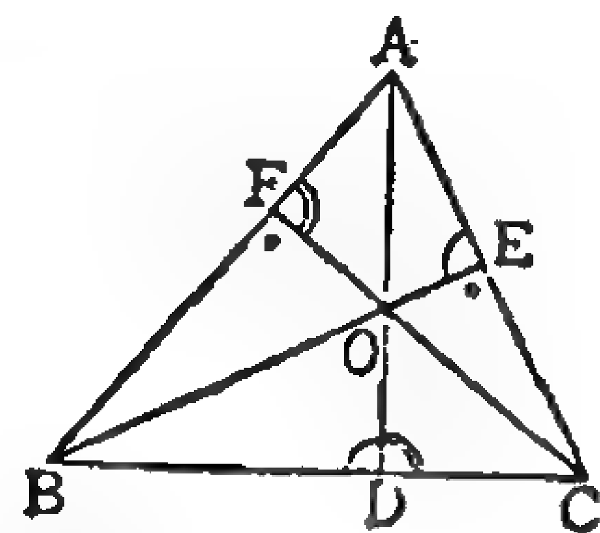
$\therefore\ S_{\triangle DFH}=S_{\triangle EGK}$。

1198. 设 D、E、F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上，AD、BE、CF 交于一点 O，若 $AO\cdot OD=BO\cdot OE=CO\cdot OF$，则点 O 为 $\triangle ABC$ 的垂心。

解 根据假设 $AO\cdot OD=BO\cdot OE$，可知 A、B、D、E 共圆。

$\therefore\ \angle AEB$

$=\angle ADB$。 ①



同理可得，

$\angle AFC=\angle ADC$， ②

$\angle BFC=\angle BEC$。 ③

但是 $\angle ADB+\angle ADC=180°$。

由①、②，得 $\angle AEB+\angle AFC=180°$。

从而得出，A、F、O、E 共圆。

$\therefore\ \angle BFC=\angle AEB$。 ④

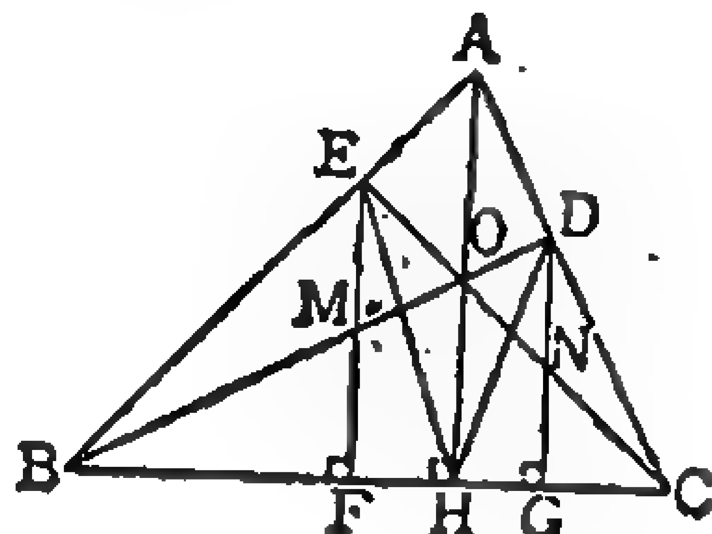
由③、④，得 $\angle BEC=\angle AEB$。

$\therefore\ AC\perp BE$，

同理 $AD\perp BC$。

所以，O 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

1199. 设在 $\triangle ABC$ 的顶点 A 向 BC 所作垂线 AH 上任取一点 O，延长 BO、CO 与 AC、AB 分别交于 D、E，则 $\angle DHA=\angle EHA$。



解 由 E、D 向 BC 引垂线 EF、DG，与 BO、CO 分别交于 M、N，则 $EF\parallel AH\parallel DG$。

$\therefore\ FH:HG=MO:OD=EM:DN$。 ①

但是 $EM:EF=AO:AH=DN:DG$。

$\therefore\ EM:DN=EF:DG$。 ②

由①、②，得 $FH:HG=EF:DG$。

$\therefore\ \triangle EFH\backsim\triangle DGH$。

$\therefore\ \angle EHF=\angle DHG$。

由此可得，$\angle EHA=\angle DHA$。

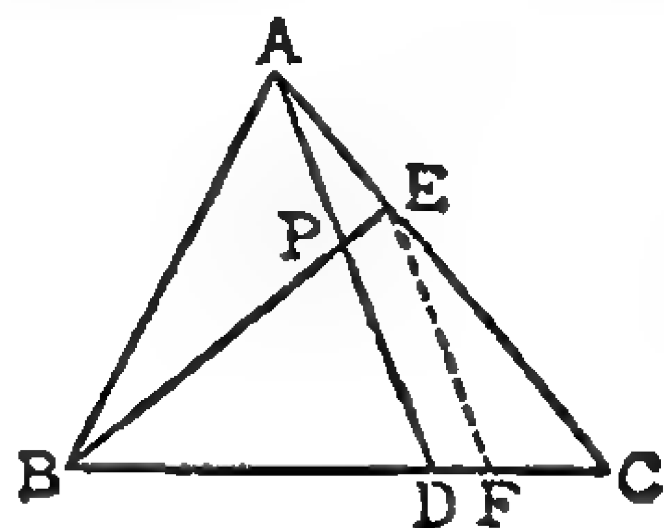
1200. 在 $\triangle ABC$ 的边 BC、AC 上分别取点 D、E，使 $BD=2CD$，$CE=2AE$，若 AD 与 BE 的交点为 P，则

$$\frac{S_{\triangle EPA}}{1}=\frac{S_{\triangle APB}}{6}=\frac{S_{\triangle BPD}}{8}=\frac{S_{\triangle ABC}}{21}.$$

解 由 E 引 AD 的平行线交 BC 于 F，则

$\dfrac{BP}{PE}=\dfrac{BD}{DF}$

$=\dfrac{PD}{EF-PD}$。



又 $\dfrac{DF}{FC}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{1}{2}$。

$\therefore\ DF=\dfrac{1}{3}DC$。

又 $BD=2CD$。 $\therefore\ BD=6DF$。

$\therefore\ \dfrac{BP}{PE}=\dfrac{6}{1}$。

从而得出，$\dfrac{PD}{EF}=\dfrac{6}{7}$。 又 $\dfrac{EF}{AD}=\dfrac{2}{3}$。

$\therefore\ \dfrac{PD}{AD}=\dfrac{PD}{EF}\cdot\dfrac{EF}{AD}=\dfrac{4}{7}$。

$\therefore\ \dfrac{AP}{PD}=\dfrac{AD-PD}{PD}=\dfrac{3}{4}$。

由此可得，

$$\frac{S_{\triangle EPA}}{S_{\triangle APB}}=\frac{PE}{BP}=\frac{1}{6}, \qquad ①$$

$$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle BPD}}=\frac{AP}{PD}=\frac{3}{4}=\frac{6}{8}. \qquad ②$$

由①得

$$\frac{S_{\triangle EPA}}{S_{\triangle ABE}}=\frac{1}{7}. \qquad ③$$

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}=\frac{7}{21}. \qquad ④$$

又由①、②、③、④，得

$$\frac{S_{\triangle EPA}}{1}=\frac{S_{\triangle APB}}{6}=\frac{S_{\triangle BPD}}{8}=\frac{S_{\triangle ABC}}{21}.$$

1201. 设 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点分别为 D、E、F，过 A 引任意直线与 DE、FD 或其延长线分别交于 G、H，则 $CG\parallel BH$。

解 设AH与BC的交点为P，由$DF\parallel AC$，$DE\parallel AB$，得

$$\frac{PA}{PG}=\frac{PB}{PD},\quad ①$$

$$\frac{PH}{PA}=\frac{PD}{PC}.\quad ②$$

①×②，得

$$\frac{PH}{PG}=\frac{PB}{PC}.$$

$$\therefore\ BH\parallel CG.$$

1202. 设$\triangle ABC$的边BC、CA、AB的中点分别为A'、B'、C'，在$B'C'$上任取一点P，由B、C分别引AP的平行线，与$A'C'$、$A'B'$的延长线分别交于Q、R，则Q、A、R在一条直线上。

解 延长AP与$A'B'$、$C'A'$的延长线分别交于G、H，根据上题，得

$$GC\parallel BH.\quad ①$$

连结AQ、AR。

而 $AB'=B'C$，又 $AG\parallel CR$。

由此可得，$AG=CR$。即$AG\mathrel{\underline{\parallel}}CR$。

$$\therefore\ AR\parallel GC.\quad ②$$

同理可得，

$$AQ\parallel BH.\quad ③$$

由①、②、③可知，Q、A、R在一条直线上。

1203. 设$\triangle ABC$的边BC、CA、AB的中点分别为A'、B'、C'，在$B'C'$上任取一点P，由B、C引AP的平行线与$A'C'$、$A'B'$的延长线分别交于Q、R，则

$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

解 延长AP与BC交于点D，由$AP\parallel BQ$，且$AP=PD$，得

$$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle ABP}=S_{\triangle PBD}.$$

同理可得， $S_{\triangle APR}=S_{\triangle PCD}$.

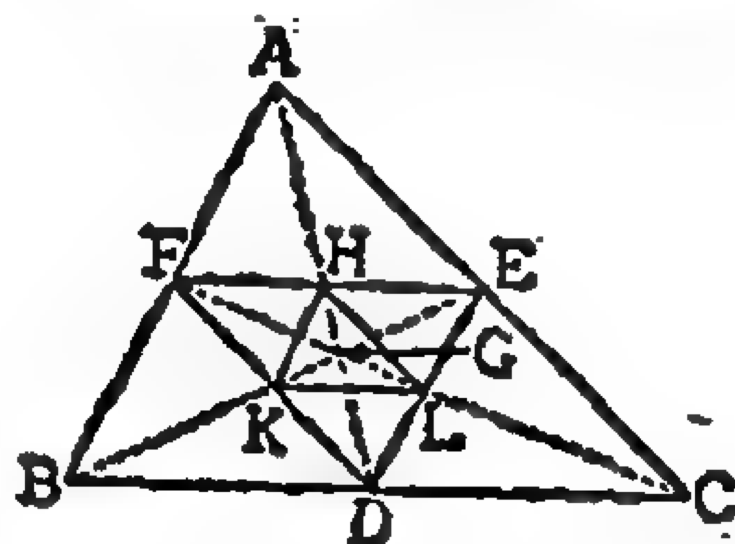
$$\therefore\ S_{\triangle APQ}+S_{\triangle APR}=S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

根据上题可知，AQ、AR是同一条直线。

$$\therefore\ S_{\triangle APQ}+S_{\triangle APR}=S_{\triangle PQR}.$$

$$\therefore\ S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

1204. 连结$\triangle ABC$的各边中点得到$\triangle DEF$，又连结$\triangle DEF$的各边中点得到$\triangle HKL$，这样无限地继续进行下去，则这些三角形所成的序列收敛于$\triangle ABC$的重心位置。



解 设边AB、AC的中点分别为F、E，则$\triangle ABC$的中线AD必过EF的中点H，由此可知，$\triangle DEF$的中线DH在AD上。从而可得，$\triangle DEF$的重心G在DH上，也是在AD上。

同理可得，$\triangle DEF$的重心在BE、CF上。所以$\triangle DEF$的重心与$\triangle ABC$的重心相重合。

依此类推，$\triangle HKL$的重心也是与$\triangle ABC$的重心相重合，等等。

再来考察这些三角形的一边的长度。

$$EF=\frac{1}{2}BC,\quad KL=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{4}BC.$$

由此可知，这些三角形的边长是公比为$\frac{1}{2}$的递减数列。它的极限是收敛到一点G。

注 在本题中，

$$S=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle HKL}+\cdots(\text{无限}).$$

根据无穷等比级数的求和公式，这里首项为$\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，公比为$\frac{1}{4}$，

$$\therefore\ S=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}+\left(\frac{1}{4}\right)^2S_{\triangle ABC}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

1205. 过$\triangle ABC$内的一点P引边BC、CA、AB的平行线，若各线段长分别为DM、FG、HK，则

$$\frac{BK}{BC}+\frac{CM}{CA}+\frac{AG}{AB}=1.$$

解 由$BC\parallel DP$，$AC\parallel GP$，得

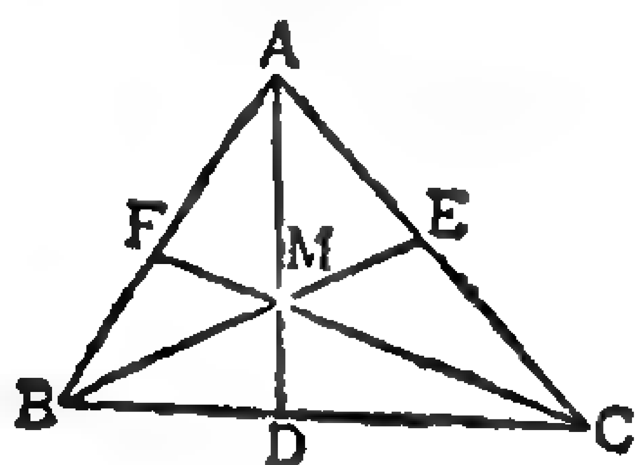
$$\triangle ABC\backsim\triangle GDP.$$

$$\therefore \quad \frac{BA}{BC}=\frac{DG}{DP}.$$

即 $\dfrac{DP}{BC}=\dfrac{DG}{BA}$.

而 $BK=DP$.

$\therefore \quad \dfrac{BK}{BC}=\dfrac{DG}{AB}$. ①



又 $DM \parallel BC$,

$$\therefore \quad \frac{CM}{AC}=\frac{BD}{AB}. \qquad ②$$

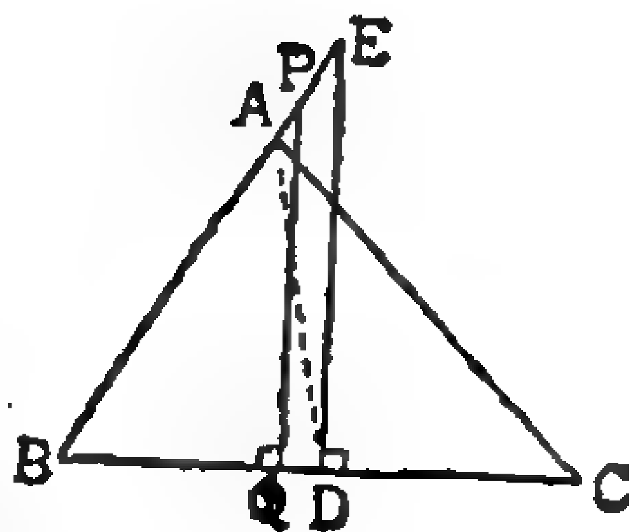
把①、②的两边分别相加后再同加上 $\dfrac{AG}{AB}$, 得

$$\frac{BK}{BC}+\frac{CM}{CA}+\frac{AG}{AB}$$

$$=\frac{DG}{AB}+\frac{BD}{AB}+\frac{AG}{AB}=\frac{AB}{AB}=1.$$

1206. 设 $\triangle ABC$ 内一点 M 与顶点 A、B、C 的连线分别交边 BC、CA、AB 的点为 D、E、F, 则

$$\frac{AM}{AD}+\frac{BM}{BE}+\frac{CM}{CF}=2.$$



解 $\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ADC}}$

$$=\frac{S_{\triangle AMB}+S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}}$$

$$=\frac{S_{\triangle AMB}+S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}}.$$

同理 $\dfrac{BM}{BE}=\dfrac{S_{\triangle AMB}+S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle ABC}}$,

$$\frac{CM}{CF}=\frac{S_{\triangle AMC}+S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle ABC}}.$$

$$\therefore \quad \frac{AM}{AD}+\frac{BM}{BE}+\frac{CM}{CF}$$

$$=\frac{1}{S_{\triangle ABC}}(S_{\triangle AMB}+S_{\triangle AMC}+S_{\triangle ABM}+S_{\triangle BMC}+S_{\triangle AMC}+S_{\triangle BMC})$$

$$=\frac{2S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=2.$$

1207. 过 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的中点 D 引直线垂直于 BC, 与边 BA 的延长线交于点 E, 在 AE 上取点 P, 使 BP 是 BE、BA 的比例中项, 过 P 引 BC 的垂线, 设垂足为 Q, 则

$$S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

解 由 $PQ \parallel ED$ 可得,

$$BE:BP=BD:BQ.$$

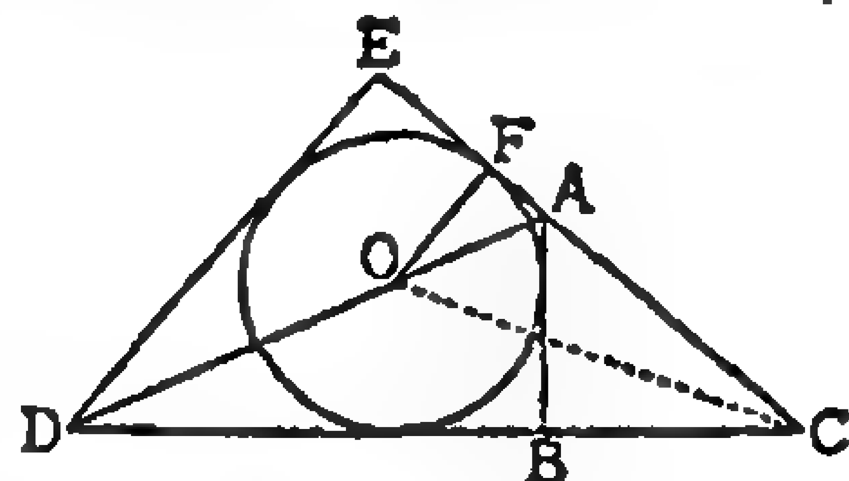
根据假设可知, $BE:BP=BP:BA$.

$$\therefore \quad BD:BQ=BP:BA.$$

$$\therefore \quad BQ\cdot BP=BD\cdot BA.$$

由此可得, $S_{\triangle BPQ}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

1208. 若 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的大小及位置一定, 其他两边的差即 $AB\sim AC$ 等于定长, 则与 $\angle A$ 相邻的外角的平分线 AD 在边 AC 上的正投影 AE 是定长.



解 设 $\angle C$ 内的旁心为 O, $OF\perp AC$, $DE\parallel OF$, 则

$$\frac{AE}{AF}=\frac{DE}{OF}.$$

$$\therefore \quad AE=\frac{DE}{OF}\cdot AF. \qquad ①$$

而 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OAB}$.

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle ADB}$.

$$\therefore \quad S_{\triangle ACD}-S_{\triangle ADB}=S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OAB}. \qquad ②$$

而 O 是 $\triangle ABC$ 的旁心. 从 O 到边 AC、CB、AB 的距离都等于圆的半径.

$$\therefore \quad S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OBC}-S_{\triangle OAB}$$

$$=\frac{1}{2}CA\cdot OF+\frac{1}{2}BC\cdot OF-\frac{1}{2}AB\cdot OF$$

$$=\frac{1}{2}(CA+BC-AB)\cdot OF. \qquad ③$$

又 D 是 $\angle EAB$ 平分线上的点, 由 D 到 AB 的距离等于它到 AC 的距离 DE.

$$\therefore \quad S_{\triangle ACD}-S_{\triangle ABD}$$

$$=\frac{1}{2}CA\cdot DE-\frac{1}{2}AB\cdot DE$$

$$=\frac{1}{2}(CA-AB)\cdot DE. \qquad ④$$

由②、③、④, 得

$$(CA-AB)DE=(CA+BC-AB)OF.$$

$\therefore\ \dfrac{DE}{OF}=\dfrac{CA+BC-AB}{CA-AB}=$定值。

又 $AF=CF-CA$

$=\dfrac{1}{2}(AB+BC-CA)=$定长。

所以，由①可知，

$$AE=\frac{CA+BC-AB}{CA-AB}\times\frac{1}{2}(AB+BC-CA)=\text{定长。}$$

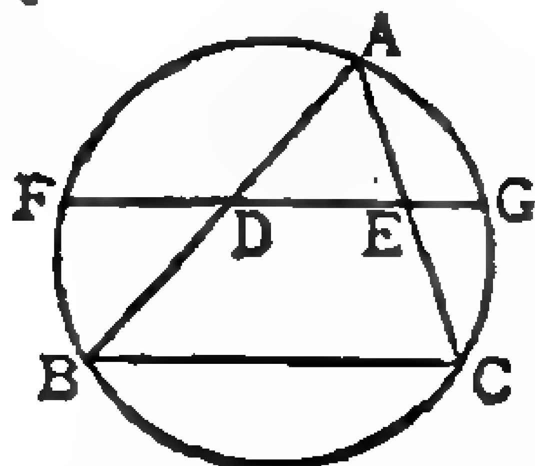
1209. 设$\triangle ABC$内接于圆，引平行BC的直线与AB、AC的交点分别为D、E，与外接圆交点为F、G，则

$$DF\cdot DG:EF\cdot EG=AB^2:AC^2。$$

解 根据圆幂定理(问题**1246**)，得

$DF\cdot DG=DA\cdot DB,\ EF\cdot EG=EA\cdot EC$。

$\therefore\ \dfrac{DF\cdot DG}{EF\cdot EG}=\dfrac{DA\cdot DB}{EA\cdot EC}$。



而 $DE\parallel BC$。

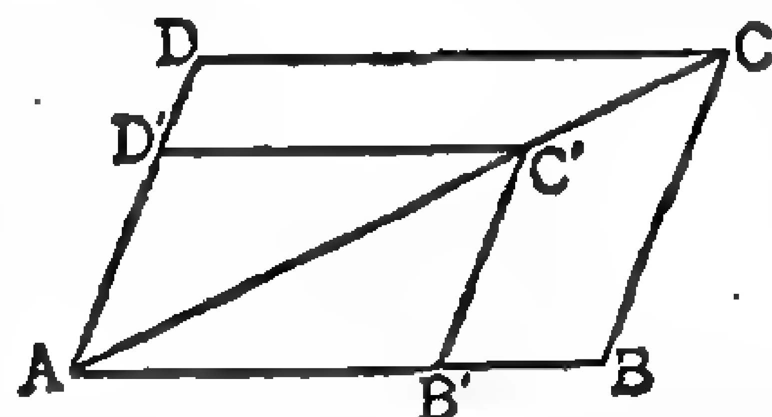
$\therefore\ \dfrac{DA}{EA}=\dfrac{DB}{EC}=\dfrac{AB}{AC}$。

$\therefore\ \dfrac{DF\cdot DG}{EF\cdot EG}=\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$。

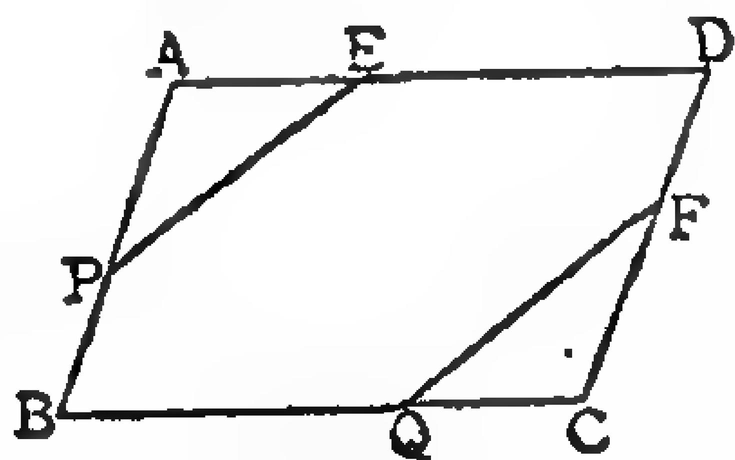
7. 平行四边形的比例线段

1210. 设两个平行四边形相似，且有一组对应角是公共角，则这两个平行四边形过公共顶角的对角线在同一条直线上。

解 两个相似平行四边形$ABCD$与$AB'C'D'$中，$\angle A$是公共角，$B'C'\parallel BC$，$C'D'\parallel CD$。这时，连结对应点的直线BB'、CC'、DD'同向相交。因为点A是满足条件的对应点，所以相交在点A处。因此，过点A的对角线在同一条直线上。



1211. 设在平行四边形$ABCD$的两边AD、CD上分别取定点E、F，过E、F作相互平行的直线与AB、BC分别交于P、Q，则$AP\cdot CQ$的值一定。



解 $\because\ AP\parallel CF,\ AE\parallel CQ,\ PE\parallel QF,$

$\therefore\ \triangle AEP\backsim\triangle CQF$。

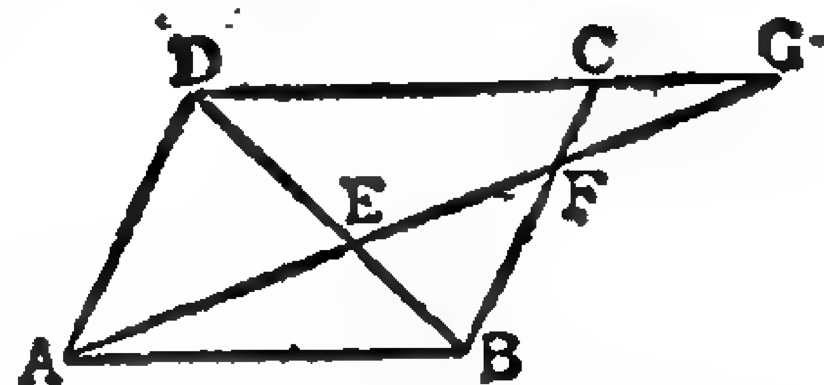
$\therefore\ \dfrac{AP}{AE}=\dfrac{CF}{CQ}$。

从而得出，$AP\cdot CQ=AE\cdot CF$。

而E、F是AD、CD上的定点。所以AE、CF的长度一定。

由此可得，$AP\cdot CQ=AE\cdot CF=$定值。

1212. 过平行四边形$ABCD$的顶点A引直线与对角线BD、边BC及DC的延长线分别交于点E、F、G，则AE是EF、EG的比例中项。



解 由$AB\parallel DG$，得$\triangle DGE\backsim\triangle BAE$。

$\therefore\ \dfrac{EG}{AE}=\dfrac{DE}{EB}$。 ①

又由$AD\parallel BF$，得$\triangle DEA\backsim\triangle BEF$。

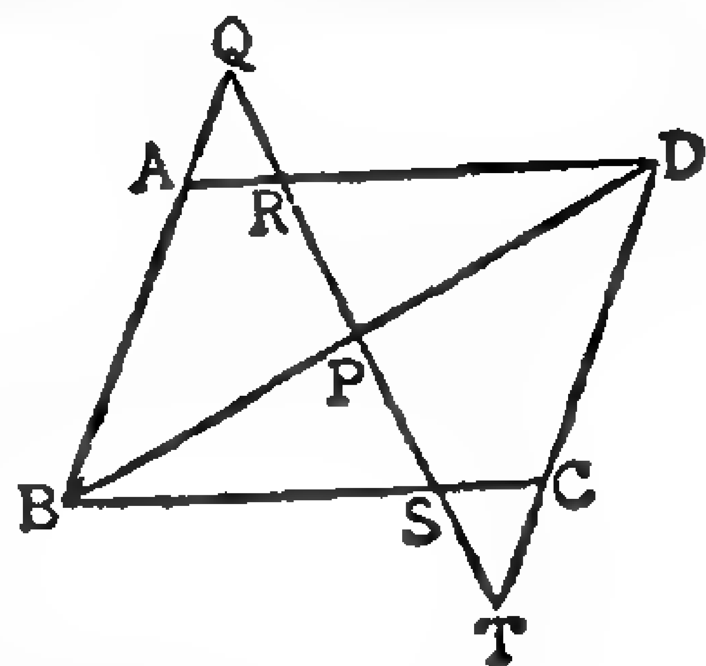
$\therefore\ \dfrac{AE}{EF}=\dfrac{DE}{EB}$。 ②

由①、②得

$\dfrac{EG}{AE}=\dfrac{AE}{EF}$。 $\therefore\ AE^2=EF\cdot EG$。

这就是说，AE是EG、EF的比例中项。

1213. 过平行四边形$ABCD$的对角线BD上一点P引一条直线，与AB、AD、BC、DC或其延长线的交点分别为Q、R、S、T，则 $PQ\cdot PR=PS\cdot PT$。



解 由$BQ\parallel DT$可得，$\triangle PBQ\backsim\triangle PDT$。

$\therefore\ PQ:PT=PB:PD$。 ①

又由$DR\parallel BS$，得$\triangle PSB\backsim\triangle PRD$。

$\therefore\ PS:PR=PB:PD$。 ②

由①、②，得 $PQ:PT=PS:PR$。

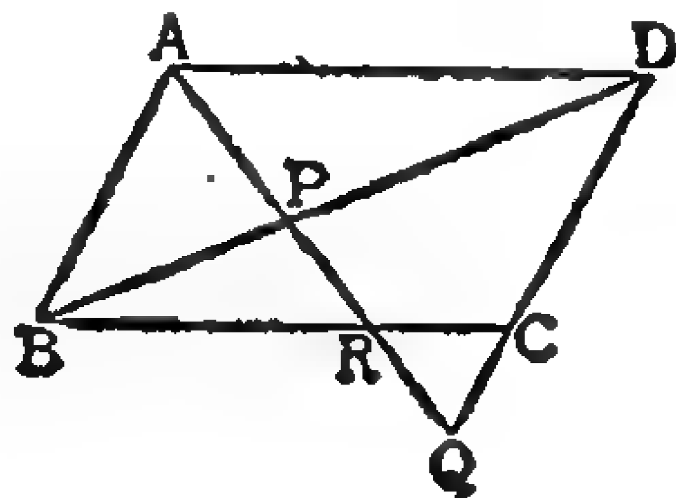
$\therefore\ PQ\cdot PR=PS\cdot PT$。

1214. 若从平行四边形$ABCD$的点A引直线与BD、CD、BC的交点分别为P、Q、R，则$\dfrac{PQ}{PR}=\dfrac{PD^2}{PB^2}$。

解　∵　$AB \parallel DQ$,

∴　$\triangle PQD \backsim \triangle PAB$.

∴　$\dfrac{PQ}{PA}=\dfrac{PD}{PB}$.　①



又

$\triangle PAD \backsim \triangle PRB$.

∴　$\dfrac{PA}{PR}=\dfrac{PD}{PB}$.　②

由①、②，得　$\dfrac{PQ}{PR}=\dfrac{PD^2}{PB^2}$.

1215.　设从给定的平行四边形 $ABCD$ 的一个顶点 A 引任意的直线与 BC 或其延长线交于点 E，与 DC 或延长线交于点 F，则以 BE、DF 为邻边的矩形的面积为定值.

解　∵　$\angle BAF=\angle DFA$,

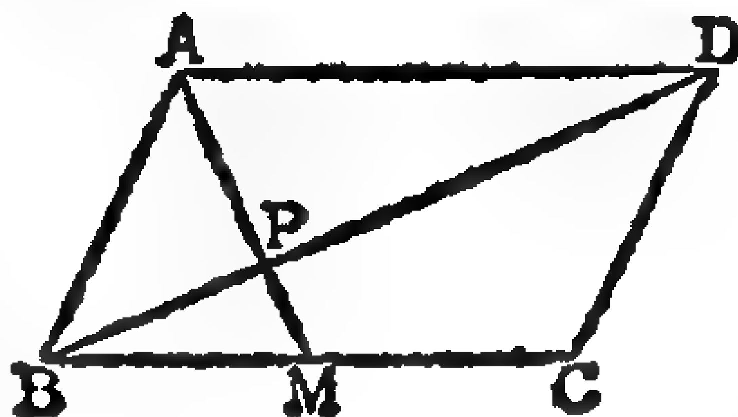
又 $\angle B=\angle D$,　∴　$\triangle ABE \backsim \triangle FDA$.

∴　$BE:AB=AD:DF$.

∴　$BE\cdot DF=AB\cdot AD=$定值.

由此可得，以 BE、DF 为邻边的矩形的面积为定值.

1216.　设平行四边形 $ABCD$ 的一边 BC 的中点为 M，直线 AM 与对角线 BD 的交点为 P，则 $BP:PD=1:2$.

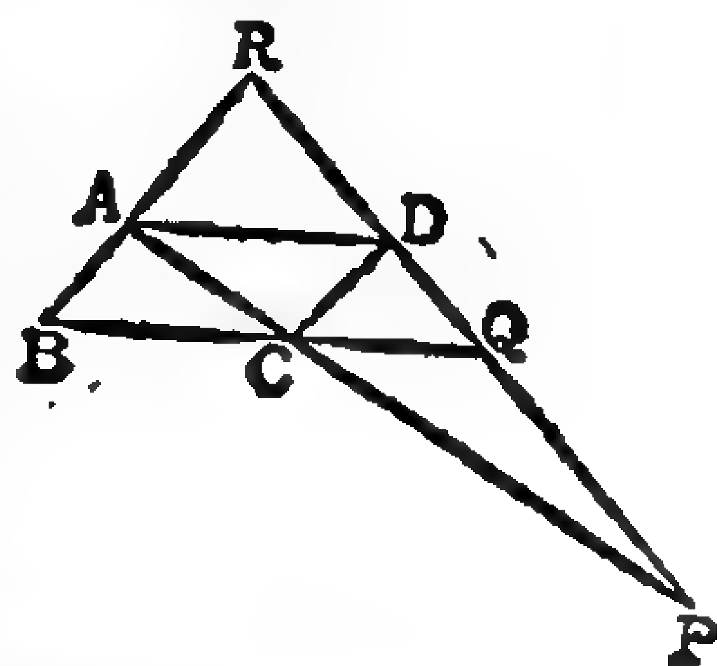


解　∵　$AD \parallel BM$,

∴　$AD:BM=PD:PB$.

∴　$PD:BP=2BM:BM=2:1$.

1217.　设在平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 的延长线上取一点 P，连结 PD 的直线与 BC、BA 的延长线分别交于 Q、R，则 PD 是 PQ、PR 的比例中项.



解　∵　$BR \parallel CD$,

∴　$PR:PD=PA:PC$.

又　　∵　$AD \parallel CQ$,

∴　$PA:PC=PD:PQ$.

∴　$PR:PD=PD:PQ$.

即　　$PD^2=PQ\cdot PR$.

所以 PD 是 PQ、PR 的比例中项.

1218.　设平行四边形 $ABCD$ 的两边 BC、DC 的延长线与圆 BAD 的交点分别为 E、F，对角线 AC 或其延长线与弦 EF 的交点为 P，则

$$EP:FP=AB^2:AD^2.$$

解　在 $\triangle ACE$ 与 $\triangle ACF$ 中，底边 AC 是公共边，所以

$$S_{\triangle ACE}:S_{\triangle ACF}=EP:FP.\quad ①$$

由 $AD \parallel BC$ 可得，

$$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle CDE}.\quad ②$$

由 $AB \parallel CD$ 可得，

$$S_{\triangle ACF}=S_{\triangle BCF}.\quad ③$$

又　∵　$\angle CDE=\angle CBF$,

$\angle DCE=\angle BCF$,

∴　$\triangle CDE \backsim \triangle CBF$.

∴　$S_{\triangle CDE}:S_{\triangle CBF}=CD^2:BC^2$.

而　　$AB=CD$, $AD=BC$.

∴　$S_{\triangle CDE}:S_{\triangle CBF}=AB^2:AD^2$.　④

由①、②、③、④，得

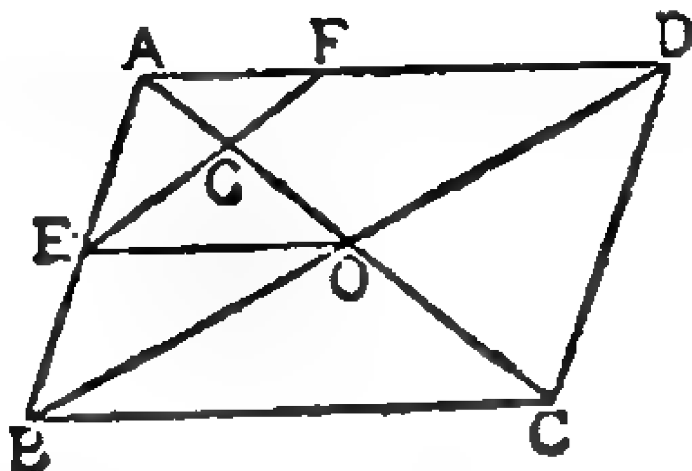
$EP:FP=S_{\triangle ACE}:S_{\triangle ACF}=S_{\triangle CDE}:S_{\triangle BCF}$

$=AB^2:AD^2$.

1219.　在平行四边形 $ABCD$ 的两边 AB、AD 上分别取点 E、F，使 $AE=EB$，

$AF=\dfrac{1}{2}FD$，

设线段 EF 与对角线 AC 的交点为 G，则



则　　$AG=\dfrac{1}{5}AC$.

解　设两对角线的交点为 O，则 $BO=OD$, $BE=AE$.

∴　$EO \parallel AD$,　且　$EO=\dfrac{1}{2}AD$.

∵　$EO \parallel AF$　∴　$AG:GO=AF:EO$.

而　$AF=\dfrac{1}{3}AD$, $EO=\dfrac{1}{2}AD$.

∴　$AF:EO=2:3$.

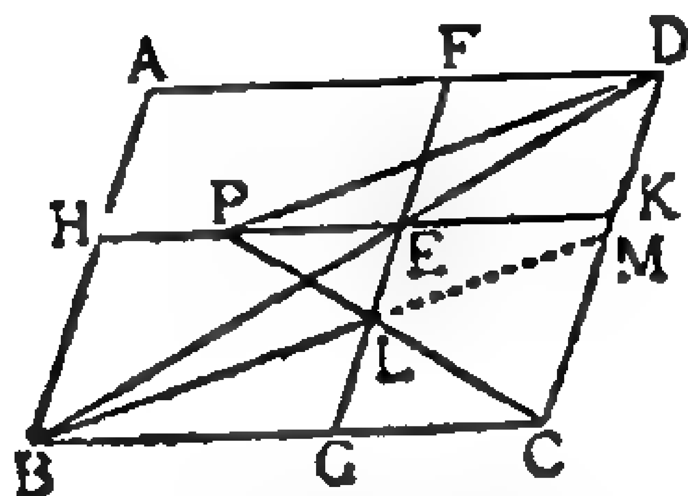
从而得出，$AG:GO=2:3$.

∴　$AG:AO=2:(2+3)=2:5$.

即　$AG:2AO=1:5$, $AG:AC=1:5$.

$$\therefore\quad AG=\frac{1}{5}AC.$$

1220. 在平行四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 上取一点 E，过 E 引 AB 的平行线 FG，引 BC 的平行线 HK，在 HK 上取一点 P，设 PC 与 FG 的交点为 L，则 $PD\parallel BL$.



解　延长 BL 与 DC 交于点 M.

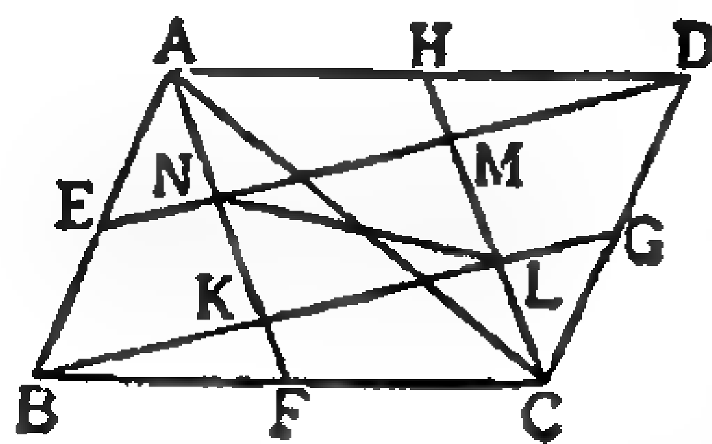
$$\because\ EG\parallel DC,\quad \therefore\ \frac{DM}{MC}=\frac{EL}{LG}.$$

$$\text{又}\ HK\parallel BC,\quad \therefore\ \frac{EL}{LG}=\frac{PL}{LC}.$$

$$\therefore\ \frac{DM}{MC}=\frac{PL}{LC}.\quad \therefore\ PD\parallel LM,$$

即　$PD\parallel BL$.

1221. 设平行四边形 $ABCD$ 边 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 E、F、G、H，连结 AF、BG、CH、DE，则这四条直线所围成的平行四边形 $KLMN$ 的面积等于平行四边形 $ABCD$ 的面积的 $\frac{1}{5}$.



解　因为 E、F、G、H 是各边的中点，所以

$$AF\parallel CH,\ DE\parallel BG,$$
$$AN=NK=ML=LC,$$
$$DM=MN=BK=KL.$$

$$\text{又}\ FK=MH=\frac{1}{2}AN=\frac{1}{5}AF=\frac{1}{5}CH.$$

$$\therefore\ KN=\frac{2}{5}AF.$$

同理可得，$LM=\frac{2}{5}CH$，$NM=\frac{2}{5}DE$，

$$KL=\frac{2}{5}BG.$$

连结 AC、LN，则

$$S_{\triangle AFC}:S_{\triangle NKL}=AF:NK=5:2.$$

$$\therefore\ S_{\triangle NKL}=\frac{2}{5}S_{\triangle AFC}.$$

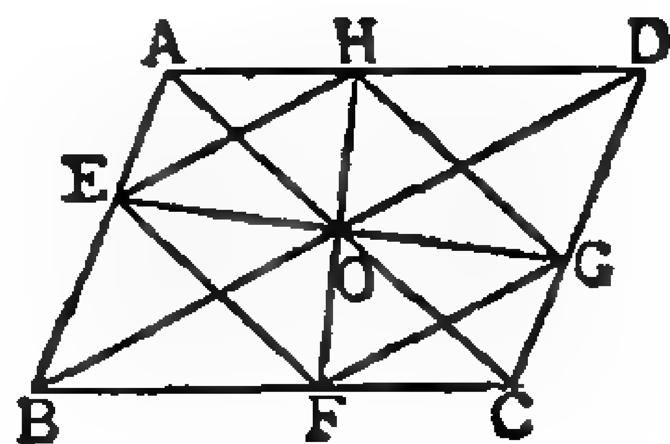
而　$S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AFC}$.

$$\therefore\ S_{\triangle ABC}=5S_{\triangle NKL}.$$

同理可得，$S_{\square ABCD}=5S_{\square KLMN}$.

所以$\square KLMN$的面积是$\square ABCD$的面积的 $\frac{1}{5}$.

1222. 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线夹角的平分线与边 AB、BC、CD、DA 的交点分别为 E、F、G、H，则四边形 $EFGH$ 的各边分别平行于 AC 与 BD.



解　由 OE 是 $\angle AOB$ 的平分线，得

$$\frac{AE}{BE}=\frac{AO}{OB}.$$

同理可得，

$$\frac{AH}{HD}=\frac{AO}{OD}.$$

而　$BO=OD$.

$$\therefore\ \frac{AE}{BE}=\frac{AH}{HD}.\quad \therefore\ EH\parallel BD.$$

同理可得，$FG\parallel BD$，$EF\parallel AC\parallel HG$.

1223. 在平行四边形 $ABCD$ 中，取平行于 AD 的线段 EF，若 BE、CF 的交点为 G，AE、DF 的交点为 H，则线段 GH 平行于 AB.

解　由 $AD\parallel EF$，得

$$\frac{AD}{EF}=\frac{AH}{EH}. \qquad ①$$

又由 $BC\parallel EF$，得

$$\frac{BC}{EF}=\frac{BG}{EG}. \qquad ②$$

而 $ABCD$ 是平行四边形.

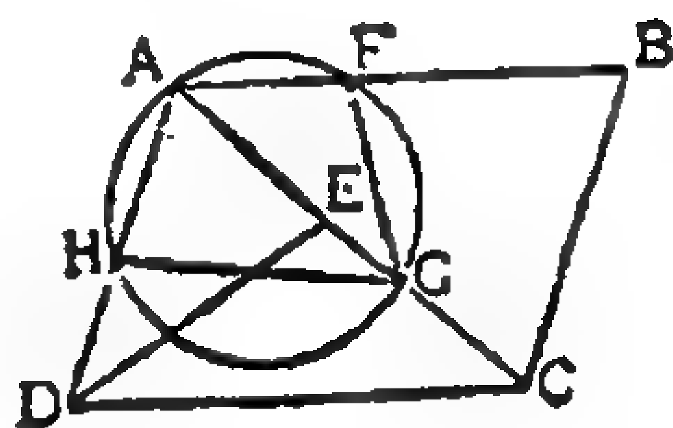
$$\therefore\ AD=BC.$$

由①、②，得　$\frac{AH}{EH}=\frac{BG}{EG}$.

$$\therefore\ \frac{AH-EH}{EH}=\frac{BG-EG}{EG},$$

即　$\frac{AE}{EH}=\frac{BE}{EG}$.　$\therefore\ GH\parallel AB$.

1224. 过平行四边形 $ABCD$ 的一个顶点 A 的圆与线段 AB、AC、AD 分别交于 F、G、H，在线段



AC上取一点E，使$\angle ADE=\angle AGH$，则

$$AF:AG=CE:AB.$$

解 根据假设$\angle ADE=\angle AGH$，得D、H、E、G四点共圆.

$\therefore\ \angle DEG=\angle DHG=\angle AFG.$

又 $\angle FAG=\angle ACD.$

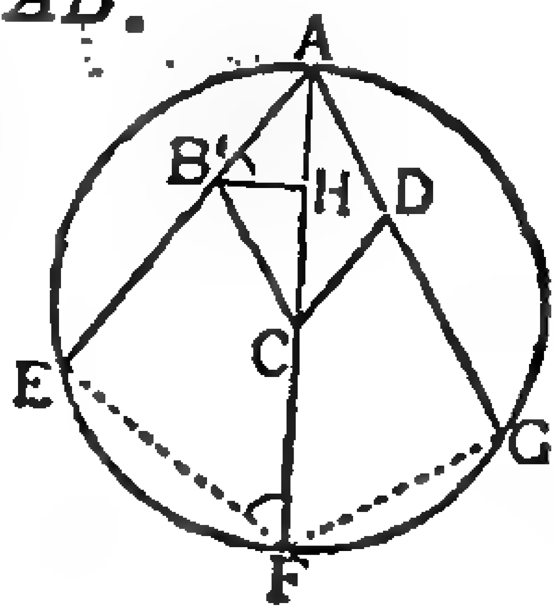
$\therefore\ \triangle AGF\backsim\triangle CDE.$

$\therefore\ AF:AG=CE:CD.$

即

$$AF:AG=CE:AB.$$

1225. 若过平行四边形$ABCD$的顶点A的圆与两边AB、AD的延长线分别交于点E、G，与对角线AC的延长线交于点F，则



$$AB\cdot AE+AD\cdot AG=AC\cdot AF.$$

解 连结EF、FG。在AC上取点H，使$\angle ABH=\angle AFE$，则

$\triangle ABH\backsim\triangle AFE.$

$\therefore\ AB:AH=AF:AE.$

$\therefore\ AB\cdot AE=AF\cdot AH.$ ①

又 $\because\ \angle BCH=\angle FAG,$

$\angle BHC=\angle FGA,$

$\therefore\ \triangle BCH\backsim\triangle FAG.$

$\therefore\ BC:CH=AF:AG.$

$\therefore\ BC\cdot AG=AF\cdot CH$

即

$AD\cdot AG=AF\cdot CH.$ ②

把①+②，得

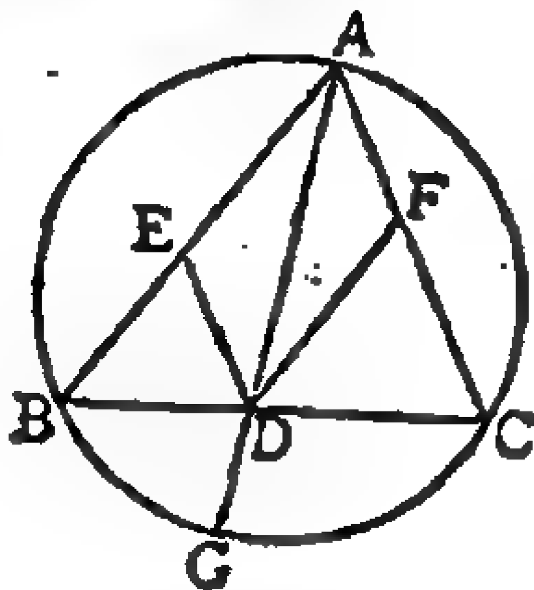
$AB\cdot AE+AD\cdot AG$

$=AF\cdot AH+AF\cdot CH$

$=AF(AH+CH)$

$=AF\cdot AC.$

1226. 设D是$\triangle ABC$的底边BC上任一点，过D分别引AC、AB的平行线交AB、AC于E、F，则



$AB\cdot AE+AC\cdot AF$

$=AD^2+BD\cdot DC.$

解 延长AD与$\triangle ABC$的外接圆交于点G，由上题可得，

$AB\cdot AE+AC\cdot AF=AG\cdot AD.$

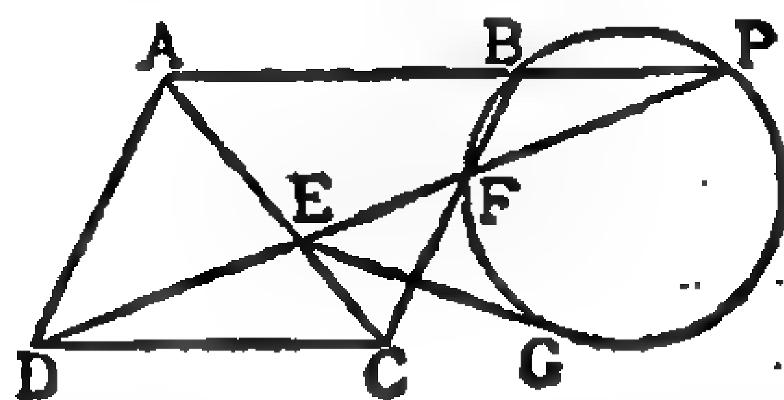
而 $AG\cdot AD=(AD+DG)AD$

$=AD^2+DG\cdot AD.$

又 $GD\cdot AD=BD\cdot DC.$

$\therefore\ AB\cdot AE+AC\cdot AF=AD^2+BD\cdot DC.$

1227. 在平行四边形$ABCD$的一边AB的延长线上取点P，若连结D、P的直线与AC、BC的交点分别为E、F，从E引过三点B、F、P的圆的切线，则这切线的长等于DE.



解 由$\triangle AED\backsim\triangle CEF$，得

$DE:EF=AE:EC.$ ①

又由$AP\parallel DC$，得$\triangle AEP\backsim\triangle CED.$

$\therefore\ AE:EC=EP:DE.$

$\therefore\ DE:EF=EP:DE.$

$\therefore\ DE^2=EF\cdot EP.$ ②

但是从E引圆BFP的切线EG，则

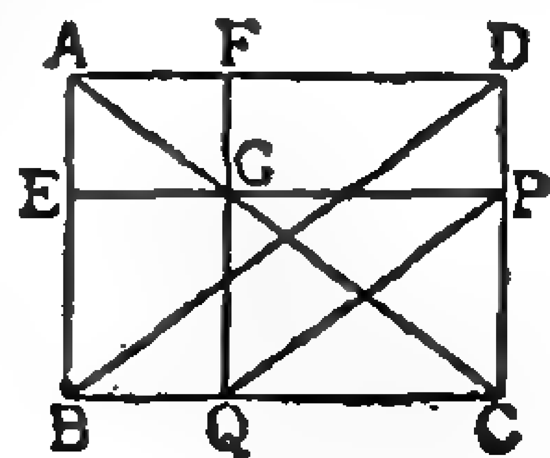
$EG^2=EF\cdot EP.$ ③

由②、③，得 $EG^2=DE^2.$

$\therefore\ EG=DE.$

8. 正方形、矩形及其他四边形的比例线段

1228. 设在矩形$ABCD$中引对角线BD的平行线与CD、BC的交点分别为P、Q，从P引BC的平行线PE，从Q引AB的平行线QF，设PE与QF的交点为G，则A、G、C在一条直线上.



解 连结AG、AC，则

$$\frac{AE}{EG}=\frac{DP}{BQ}.$$

$(\because\ AE=DP,\ EG=BQ).$

又由$PQ\parallel DB$，得

$$\frac{DP}{BQ}=\frac{CD}{BC},$$

即 $\dfrac{DP}{BQ}=\dfrac{AB}{BC}.$ $\therefore\ \dfrac{AE}{EG}=\dfrac{AB}{BC}.$

而 $\angle AEG=\angle ABC=90^\circ.$

$\therefore\ \triangle AEG\backsim\triangle ABC.$

$\therefore\ \angle EAG=\angle BAC.$

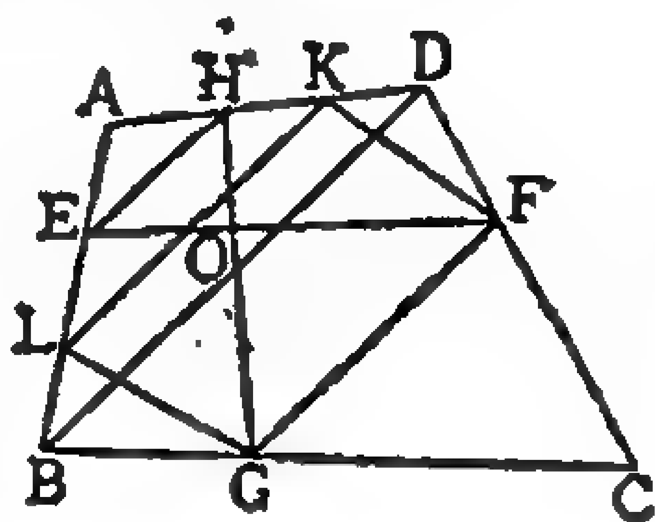
即AG、AC相重合. 也就是A、G、C在一条直线上.

1229. 设直线 EF 内分四边形 $ABCD$ 的对边 AB、CD 成

$$\frac{AE}{BE}=\frac{DF}{CF}=\frac{m}{n},$$

又直线 GH 内分另一组对边 BC、AD 成

$$\frac{BG}{CG}=\frac{AH}{DH}=\frac{m}{n},$$



则 EF、HG 互相内分成两条线段的比等于 $\frac{m}{n}$。

解 在 AD、AB 上分别取 K、L，使

$$\frac{DK}{AK}=\frac{BL}{AL}=\frac{m}{n},$$

则 $KLGF$ 是平行四边形。

又 $HE\parallel BD$, $FG\parallel BD$, $\therefore HE\parallel FG$。

设 HG、EF 的交点为 O，则

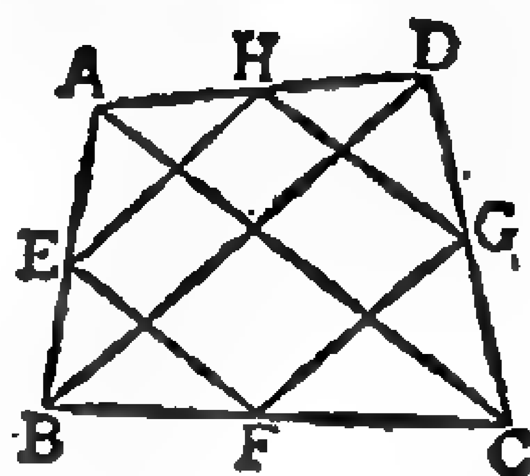
$$\frac{HO}{OG}=\frac{EO}{OF}=\frac{EH}{FG}.$$

而 $$GF=LK.$$

$$\therefore\ \frac{EH}{FG}=\frac{EH}{LK}=\frac{AH}{AK}=\frac{AH}{HD}=\frac{m}{n}.$$

$$\therefore\ \frac{HO}{OG}=\frac{EO}{OF}=\frac{m}{n}.$$

1230. 在四边形 $ABCD$ 中，$AC=BD$，则各边分别平行于对角线的四边形 $EFGH$ 的周长一定。



解 $\because\ EH\parallel BD$,

$$\therefore\ \frac{EH}{BD}=\frac{AE}{AB}. \quad ①$$

又 $EF\parallel AC$,

$$\therefore\ \frac{EF}{AC}=\frac{BE}{AB}. \quad ②$$

由假设，得 $AC=BD$。

①+②，得

$$\frac{EH+EF}{AC}=\frac{AE+BE}{AB}=\frac{AB}{AB}=1.$$

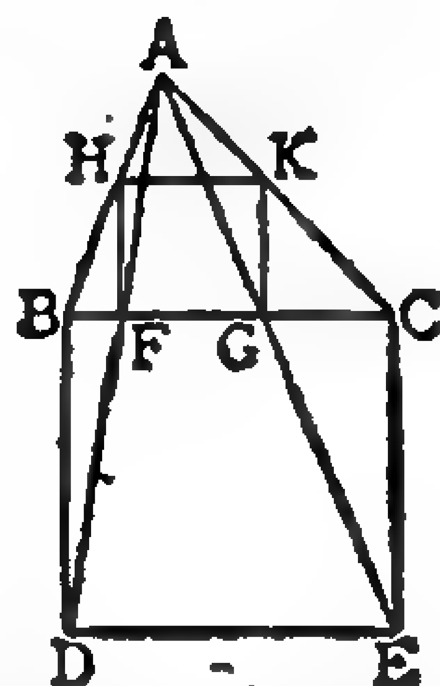
$$\therefore\ EH+EF=AC.$$

由此可知，四边形 $EFGH$ 的周长等于 $2AC$，所以它的周长是定长。

1231. 以 $\triangle ABC$ 的边 BC 为一边向外侧作正方形 $BDEC$，若 AD、AE 与 BC 的交点分别为 F、G，则 FG 是 $\triangle ABC$ 内接正方形的一边。

解 从 F、G 各向 BC 引垂线与 AB、AC 的交点分别为 H、K，则

$$\frac{HF}{BD}=\frac{AF}{AD}=\frac{FG}{DE}.$$



而 $$BD=DE,$$

$$\therefore\ HF=FG. \quad ①$$

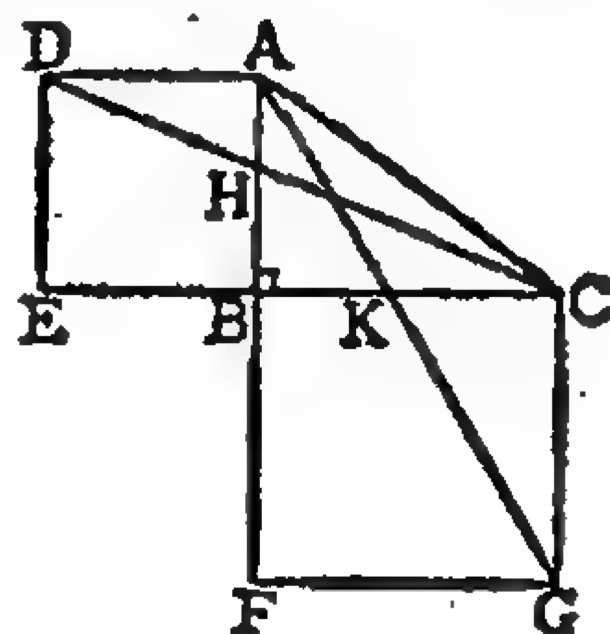
同理可得，$FG=GK$。

$$\therefore\ HF=GK.$$

又 $HF\parallel GK$。所以 $HFGK$ 是平行四边形。

而 $\angle HFG=90°$，且 $HF=FG$，所以四边形 $HFGK$ 是正方形。

1232. 在直角三角形 ABC 的两条直角边 AB、BC 上，向外侧分别作正方形 $BADE$、$BFGC$，若 CD、AB 与 AG、BC 的交点分别为 H、K，则 $BH=BK$。



解 $\because\ BC\parallel FG$,

$$\therefore\ \frac{AB}{BK}=\frac{AF}{FG},$$

即

$$\frac{AB}{BK}=\frac{AB+BC}{BC}. \quad ①$$

又 $AB\parallel DE$, $\therefore\ \frac{DE}{BH}=\frac{EC}{BC}$,

即

$$\frac{AB}{BH}=\frac{AB+BC}{BC}. \quad ②$$

由①、②，得 $\frac{AB}{BK}=\frac{AB}{BH}$。

从而得出， $BK=BH$。

1233. 设正方形 $ABCD$ 的边 BC 的中点为 E，AE 的垂直平分线 FG 与 AD 的延长线交于点 G，FG、EG 与 CD 的交点分别为 K、H，则

$$DK=\frac{1}{8}CD,$$

$$DH=\frac{1}{3}CD.$$

解 设 AE、DC 的交点为 L，则四点 G、D、F、L 共圆，

$$\therefore\ AD\cdot AG=AF\cdot AL,$$

即 $$AD\cdot AG=\frac{1}{2}AE\cdot 2AE=AE^2.$$

设正方形的边长为 a，则

$$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\therefore\quad AD\cdot AG=\frac{5}{4}a^2.$$

$$\therefore\quad AG=\frac{5}{4}a.$$

从而得出，$\quad DG=\frac{5}{4}a-a=\frac{1}{4}a.$

又 $\triangle GDK\backsim\triangle ABE,\ AB=2BE,$

$$\therefore\quad DK=\frac{1}{2}DG=\frac{1}{8}a=\frac{1}{8}CD.$$

$$\because\quad DG\parallel EC,\quad\therefore\quad \frac{DH}{HC}=\frac{DG}{CE}.$$

$$\therefore\quad \frac{DH}{CD}=\frac{DG}{DG+CE}=\frac{\frac{1}{4}a}{\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}a}=\frac{1}{3}.$$

即 $\qquad DH=\frac{1}{3}CD.$

1234. 设梯形 $ABCD$ 的两腰 AD、BC 的延长线交于点 O，过 O 作平行于对角线 BD、AC 的平行线与 AB 的延长线分别交于 M、N，证明 $\triangle OBM$ 与 $\triangle OAN$ 等积。

解 $\because\ BD\parallel OM,\ AC\parallel ON,$

$$\therefore\quad \frac{BM}{AB}=\frac{DO}{AD},\qquad ①$$

$$\frac{NA}{AB}=\frac{OC}{CB}.\qquad ②$$

而 $\quad AB\parallel CD.$

$$\therefore\quad \frac{OD}{AD}=\frac{OC}{BC}.$$

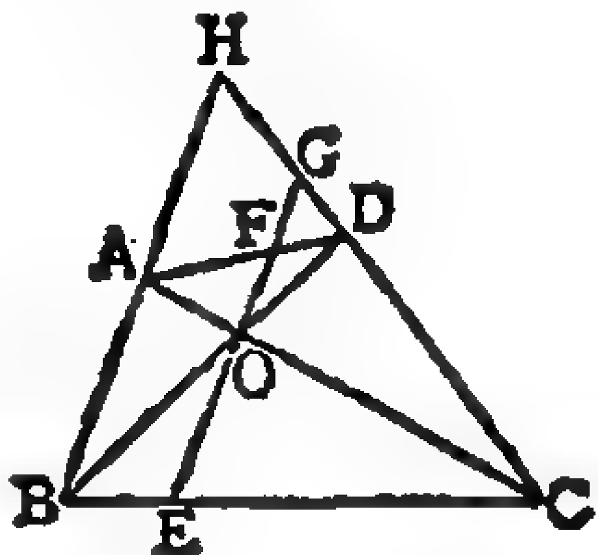
由①、②，得 $\quad \frac{BM}{AB}=\frac{NA}{AB}.$

$$\therefore\quad BM=NA.$$

在 $\triangle OBM$、$\triangle OAN$ 中，底边 BM、AN 相等，对应的高也相等，所以

$$S_{\triangle OBM}=S_{\triangle OAN}.$$

1235. 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 O，过 O 引 AB 的平行线与 BC、AD 以及 CD 的延长线分别交于 E、F、G，则 GO 是 GE、GF 的比例中项。



解 设 BA、CD 延长交于点 H，则在 $\triangle CBH$ 中，$GE\parallel BH$，

$$\therefore\quad \frac{GE}{GO}=\frac{HB}{HA}.\qquad ①$$

又在 $\triangle DBH$ 中，$GO\parallel BH$，

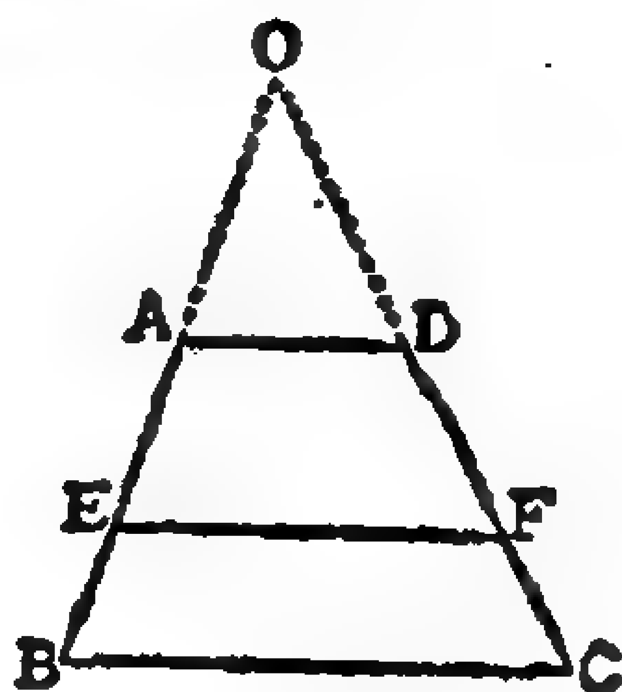
$$\therefore\quad \frac{GO}{GF}=\frac{HB}{HA}.\qquad ②$$

由①、②，得 $\quad \frac{GE}{GO}=\frac{GO}{GF}.$

所以，GO 是 GE、GF 的比例中项。

1236. 引平行于梯形底 BC 的直线把梯形分成面积相等的两部分．设这条直线与边 AB、CD 的交点分别为 E、F，则

$AD^2+BC^2=2EF^2.$



解 延长 BA、CD，设它们相交于点 O，则由 $AD\parallel EF\parallel BC$，得

$$\triangle OAD\backsim\triangle OEF\backsim\triangle OBC.$$

由此可得，$\quad \frac{S_{\triangle OAD}}{AD^2}=\frac{S_{\triangle OEF}}{EF^2}=\frac{S_{\triangle OBC}}{BC^2}.$

设这个比值为 k，则

$$S_{\triangle OAD}=k\cdot AD^2,\ S_{\triangle OEF}=k\cdot EF^2,$$

$$S_{\triangle OBC}=k\cdot BC^2.\qquad ①$$

根据假设可知，四边形 $AEFD$ 与四边形 $EBCF$ 等积，即

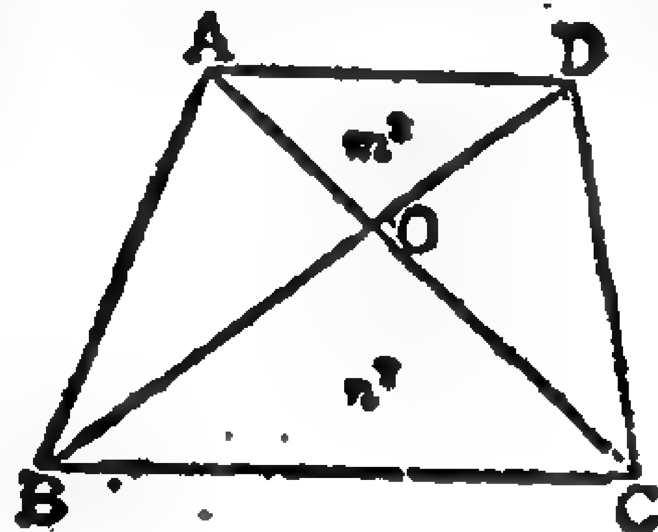
$$S_{\triangle OEF}-S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OBC}-S_{\triangle OEF},$$

$$S_{\triangle OAD}+S_{\triangle OBC}=2S_{\triangle OEF}.$$

代入①式，得 $kAD^2+kBC^2=2kEF^2.$

所以 $\qquad AD^2+BC^2=2EF^2.$

1237. 梯形 $ABCD$ 的对角线把梯形分成四部分，设相对一组三角形的面积分别为 m^2 及 n^2，则梯形面积是 $(m+n)^2$。其中 $m\neq n$。



解 设对角线 AC、BD 的交点为 O．由 $AD\parallel BC$ 可得，

$$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle DOC}.$$

设 $S_{\triangle AOD}=m^2,\ S_{\triangle BOC}=n^2$，则

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{OD^2}{OB^2}=\frac{m^2}{n^2}.$$

从而得出，$\qquad \frac{OD}{OB}=\frac{m}{n}.$

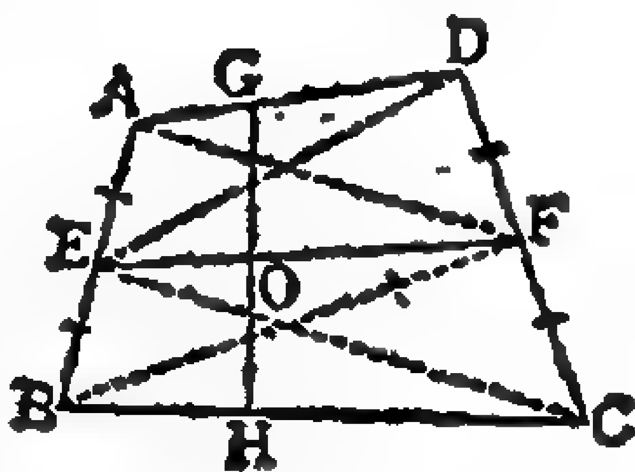
又 $S_{\triangle AOB}:S_{\triangle AOD}=BO:DO=n:m$.

$$\therefore\ S_{\triangle AOB}=\frac{n}{m}S_{\triangle AOD}=\frac{n}{m}\cdot m^2=mn.$$

$$\therefore\ S_{\triangle COD}=S_{\triangle AOB}=mn.$$

$$S_{梯形ABCD}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle AOD}+S_{\triangle BOC}$$
$$=2mn+m^2+n^2=(m+n)^2.$$

1238. 在四边形$ABCD$中，G是AD上的点，H是BC上的点，且$\frac{AG}{GD}=\frac{BH}{HC}$，又连结一组对边$AB$、$CD$的中点$E$、$F$，则$EF$二等分线段$GH$。



解 $\because\ AE=EB$，$\therefore\ S_{\triangle AEF}=S_{\triangle BEF}$.

又 $DF=FC$，$\therefore\ S_{\triangle DFE}=S_{\triangle CFE}$.

设 $AG:GD=BH:HC=m:n$，则

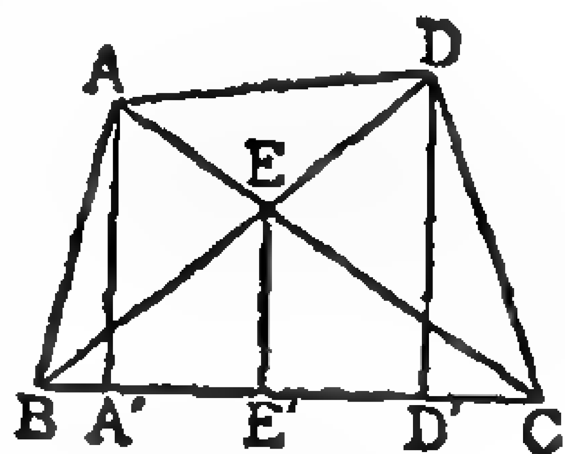
$$S_{\triangle EFG}=\frac{nS_{\triangle AEF}+mS_{\triangle DEF}}{m+n},$$

$$S_{\triangle EHF}=\frac{nS_{\triangle BEF}+mS_{\triangle CEF}}{m+n}.$$

$$\therefore\ S_{\triangle EFG}=S_{\triangle EFH}.$$

$$\therefore\ GO=OH.$$

1239. 设四边形$ABCD$的对角线AC、BD的交点为E，从A、E、D向BC作垂线AA'、EE'、DD'，则



$$S_{四边形ABCD}=\frac{BC}{2}\cdot\frac{AA'\cdot DD'}{EE'}.$$

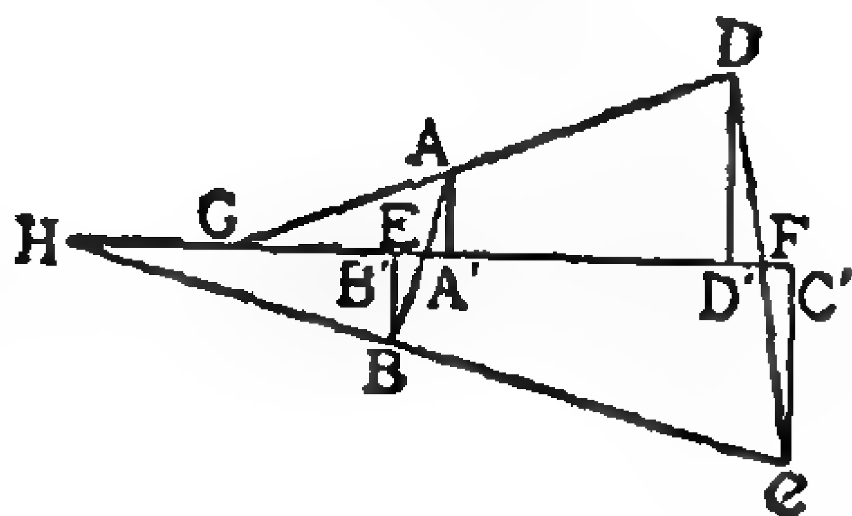
解 $$\because\ \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{AE}{EC},$$

$$\therefore\ \frac{S_{四边形ABCD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{AC}{EC}=\frac{AA'}{EE'}.$$

又 $$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DD'.$$

$$\therefore\ S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DD'\cdot\frac{AA'}{EE'}$$
$$=\frac{BC}{2}\cdot\frac{AA'\cdot DD'}{EE'}.$$

1240. 设四边形$ABCD$的对边AB、CD的中点分别为E、F，则EF的延长线外分四边形另一组对边AD、BC所得两条线段的比相等。



解 设延长DA、CB与EF的交点分别为G、H，又从各顶点向EF作垂线AA'、BB'、CC'、DD'，设A'、B'、C'、D'都是垂足，则

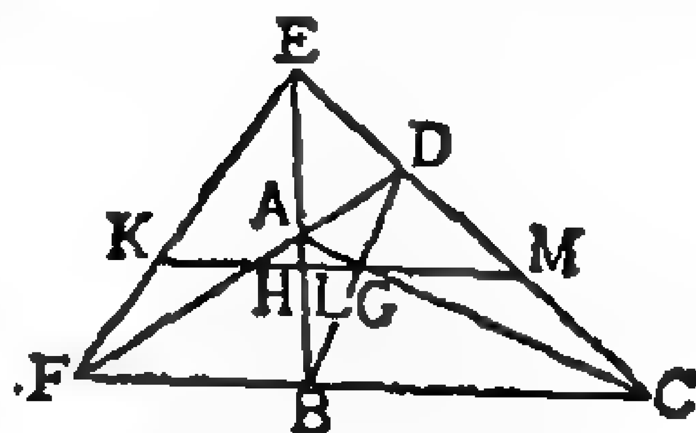
$$\frac{GA}{GD}=\frac{AA'}{DD'},\qquad ①$$

$$\frac{HB}{HC}=\frac{BB'}{CC'}.\qquad ②$$

而 $AA'=BB'$，$CC'=DD'$.

由①、②，得 $\frac{GA}{GD}=\frac{HB}{HC}$.

1241. 在四边形$ABCD$中，BA、CD与CB、DA的延长线的交点分别为E、F，两对角线的交点为G，过G引BC的平行线与AF、EF的交点分别为H、K，则$GH=HK$.



解 设AB、CD与GK的交点分别为L、M，则

$$\frac{KL}{LM}=\frac{FB}{BC}=\frac{HL}{LG}.$$

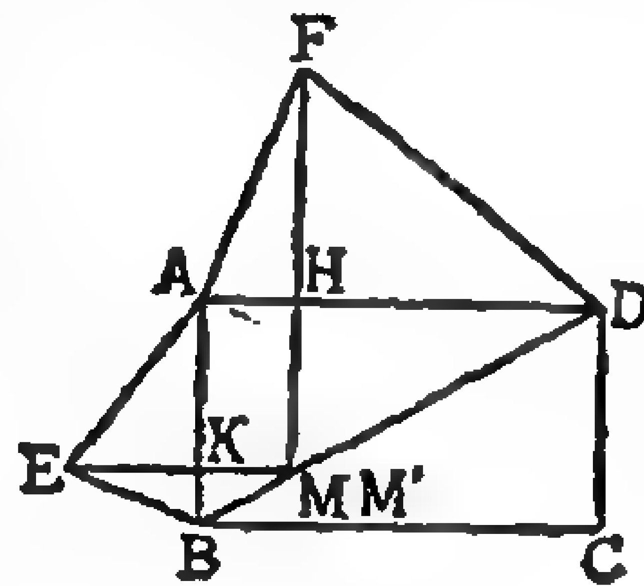
$$\therefore\ \frac{KL}{LM}=\frac{KL-HL}{LM-LG}=\frac{KH}{GM}.$$

又 $$\frac{FB}{BC}=\frac{HG}{GM}.$$

由此可得，$$\frac{KH}{GM}=\frac{HG}{GM}.$$

$$\therefore\ HK=GH.$$

1242. 在矩形$ABCD$的两边AB、AD上，并以这两边为对应边分别向外侧作相似三角形ABE、DAF，则从E向AB、从F向AD所引垂线的交点在对角线BD上。



解 从E向AB、从F向AD分别作垂线，设垂足为K、H，则由$\triangle EBA\backsim\triangle FAD$，由$EK\perp AB$，$FH\perp AD$，得

$$AK:KB=DH:HA.\qquad ①$$

设EK与BD的交点为M，由$AD\parallel EM$，得

$$DM:MB=AK:KB.\qquad ②$$

又设 FH 与 BD 的交点为 M'，则

$$DM':M'B=DH:HA. \quad ③$$

由①、②、③，得 $DM:MB=DM':M'B$.

由此可知，点 M 与 M' 相重合，即 EM、FH 的交点在 BD.

1243. 设两定点 A、B 分别在定角 O 的两边上，在 OA、OB 的延长线上分别取点 P、Q，使 $AP\cdot BQ=OA\cdot OB$，则直线 PQ 必经过以 OA、OB 为邻边的平行四边形 $AOBC$ 的顶点 C.

解 这里，只须证明连结 Q、C 的直线 QC 与直线 PQ 相重合即可.

根据假设，得 $AP\cdot BQ=OA\cdot OB$. 所以

$$\frac{AP}{OA}=\frac{OB}{BQ},$$

$$\frac{AP+OA}{OA}=\frac{OB+BQ}{BQ}.$$

$$\therefore\quad \frac{OP}{OA}=\frac{OQ}{BQ},$$

即 $$\frac{OP}{BC}=\frac{OQ}{BQ}.$$

而

$$\angle CBQ=\angle POQ.$$

$$\therefore\quad \triangle BCQ\backsim\triangle OPQ.$$

$$\therefore\quad \angle BQC=\angle OQP.$$

所以 CQ、PQ 重合，即 PQ 过点 C.

1244. 在矩形 $ABCD$ 中，$AD=\sqrt{2}AB$，若在以 AD 为直径的圆上取一点 P，PB、PC 与 AD 的交点分别为 E、F，则

$$AF^2+DE^2=AD^2.$$

解 因为 $AD^2=(AE+EF+FD)^2$,

$$AF^2=(AE+EF)^2,$$

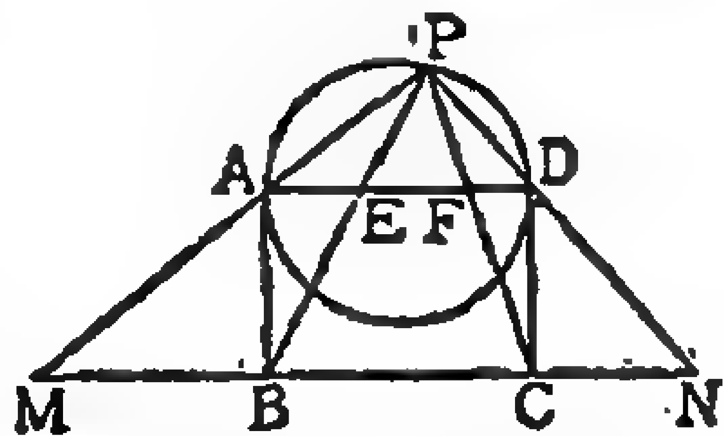
$$DE^2=(EF+FD)^2,$$

所以，要证明 $AF^2+DE^2=AD^2$，只须证明

$$(AE+EF+FD)^2=(AE+EF)^2+(EF+FD)^2,$$

即

$$2AE\cdot FD=EF^2.$$



设延长 PA、PD 与 BC 的交点分别为 M、N，则

$$\because\quad \angle M=\angle PAD=\angle NDC,$$

$$\angle ABM=\angle DCN=90°,$$

$$\therefore\quad \triangle ABM\backsim\triangle NCD.$$

$$\therefore\quad BM:AB=CD:NC.$$

$$\therefore\quad BM\cdot NC=AB\cdot CD=AB^2.$$

而 $$AD=\sqrt{2}AB,$$

即 $$AD^2=2AB^2.$$

$$\therefore\quad 2BM\cdot NC=AD^2=BC^2.$$

又由 $AD\parallel MN$，得

$$MB:BC:CN=AE:EF:FD.$$

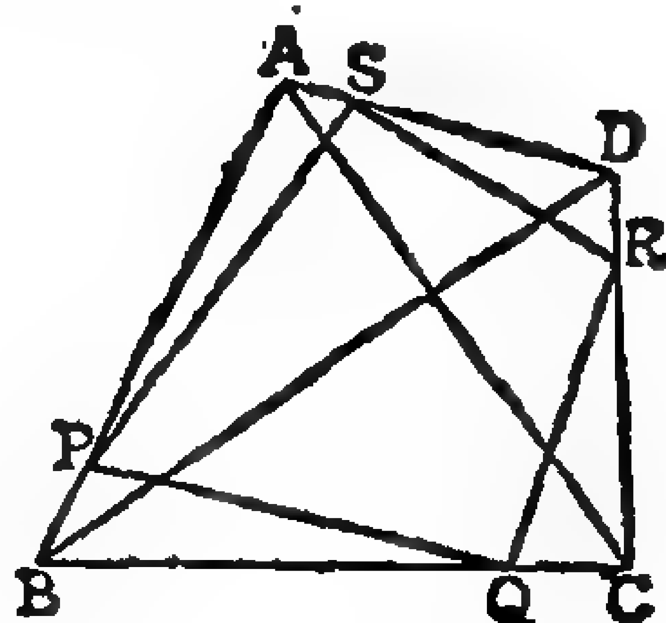
$$\therefore\quad 2AE\cdot FD=EF^2.$$

1245. 在凸四边形 $ABCD$ 中，若在 AB、BC、CD、DA 上分别取点 P、Q、R、S，使

$$\frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RD}=\frac{DS}{SA}=r,$$

则四边形 $PQRS$ 和四边形 $ABCD$ 的面积的比等于 $(r^2+1):(r+1)^2$.

解 $\because\quad \dfrac{AP}{PB}=\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{CR}{RD}=\dfrac{DS}{SA}=\dfrac{r}{1},$



$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle APS}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{AP\cdot AS}{AB\cdot AD}=\frac{r}{r+1}\cdot\frac{1}{r+1}=\frac{r}{(r+1)^2}, \quad ①$$

$$\frac{S_{\triangle CQR}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{CQ\cdot CR}{CB\cdot CD}=\frac{1}{r+1}\cdot\frac{r}{r+1}=\frac{r}{(r+1)^2}. \quad ②$$

由①、②，得

$$S_{\triangle APS}=\frac{r}{(r+1)^2}\cdot S_{\triangle ABD},$$

$$S_{\triangle CQR}=\frac{r}{(r+1)^2}\cdot S_{\triangle BCD}.$$

由此可得，

$$S_{\triangle APS}+S_{\triangle CQR}=\frac{r}{(r+1)^2}(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD})=\frac{rS}{(r+1)^2}$$

（其中 S 是四边形 $ABCD$ 的面积）.

同理可得，$S_{\triangle BPQ}+S_{\triangle DRS}=\dfrac{rS}{(r+1)^2}$.

设四边形 $PQRS$ 的面积为 S'，则

$$S'=S-\frac{2rS}{(r+1)^2}=\frac{[(r+1)^2-2r]S}{(r+1)^2}.$$

$$\therefore\quad S'=\frac{(r^2+1)S}{(r+1)^2}.$$

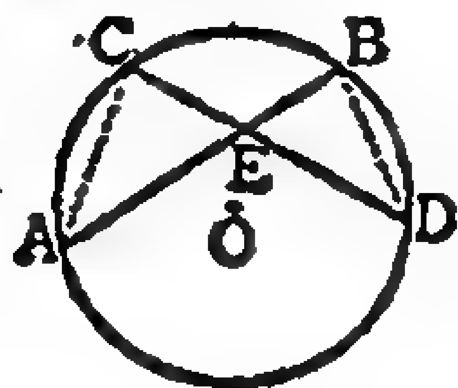
所以，$\dfrac{S'}{S}=\dfrac{r^2+1}{(r+1)^2}$.

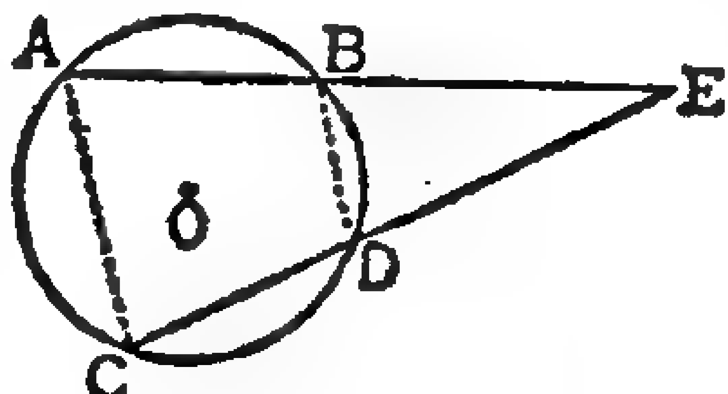
9. 切线、割线的比例线段

1246. 若圆的两弦 AB、CD 的延长线相交于点 E，则 $AE\cdot EB=CE\cdot ED$.

［圆幂定理］

解 设两条弦 AB、CD 相交于点 E.





(1)　　　(2)

如图(1)，$\angle D=\angle A$，$\angle C=\angle B$，

$\therefore\ \triangle AEC\backsim\triangle DEB$.

$\therefore\ AE:EC=ED:EB$.

由此可得，$AE\cdot EB=CE\cdot ED$.

如图(2)，$\angle EBD=\angle C$，$\angle EDB=\angle A$，

$\therefore\ \triangle EBD\backsim\triangle ECA$.

$\therefore\ AE:ED=CE:EB$.

由此可得，$AE\cdot EB=CE\cdot ED$.

注 设圆的半径为 r，

(i) 若点 E 在圆内，则

$AE\cdot EB=r^2-OE^2$，

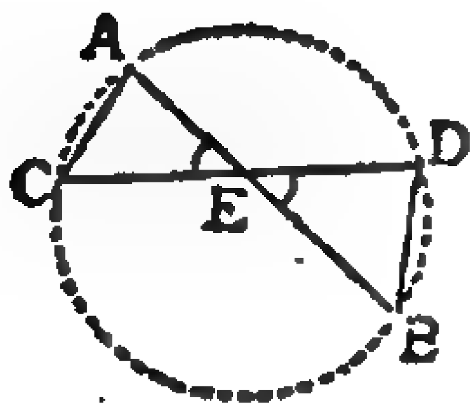
(ii) 若点 E 在圆外，则

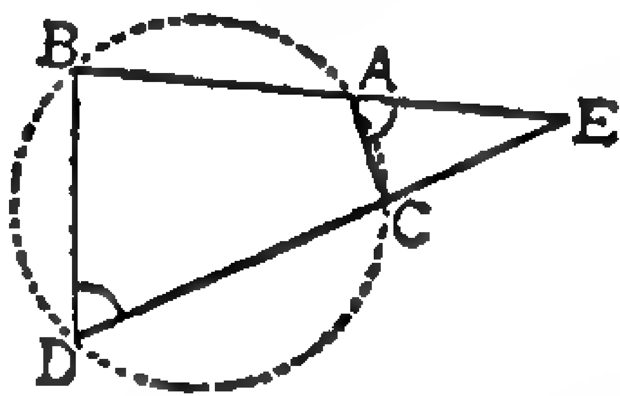
$AE\cdot EB=OE^2-r^2$.

1247. 若两条线段 AB、CD 或其延长线相交于一点 E，且 $AE\cdot EB=CE\cdot ED$，则 A、C、B、D 共圆.

解 由 $AE\cdot EB=CE\cdot ED$，得

$$\frac{AE}{CE}=\frac{ED}{EB}. \quad ①$$





(1)　　　(2)

在 $\triangle AEC$、$\triangle DEB$ 中，

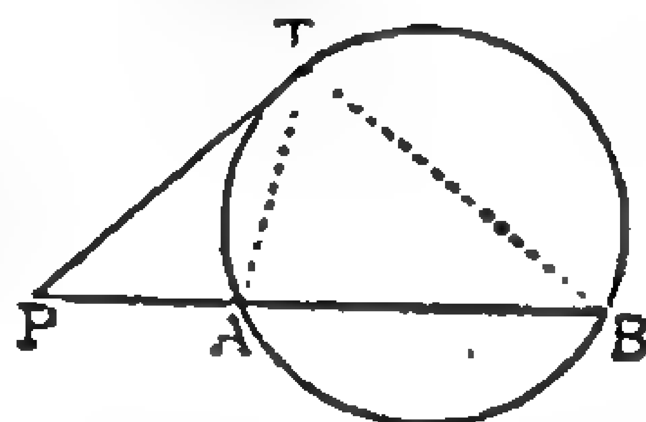
$\angle AEC=\angle DEB$. ②

由①、②可知，$\triangle AEC\backsim\triangle DEB$.

$\therefore\ \angle EAC=\angle EDB$，

从而得出，A、C、B、D 四点共圆.

1248. 在线段 BA 的延长线上取一点 P，则过 P 的线段 PT 与过三点 A、B、T 的圆相切的必要充分条件是：PT 是 PA、PB 的比例中项.



解 设 PT 是切线，$\angle PTA=\angle PBT$，则 $\triangle PTA\backsim\triangle PBT$. $\therefore\ PA:PT=PT:PB$，

$\therefore\ PT^2=PA\cdot PB$.

反之，设 $PA:PT=PT:PB$，

而 $\angle TPA=\angle BPT$，

所以 $\triangle PTA\backsim\triangle PBT$.

从而得出 $\angle PTA=\angle PBT$.

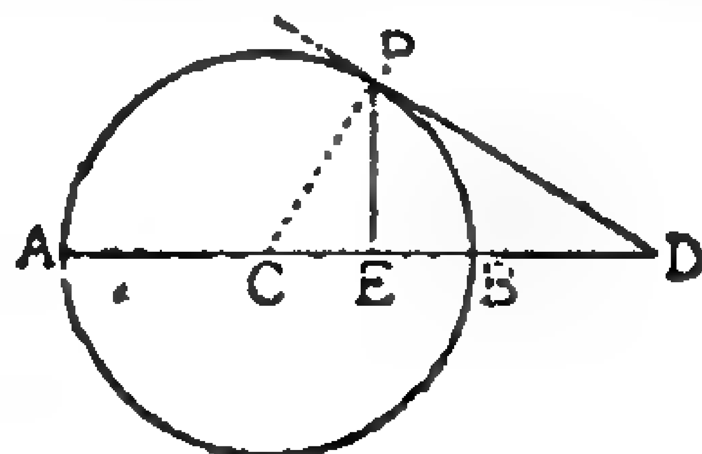
由此可得，PT 是圆 TAB 的切线.

因此，PT 是圆 TAB 的切线的必要充分条件是：PT 是 PA、PB 的比例中项.

1249. 设过圆 C 上一点 P 所作切线与直径 AB 的延长线交于点 D，在 AD 上取点 E 使

$$\frac{CD}{AC}=\frac{AC}{CE},$$

则 $PE\perp AD$.



解 连结 PC，则 $PC=AC$.

$\because\ \dfrac{CD}{AC}=\dfrac{AC}{CE}$. $\therefore\ \dfrac{CD}{PC}=\dfrac{PC}{CE}$.

在 $\triangle PCD$ 与 $\triangle PEC$ 中 $\angle PCD$ 是公共角，且这个角的夹边成比例，所以

$\triangle PCD\backsim\triangle ECP$.

$\therefore\ \angle CPD=\angle PEC$.

而 $\angle CPD=90°$.

$\therefore\ \angle PEC=90°$. $\therefore\ PE\perp AD$.

1250. 在圆的直径 AB 的延长线上取一点 O，过 O 引圆的切线，切点为 C，过 C 作 AB 的垂线 CM，则

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AO}{BO}.$$

解 设 AB 为直径，OC 是切线，

则 $\angle ACB=90°$，

$\angle A=\angle BCO=\angle MCB$.

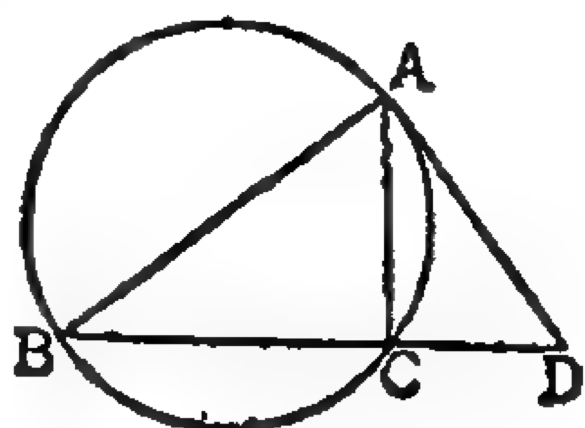
由此可知，CB、CA 分别是 $\angle MCO$、与它相

邻的外角的平分线。

所以，CB、CA 调和分割 AB，即

$$AM:BM=AO:BO.$$

1251. 过圆内接三角形 ABC 的顶点 A 的切线与 BC 延长线交于点 D，则 $BD:CD=AB^2:AC^2$。



解 设 AD 为切线，则在 $\triangle ACD$、$\triangle BAD$ 中，$\angle DAC=\angle DBA$，又 $\angle D$ 是公共角，

$$\therefore\quad \triangle ACD\backsim\triangle BAD.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=AB^2:AC^2.\qquad ①$$

又 $\triangle ABD$ 的边 BD 上的高、$\triangle ACD$ 的边 CD 上的高相等，所以

$$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=BD:CD.\qquad ②$$

由①、②，得 $BD:CD=AB^2:AC^2$。

1252. 设有两个定点 A、B，由 A 向一个定圆 O 引任意割线 AMN，作 $\triangle BMN$ 的外接圆，则这个圆过点 B 外的一定点。

解 设延长 AB 与圆 BMN 的另一交点为 C，则

$AM\cdot AN=AB\cdot AC$。

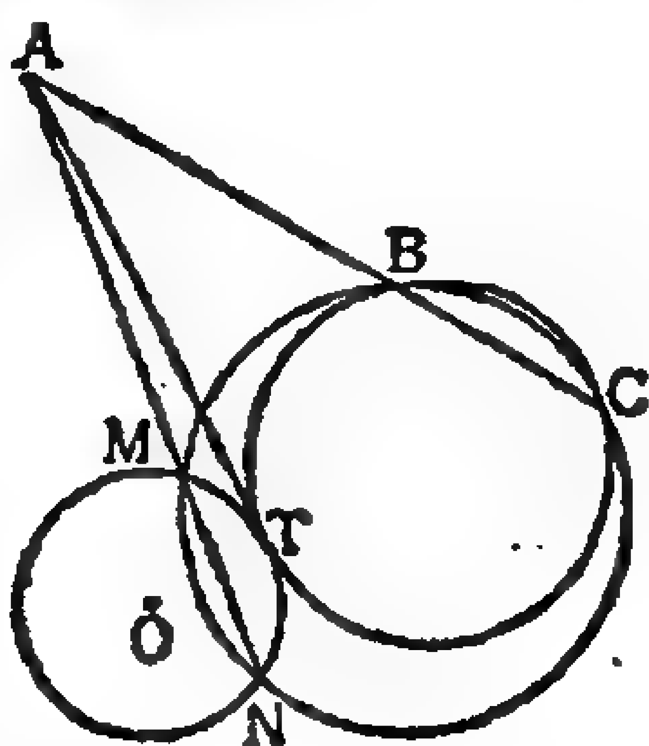
而圆 O 是定圆，A 是定点，不论割线 AMN 的位置怎样变动，都可以得到

$$AM\cdot AN=AO^2-(\text{圆的半径})^2,$$

它是一个定值(问题 1246)。

又 AB 是定长线段。由此可知，AC 也是定长线段。因此点 C 是定点，即 $\triangle BMN$ 的外接圆是过定点 C。

1253. 设定圆 O 外有两定点 B、C；过 B、C 的任意圆与定圆 O 的交点为 M、N，则连结 M、N 的直线过定点。



解 设 CB 与 MN 的交点为 A，由 A 引圆 O 的切线 AT，则

$AT^2=AM\cdot AN$。

又 $\qquad AM\cdot AN=AB\cdot AC,$

$$\therefore\quad AT^2=AB\cdot AC.$$

因此，AT 与圆 BTC 在点 T 处相切。从而得出，圆 BTC 在点 T 处与圆 O 相切。

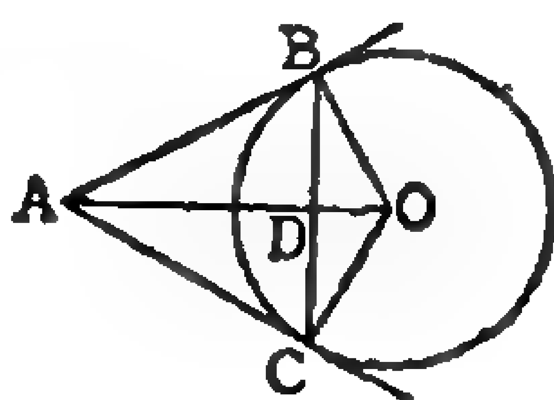
由此可知，过两定点 B、C 作圆与圆 O 相切，点 A 是过切点 T 的公切线与 CB 的延长线的交点。所以 A 为定点。

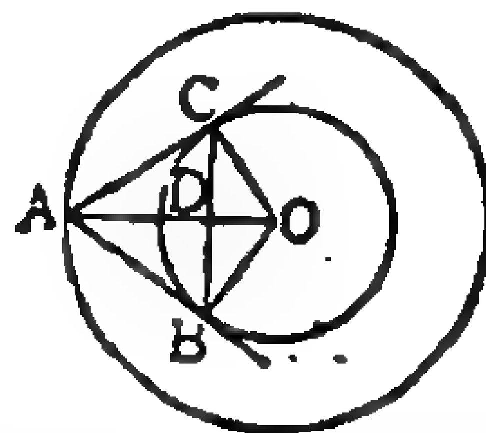
1254. (1) 若从圆 O 外一点 A 向这个圆引两条切线，设切点为 B、C，直线 BC 与 AO 的交点为 D，则以 OD 与 OA 为邻边的矩形的面积一定。

(2) 若上述的点 A 在给定的圆 O 的同心圆上变化时，则直线 BC 总是与一个定圆相切。

解 (1) ∵ $\triangle ABO$ 是直角三角形，又 $AO\perp BC$，

$$\therefore\quad OD\cdot OA=OB^2,$$





即 $OD\cdot OA$ 等于半径的平方。

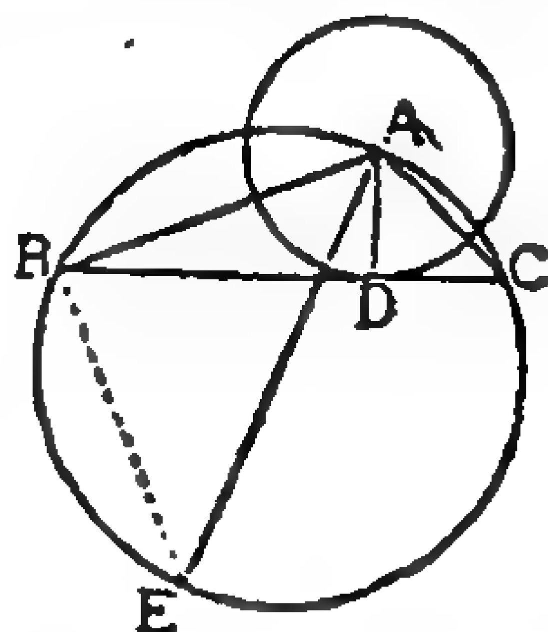
由此可知，以 OD、OA 为邻边的矩形面积一定。

(2) 根据(1)，得 $OD\cdot OA=OB^2$。

而 OA、OB 是定长。所以 OD 也是定长。

又 $BC\perp AO$。由此可知，BC 是以 O 为圆心，半径等于定长 $\dfrac{OB^2}{OA}$ 的圆的切线。即 BC 与定圆相切。

1255. 若过定圆 A 上任一点 D 所引的切线，与过 A 的另一定圆相交于 B、C，则 $AB\cdot AC$ 是定值。



解 作另一定圆的直径 AE，连结 BE，则

$\triangle ABE\backsim\triangle ADC$。

$\therefore\quad AB:AE=AD:AC.$

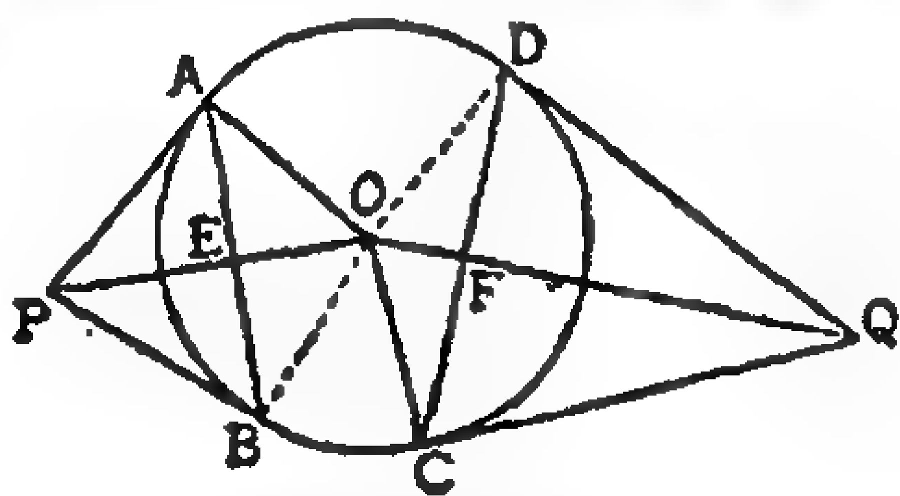
$\therefore\quad AB\cdot AC=AE\cdot AD.$

而 AD 是定圆 A 的半径，AE 是另一定圆的直径，所以 AD、AE 都是定长线段。因此，$AE\cdot AD$ 是定值。从而得出 $AB\cdot AC$ 也是定值。

1256. 从定直线 l 上的任一点 P 向定圆 O 引切线 PA、PB，则连结切点 A、B 的弦过定点。

解 从 O 向 l 引垂线 OC，设 C 是垂足，

CC与AB的交点为D，AB与OP的交点为E，则AB⊥OP，E、D、C、P四点共圆。

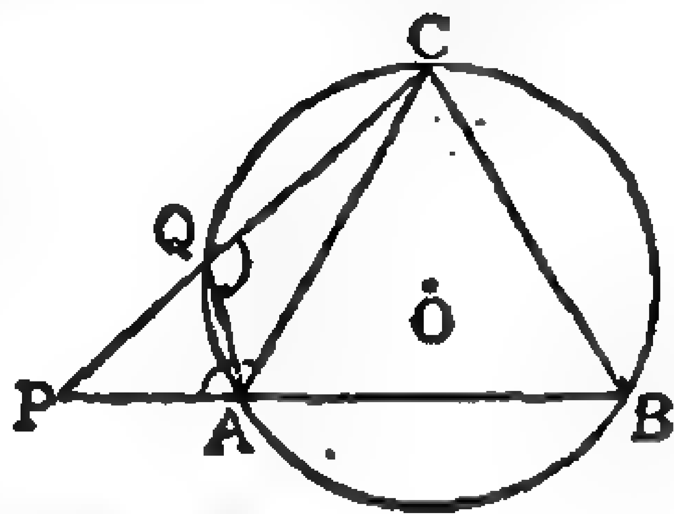


$\therefore\ CC\cdot OD$

$=OE\cdot OP=OA^2$(一定)。

而CC是定长的线段．由上式可知，OD是定长的线段，因此点D是定点．这就是说，AB总经过这个定点D.

1257. 从圆O外两点P、Q分别向圆引切线，设切点分别为A、B与C、D，又AB、CD的中点分别为E、F，则P、Q、E、F四点共圆．其中P、O、Q不在一条直线上．



解 $\because\ \angle PAO=90°,\ AE\perp PO,$

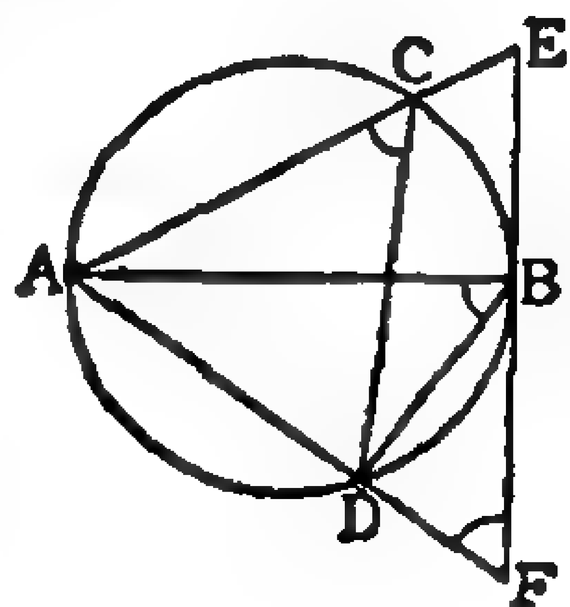
$\therefore\ AO^2=OE\cdot OP.$

同理可得，$OC^2=OF\cdot OQ.$

而$AO=OC$，$\therefore\ OE\cdot OP=OF\cdot OQ.$

从而得出，E、P、Q、F四点共圆．

1258. 设圆O的弦AB，过$\overset{\frown}{AB}$的中点C引任意直线交BA的延长线和圆分别于点P、Q，则CA是CP、CQ的比例中项．



解 由A、B、C、Q共圆，得

$\angle CQA=180°-\angle B$

$=180°-\angle BAC=\angle CAP.$

又 $\angle ACQ=\angle PCA.$

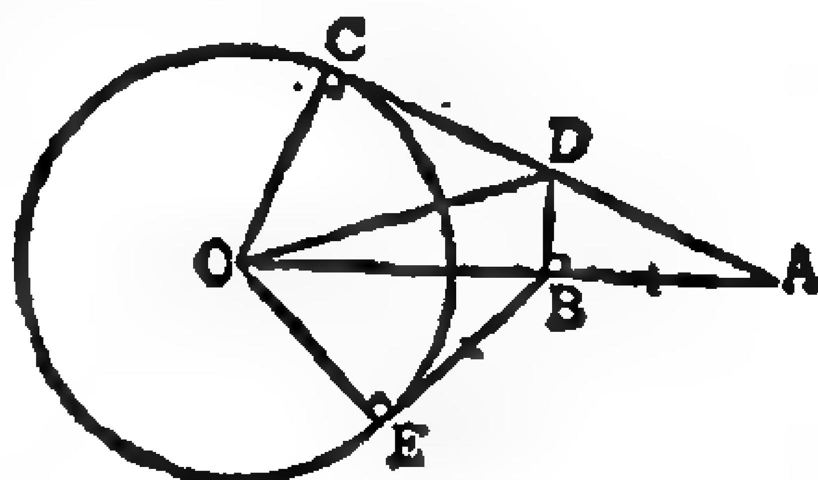
$\therefore\ \triangle CAQ\backsim\triangle CPA.$

$$\therefore\ \frac{CQ}{CA}=\frac{CA}{CP},$$

即CA是CP、CQ的比例中项．

1259. 从直径AB的一端A引两条弦AC、AD，设AC、AD与过点B的切线分别相交于点E、F，则

$$\frac{EF}{CD}=\frac{AF}{AC}.$$



解 在△ACD、△AFE中，∠A是公共角，

$\angle ACD=\angle ABD=90°-\angle BAD=\angle F.$

$\therefore\ \triangle ACD\backsim\triangle AFE.$

从而得出，$\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{AF}{AC}.$

1260. 由线段QR上的一点B引垂线BA，从B向AQ、AR分别作垂线BC、BD，若AB与CD的交点为P，则

$BQ\cdot BR\cdot AP$

$=AB^2\cdot BP.$

解 $\because\ \angle ABQ=90°,\ BC\perp AQ,$

$\therefore\ \triangle ABQ\backsim\triangle ACB.$

$$\therefore\ \frac{BQ}{AB}=\frac{BC}{AC}.\quad ①$$

同理可得，$\triangle ABR\backsim\triangle ADB.$

$$\therefore\ \frac{BR}{AB}=\frac{BD}{AD}.\quad ②$$

①×②，得

$$\frac{BQ\cdot BR}{AB^2}=\frac{BC\cdot BD}{AC\cdot AD}.\quad ③$$

而 $\angle CAD+\angle CBD=180°.$

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle DAC}}=\frac{BC\cdot BD}{AC\cdot AD}.\quad ④$$

又△DBC、△DAC有公共边DC，所以

$$\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle DAC}}=\frac{BP}{AP}.\quad ⑤$$

由④、⑤，得 $\dfrac{BC\cdot BD}{AC\cdot AD}=\dfrac{BP}{AP}.$

又由②、③，得 $\dfrac{BQ\cdot BR}{AB^2}=\dfrac{BP}{AP}.$

$\therefore\ BQ\cdot BR\cdot AP=AB^2\cdot BP.$

1261. 从圆O外一点A向圆O引切线AC，从OA上一点B向圆O引切线BE，使BE=AB，则$AC^2=2\,AO\cdot AB.$

解 设过B引AO的垂线与AC的交点为D，则

OD^2-DA^2

$=OB^2-AB^2.$ ①

根据假设，得AB=BE．由①，得

$$OD^2-DA^2=OB^2-BE^2=OE^2. \quad ②$$

又 $\angle OCD=90°$.

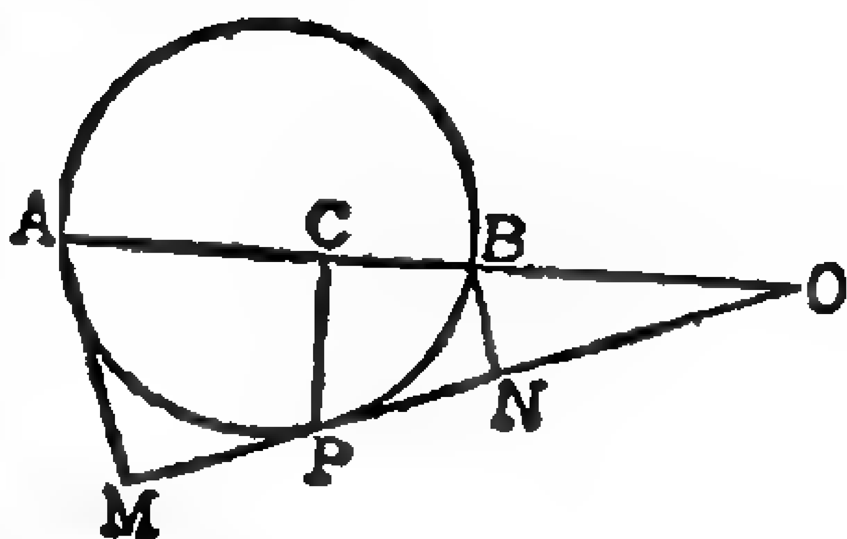
$$\therefore \quad OD^2-DC^2=OC^2. \quad ③$$

而 $OE=OC$. 由②、③, 得 $DA=DC$, 而 O、B、D、C 共圆.

$$\therefore \quad AO\cdot AB=AD\cdot AC=\frac{1}{2}AC^2.$$

$$\therefore \quad AC^2=2AO\cdot AB.$$

1262. 从圆上的任意点 P 向弦 AB 引垂线 PC, 又从 A、B 分别向过点 P 的切线引垂线 AM、BN, 则 $AM\cdot BN=PC^2$.



解 设延长 AB、MN 交于点 O, 则

$$\triangle ONB\backsim\triangle OCP\backsim\triangle OMA.$$

$$\therefore \quad \frac{OB}{OP}=\frac{BN}{PC}, \quad \frac{OP}{OA}=\frac{PC}{AM}.$$

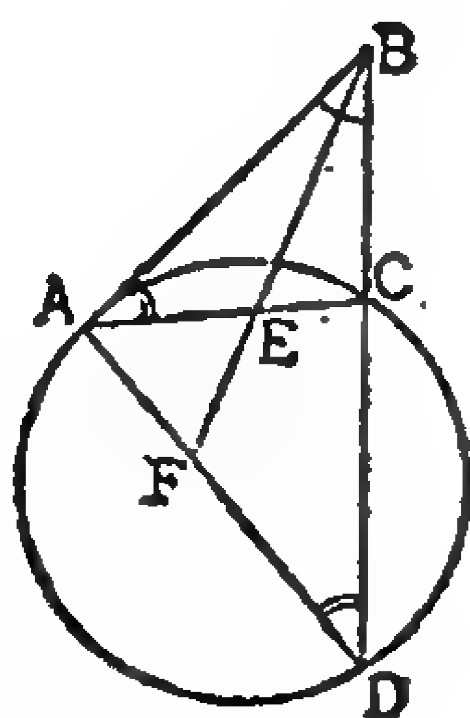
而 PO 是切线.

$$\therefore \quad PO^2=OB\cdot OA.$$

即 $\dfrac{OB}{OP}=\dfrac{OP}{OA}$. $\quad\therefore \quad \dfrac{BN}{PC}=\dfrac{PC}{AM}$.

$$\therefore \quad AM\cdot BN=PC^2.$$

1263. 若从圆外的一点 B 引圆的切线 BA、割线 BCD, 又 $\angle ABD$ 的平分线与 AC、AD 的交点分别为 E、F, 则 $AE\cdot AF=EC\cdot FD$.



解 在 $\triangle BAC$ 中, BE 是 $\angle B$ 的平分线,

$$\therefore \quad AE:EC=BA:BC. \quad ①$$

同理可得, 在 $\triangle ABD$ 中,

$$DF:AF=BD:BA. \quad ②$$

又 BA 是圆的切线,

$$\therefore \quad BA:BC=BD:BA. \quad ③$$

由①、②、③, 得

$$AE:EC=FD:AF.$$

$$\therefore \quad AE\cdot AF=EC\cdot FD.$$

1264. 从圆外的一点 P 向圆引切线, 设切点为 A, 又从 P 引割线与圆的交点为 B、C, $\angle APB$ 的平分线与弦 AB、AC 的交点分别为 D、E, 则

$$\frac{DB}{AB}+\frac{EC}{AC}=1.$$

解 从 D 引 AC 的平行线与 BC 交于点 F, 则

$$\angle APD=\angle DPF,$$

$$\angle DFP=\angle ACP=\angle DAP,$$

$\therefore \quad \triangle PDA\cong\triangle PDF$. $\quad\therefore \quad AD=DF$.

而 $\qquad \triangle APD\backsim\triangle CPE$.

$$\therefore \quad \angle ADP=\angle PEC.$$

由此可得, $\quad \angle ADE=\angle AED$.

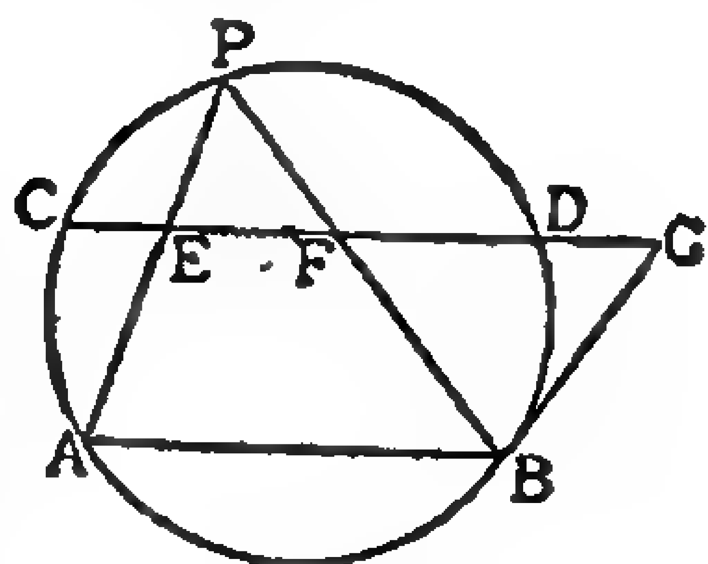
$$\therefore \quad AE=AD=DF.$$

又 $AC\parallel DF$,

$$\therefore \quad \frac{DB}{AB}=\frac{DF}{AC}=\frac{AE}{AC}.$$

$$\therefore \quad \frac{DB}{AB}+\frac{EC}{AC}=\frac{AE}{AC}+\frac{EC}{AC}=\frac{AC}{AC}=1.$$

1265. 设 AB、CD 是圆的两条平行弦, 过点 B 作圆的切线与 CD 的延长线交于点 G, 在 $\overset{\frown}{CD}$ 上取一点 P, 若直线 PA、PB 与弦 CD 的交点分别为 E、F, 则



$$FE\cdot FG=FD\cdot FC.$$

解 $\because$ BG 是切线, $\therefore$ $\angle PBG=\angle A$.

又 $AB\parallel CG$, $\quad\therefore \quad \angle A=\angle PEG$.

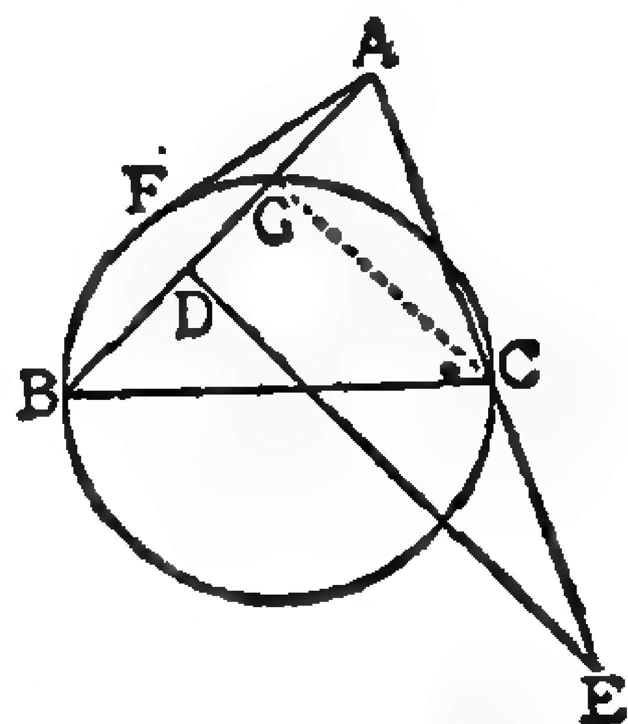
所以, P、E、B、G 四点共圆.

$$\therefore \quad FE\cdot FG=FP\cdot FB.$$

$$\because \quad FP\cdot FB=FC\cdot FD,$$

$$\therefore \quad FE\cdot FG=FD\cdot FC.$$

1266. 在圆的直径 BC 上作锐角三角形 ABC, 在边 AB 上取 AD 等于从 A 向圆所引切线 AF, 若过 D 引 AB 的垂线与 AC 的延长线交于点 E, 则



$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADE}.$$

解 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中, $\angle A$ 是公共角,

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{AB\cdot AC}{AD\cdot AE}. \quad ①$$

设 AB 与圆的交点为 G，连结 GC。由 AF 是圆的切线，得

$$AF^2=AB\cdot AG.\quad\therefore\quad \frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AF}.$$

而 $$AF=AD.$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{AB}=\frac{AG}{AD}.\qquad ②$$

又 $$\angle CGB=90^\circ=\angle EDB,$$

$$\therefore\quad CG\parallel ED.$$

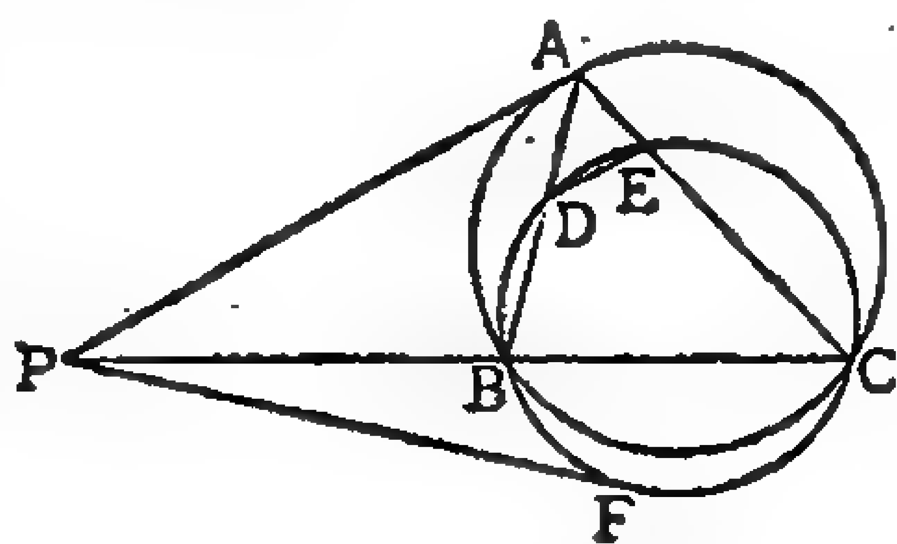
$$\therefore\quad \frac{AG}{AD}=\frac{AC}{AE}.\qquad ③$$

由②、③，得 $$\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AE}.$$

$$\therefore\quad AB\cdot AC=AD\cdot AE.$$

所以，由①可知，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADE}$。

1267. 以 $\triangle ABC$ 的边 BC 为弦的任意圆与 AB、AC 的交点分别为 D、E，过 A 引 DE 的平行线与 CB 的延长线交于点 P，由 P 引这圆的切线 PF，则 $PA=PF$。



解 $\because\quad PA\parallel DE,$

$$\therefore\quad \angle ADE=\angle DAP.$$

又 $\angle ADE=\angle C.\quad\therefore\quad \angle C=\angle DAP,$

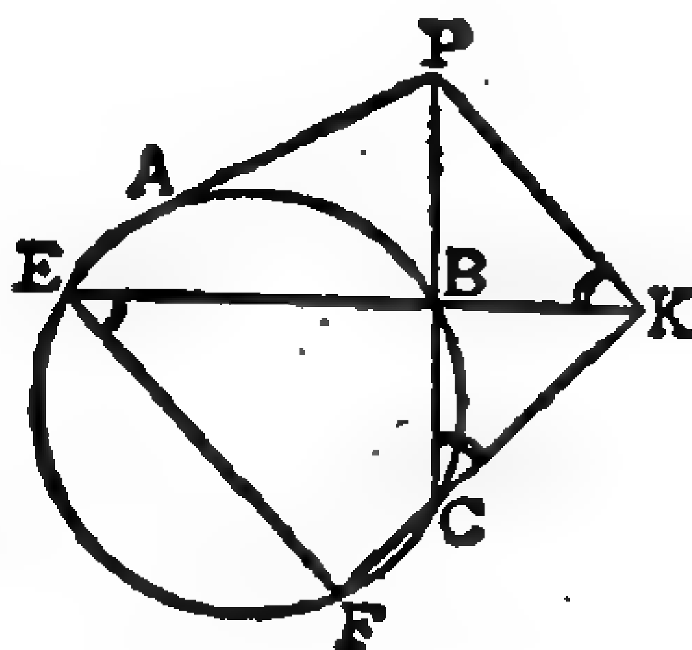
由此可知，AP 与圆 ABC 在 A 点相切。

$$\therefore\quad PA^2=PB\cdot PC.$$

而 $$PF^2=PB\cdot PC.$$

从而得出，$\quad PA=PF.$

1268. 从圆外一点 P 引切线 PA 及割线 PBC，过 P 引任意直线 PK，使 $PK=PA$，KB、KC 与圆的另一交点分别为 E、F，则 EF 与 PK 相互平行。



解 由 PA 是切线且 $PA=PK$，得

$$PB\cdot PC=PA^2=PK^2.$$

由此可得，PK 与圆 BCK 在点 K 处相切。

$$\therefore\quad \angle PKB=\angle KCB.\qquad ①$$

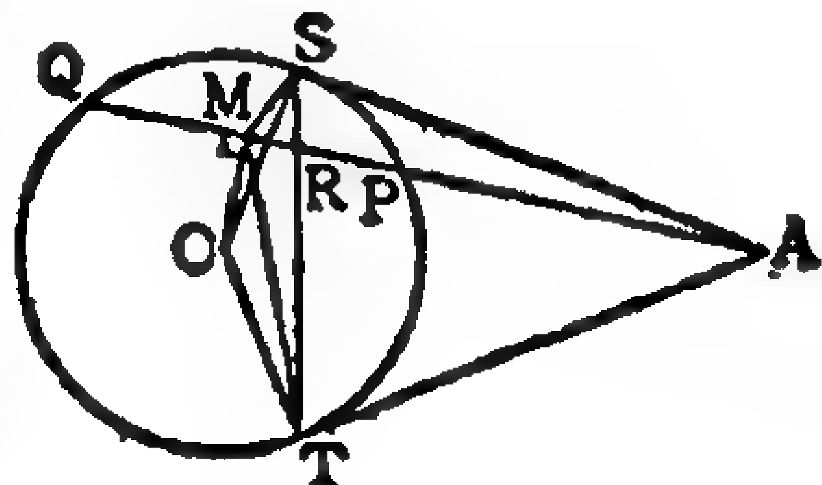
又由 B、E、F、C 共圆，得

$$\angle KCB=\angle BEF.\qquad ②$$

由①、②，得 $\angle PKB=\angle BEF$。

$$\therefore\quad PK\parallel EF.$$

1269. 从定圆外一定点 A 向圆引两条切线，设切点为 S、T，过 A 引任意的直线与圆交于 P、Q，与弦 ST 交于 R，试证明



$$\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AR}.$$

解 欲证明 $\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AR}$，只须证明

$$AR(AP+AQ)=2AP\cdot AQ.\qquad ①$$

设 PQ 的中点为 M，因为

$$AP+AQ=2AM,$$

所以要证明①式成立，只须证明

$$AR\cdot AM=AP\cdot AQ.\qquad ②$$

事实上，设圆心为 O，则

$$\angle OMA=90^\circ=\angle OSA=\angle OTA.$$

由此可得，O、M、S、A、T 五点共圆。

$$\because\quad \angle SMA=\angle STA=\angle AST,$$

$$\therefore\quad \angle SMA=\angle ASR.$$

从而得出，AS 切 $\triangle SMR$ 的外接圆于 S。

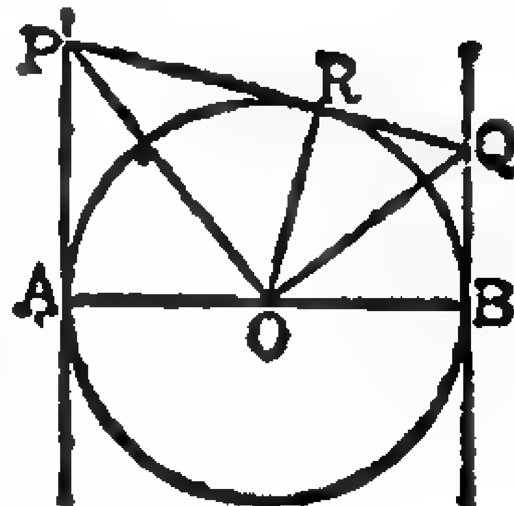
$$\therefore\quad AS^2=AR\cdot AM.$$

又 $$AP\cdot AQ=AS^2.$$

$$\therefore\quad AP\cdot AQ=AR\cdot AM.$$

由此即可得到所要证明的等式。

1270. 设圆的直径为 AB，过 A、B 作切线与圆上任一点 R 处的切线分别相交于 P、Q，证明以 PR、QR 为邻边的矩形的面积一定。



解 设圆心为 O，连结 OP、OR、OQ，则 OP、OQ 分别为 $\angle P$、$\angle Q$ 的平分线。

而 $AP\parallel BQ$，$\quad\therefore\quad \angle P+\angle Q=180^\circ.$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\angle P+\frac{1}{2}\angle Q=90^\circ.$$

由此可得，$\quad \angle POQ=90^\circ.$

又 $OR\perp PQ.\quad\therefore\quad \triangle POR\backsim\triangle OQR.$

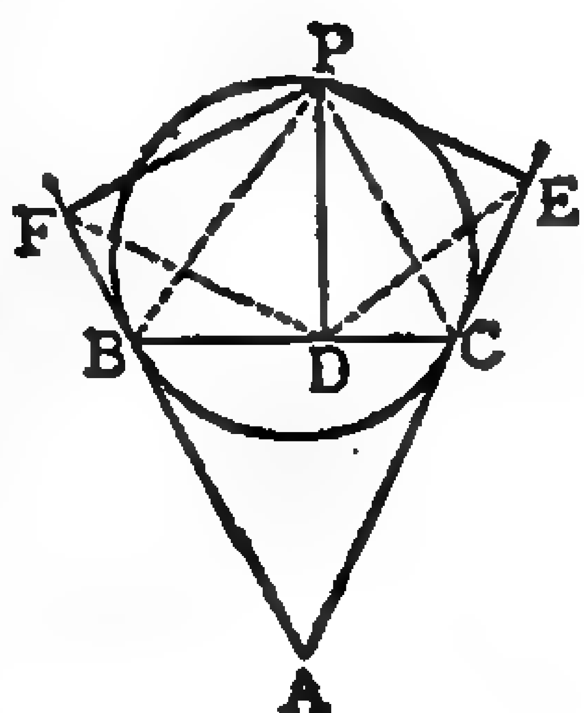
$$PR:OR=OR:QR.$$

$$\therefore\quad OR^2=PR\cdot QR.$$

而 OR 是定圆的半径，它的长度是定值。

因此，$PR\cdot QR$ 的值也是定值。

1271. 设过圆的弦 BC 的两端所引的切线交于一点 A，从圆上任一点 P 向 BC、CA、AB 所作垂线分别为 PD、PE、PF，则 $PD^2=PE\cdot PF$。



解 连结 PB、PC、DE、DF，则四边形 $PDBF$ 及 $PDCE$ 都是圆内接四边形。又因为 AB、AC 是切线，所以

$$\angle FPD=\angle DBA=\angle DCA=\angle DPE.$$

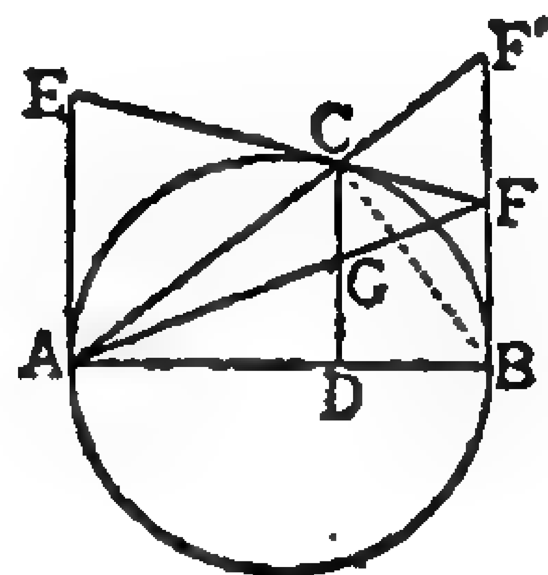
又 $\angle PFD=\angle PBD=\angle PCE=\angle PDE.$

$$\therefore\quad \triangle PDE\backsim\triangle PFD,$$

$$\therefore\quad PE:PD=PD:PF,$$

即 $$PD^2=PE\cdot PF.$$

1272. 过圆上一点 C 向直径 AB 作垂线 CD，过点 C 作切线与过点 A、B 的切线分别交于点 E、F，则 AF、BE、CD 相交于一点。

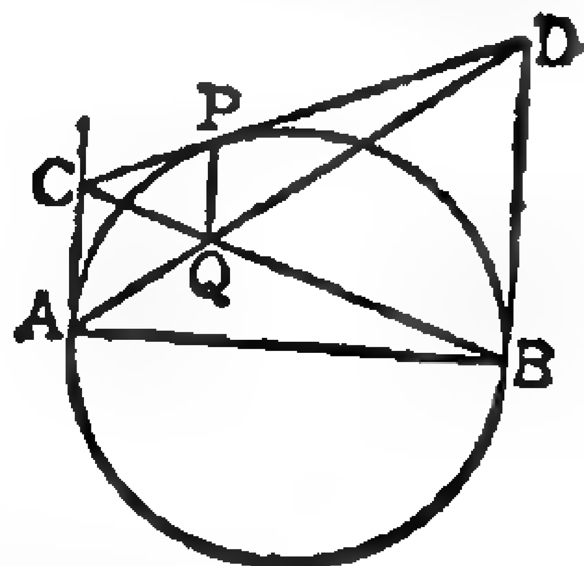


解 延长 BF、AC，设它们相交于点 F'，则 $\angle F'CB=90°$，且 $CF=FB$。

所以 F 是直角三角形 $F'CB$ 的斜边的中点。

而 $CD\parallel F'B$。所以 AF 与 CD 的交点 G 是 CD 的中点。同理可得，BE 也经过 CD 的中点。

1273. 过圆上一点 P 所引的切线与过直径 AB 的两端所引的切线分别交于 C、D，又四边形 $ACDB$ 的对角线交点为 Q，则直线 PQ 与 AC 平行。



解 $\because\quad AC\parallel BD,$

$$\therefore\quad \triangle QAC\backsim\triangle QDB.$$

$$\therefore\quad QA:AC=QD:BD.$$

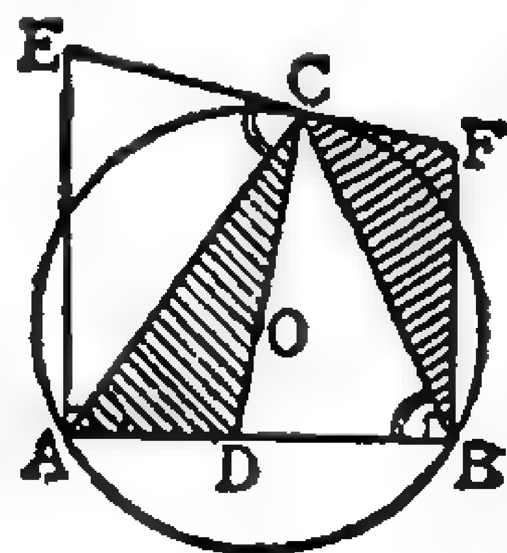
又 $$AC=CP,\ BD=PD.$$

$$\therefore\quad QA:CP=QD:PD.$$

从而得出，$PQ\parallel AC$。

1274. 过圆 O 的弦 AB 的两端引 AB 的垂线与 $\widehat{AB}$ 上任一点 C 的切线分别相交于 E、F，过 C 的半径与弦 AB 的交点为 D，则 $CE\cdot CF=DA\cdot DB$，$CD^2=EA\cdot FB$。

解 因为 $CD\perp EF$，且 $\angle DBF=90°$，所以四边形 $CDBF$ 是圆内接四边形，



$\therefore\quad \angle F=\angle ADC.$ ①

又 CF 是圆的切线，

$\therefore\quad \angle FCB=\angle CAD.$ ②

由①、②，得 $\triangle CFB\backsim\triangle ADC$。

$$\therefore\quad \frac{BF}{CD}=\frac{BC}{AC}=\frac{CF}{AD}.\qquad ③$$

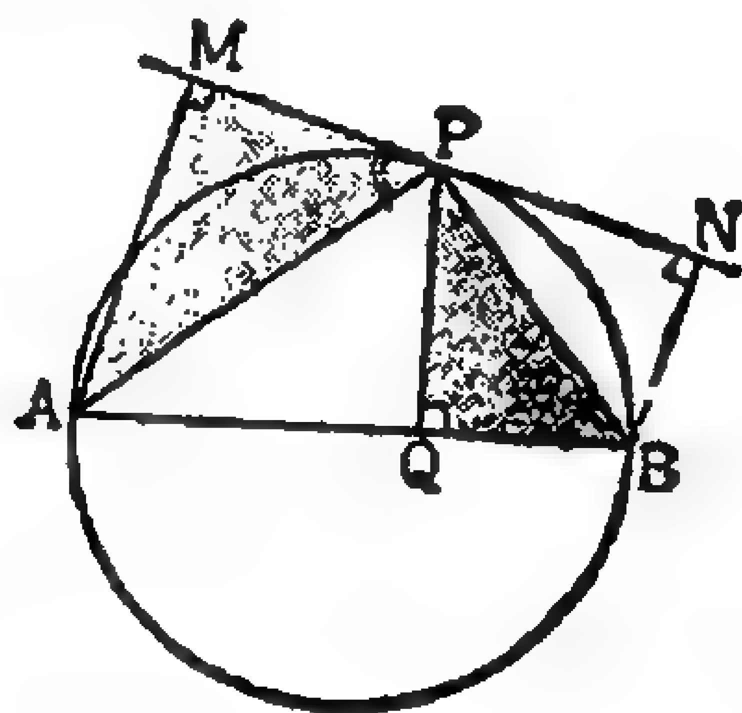
同理可得，$\triangle AEC\backsim\triangle CDB$。

$$\therefore\quad \frac{BC}{AC}=\frac{DB}{EC}=\frac{CD}{AE}.\qquad ④$$

由③、④，得 $CE\cdot CF=DA\cdot DB$;

$$CD^2=EA\cdot FB.$$

1275. 从圆上的一点 P 向直径 AB 引垂线，垂足为 Q，从 A、B 向过 P 点的切线作垂线，垂足分别为 M、N，试证 $AQ\cdot BQ=AM\cdot BN$。



解 在 $\triangle AMP$、$\triangle PQB$ 中，

$$\angle M=\angle Q(\text{直角}),$$

$$\angle MPA=\angle PBQ,$$

$$\therefore\quad \triangle AMP\backsim\triangle PQB.$$

$$\therefore\quad AM:PQ=PA:PB.\qquad ①$$

同理可得，$\triangle PBN\backsim\triangle APQ$。

$$\therefore\quad PQ:BN=PA:PB.\qquad ②$$

由①、②，得 $AM:PQ=PQ:BN$。

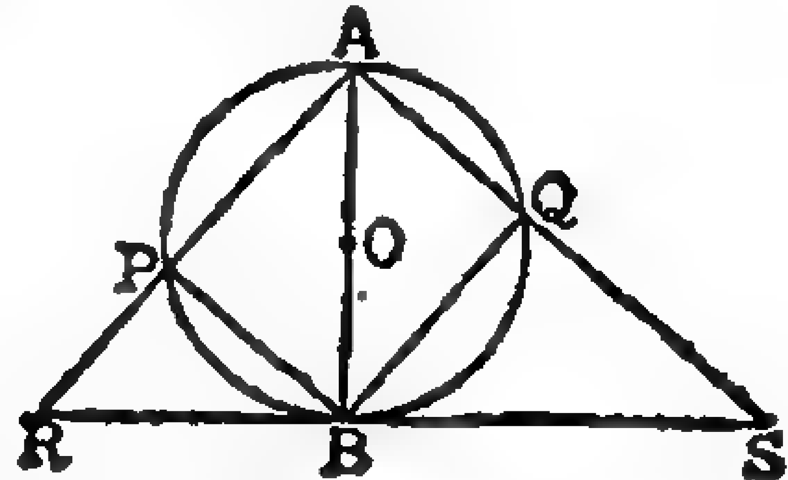
$$\therefore\quad AM\cdot BN=PQ^2.$$

而 $\angle APB=90°$，$PQ\perp AB$。

$$\therefore\quad PQ^2=AQ\cdot QB.$$

$$\therefore\quad AM\cdot BN=AQ\cdot QB.$$

1276. 圆上两个动点 P、Q，分别从圆的直径 AB 两端 A、B 以等速同方向沿圆移动，AP、BQ 与过点 B 的切线分别交于点 R、S，试证 BR 与 BS 是按反比例变化。



解 因为 P、Q 是以等速同方向运动的点，所以 $\widehat{AP}=\widehat{BQ}$。

$$\therefore\quad \angle ABP=\angle BAQ.$$

因为 AB 是直径，所以 $\angle APB=90°$.

从而得出，$\angle PAB+\angle ABP=90°$.

$$\therefore\quad \angle PAB+\angle BAQ=90°,$$

即 $$\angle RAS=90°.$$

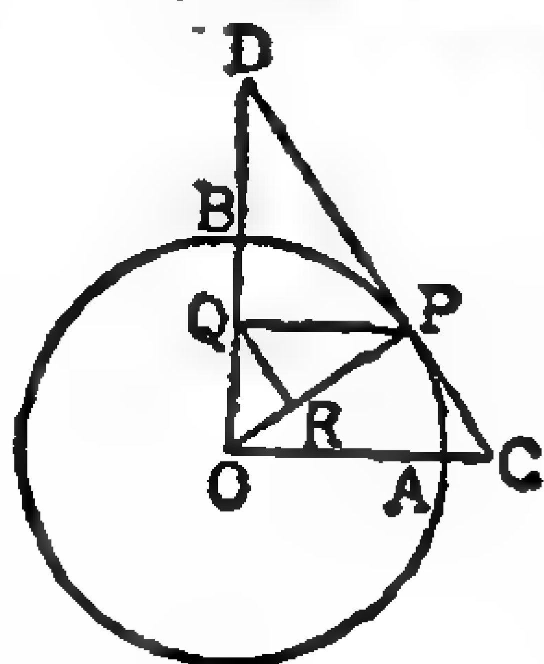
由此可得，$\triangle ARS$ 是顶角 A 为直角的直角三角形。因为 AB 是斜边 RS 上的垂线，所以 AB 是 BR 与 BS 的比例中项，即

$$AB^2=RB\cdot BS.$$

又 AB 是已知圆的直径，它是定长的线段，即它的长度是定值。所以 RB 与 BS 是按反比例变化。

1277. 设圆的半径 OA、OB 互相垂直．过 $\widehat{AB}$ 上的一点 P 的切线与 OA、OB 的延长线分别交于 C、D，从 P 向 OB 引垂线 PQ，从 Q 向 OP 引垂线 QR，则

$$CD\cdot QR=OP^2.$$



解　显然，

$$\triangle COD\backsim\triangle OQP.$$

$$\therefore\quad CD:OP=OC:OQ. \qquad ①$$

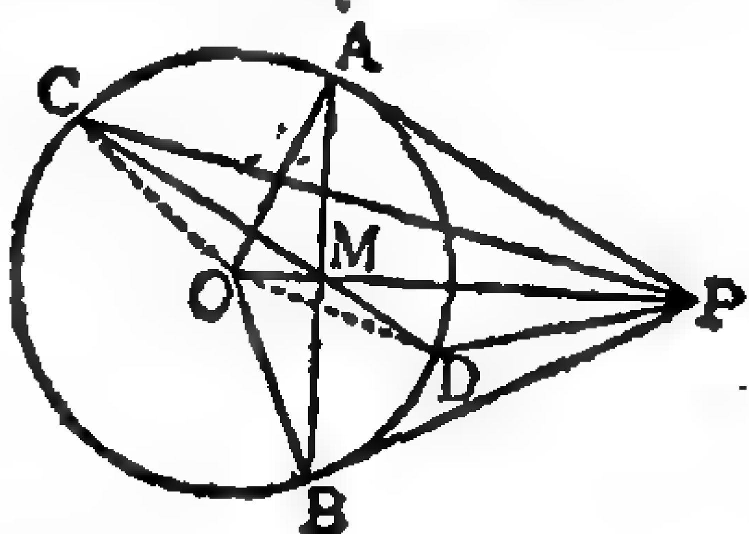
又 $$\triangle OPC\backsim\triangle QRO,$$

$$\therefore\quad OP:QR=OC:OQ. \qquad ②$$

由①、②，得 $CD:OP=OP:QR$,

$$\therefore\quad CD\cdot QR=OP^2.$$

1278. 设圆 O 的弦 AB 的两端的切线相交于点 P，过 AB 的中点 M 引任一弦 CD，则 OP 是 $\angle CPD$ 的平分线。



解　由 M 是 AB 的中点，可知点 O、M、P 在一条直线上。

又 $\angle OAP=90°=\angle OBP$，所以 O、A、P、B 共圆。

$$\therefore\quad OM\cdot MP=MA\cdot MB. \qquad ①$$

又

$$MA\cdot MB=MC\cdot MD. \qquad ②$$

由①、②，得 $MC\cdot MD=OM\cdot MP$.

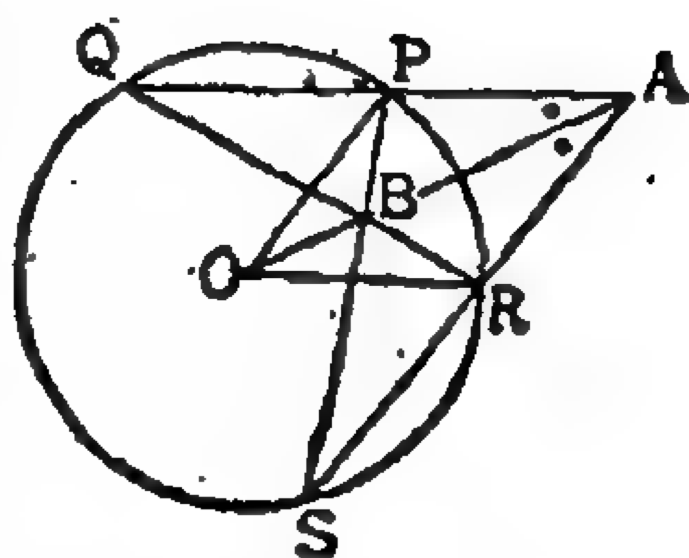
由此可知，四边形 $CODP$ 是圆内接四边形。

而　　$CO=OD$.　$\therefore\ \widehat{CO}=\widehat{OD}$.

$$\therefore\quad \angle CPO=\angle DPO,$$

即 OP 是 $\angle CPD$ 的平分线。

1279. 过以 O 为中心的定圆外一点 A，引两条直线 APQ、ARS，使它们与 AO 所夹的角相等，并分别与圆相交于 P、Q 及 R、S，则 PS、QR 的交点是定点。



解　由 $\angle QAO=\angle SAO$，可知 AO 是圆 O 的对称轴，PS、QR 的交点在 OA 上。

设这一点为 B，则

$$\angle POR=2\angle POB=2\angle PQB.$$

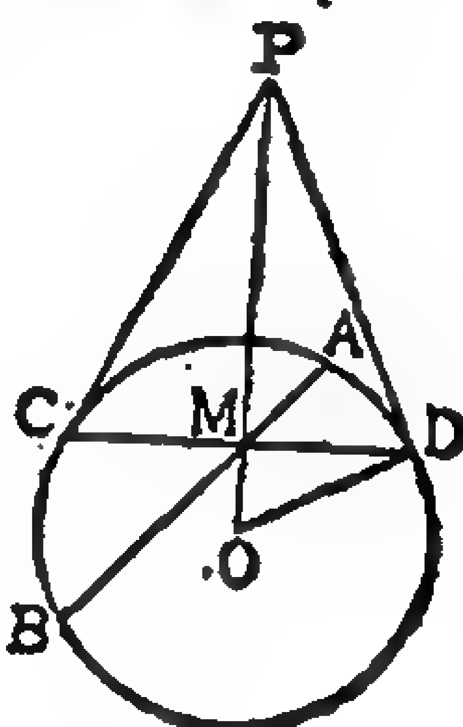
$$\therefore\quad \angle POB=\angle PQB.$$

因此，P、Q、O、B 在同一圆上。于是

$$AB\cdot AO=AP\cdot AQ.$$

而 $AP\cdot AQ$ 等于从 A 向圆所引切线长的平方，设为 m^2，则 $AB\cdot AO=m^2$。而 m^2 及 AO 是一定的，所以 AB 是定长。从而得出，点 B 是定点。

1280. AB 为圆 O 的定弦，从圆外一点 P 向圆引两条切线 PC、PD，若弦 AB 平分弦 CD，则点 P 在一个定圆上。



解　设两弦 AB、CD 的交点为 M。根据假设，得

$$MD=MC.$$

$$\therefore\quad MD^2=MA\cdot MB. \qquad ①$$

但是，在 $\triangle POD$ 中，

$$\angle D=90°,$$

$$\therefore\quad MD^2=MP\cdot MO. \qquad ②$$

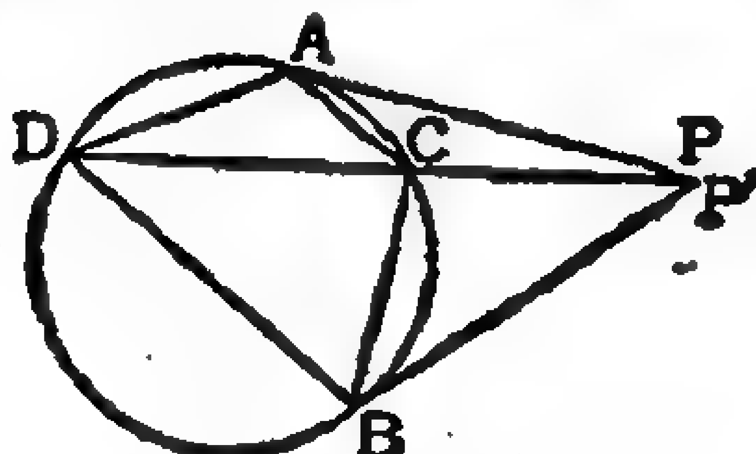
由①、②，得 $MA\cdot MB=MP\cdot MO$.

由此可知，P、A、O、B 共圆。而点 A、B 是定弦的两端，点 O 是定圆的圆心，所以圆 $PAOB$ 是一个定圆。从而得出，点 P 是在过三定点 A、O、B 的定圆上。

1281. 过圆上的定点 A、B 分别引圆的切线，又引割线 CD，使

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD},$$

则这两条切线和这条割线相交于一点。



解　设在点 A 的切线与 DC 的延长线交于一点 P，则

$$\triangle PAC\backsim\triangle PDA.$$

$$\therefore\ \frac{AC}{AD}=\frac{AP}{DP}=\frac{CP}{AP}.$$

$$\therefore\ \frac{AC^2}{AD^2}=\frac{CP}{DP}. \qquad ①$$

同理，设在点 B 的切线与 DC 的延长线交于点 P'，则

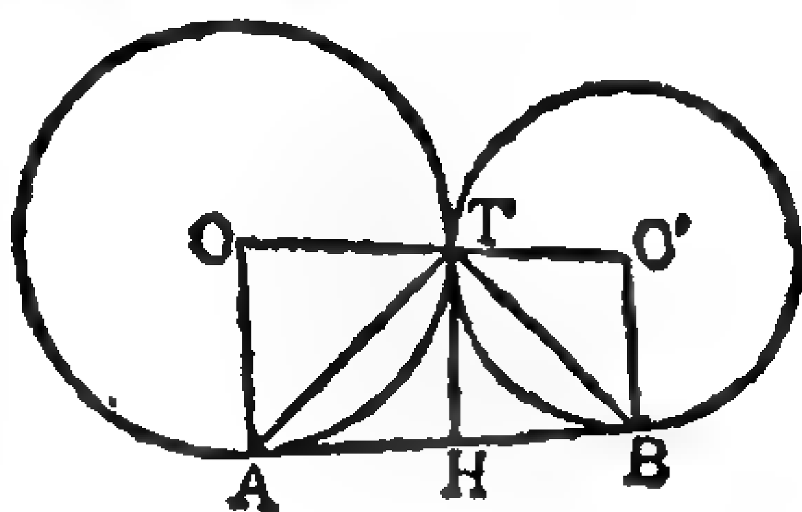
$$\frac{BC^2}{BD^2}=\frac{CP'}{DP'}. \qquad ②$$

根据假设，得 $\frac{AC^2}{AD^2}=\frac{BC^2}{BD^2}$.

由①、②，得 $\frac{CP}{DP}=\frac{CP'}{DP'}$.

由此可得，点 P 与点 P' 重合。

1282. 设半径为 R、r 的两圆相互外切于点 T，引两圆的外公切线 AB，证明



$$AT:TB:AB=\sqrt{R}:\sqrt{r}:\sqrt{R+r}.$$

解 由 $AO\parallel BO'$，可得 $\angle ATB=90°$.

若从 T 向 AB 引垂线 TH，则在直角三角形 ATB 中，

$$TA^2:TB^2=AH:HB. \qquad ①$$

$$\because\ HT\parallel AO\parallel BO',$$

$$\therefore\ AH:HB=OT:TO'=R:r. \qquad ②$$

由①、②，得 $TA^2:TB^2=R:r$.

$$\therefore\ TA:TB=\sqrt{R}:\sqrt{r}.$$

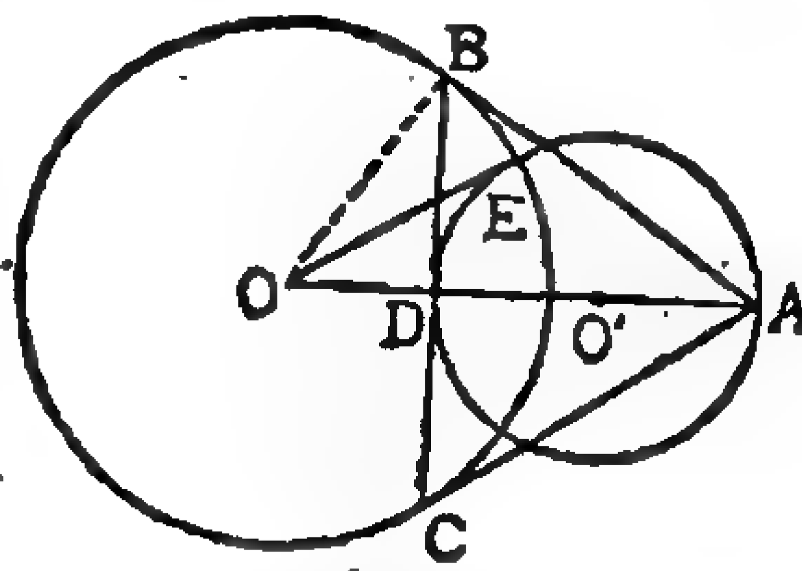
设 $TA=\sqrt{R}m$，$TB=\sqrt{r}m$，则

$$AB^2=TA^2+TB^2=Rm^2+rm^2=(R+r)m^2.$$

$$\therefore\ AB=m\sqrt{R+r}.$$

$$\therefore\ TA:TB:AB=\sqrt{R}:\sqrt{r}:\sqrt{R+r}.$$

1283. 从圆 O 外一点 A 引两条切线 AB 与 AC，设 OA 与 BC 的交点为 D，以 AD 为直径的圆 O' 与圆 O 的一个交点为 E，则 OE 是圆 O' 的切线。



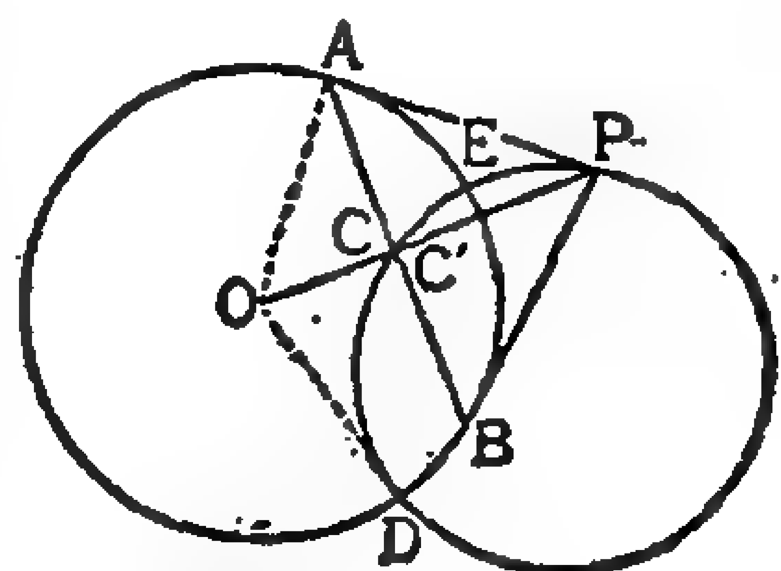
解 $\because\ \angle OBA=90°$，$BD\perp OA$，

$$\therefore\ OB^2=OD\cdot OA.$$

而 $OB=OE$. $\therefore\ OE^2=OD\cdot OA$.

由此可得，OE 是圆 O' 在点 E 处的切线。

1284. 设 P 是与圆 O 垂直相交于 D、E 的另一圆上的一点，从 P 向圆 O 引切线 PA、PB，若 OP 与圆 PED 的交点为 C，则 A、C、B 在一条直线上。



解 因为两圆垂直相交于点 D，所以

$$OD^2=OC\cdot OP.$$

设 AB 与 OP 相交于 C'.

$$\because\ \angle OAP=90°,\ AC'\perp OP,$$

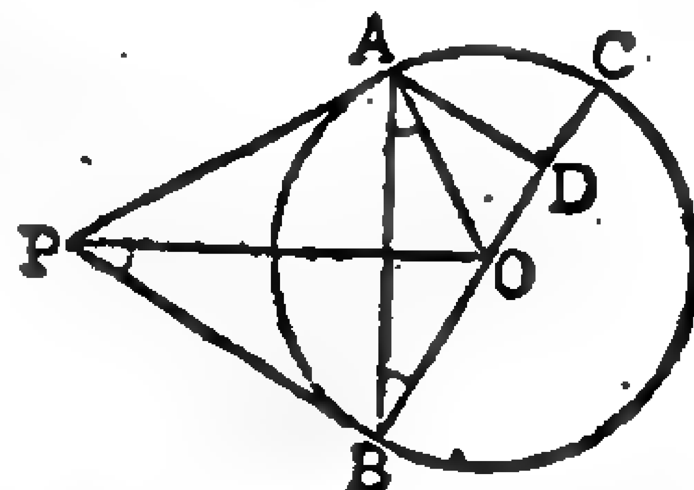
$$\therefore\ OA^2=OC'\cdot OP.$$

$$\therefore\ OC\cdot OP=OC'\cdot OP.$$

由此可知 C' 与 C 相重合，即 A、C、B 在一条直线上。

1285. 若从一点 P 向圆 O 引切线 PA、PB，从 A 向过点 B 的直径 BC 作垂线 AD，则

$$\frac{PB}{BO}=\frac{BD}{AD}.$$



解 显然，四边形 $PBOA$ 是圆内接四边形。所以，在 $\triangle PBO$ 与 $\triangle BDA$ 中，

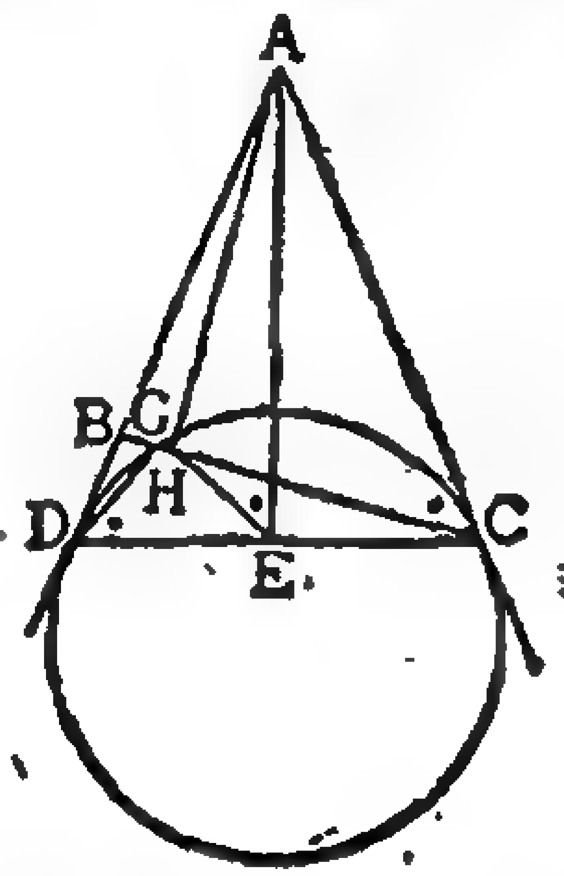
$$\angle BPO=\angle BAO=\angle ABO,$$

且 $$\angle PBO=90°=\angle BDA,$$

$$\therefore\ \triangle PBO\backsim\triangle BDA.$$

$$\therefore\ \frac{PB}{BO}=\frac{BD}{AD}.$$

1286. 设 $\triangle ABC$ 的边 AC 切一圆于点 C，又 AB 的延长线切这圆于点 D，BC 与圆交于点 G，从点 A 向 BC、CD 分别作垂线 AH、AE，则 $CG:AH=CD:AE$.



解 连结 DG、HE. 因为 AC 是圆的切线，所以

$$\angle ACG=\angle GDC.$$

又 $AH\perp BC$，

$AE\perp DC$，$\therefore\ \angle AHC=90°=\angle AEC$.

由此可知，A、H、E、C 共圆。

$$\therefore\ \angle HAE=\angle GCE,$$

$$\angle AEH=\angle ACG.$$

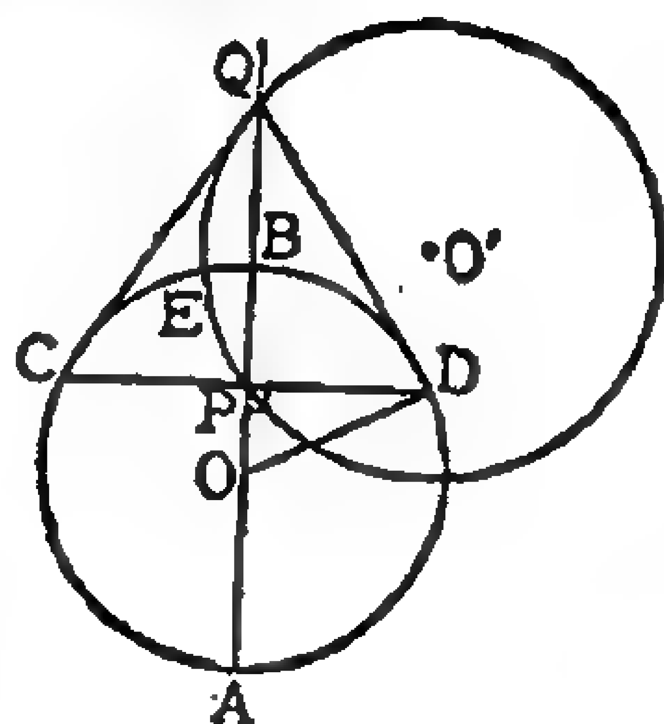
$\therefore \quad \angle AEH=\angle CDG,$

$\therefore \quad \triangle AHE \backsim \triangle CGD.$

$\therefore \quad CG:CD=AH:AE.$

从而得出， $CG:AH=CD:AE.$

1287. 过定圆 O 的任意直径 AB 上一点 P 引与 AB 垂直的弦 CD，设过点 C、D 的切线相交于 Q，过 P、Q 的任意圆与定圆 O 交于点 E，则两圆在点 E 处的切线互相垂直。



解 因为 $\triangle ODQ$ 是直角三角形，$PD\perp OQ$，所以

$$OD^2=OP\cdot OQ.$$

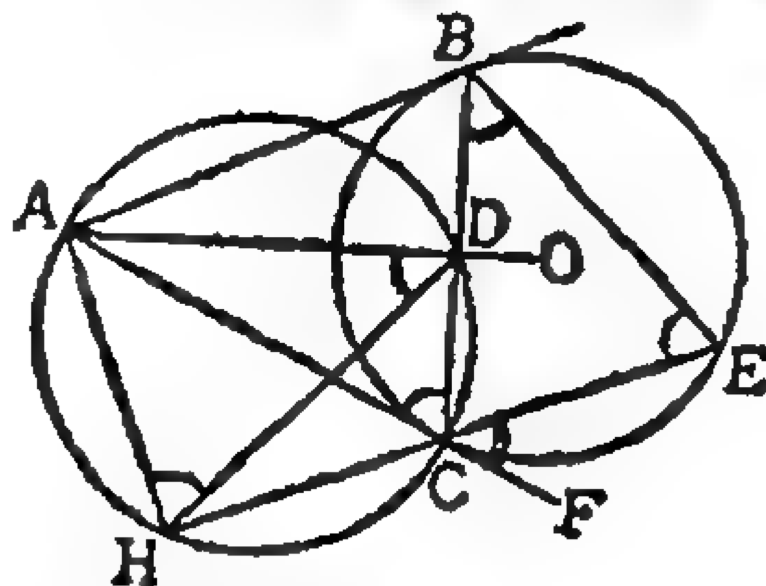
而 $OD=OE$. $\therefore \quad OE^2=OP\cdot OQ.$

由此可知，OE 是经过 P、Q 的任意圆 O' 的切线。

$$\therefore \quad \angle O'EO=90°.$$

从而得出，经过点 E 所作两圆的切线互相垂直。

1288. 从圆 O 外一点 A 向圆 O 引两条切线 AC、AB. 连结 BC 的弦与 OA 的交点为 D，过 C 引任意弦 CE，从 A 向 CE 或其延长线引垂线，设垂足为 H，则 $\triangle ADH$ 与 $\triangle CBE$ 相似。



解 由 AC 是圆 O 的切线，得

$$\angle ACB=\angle BEC.$$

又 AB 是圆 O 的切线。所以

$$\angle ADC=90°.$$

而根据假设，得 $\angle AHC=90°$.

所以 A、H、C、D 共圆。

$$\therefore \quad \angle AHD=\angle ACD.$$

$$\therefore \quad \angle AHD=\angle BEC. \qquad ①$$

在 AC 的延长线上取一点 F，则

$$\angle ECF=\angle ACH=\angle CBE,$$

$$\angle ACH=\angle ADH,$$

$$\therefore \quad \angle ADH=\angle CBE. \qquad ②$$

由①、②，得 $\triangle ADH \backsim \triangle CBE$.

1289. 设 OA、OB 为圆 O 的互相垂直的两条半径，过 $\overset{\frown}{AB}$ 上的任一点 C 所作的切线与 OA、OB 的交点分别为 D、E，从 C 向 OD 引垂线 CF，则 $\triangle OAB$ 的面积是 $\triangle OCF$ 的面积与 $\triangle ODE$ 的面积的比例中项。

解 从 F 向 OC 引垂线 FG，则

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB,$$

$$S_{\triangle OCF}=\frac{1}{2}OC\cdot FG.$$

$$\because \quad OC=OA=OB,$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle OCF}}{S_{\triangle OAB}}=\frac{OC\cdot FG}{OA\cdot OB}=\frac{FG}{OC}. \qquad ①$$

同理可得，

$$\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ODE}}=\frac{OA\cdot OB}{OC\cdot DE}=\frac{OC}{DE}. \qquad ②$$

又 $\triangle OFG \backsim \triangle EOC$, $\therefore \quad \dfrac{FG}{OC}=\dfrac{OF}{EO}$.

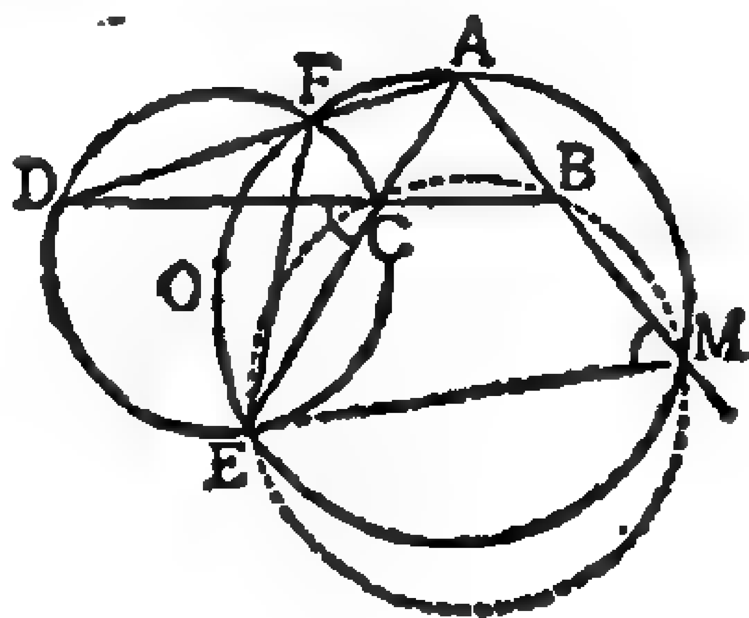
$\triangle OCF \backsim \triangle EDO$, $\therefore \quad \dfrac{OF}{EO}=\dfrac{OC}{ED}$.

$$\therefore \quad \frac{FG}{OC}=\frac{OC}{DE}.$$

由①、②，得 $\dfrac{S_{\triangle OCF}}{S_{\triangle OAB}}=\dfrac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ODE}}$.

即 $\triangle OAB$ 的面积是 $\triangle OCF$ 的面积与 $\triangle ODE$ 的面积的比例中项。

1290. 设定圆 O 外有两定点 A、B，过 B 引任意割线 BCD，AC、AD 与圆的另一个交点分别为 E、F，则圆 AEF 过定点。



解 设圆 AEF 与 AB 的交点为 M，则 $\angle AME=\angle DFE=\angle DCE$.

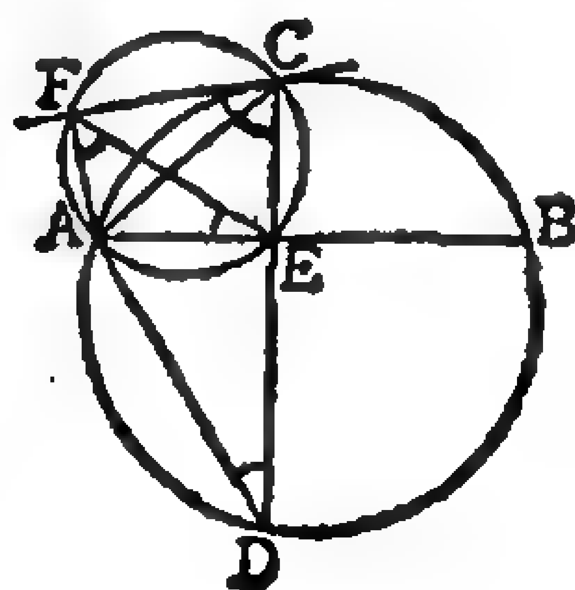
由此可得，C、E、M、B 共圆。

$$\therefore \quad AB\cdot AM=AC\cdot AE\text{（一定）}.$$

由此可知，AM 是定长。所以 M 是定点，即圆 AEF 过定点 M.

1291. 设两弦 AB、CD 垂直相交于点 E，从 A 向过 C 点的切线引垂线 AF，则

$$\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{CD}.$$



解 因为

$\angle AFC=90°=\angle AEC,$

所以四边形 $AFCE$ 是圆内接四边形.

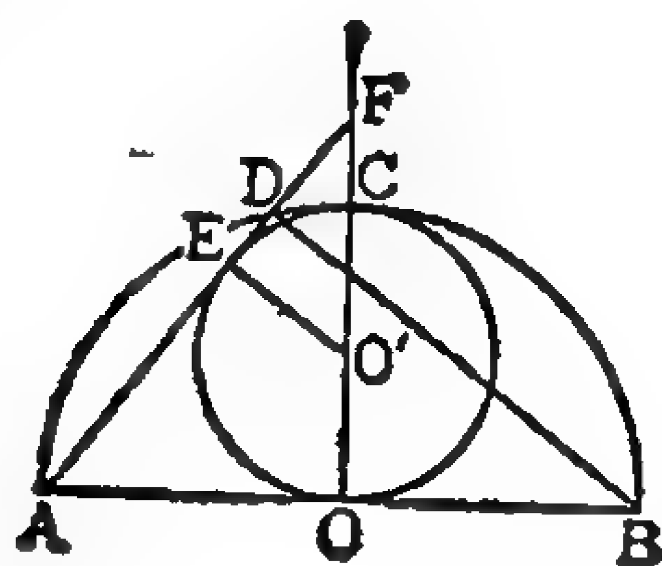
$$\therefore \quad \angle D=\angle ACF=\angle AEF.$$

又 $$\angle AFE=\angle ACD.$$

$$\therefore \quad \triangle AEF\backsim\triangle ADC.$$

从而得出，$$\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{CD}.$$

1292. 设 AB 为半圆的直径，半径 OC 垂直于 AB，以 OC 为直径作圆 O'，从 A 引圆 O' 的切线 AE，延长 AE 与半圆的交点为 D，则 $\frac{AD}{BD}=\frac{3}{4}$.



解 设 OC 与 AD 的延长线的交点为 F，$O'C=r$，$O'F=x$，则 $\triangle FO'E\backsim\triangle FAO$.

$$\therefore \quad \frac{OF}{OA}=\frac{EF}{EO'},$$

即 $$\frac{x+r}{2r}=\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{r}.$$

解这个方程，得 $x=\frac{5}{3}r$.

从而得出 $$OF=\frac{8}{3}r.$$

又 $$\triangle FAO\backsim\triangle BAD.$$

$$\therefore \quad \frac{AD}{BD}=\frac{AO}{OF}=\frac{2r}{\frac{8}{3}r}=\frac{3}{4}.$$

10. 直径、弦的比例线段

1293. 从直径 AB 的一端 B 引圆的切线，两弦 AC、AD 的延长线与这切线分别相交于 P、Q，则

$$AC:AD=AQ:AP.$$

解 因为 $\triangle ABP$ 是直角三角形，又 $BC\perp AP$，

所以 $$AC\cdot AP=AB^2.$$

同理可得，$AD\cdot AQ=AB^2$.

$$\therefore \quad AC\cdot AP=AD\cdot AQ.$$

由此可得，$AC:AD=AQ:AP$.

1294. 设点 P 是半圆 $ACDB$ 上两弦 AD、BC 的交点，AB 为直径，则

$$AP\cdot AD+BP\cdot BC=AB^2.$$

解 从 P 向 AB 作垂线 PH，则

$$\angle ADB=90^\circ=\angle PHB.$$

所以，P、D、B、H 在同一圆上.

$$\therefore \quad AP\cdot AD=AH\cdot AB. \quad ①$$

同理可得，A、C、P、H 也在同一圆上.

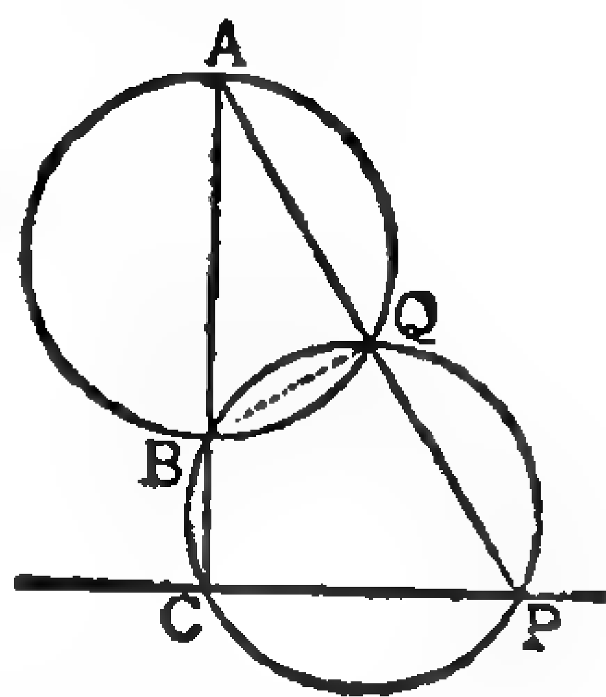
$$\therefore \quad BP\cdot BC=BH\cdot AB. \quad ②$$

由①+②，得

$$AP\cdot AD+BP\cdot BC=AB\cdot(AH+BH),$$

即 $$AP\cdot AD+BP\cdot BC=AB^2.$$

1295. 延长圆的直径 AB 到定点 C，在垂直于 AC 的直线上取一点 P，设 AP 与圆的交点为 Q，则 $AP\cdot AQ$ 一定.

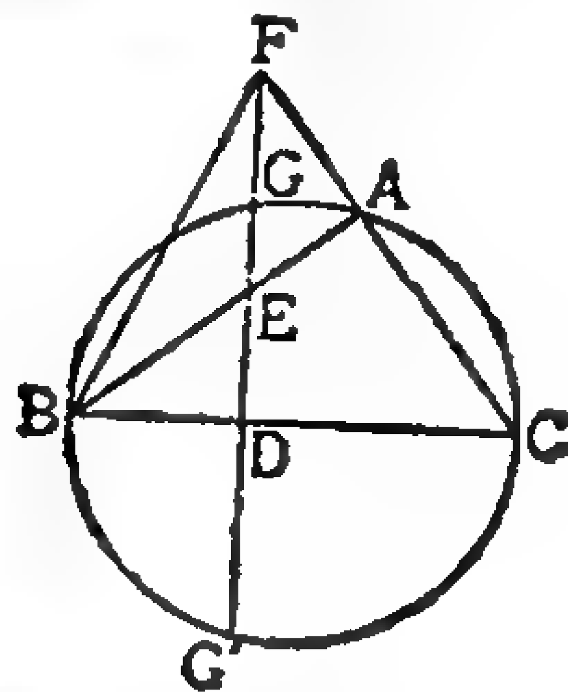


解 由 AB 是直径，得 $\angle AQB=90^\circ$.

从而得出，$\angle BQP=90^\circ$. 而 $\angle BCP=90^\circ$. 所以，B、C、P、Q 共圆.

由此可得 $AP\cdot AQ=AC\cdot AB=$定值.

1296. 设以 BC 为直径的圆上的任一点 A，过 BC 上任意一点 D 引垂直于 BC 的直线与 BA、CA 及圆的交点分别为 E、F、G，则 DG 是 DE 及 DF 的比例中项.



解 因为四边形 $ADBF$、$AEDC$ 都是圆内接四边形，所以

$$\begin{aligned}DG^2&=BD\cdot DC=BD\cdot(BC-BD)\\&=BD\cdot BC-BD^2=BE\cdot BA-BD^2\\&=BE\cdot(BE+EA)-BD^2\\&=BE\cdot EA+BE^2-BD^2\\&=DE\cdot EF+DE^2\\&=DE\cdot(EF+DE)=DE\cdot DF,\end{aligned}$$

即 $$DG^2=BE\cdot DF.$$

由此可知，DG 是 DE、DF 的比例中项.

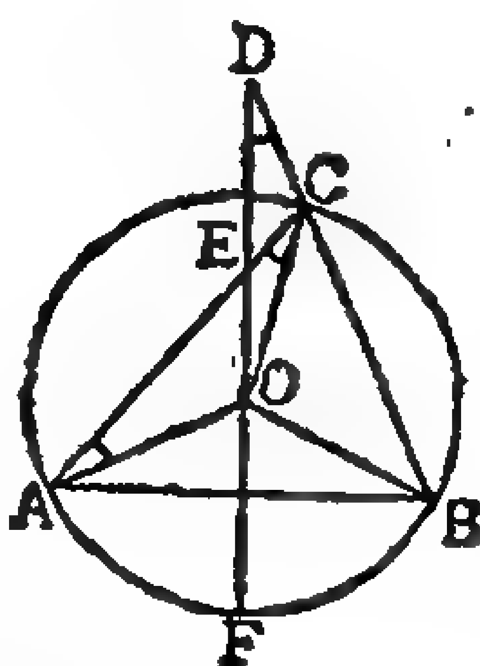
1297. 已知圆 O 的弦 AB，在优弧 AB 上取一点 C，设 BC 与 AB 的垂直平分线的交点为 D，AC 与 OD 的交点为 E，则

$$OD\cdot OE=OC^2.$$

解 ∵ $\angle AOF=\frac{1}{2}\angle AOB$,

$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$,

∴ $\angle AOF=\angle ACB$.



由此可得,

$\angle DCA=\angle DOA$.

所以 D、C、O、A 四点共圆。

∴ $\angle OAC=\angle ODC$.

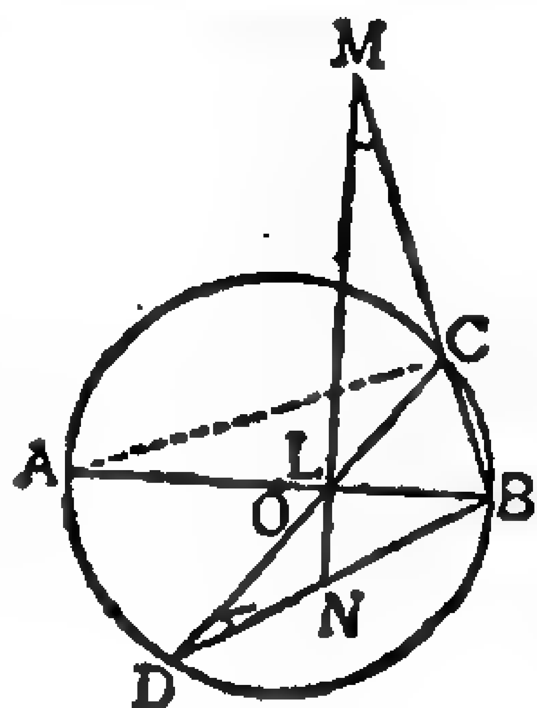
而 $OA=OC$.

∴ $\angle OCA=\angle OAC=\angle ODC$.

由此可得, OC 是 $\triangle DCE$ 的外接圆的切线, 切点为 C.

∴ $OE\cdot OD=OC^2$.

1298. 设定点 L 在定圆 O 的定直径 AB 上, 过 L 引任意弦 CD, 过 L 作 AB 的垂直线与 BC、BD 的交点分别为 M、N, 则 $LM\cdot LN$ 是定值。



解 ∵ $\angle ACB=90°$,

$\angle MLB=90°$,

∴ $\angle M=\angle A=\angle D$.

由此可知, 四点 M、D、N、C 共圆。

∴ $LM\cdot LN=LC\cdot LD$.

∴ $LM\cdot LN=LA\cdot LB$.

而 AB 是定直径, L 是 AB 上的定点, 所以 LA、LB 是定长。

因此 $LM\cdot LN=LA\cdot LB=$定值.

1299. 从圆上的一点 P 向直径 AB 引垂线, 设垂足为 Q, 在 QP 及其延长线上分别取点 D、C, 使 $PQ^2=QD\cdot QC$, 则点 D 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

解 因为 AB 是直径, $PQ\perp AB$, 所以

$PQ^2=AQ\cdot BQ$.

根据假设, 得

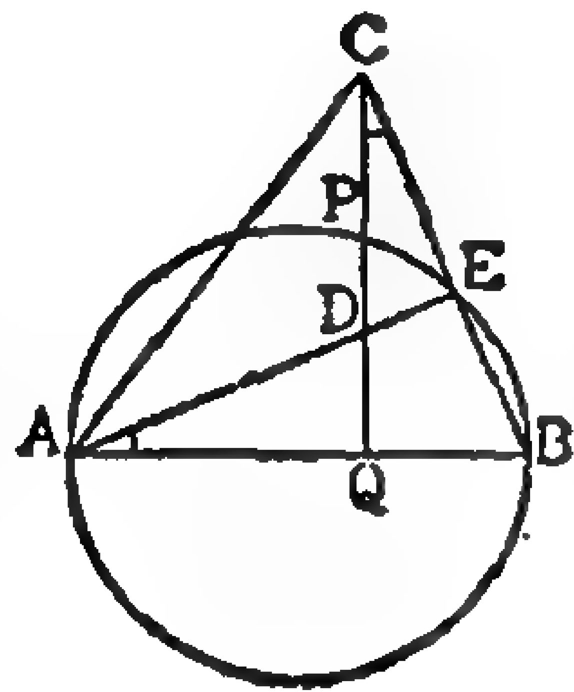
$PQ^2=QD\cdot QC$.

∴ $AQ\cdot BQ=QD\cdot QC$,

即 $AQ:QD=QC:BQ$.

∴ $\triangle AQD\backsim\triangle CQB$.

∴ $\angle BAD=\angle BCQ$.

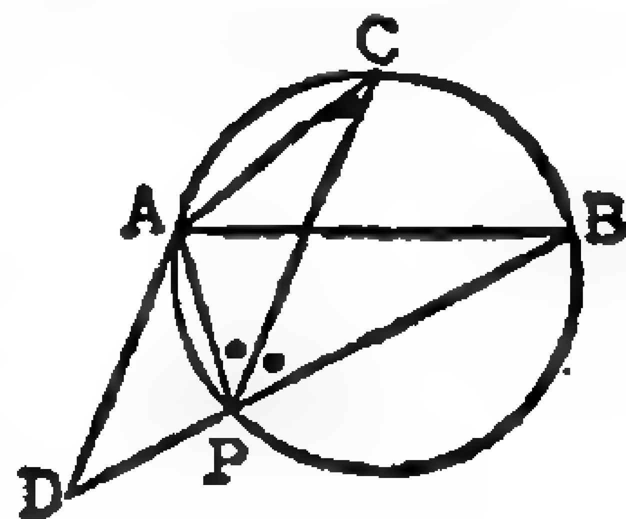


由此可知, 若 AD 的延长线与 BC 的交点为 E, 则

$\angle AEC=\angle AQC=90°$.

所以, D 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

1300. 设 A、B 为圆上的两定点, P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上的任一点, 作弦 PC 平分 $\angle APB$. 过 A 引 PC 的平行线与 BP 的延长线交于点 D, 则 DB 与 PC 的比是定比。



解 在 $\triangle ADB$、$\triangle APC$ 中,

$\angle B=\angle C$. ①

又 PC 是 $\angle APB$ 的平分线, 且 $PC\parallel AD$, 则

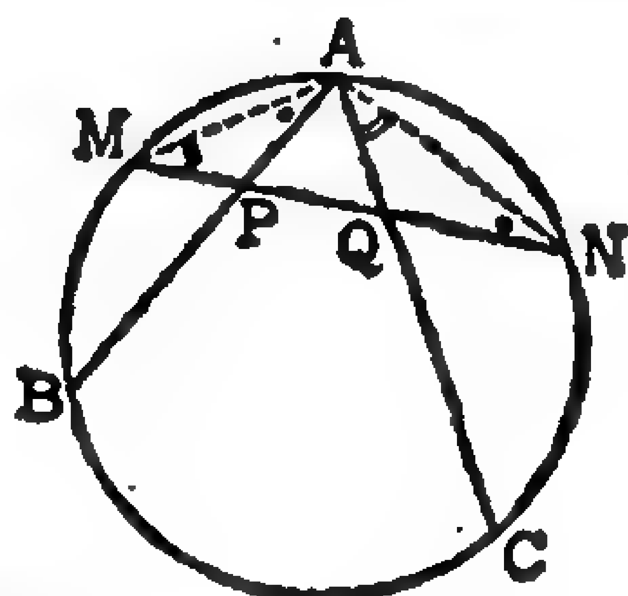
$\angle D=\angle CPB=\angle APC$. ②

由①、②, 得 $\triangle ADB\backsim\triangle APC$.

∴ $BD:PC=AB:AC$. ③

而 AB 是定弦, PC 是 $\angle APB$ 的平分线, C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点, 从而得出, AC 是定长的线段. 所以, 由③可知, DB 与 PC 的比是定比.

1301. 设圆的两弦 AB、AC 的夹角 BAC 是 60°, 连结 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 M 与 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点 N 的线段, 与 AB、AC 的交点分别为 P、Q, 则 PQ 上的正方形与以 MP、QN 为邻边的矩形等积.



解 ∵ $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$, $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NC}$.

∴ $\angle MAB=\angle ANM$,

$\angle AMP=\angle NAQ$.

∴ $\angle APQ=\angle AQP$.

∵ $\angle PAQ=60°$,

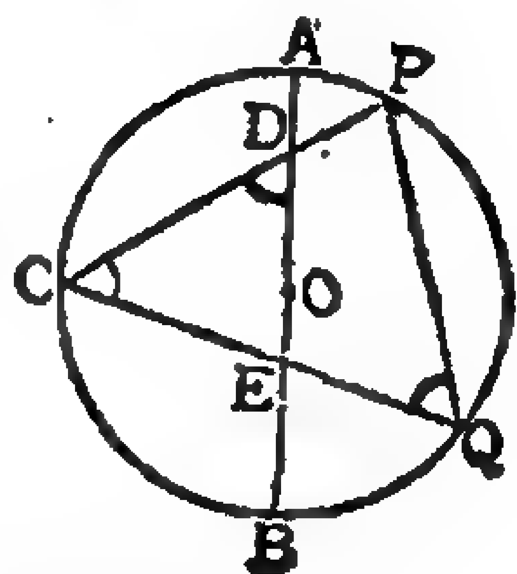
∴ $AP=PQ=QA$. ①

又 $\triangle AMP\backsim\triangle NAQ$(两角相等).

∴ $PA:MP=QN:AQ$.

因此, 由①可得, $PQ^2=MP\cdot QN$.

1302. 设圆 O 的直径为 AB, 半圆弧 ACB 的中点为 C, 引任意动弦 PQ, CP、CQ 与 AB 的交点分别为 D、E, 则 $\triangle CDE\backsim\triangle CQP$.



解　在$\triangle CQP$、$\triangle CDE$中，$\angle C$是公共角，

$$\angle Q=\frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{AP}),$$

$$\angle D=\frac{1}{2}(\widehat{BC}+\widehat{AP}).$$

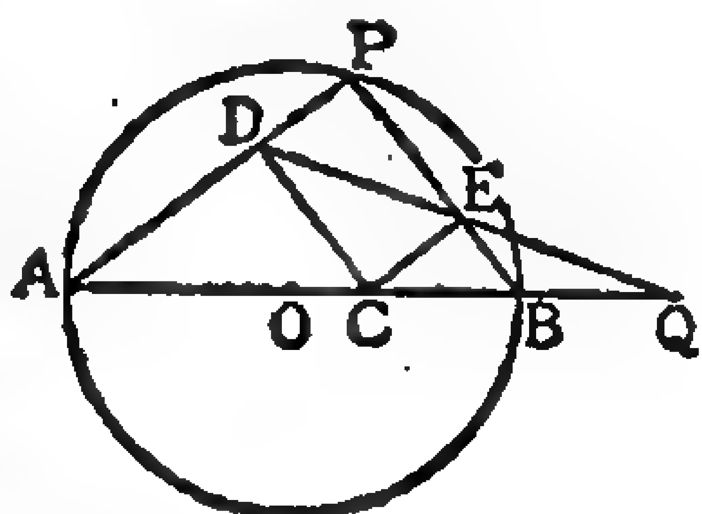
根据假设可知，C是$\widehat{AB}$的中点。所以

$$\widehat{AC}+\widehat{AP}=\widehat{BC}+\widehat{AP}.$$

由此可得，　$\angle Q=\angle D$.

$$\therefore\ \triangle CDE\backsim\triangle CQP.$$

1303.　在定圆O的定直径AB上取一定点C，在圆上取一动点P，从C向PA、PB作垂线，设垂足分别为D、E，则直线DE过一定点。



解　设DE、AB的延长线交于点Q.

$$\because\ PB\parallel DC,\ CE\parallel AP,$$

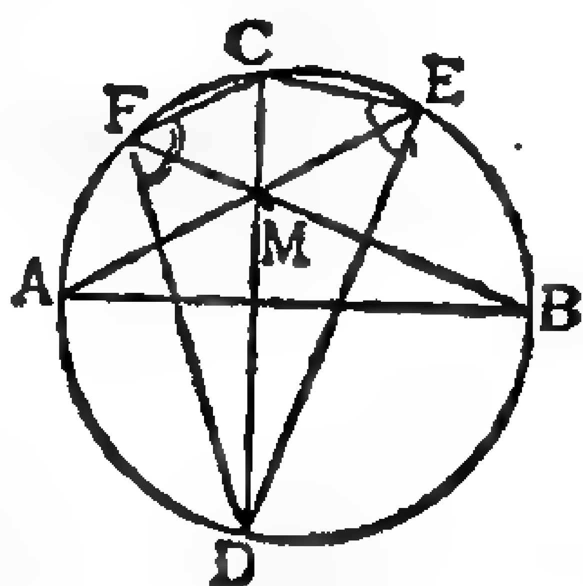
$$\therefore\ \frac{BQ}{CQ}=\frac{BE}{CD}=\frac{BE}{PE}=\frac{BC}{AC}(\text{定比}).$$

由此可知，点Q按定比$\left(\frac{BC}{AC}\right)$外分$CB$，即

$$\frac{BQ}{CQ}=\frac{BC}{AC}.$$

所以，它是定点。即DE过定点Q.

1304.　设AB是圆的直径，弦CD垂直于AB.若在CD上取一点M，AM、BM与圆的另一交点分别为E、F，则$CE\cdot DF=ED\cdot FC$.



解　因为弦CD垂直于直径AB，所以$\widehat{AC}=\widehat{AD}$. 因此，$EM$是$\angle CED$的平分线。

$$\therefore\ CE:ED=CM:MD. \qquad ①$$

同理可得，

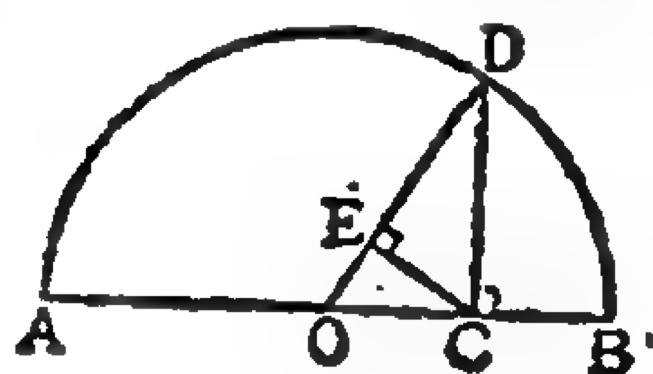
$$FC:DF=CM:MD. \qquad ②$$

由①、②，得$CE:ED=FC:DF$.

所以，　$CE\cdot DF=ED\cdot FC$.

1305.　从半圆的直径AB上的一点C引AB的垂线，这垂线与半圆交于点D，从C向半径OD引垂线CE，则CD是AO与DE的比例中项。

解　因为$\angle DCO=90°$，$CE\perp OD$，所以$\triangle DCO\backsim\triangle DEC$.



$$\therefore\ \frac{OD}{CD}=\frac{CD}{DE}.$$

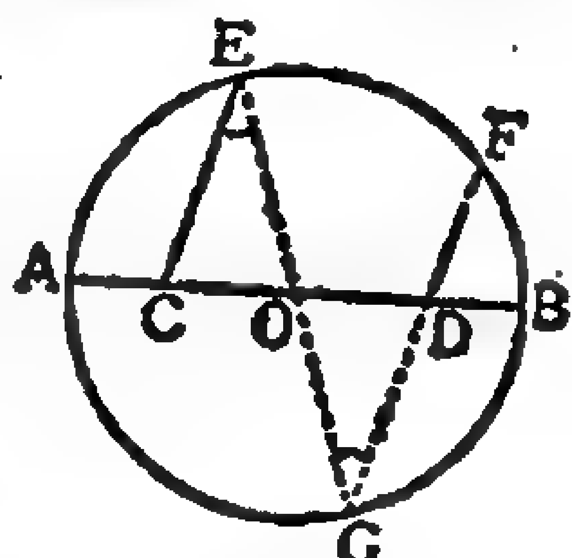
而　$OA=OD$.

$$\therefore\ \frac{AO}{CD}=\frac{CD}{DE}.$$

即CD是AO与DE的比例中项。

1306.　设P是圆O的半径OA上的任一点，从P引OA的垂线与圆O及以OA为直径的半圆的交点分别为B、C，则

$$AB^2=2AC^2.$$



解　设圆O的直径为AD，则

$$\angle ABD=90°.$$

$$\because\ BP\perp AD,$$

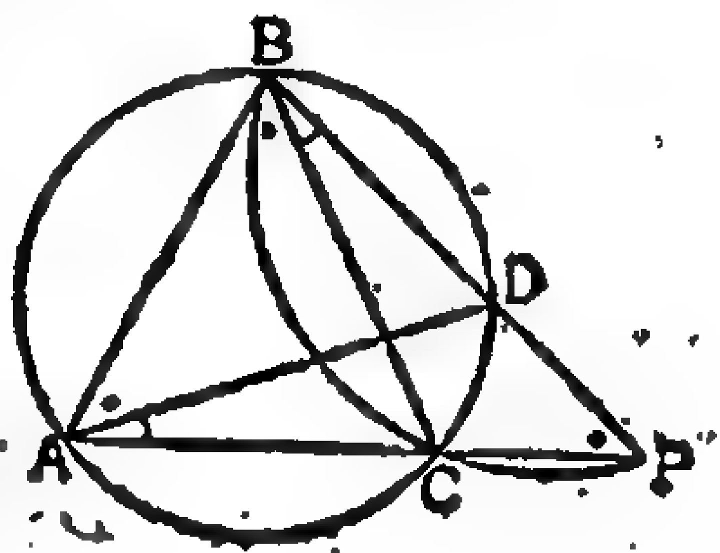
$$\therefore\ AB^2=AP\cdot AD=2AP\cdot AO.$$

同理可得，在$\triangle ACO$中，$\angle OCA=90°$，$CP\perp OA$，

$$\therefore\ AC^2=AP\cdot AO.$$

$$\therefore\ AB^2=2AC^2.$$

1307.　在半圆AEB的直径AB上有到圆心O距离相等的两定点C、D，若从C、D引互相平行的直线与半圆的交点为E、F，则$CE\cdot DF$是定值。



解　设延长EO与圆交于G，连结GD，则$\triangle ODG\cong\triangle OCE$.

$$\therefore\ \angle OEC=\angle OGD.$$

$$\therefore\ DG\parallel CE.$$

因此，点F、D、G共线。

又　　$DG=CE$,

$$\therefore\ CE\cdot DF=DG\cdot DF=AD\cdot BD.$$

由此可知，$CE\cdot DF$是定值。

1308.　在圆上有定点A及动点B，弦AC、BD或其延长线的交点为P，且使

$$AP\cdot AC=BP\cdot BD=AB^2,$$

则点B在怎样的位置上？点P是

在圆内，还是在圆外呢？

解 由假设 $AP\cdot AC=AB^2$ 可知，AB 与 $\triangle BCP$ 的外接圆在点 B 相切.

$\therefore\quad \angle ABC=\angle P.$

同理可得，$\angle BAD=\angle P$.

而 A、B、D、C 共圆.

$\therefore\quad \angle CAD=\angle CBD.$

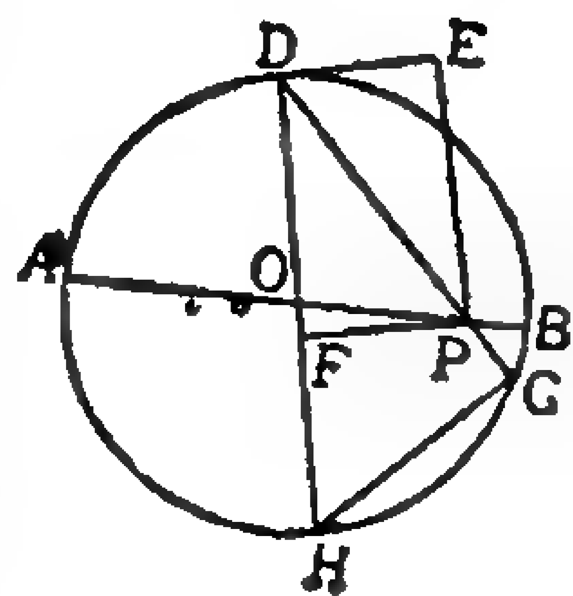
$$\therefore\quad \angle BAC=\angle DBA=\angle P+\angle CBD=\angle BCA.$$

而 $\angle BCA$、$\angle BAC$、$\angle ABD$ 分别是 $\overset{\frown}{BA}$、$\overset{\frown}{BDC}$、$\overset{\frown}{ACD}$ 上的圆周角.

$\therefore\quad \overset{\frown}{BDC}=\overset{\frown}{ACD}+\overset{\frown}{AB}.$

所以，当 $\overset{\frown}{AB}$ 小于 $\frac{1}{3}$ 圆周时，BD 与 AC 的交点在圆内，当 $\overset{\frown}{AB}$ 大于 $\frac{1}{3}$ 圆周时，点 P 在圆外.

1309. 设在圆上有两定点 A、B，若引弦 CD，使 $AC\cdot AD$ 与 $BC\cdot BD$ 的和或差等于定值 K^2，则 CD 的方向一定.



解 设圆的半径为 r，作 $AA'\perp CD$，$BB'\perp CD$，则

$$AC\cdot AD=2rAA', \quad ①$$

$$BC\cdot BD=2rBB'. \quad ②\text{(问题 1318)}$$

由①+②，得 $K^2=2r\cdot(AA'+BB')$.

从 A 引 CD 的平行线与 BB' 的交点为 E，则 $\qquad BE=AA'+BB'.$

$\therefore\quad 2rBE=K^2$(一定).

由此可得，BE 是定长线段. 又 $\angle AEB=90°$. 可知 AE 的方向一定. 而 $CD /\!/ AE$，所以 CD 的方向也一定.

注 若 C、D 在 AB 的同侧，且

$$AC\cdot AD\sim BC\cdot BD=K^2,$$

则 CD 的方向一定.

1310. 从直径 AB 上的一点 P 向圆在点 D 处的切线引垂线 PE，则 $AB\cdot PE=AP\cdot BP+PD^2$.

解 设圆心为 O，DO 及 DP 的延长线与圆的交点分别为 H、G，从 P 向 DH 引垂线 PF，则

$$\angle PFH=\angle PGH=90°.$$

所以，P、F、H、G 共圆.

从而得出，

$$DF\cdot DH=DP\cdot DG. \quad ①$$

而 $\qquad DH=AB,\ DF=EP.$

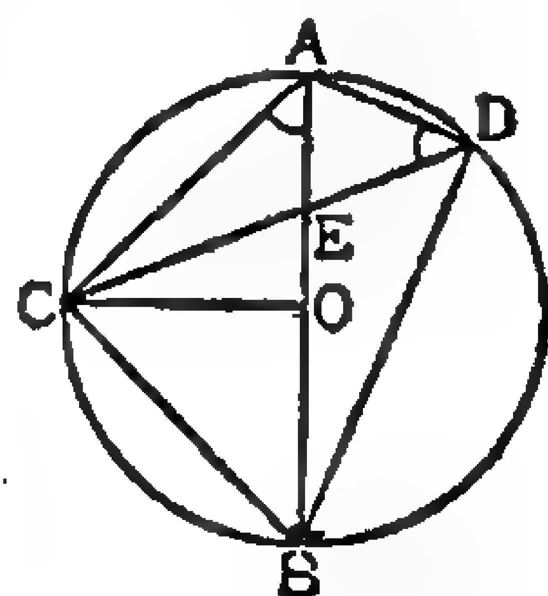
由①，得

$$AP\cdot BP+PD^2=DP\cdot PG+DP^2=DP\cdot DG=DH\cdot DF=AB\cdot PE.$$

1311. 设圆 O 的直径为 AB，半圆弧 ACB 的中点为 C，在半圆上任取一点 D，若 CD 与 AB 的交点为 E，则

$$CE\cdot CD=2OA^2$$

且 $CD^2=S_{\text{四边形}ACBD}$.



解 $\because C$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，

$\therefore\quad \angle ADC=\angle CAB.$

由此可得，AC 与圆 AED 在点 A 处相切.

$\therefore\quad CE\cdot CD=CA^2.$

又 $OA\perp OC$，

$\therefore\quad AC^2=AO^2+OC^2=2OA^2.$

$\therefore\quad CE\cdot CD=2OA^2.$

其次，

$$CD^2=CD\cdot(CE+DE)=CD\cdot CE+CD\cdot DE.$$

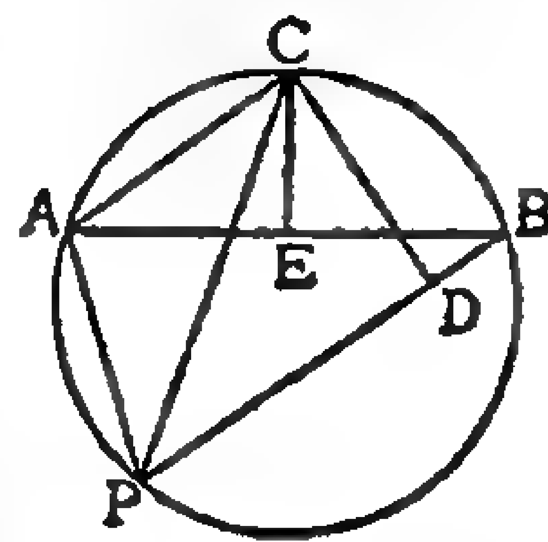
而 $\qquad CD\cdot CE=AC^2.$

又 DC 是 $\angle ADB$ 的平分线，根据问题 **1074** 得 $CD\cdot DE=AD\cdot DB$.

$$\therefore\quad CD^2=AC^2+AD\cdot DB=2S_{\triangle CAB}+2S_{\triangle DAB}=2S_{\text{四边形}ACBD}.$$

1312. 设圆上有两定点 A、B，$\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 C，在 $\overset{\frown}{AB}$ 的共轭弧上任取一点 P，则

$$(PA+PB):PC=\text{定值}.$$



解 从 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 C 向 PB 引垂线 CD，由问题 **536**，得

$$PD=\frac{1}{2}(PA+PB).$$

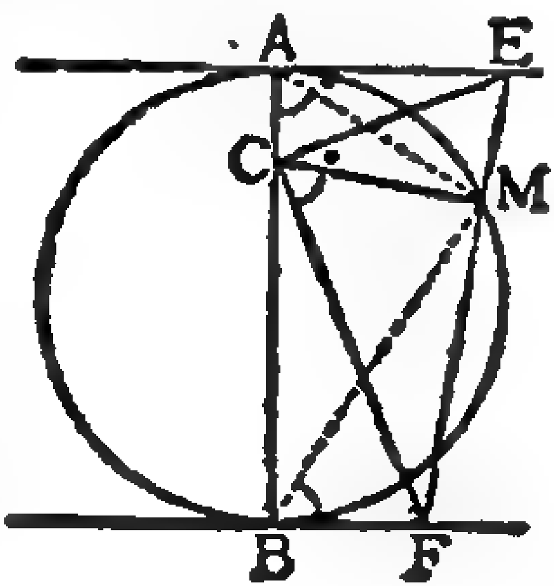
又 $CE\perp AB$，$\therefore\ \triangle ACE\backsim\triangle PCD$，

$$\therefore\quad \frac{PD}{PC}=\frac{AE}{AC}.$$

$$\therefore\quad \frac{PA+PB}{PC}=\frac{2PD}{PC}=\frac{2AE}{AC},$$

即 $PA+PB:PC=$定值.

1313. 连结直径 AB 上的定点 C 与圆上的任一点 M, 过 M 引 CM 的垂线, 与点 A、B 处的切线分别交于点 E、F, 则 $\angle ECF$ 是直角, $AE\cdot BF$ 是定值.



解 连结 AM、BM, 因为 $AB\perp AE$, $CM\perp EF$, $AB\perp BF$, 所以四边形 $ACME$、$BCMF$ 都是圆内接四边形.

$$\therefore\ \angle ECM=\angle EAM,$$
$$\angle MCF=\angle MBF.$$

而 $$\angle MBF=\angle MAB.$$

$$\therefore\ \angle MCF=\angle MAB.$$
$$\therefore\ \angle ECM+\angle MCF$$
$$=\angle EAM+\angle MAB.$$

即 $$\angle ECF=\angle EAB=90°.$$

其次,在 $\triangle ACE$、$\triangle BFC$ 中, $\angle EAC=90°=\angle CBF$, $\angle ECF=90°$,

$$\therefore\ \angle BCF+\angle ACE=90°.$$

又 $$\angle ACE+\angle AEC=90°.$$

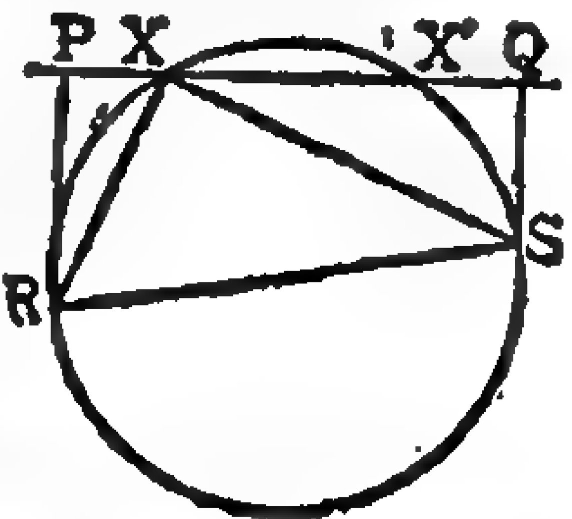
$$\therefore\ \angle AEC=\angle BCF.$$

从而得出, $\triangle ACE\backsim\triangle BFC$.

$$\therefore\ AE:AC=BC:BF.$$
$$\therefore\ AE\cdot BF=AC\cdot BC.$$

而 C 是定点, AB 是定直径, 因而 AC、BC 是定长的线段. 由此可得, $AE\cdot BF$ 是定值.

1314. 已知线段 a、b、c. a 等于线段 PQ, 在 PQ 的两端向同侧引垂线 PR、QS 分别等于 b、c, 以 RS 为直径的圆与 PQ 的交点为 X、X', 则每一个交点分 PQ 所成的各部分都满足方程 $x^2-ax+bc=0$.



解 设 PQ 与圆的交点为 X、X', 连结 XR、XS, 则 $\angle RXS=90°$.

$$\therefore\ \angle XRP=90°-\angle PXR=\angle SXQ.$$

又 $$\angle RPX=90°=\angle XQS.$$

$$\therefore\ \triangle PRX\backsim\triangle QXS.$$

$$\therefore\ \frac{PX}{PR}=\frac{QS}{QX}.$$

设 $$PX=x,$$

则 $$\frac{x}{b}=\frac{c}{a-x}.$$

$$\therefore\ ax-x^2=bc,$$

即 $$x^2-ax+bc=0.$$

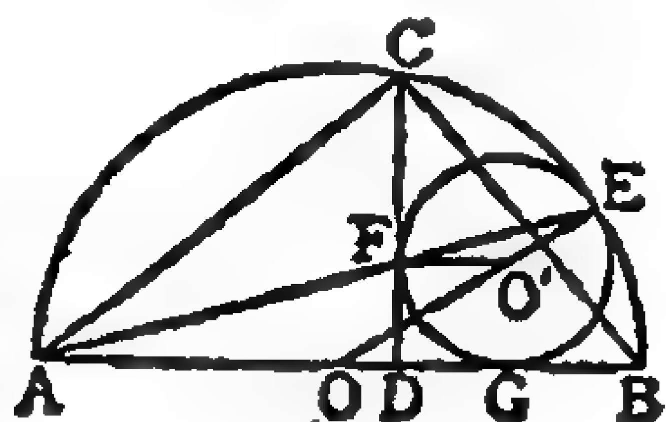
所以, PX 满足上述方程. 同理可得, QX 也满足这个方程. 又 $X'P$、$X'Q$ 也满足这个方程.

1315. 从半圆上的一点 C 向直径 AB 引垂线, 设垂足为 D, 作圆 O' 切 $\overset{\frown}{BC}$、CD、DB 分别于 E、F、G,则

(1) A、F、E 在同一条直线上;

(2) 过 C、E、F 的圆与 AC 相切;

(3) $AC=AG$.



解 (1) 设半圆的圆心为 O, 则 O、O'、E 在一条直线上.

由 $O'F\perp CD$, 得 $O'F\parallel AB$.

连结 EF、AE, 得

$$\angle FEO'=\frac{1}{2}\angle FO'O$$
$$=\frac{1}{2}\angle EOB=\angle OEA.$$

由此可知, E、F、A 在一条直线上.

(2) $\because\ \angle ACB=90°$, $CD\perp AB$,

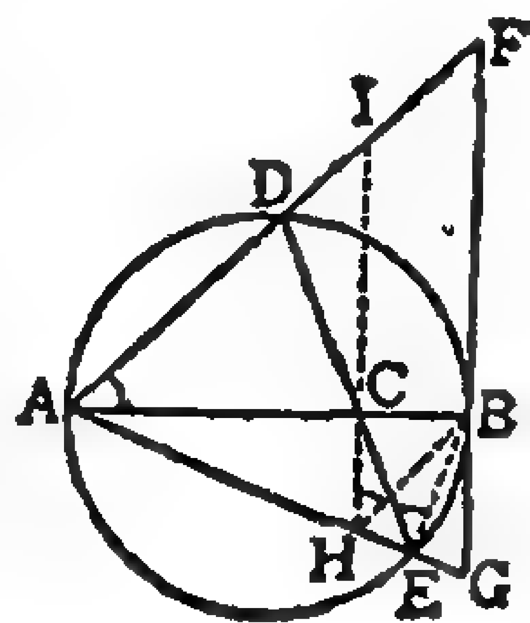
$$\therefore\ \angle ACF=\angle ABC=\angle AEC.$$

所以, AC 是圆 CEF 的切线.

(3) 由(2), 得 $AC^2=AE\cdot AF=AG^2$.

$$\therefore\ AC=AG.$$

1316. 过圆的直径 AB 上的一定点 C 作任意弦 DE, 它的两端与点 A 连结的两条直线与过 B 的切线分别相交于 F、G, 则 $BF\cdot BG$ 是定值.



解 过 C 作 $HI\parallel FG$, 与 AF、AG 的交点分别为 I、H, 连结 BE、BH. 因为 $\angle BCH=90°$, $\angle BEH=90°$, 所以四边形 $CBEH$ 是圆内接四边形.

$$\therefore\ \angle BEC=\angle BHC.$$

而 $$\angle BED=\angle BAD.$$

$$\therefore\ \angle BHI=\angle BAD.$$

由此可知, B、H、A、I 共圆.

$\therefore\quad CI\cdot CH=AC\cdot CB.$　①

$\because\quad \triangle ACI\backsim\triangle ABF,$

$\therefore\quad AC:AB=CI:BF.$

又　$\triangle ACH\backsim\triangle ABG,$

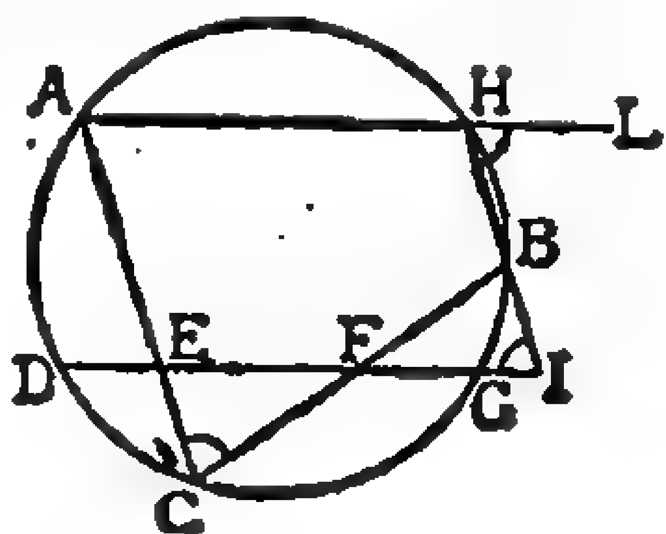
$\therefore\quad AC:AB=CH:BG.$

$\therefore\quad AC^2:AB^2=CI\cdot CH:BF\cdot BG.$

由①，得 $AC^2:AB^2=AC\cdot CB:BF\cdot BG.$

这个比例式中的前三项都是定值，所以第四比例项 $BF\cdot BG$ 也是定值。

1317. 设 A、B 是圆上的两个定点，DG 是定弦。在关于 DG 与 A、B 异侧的弧上任取一点 C，CA、CB 与 DG 的交点分别为 E、F，则 $\dfrac{DE\cdot FG}{EF}$ 是定值。



解　由 A 引 DG 的平行线 AL 与圆交于点 H，HB 与 DG 的交点为 I，则

$\angle DIB=\angle BHL.$　①

又 A、C、B、H 共圆，

$\therefore\quad \angle C=\angle BHL.$　②

由①、②，得 $\angle C=\angle DIB.$

由此可知，B、I、C、E 共圆。

$\therefore\quad FI\cdot FE=FB\cdot FC=FD\cdot FG.$

$$\therefore\quad \frac{FE}{FG}=\frac{FD}{FI}=\frac{FD-FE}{FI-FG}=\frac{DE}{GI}.$$

$$\therefore\quad \frac{FG\cdot DE}{EF}=GI.$$

而 A、B 是定点，AH 是定长线段，因而 GI 是定长线段。所以，$\dfrac{FG\cdot DE}{EF}$ 是定值。

11. 圆内接三角形的比例线段

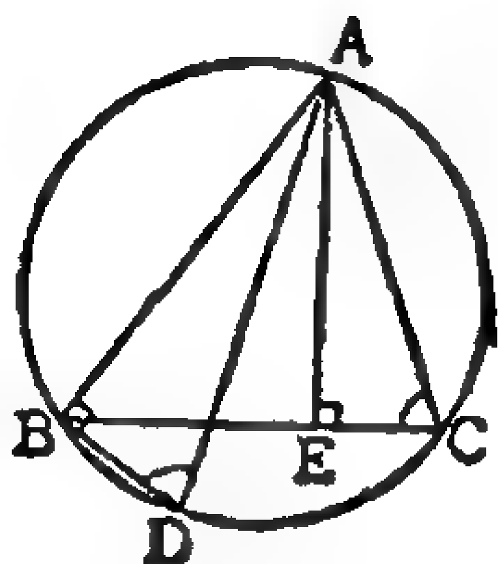
1318. 若 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径为 AD，高为 AE，则 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$。

解　在 $\triangle ABD$、$\triangle AEC$ 中，$\angle C=\angle D$，$\angle AEC=90^\circ=\angle ABD$，

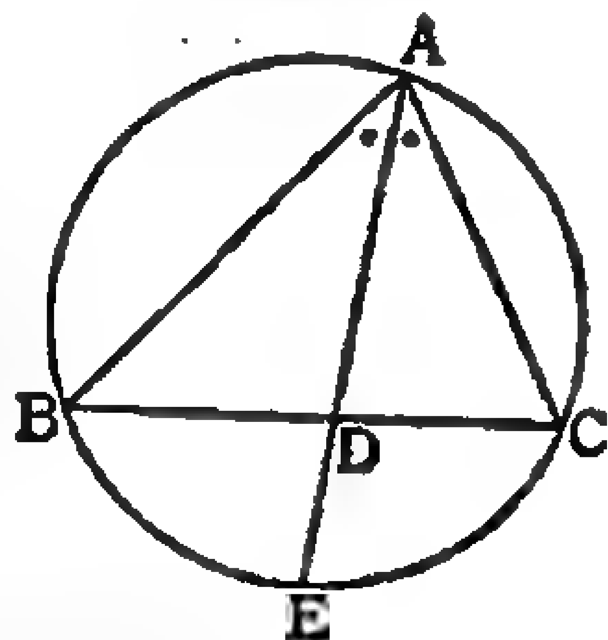
$\therefore\quad \triangle ABD\backsim\triangle AEC.$

$\therefore\quad AB:AD=AE:AC.$

$\therefore\quad AB\cdot AC=AD\cdot AE.$



1319. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的平分线 AD 与外接圆交于 E，BC、$AB+AC$ 都是定长，则 $AE:DE$ 是定值。



解　由 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，得

$$\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC+AB}{CD+BD}=\frac{AC+AB}{BC}\text{（一定）}.$$

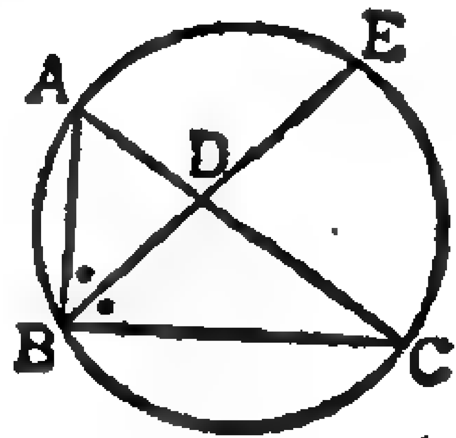
根据问题 **1074**，得 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

又　$BD\cdot CD=AD\cdot DE.$

$$\therefore\quad \frac{AE}{DE}=\frac{AB\cdot AC}{BD\cdot CD}=\left(\frac{AB+AC}{BC}\right)^2\text{（一定）}.$$

所以，$AE:DE$ 是定值。

1320. 在直角三角形 ABC 中，直角 B 的平分线与斜边交于 D，与外接圆交于 E，则 $BD\cdot BE=2S_{\triangle ABC}$。



解　由 BE 是 $\angle ABC$ 的平分线，得

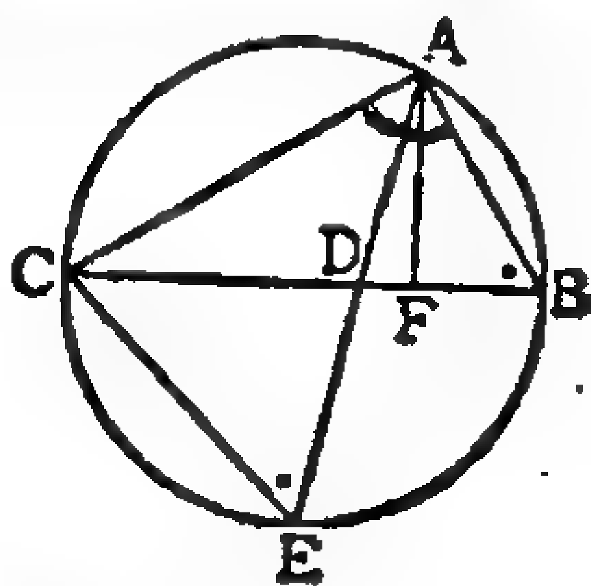
$BD\cdot BE=AB\cdot BC,$

而 $\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle B=90^\circ$.

$\therefore\quad AB\cdot AC=2S_{\triangle ABC}.$

$\therefore\quad BD\cdot BE=2S_{\triangle ABC}.$

1321. 三角形 ABC 的顶角 A 的平分线与底、外接圆的交点分别为 D、E，以 AD、AE 为邻边的矩形面积等于 $\triangle ABC$ 的面积的两倍，则顶角 A 是直角。



解　从 A 向 BC 引垂线 AF，则

$AF\cdot BC=2S_{\triangle ABC}.$

根据题意，得

$AD\cdot AE=2S_{\triangle ABC}.$

$\therefore\quad AD\cdot AE=AF\cdot BC$　①

连结 CE，则

$\angle AEC=\angle ABC$，$\angle EAC=\angle BAD.$

$\therefore\quad \triangle AEC\backsim\triangle ABD.$

$\therefore\quad AE:AC=AB:AD.$

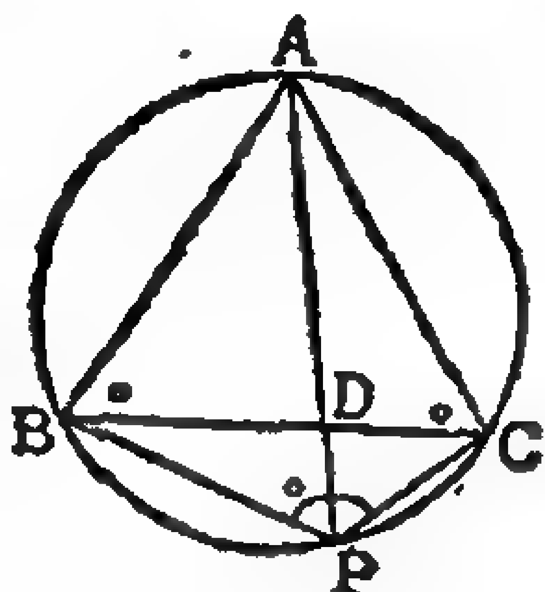
由此可得，$AE\cdot AD=AC\cdot AB.$

由①，得 $AC\cdot AB=AF\cdot BC=2S_{\triangle ABC}.$

这就是说，以 AC、AB 为两邻边的矩形面积等于 $\triangle ABC$ 面积的两倍．由此可知，$CA\perp AB$．$\therefore \angle CAB=90°$．

1322． 设 P 为正三角形 ABC 外接圆的劣弧 BC 上的任一点，则

$AP^2=BC^2+PB\cdot PC$．



解 由 $\widehat{BA}=\widehat{AC}$，根据问题 **1074**，得

$PB\cdot PC=PD\cdot PA$．

$\therefore \quad AP^2-PB\cdot PC$

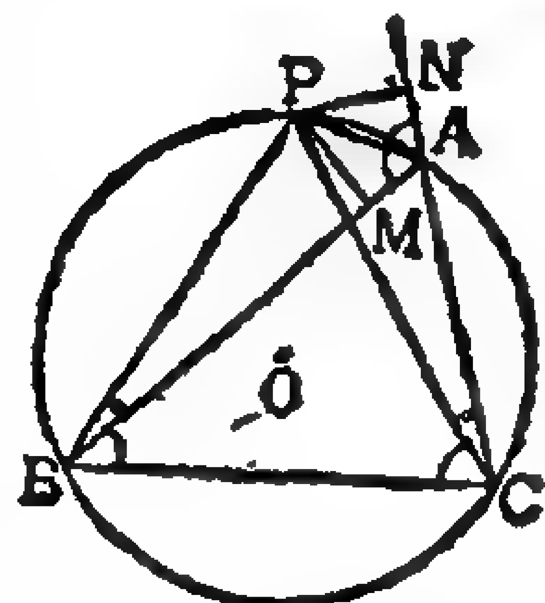
$=AP^2-PD\cdot PA=AP\cdot AD$

$=AB^2=BC^2$．

$\therefore \quad AP^2=BC^2+PB\cdot PC$．

1323． 圆 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，P 为弧 BAC 的中点，则

$AB\cdot AC=PB^2-PA^2$．



解 从 P 向 AB、AC 分别引垂线 PM、PN，则

$\angle PAN$

$=\angle PBC=\angle PCB$

$=\angle PAB$．

$\therefore \quad \triangle PAN\cong\triangle PAM$． $\therefore \quad AM=AN$．

连结 PC．

$\because \quad PM=PN$，$\angle PBA=\angle PCA$，

$\therefore \quad \triangle PBM\cong\triangle PCN$． $\therefore \quad BM=CN$，

从而得出，

$PB^2-PA^2=BM^2-MA^2$

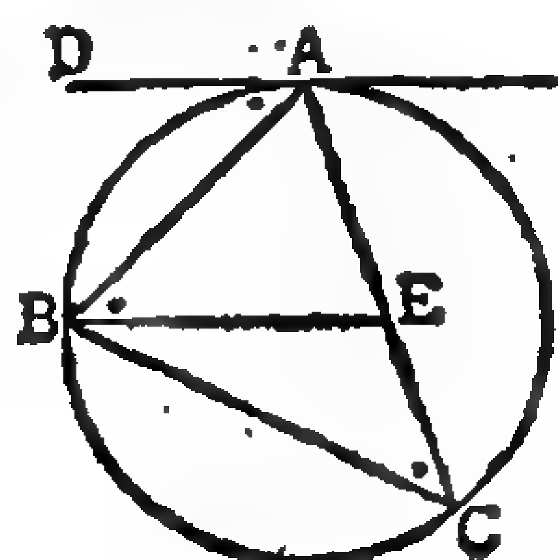
$=(BM+MA)(BM-MA)$

$=AB\cdot(CN-AN)$

$=AB\cdot AC$．

即 $\quad AB\cdot AC=PB^2-PA^2$．

1324． 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 引外接圆的切线 AD，过 B 引平行于 AD 的直线 BE 交 AC 于点 E，则 AB 是 AE、AC 的比例中项．



解 $\because \quad DA\parallel BE$，

$\therefore \quad \angle DAB=\angle ABE$．

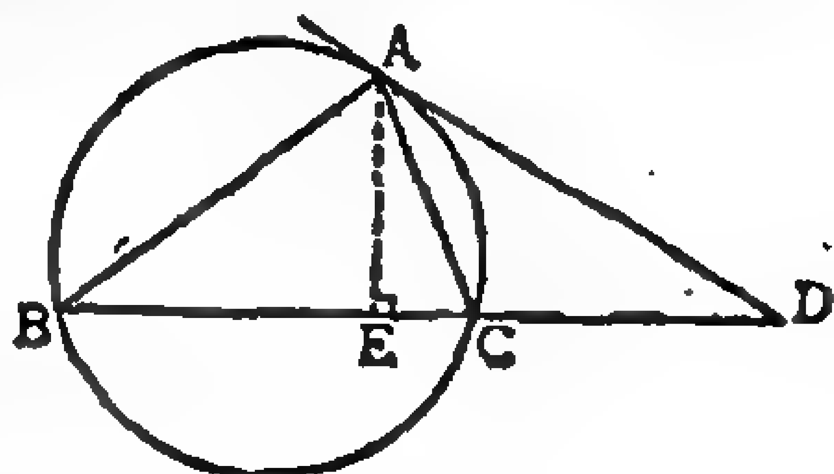
又 DA 是切线，$\therefore \angle DAB=\angle C$．

由此可知，AB 与 $\triangle BCE$ 的外接圆在点 B 处相切．

$\therefore \quad AB^2=AE\cdot AC$

即 AB 是 AE、AC 的比例中项．

1325． 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 引外接圆的切线与 BC 的延长线交于点 D，则 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的外接圆的直径的比等于 $AD:CD$．



解 从 A 向 BC 引垂线 AE，设 $\triangle ABD$ 的外接圆直径为 d，则

$AB\cdot AD=AE\cdot d$． ①(问题 **1318**)

设 $\triangle ACD$ 的外接圆直径为 d'，则

$AC\cdot AD=AE\cdot d'$． ②

$\therefore \quad \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{d}{d'}$． ③

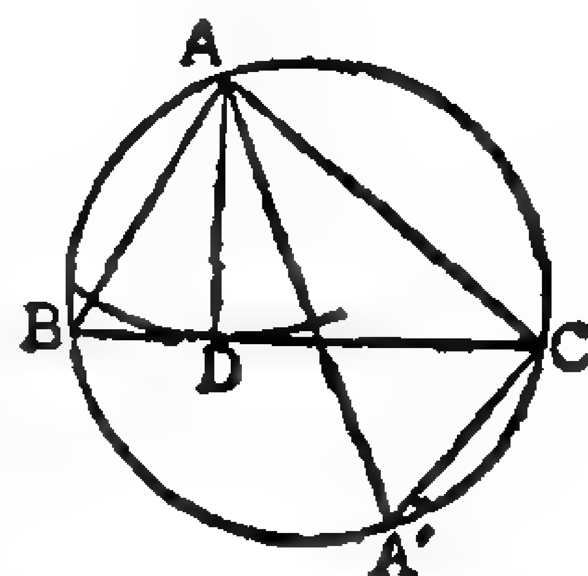
而 AD 是切线．

$\therefore \quad \triangle ABD\backsim\triangle CAD$．

$\therefore \quad \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{CD}$． ④

由③、④，得 $\dfrac{d}{d'}=\dfrac{AD}{CD}$．

1326． 设定圆的内接三角形 ABC 的顶点 A 是定点，且两边 AB、AC 的积一定，则底边 BC 是另一定圆的切线．

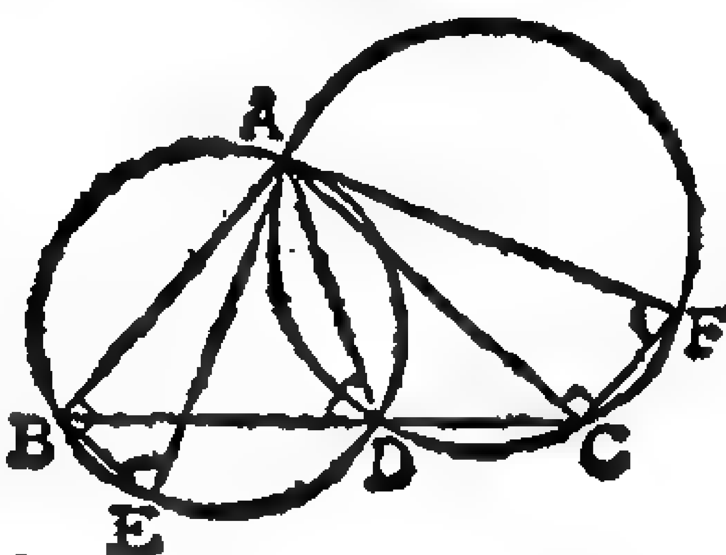


解 设 $\triangle ABC$ 的外接圆直径为 AA'，由 A 向 BC 作垂线 AD，则

$AB\cdot AC=AA'\cdot AD$．(问题 **1318**)

这里，$AB\cdot AC$ 是定值，AA' 是定长线段，因而 AD 的长一定．所以 BC 是以 A 为圆心，定长 AD 为半径的圆的切线．

1327． 设 D 为 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上一点，则 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的外接圆的直径的比等于 $AB:AC$．



解 设两圆的直径分别为 AE、AF，则

$\angle E=\angle ADB=\angle F$，

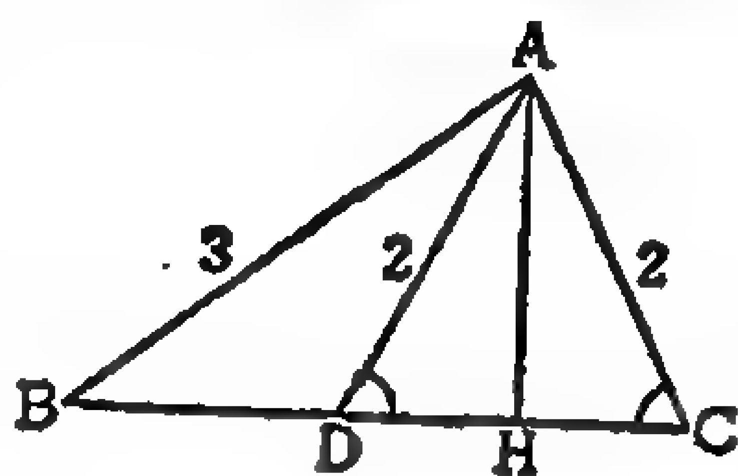
$\angle ABE=90°=\angle ACF$，

$\therefore \quad \triangle ABE\backsim\triangle ACF$．

从而得出，$\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AC}$．

1328． 设 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 的比为 3:2，在边 BC 上取一点 D 使 $AD=AC$，

求$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ADC$的外接圆的直径的比。



解 从A向BC作垂线AH，设$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ADC$的外接圆的直径分别为d_1、d_2、d_3，根据问题**1318**，得

$$AB\cdot AC=AH\cdot d_1, \quad ①$$
$$AB\cdot AD=AH\cdot d_2, \quad ②$$
$$AD\cdot AC=AH\cdot d_3. \quad ③$$

由①、②，得

$$d_1:d_2=AC:AD=2:2=1:1, \quad ④$$

由②、③，得

$$d_2:d_3=AB:AC=3:2, \quad ⑤$$

由④、⑤，得 $d_1:d_2:d_3=3:3:2$。

1329. 设四边形$ABCD$的对角线的交点为E，$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$的外接圆的直径分别为d_1、d_2、d_3、d_4，则

$$\frac{AE\cdot CE}{BE\cdot DE}=\frac{d_1\cdot d_3}{d_2\cdot d_4}.$$

解 从各顶点向对角线所引的垂线分别为AA'、BB'、CC'、DD'，则

$$AB\cdot BC=BB'\cdot d_1, \quad ①$$
$$BC\cdot CD=CC'\cdot d_2, \quad ②$$
$$CD\cdot DA=DD'\cdot d_3, \quad ③$$
$$DA\cdot AB=AA'\cdot d_4. \quad ④$$

由①、②、③、④，得

$$1=\frac{BB'\cdot DD'\cdot d_1\cdot d_3}{AA'\cdot CC'\cdot d_2\cdot d_4},$$

$$\therefore\quad \frac{AA'\cdot CC'}{BB'\cdot DD'}=\frac{d_1\cdot d_3}{d_2\cdot d_4}.$$

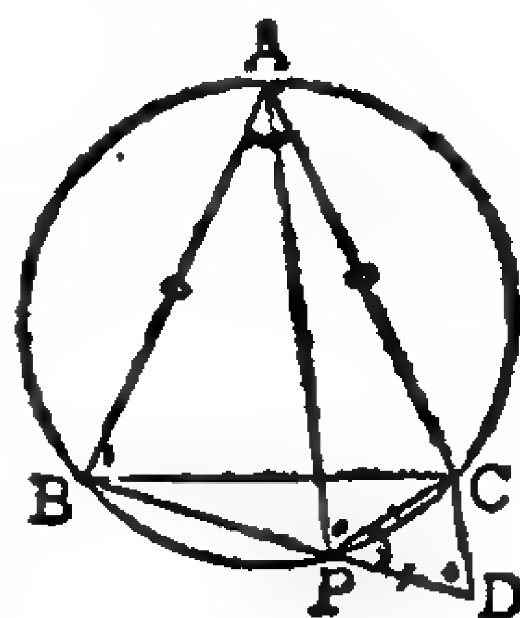
而 $\dfrac{AA'}{DD'}=\dfrac{AE}{DE}$，$\dfrac{CC'}{BB'}=\dfrac{CE}{BE}$.

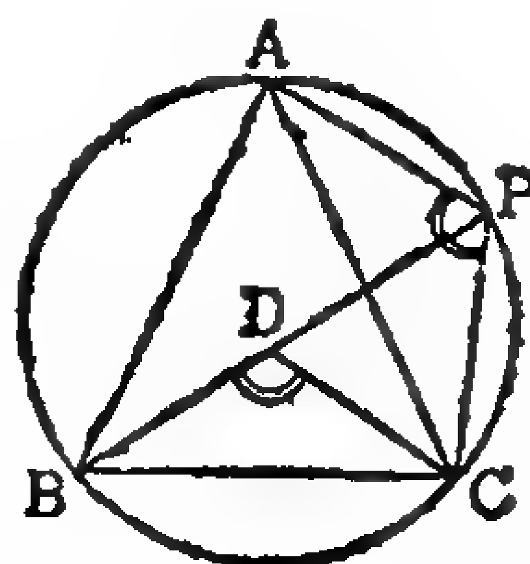
$$\therefore\quad \frac{AE\cdot CE}{DE\cdot BE}=\frac{AA'\cdot CC'}{BB'\cdot DD'}=\frac{d_1\cdot d_3}{d_2\cdot d_4}.$$

1330. 在以A为顶点的等腰三角形ABC的外接圆上任取一点P，则$PB+PC:PA$或$PB\sim PC:PA$是定值。

解 当P在$\angle A$所对的弧上时，在BP的延长线上取点D使$PD=PC$，连结CD。

$$\because\quad \angle CPD=\angle BAC,$$
$$\therefore\quad \angle D=\angle ABC=\angle APC.$$





又 $\angle CBD=\angle CAP$.

$$\therefore\quad \triangle BCD\backsim\triangle ACP.$$

$$\therefore\quad \frac{BD}{PA}=\frac{BC}{AC},$$

即 $$\frac{PB+PC}{PA}=\frac{BC}{AC}\text{(一定)}.$$

当P在$\overset{\frown}{BAC}$上时，在BP上取点D，使$PD=PC$。

$$\because\quad \triangle BCD\backsim\triangle ACP,$$

$$\therefore\quad \frac{BD}{PA}=\frac{BC}{AC},$$

即 $$\frac{PB\sim PC}{PA}=\frac{BC}{AC}\text{(一定)}.$$

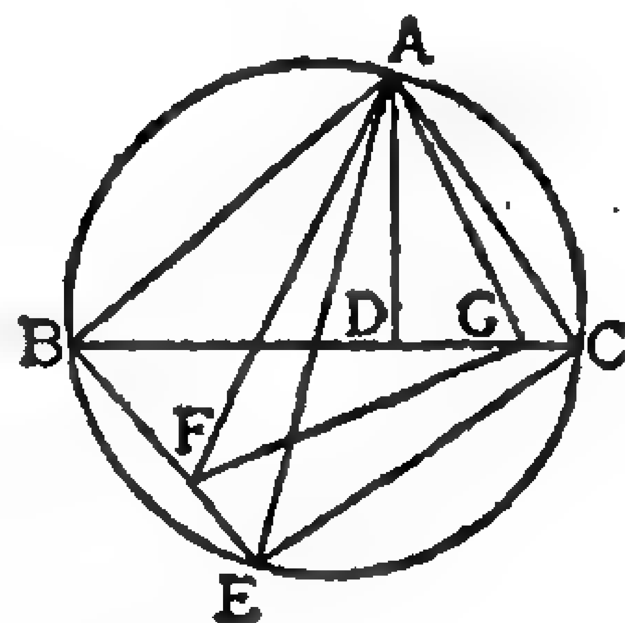
1331. 过圆内接三角形ABC的顶点A向对边引垂线AD，引直径AE，若F、G分别内分EB、CD成定比$m:n$，则

$$\triangle FAG\backsim\triangle EAC.$$

解 在$\triangle ABE$与$\triangle ADC$中，$\angle AEB=\angle ACB$，$\angle ABE=90^\circ=\angle ADC$,

$$\therefore\quad \triangle ABE\backsim\triangle ADC.$$

而F、G分别把两个三角形的对应边BE、DC内分成定比的点。



$\therefore\quad \triangle AFE\backsim\triangle AGC$.

$\therefore\quad \angle FAE=\angle GAC$.

从而得出，

$$\angle FAG=\angle EAC. \quad ①$$

但是，由$\triangle AFE\backsim\triangle AGC$，得

$$AF:AE=AG:AC,$$

即

$$AF:AG=AE:AC. \quad ②$$

由①、②，得 $\triangle FAG\backsim\triangle EAC$。

1332. 从$\triangle ABC$的底边BC的延长线上取两点D、E，向三角形的外接圆所引的切线相等，则$DB=EC$。

解 设切线为DF、EG，则

$$DF^2=DB\cdot DC,$$

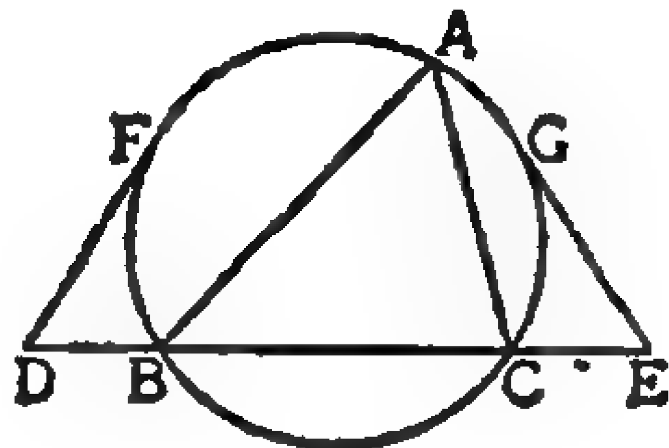
$$EG^2=EC\cdot EB.$$

而　$DF=EG$。$\therefore$　$DB\cdot DC=EC\cdot EB$.

$\therefore$　$\dfrac{DB}{EC}=\dfrac{EB}{DC}$

$=\dfrac{DB+EB}{EC+DC}$

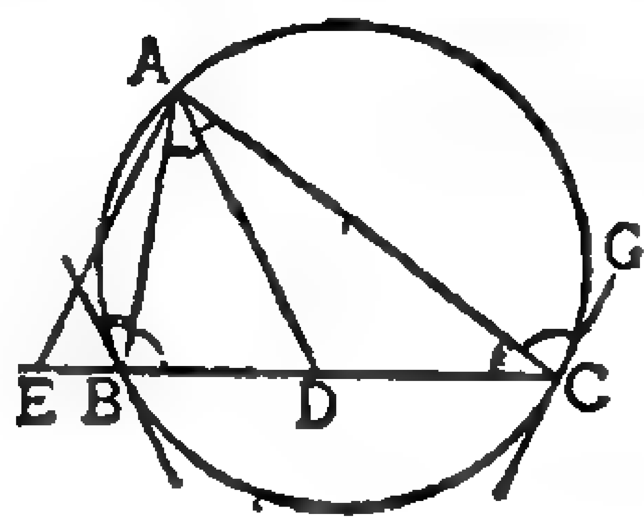
$=\dfrac{DE}{DE}=1$.



所以，　　$DB=EC$.

1333. 从$\triangle ABC$的顶点A引两条直线分别平行于外接圆在点B、C的切线，设这两条直线与BC及其延长线的交点分别为D、E，则

$BD\cdot CE=AE^2$.



解　因为CG是切线，所以

$$\angle ABD=\angle ACG.$$

又$AE\parallel CG$，$\therefore$　$\angle ACG=\angle CAE$.

$$\therefore\quad \angle CAE=\angle ABD.$$

同理可得，$\angle ACB=\angle BAD$.

$$\therefore\quad \triangle ABD\backsim\triangle CAE.$$

$$\therefore\quad \frac{BD}{AD}=\frac{AE}{CE}.$$

因为在点B、C处的切线与BC交成等角即$\angle E=\angle ADE$，所以$AE=AD$，

由此可得　　$BD\cdot CE=AE^2$.

1334. 设把圆O的半径OA延长到B，使

$AB=n\cdot OA$,

从B引圆O的切线BC，则$\triangle ABC$的外接圆的直径等于$(n+1)\cdot AC$.

解　引$\triangle ABC$的外接圆的直径AD，则$\angle CDA=\angle CBO$，$\angle ACD=\angle OCB=90°$.

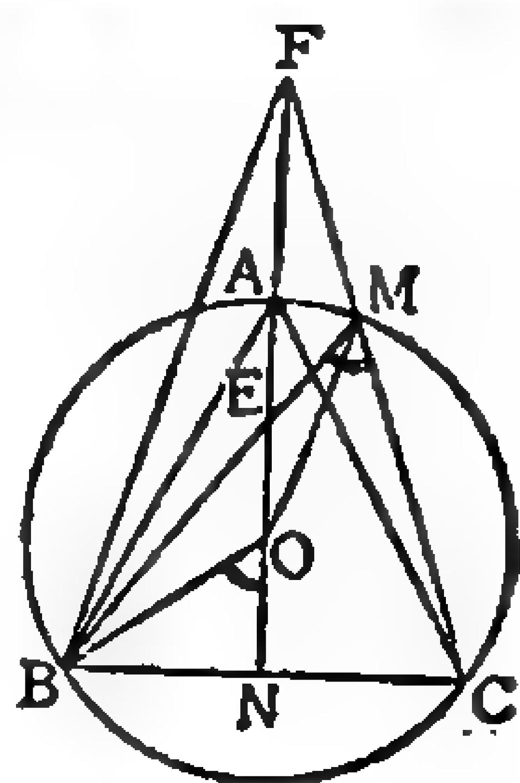
$\therefore$　$\triangle CAD\backsim\triangle COB$.　$\therefore$　$\dfrac{CO}{OB}=\dfrac{CA}{AD}$.

$\therefore$　$AD=\dfrac{OB}{CO}\cdot CA$

$$=\frac{(n+1)\cdot OA}{OA}\cdot CA=(n+1)\cdot AC.$$

1335. 设等腰三角形$ABC(AB=AC)$内接于圆O，在圆上任取一点M，直线MB、MC在OA或其延长线上的交点分别为E、F，则OE、OF是与M的位置无关的定值。

解　设AO的延长线与BC交于N，因为$\triangle ABC$是等腰三角形，所以$AN\perp BC$.



$\therefore$　$\angle BON=\dfrac{1}{2}\angle BOC$

$=\angle BMC$.

由此可得，

$\angle FOB=\angle FMB$.

因此，四边形$FMOB$是圆内接四边形，

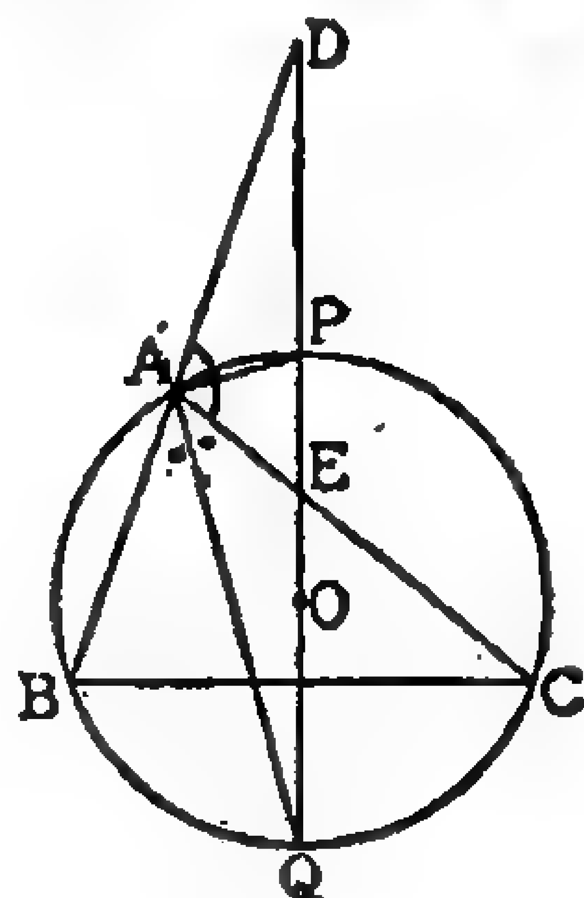
$$\therefore\quad \angle MFO=\angle MBO=\angle OMB.$$

由此可知，OM是$\triangle FEM$的外接圆的切线。

$$\therefore\quad OE\cdot OF=OM^2(\text{一定}).$$

1336. 设$\triangle ABC$外接圆的直径PQ垂直于BC，则它的两边AB、AC调和分割直径PQ.

解　设PQ是垂直于BC的直径，所以，P、Q分别是$\overset{\frown}{BPC}$、$\overset{\frown}{BQC}$的中点，由此可得，AP、AQ分别是$\angle CAD$、$\angle CAB$的平分线。



设PQ在AC、AB或其延长线上的交点分别为E、D，则

$$\frac{PD}{PE}=\frac{AD}{AE}=\frac{DQ}{EQ},$$

即D、P、E、Q是调和点列。(问题1058)

1337. 设$\triangle ABC$外接圆的弧BAC的中点为D，则

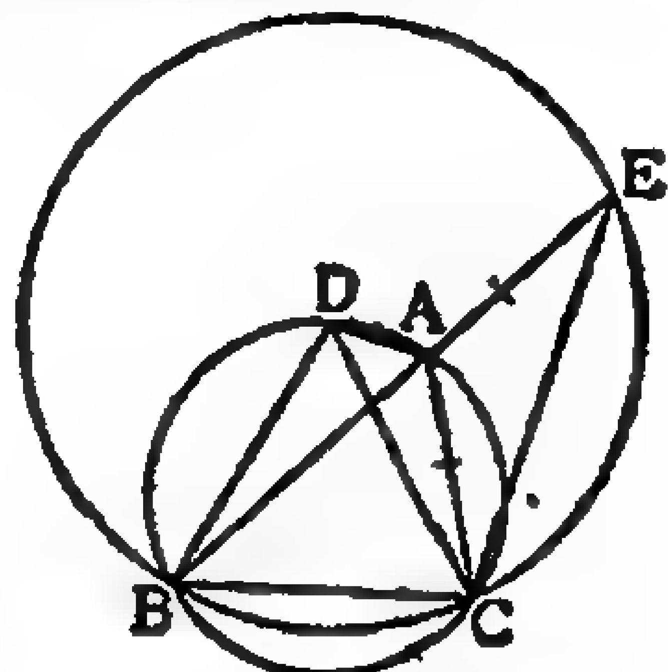
$AB\cdot AC$

$=BD^2-AD^2$.

解　在BA的延长线上取点E，使

$AE=AC$,

则



$$\angle E=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BDC.$$

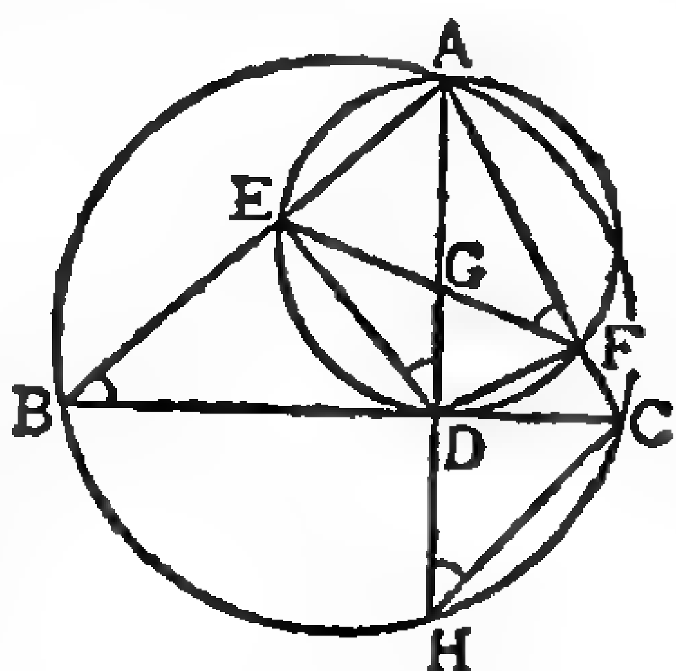
又$DB=DC$. 所以以D为圆心，DB为半径的圆经过点B、C、E. 根据关于点A的圆幂定理(问题1246)可知，

$$AB\cdot AE=BD^2-AD^2.$$

$\because\ AC=AE,$

$\therefore\ AB\cdot AC=BD^2-AD^2.$

1338. 从$\triangle ABC$的顶点A向边BC作垂线AD，以AD为直径的圆与AB、AC上的交点分别为E、F，AD或其延长线与直线EF及$\triangle ABC$的外接圆的交点分别为G、H，则AD是AG、AH的比例中项。



解　因为$\angle AHC=\angle ABC=\angle ADE$
$=\angle AFE,$

所以四边形$HCFG$是圆内接四边形。

$\therefore\ AG\cdot AH=AF\cdot AC.$　①

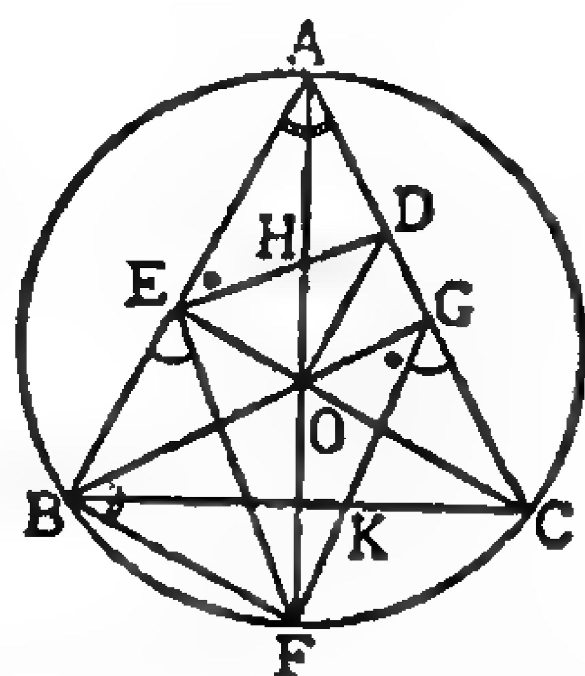
又$\angle ADC=90°$，$DF\perp AC$，

$\therefore\ AD^2=AC\cdot AF.$　②

由①、②，得$AD^2=AG\cdot AH$。

这就是说，AD是AG、AH的比例中项。

1339. 从等腰三角形ABC的底边BC的两端点向对边作垂线BG、CE，设BG与CE的交点为O，延长AO与外接圆交于F，过O引AB的平行线交AC于D，则$\angle DEF=90°$。



解　由O是$\triangle ABC$的垂心，得$BO=BF$。而$OD\parallel AB$，所以

$$\frac{AD}{AE}=\frac{AD}{AG}=\frac{BO}{BG}=\frac{BF}{BG}.$$

又$\angle A=2\angle CAF=2\angle CBF=\angle FBG$.

$\therefore\ \triangle AED\backsim\triangle BGF.$

$\therefore\ \angle AED=\angle BGF.$

又　$\triangle AEF\backsim\triangle AGF.$

$\therefore\ \angle BEF=\angle CGF.$

$\therefore\ \angle AED+\angle BEF$
$=\angle BGF+\angle CGF=\angle BGC=90°.$

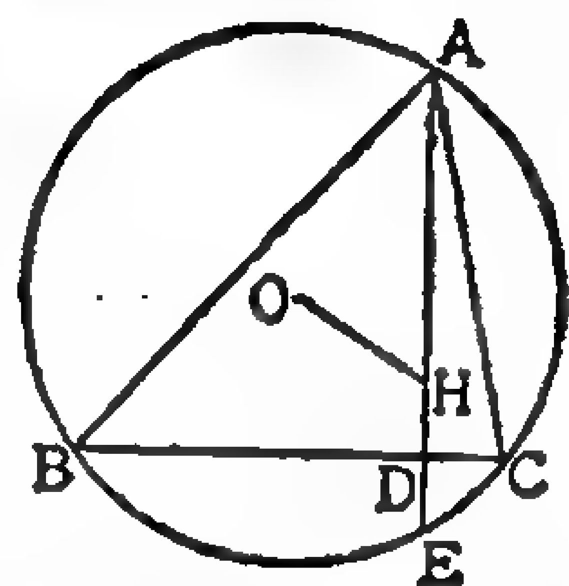
由此可得，$\angle DEF=90°$。

1340. 设$\triangle ABC$的底边BC的中点为D，过B、C分别引外接圆的切线，设两切线的交点为E，则$\angle BAD=\angle EAC$。

解　设$\triangle ABC$的外接圆与ED及其延长线的交点为F、G。这时

$\angle EBF=\angle FCD=\angle FBD.$

又　$\angle FBG=90°$，



所以BF、BG分别是$\triangle EBD$的$\angle B$及与它相邻的外角的平分线。所以根据问题1058可知，E、F、D、G是调和点列。又FG是圆的直径，所以这个圆上的点到E、D的距离的比等于$EF:FD$。所以AF是$\angle EAD$的平分线，从而得出，AF也是$\angle BAC$的平分线。

$\therefore\ \angle BAD=\angle EAC.$

1341. 设半径为R的圆O的内接$\triangle ABC$的垂心为H，AH与BC的交点为D，则$OH^2=R^2-2AH\cdot HD$。

解　设AD与圆的交点为E，$HD=DE$，(问题498)

$\therefore\ AH\cdot HE=2AH\cdot HD.$　①

又根据圆幂定理(问题931)，得

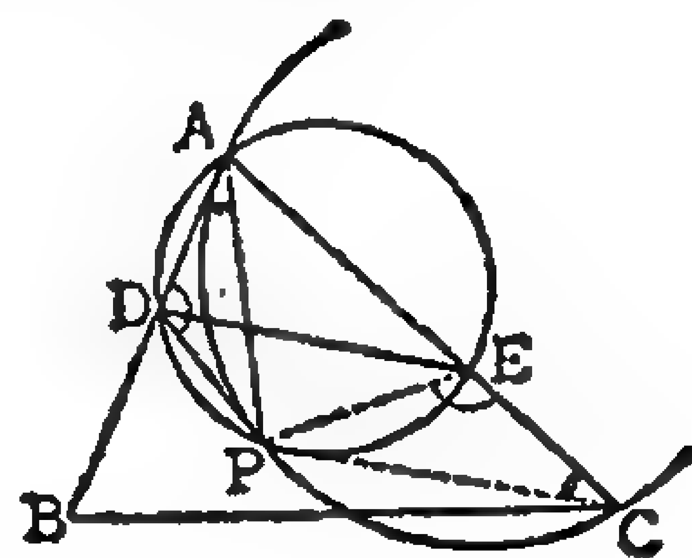
$AH\cdot HE=R^2-OH^2.$　②

由①、②，得$2AH\cdot HD=R^2-OH^2$，

$\therefore\ OH^2=R^2-2AH\cdot HD.$

1342. 在三角形ABC的边AB、AC上分别取点D、E，使

$$\frac{AD}{CE}=\frac{DB}{AE},$$



则$\triangle ADE$的外接圆过定点。

解　过C作圆，使这圆与AB相切于点A，与$\triangle ADE$的外接圆相交于点P。因为四边形$ADPE$是圆内接四边形，所以

$\angle CEP=\angle ADP.$

又AD是圆APC的切线。连结AP、PC，则$\angle DAP=\angle ECP$。

$\therefore\ \triangle PAD\backsim\triangle PCE.$

从而得出，$\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{AD}{CE}.$

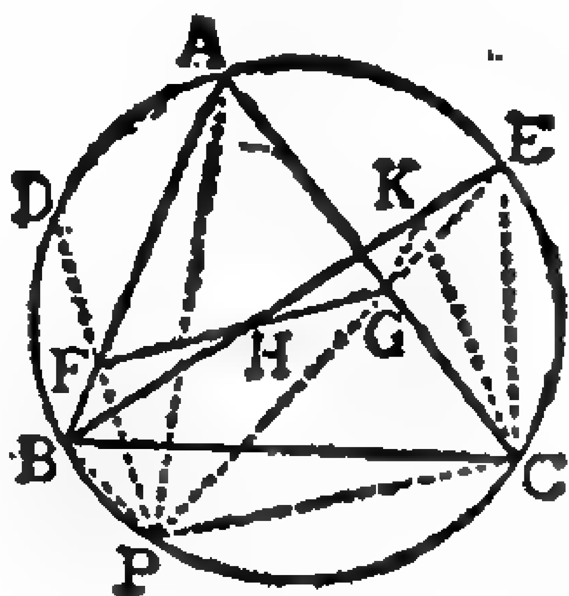
根据假设，得$\dfrac{AD}{CE}=\dfrac{DB}{AE}.$

$$\therefore \quad \frac{AD}{CE}=\frac{AD+DB}{CE+AE}=\frac{AB}{AC}.$$

而 $\frac{AB}{AC}$ 是定值． $\therefore \quad \frac{PA}{PC}=\frac{AB}{AC}=$定值．

由此可知，$\triangle APC$ 的形状一定，并且 A、C 是定点，从而得出，点 P 是定点，即圆 ADE 恒过定点 P．

1343． 设在三角形 ABC 的外接圆的弧 BC 上任取一点 P，$\widehat{AB}$、$\widehat{AC}$ 的中点分别为 D、E，又 PD、PE 在 AB、AC 上的交点分别为 F、G，则 FG 过 $\triangle ABC$ 的内心．



解 设 BE 与 FG 的交点为 H．又从 G 引 AB 的平行线与 BE 交于点 K，则 $\triangle HBF\backsim\triangle HKG$，

$$\therefore \quad \frac{FH}{HG}=\frac{BF}{KG}. \qquad ①$$

又 $\angle HKG=\angle ABE=\angle ACE$，所以四边形 $GCEK$ 是圆内接四边形．

$\therefore \quad \angle GCK=\angle GEK=\angle PCB.$

又 $\quad \angle GKC=\angle GEC=\angle PBC,$

$\therefore \quad \triangle BPC\backsim\triangle KGC.$

$$\therefore \quad \frac{GC}{GK}=\frac{PC}{PB}. \qquad ②$$

而 PE、PF 分别是 $\angle APC$、$\angle APB$ 的平分线．

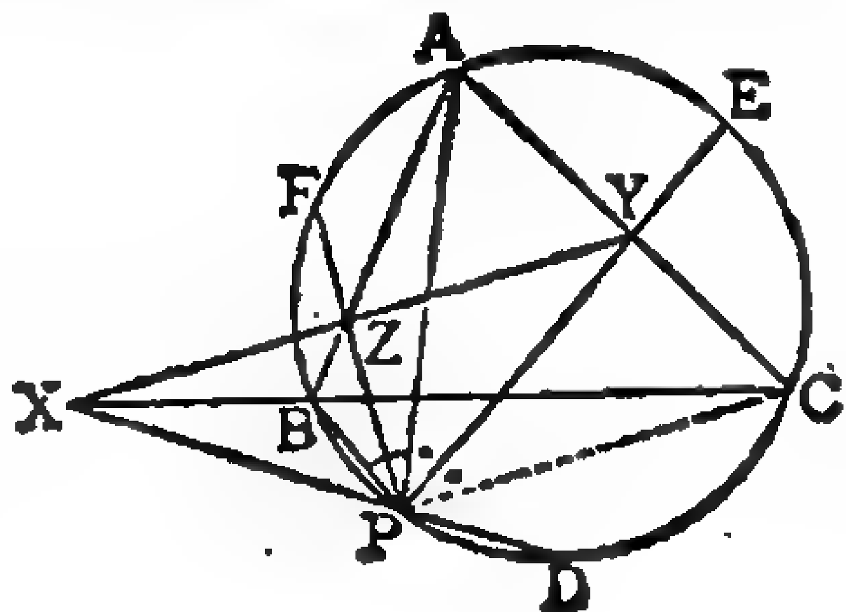
$$\therefore \quad \frac{PC}{PA}=\frac{CG}{AG}, \qquad ③$$

$$\frac{PA}{PB}=\frac{AF}{BF}. \qquad ④$$

由①×②×③×④，得 $\frac{FH}{HG}=\frac{AF}{AG}.$

由此可知，AH 是 $\angle FAG$ 的平分线．又 BE 是 $\angle B$ 的平分线，从而得出，H 是 $\triangle ABC$ 的内心，并且 FG 过内心 H．

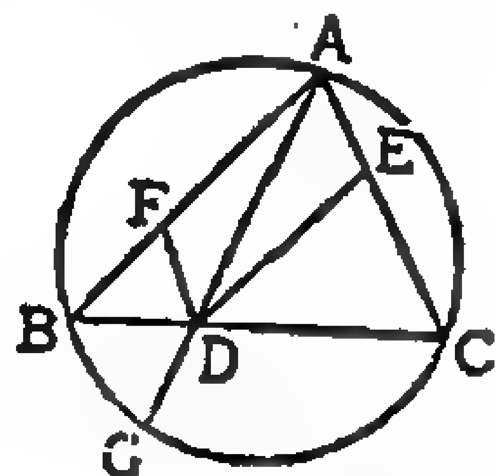
1344． 作 $\triangle ABC$ 的外接圆，又 $\widehat{BC}$、$\widehat{CA}$、$\widehat{AB}$ 的中点分别为 D、E、F，在 $\widehat{BC}$ 上任取一点 P，若 PD 在 BC 上、PE 在 CA 上、PF 在 AB 上的交点分别为 X、Y、Z，则 X、Y、Z 在一条直线上．



解 由上题可知，YZ、ZX、XY 都经过 $\triangle ABC$ 的内心．所以 X、Y、Z 是在过 $\triangle ABC$ 的内心的一条直线上．

1345． 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任取一点 D，过 D 引 AB、AC 的平行线与 AC、AB 的交点分别为 E、F，则

$$AF\cdot AB+AE\cdot AC =AD^2+BD\cdot CD.$$

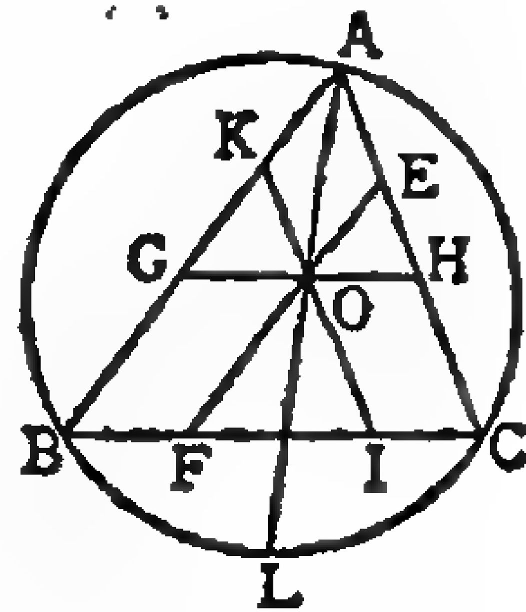


解 延长 AD 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点为 G，根据问题 **1225**，得

$$\begin{aligned}AF\cdot AB+AE\cdot AC &=AD\cdot AG=AD\cdot(AD+DG)\\ &=AD^2+AD\cdot DG=AD^2+BD\cdot DC.\end{aligned}$$

1346． 过 $\triangle ABC$ 内任一点 O，引边 AB、BC、CA 的平行线，与三角形的其他两边的交点分别为 E、F，G、H，I、K，过 O 作 $\triangle ABC$ 外接圆的弦 AL，则

$$EO\cdot OF+GO\cdot OH+IO\cdot OK=AO\cdot OL.$$



解 由问题 **1225** 可知，

$$AO\cdot AL=AB\cdot AK+AC\cdot AE. \qquad ①$$

又由问题 **1226** 可知，

$$AO^2=AG\cdot AK+AH\cdot AE-GO\cdot OH. \qquad ②$$

而

$$\begin{aligned}AO\cdot OL&=AO\cdot(AL-AO)\\ &=AO\cdot AL-AO^2. \qquad ③\end{aligned}$$

把③的结果代入①、②，得

$$\begin{aligned}AO\cdot OL&=AB\cdot AK+AC\cdot AE-AG\cdot AK\\ &\quad -AH\cdot AE+GO\cdot OH\\ &=AK(AB-AG)\\ &\quad +AE(AC-AH)+GO\cdot OH\\ &=AK\cdot BG+AE\cdot CH+GO\cdot OH. \qquad ④\end{aligned}$$

而

$$AK\cdot BG=EO\cdot OF, \qquad ⑤$$

$$AE\cdot CH=KO\cdot OI. \qquad ⑥$$

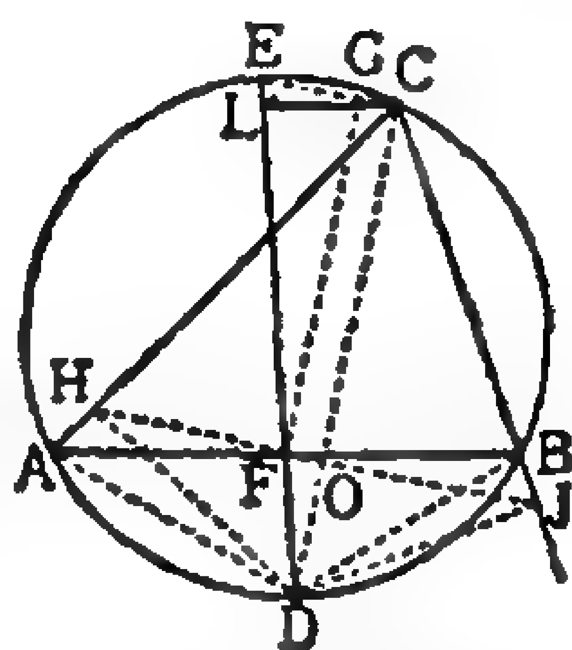
把⑤、⑥代入④，得

$$AO\cdot OL=EO\cdot OF+IO\cdot OK+GO\cdot OH.$$

1347． 设 $\triangle ABC$ 的底边 AB 的中点为

F，过 F 的外接圆的直径为 DE，过顶点 C 引底边的平行线与 DE 交于 L，则

$$4DL\cdot EF=(AC+CB)^2.$$



解　从 D 向 AC、CB 的延长线作垂线 DH、DJ，连结 DA、DB、HF、FJ，根据问题 665(西摩松定理)可知，H、F、J 在一条直线上。设这条直线与 DC 的交点为 O。过 F 引 DC 的平行线交 CE 于 G，因为 CD 是 $\angle ACB$ 的平分线，所以

$$HC=\frac{1}{2}(AC+CB)\text{（问题 536）}.\quad ①$$

又 $\angle DHC$ 是直角，$DC\perp OH$，所以

$$DC\cdot CO=HC^2.$$

从而得出，

$$DC\cdot FG=HC^2.\quad ②$$

因为 $\angle DCE$ 是直角，所以 $\angle EGF$ 也是直角。而 $\angle CLD$ 也是直角。又 $DC\parallel FG$，所以 $\angle EFG=\angle LDC$。

$\therefore\ \triangle DCL\backsim\triangle FEG$.

$\therefore\ DC:DL=FE:FG$.

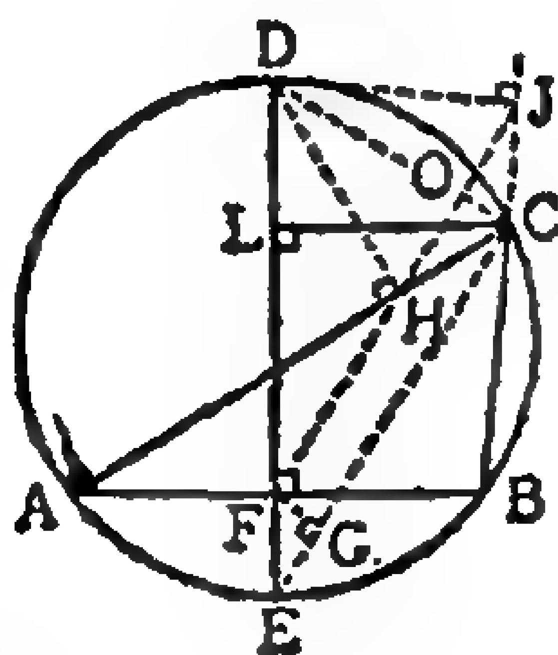
$\therefore\ DC\cdot FG=DL\cdot FE$.　③

由②、③，得 $DL\cdot FE=HC^2$.

代入①，得 $4DL\cdot EF=(AC+CB)^2$.

1348．设 $\triangle ABC$ 的外接圆直径 DE 垂直于 AB，由 C 向 DE 作垂线 CL，若 AB 的中点为 F，则

$$DL\cdot FE=\left[\frac{1}{2}(AC-CB)\right]^2,$$



其中 L 是 D 与 F 中间的点。

解　从 D 向 CA、BC 作垂线 DH、DJ，则

$$CH=CJ=\frac{1}{2}(AC-CB)\text{（问题 536）}.\quad ①$$

设 DC 与 HJ 的交点为 O，则 $DC\perp HO$。又 $HF\parallel CE$，根据西摩松定理可知，J、H、F 在一条直线上。

$\because\ \angle DHC=90°$,

$\therefore\ CO\cdot CD=CH^2$.　②

从 F 向 CE 作垂线 FG，则 $CO=FG$。由②，得

$$FG\cdot CD=CH^2.\quad ③$$

又　$\angle DCE=90°$，$CL\perp DE$，

$\therefore\ \angle DCL=\angle DEC$.

$\therefore\ \triangle DLC\backsim\triangle FGE$.

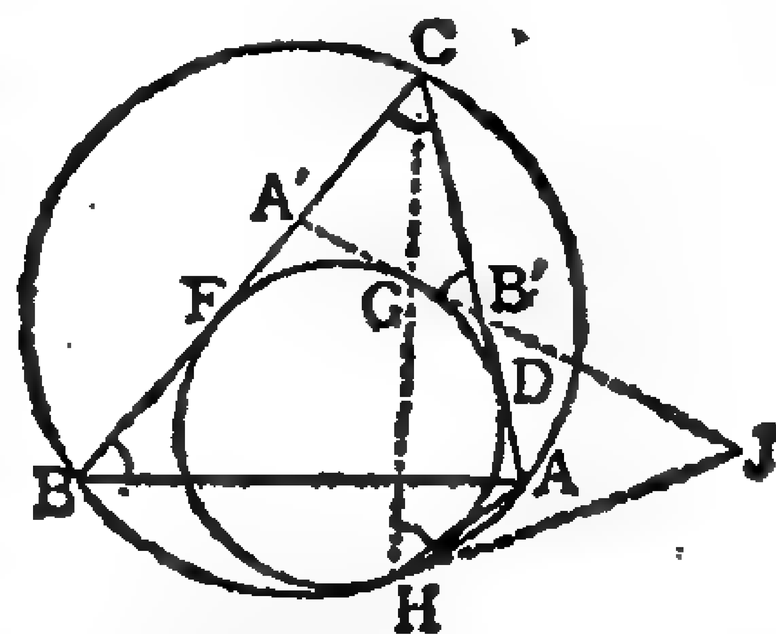
$\therefore\ DC:DL=FE:FG$.

$\therefore\ DL\cdot FE=DC\cdot FG$.　④

由①、③、④，得

$$DL\cdot FE=CH^2=\left[\frac{1}{2}(AC-CB)\right]^2.$$

1349．一圆切 $\triangle ABC$ 的两边 CA、CB 分别于 D、F，同时与 $\triangle ABC$ 的外接圆相内切，设切点为 H，则从顶点 C 到一边的切点的距离是 $\triangle ABC$ 的半周长及 CA、CB 的第四比例项。



解　设圆与 CA、CB 的切点分别为 D、F，与 $\triangle ABC$ 外接圆内切于点 H。连结 CH。又引圆 ABC 的切线 HJ，CH 与圆 DFH 的交点为 G，过 G 引圆 DFH 的切线 GJ，则

$$JG=JH,\ \angle JHG=\angle JGH.$$

设 GJ 在 CA、CB 上的交点分别为 B'、A'，则

$$\angle JGH=\angle GB'C+\angle B'CG.$$

$\therefore\ \angle JHG=\angle GB'C+\angle B'CG$.

又 HJ 是切线，所以 $\angle AHJ=\angle GCB'$.

$\therefore\ \angle GHA=\angle GB'C$.

由此可知，四边形 $GB'AH$ 是圆内接四边形。

$\therefore\ HC\cdot CG=AC\cdot CB'$.

而　$HC\cdot CG=CD^2$.

$\therefore\ AC\cdot CB'=CD^2$.　①

又　$\angle CHA=\angle A'B'C$,

而　$\angle CHA=\angle CBA$,

$\therefore\ \angle CBA=\angle A'B'C$.

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C$.

如果用 S、S' 分别表示 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C$ 的周长的一半，则

$$S:S'=BC:B'C.$$

$\therefore\ S:S'\cdot CA=BC:B'C\cdot CA$.

由①，得 $S:S'\cdot CA=BC:CD^2$.

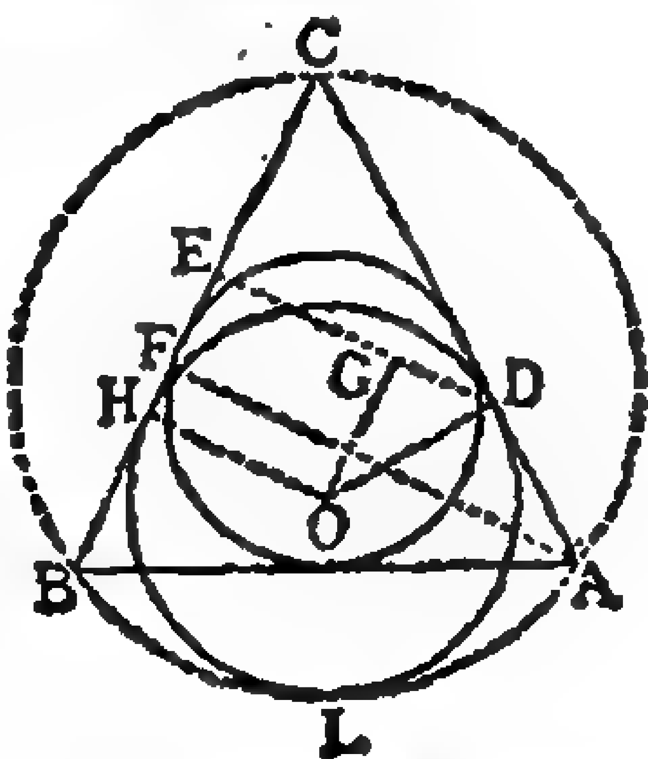
而 $CD^2=S'^2$.　∴ $S:S'\cdot CA=BC:S'^2$.

∴ $S:CA=BC:S'$,

即　　$S:CA=BC:CD$.

即 CD 是 S、CA、CB 的第四比例项.

1350. 一定圆内切于△ABC的两边 BC、CA，且 BC、CA 的位置一定，当第三边 AB 在怎样的位置上时，三角形的外接圆与另一定圆相切?



解　设△ABC 的内切圆是定圆，两边 AC、BC 的位置一定，第三边 AB 是任意位置. 证明△ABC 的外接圆恒与一定圆相切.

设定圆 O 切 AC 于 D，切 BC 于 H，切△ABC 的外接圆于 L. 连结 OD、OH. 又作 BC 上垂线 AF，引 AF 的平行线 DE，从 O 向 DE 作垂线 OG. 若用 S 表示△ABC 的半周长，则根据上题，得 $S:CB=CA:CD$.

又　　$CA:CD=AF:DE$.

∴ $S:CB=AF:DE$.

∴ $S\cdot DE=CB\cdot AF=2S_{\triangle ABC}=2rS$

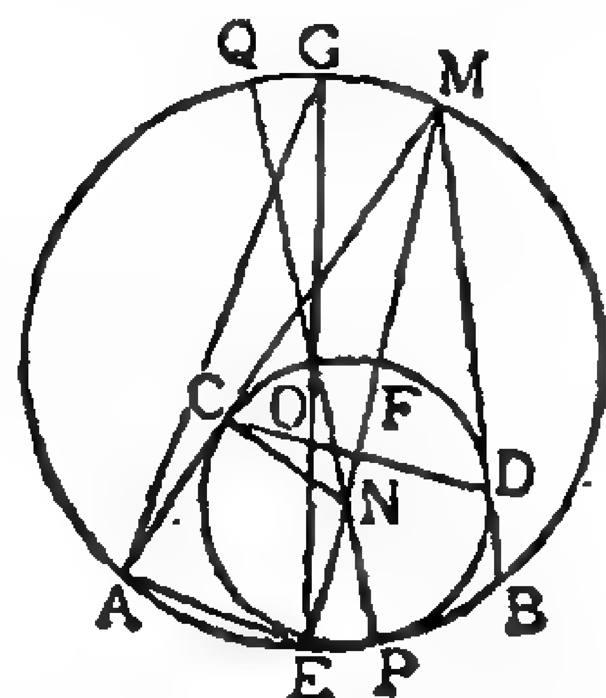
(r 是△ABC 的内切圆半径，是定值).

即 $DE=2r$. 因为 r 是定值，所以 DE 也是定值.

根据假设，可知∠C 是定角. 又∠CED 是直角. 由此可知，△ECD 的三边及三角都一定. 从而得出，D 是定点.

同理可得，点 H 也是定点. 因此，圆 DLH 是定圆，即△ABC 的外接圆恒与定圆 DLH 相切.

1351. 过定圆上一点 M，引两条弦 MA、MB，作圆与定圆内切，且与 MA、MB 分别相切于 C、D. 若 A、B 是定点，当点 M 在圆上移动时，则 CD 恒与另一定圆相切.



解　设定圆的圆心为 O，所作圆的圆心为 N，MN 与 CD 的交点为 F，FN 的延长线与圆 O 交于点 E，过 E 的圆 O 直径的另一端为 G，过两圆切点 P 的圆 O 的直径的另一端为 Q，则

$\angle MCN=90°=\angle MFC$.

∴ $NF\cdot NM=NC^2$,

$NM\cdot NE=NP\cdot NQ=NC\cdot NQ$.

∴ $NF\cdot NM+NM\cdot NE$

$=NC^2+NC\cdot NQ$.

而　$NF\cdot NM+NM\cdot NE$

$=NM\cdot(NF+NE)=NM\cdot EF$.

又　$NC^2+NC\cdot NQ$

$=NC\cdot(NC+NQ)$

$=NC(NP+NQ)=NC\cdot PQ$.

∴ $NM\cdot EF=NC\cdot PQ$.　①

又　∵ △MCN∽△GAE,

∴ $NM:NC=EG:EA$.

∴ $NM\cdot EA=NC\cdot EG$.

即

$NM\cdot EA=NC\cdot PQ$.　②

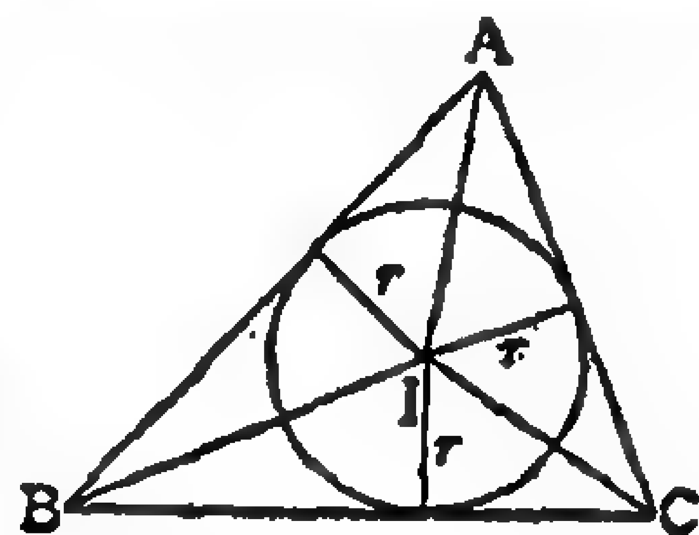
由①、②，得 $NM\cdot EF=NM\cdot EA$.

∴ $EF=EA$.

由此可知，CD 是以定点 E 为圆心，定线段 EA 为半径的圆的切线.

12. 三角形的内切圆、旁切圆的比例线段

1352. 三角形的内心与各顶点连线所成的三个三角形，它们的面积的比等于三角形的三边长的比.



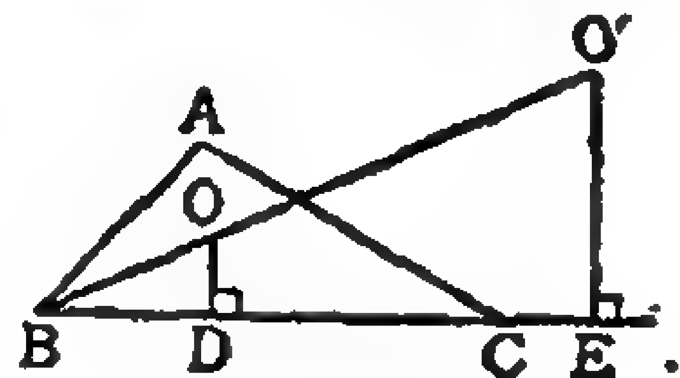
解　设△ABC 的内心为 I，内切圆半径为 r，则

$$S_{\triangle IBC}:S_{\triangle ICA}:S_{\triangle IAB}$$

$$=\frac{1}{2}r\cdot BC:\frac{1}{2}r\cdot CA:\frac{1}{2}r\cdot AB$$

$$=BC:CA:AB.$$

1353. △ABC 的旁切圆半径 $O'E$ 等于内切圆半径 OD 的三倍，则三边长成等差数列.



解　设△ABC 的∠B 内的旁切圆半径为 $O'E$，内切圆半径为 OD. 根据假设，知 $O'E=3OD$.

从而得出，　$BE=3BD$.

而 $BE=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$,

$BD=\frac{1}{2}(AB+BC-CA)$.

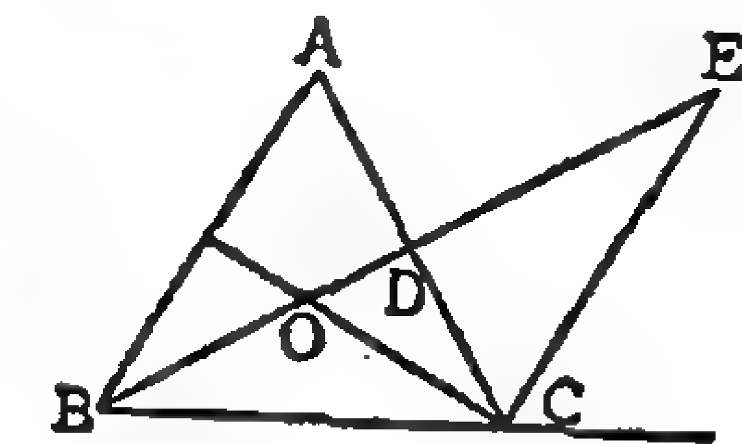
$\therefore\ AB+BC+CA=3(AB+BC-CA)$.

即 $4CA=2(AB+BC)$,

$2CA=(AB+BC)$.

这就是说，三边 AB、CA、BC 成等差数列。

1354. 正三角形的内切圆的半径、外接圆的半径、旁切圆的半径的比等于1:2:3.



解 设正三角形 ABC 的内心为 O，$\angle B$ 内的旁心为 E，直线 BOE 垂直于 AC，若 BOE 与 AC 的交点为 D，则 $DE=BD$，$BO=2DO$.

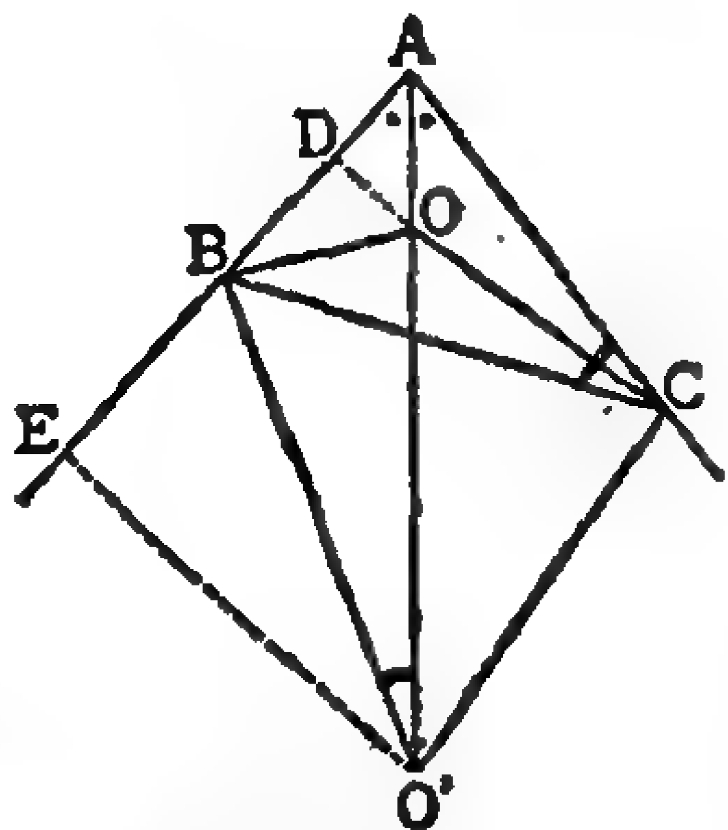
$\therefore\ OD:OB:DE$

$=OD:2OD:3OD=1:2:3$.

1355. 若 $\triangle ABC$ 的内心为 O，则

$$\frac{AO^2}{AB\cdot AC}=\frac{S-a}{S}.$$

其中 S 是 $\triangle ABC$ 的半周长，$a=BC$.



解 设 $\angle A$ 内的旁心为 O'，连结 $O'B$、$O'C$、OB、OC，则四边形 $OBO'C$ 是圆内接四边形。

$\therefore\ \angle ACO=\angle OCB=\angle AO'B$.

又 $\angle CAO=\angle BAO'$.

$\therefore\ \triangle ACO\backsim\triangle AO'B$.

$$\therefore\ \frac{AC}{AO}=\frac{AO'}{AB}.$$

$\therefore\ AB\cdot AC=AO\cdot AO'$.

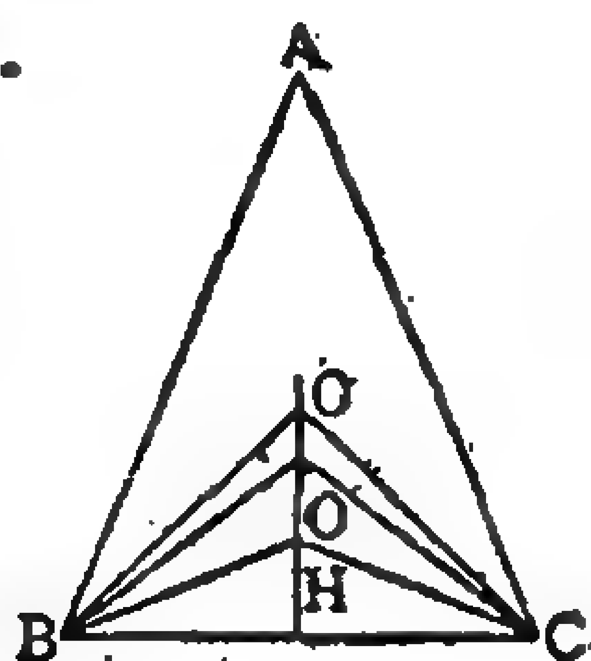
$$\therefore\ \frac{AO^2}{AB\cdot AC}=\frac{AO^2}{AO\cdot AO'}=\frac{AO}{AO'}.$$

从 O、O' 向 AB 引垂线，设垂足分别为 D、E，则

$$\frac{AO}{AO'}=\frac{AD}{AE}=\frac{S-a}{S}.$$

$$\therefore\ \frac{AO^2}{AB\cdot AC}=\frac{S-a}{S}.$$

1356. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 O，外心为 O'，垂心为 H。若 O、O'、H 在一条直线上，则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。



解 由 O 是 $\triangle ABC$ 的内心可知，BO 是 $\angle B$ 的平分线。BH 垂直于 AC，由 O' 是外心可知，

$\angle OBH=\angle OBO'$

（问题**529**），

$$\therefore\ \frac{BH}{BO'}=\frac{HO}{OO'}.$$

同理可得，$\frac{HO}{OO'}=\frac{CH}{CO'}$.

$$\therefore\ \frac{BH}{BO'}=\frac{CH}{CO'}.$$

而 O' 是外心，所以 $BO'=CO'$.

$\therefore\ BH=CH$.

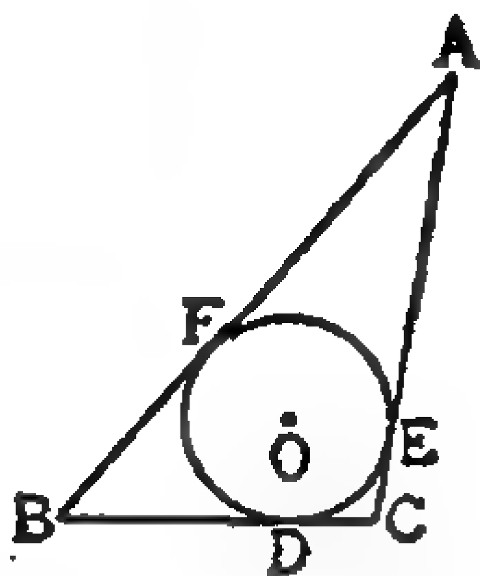
由此可得，垂心 H 是在 BC 的垂直平分线上。又外心 O' 也在 BC 的垂直平分线上。因而 $O'H$ 是 BC 的垂直平分线。

$\therefore\ \angle OBC=\angle OCB$.

从而得出，$\angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore\ AB=AC$.

1357. 圆 O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，D、E、F 是切点。



(1) 若延长 BO 与 EF 的交点为 G，证明 D、E、G、O 共圆。

(2) 设 BC 的延长线与 FE 的延长线交于点 K，AO 的延长线与 BC 交于点 P，过 P 引 FE 的平行线与 BO、BA 分别交于 Q、R，证明 $PQ:QR=KC:CD$.

解 (1) 因为

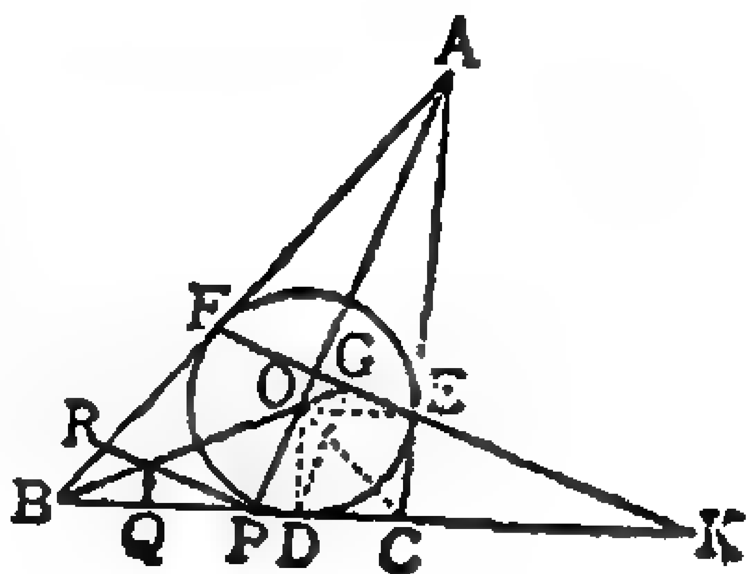
$\angle GOC=\angle OBC+\angle OCB$

$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

$=90°-\frac{1}{2}\angle BAC=\angle AEF$,

所以，点 G 在圆 OCE 上。

又 $\angle ODC=90°=\angle OEC$，所以 D 也在圆 OCE 上。



由此可知，G、E、

D、O 共圆.

(2) 因为 $PR \parallel KF$，所以

$$PQ:QR=KG:GF. \quad ①$$

由(1)，得 D、C、E、G 共圆.

$$\therefore\ \angle CEK=\angle GDK.$$

而 $\angle K$ 是公共角.

$$\therefore\ \triangle KCE \backsim \triangle KGD,$$

$$\therefore\ KC:CE=KG:GD.$$

而 $CE=CD$. 又 $\triangle GBD \cong \triangle GBF$.

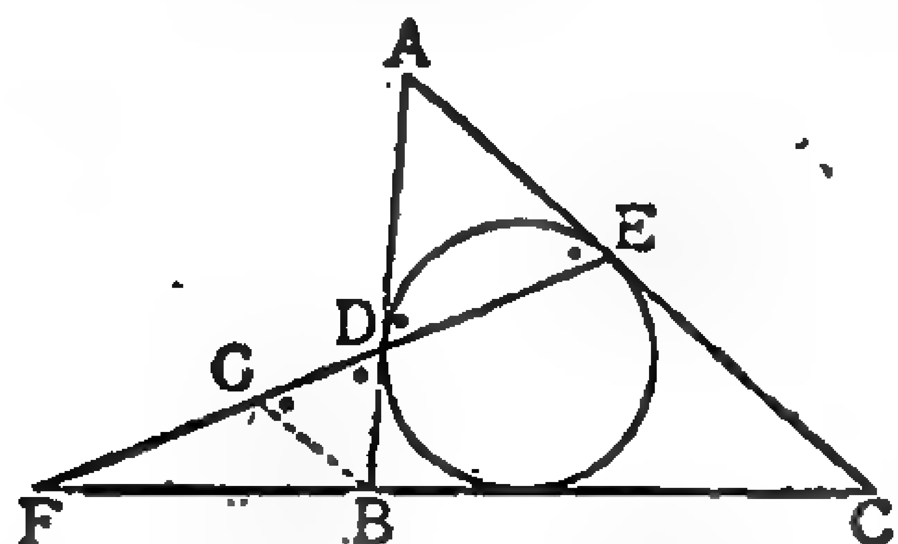
$$\therefore\ GD=GF.$$

$$\therefore\ KC:CD=KG:GF. \quad ②$$

由①、②，得 $PQ:QR=KC:CD$.

1358. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与 AB、AC 的切点分别为 D、E，ED 与 CB 的延长线交于点 F，则

$$\frac{BF}{CF}=\frac{BD}{CE}.$$



解　从 B 引 $BG \parallel AC$ 交 EF 于 G，则

$$\frac{BF}{CF}=\frac{BG}{CE}.$$

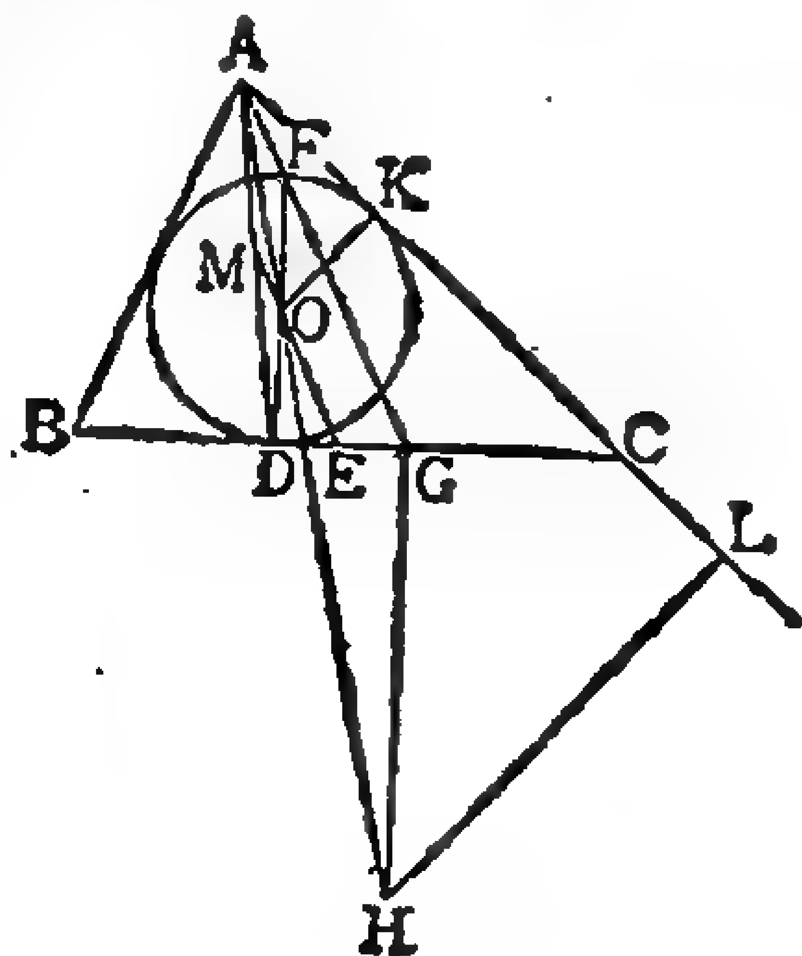
而 $\angle BDG=\angle ADE=\angle AED=\angle BGD$.

$$\therefore\ BG=BD.$$

由此可得，$\dfrac{BF}{CF}=\dfrac{BD}{CE}$.

1359. 设三角形 ABC 的内切圆 O 与 BC 的切点为 D，则 AD 的中点 M、内心 O 及 BC 的中点 E 在一条直线上.

解　引直径 DOF，延长 AF 与 BC 相交于点 G，又作 $GH \perp BC$，AO 的延长线与 GH 交于 H，则



$$\frac{OF}{HG}=\frac{AO}{AH}. \quad ①$$

作 $HL \perp AC$，又 $OK \perp AC$，所以

$$\frac{OK}{HL}=\frac{AO}{AH}. \quad ②$$

由①、②，得 $\dfrac{OF}{HG}=\dfrac{OK}{HL}$.

而 $OF=OK$.　$\therefore\ HG=HL$.

由此可知，H 是 $\triangle ABC$ 的旁心.

从而得出，　$CG=BD$.

由此可得，E 是 DG 的中点. 又 O 是 DF 的中点，所以 M、O、E 是在一条直线上.

1360. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与 AB 的切点为 D，从 A、B 向 $\angle C$ 的平分线所作的垂线分别为 AE、BF，则

$$AD \cdot BD=AE \cdot BF.$$

解　设 AB 的中点为 G，连结 EG，并延长 EG 与 BF 相交于点 I. 连结 FG.

设 $\triangle ABC$ 的各边 BC、CA、AB 分别为 a、b、c，半周长为 S，根据问题 **444**，得

$$BD=S-b,\ AD=S-a.$$

$$\therefore\ BD-AD=2GD=a-b.$$

设 AE 的延长线与 BC 的交点为 H，则

$$CH=CA,$$

$$\therefore\ CB-CA=BH=a-b.$$

即　　$2GD=BH=2GE$.

$$\therefore\ GD=GE,\ GD=GF.$$

从而得出，　$GD=GI$.

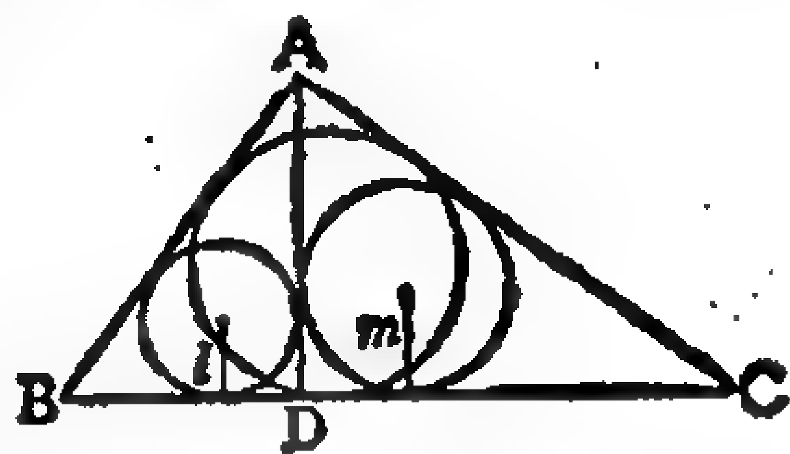
所以，$GE=GD=GF=GI$. 由此可得，以 G 为圆心，GD 为半径的圆经过点 E、D、F、I. 设这个圆与 AB 的交点为 K，则

$$BD \cdot BK=BF \cdot BI. \quad ①$$

又四边形 $HBIE$ 的对边互相平行，它是平行四边形，所以 $BI=HE=EA$. $BK=AD$.

由①，得　$AD \cdot BD=AE \cdot BF$.

1361. 从直角三角形 ABC 的直角顶点 A 向斜边引垂线 AD，设 $\triangle BAD$、$\triangle CAD$ 的内切圆半径分别为 l、m，又 $\triangle ABC$ 的半周长为 s，斜边为 c，则 $l^2+m^2=(s-c)^2$.



解　因为 $\triangle ABD$、$\triangle CAD$、$\triangle ABC$ 都相似，设它们的内切圆半径依次为 l、m、n，所

以斜边 AB、AC、BC 的比等于 l、m、n 的比。

即 $$\frac{AB}{l}=\frac{AC}{m}=\frac{BC}{n}.$$

$$\therefore\quad \frac{AB^2+AC^2}{l^2+m^2}=\frac{BC^2}{n^2}.$$

而 $$AB^2+AC^2=BC^2,$$

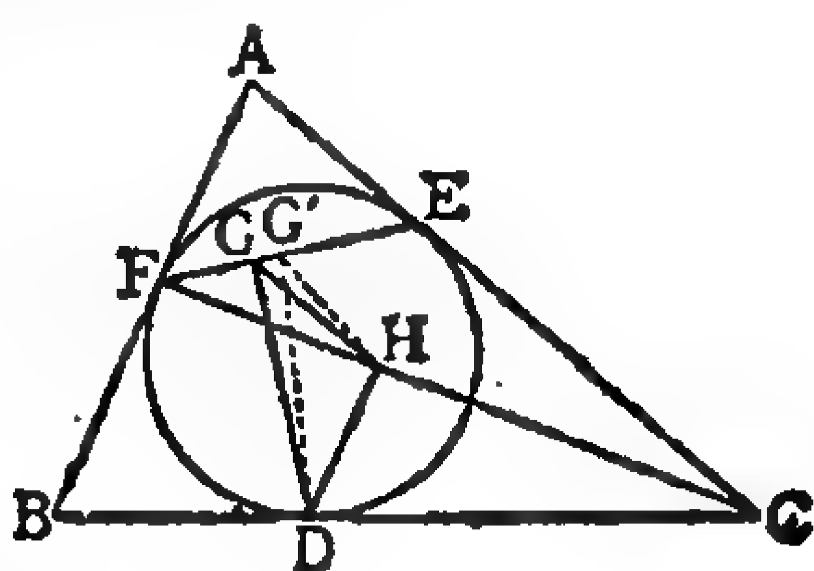
$$\therefore\quad l^2+m^2=n^2.$$

而 $r=\frac{1}{2}(AC+BC-AB)=s-c$

(问题 **472**)。

$$\therefore\quad l^2+m^2=(s-c)^2.$$

1362. 若三角形 ABC 的内切圆在 BC、CA、AB 上的切点分别为 D、E、F，且 $DG\perp EF$，则 $\frac{FG}{EG}=\frac{BF}{CE}$。



解 从 D 引 BF 的平行线与 CF 的交点为 H，从 H 引 AC 的平行线与 EF 的交点为 G'，则

$$\frac{HG'}{CE}=\frac{FH}{FC}=\frac{BD}{BC}=\frac{BF}{BC}=\frac{HD}{DC}.$$

而 $CE=DC$. $\therefore$ $HG'=HD$.

$$\therefore\quad \angle HG'D=\angle HDG'.$$

因为 $\angle DHG'$ 等于 $\angle A$ 的补角，所以

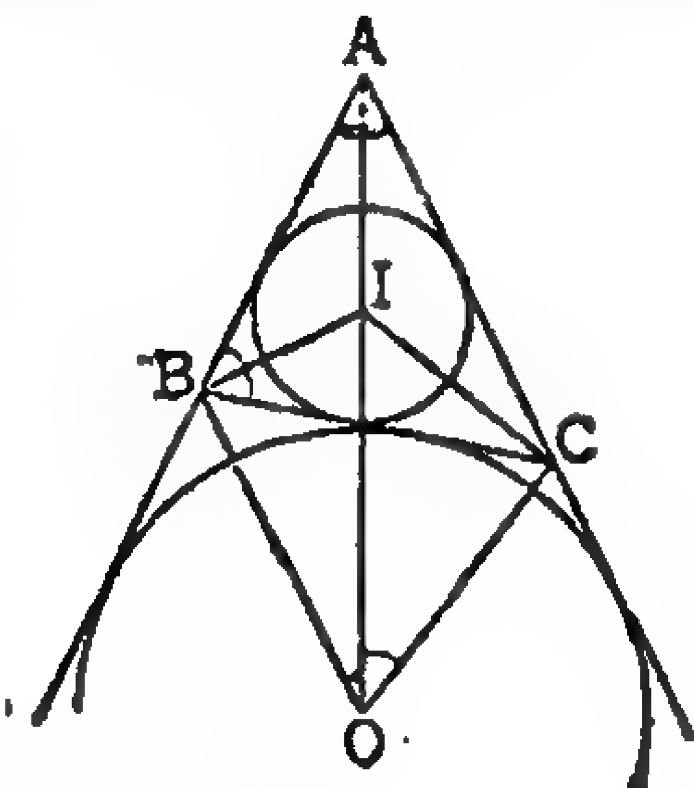
$$\angle HG'D=\frac{1}{2}\angle A.$$

而 $HG'\parallel AC$，所以 DG' 平行于 $\angle A$ 的平分线。又 DG 平行于 $\angle A$ 的平分线，所以 G 与 G' 相重合。

$$\therefore\quad \frac{FG}{EG}=\frac{FH}{HC}=\frac{BD}{DC}=\frac{BF}{CE}.$$

1363. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，$\angle A$ 内的旁心为 O，则

$AI\cdot AO=AB\cdot AC$.



解 因为四边形 $IBOC$ 是圆内接四边形，所以

$\angle ABI=\angle IBC$

$=\angle IOC$.

又 $\angle BAI=\angle OAC$，

所以 $\triangle ABI\backsim\triangle AOC$.

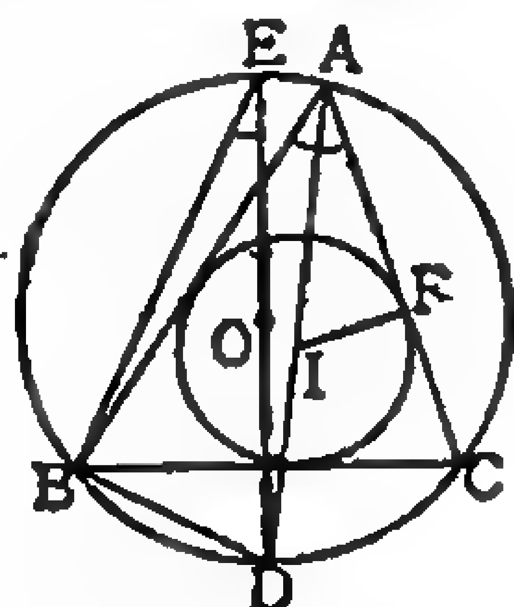
$$\therefore\quad AB:AI=AO:AC.$$

即 $$AI\cdot AO=AB\cdot AC.$$

1364. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，连结 A、I 的直线与外接圆的另一交点为 D，则

$$AI\cdot ID=2Rr.$$

其中 R、r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的半径的长。



解 过 D 作直径 DE，又内切圆与 AC 的切点为 F。在 $\triangle EBD$、$\triangle AIF$ 中，

$$\angle EBD=90^\circ=\angle AFI,$$

$$\angle BED=\angle BAD=\angle IAF$$

$$(\because\ \widehat{BD}=\widehat{DC}),$$

$$\therefore\quad \triangle EBD\backsim\triangle AFI.$$

$$\therefore\quad DB:DE=IF:IA. \qquad ①$$

但是 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，所以 $DB=DI$（问题 **459**）。

又 $DE=2R$，$IF=r$，代入①，得

$$DI:2R=r:IA,$$

$$\therefore\quad AI\cdot ID=2R\cdot r.$$

1365. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，内心为 I，则 $OI^2=R^2-2Rr$。其中 R、r 是外接圆与内切圆的半径。

解 根据上题，得

$AI\cdot ID=2Rr$. ①

设过 O、I 的直线与圆 O 的交点为 E、F，则

$$AI\cdot ID=EI\cdot IF=(EO+OI)\cdot(OF-OI)$$

$$=(R+OI)\cdot(R-OI)=R^2-OI^2. \quad ②$$

由①、②，得 $R^2-OI^2=2R\cdot r$.

所以，$$OI^2=R^2-2R\cdot r.$$

1366. 设 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a、b、c，它的内切圆半径为 r，外接圆半径为 R，则

$$\frac{1}{2Rr}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}.$$

解 设 $\triangle ABC$ 的内心为 O，内切圆的半径为 r，面积为 S，则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}$$

$$=\frac{r}{2}(AB+BC+CA),$$

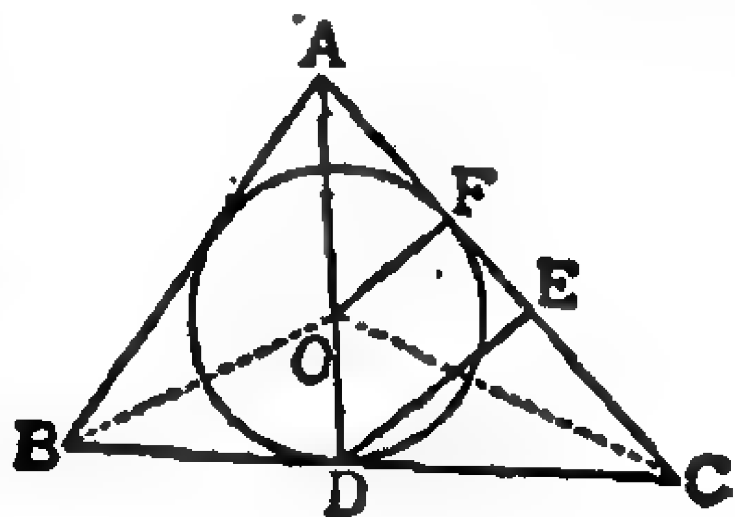
$$\therefore\quad S=\frac{r}{2}(a+b+c).\qquad ①$$

根据问题 **977**，得 $S=\frac{abc}{4R}$. 代入①，得

$$\frac{abc}{4R}=\frac{r}{2}(a+b+c).$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2Rr}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}.$$

1367. 在 $\triangle ABC$ 中，底边 BC 的大小位置一定，$AB+AC$ 的长度等于定值，则 $\angle A$ 的平分线 AD 在边 AC 上的正投影 AE 是定长线段.



解　设 $\triangle ABC$ 的内心为 O，$OF\perp AC$，则

$$\frac{AE}{AF}=\frac{DE}{OF}.\qquad ①$$

而　　$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$.

$\because$ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(AB+CA)\cdot DE.$$

又　$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BCO}+S_{\triangle CAO}$

$$=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)\cdot OF.$$

$\therefore$　$(AB+CA)\cdot DE$

$=(BC+CA+AB)\cdot OF$.

$$\therefore\quad \frac{DE}{OF}=\frac{BC+CA+AB}{AB+CA}\text{（定比）}.$$

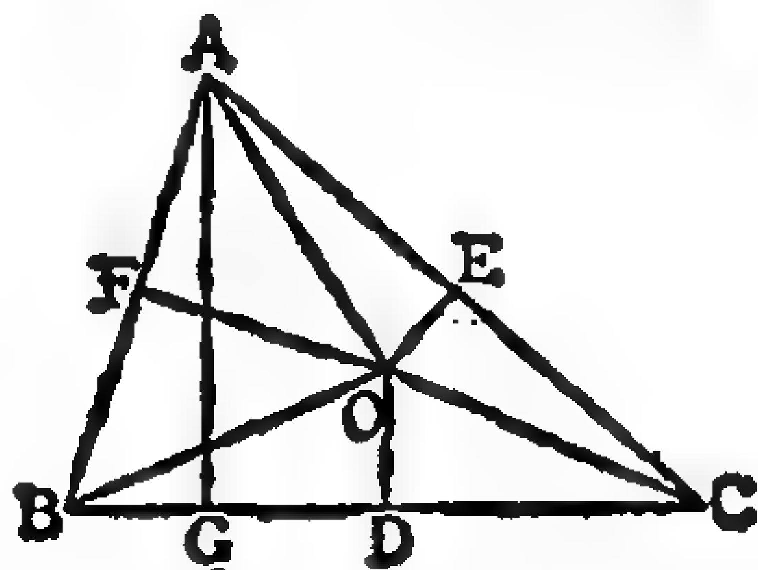
又　$AF=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$（定值），

所以，由①可知，AE 是定长的线段.

1368. 从 $\triangle ABC$ 的外心 O 向三边引垂线 OD、OE、OF，设外接圆半径为 R，内切圆的半径为 r，则

$OD+OE+OF$

$=R+r$.



解　过 A 引 $AG\perp BC$，O 为外心，则

$$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=\angle AOE.$$

又　　$\angle AGB=\angle AEO$.

$\therefore$　$\triangle ABG\backsim\triangle AOE$.

从而得出，$AB:BG=AO:OE$.

$AB\cdot OE=BG\cdot OA=BG\cdot R$.

同理可得，$AC\cdot OF=CG\cdot R$.

把上面两式的两边分别相加，得

$AB\cdot OE+AC\cdot OF=BC\cdot R$.

同理可得，$AB\cdot OD+BC\cdot OF=AC\cdot R$,

$BC\cdot OE+AC\cdot OD=AB\cdot R$.

$\therefore$　$OD\cdot(AB+AC)+OE\cdot(AB+BC)$

$+OF\cdot(BC+AC)$

$=(AB+BC+CA)\cdot R$.

又　　$OD\cdot BC+OE\cdot AC+OF\cdot AB$

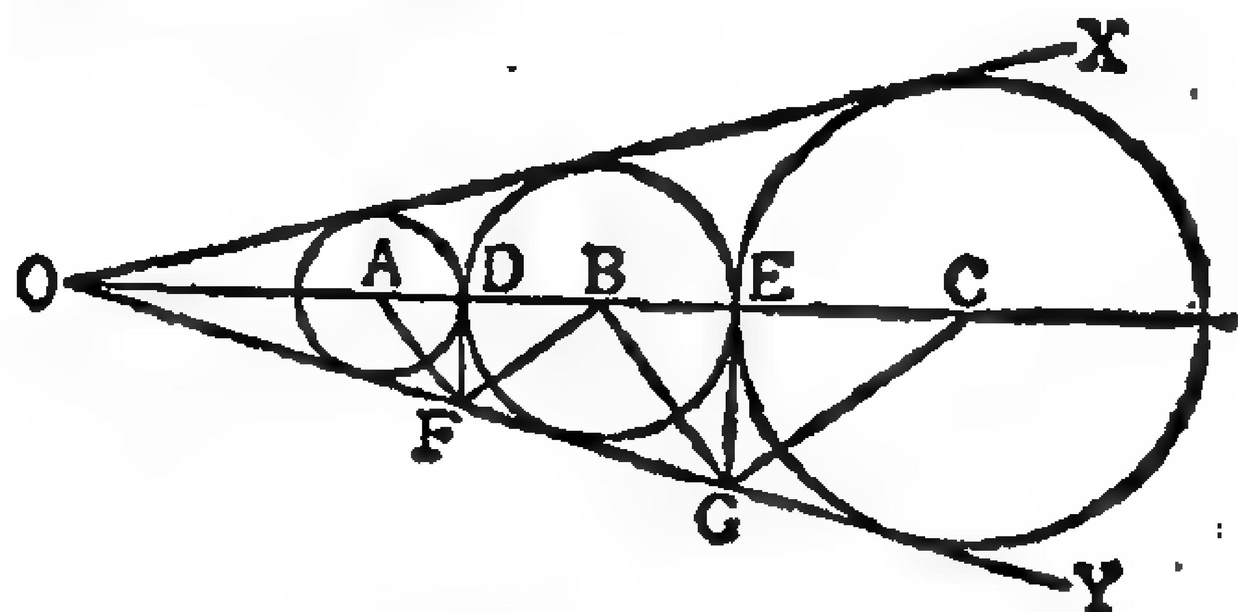
$=(AB+BC+CA)\cdot r$

（$\because$ 等式的两边都是 $\triangle ABC$ 面积的两倍）.

把上面两式的两边分别相加并除以 $AB+BC+CA$ 得

$$OD+OE+OF=R+r.$$

1369. 若 $\angle XOY$ 的两边切于互相外切的三个圆 A、B、C，则圆 B 的半径是圆 A、圆 C 的半径的比例中项.



解　设圆 A、B 及圆 B、C 的切点分别为 D、E，引公切线 DF、EG，则

$$\angle AFB=90°=\angle BGC.$$

$\therefore$　$\triangle AFB\backsim\triangle BGC$.

$$\therefore\quad \frac{AF}{FB}=\frac{BG}{CG}.$$

而根据问题 **1136**，得

$$\frac{AF^2}{BF^2}=\frac{AD}{BD},\quad \frac{BG^2}{CG^2}=\frac{BE}{CE}.$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{BD}=\frac{BE}{CE}.\quad\therefore\quad AD\cdot CE=BD\cdot BE.$$

从而得出，$AD\cdot CE=BD^2$.

1370. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，垂心为 H，从 A 向 BC 引垂线，垂足为 D，内切圆半径为 r，则

$$IH^2=2r^2-AH\cdot HD.$$

解　设 $\angle A$ 所对的旁心为 I_1，

$\because$　$\triangle AIB\backsim\triangle ACI_1$,

$\therefore$　$AI_1\cdot AI=AB\cdot AC$.　　①

由问题 **1318**，得 $AB\cdot AC$ 等于外接圆的直

径与高 AD 的积。设外接圆的直径为 $2R$，则

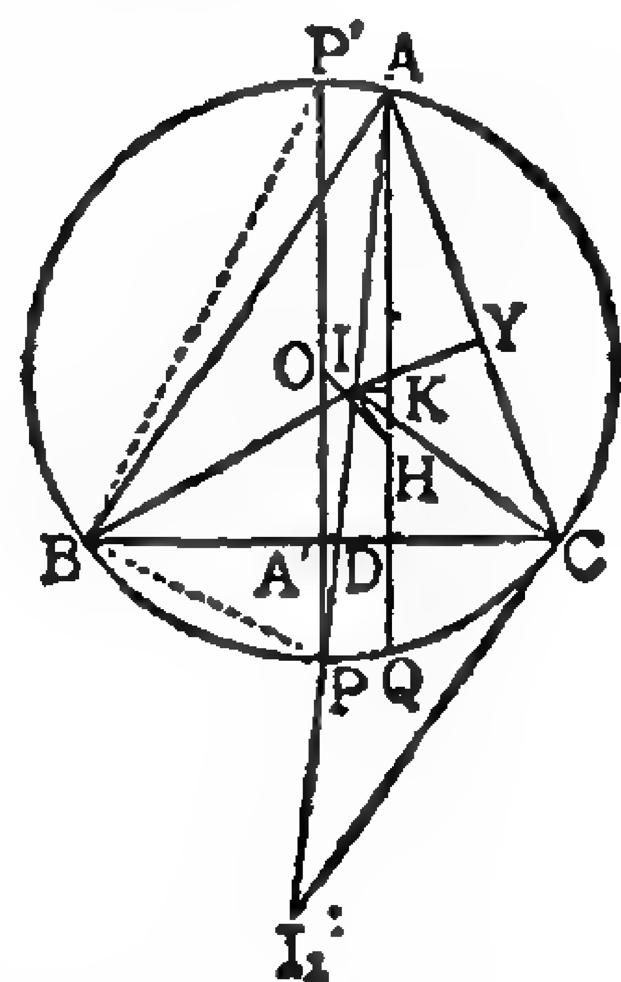
$$AB\cdot AC=2R\cdot AD. \quad ②$$

而根据问题 **461**，得 $PI=PI_1$。

$$\therefore\ AI\cdot AI_1=AI\cdot(AP+PI_1)$$
$$=AI\cdot(AP+AP-AI)$$
$$=AI\cdot(2AP-AI)$$
$$=2AI\cdot AP-AI^2. \quad ③$$

由①、②、③，得

$$2AI\cdot AP-AI^2=2R\cdot AD. \quad ④$$



设 $IK\perp AD$，

则 $\triangle AIK\backsim\triangle PP'A$。

$$AI\cdot AP=AK\cdot PP'=AK\cdot 2R.$$

所以，由④可得，

$$4R\cdot AK-AI^2=2R\cdot AD. \quad ⑤$$

又在 $\triangle AIH$ 中，

$$IH^2=AI^2+AH^2-2AH\cdot AK.$$

两边同乘以 $2R$，得

$$2R\cdot HI^2=2R\cdot AI^2+2R\cdot AH^2-4R\cdot AH\cdot AK.$$

由⑤，得

$$2R\cdot HI^2=2R\cdot AI^2+2R\cdot AH^2-AH(2R\cdot AD+AI^2),$$
$$2R\cdot HI^2=AI^2\cdot(2R-AH)-2R\cdot AH(AD-AH).$$

设 A' 是 PP' 与 BC 的交点，则

$$2R\cdot HI^2=AI^2\cdot(PP'-2OA')-2R\cdot AH\cdot HD.$$
$$\therefore\ 2R\cdot HI^2=2AI^2\cdot A'P-2R\cdot AH\cdot HD. \quad ⑥$$

从 I 引直线 IY 垂直于 AC，设垂足为 Y。

$$\because\ \triangle BA'P\backsim\triangle AYI,$$
$$\therefore\ A'P\cdot AI=r\cdot BP.$$

又 $\triangle P'BP\backsim\triangle AYI$，

$$\therefore\ BP\cdot AI=2Rr.$$

所以，$A'P\cdot AI^2=2Rr^2$。代入⑥，得

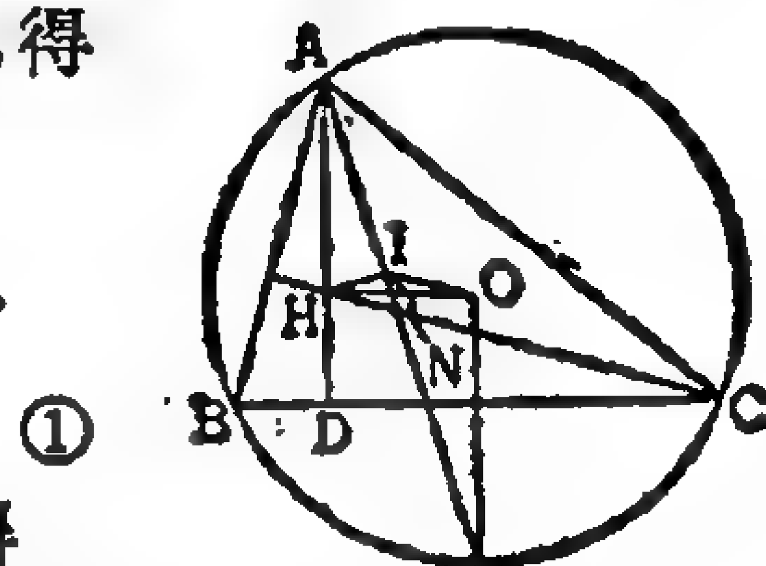
$$2R\cdot HI^2=4Rr^2-2R\cdot AH\cdot HD.$$
$$\therefore\ HI^2=2r^2-AH\cdot HD.$$

1371．在 $\triangle ABC$ 中，内切圆的圆心为 I，半径为 r，九点圆的圆心为 N，外接圆半径为 R，则

$$NI=\frac{R}{2}-r. \qquad \text{[费尔巴哈定理]}$$

解　设 O 为外心，H 为垂心，N 是 OH 的中点，根据中线定理，得

$$HI^2+IO^2=\frac{1}{2}OH^2+2NI^2. \quad ①$$



根据问题 **1365**，得

$$OI^2=R^2-2Rr. \quad ②$$

又根据问题 **1370**，得

$$IH^2=2r^2-AH\cdot HD. \quad ③$$

根据问题 **1341**，

$$OH^2=R^2-2AH\cdot HD. \quad ④$$

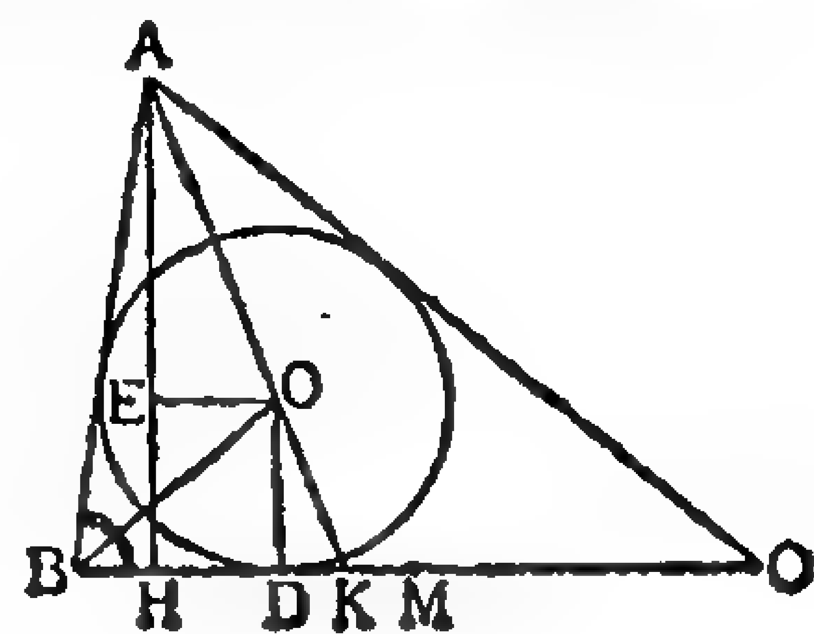
把②、③、④代入①，得

$$(2r^2-AH\cdot HD)+(R^2-2Rr)=\frac{1}{2}(R^2-2AH\cdot HD)+2NI^2,$$
$$\therefore\ 4r^2+R^2-4Rr=4NI^2,$$
$$2NI=R-2r.$$

所以，$NI=\dfrac{R}{2}-r$。

注　由 $NI=\dfrac{R}{2}-r$ 可知，以 N 为圆心，$\dfrac{R}{2}$ 为半径的圆是九点圆．以 I 为圆心，r 为半径的圆是内切圆，这就是费尔巴哈定理。

1372．设 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点为 M，由顶点 A 向 BC 引垂线，垂足为 H，$\angle A$ 的平分线与 BC 的交点为 K，内切圆与 BC 的切点为 D，则



$$MD\cdot HD=MH\cdot DK.$$

解　连结 OD，则 $OD\parallel AH$。

$$\therefore\ \frac{DK}{HD}=\frac{OK}{AO}.$$

又 BO、CO 分别是 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线，所以

$$\frac{BK}{BA}=\frac{OK}{AO}=\frac{CK}{AC}.$$

$$\therefore\ \frac{DK}{HD}=\frac{BK}{BA}=\frac{CK}{AC}=\frac{BK+CK}{BA+AC}$$

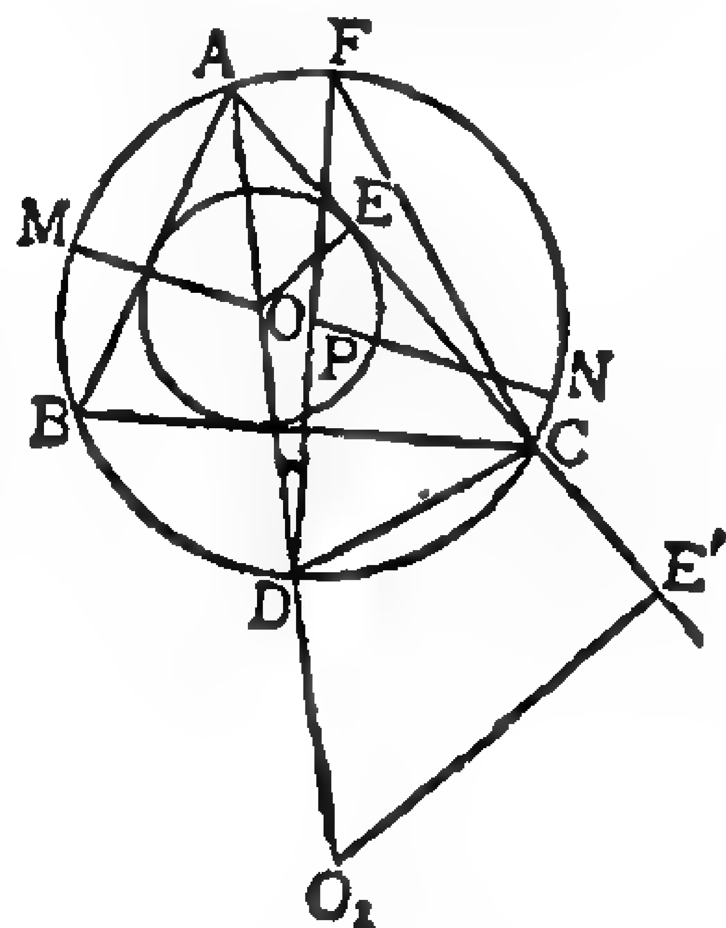
$$=\frac{BC}{BA+AC}=\frac{BC\cdot(AC-BA)}{(AC+BA)\cdot(AC-BA)}$$

$$=\frac{BC(AC-BA)}{AC^2-AB^2}=\frac{2BC\cdot\frac{1}{2}(AC-BA)}{CH^2-BH^2}$$

$$=\frac{2BC\cdot MD}{2BC\cdot MH}=\frac{MD}{MH}.$$

从而得出，$MD\cdot HD=MH\cdot DK$。

1373. 在$\triangle ABC$中，外接圆、内切圆及三个旁切圆的圆心分别为P、O、O_1、O_2、O_3，半径分别为R、r、r_1、r_2、r_3，P到O、O_1、O_2、O_3的距离分别为d、d_1、d_2、d_3，则



$$R^2=d^2+2Rr=d_1^2-2Rr_1=d_2^2-2Rr_2=d_3^2-2Rr_3=\frac{1}{12}(d^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2).$$

解　连结OO_1，OO_1与外接圆的交点为D，过D作外接圆直径DF，OP与外接圆的交点为M、N，且$OE\perp AC$，则

$$\triangle AEO\backsim\triangle FCD.$$

$$\therefore\quad \frac{AO}{OE}=\frac{FD}{DC}.$$

$$\therefore\quad FD\cdot OE=AO\cdot DC.$$

由问题**459**，得$DO=DC$。

$$\therefore\quad FD\cdot OE=AO\cdot DO=OM\cdot ON=(MP-OP)\cdot(MP+OP)=MP^2-OP^2=R^2-d^2.$$

$\therefore\quad 2Rr=R^2-d^2$，　即　$R^2=d^2+2Rr$。

又，由O_1向AC引垂线O_1E'，则

$$\triangle AO_1E'\backsim\triangle FDC,$$

同理可得，

$2Rr_1=d_1^2-R^2$，　$\therefore\quad R^2=d_1^2-2Rr_1$。

又　$R^2=d_2^2-2Rr_2$，$R^2=d_3^2-2Rr_3$。

上面四式的两边分别相加，得

$$4R^2=d^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2-2R(r_1+r_2+r_3-r).$$

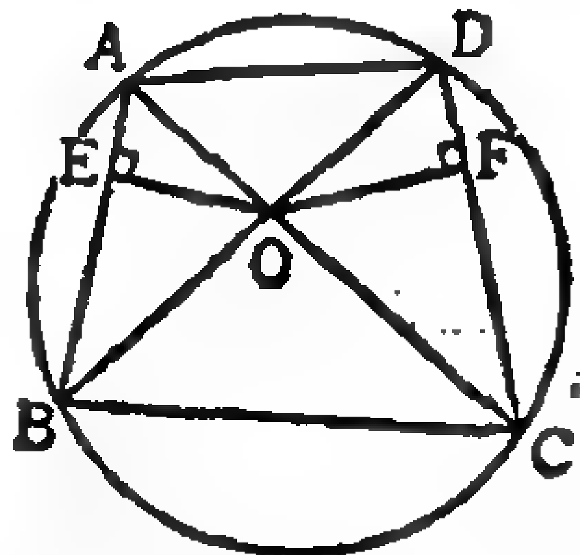
而$r_1+r_2+r_3-r=4R$(问题**484**)。

$$\therefore\quad 12R^2=d^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2.$$

$$\therefore\quad R^2=\frac{1}{12}(d^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2).$$

13. 圆内接、外切四边形及其他多边形的比例线段

1374. 若从圆内接四边形的对角线的交点向一组对边引垂线，则两垂线的比等于这两边的比。



解　设圆内接四边形$ABCD$对角线的交点为O，由O向边AB、CD所引垂线分别为OE、OF，则$\triangle BOE\backsim\triangle COF$。

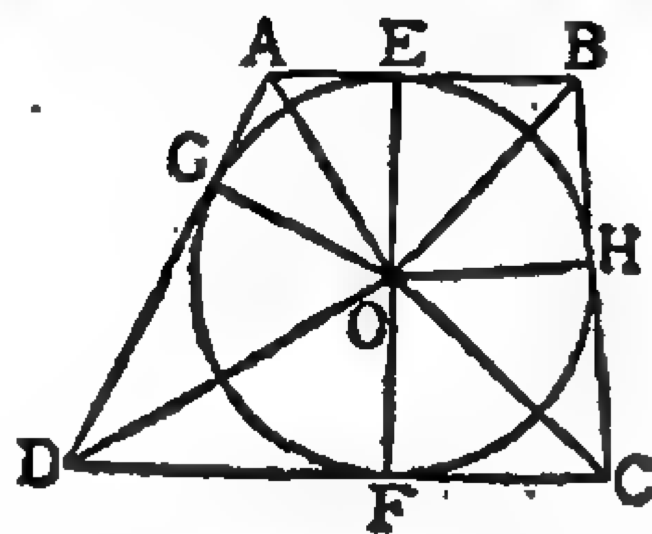
$$\therefore\quad BO:CO=OE:OF.$$

而$\triangle AOB\backsim\triangle DOC$。从而得出，

$$BO:CO=AB:CD.$$

$$\therefore\quad OE:OF=AB:CD.$$

1375. 设圆的外切梯形$ABCD$的两底AB、CD与圆的切点分别为E、F，则$AE:EB=FC:DF$。



解　设圆心为O，连结OE、OF，则EOF是一条直线。又AD与圆的切点为G，连结OG，则四边形$OGDF$是圆内接四边形，所以$\angle GOE=\angle GDF$。

连结AO、DO，则$\triangle AGO\cong\triangle AEO$。又$\triangle DOG\cong\triangle DOF$，所以$AO$是$\angle EOG$及$\angle A$的平分线。

同理可得，DO是$\angle GOF$及$\angle D$的平分线。

$$\therefore\quad \angle AOE=\angle ODF,\quad \angle EAO=\angle DOF.$$

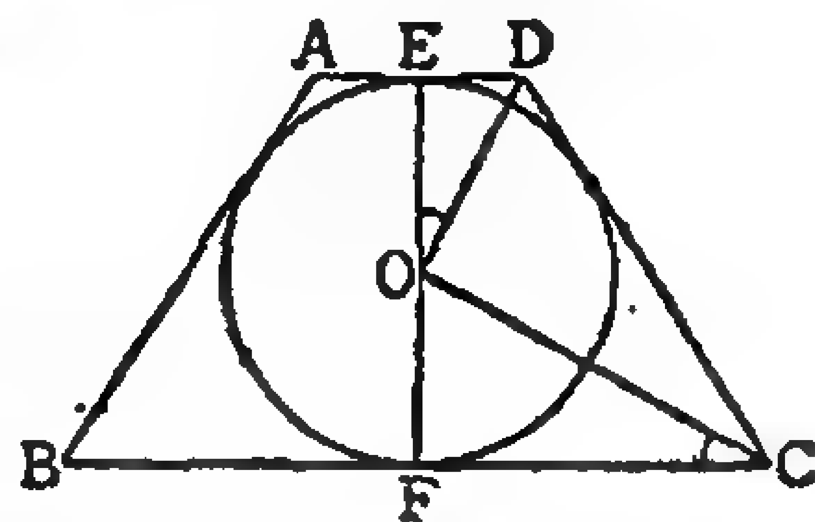
$$\therefore\quad \triangle AOE\backsim\triangle ODF.$$

$$\therefore\quad AE:OE=OF:DF.$$

同理可得，$EB:OE=OF:FC$。所以

$$AE:EB=FC:DF.$$

1376. 设等腰梯形$ABCD$外切于圆O，则圆的直径EF是上、下两底AD、BC的比例中项。



解　设圆O与AD、BC分别相切于点E、F，连结OE、OF，则EOF是一条直线，且$EF\perp AD$。

又$\angle COD=90°$。$\therefore\ \angle OCF=\angle EOD$。

所以　　$\triangle OED \backsim \triangle CFO$.

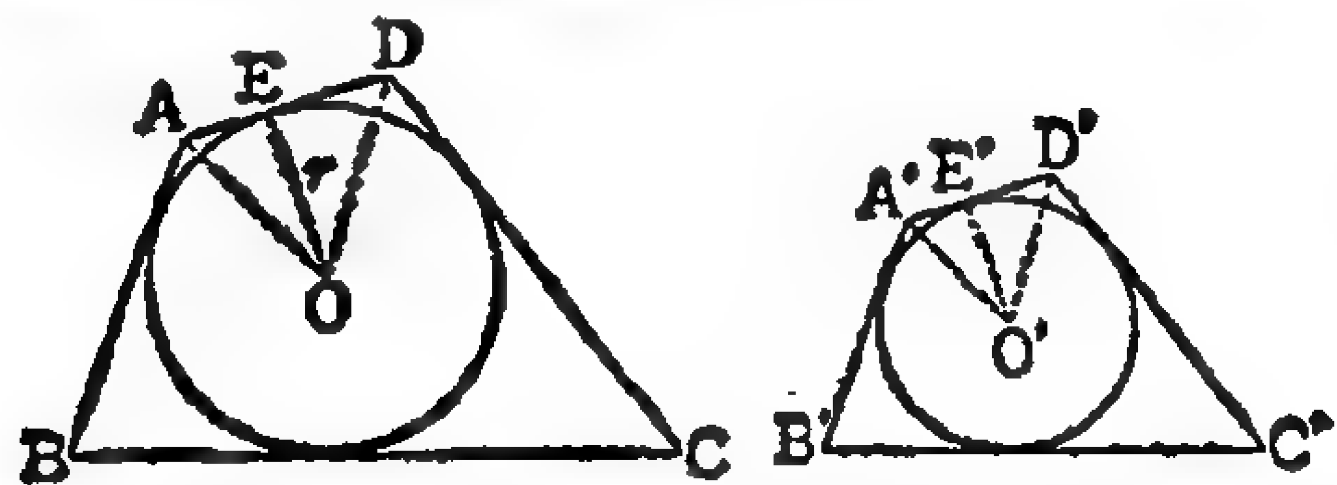
$\therefore\ \dfrac{DE}{EO}=\dfrac{OF}{FC}$, 即 $DE\cdot FC=OE\cdot OF$.

而　　$DE=\dfrac{1}{2}AD,\ FC=\dfrac{1}{2}BC$.

又　　$OE=OF=\dfrac{1}{2}EF$.

$\therefore\ AD\cdot BC=EF^2$.

1377. 圆 O 的面积是它的外切四边形的面积和与这个四边形相似且其周长等于圆 O 的周长的四边形面积的比例中项.



解　设四边形 $ABCD\backsim$四边形 $A'B'C'D'$, 且 $A'B'C'D'$ 的周长等于圆 O 的周长(半径为 r).

设四边形 $A'B'C'D'$ 的内切圆 O' 的半径为 r', 则

$$\frac{AB+BC+CD+DA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'}=\frac{r}{r'}. \quad ①$$

而 $A'B'+B'C'+C'D'+D'A'$ 等于圆 O 的周长,即

$$A'B'+B'C'+C'D'+D'A'=2\pi r.$$

由①, 得 $\dfrac{AB+BC+CD+DA}{2\pi r}=\dfrac{r}{r'}$,

显然,圆 O 的面积$=\pi r^2$,

四边形 $ABCD$ 的面积

$$=\frac{r}{2}(AB+BC+CD+DA)=\frac{\pi r^2}{r'},$$

四边形 $A'B'C'D'$ 的面积

$$=\frac{r'}{2}(A'B'+B'C'+C'D'+D'A')$$

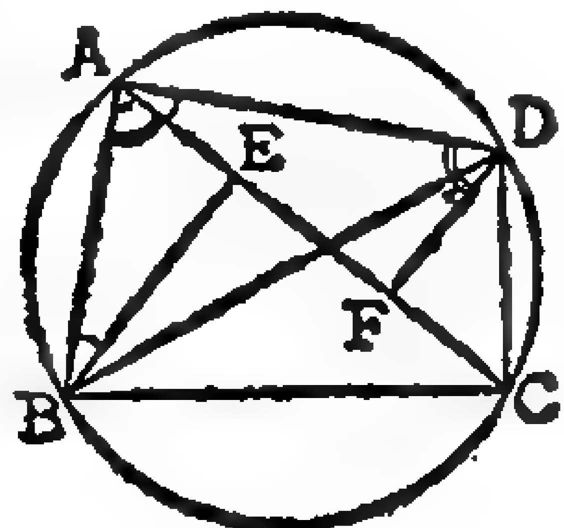
$$=\frac{r'}{2}\times 2\pi r=\pi rr'.$$

$$\therefore\ \frac{\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积}}{\pi r^2}=\frac{r}{r'},$$

$$\frac{\pi r^2}{\text{四边形 }A'B'C'D'\text{ 的面积}}=\frac{r}{r'}.$$

$$\therefore\ \frac{\text{四边形 }ABCD\text{ 的面积}}{\text{圆 }O\text{ 的面积}}=\frac{\text{圆 }O\text{ 的面积}}{\text{四边形 }A'B'C'D'\text{ 的面积}}.$$

1378. 四边形 $ABCD$ 内接于圆, 过点 B 引直线与 AB 的夹角等于 $\angle DAC$, 且与 AC 交于点 E, 过点 D 引直线与 AD 的夹角等于 $\angle BAC$, 且与 AC 交于点 F, 则 $AF=CE$.



解　连结 BD.

$\because\ \angle CAD$
$=\angle CBD=\angle ABE$,
$\angle ACD=\angle ABD=\angle EBC$,

$\therefore\ \angle AEB=\angle BCD=\angle AFD$.

$\therefore\ \triangle DBC\backsim\triangle DAF$. 从而得出,

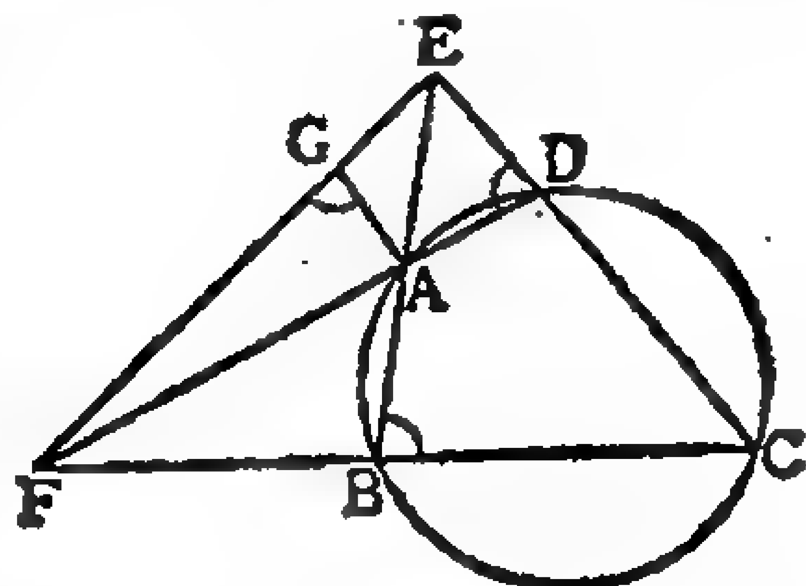
$$BC:CD=AF:FD.$$

又 $\triangle EBC\backsim\triangle FCD$. 从而得出,

$$BC:CD=CE:FD.$$

$\therefore\ AF:FD=CE:FD.\ \therefore\ AF=CE$.

1379. 若四边形 $ABCD$ 是圆的内接四边形, 且 $BC=CD$, 则 $AC^2=BC^2+AB\cdot AD$.



解　根据假设 $BC=CD$ 可知, C 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点. 由此可得, AC 是 $\angle BAD$ 的平分线. 如果 AC 与 BD 的交点为 P, 由问题 **1074**, 得

$$AB\cdot AD=AP\cdot AC. \quad ①$$

而　$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$. $\therefore\ \angle DBC=\angle BAC$.

由此可知, BC 是 $\triangle ABP$ 的外接圆的切线.

$$\therefore\ BC^2=PC\cdot AC. \quad ②$$

把①+②,得

$$AB\cdot AD+BC^2=AC\cdot(AP+PC),$$

即　$AB\cdot AD+BC^2=AC\cdot AC=AC^2$.

1380. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的对边 BA、CD 的延长线相交于点 E, DA、CB 的延长线相交于 F, 则 $ED\cdot EC+FB\cdot FC=EF^2$.

解　设 $\triangle EDA$ 的外接圆与 EF 相交于点 G. 因为 $\angle FGA=\angle EDA=\angle ABC$, 所以 $AGFB$ 是圆内接四边形.

$$\therefore\ EG\cdot EF=EA\cdot EB=ED\cdot EC. \quad ①$$

又　$FG\cdot FE=FA\cdot FD=FB\cdot FC. \quad ②$

把①+②，得

$$EF^2=ED\cdot EC+FB\cdot FC.$$

1381. $ABCD$是圆内接四边形，设BA、CD的交点为M，DA、CB的交点为N，$\angle M$的平分线与AD、$\angle N$的平分线与AB的交点分别为E、F，则$EF\parallel BD$.

解　在AD或其延长线上取点D'，使$MD=MD'$，则

$$\triangle MD'A\backsim\triangle NBA.$$

$$\therefore\quad \frac{MA}{MD'}=\frac{NA}{NB}.$$

即 $$\frac{MA}{MD}=\frac{NA}{NB}.\qquad ①$$

又ME、NF分别是$\angle M$、$\angle N$的平分线，

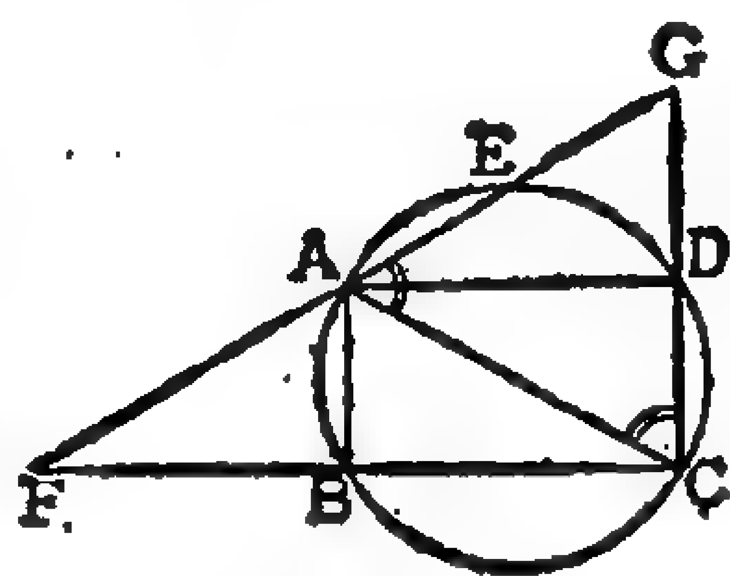
$$\therefore\quad \frac{MA}{MD}=\frac{AE}{ED},\qquad ②$$

$$\frac{NA}{NB}=\frac{AF}{FB}.\qquad ③$$

由①、②、③，得

$$\frac{AE}{ED}=\frac{AF}{FB}.\quad\therefore\quad EF\parallel BD.$$

1382. 过圆内接矩形$ABCD$的顶点A引弦AE，使$AE=AB$，又EA与CB的延长线相交于点F，AE、CD的延长线相交于点G，则$\dfrac{AG}{AF}=\dfrac{EG}{EA}$.



解　$\because\ AD\parallel FC$，$\therefore\quad \dfrac{AG}{AF}=\dfrac{GD}{DC}$.

而　$AE=AB=CD$. $\therefore\quad \overset{\frown}{EDC}=\overset{\frown}{AED}$.

$$\therefore\quad \angle EAC=\angle DCA.$$

所以$\triangle GAC$是等腰三角形。

从而得出，$GD=EG$.

$$\therefore\quad \frac{AG}{AF}=\frac{DG}{DC}=\frac{EG}{EA}.$$

1383. $ABCD$是圆内接四边形，若从A、C引切线与BD的延长线相交于点P，则

$$AB\cdot CD=DA\cdot BC.$$

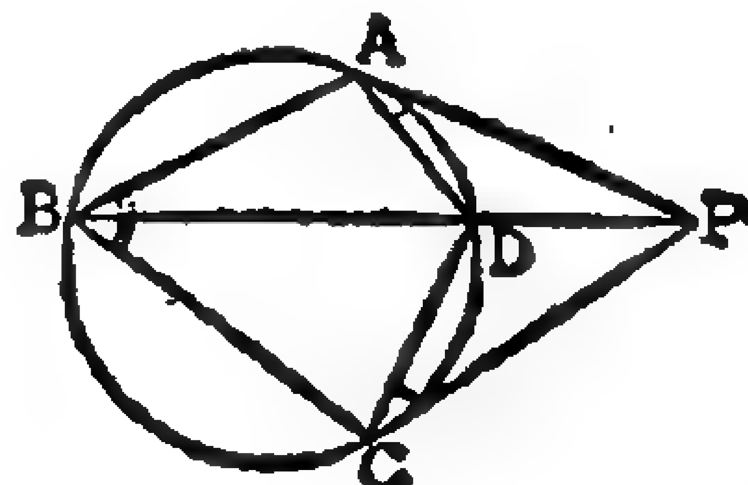
解　因为PA是切线，所以

$$\angle PAD=\angle ABD.$$

$$\therefore\quad \triangle PAD\backsim\triangle PBA.$$

$$\therefore\quad AP:BP=DA:AB.\qquad ①$$

同理可得，



$\triangle PCD\backsim\triangle PBC$.

$\therefore\quad CP:BP=CD:BC.\qquad ②$

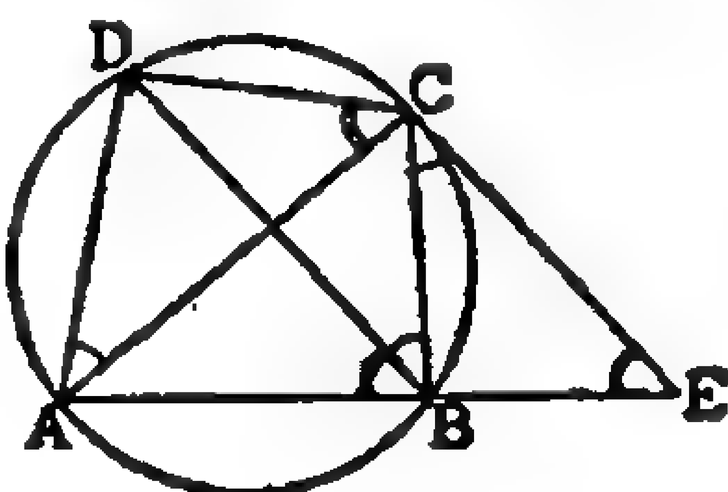
而　$PA=PC$.

由①、②，得

$$DA:AB=CD:BC,$$

所以　　$AB\cdot CD=DA\cdot BC.$

1384. 若从圆内接四边形$ABCD$的顶点C引对角线BD的平行直线与边AB的延长线相交于点E，则$BE\cdot AD=BC\cdot CD$.



解　连结AC.由$BD\parallel CE$，得

$$\angle BCE=\angle CBD=\angle CAD.$$

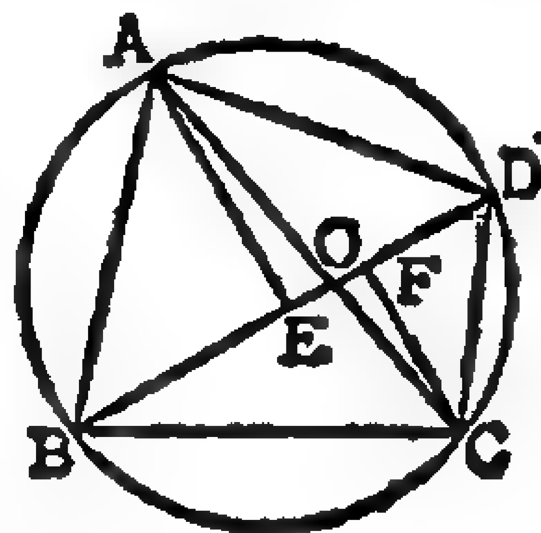
又　$\angle CEB=\angle DBA=\angle DCA.$

$$\therefore\quad \triangle CBE\backsim\triangle ADC.$$

$$\therefore\quad BE:CD=BC:AD.$$

$$\therefore\quad BE\cdot AD=BC\cdot CD.$$

1385. 若圆内接四边形$ABCD$的对角线相交于点O，则$AB\cdot AD:BC\cdot CD=AO:CO$.



解　从A、C向对角线BD作垂线AE、CF，则$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}=AE:CF$.

而　　$\triangle AOE\backsim\triangle COF$,

$$\therefore\quad AE:CF=AO:CO.$$

因为四边形$ABCD$是圆内接四边形，所以$\angle BAD+\angle BCD=180°$，从而得出两个三角形$ABD$与$BCD$的面积的比等于$\angle A$、$\angle C$的夹边的积的比，即

$$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}=AB\cdot AD:BC\cdot CD.$$

$$\therefore\quad AB\cdot AD:BC\cdot CD=AO:CO.$$

别解　设圆的直径为d，由问题**1318**，得

$$AB\cdot AD=d\cdot AE,\quad BC\cdot CD=d\cdot CF.$$

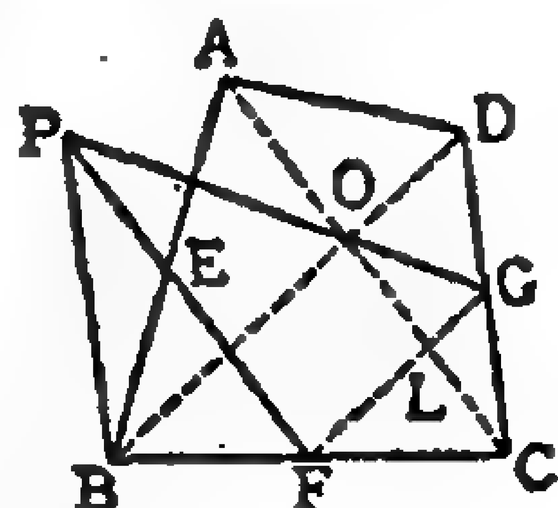
$$\therefore\quad \frac{AB\cdot AD}{BC\cdot CD}=\frac{AE}{CF}.$$

$$\because\quad \triangle AEO\backsim\triangle CFO,$$

$$\therefore\ \frac{AE}{CF}=\frac{AO}{CO}.$$

$$\therefore\ \frac{AB\cdot AD}{BC\cdot CD}=\frac{AO}{CO}.$$

1386. 设四边形 $ABCD$ 的对角线的交点为 O，AB、BC、CD 的中点分别为 E、F、G，GO 与 FE 相交于点 P，则连结 PB 的直线与 DC 平行，即 $PB\parallel DC$。



解 因为 F、G 分别为 BC、CD 的中点，所以，$FG\parallel BD$。

设 OC 与 FG 的交点为 L，则

$$OB:OD=LF:LG. \qquad ①$$

同理，$\because$ $EF\parallel OC$，

$$\therefore\ PO:OG=LF:LG. \qquad ②$$

由①、②，得

$$OB:OD=PO:OG,\ \therefore\ PB\parallel DC.$$

1387. 圆内接的任意四边形 $ABCD$ 都满足

$$\frac{AD\cdot AB+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}=\frac{AC}{BD}.$$

解 从 A、C 分别向 BD 作垂线 AE、CF。

设圆的直径为 d，则由问题 **1318** 可知，

$$AB\cdot AD=d\cdot AE,$$

$$CB\cdot CD=d\cdot CF.$$

$$\therefore\ \frac{CB\cdot CD}{AB\cdot AD}=\frac{CF}{AE}=\frac{OC}{AO},$$

$$\therefore\ \frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{AB\cdot AD}=\frac{AO+CO}{AO}=\frac{AC}{AO}.$$

$$\therefore\ AB\cdot AD+CB\cdot CD=\frac{AC\cdot AB\cdot AD}{AO} \qquad ①$$

同理可得，

$$BA\cdot BC+DA\cdot DC=\frac{BD\cdot BA\cdot BC}{BO}. \qquad ②$$

由①、②得

$$\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}=\frac{BO}{AO}\cdot\frac{AC}{DB}\cdot\frac{AD}{BC}$$

又 $\triangle AOD\backsim\triangle BOC$，

$$\therefore\ \frac{AD}{BC}=\frac{AO}{BO}.$$

$$\therefore\ \frac{AD\cdot AB+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}=\frac{AC}{BD}.$$

1388. 已知圆内接正方形 $ABCD$，从 $\widehat{AB}$ 上任取一点 P，则 $PC\cdot PD=PA\cdot PB+PB\cdot PC+PA\cdot PD$。

解 设外接圆的半径为 R，又 $PF\perp CD$，则根据问题 **1318**，得

$$PC\cdot PD=2R\cdot PF. \qquad ①$$

而 $PEF\perp AB(CD)$。$\therefore$ $PE\perp AB$。

由此可得，$PA\cdot PB=2R\cdot PE$，

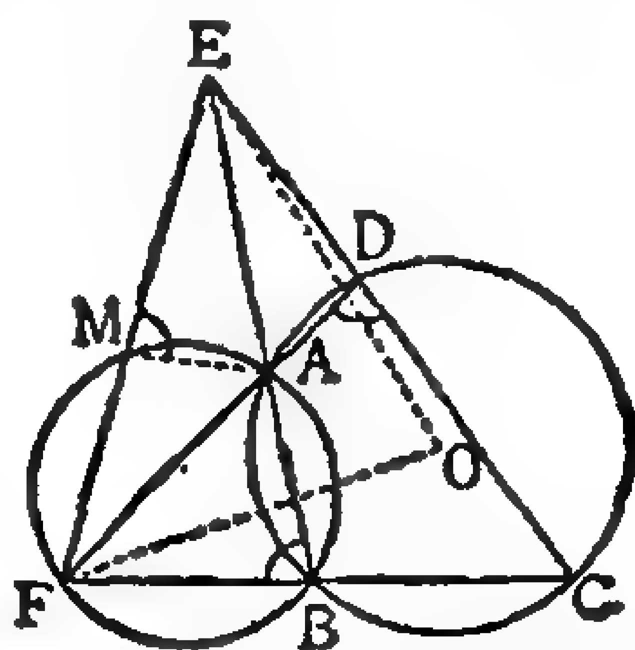
$PB\cdot PC=2R\cdot EB$，$PA\cdot PD=2R\cdot EA$。

$$\therefore\ PA\cdot PB+PB\cdot PC+PA\cdot PD=2R\cdot(PE+AB)=2R\cdot PF. \qquad ②$$

由①、②，得

$$PC\cdot PD=PA\cdot PB+PB\cdot PC+PA\cdot PD.$$

1389. 设 $ABCD$ 是半径为 r 的圆 O 的内接四边形，BA、CD 延长线的交点为 E，DA、CB 的延长线的交点为 F，则 $EF^2=OE^2+OF^2-2r^2$。



解 设 $\triangle ABF$ 的外接圆与 EF 的交点为 M，则 $\angle EMA=\angle FBA=\angle ADC$。由此可得，四边形 $EMAD$ 是圆内接四边形。

$$\therefore\ FM\cdot FE=FA\cdot FD=OF^2-r^2,$$

（问题 **931**） ①

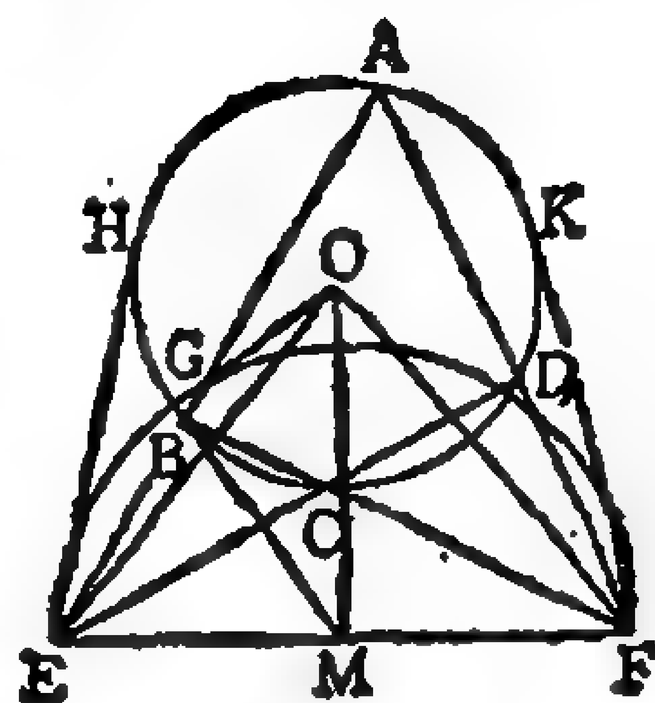
$$EM\cdot FE=EA\cdot EB=OE^2-r^2. \qquad ②$$

由①+②，得

$$EF\cdot(EM+FM)=OE^2+OF^2-2r^2.$$

$$\therefore\ EF^2=OE^2+OF^2-2r^2.$$

1390. 圆 O 的内接四边形 $ABCD$ 的对边 AB、DC 及 AD、BC 的延长线分别相交于 E、F，则以 EF 为直径的圆 M 与圆 O 垂直相交。



解 设两圆的交点之一为 G，连结 OG、GM、OM，引圆 O 的切线 EH、FK。

在 $\triangle OEF$ 中，因为 M 是 EF 的中点，根据中线定理，得

$$2EM^2+2OM^2=OE^2+OF^2. \quad ①$$

设圆 O 的半径为 r，根据上题，得

$$OE^2+OF^2=EF^2+2r^2. \quad ②$$

又 $EF=2ME=2MG$.

由①、②得

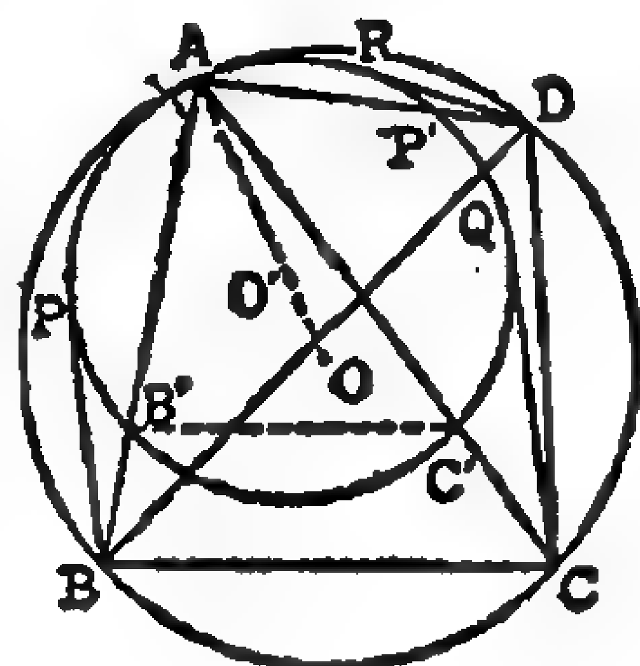
$$2MG^2+2OM^2=EF^2+2r^2=4MG^2+2r^2.$$

$\therefore\ OM^2=MG^2+r^2=MG^2+OG^2.$

$\therefore\ \angle OGM=90°.$

由此可知，两圆 O、M 是垂直相交的。

1391. $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形，圆 O' 与圆 O 内切于 A，若从 B、C、D 引圆 O' 的切线 BP、CQ、DR，则 $BD\cdot CQ=BC\cdot DR+CD\cdot BP$.



解 若 AB、AC、AD 与圆 O' 的交点分别为 B'、C'、P'，则

$$BP^2=BB'\cdot BA,\ CQ^2=CC'\cdot CA,$$
$$DR^2=DP'\cdot DA.$$

$$\therefore\ \frac{BP^2}{CQ^2}=\frac{BB'\cdot BA}{CC'\cdot CA}.$$

连结 $B'C'$。因 A 是两圆的切点，可得

$$BC\parallel B'C'.$$

$$\therefore\ \frac{BB'}{CC'}=\frac{BA}{CA}.$$

$$\therefore\ \frac{BP^2}{CQ^2}=\frac{BA^2}{CA^2},$$

即 $\dfrac{BP}{CQ}=\dfrac{BA}{CA}$. $\therefore\ \dfrac{BA}{BP}=\dfrac{CA}{CQ}$.

同理可得，

$$\frac{BA}{BP}=\frac{CA}{CQ}=\frac{DA}{DR}.$$

设这个比值为 k，则

$BA=k\cdot BP,\ CA=k\cdot CQ,\ DA=k\cdot DR.$

又四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，则

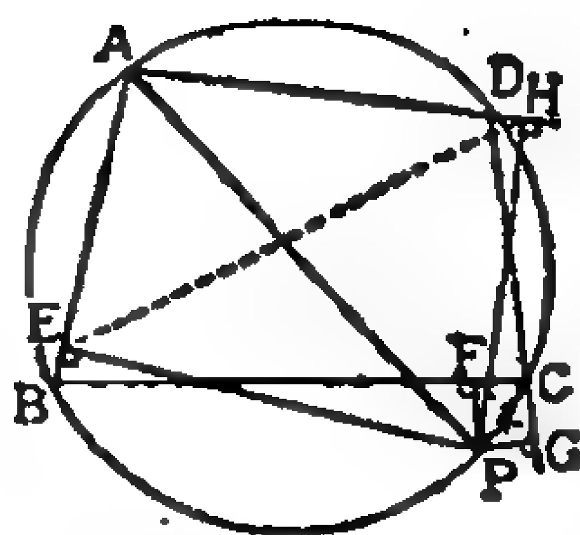
$AC\cdot BD=BC\cdot AD+CD\cdot AB$(问题 **1500**).

$\therefore\ BD\cdot CQ\cdot k=BC\cdot DR\cdot k+CD\cdot BP\cdot k.$

所以 $BD\cdot CQ=BC\cdot DR+CD\cdot BP.$

1392. 从圆上任意一点 P 向圆内接四边形的各边分别引垂线，则以两组对边上的垂线(P 到垂足间的线段)分别为邻边的两个矩形的面积相等。

解 从 P 向 AB、BC、CD、DA 分别作垂线 PE、PF、PG、PH，则四边形 $AEPH$，$FPGC$ 都是圆内接四边形。



$\therefore\ \angle EHP=\angle EAP,$

$\angle FCP=\angle FGP.$

$\because\ \angle BAP=\angle BCP,$

$\therefore\ \angle EHP=\angle FGP.$

又 $\angle PFG=\angle PCG$，且 $\angle PCG$ 是圆内接四边形 $APCD$ 的外角，所以

$\angle PCG=\angle PAD,\ \angle PFG=\angle PAD.$

而 $\angle PAD=\angle PEH.$

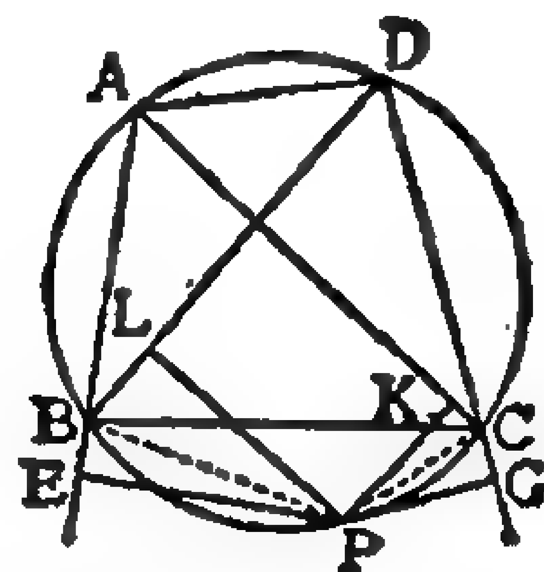
$\therefore\ \angle PEH=\angle PFG.$

所以 $\triangle PEH\backsim\triangle PFG.$

$\therefore\ PE:PH=PF:PG.$

$\therefore\ PE\cdot PG=PH\cdot PF.$

1393. 在上题中，从 P 向对角线 AC、BD 作垂线分别为 PK、PL，则 $PE\cdot PG=PK\cdot PL$.



解 $\because$ $\triangle PBL\backsim\triangle PCG,$

$$\therefore\ \frac{PB}{PL}=\frac{PC}{PG}. \quad ①$$

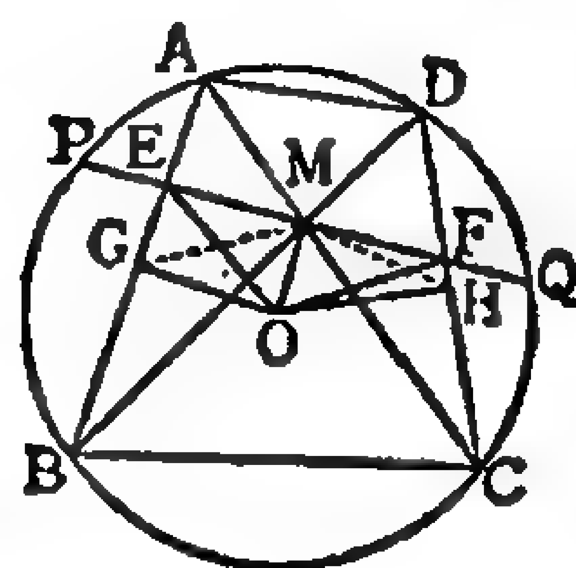
又 $\triangle PBE\backsim\triangle PCK,$

$$\therefore\ \frac{PE}{PB}=\frac{PK}{PC}. \quad ②$$

由①×②，得

$\dfrac{PE}{PL}=\dfrac{PK}{PG}$，即 $PE\cdot PG=PK\cdot PL.$

1394. 过圆 O 的内接四边形 $ABCD$ 对角线的交点 M 引垂直于 MO 的弦 PQ，设 PQ 与边 AB、DC 的交点分别为 E、F，则 $ME=MF$，$PE=FQ$.



解 从 O 向 AB、DC 作垂线 OG、OH，则 G、H 分别是 AB、DC 的中点。

由 $\triangle ABM\backsim\triangle DCM$ 可得，

$\triangle AGM\backsim\triangle DHM.$

$$\therefore\ \angle AGM=\angle MHD. \quad ①$$

又 $OM\perp EF$，$OG\perp AB$，所以 G、O、M、E 共圆。

$\therefore \quad \angle EGM=\angle EOM.$ ②

同理可得,

$$\angle MOF=\angle MHF. \quad ③$$

由①、②、③,得

$$\angle EOM=\angle MOF,$$

$$\triangle EOM\cong\triangle FOM,$$

从而得出,

$$ME=MF. \quad ④$$

而M是弦PQ的中点,由④可得,$PE=FQ$.

1395. 设$ABCD$是圆O的外切四边形,过圆心O作直线EOF,使EOF与AB、CD所成的角相等,设EOF与AB、CD分别相交于E、F,则

$$AE:BE=FC:FD.$$

解 设EA、FD的延长线交于点P,则$\triangle PEF$是等腰三角形.由问题**1169**,得

$$AE\cdot DF=OE^2,$$

$$BE\cdot CF=OE^2.$$

$$\therefore \quad AE\cdot DF=BE\cdot CF.$$

所以 $\quad AE:BE=FC:FD.$

1396. 若从圆O的外切四边形$ABCD$的各顶点向任意切线作垂线AA'、BB'、CC'、DD',则$\dfrac{AA'\cdot CC'}{BB'\cdot DD'}=\dfrac{AO\cdot CO}{BO\cdot DO}$.

解 设这条切线与AB、CD的交点分别为E、F,则

$$\frac{AA'}{BB'}=\frac{AE}{BE}=\frac{S_{\triangle OAE}}{S_{\triangle OBE}}, \quad ①$$

$$\frac{CC'}{DD'}=\frac{CF}{DF}=\frac{S_{\triangle OCF}}{S_{\triangle ODF}}. \quad ②$$

$$\angle BOE=\angle COF\left(=\frac{1}{2}\angle BA'E\right)(\text{问题}87),$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle OCF}}{S_{\triangle OBE}}=\frac{CO\cdot OF}{BO\cdot OE}. \quad ③$$

又 $\quad \angle AOE+\angle DOF=2\angle R.$

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle OAE}}{S_{\triangle ODF}}=\frac{AO\cdot OE}{DO\cdot OF}. \quad ④$$

由①×②,得

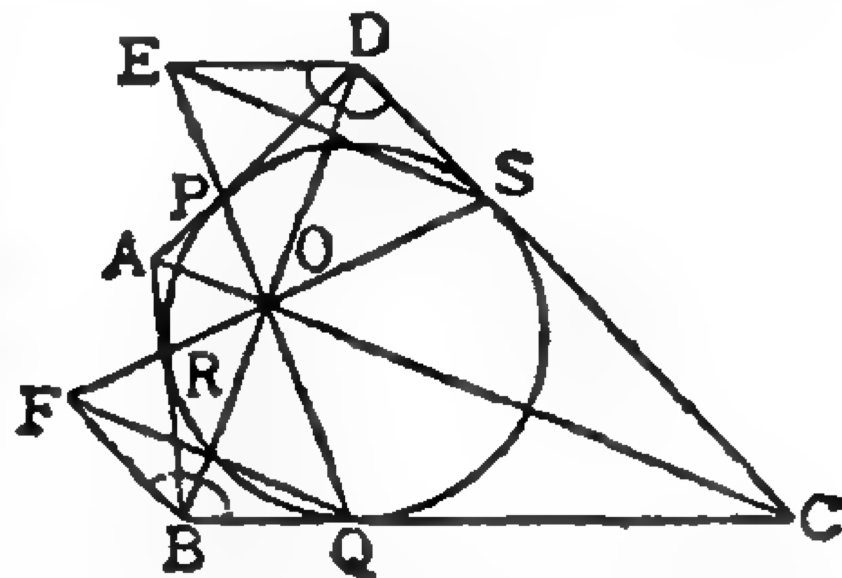
$$\frac{AA'}{BB'}\cdot\frac{CC'}{DD'}=\frac{S_{\triangle OAE}}{S_{\triangle OBE}}\cdot\frac{S_{\triangle OCF}}{S_{\triangle ODF}}.$$

由③×④,得

$$\frac{S_{\triangle OCF}}{S_{\triangle OBE}}\cdot\frac{S_{\triangle OAE}}{S_{\triangle ODF}}=\frac{AO\cdot CO}{BO\cdot DO}.$$

$$\therefore \quad \frac{AA'\cdot CC'}{BB'\cdot DD'}=\frac{AO\cdot CO}{BO\cdot DO}.$$

1397. 四边形$ABCD$外切于圆,设四边AB、BC、CD、DA上的切点分别为R、Q、S、P,连结PQ、RS,则直线PQ、RS经过两条对角线的交点O.



解 设从D引BC的平行线与QP的延长线的交点为E,则

$$\angle QED=\angle PQB.$$

而 $\quad \angle APQ=\angle PQB.$

$$\therefore \quad \angle PED=\angle EPD.$$

$$\therefore \quad DE=DP=DS.$$

同理,从B引CD的平行线与SR的延长线交于点F,则$BF=BQ$.

所以,$\triangle DES$与$\triangle BFQ$都是等腰三角形.

又 $\quad DE\parallel BQ,\ DS\parallel BF,$

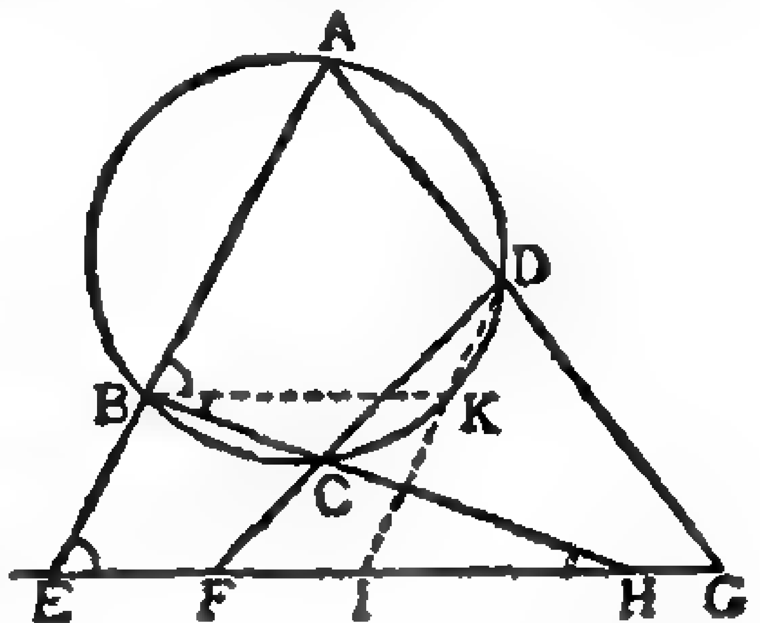
所以, $\quad \angle EDS=\angle FBQ.$

$$\therefore \quad \triangle DES\backsim\triangle BFQ.$$

从而得出,BD、EQ、SF相交于一点O.即BD经过PQ与RS的交点.

同理可得,AC经过PQ与RS的交点.从而得出,PQ与RS经过两条对角线的交点.

1398. 若圆内接四边形$ABCD$的三边AB、DC、AD分别经过一条直线上的三点E、F、G,则第四边BC也经过这三点所在直线上的定点.



解 设过B所作EG的平行线与圆的交点为K,直线DK与EG的交点为I.由A、B、K、D共圆可知,

$$\angle KDG=\angle ABK. \quad ①$$

又　　　　$BK\parallel EG$，

所以　　　$\angle ABK=\angle E$.　　　　　②

由①、②，得$\angle E=\angle KDG=\angle IDG$. 所以$AEID$是圆内接四边形.

$$\therefore\quad GE\cdot GI=GD\cdot GA.$$

因为G是定点，所以$GD\cdot GA$是定值. 而GE的长度也是定值. 由此可得GI的长度是定值，即点I是定点.

又，设BC与EG的交点为H，则

$$\angle IDF=\angle KBC,\ \angle KBC=\angle CHF,$$

$$\therefore\quad \angle IDF=\angle CHF.$$

所以点D、C、I、H在同一圆上. 即

$$DF\cdot FC=FI\cdot FH.$$

因为$DF\cdot FC$是定值，所以$FI\cdot FH$也是定值. 又由FI是定长线段可知，FH也是定长线段. 所以，点H是定点.

14. 两个(或多个)圆的比例线段

1399. 引互相外切的两圆的公切线，设切点为A、B，则AB是两圆直径AC、BD的比例中项.

解　设两圆的切点为E，连结EA、EB、EC、ED，则

$\angle AEB=\angle AEC=\angle CED=\angle DEB=90°$.

所以A、E、D及B、E、C分别为一条直线，即AD、BC过切点E.

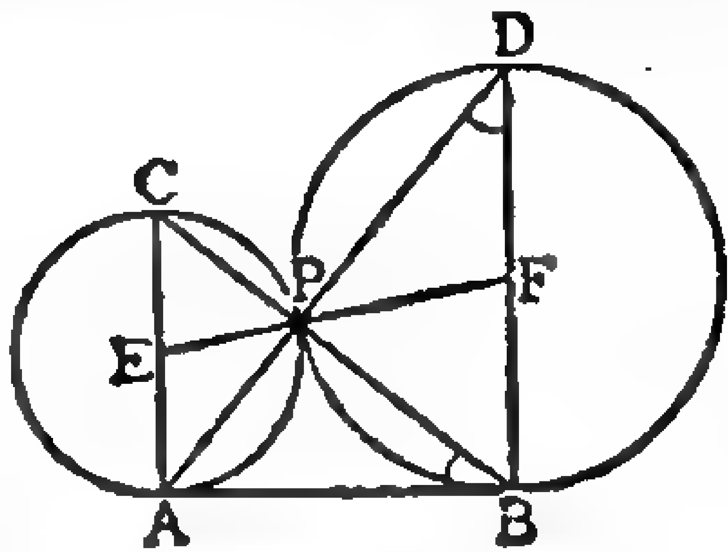
$\therefore\quad \angle ABC=\angle BDA,\ \angle BAD=\angle ACB.$

由此可得，$\triangle CAB\backsim\triangle ABD$.

$$\therefore\quad \frac{AC}{AB}=\frac{AB}{BD},$$

即　　　　$AB^2=AC\cdot BD$.

1400. 在一条直线AB的同侧引两条垂直于AB的直线AC、BD，若$AB^2=AC\cdot BD$，则以AC、BD分别为直径的两圆互相外切.



解　连结AD、BC，设它们的交点为P. 根据假设，得

$$AC\cdot BD=AB^2,$$

即　　　　$AC:AB=AB:BD$.

又　　　$\angle CAB=90°=\angle ABD$.

$\therefore\quad \triangle CAB\backsim\triangle ABD$.

$\therefore\quad \angle ABC=\angle BDA$.

而　　　$\angle DAB+\angle BDA=90°$.

由此可得，$\angle APB=90°$.

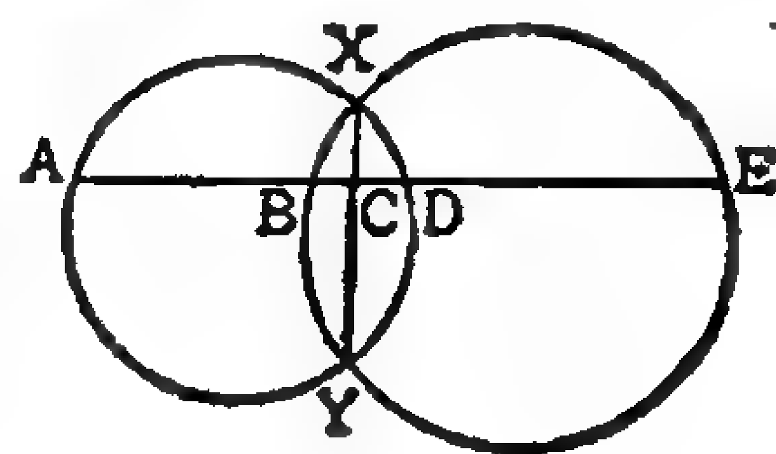
所以，P是以AC、BD分别为直径的每个圆上的点.

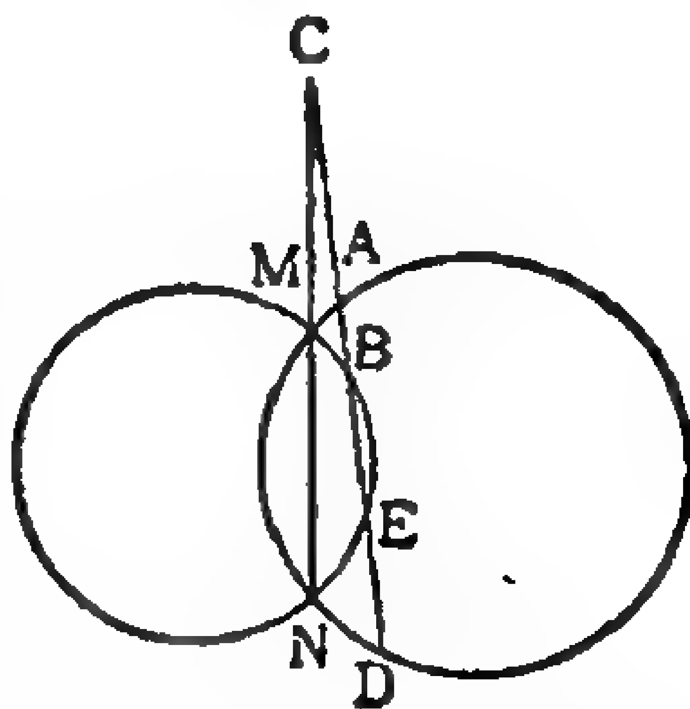
设AC、BD的中点分别为E、F，连结PE、PF，则

$$\angle EPA=\angle EAP=\angle PDF=\angle DPF.$$

因此，E、P、F在同一直线上，即以AC、BD为直径的圆的连心线EF过公共点P. 所以两圆在点P处外切.

1401. 过相交两圆的公共弦上一点C引一条直线，设这直线与一个圆相交于A、D，与另一个圆相交于B、E，则$AB:BC=DE:DC$.





解　设公共弦为XY，且点C在公共弦XY上. 因为XY、DA是圆$XDYA$内相交于点C的两弦，所以

$XC\cdot YC=AC\cdot DC$.

同理，在圆$XBYE$中，$XC\cdot YC=BC\cdot EC$.

$$\therefore\quad AC\cdot DC=BC\cdot EC.$$

从而得出，　$AC:BC=EC:DC$.

$\therefore\quad (AC-BC):BC=(EC-DC):DC$,

即　　　　$AB:BC=DE:DC$.

又，若点C在公共弦MN的延长线上，则

$$CA\cdot CD=CM\cdot CN=CB\cdot CE,$$

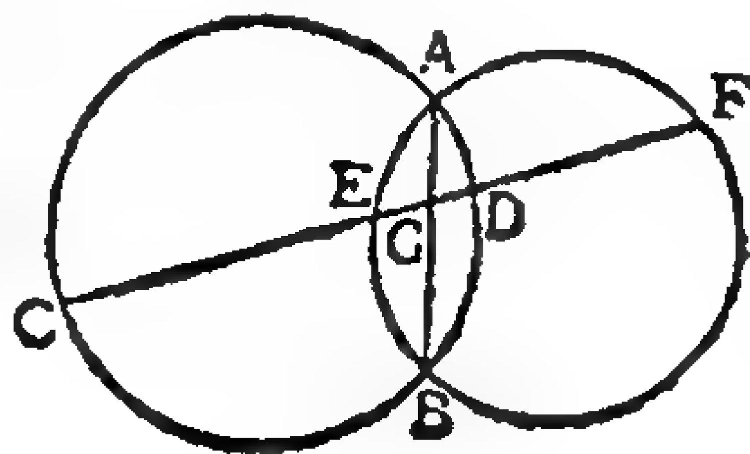
即　　　　$CA\cdot CD=CB\cdot CE$.

$\therefore\quad CA:CB=CE:CD$.

$\therefore\quad (CB-CA):CB=(CD-CE):CD$,

即　　　　$AB:BC=DE:DC$.

1402. 过两圆的公共弦AB上一点G引一直线，与两圆的交点分别为C、D



及E、F，则$\frac{CF^2}{ED^2}=\frac{GC\cdot GF}{GD\cdot GE}$。

解 由AB、CD、EF在点G相交，得

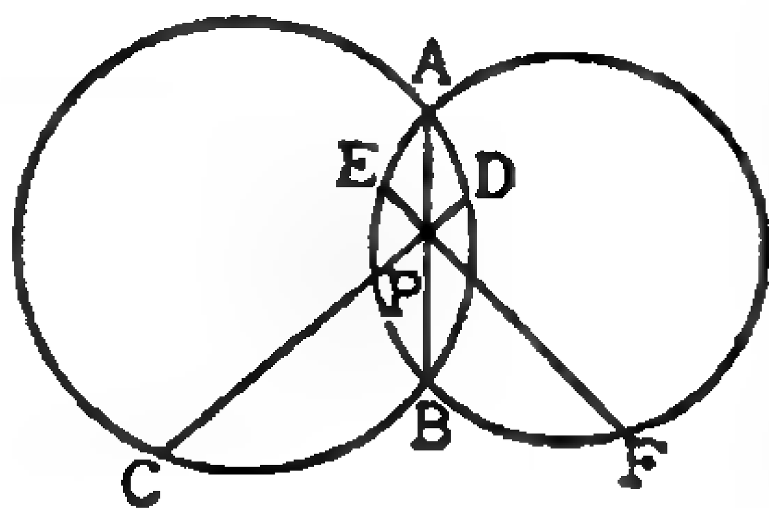
$$GC\cdot GD=GA\cdot GB=GE\cdot GF.$$

$$\therefore\ \frac{GE}{GC}=\frac{GD}{GF}=\frac{GE+GD}{GC+GF}=\frac{ED}{CF},$$

即
$$\frac{CF}{ED}=\frac{GC}{GE}=\frac{GF}{GD}.$$

$$\therefore\ \frac{CF^2}{ED^2}=\frac{GC\cdot GF}{GD\cdot GE}.$$

1403. 设过两圆公共弦AB上任一点P所引两圆的弦分别为CD、EF，则C、E、D、F共圆。



解 由A、D、B、C共圆，得

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD. \qquad ①$$

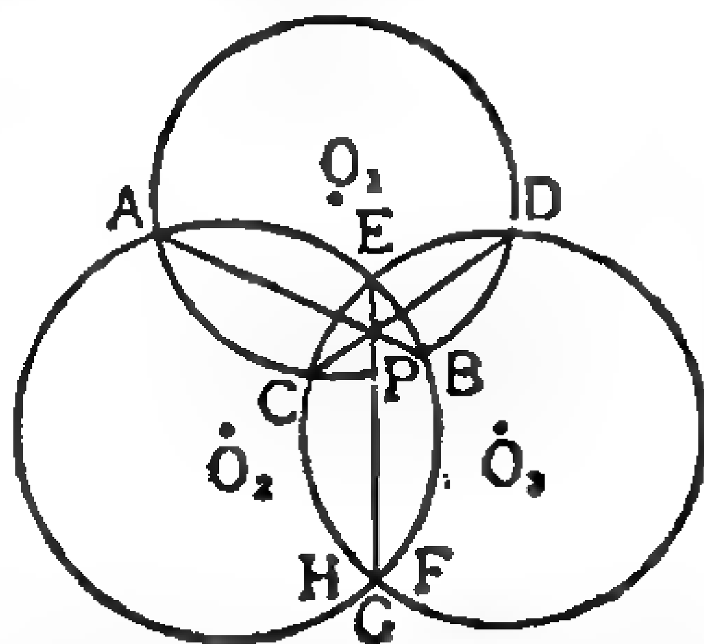
又由A、E、B、F共圆，得

$$PA\cdot PB=PE\cdot PF. \qquad ②$$

由①、②，得$PC\cdot PD=PE\cdot PF$。

由此可知，C、E、D、F共圆。

1404. 设有三个圆两两相交，则三条公共弦AB、CD、EF要么互相平行，要么相交于一点。



解 若三个圆的中心O_1、O_2、O_3在一条直线上，因为两圆的公共弦垂直于它们的连心线，所以三条公共弦互相平行。

现在来考察O_1、O_2、O_3不在一条直线上的情况。

设AB、CD的交点为P，E为圆O_2、O_3的一个交点，延长EP与圆O_2、O_3分别交于G、H，则在圆O_1中，

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD. \qquad ①$$

在圆O_2中，

$$PA\cdot PB=PE、PG. \qquad ②$$

在圆O_3中，

$$PC\cdot PD=PE\cdot PH. \qquad ③$$

由①、②，得

$$PC\cdot PD=PE\cdot PG. \qquad ④$$

由③、④，得

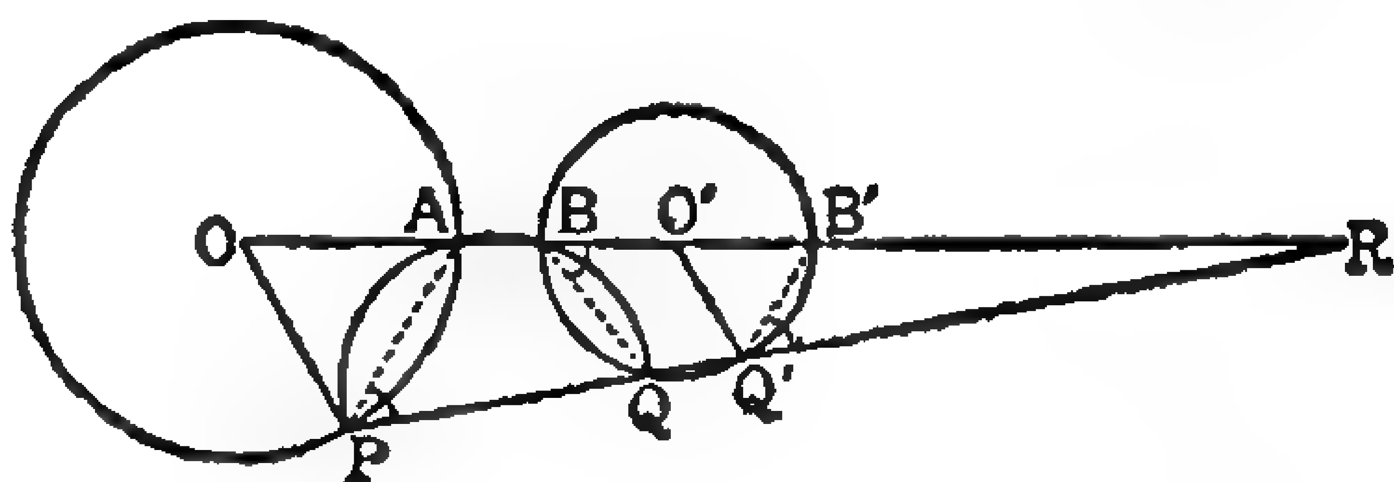
$$PE\cdot PH=PE\cdot PG.$$

所以$PH=PG$，即G与H相重合。而且与两圆O_2、O_3的交点F也重合。由此可知，三个圆的公共弦AB、CD、EF相交于一点。

1405. 连结半径不同的相离的两圆中心O、O'的线段与两圆分别交于A、B，过A、B的任意圆再与两圆分别交于P、Q，这时直线PQ必经过两圆O、O'的位似中心，试证明之。

若在上述的定理中，两圆O、O'在点A外切，过点A与连心线OO'相切的任意圆与两圆相交于点P、Q，则过P、Q的直线必过一定点。

解 设OO'与PQ的延长线相交于点R，OO'、PQ与圆O'的另一个交点分别为B'、Q'，则$\angle APQ=\angle QBB'=\angle B'Q'R$，



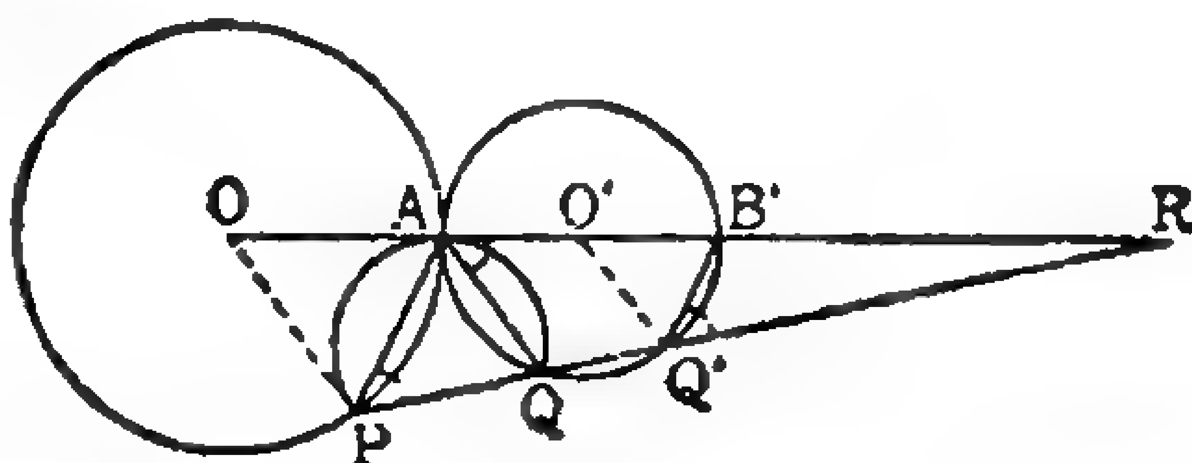
$$\therefore\ AP\parallel B'Q'.$$

$$\therefore\ \triangle OPA\backsim\triangle O'Q'B'.$$

从而得出，$\angle O=\angle O'$。$\therefore\ OP\parallel O'Q'$。

$$\therefore\ RO':RO=O'Q':OP.$$

因此，点R把OO'外分成两圆半径的比，即点R是两圆的外位似中心。所以PQ经过这外位似中心。



同理，当圆O、O'相切时，由AB'是圆PAQ的切线，得

$$\angle APQ=\angle O'AQ=\angle B'Q'R,$$

$$\therefore\ AP\parallel B'Q'.$$

从而得出，$\triangle OPA\backsim\triangle O'Q'B'$。

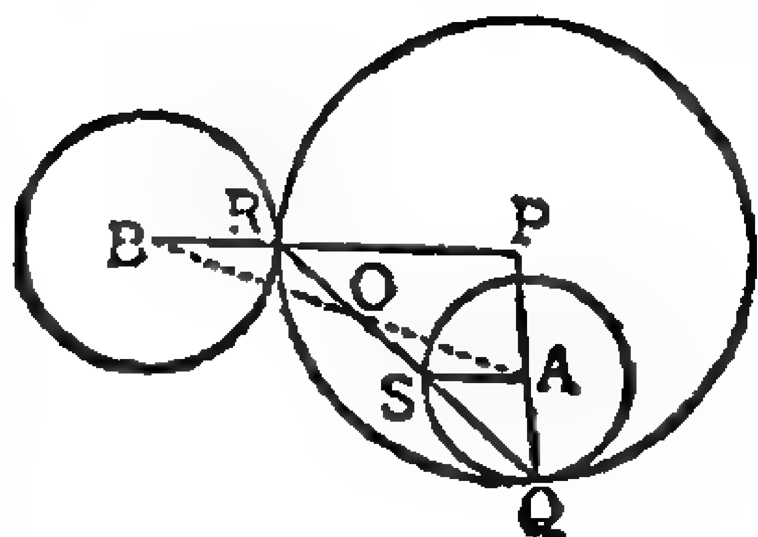
$$\therefore\ \angle O=\angle O'.\ \therefore\ OP\parallel O'Q'.$$

所以 $RO':RO=O'Q':OP$。

由此可知，PQ经过把OO'外分成两圆半径的比的点，即外位似中心。

1406. 设有两个外离的定圆A、B。作

圆 P 与圆 A 内切于点 Q, 与圆 B 外切于点 R, 则直线 QR 必经过一定点。

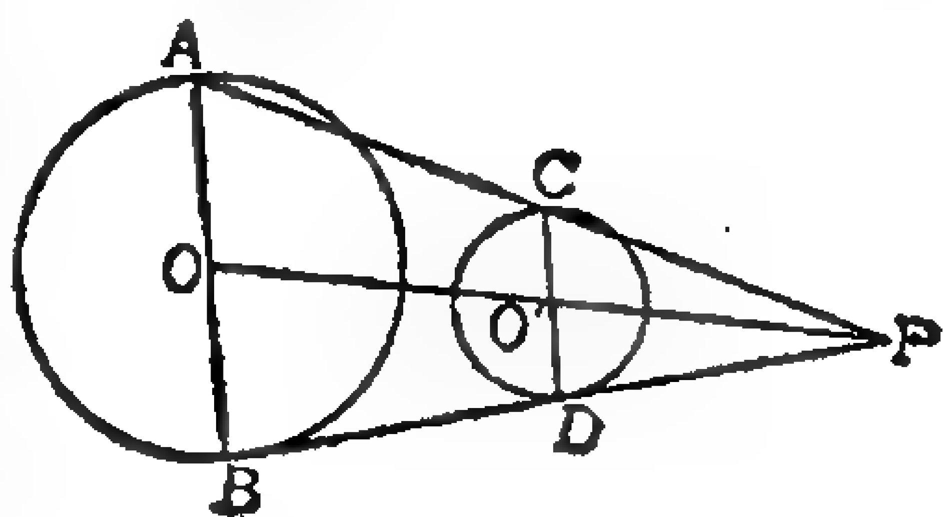


解　设圆 A 与 QR 的交点为 S, QR 与 AB 的交点为 O, 则

$$PR \parallel AS. \quad \therefore \quad AO:OB=AS:BR.$$

因为两个定圆半径的比是定值，所以，QR 总是经过把两圆中心距离 AB 内分成它们的半径的比的点（O 是内位似中心）。

1407. 设 AB、CD 分别是圆 O、圆 O' 的直径，又 $AB \parallel CD$, 则连结 AC、BD 的直线相交于定点。

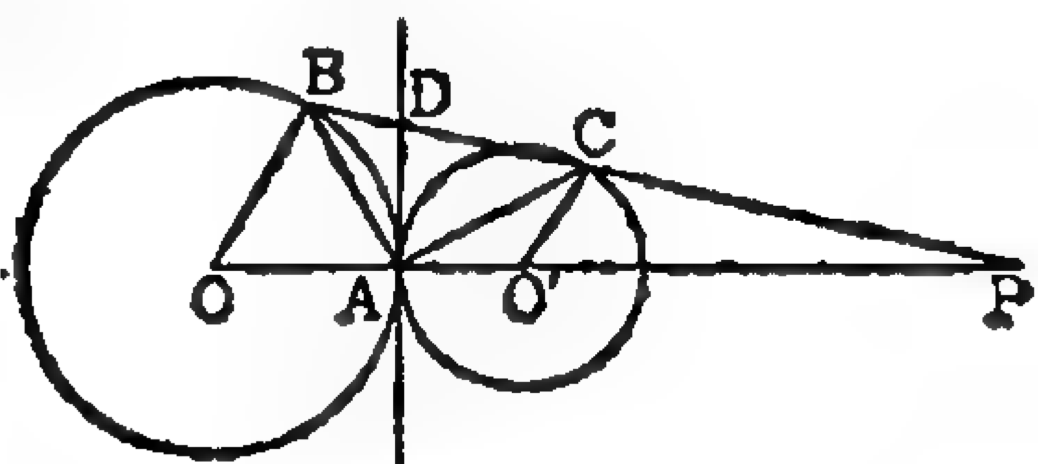


解　设 AC 与 OO' 的交点为 P, 则

$$\frac{PO}{PO'}=\frac{OA}{O'C}.$$

因此，点 P 是两圆 O、O' 的外位似中心，它是定点。同理可得，BD 也经过这个定点 P. 所以，AC、BD 相交于定点 P.

1408. 若两圆 O、O' 外切于点 A, 过点 A 引圆 O 的弦 AB、圆 O' 的弦 AC, 使 $\angle BAC=90°$, 则 BC 必过定点。



解　过点 A 引两圆的公切线与 BC 交于 D, 则

$$\angle DAB=\frac{1}{2}\angle AOB, \quad \angle DAC=\frac{1}{2}\angle AO'C.$$

把上面两式的两边分别相加，得

$$\angle AOB+\angle AO'C=180°. \quad \therefore \quad OB \parallel O'C.$$

设 BC 与 OO' 的交点为 P, 则

$$PO:PO'=OB:O'C.$$

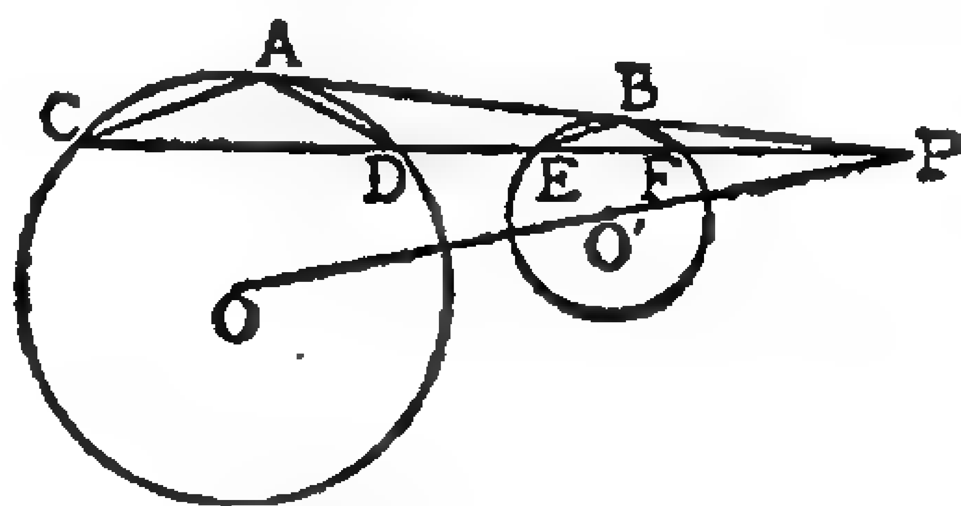
由此可知，点 P 是两圆 O、O' 的外位似中心，BC 过点 P.

1409. 设两圆 O、O' 的连心线与外公切线 AB 的交点为 P, 过 P 引直线与圆 O 交于 C、D, 与圆 O' 交于 E、F, 则

$$PC\cdot PF=PD\cdot PE=PA\cdot PB.$$

解　因为 P 是两圆的外位似中心，A 与 B, D 与 F 是对应点，所以

$$\angle PAD=\angle PBF.$$



又 $\angle PBF=\angle BEF$,

$$\therefore \quad \triangle PDA \backsim \triangle PBE.$$

$$\therefore \quad \frac{PA}{PD}=\frac{PE}{PB}.$$

即　　$PD\cdot PE=PA\cdot PB.$

同理，$\triangle PBF \backsim \triangle PCA$.

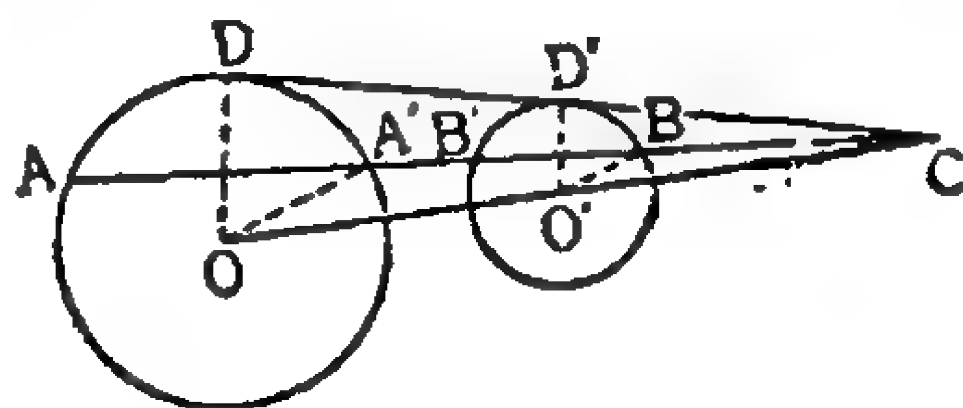
$$\therefore \quad PC\cdot PF=PA\cdot PB.$$

$$\therefore \quad PC\cdot PF=PD\cdot PE=PA\cdot PB.$$

注　把外公切线换成内公切线，定理也成立。

1410. 从两圆 O、O' 的外位似中心 C 引公切线，设切点分别为 D、D', 若从 C 引两圆 O'、O 的割线与圆的交点依次为 B、B'、A'、A, 则 $DD'^2=A'B\cdot AB'$.

解　用 r、r' 表示两圆的半径，



则　　$DC:D'C=r:r'$,

$$A'C:BC=r:r'.$$

$$\therefore \quad DC:D'C=A'C:BC.$$

$$\therefore \quad DD':D'C=A'B:BC.$$

同理可得，

$$DD':D'C=AB':B'C.$$

$$\therefore \quad DD'^2:D'C^2=A'B\cdot AB':BC\cdot B'C.$$

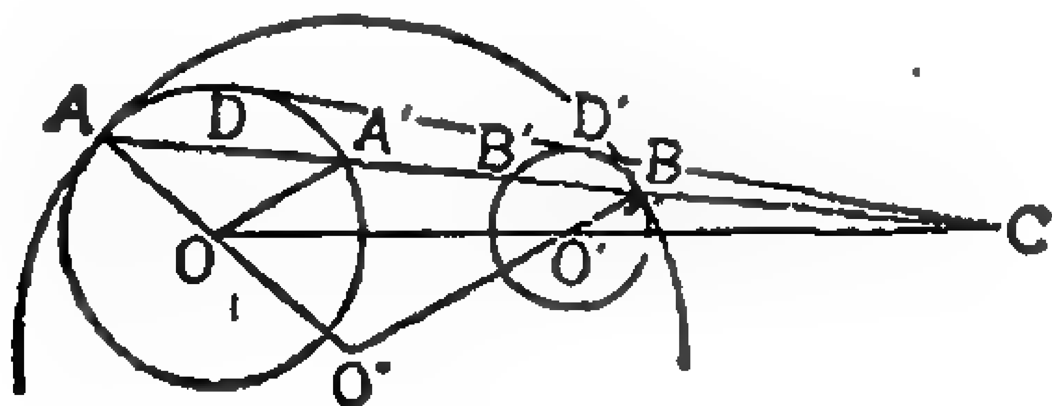
而 $D'C^2=BC\cdot B'C$.

$$\therefore \quad DD'^2=A'B\cdot AB'.$$

1411. 在上题的图中，两圆 O、O' 分别与圆 O'' 内切于 A、B, 设圆 O'' 的半径为 R, 圆 O、O' 的半径分别为 r、r', 则

$$R^2:(R-r)\cdot(R-r')=AB^2:DD'^2.$$

解　由 $A'O \parallel BO'$, 得



$$AO'':OO''=AB:A'B.$$

$$\therefore\quad R:(R-r)=AB:A'B.$$

同理可得，$R:(R-r')=AB:AB'$.

$$\therefore\quad R^2:(R-r)(R-r')=AB^2:A'B\cdot AB'.$$

而由上题可知，$A'B\cdot AB'=DD'^2$.

$$\therefore\quad R^2:(R-r)(R-r')=AB^2:DD'^2.$$

1412. 设在点 A 外切的两圆的外公切线为 BC，过点 B 的直径的另一端为 D，则从 D 向另一个圆所引切线 DE 等于 DB.

解　因为 A 是两圆的切点，所以

$$\angle BAC=90°.$$

又 DB 是直径，所以 $\angle DAB=90°$.

由此可知 D、A、C 是在一条直线上.

在直角三角形 DBC 中，

$$BA\perp DC,\quad\therefore\quad DB^2=DA\cdot DC.\qquad ①$$

而 DE 是切线.

$$\therefore\quad DE^2=DA\cdot DC.\qquad ②$$

由①、②，得　$DB=DE$.

1413. 设过互相外切的两圆 O、O' 的切点 A 引直线，与两圆的交点分别为 B、C，则图中的两个扇形 $OADB$ 与 $O'AEC$ 的面积的比等于半径的平方的比.

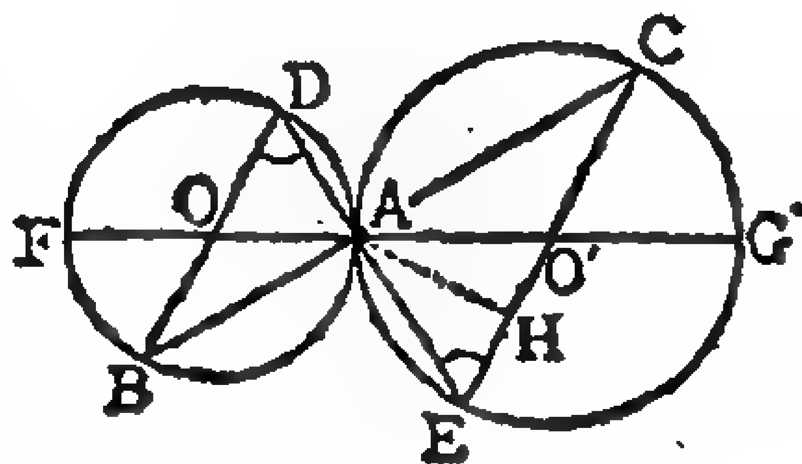
解　因为 $\angle O=\angle O'$，设 $\angle O=\angle O'=\alpha$，所以

$$扇形OADB的面积=\pi\cdot OA^2\cdot\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{\alpha}{2}OA^2,$$

$$扇形O'AEC的面积=\pi\cdot O'A^2\cdot\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{\alpha}{2}O'A^2.$$

$$\therefore\quad\frac{扇形OADB的面积}{扇形O'AEC的面积}=\frac{OA^2}{O'A^2}.$$

1414. 两圆 O、O' 外切于点 A，过 A 引两条互相垂直的线段 BAC、DAE 与两圆相交，设两圆的连心线为 FAG，则



$$AB\cdot AC+AD\cdot AE=AF\cdot AG.$$

解　设 BD、CE 分别过圆心 O、O'，且 $DB\parallel CE$. 设 $AH\perp CE$，则由 $\angle E=\angle D$，得

$$\triangle AEH\backsim\triangle BDA.$$

$$\therefore\quad AE:EH=BD:AD.$$

$$\therefore\quad AD\cdot AE=BD\cdot EH.\qquad ①$$

又　$\triangle ACH\backsim\triangle DBA$.

$$\therefore\quad AC:CH=BD:AB.$$

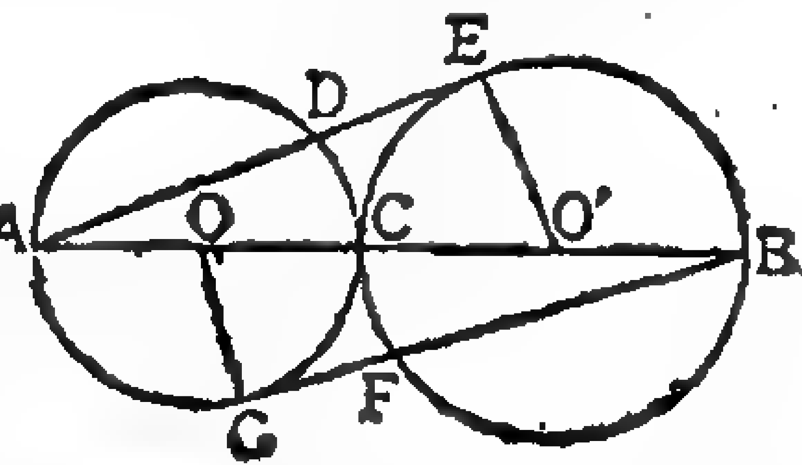
$$\therefore\quad AB\cdot AC=BD\cdot CH.\qquad ②$$

由①+②，得

$$AB\cdot AC+AD\cdot AE=BD\cdot(CH+EH),$$

即 $AB\cdot AC+AD\cdot AE=BD\cdot CE=AF\cdot AG$.

1415. 设 C 为线段 AB 的内分点，以 AC、BC 为直径分别作圆 O、O'，从 A 向圆 O' 引切线 AE 与圆 O 交于点 D，从 B 向圆 O 引切线 BG 与圆 O' 交于点 F，则



$$AD\cdot BF=4DE\cdot FG.$$

解　$\because$　$DC\parallel EO'$ 或 $CF\parallel OG$，

$$\therefore\quad\frac{AD}{DE}=\frac{AC}{CO'}=\frac{2CO}{CO'},$$

$$\frac{BF}{FG}=\frac{BC}{CO}=\frac{2CO'}{CO}.$$

$$\therefore\quad\frac{AD\cdot BF}{DE\cdot FG}=\frac{4CO\cdot CO'}{CO'\cdot CO}=4.$$

$$\therefore\quad AD\cdot BF=4DE\cdot FG.$$

1416. 设两圆相交于点 P、Q，过点 Q 引直线 AB，与两圆的交点分别为 A、B，则 $\triangle PAB$ 的面积当 AB 与 PQ 互相垂直时取得最大值.

解　设 $AQB\perp PQ$，A、A' 与 B、B' 分别在同一个圆上，线段 $A'QB'$ 不垂直于 PQ.

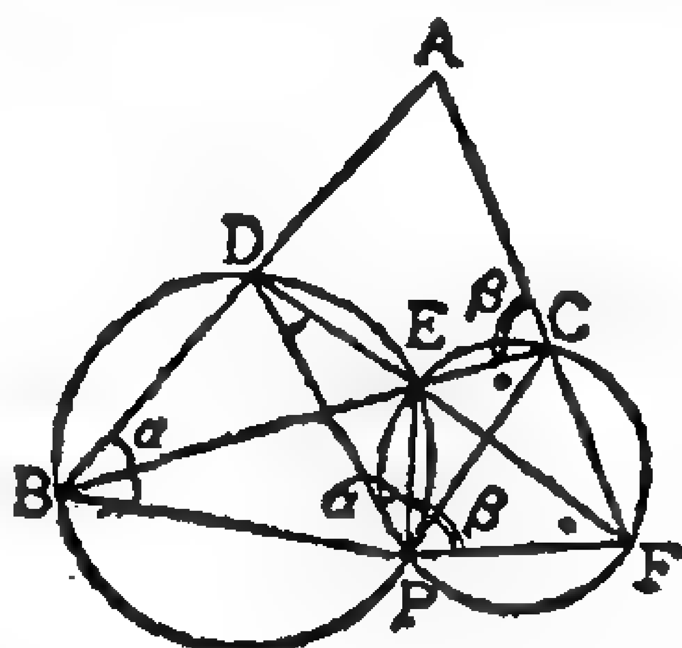
在 $\triangle PAB$、$\triangle PA'B'$ 中，

$$\angle PA'Q=\angle PAQ,\ \angle PB'Q=\angle PBQ,$$

$\therefore\quad \triangle PA'B' \backsim \triangle PAB$.

而 $\angle PQA=90°$. 所以 $PA>PA'$. 由此可得, $S_{\triangle PA'B}<S_{\triangle PAB}$. 即 $\triangle PAB$ 的面积最大。

1417. 若过给定 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的任一点 E, 引直线与 AB、AC 或其延长线分别交于点 D、E, 使 $DE:EF=m:n$(m、n 是定值), 则两三角形 BDE 与 ECF 的外接圆的另一个交点 P 是定点.



解 设两三角形 BDE、ECF 的外接圆的另一个交点为 P, 则 $\triangle ABC$ 的外接圆也经过点 P(问题 **651**).

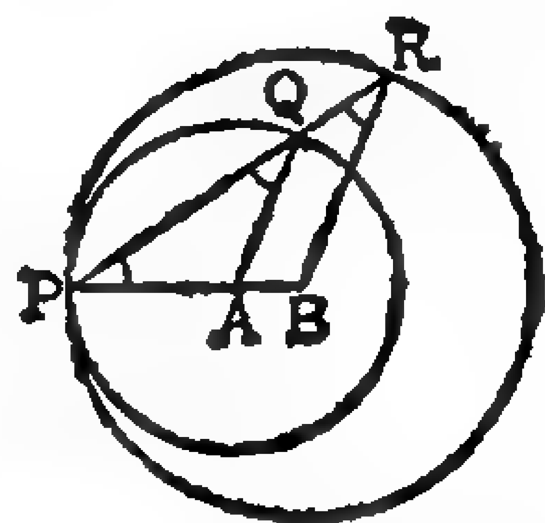
连结 DP、PC、PB、PF. 设 $\angle DPE=\angle DBE=\alpha$, $\angle EPF=\angle ACB=\beta$. 由假定 $DE:EF=m:n$ 可知, 在 $\triangle DPF$ 中, $\angle DPE$、$\angle EPF$ 的大小一定. 由此可知, $\triangle DPF$ 一定.

所以, $PD:PF$ 是定值. ①

$$\because\quad \angle EBP=\angle EDP,$$
$$\angle ECP=\angle EFP,$$
$$\therefore\quad \triangle BPC\backsim\triangle DPF,$$
$$\therefore\quad PB:PC=PD:PF.$$

由①可知 $PD:PF$ 是定值, 所以 $PB:PC$ 也是定值. 因 A、B、P、C 在过定点 B、C 的圆上, 由 $PB:PC$ 一定, 知 P 是定点.

1418. 若两圆内切, 则过切点的大圆的弦被小圆分成的两部分的比一定.



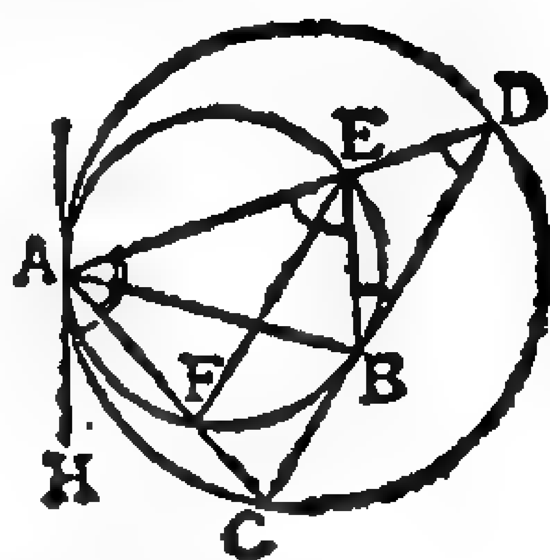
解 设两圆 A、B 内切于点 P, 过 P 引大圆 B 的弦 PR 与小圆 A 的交点为 Q. 显然, 连结圆心 A、B 的直线过切点 P.

连结 AQ、BR, 则 $\triangle APQ$、$\triangle BPR$ 都是等腰三角形.

$$\because\quad \angle APQ=\angle BPR,$$
$$\therefore\quad \angle PQA=\angle PRB.$$
$$\therefore\quad AQ\parallel BR.$$
$$\therefore\quad PQ:PR=PA:PB.$$

而 PA、PB 分别是圆 A、B 的半径, 它们的比是定值, 所以 $PQ:PR$ 是定值.

1419. 设两圆内切于点 A, 大圆的弦 CD 与小圆相切于点 B, AD 及 AC 与小圆的交点分别为 E、F, 则 $AE:AF=BD:BC$.



解 设在点 A 的公切线为 AH, 则

$$\angle CDA=\angle CAH=\angle FEA.$$
$$\therefore\quad CD\parallel FE.$$

从而得出,

$$AE:AF=AD:AC.$$

又 $\angle EAB=\angle EBD=\angle BEF=\angle BAF$, 所以 AB 是 $\angle CAD$ 的平分线.

$$\therefore\quad AD:AC=BD:BC.$$

所以, $\quad AE:AF=BD:BC.$

1420. 两圆 O、O' 外切于点 A, 在圆外取一点 P, 使 $\angle OPA=\angle O'PA$, 再从 P 引两圆的切线 PB, PC, 则

$$PA^2=PB\cdot PC.$$

解 假设 PA 与两圆的交点为 D、E, 则在 $\triangle POA$、$\triangle PO'E$ 中,

$$\angle OPA=\angle O'PE,$$

又由 $\angle EAO'=\angle AEO'$, 得

$$\angle PAO=\angle PEO',$$
$$\therefore\quad \triangle POA\backsim\triangle PO'E.$$
$$\therefore\quad PA:PE=PO:PO'.$$

同理可得, $PA:PD=PO':PO$.

$$\therefore\quad PE:PA=PA:PD,$$
$$\therefore\quad PE\cdot PD=PA^2. \qquad ①$$

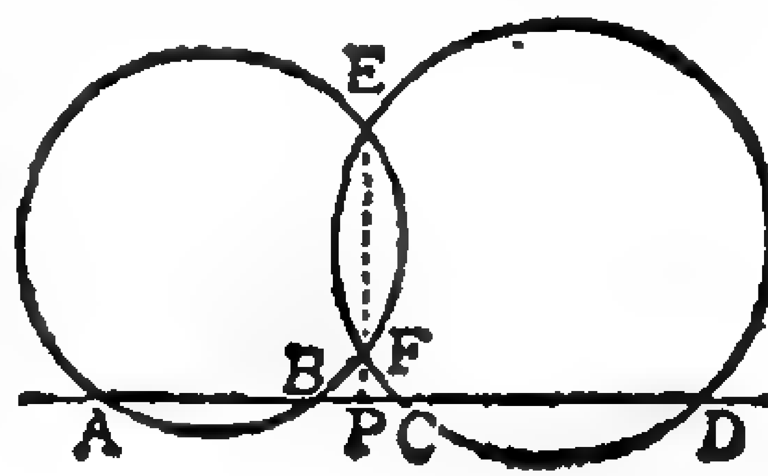
由 PB、PC 是切线可知,

$$PB^2=PA\cdot PD,\ PC^2=PA\cdot PE,$$
$$\therefore\quad PB^2\cdot PC^2=PA^2\cdot PD\cdot PE.$$

所以, 由①可得

$$PB^2\cdot PC^2=PA^2\cdot PA^2=PA^4.$$
$$\therefore\quad PB\cdot PC=PA^2.$$

1421. 在一条直线上有四个定点 A、B、C、D, 若过两点 A、B 的任意圆与过两点 C、D 的



任意圆相交，则两圆的公共弦 EF 过定点。

解 设 EF 与 AD 的交点为 P，则

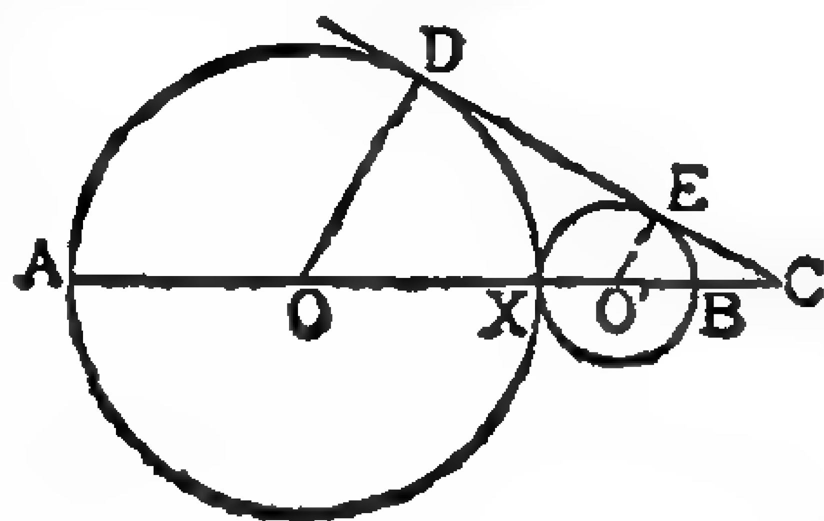
$$PA\cdot PB=PE\cdot PF=PC\cdot PD.$$

$$\therefore\quad \frac{PB}{PC}=\frac{PD}{PA}=\frac{PB+PD}{PC+PA}$$

$$=\frac{BD}{AC}\quad(\text{定比}).$$

而 B、C 是定点，$PB:PC$ 是定比。由此可知 P 是定点。即公共弦 EF 过这个定点 P.

1422. 在任意直线 AB 上取一点 X，设 $XA:XB=3:1$，以 AX、BX 为直径画圆，引两圆的公切线与 AB 的延长线相交于点 C，则 BC 等于小圆的半径。



解 设 AX、BX 分别为圆 O、O' 的直径，D、E 是两圆公切线的切点，连结 OD、$O'E$。假设 DE、AB 的延长线相交于点 C，根据题意，得

$$AX:BX=3:1,$$

即圆 O 的半径是圆 O' 半径的三倍。

又 $\quad O'C:CC=O'E:OD.$

而 $\quad O'C=O'B+BC=O'E+BC,$

$$CC=2O'B+OD+BC.$$

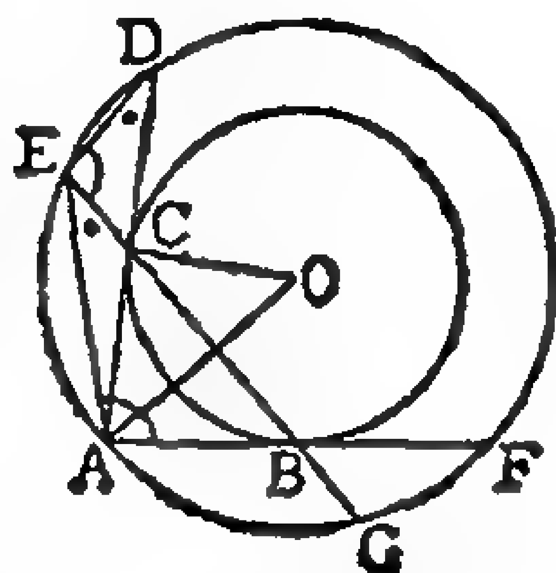
$$\therefore\quad (O'E+BC):(2O'B+OD+BC)=O'E:OD=1:3.$$

$$\therefore\quad (O'E+BC):(5O'E+BC)=1:3.$$

解这个方程，得 $BC=O'E$.

即 BC 是等于小圆 O' 的半径 $O'E$.

1423. 从两个同心的大圆上一点 A 向小圆引切线 AB、AC，延长 AC、BC 分别与大圆交于点 D、E，则 $EC:EB=ED^2:EA^2$.



解 延长 AB、CB 分别交大圆于 F、G，则弦 AD 与弦 AF，点 C 与点 B，大圆与小圆都是关于 AO 为对称。由此可知，点 F 与点 D，点 E 与点 G 也都是关于 AO 为对称。

$\therefore\ \widehat{AE}=\widehat{AG}$. $\therefore\ \angle EDA=\angle AEG$.

又 $\widehat{ED}=\widehat{GF}$. 从而得出，$\widehat{EF}=\widehat{GD}$.

$$\therefore\quad \angle EAF=\angle GED.$$

$$\therefore\quad \triangle EDC\backsim\triangle AEB,$$

$$\therefore\quad S_{\triangle EDC}:S_{\triangle AEB}=ED^2:EA^2.\qquad ①$$

而 $OC\perp AD$，$\therefore\ AC=CD$.

$$\therefore\quad S_{\triangle EDC}=S_{\triangle ACE}.$$

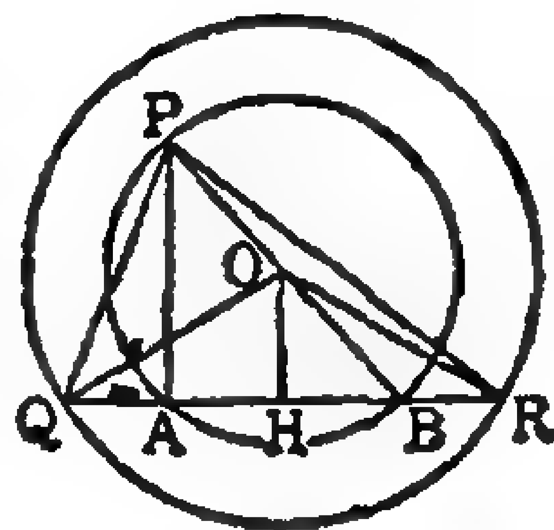
$$\therefore\quad S_{\triangle ECD}:S_{\triangle AEB}=S_{\triangle ACE}:S_{\triangle AEB}=EC:EB.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle EDC}:S_{\triangle AEB}=EC:EB.\qquad ②$$

由①、②，得

$$EC:EB=ED^2:EA^2.$$

1424. 设有两个同心圆。引小圆的任意弦 AP，过点 A 引大圆的弦 $QR\perp AP$，则 $\triangle PQR$ 三边上的正方形面积的和是定值。



解 设同心圆的圆心为 O，引小圆的直径 PB，则 O 是 PB 的中点。

由中线定理得

$$PQ^2+QB^2=2QO^2+2OP^2.$$

假设 $OQ=r$，$OP=r'$，则

$$PQ^2+QB^2=2r^2+2r'^2.\qquad ①$$

同理可得，

$$RP^2+RB^2=2OR^2+2OP^2=2r^2+2r'^2.\qquad ②$$

而 $\quad QR^2=(QB+BR)^2=QB^2+BR^2+2QB\cdot BR.$

又从 O 向 AB 引垂线 OH，则

$$OQ^2-OB^2=QH^2-HB^2=(QH+HB)(QH-HB)=QB\cdot QA.$$

$$\therefore\quad QB\cdot QA=r^2-r'^2.$$

$$\therefore\quad QB\cdot BR=r^2-r'^2.$$

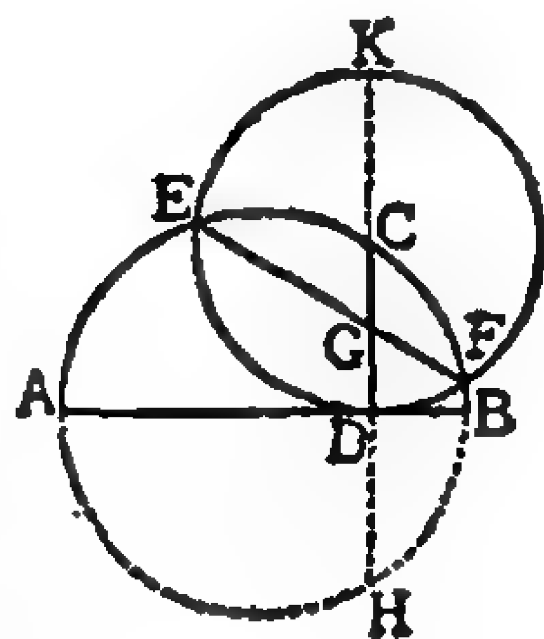
$$QR^2=QB^2+BR^2+2(r^2-r'^2).\qquad ③$$

由①+②+③，得

$$PQ^2+QB^2+RP^2+RB^2+QR^2=QB^2+BR^2+6r^2+2r'^2.$$

$$\therefore\quad PQ^2+PR^2+QR^2=6r^2+2r'^2(\text{是定值}).$$

1425. 以半圆 ACB 上一点 C 为圆心作圆与 AB 相切于点 D，与半圆的交点为 E、F，则弦 EF 平分线段 CD.



解 把 CD 向两个方向延长，设延长线与两圆分别交于 H、K，则

$$GC\cdot GH=GE\cdot GF=GD\cdot GK.$$

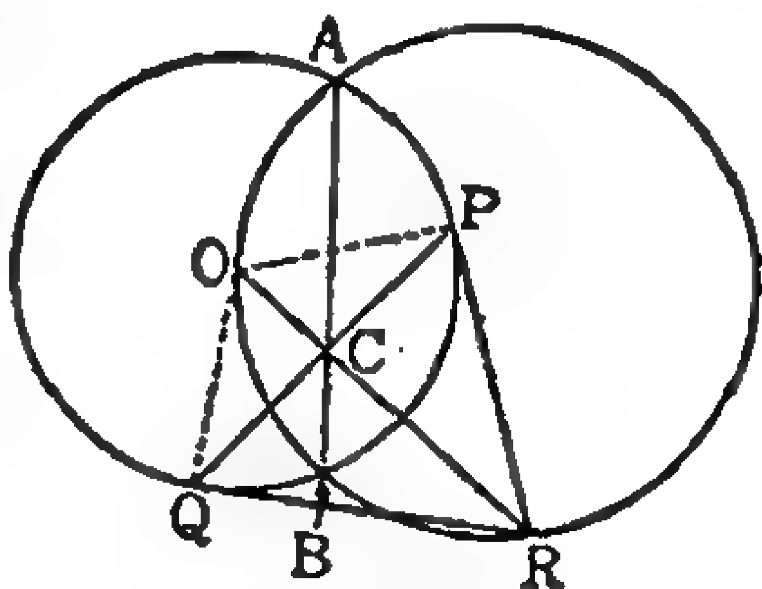
$$\therefore\ \frac{GC}{GK}=\frac{GD}{GH}.$$

$$\therefore\ \frac{GC}{GK-GC}=\frac{GD}{GH-GD},$$

即 $$\frac{GC}{CK}=\frac{GD}{DH}.$$

而 $CK=CD=DH$. $\therefore\ GC=GD$.

1426. 设圆 O 的定弦为 AB, 过被 AB 平分的任意弦 PQ 的两端引切线，两切线的交点为 R, 则点 R 在定圆上。

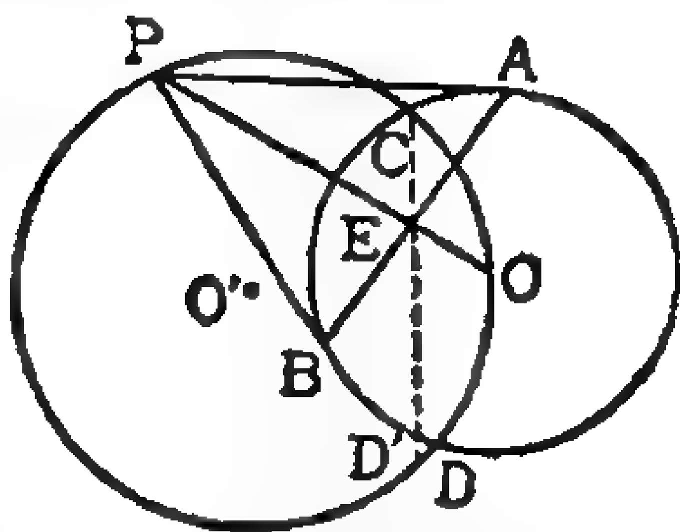


解　因为 $\angle OPR$、$\angle OQR$ 都是直角，所以点 O、Q、R、P 共圆。

$$\therefore\ OC\cdot CR=CP\cdot CQ=CA\cdot CB.$$

由此可知，A、O、B、R 共圆。而这个圆过三个定点 A、O、B, 所以它是定圆，即点 R 在这个定圆上。

1427. 若圆 O' 过另一个圆的圆心 O, 从圆 O' 上任一点 P 向圆 O 引切线 PA、PB, 则 AB 被公共弦 CD 二等分。



解　本题的解法是上题解法之逆。不过还可用下列方法来解本题。

设 OP 与 AB 的交点为 E, 则 E 是 AB 的中点。又 P、B、O、A 是同一圆上的点，所以

$$OE\cdot EP=AE\cdot EB.$$

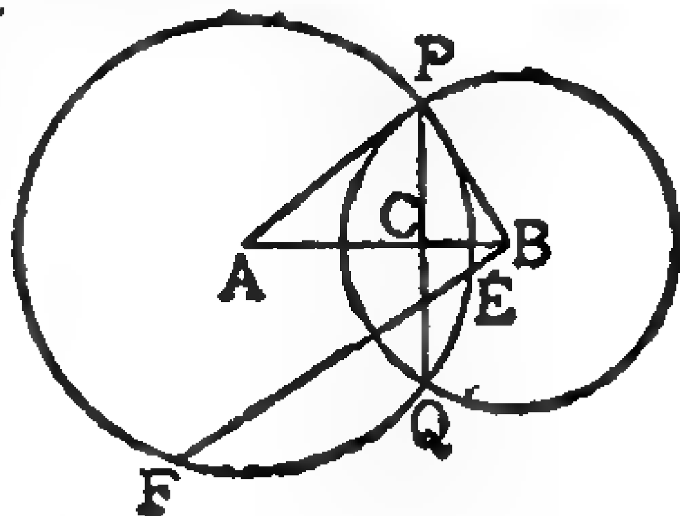
连结 CE, 并延长 CE 交圆 O' 于点 D', 则

$$OE\cdot EP=CE\cdot ED'.$$

$$\therefore\ AE\cdot EB=CE\cdot ED'.$$

由此可知，D' 必是圆 O 上的点，即 D 与 D' 是同一点。所以 CD 是过 AB 的中点。

1428. 若以 A、B 为中心的两圆垂直相交，它们的公共弦与 AB 的交点为 C, 由 B 向圆 A 引割线 BEF, 则 A、F、E、C 共圆。



解　设两圆的公共弦为 PQ, 则 $PQ\perp AB$。而圆 A、B 互相垂直相交，即 $\angle APB=90°$。所以，由直角三角形的比例线段性质，得

$$BC\cdot BA=BP^2. \qquad ①$$

而 BP 是圆 A 的切线。

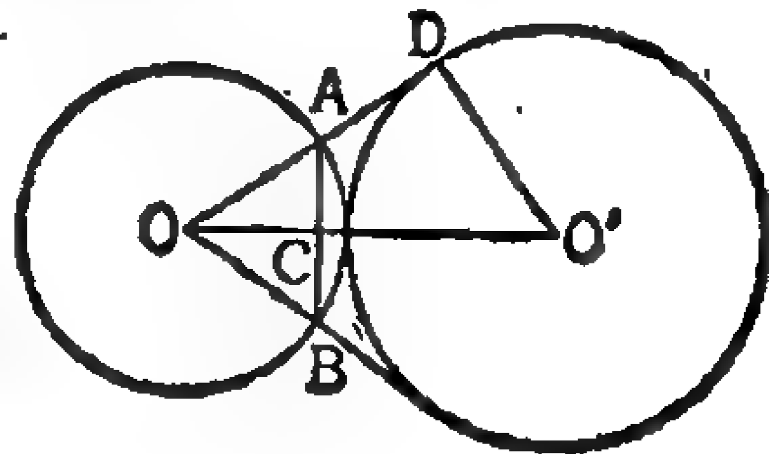
$$\therefore\ BE\cdot BF=BP^2. \qquad ②$$

由①、②，得

$$BC\cdot BA=BE\cdot BF.$$

所以，A、C、E、F 共圆。

1429. 两圆 O、O' (半径分别为 r、r') 相外切，由 O 向圆 O' 引切线与圆 O 交于 A、B, 则



$$\frac{2}{AB}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}.$$

解　设 OO' 与 AB 的交点为 C, 则

$$\triangle OAC\backsim\triangle OO'D.$$

$$\therefore\ \frac{O'D}{OO'}=\frac{AC}{OA}=\frac{2AC}{2OA}.$$

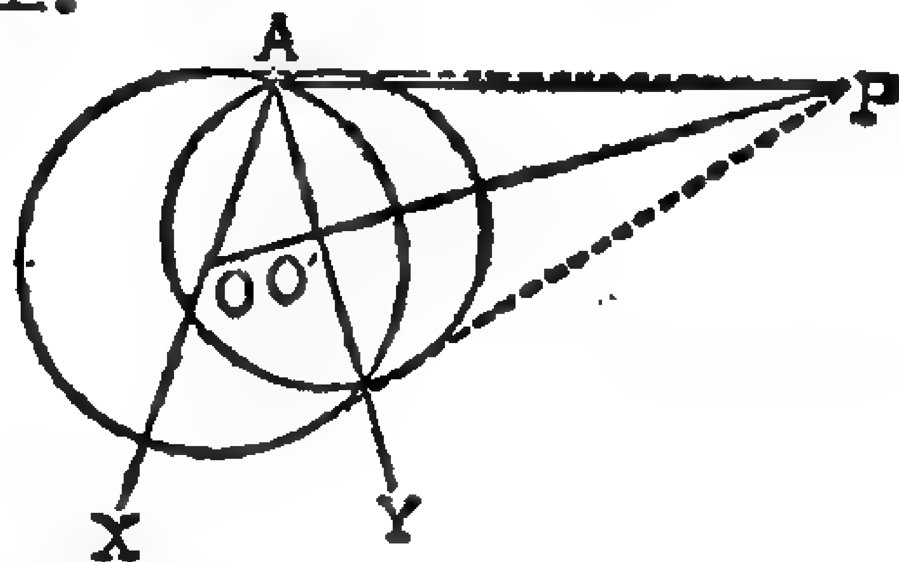
$$\therefore\ \frac{r'}{r+r'}=\frac{AB}{2r}.$$

从而得出，

$$\frac{2}{AB}=\frac{r+r'}{rr'}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}.$$

$$\therefore\ \frac{2}{AB}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}.$$

1430. 若定角 XAY 的边 AX、AY 上分别有点 O、O', 以 O、O' 为圆心分别作过点 A 的任意圆，则这两圆的两条外公切线的交点在定直线上。



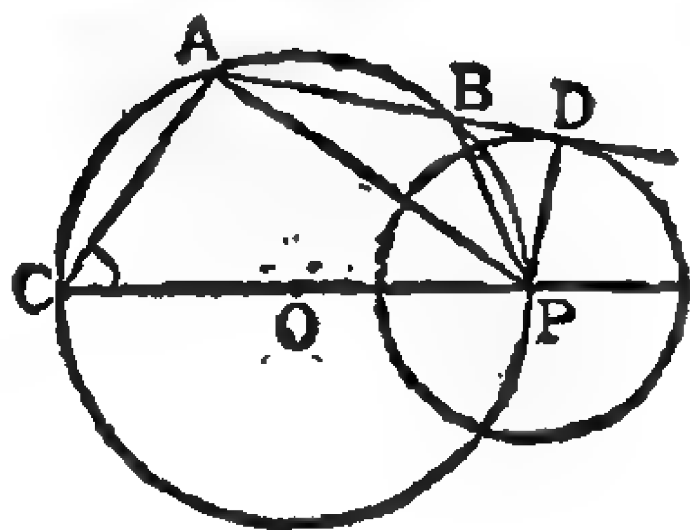
解　设两圆 O、O' 的外公切线的交点为 P, 则点 P 把连心线 OO' 外分成半径的比 (参阅问题 **1407**)。

而圆 O、O' 的半径分别为 OA、$O'A$。

$$\therefore\ PO:PO'=AO:AO'.$$

从而得出，AP 是与 $\angle XAY$ 相邻的外角的平分线。所以点 P 是在这个外角的平分线上。

1431. 设点 P 为圆 O 上的点，以 P 为圆心作圆，若圆 P 的切线与圆 O 的交点为 A、B，则以线段 PA、PB 为邻边的矩形的面积与切点位置无关。



解 作直径 PC，连结 P 与切点 D，则

$$\angle PDA=\angle PAC=90^\circ.$$

又

$$\angle DBP=\angle ACP.$$

$$\therefore\ \triangle CPA\backsim\triangle BPD.$$

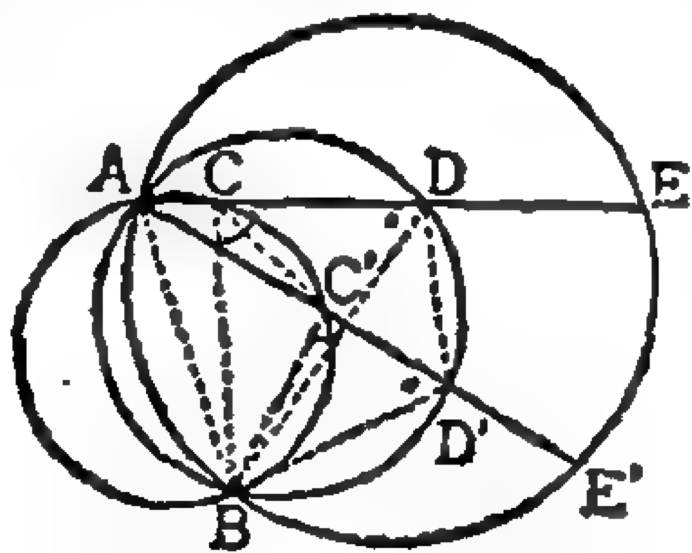
$$\therefore\ PC:PB=PA:PD,$$

即

$$PB\cdot PA=PC\cdot PD.$$

而 $PC\cdot PD$ 是定值．由此可知，以线段 PA、PB 为邻边的矩形的面积是定值．

1432. 若干个圆相交于两点 A、B，从 A 引两条直线 AE、AE'，则 AE、AE' 被这些圆所分成的对应部分成比例。



解 设 AE、AE' 与各圆的交点分别为 C、C'，D、D'，E、E'，则 $\angle ADB=\angle AD'B$．

又

$$\angle BCD+\angle BCA=180^\circ,$$

$$\angle BC'D'+\angle BC'A=180^\circ,$$

$$\because\ \angle BCA=\angle BC'A,$$

$$\therefore\ \angle BCD=\angle BC'D'.$$

$$\therefore\ \triangle BCD\backsim\triangle BC'D'.$$

从而得出，

$$\frac{BC}{BC'}=\frac{CD}{C'D'}. \quad ①$$

同理可得，

$$\frac{BD}{BD'}=\frac{DE}{D'E'}. \quad ②$$

而 $\angle BCC'=\angle BAD'=\angle BDD'$．

$$\angle DD'B+\angle DAB=180^\circ,$$

$$\angle CC'B+\angle DAB=180^\circ,$$

$$\therefore\ \angle DD'B=\angle CC'B.$$

$$\therefore\ \triangle BCC'\backsim\triangle BDD'.$$

从而得出，

$$\frac{BC}{BC'}=\frac{BD}{BD'}. \quad ③$$

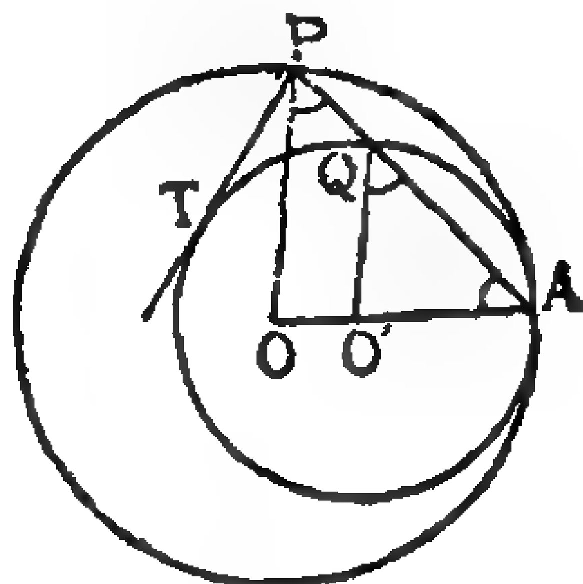
由①、②、③，得

$$\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E}.$$

同理可得，

$$\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\cdots$$

1433. 设两圆内切于点 A，它们的圆心分别为 O、O'，从大圆 O 上一点 P 向小圆 O' 引切线 PT，则 $PT^2:PA^2=OO':OA$．



解 因为 A 是两圆 O、O' 的切点，所以 O、O'、A 在一条直线上．

设 PA 与圆 O' 的交点为 Q，则

$$\angle O'QA=\angle A=\angle OPA.$$

$$\therefore\ OP\parallel O'Q.$$

$$\therefore\ \frac{PQ}{PA}=\frac{OO'}{OA}. \quad ①$$

而 PT 是圆 O' 的切线．

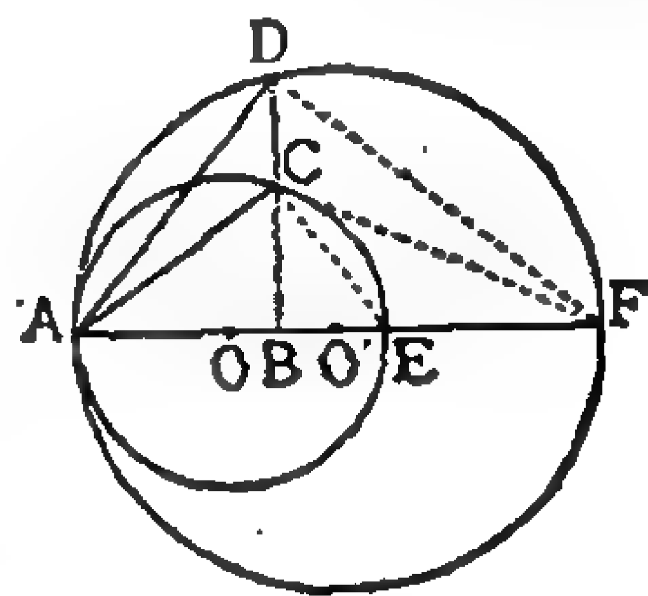
$$\therefore\ PT^2=PQ\cdot PA.$$

$$\therefore\ \frac{PT^2}{PA^2}=\frac{PQ\cdot PA}{PA^2}=\frac{PQ}{PA}.$$

因此，由①，得

$$\frac{PT^2}{PA^2}=\frac{OO'}{OA}.$$

1434. 两圆 O、O' 内切于点 A，引连心线 OO' 的垂线，设这垂线与两圆 O、O' 的交点分别为 C、D，则 $AC:AD$ 是定值．



解 显然，A、O、O' 在一条直线上．设 AOO' 的延长线与圆 O、O' 的交点分别为 E、F，则

$$AC^2=AB\cdot AE, \quad ①$$

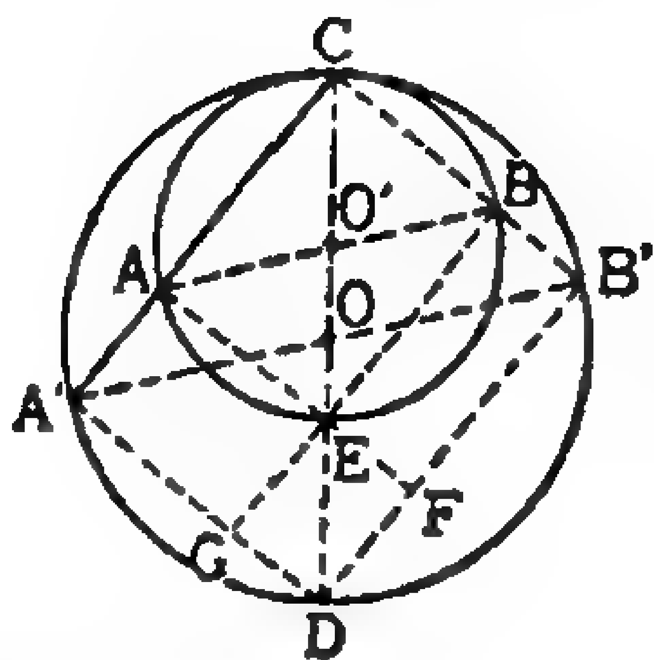
$$AD^2=AB\cdot AF. \quad ②$$

由①÷②，得

$$\frac{AC^2}{AD^2}=\frac{AE}{AF}.$$

因此可知，$AC:AD$ 是定值．

1435. 两圆内切于点 C，过 C 引互相垂直相交的两条割线 CA'、CB'，设 CA' 交两圆分别于 A、A'，CB' 交两圆分别于 B、B'，则 $AA'^2+BB'^2$ 是定值．



解　设两圆的圆心分别为O、O'，连结O、O'，并延长OO'过切点C，与圆O、O'的交点分别为D、E。连结$A'D$、$B'D$、AE、BE，设AE交$B'D$于F，BE交$A'D$于G，则

$$\angle CBE=\angle CB'D=90°.$$

$$\therefore\quad BG\parallel B'D.$$

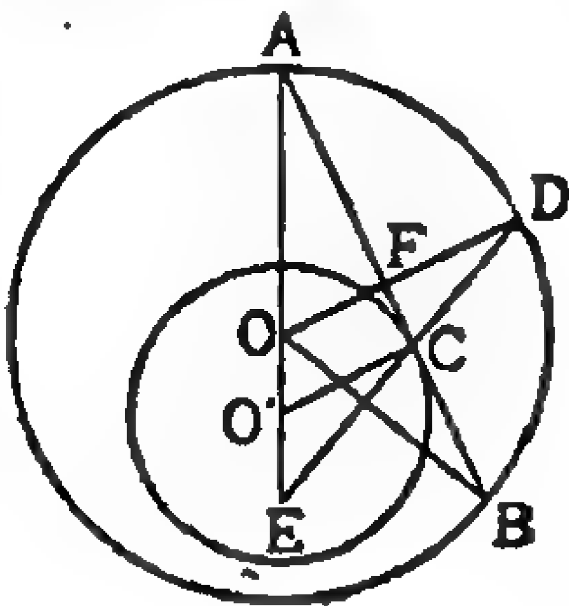
同理可得，$AF\parallel A'D$。

由此可得，$BB'=DG$。同理，$AA'=GE$。

$$\therefore\quad AA'^2+BB'^2=GE^2+GD^2=DE^2.$$

而DE^2是定值（DE是两直径的差，DE^2等于两直径的差上的正方形）。由此可得，$AA'^2+BB'^2$也是定值。

1436. 若圆O的弦AB是圆O'的切线，则连结$\overset{\frown}{AB}$的中点D与切点C的直线经过一定点。



解　连结两圆的圆心O、O'，并延长OO'与DC交于E。设AB与OD的交点为F，则

$$\angle AFO=90°=\angle FCO'.$$

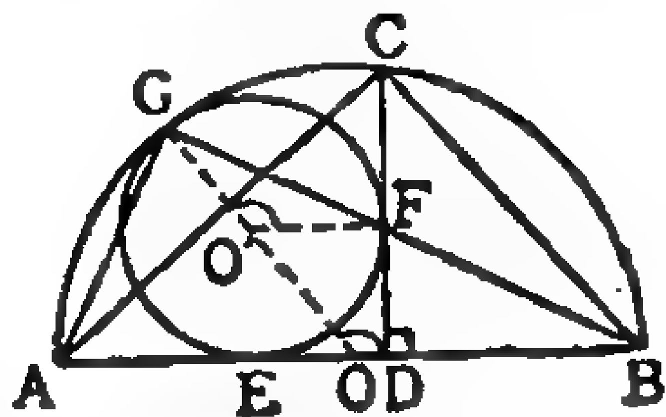
$$\therefore\quad OD\parallel O'C.\quad\therefore\quad\triangle DOE\backsim\triangle CO'E,$$

$$\therefore\quad DO:CO'=OE:O'E.$$

从而得出，$OE:O'E$是定值。由此可知，$OO':O'E$也是定值。

而OO'是定值。所以，$O'E$也是定值。又O'是定点，所以E是定点，即DC是经过定点E。

1437. 在半圆ACB的直径AB上引垂线CD，若在半圆的一部分ACD内作内切圆O'，与AB的切点为E，则$BE=BC$。



解　设内圆O'与CD、半圆的切点分别为F、G，则由$\triangle GO'F\backsim\triangle GOB$可知，$B$、$F$、$G$在一条直线上。

$$\therefore\quad BE^2=BF\cdot BG.\qquad①$$

而AB是直径，所以$\angle AGB=90°$。

又　　$\angle CDA=90°$，

$$\therefore\quad\angle AGB=\angle FDA=90°.$$

由此可知，F、G、A、D共圆。

$$\therefore\quad BG\cdot BF=BA\cdot BD.$$

又$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，

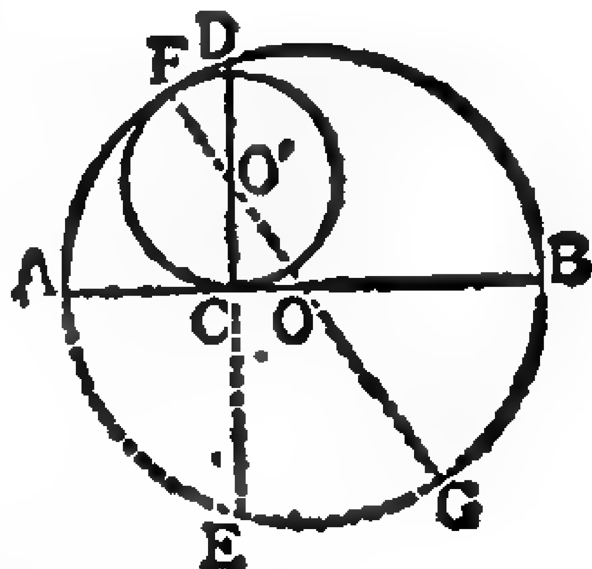
$$\therefore\quad BC^2=BA\cdot BD.$$

$$\therefore\quad BG\cdot BF=BC^2.\qquad②$$

由①、②，得$BE^2=BC^2$。$\therefore\quad BE=BC$。

1438. 设在圆心为O的半圆AFB内的圆O'与圆AFB在点F内切，与直径AB在点C相切，若延长CO'与圆O交于D，则

$$AB\cdot CO'=CD^2.$$



解　设AB为圆O的直径，连结O、O'并延长与圆O交于F、G（显然，延长OO'过公切点F），延长$O'C$与圆O交于E，则

$$AB\cdot CO'=FG\cdot FO'=(FO'+O'G)\cdot FO'$$
$$=FO'^2+O'G\cdot FO'.\qquad①$$

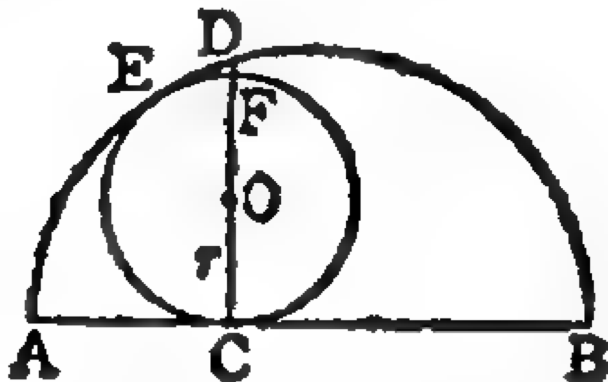
又　　$O'G\cdot FO'=O'D\cdot O'E$
$$=O'D\cdot(O'D+2CO').\qquad②$$

把②代入①，得

$$AB\cdot CO'=FO'^2+O'D\cdot(O'D+2CO')$$
$$=CO'^2+2CO'\cdot O'D+O'D^2$$
$$=(CO'+O'D)^2=CD^2,$$

$$\therefore\quad AB\cdot CO'=CD^2.$$

1439. 和半圆ADB及其直径AB相切的圆的直径CF，是半圆的直径AB被切点C所分成的线段AC、BC的调和中项。



解　设内圆的圆心为O，它的半径为r，过O引直径CF，并延长CF与半圆ADB交于点D，由上题可得

$$AB\cdot r=CD^2.$$

而$AC\cdot CB=CD^2$。$\therefore\quad AB\cdot r=AC\cdot CB$，

即　　$$r=\frac{AC\cdot CB}{AC+CB}.$$

$$\therefore\quad\frac{1}{r}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{CB}.$$

$$\therefore\quad\frac{1}{2r}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{CB}\right).$$

由此可得，CF是AC、CB的调和中项。

1440. 若圆PGD与圆ABC及弦AB分

别切于点 D、点 P，设弦 AB 在关于圆 PGD 的异侧所对弧 AFB 的中点为 F，过 F 引 AB 的垂线 EF，则以 EF 与圆 PGD 的直径为两邻边的矩形面积等于 $PA\cdot PB$。

解 设 PG 为圆 PGD 的直径，则 PG 垂直于 AB。所以 $PG\parallel FC$。

从 F 引 GP 的延长线的垂线 FH，则

$$\angle GDP=90^\circ=\angle PHF.$$

由此可得，G、D、H、F 四点共圆。

$$\therefore\quad PH\cdot PG=DP\cdot FP.$$

$$\because\quad EF=PH,\ \therefore\quad EF\cdot PG=PD\cdot PF.\quad ①$$

而 D、A、F、B 四点也共圆。

$$\therefore\quad PD\cdot PF=PA\cdot PB.\quad ②$$

由①、②，得 $EF\cdot PG=PA\cdot PB$。

1441. 从半圆 ACB 的直径 AB 上任一点 P，引 AB 的垂线 PE，与半圆 ACB 交于点 E，若圆 CQD 切直线 PE，且与半圆 ACB 内切于点 C，与以 PB 为直径的圆外切于点 D，又 QR 为圆 CQD 的直径，则

$$QR\cdot AB=PE^2.$$

解 由 PQ 是圆 QCR 与圆 PDB 的公切线，得

$$QR\cdot PB=PQ^2.\ \text{(问题 1399)}\quad ①$$

又根据上题可得

$$QR\cdot AP=QE\cdot QS.\quad ②$$

而 $PE=PS$。

$$\therefore\quad QS=PS+PQ=PE+PQ.$$

又 $$QE=PE-PQ.$$

因此，由②，得

$$QR\cdot AP=(PE-PQ)(PE+PQ)$$
$$=PE^2-PQ^2.\quad ③$$

由①+③，得

$$QR\cdot PB+QR\cdot PA=PE^2.$$
$$\therefore\quad QR\cdot(PB+AP)=PE^2,$$
$$\therefore\quad QR\cdot AB=PE^2.$$

1442. 设点 D 把半圆 ACB 的直径 AB 分成两部分 AD、BD，在半圆 ACB 内，以 AD、BD 分别为直径，在 AB 的同侧作两个半圆，又 $CD\perp AB$，在 CD 的两侧分别作圆 O、O' 与 CD 相切，且圆 O、圆 O' 分别与两个半圆外切，则这两个圆相等。

解 设两圆 O、O' 的直径分别为 d、d'，根据上题，得

$$AB\cdot d=CD^2,\quad ①$$
$$AB\cdot d'=CD^2.\quad ②$$

由①、②，得 $d=d'$。所以圆 O、O' 相等。

1443. 设以 AB 为直径的半圆上的两点 F、H，从 F、H 分别向 AB 作垂线 FG、HJ，作圆 O 与 FG、HJ、半圆都相切，从 O 作 AB 的垂线 OK，则 $OK^2=AG\cdot BJ$。

解 设圆 O 与弧 ACB 及 FG、HJ 的切点分别为 C、D、E，连结 OD、OE、CD、CE，则 CD、CE 的延长线分别经过点 A、B，其理由是：$\angle ODG=90^\circ=\angle DGB$，

$$\therefore\quad OD\parallel AB,\ OE\parallel AB.$$

由此可知，OD、OE 是一条直线，并且它与直径 AB 平行。

又 $\angle DCE=90^\circ$。设 CD、CE 的延长线分别与弧 ACB 交于 A'、B'，则 $\angle A'CB'=90^\circ$，所以 $A'B'$ 为直径，且 $A'B'$ 平行于直径 DE。由此可得，$A'B'$ 与 AB 重合。

又 $\angle AGD=90^\circ=\angle EJB$，

又 $\angle ADG=\angle FDC=\angle CED=\angle EBJ$，

$$\therefore\quad \triangle ADG\backsim\triangle EBJ.$$
$$\therefore\quad AG:GD=EJ:JB.\quad ①$$

而 $$GD=EJ=OK.$$

由①，得 $AG:OK=OK:JB$。

$$\therefore\quad OK^2=AG\cdot BJ.$$

1444. 在上题中，若圆 O 与半圆 ACB 外切，则

$$OK^2=AJ\cdot BG.$$

解 因为 $\angle DGA$

$=90°=\angle DCA$，所以 D、C、G、A 四点共圆。

$\therefore\quad \angle A=\angle GDC$.

$\therefore\quad \triangle AJE\backsim\triangle DGB$.

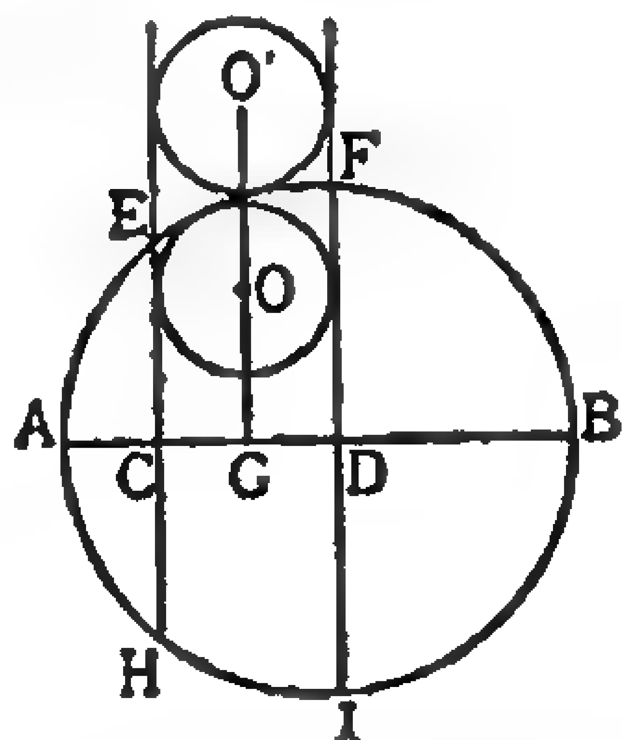
$\therefore\quad AJ:JE=DG:GB$. ①

而 $\quad GD=EJ=OK$.

由①，得 $AJ:OK=OK:GB$.

$\therefore\quad OK^2=AJ\cdot BG$.

1445. 设两条直线 CE、DF 与半圆的直径 AB 垂直．如果画两个圆与 CE、DF 相切，且其中一个圆与半圆 $AEFB$ 内切，另一个圆与半圆 $AEFB$ 外切，则从两圆的圆心 O、O' 向 AB 作两条垂线，以这两条垂线为邻边的矩形的面积等于 $CE\cdot DF$.



解 因为圆心 O、O' 到 CE 和 DF 的距离相等，连结 $O'O$，并延长 $O'O$ 与 AB 交于点 G，则 $\angle AGO=90°$. 若延长 EC、FD，分别与圆交于 H、J，由前面两题可知，

$$AC\cdot DB=OG^2,\ AD\cdot CB=O'G^2.$$

$\therefore\quad AC\cdot CB\cdot AD\cdot BD=OG^2\cdot O'G^2$.

而 $\quad AC\cdot CB=CH\cdot CE=CE^2$,

$AD\cdot DB=FD\cdot DJ=DF^2$.

$\therefore\quad CE^2\cdot DF^2=OG^2\cdot O'G^2$.

$\therefore\quad CE\cdot DF=OG\cdot O'G$.

1446. 设两个圆在任意直线上截取相等的弦 AB、$A'B'$，则过 A、A' 的切线 AT、$A'T$ 的比等于两圆半径的比。

解 设两圆的圆心为 O、O'，连结 OA、$O'A'$. 又 OC、$O'C'$ 是 AA' 的垂线．若作 AA' 的垂线 TD，在两个三角形 ACO，TDA 中，

$$\angle ACO=90°=\angle ADT,$$

由 TA 是圆 O 的切线，得 $\angle AOC=\angle TAD$,

$\therefore\quad \triangle ACO\backsim\triangle TDA$.

$\therefore\quad OA:AT=AC:DT$. ①

同理可得，

$O'A':A'T=A'C':TD$. ②

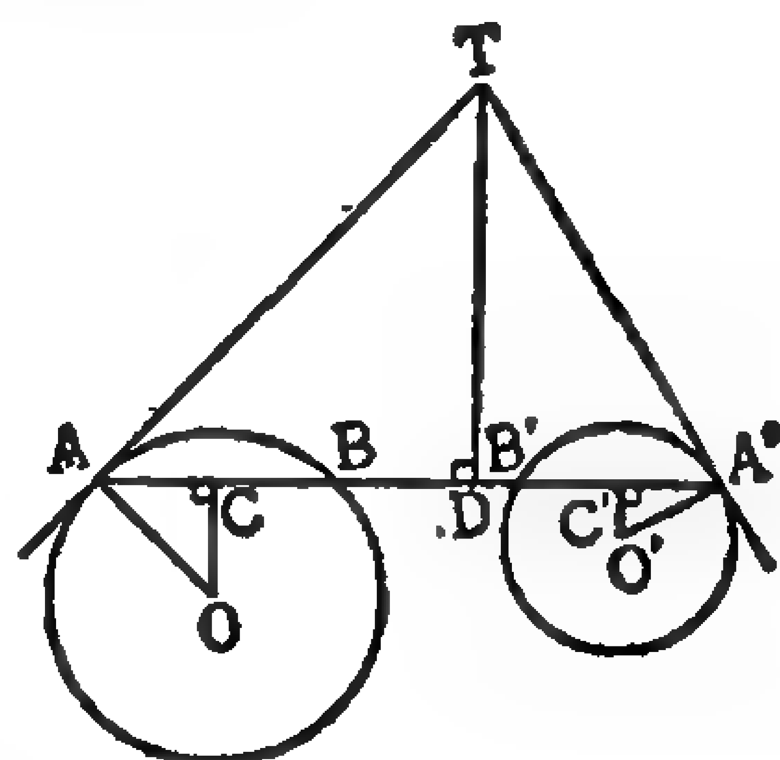
而 $\quad AC=A'C'$ ($\because\ AB=A'B'$, $AB\perp OC$, $A'B'\perp O'C'$).

$\therefore\quad AC:TD=A'C':TD$. ③

由①、②、③，得 $OA:AT=O'A':A'T$.

即 $\quad AT:A'T=OA:O'A'$.

1447. 已知两个圆 O、O'，引割线 $ABB'A'$ 与圆 O 交于 A、B，与圆 O' 交于 B'、A'，由 A、A' 分别引两圆的切线，设交点为 T，则



$$\frac{AT}{A'T}=\frac{AO}{A'O'}\cdot\frac{A'B'}{AB}.$$

解 从 O、O' 向 AA' 作垂线 OC、$O'C'$，则 $\triangle ATD\backsim\triangle OAC$，$\triangle A'TD\backsim\triangle O'A'C'$.

$\therefore\quad AT:TD=AO:CA$, ①

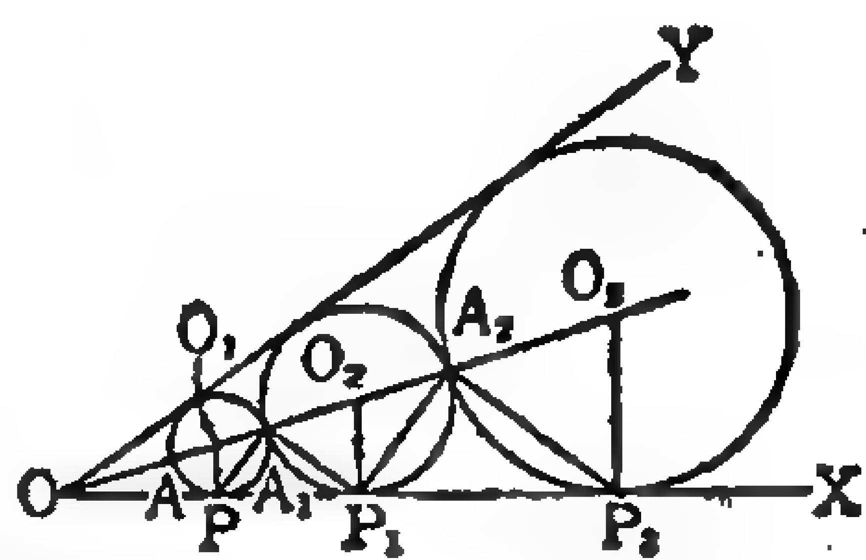
$TD:TA'=C'A':A'O'$. ②

由①、②，得

$$AT:TA'=AO\cdot C'A':CA\cdot A'O'.$$

$$\therefore\quad \frac{AT}{A'T}=\frac{AO}{A'O'}\cdot\frac{C'A'}{CA}=\frac{AO}{A'O'}\cdot\frac{A'B'}{AB}.$$

1448. 有若干个互相外切的圆，它们切于两条相交直线 OX、OY，则这些圆的半径的比依次成等比数列。



解 设 $\angle XOY$ 的平分线与圆 O_1、O_2、$O_3\cdots$ 的交点分别为 A、A_1、A_2、$\cdots$，与 OX 的切点分别为 P、P_1、P_2、$\cdots$，则由

$\triangle O_1PA_1\backsim\triangle O_2P_1A_2$,

得 $\quad O_1P:O_2P_1=PA_1:P_1A_2$, ①

$\triangle PA_1P_1\backsim\triangle P_1A_2P_2$,

得 $\quad PA_1:P_1A_2=A_1P_1:A_2P_2$, ②

$\triangle A_1P_1O_2\backsim\triangle A_2P_2O_3$,

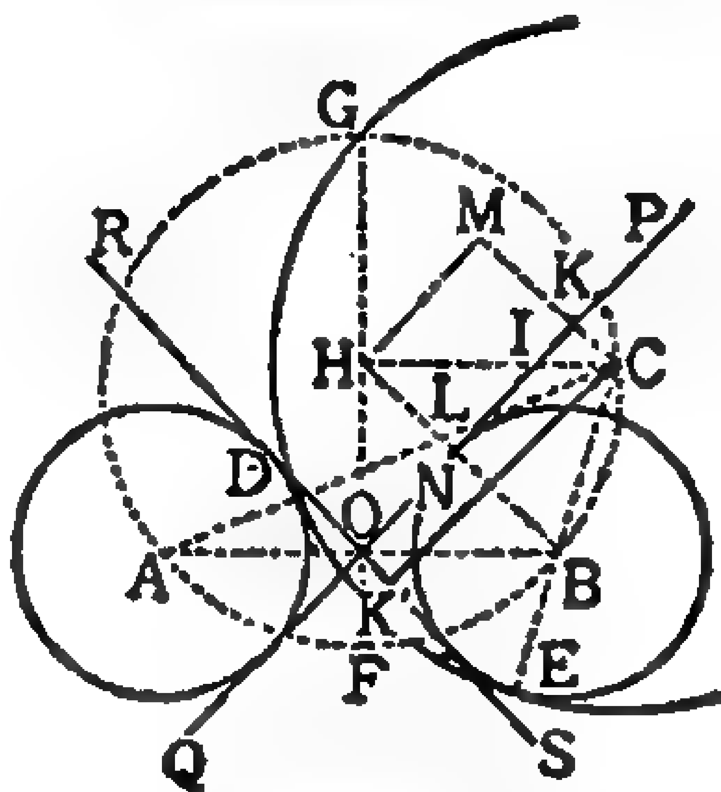
得 $\quad A_1P_1:A_2P_2=O_2P_1:O_3P_2$. ③

由①、②、③，得 $O_1P:O_2P_1=O_2P_1:O_3P_2$，即圆 O_1、O_2、O_3 的半径成等比数列。

同理可得，若依次作出圆 O_4、O_5、$\cdots$，则圆

O_4、O_5、…的半径的比成等比数列。

1449. 设动圆 C 与两个等圆 A、B 中的一个内切，与另一个外切，从动圆的中心 C 向两个等圆的两条内公切线作垂线，垂足为 K、K'，若两条切线交于点 O，则 $OK\cdot OK'$ 是定值。



解　设圆 C 与圆 A 在点 D 外切，与圆 B 在点 E 内切。过 C、A、B 作圆，过 O 引 AB 的垂线交所作圆于 F、G，则 FG 是这圆的直径。从 C 向 FG 引垂线 CH，延长 CK 与 PQ 的平行线 HM 交于点 M，又从 H 向 PQ 引垂线 HL。设 PQ 与圆 B 的切点为 N，又 $\triangle OBN$ 的各边 BN、ON、OB 分别用 a、b、c 来表示，则

$$AC=AD+DC,\ BC=CE-BE=CD-AD.$$

$$\therefore\ AC-BC=2AD.$$

$$\therefore\ AD=\frac{1}{2}(AC-BC),$$

即
$$a=\frac{1}{2}(AC-BC),$$

根据问题 **1348** 可知，

$$a^2=OF\cdot GH. \qquad ①$$

而 $AO=BO$. $\therefore\ AO\cdot BO=OF\cdot OG$,

即 $$OB^2=c^2=OF\cdot OG.$$

$$\therefore\ ON^2=OB^2-BN^2=OF\cdot OG-OF\cdot GH$$
$$=OF(OG-GH)=OF\cdot OH.$$

$$\therefore\ ON^2=b^2=OF\cdot OH. \qquad ②$$

又 $$\triangle ONB\backsim\triangle HMC,$$

$$\therefore\ c:b=HC:HM.$$

$$\because\ HM=LK,\ \therefore\ LK=\frac{b\cdot HC}{c}.$$

而 $$\triangle ONB\backsim\triangle HLO.$$

$$\therefore\ OL=\frac{a\cdot OH}{c}.$$

$$\therefore\ OK=LK+OL=\frac{b\cdot HC}{c}+\frac{a\cdot OH}{c}.$$

同理可得，$OK'=\dfrac{b\cdot HC}{c}-\dfrac{a\cdot OH}{c}$,

$$\therefore\ OK\cdot OK'=\frac{b^2\cdot HC^2}{c^2}-\frac{a^2\cdot OH^2}{c^2}.$$

由②，得

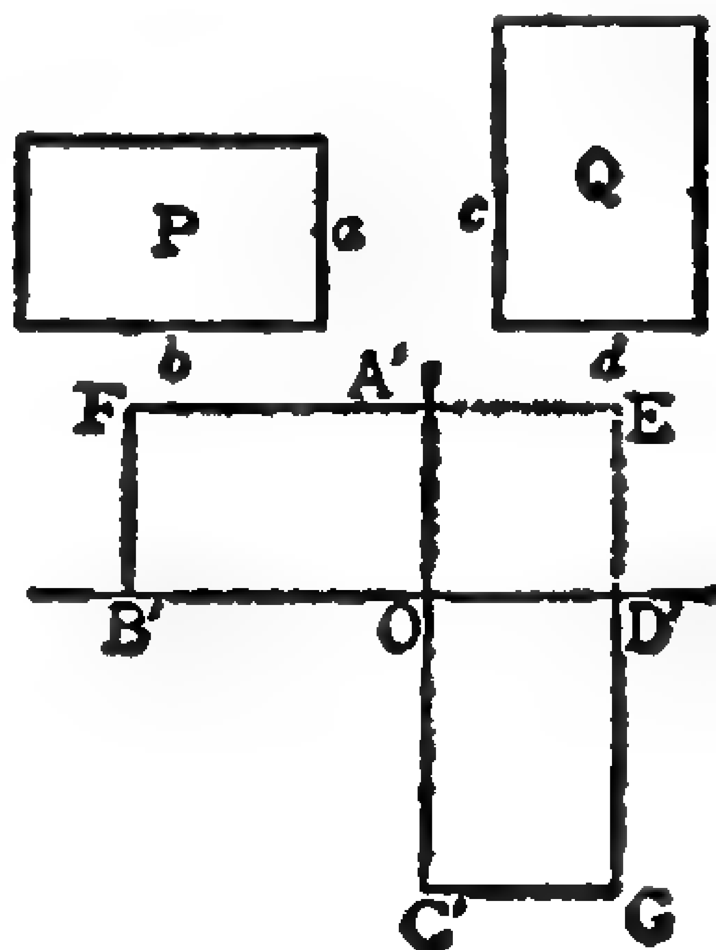
$$OK\cdot OK'=\frac{OF\cdot OH\cdot FH\cdot HG-a^2\cdot OH^2}{c^2}.$$

由①，得

$$OK\cdot OK'=\frac{a^2\cdot OH\cdot FH-a^2\cdot OH^2}{c^2}$$
$$=\frac{a^2\cdot OH\cdot(FH-OH)}{c^2}$$
$$=\frac{a^2\cdot OH\cdot OF}{c^2}=\frac{a^2\cdot b^2}{c^2}\text{(定值)}.$$

15. 面积的比例线段

1450. 两个矩形的面积的比等于它们底边的比和高的比的复比。



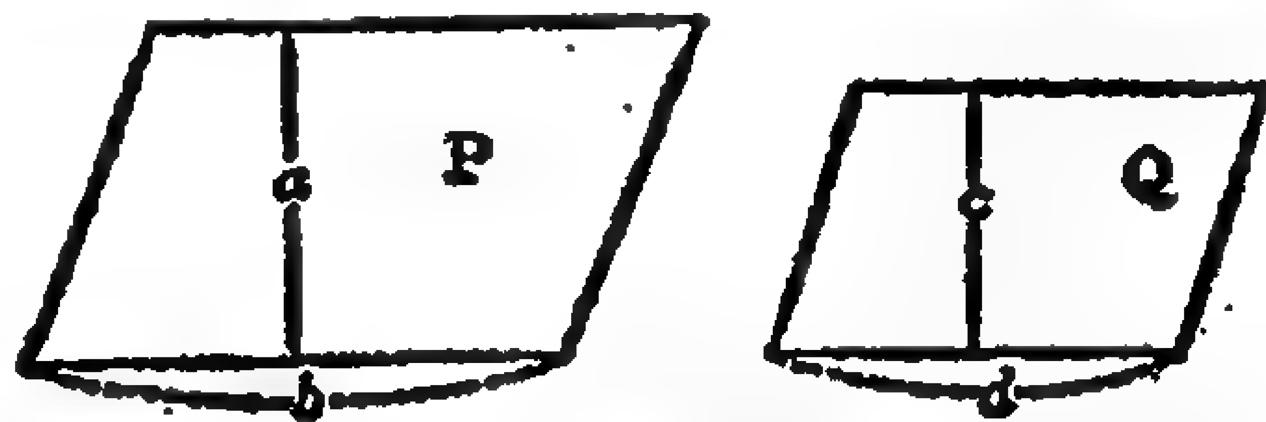
解　设矩形 P 的高为 a，底为 b，矩形 Q 的高为 c，底为 d。作两条垂直相交于 O 的直线 $B'D'$、$A'C'$，在 $A'C'$ 上取 $OA'=a$，$OC'=c$，在 $B'D'$ 上取 $OB'=b$，$OD'=d$，作矩形 $A'FB'O$、矩形 $OD'EA'$、矩形 $OC'GD'$，使矩形 $A'FB'O$ 的面积 $=P$，矩形 $OC'GD'$ 的面积 $=Q$，又设矩形 $OD'EA'$ 的面积 $=A$，则

$$\frac{P}{A}=\frac{OB'}{OD'}=\frac{b}{d},\ \frac{A}{Q}=\frac{OA'}{OC'}=\frac{a}{c}.$$

$$\therefore\ \frac{P}{A}\cdot\frac{A}{Q}=\frac{b}{d}\cdot\frac{a}{c}.\ \text{即}\ \frac{P}{Q}=\frac{b}{d}\cdot\frac{a}{c}.$$

1451. 两个平行四边形的面积的比等于它们的底与高乘积的比。

解　设平行四边形 P 的高为 a、底为 b，平行四边形 Q 的高为 c、底为 d。因为平行四边形的面积与等底等高的矩形的面积相等，所



以，作矩形 P'、Q'，使它们的底分别与 P、Q 同底，它们的高分别与 P、Q 的高相等，则

$$\frac{P\text{的面积}}{Q\text{的面积}}=\frac{P'\text{的面积}}{Q'\text{的面积}}=\frac{a\cdot b}{c\cdot d}.$$

1452. 设 P 为 $\triangle ABC$ 内任一点，连结

AP、BP、CP，又延长 AP 与 BC 相交于点 D，则 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{BD}{CD}$.

解 从 B、C 向 AD 作垂线 BE、CF，则

$$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AP\cdot BE,$$

$$S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AP\cdot CF.$$

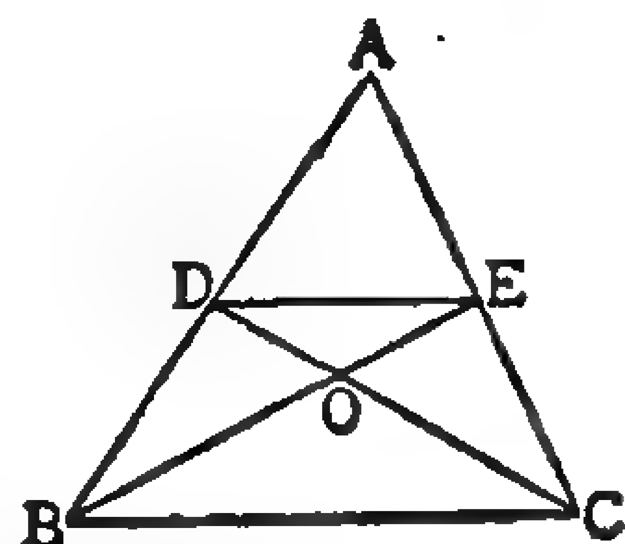
$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{BE}{CF}. \qquad ①$$

而 $\triangle BDE\backsim\triangle CDF$.

$$\therefore\quad \frac{BE}{CF}=\frac{BD}{CD}. \qquad ②$$

由①、②，得 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{BD}{CD}$.

1453. 设 $\triangle ABC$ 的两边 AB 及 AC 的中点分别为 D 及 E，直线 CD 与 BE 交于点 O，则 $S_{\triangle ADE}=3S_{\triangle DOE}$.



解 因为 D 是 AB 的中点，所以

$$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle EDB}.$$

又 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $BE=3OE$.

由此可得，$S_{\triangle DBE}=3S_{\triangle DOE}$.

$$\therefore\quad S_{\triangle ADE}=3S_{\triangle DOE}.$$

1454. 从 $\triangle ABC$ 的顶点 C 向 AB 引垂线，设垂足为 M. 若 $S_{\triangle ACM}:S_{\triangle BCM}=AC^2:BC^2$，则 $\angle ACB=90°$. 其中 $AC\neq BC$.

解 设 $AM=a$，$BM=b$，$CM=h$，则 $S_{\triangle ACM}:S_{\triangle BCM}=a:b$，

$$AC^2:BC^2=(a^2+h^2):(b^2+h^2).$$

而 $S_{\triangle ACM}:S_{\triangle BCM}=AC^2:BC^2$.

由此可得 $a:b=(a^2+h^2):(b^2+h^2)$

$$\therefore\quad a(b^2+h^2)=b(a^2+h^2),$$

$$(a-b)(ab-h^2)=0.$$

所以 $a-b=0$，或 $ab-h^2=0$.

而 $AC\neq BC$，$\therefore\ a\neq b$.

$$\therefore\quad ab-h^2=0，即\ a:h=h:b.$$

$$\therefore\quad \triangle ACM\backsim\triangle CBM.$$

$$\therefore\quad \angle ACM=\angle CBM.$$

从而得出，$\angle ACB=90°$.

1455. 若 $\triangle ABC$ 中有一点 O，使 $\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCA$ 三个三角形的面积的比等于下列各个比，问：点 O 的位置怎样？

(1) $AB:BC:CA$；

(2) $\frac{1}{OC}:\frac{1}{OA}:\frac{1}{OB}$；　(3) 1:1:1.

解 (1) 设 OD、OE、OF 分别是从 O 向 BC、CA、AB 所引的垂线，D、E、F 是垂足，则

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}AB\cdot OF,\quad S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}BC\cdot OD,$$

$$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}AC\cdot OE.$$

根据题意，得

$$S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OBC}:S_{\triangle OAC}=AB:BC:CA.$$

$$\therefore\quad OF=OD=OE,$$

这就是说，点 O 到三角形的三边等距离。由此可知点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心或旁心。

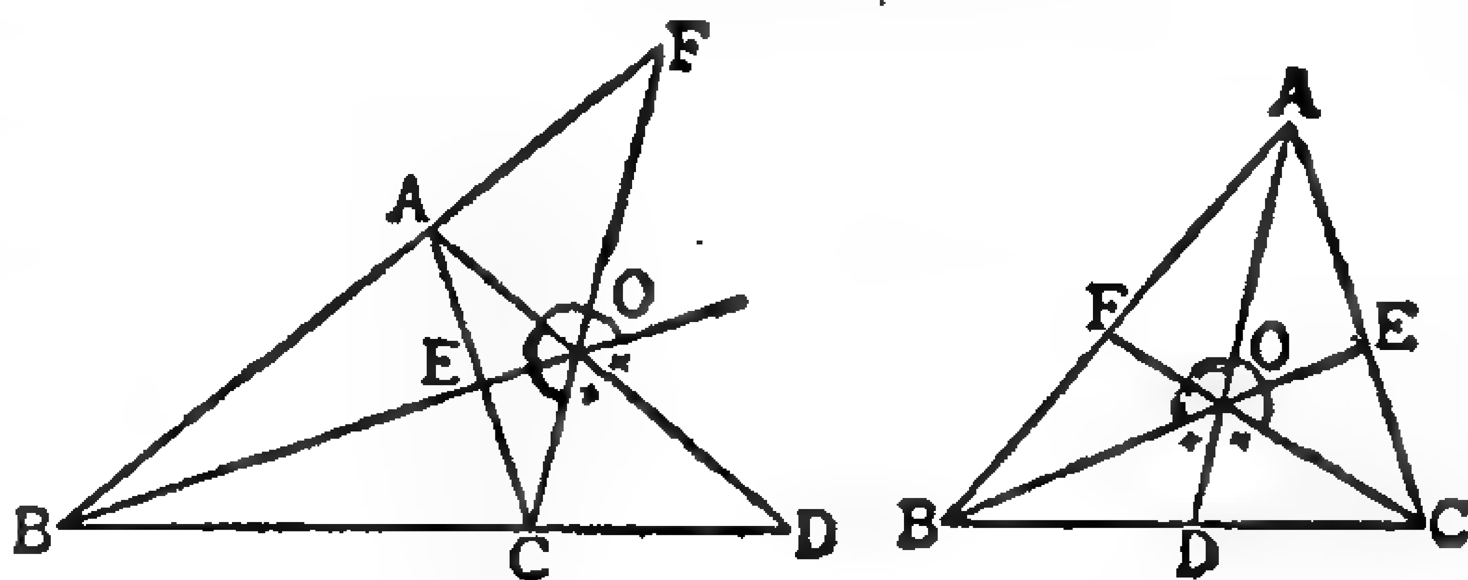
(2) 题设 $S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OBC}=\frac{1}{OC}:\frac{1}{OA}$，则

$$S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OBC}=OA:OC.$$

若延长 BO 与 AC 相交于点 E，则

$$S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OBC}=AE:EC.$$

$$\therefore\quad OA:OC=AE:EC.$$



由此可得，BO 是 $\angle AOC$ 的平分线.

同理可得，AO、CO 分别是 $\angle BOC$、$\angle AOB$ 的平分线.

所以，点 O 是使

$$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°,$$

或者使 $\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COA$ 中有两个是 60°、一个是 120° 的点.

(3) 设延长 AO、BO、CO 分别与 BC、CA、AB 的交点为 L、M、N，而 BO 是 $\triangle OAB$、$\triangle OBC$ 的公共底，所以这两个三角形的面积

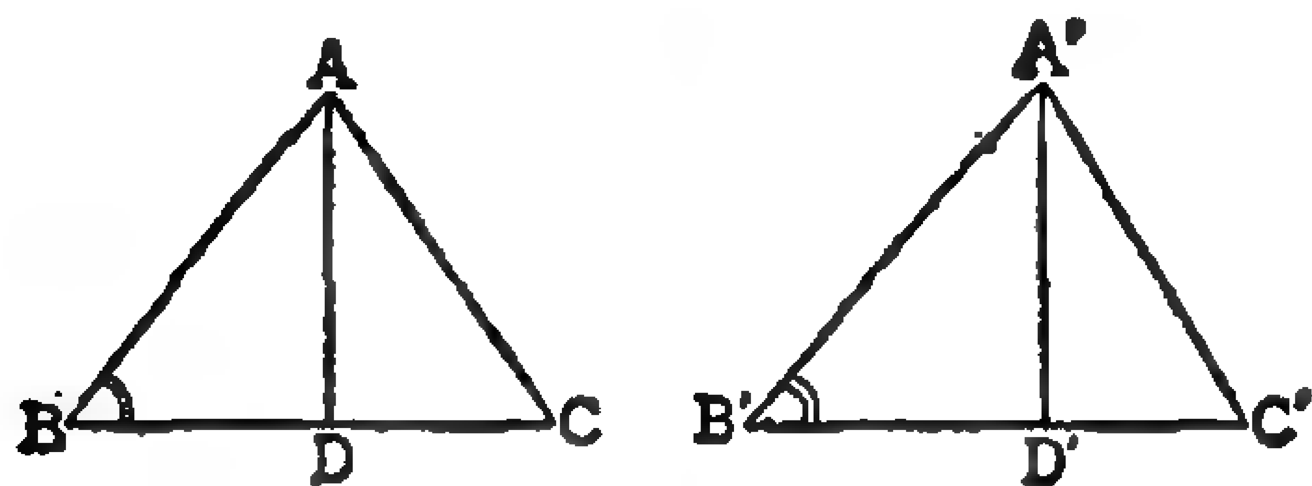
的比等于它们的高的比。由此可得，$S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OBC}=AM:CM$。

根据题意$S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OBC}=1:1$，可知$M$是$AC$的中点，$BM$是中线。

同理可得，CN、AL也是中线。因此，它们的交点O是$\triangle ABC$的重心。

1456. 若两个三角形中，有一个角相等或相补，则它们的面积的比等于这个角夹边乘积的比。

解 在$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$中，设$\angle B=\angle B'$，由A、A'分别向BC、$B'C'$作垂线AD、$A'D'$，则在$\triangle ABD$、$\triangle A'B'D'$中$\angle B=\angle B'$，$\angle ADB=90°=\angle A'D'B'$，



$$\therefore\quad \triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'.$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}. \qquad ①$$

而
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD,$$

$$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D',$$

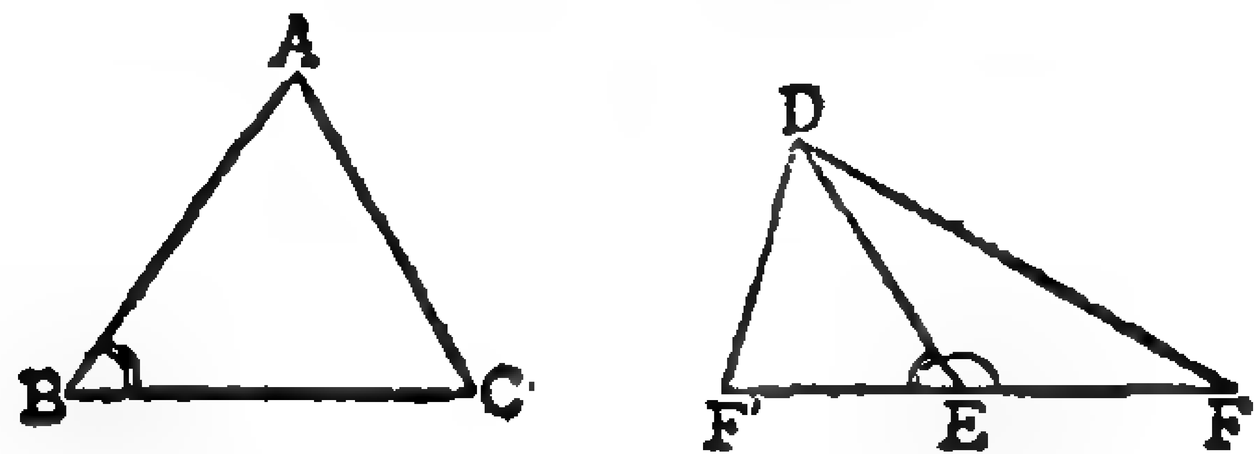
$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{BC\cdot AD}{B'C'\cdot A'D'}.$$

把①代入上式，得

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{BC\cdot AB}{B'C'\cdot A'B'}.$$

又在$\triangle ABC$、$\triangle DEF$中，$\angle B$与$\angle DEF$互补，延长EF使$EF'=FE$，则

$$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DEF'}.$$



$\therefore\quad S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DF'E}=AB\cdot BC:DE\cdot EF'$，

从而得出，

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DEF}=AB\cdot BC:DE\cdot EF.$$

1457. 两个相似三角形的面积的比等于对应边的平方的比。

解 设$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，则

$$\angle B=\angle E.$$

根据上题，得

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}}=\frac{AB\cdot BC}{DE\cdot EF}.$$

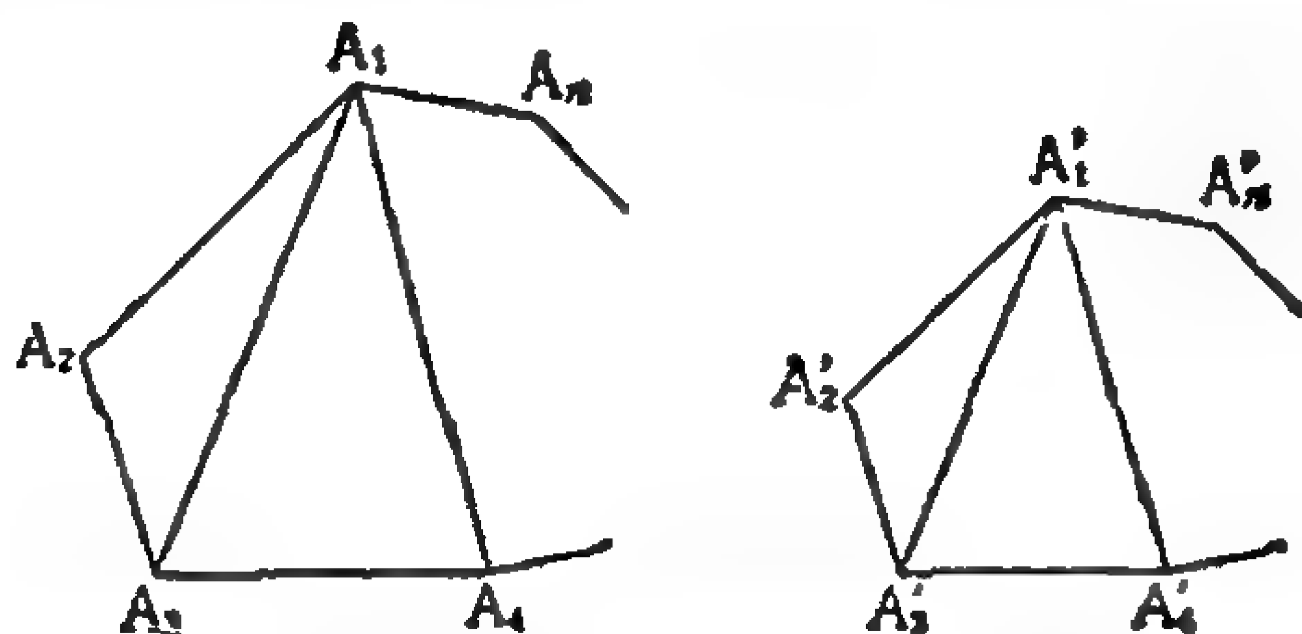
又
$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}.$$

代入上式，得

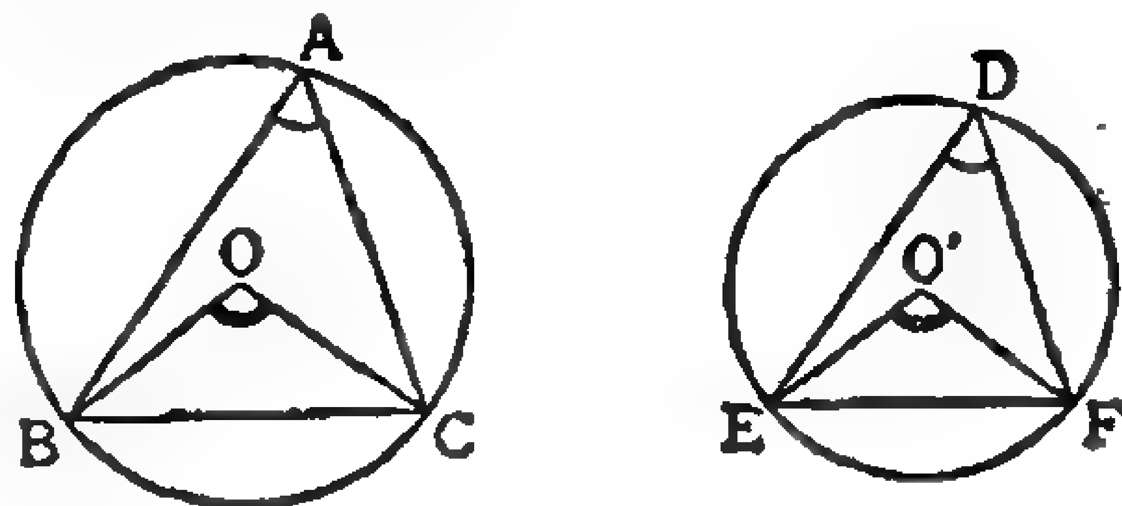
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}}=\frac{BC^2}{EF^2}.$$

1458. 相似多边形的面积的比等于对应边上正方形的面积的比。

解 两个相似多边形总可分成个数相同的相似三角形，又两个相似三角形的面积的比等于对应边上正方形的面积的比。根据合比定理可得，两个相似多边形面积的比也等于这些三角形的面积和的比，即相似多边形的面积与它们的对应边上的正方形的面积是成比例的。



1459. 两个相似三角形面积的比等于它们的外接圆半径的平方的比。



解 设$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，则

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DEF}=BC^2:EF^2. \qquad ①$$

设$\triangle ABC$、$\triangle DEF$的外心分别为O、O'，则$\angle BOC=2\angle A$，$\angle EO'F=2\angle D$。

而 $\angle A=\angle D$，所以 $\angle BOC=\angle EO'F$。

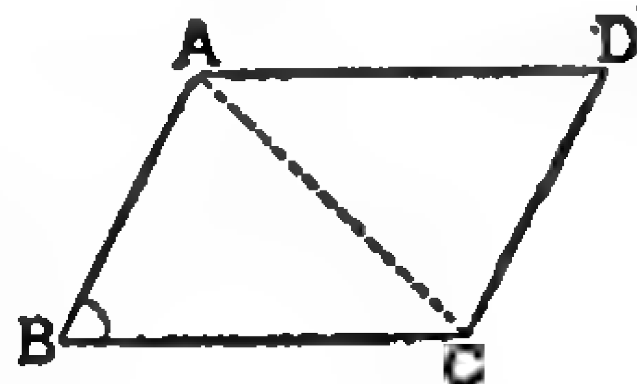
又 $\triangle OBC$、$\triangle O'EF$ 都是等腰三角形，

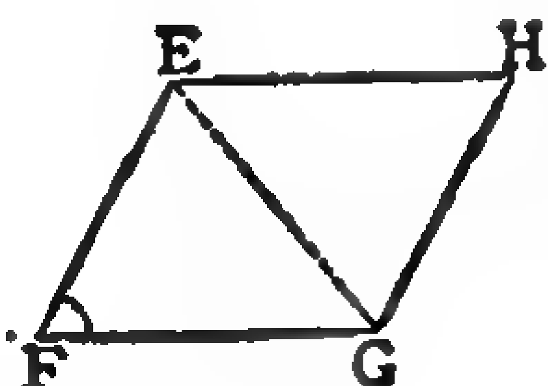
$$\therefore\quad OB:O'E=BC:EF. \qquad ②$$

由①、②，得 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DEF}=OB^2:O'E^2$。

注　因为两个相似三角形的内切圆的半径、外接圆的半径、对应的中线、对应角的平分线、对应的高的比都等于相似比，所以如果本问题中的外接圆用内切圆、对应的旁切圆、中线、角平分线、高等来代替，问题也成立。

1460. 若两个平行四边形 $ABCD$、$EFGH$ 有一个角相等，设 $\angle B=\angle F$，则它们的面积的比等于这个角夹边乘积的比，即





$$AB\cdot BC:EF\cdot FG.$$

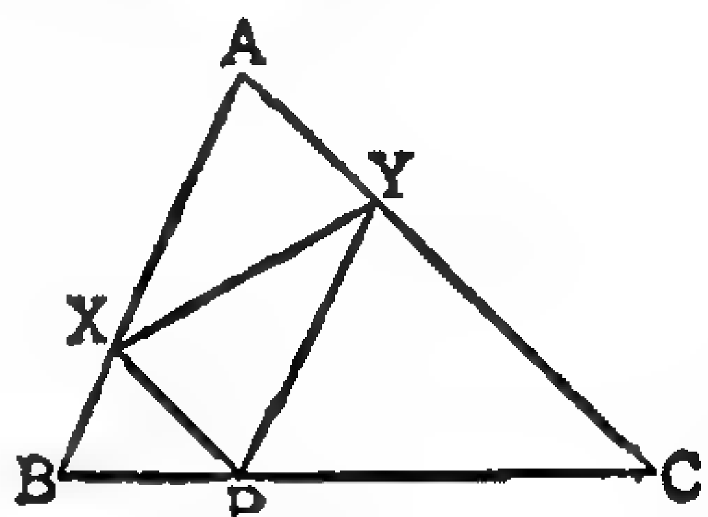
解　根据问题 **1456**，得

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EFG}}=\frac{BA\cdot BC}{FE\cdot FG}.$$

设 ▱$ABCD$ 的面积和 ▱$EFGH$ 的面积分别为 S_1、S_2，则 $S_1=2S_{\triangle ABC}$，$S_2=2S_{\triangle EFG}$。

$$\therefore\quad \frac{S_1}{S_2}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EFG}}=\frac{AB\cdot BC}{EF\cdot FG}.$$

1461. 在 $\triangle ABC$ 中，从底边 BC 上一点 P 引 AC、AB 的平行线分别与 AB、AC 交于 X、Y，则 $S_{\triangle AXY}$ 是 $S_{\triangle BPX}$、$S_{\triangle CPY}$ 的比例中项。



解　因为 $\triangle BPX$ 与 $\triangle AXY$ 的底边都在 AB 上，根据假设可知，它们的顶点都在 AB 的平行线 PY 上，所以这两个三角形的高相等。

$$\therefore\quad S_{\triangle BPX}:S_{\triangle AXY}=BX:AX. \qquad ①$$

同理可得，

$$S_{\triangle AXY}:S_{\triangle CPY}=AY:CY. \qquad ②$$

$\because\ PX\parallel AC$，$\therefore\ BX:AX=BP:CP$。

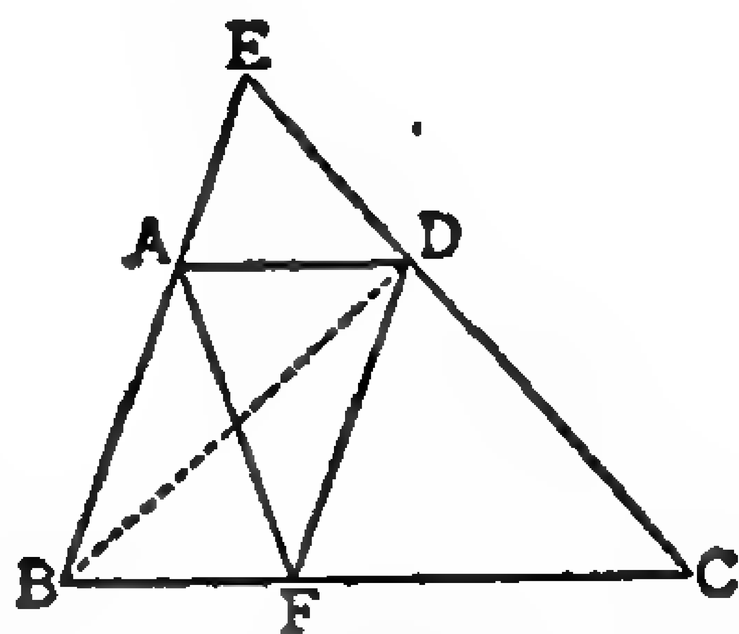
又 $PY\parallel AB$，$\therefore\ BP:CP=AY:CY$。

$$\therefore\quad BX:AX=AY:CY.$$

由①、②，得

$$S_{\triangle BPX}:S_{\triangle AXY}=S_{\triangle AXY}:S_{\triangle CPY}.$$

1462. 设梯形 $ABCD$ 的对边 BA、CD 的延长线交于点 E，若在边 BC 上取任意点 F，则四边形 $EAFD$ 的面积是 $S_{\triangle EAD}$、$S_{\triangle EBC}$ 的比例中项。



解　$\because\ AD\parallel BC$，$\therefore\ S_{\triangle AFD}=S_{\triangle ABD}$，$\therefore$ 四边形 $EAFD$ 的面积 $=S_{\triangle BDE}$。

又 $$S_{\triangle EAD}:S_{\triangle EBD}=EA:EB, \qquad ①$$

$$S_{\triangle EBD}:S_{\triangle EBC}=ED:EC. \qquad ②$$

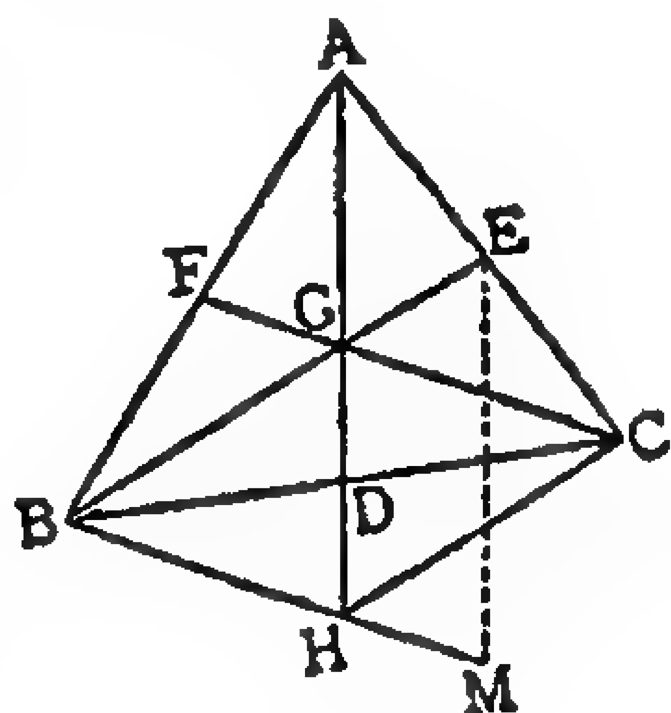
而 $AD\parallel BC$，$\therefore\ EA:EB=ED:EC$。 ③

由①、②、③，得

$$S_{\triangle EAD}:S_{\triangle EBD}=S_{\triangle EBD}:S_{\triangle EBC}.$$

这就是说，$S_{\triangle EBD}$ 即四边形 $EAFD$ 的面积是 $S_{\triangle EAD}$、$S_{\triangle EBC}$ 的比例中项。

1463. 若 $\triangle ABC$ 的面积是定值，则以它的三条中线 AD、BE、CF 为三边的三角形面积也是定值。



解　设 $\triangle ABC$ 的重心为 G，延长 GD，使 $DH=GD$，则四边形 $BHCG$ 是平行四边形。

$$\therefore\quad S_{\triangle GBH}=S_{\triangle GBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}. \qquad ①$$

而 $BG=\dfrac{2}{3}BE$，$GH=\dfrac{2}{3}AD$，$BH=GC=\dfrac{2}{3}CF$。若从 E 引 GH 的平行线与 BH 的延长线交于点 M，则 $\triangle EBM$ 的三条边与 $\triangle ABC$ 的三条中线相等。

而 $\triangle GBH\backsim\triangle EBM$，它们的相似比是 $BG:BE$，即 $2:3$。又相似三角形的面积的比等于对应边的平方的比，

$$\therefore\quad S_{\triangle GBH}:S_{\triangle EBM}=2^2:3^2.$$

由①，得

$$S_{\triangle EBM}=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\right)=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}.$$

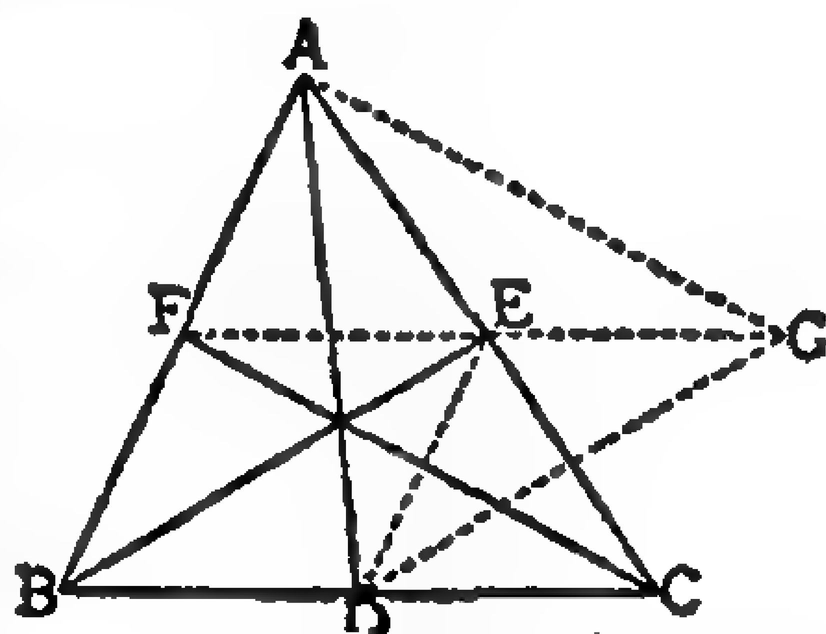
由此可知，由 $\triangle ABC$ 的面积是定值，可以得到以它的三条中线为边的三角形 EBM 的面积也是定值。

1464. 以 $\triangle ABC$ 的三条中线作 $\triangle A_1B_1C_1$，再以 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三条中线作

$\triangle A_2B_2C_2$，则 $\triangle ABC \backsim \triangle A_2B_2C_2$，且

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle A_2B_2C_2}=16:9.$$

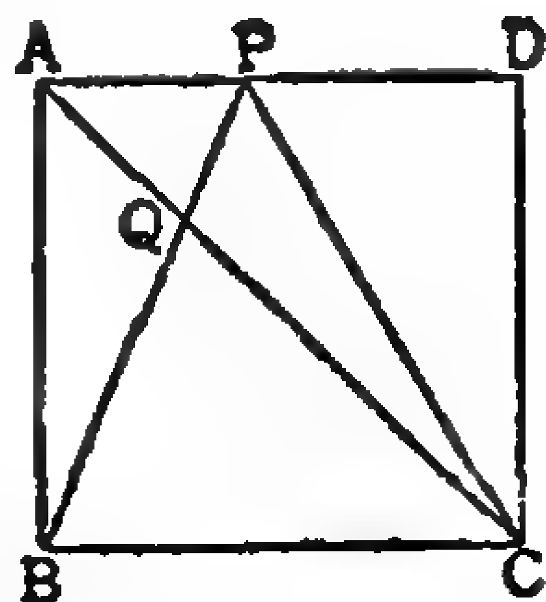
解 设 $\triangle ABC$ 的三边中点为 D、E、F，延长 FE 到 G，使 $EG=FE$，则 $\triangle ADG$ 是以 $\triangle ABC$ 的三条中线为三边的三角形。



又 E 是 $\triangle ADG$ 的重心，所以 $\triangle ADG$ 的三条中线是 $\triangle ABC$ 的三边的 $\frac{3}{4}$ 倍。由此可知 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三边是 $\triangle ABC$ 的三边的 $\frac{3}{4}$ 倍。从而得出，$\triangle ABC \backsim \triangle A_2B_2C_2$，它们的面积的比等于相似比的平方，即

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}}=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}.$$

1465. 设 P 为正方形 $ABCD$ 的边 AD 上一点。对角线 AC 与 BP 的交点为 Q，则 $\triangle APQ$、$\triangle PQC$、$\triangle QBC$ 的面积成等比数列。



解 由 $\triangle QPA \backsim \triangle QBC$，得 $\dfrac{AQ}{QC}=\dfrac{PQ}{QB}$，

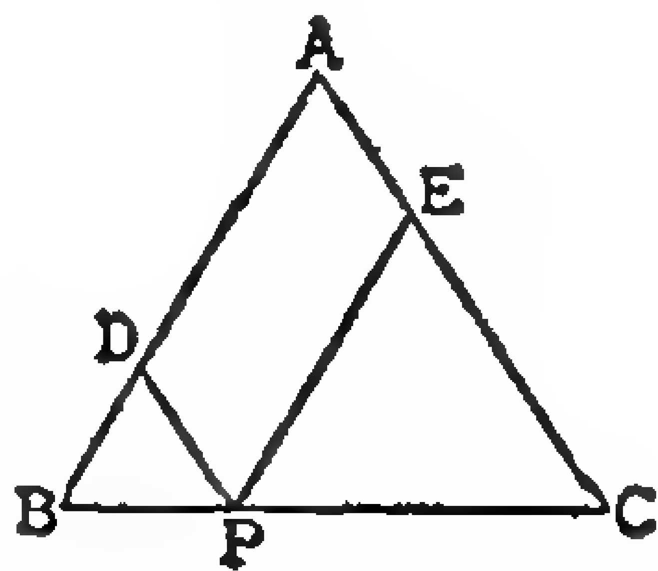
又
$$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle PQC}}=\frac{AQ}{QC}=\frac{PQ}{QB}.$$

$$\because \quad \frac{S_{\triangle PQC}}{S_{\triangle QBC}}=\frac{PQ}{QB},$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle PQC}}=\frac{S_{\triangle PQC}}{S_{\triangle QBC}}.$$

这就是说，$\triangle APQ$、$\triangle PQC$、$\triangle QBC$，它们的面积成等比数列。

1466. 在 $\triangle ABC$ 的一边 BC 上取点 P，若由 P 引 AB、AC 的平行线与 AB、AC 围成的平行四边形 $DPEA$ 的面积是三角形 ABC 的面积的 $\frac{4}{9}$，则点 P 是 BC 的一个三等分点。



解 由 $PD \parallel AC$，$PE \parallel AB$，得

$$\triangle ABC \backsim \triangle DBP \backsim \triangle EPC.$$

设 $BP:PC=h:k$，则

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DBP}:S_{\triangle EPC}$$
$$=BC^2:BP^2:PC^2=(h+k)^2:h^2:k^2.$$

又设 $\square ADPE$ 的面积为 S_1，则

$$S_{\triangle ABC}:S_1$$
$$=(h+k)^2:[(h+k)^2-(h^2+k^2)],$$

即 $\quad S_{\triangle ABC}:S_1=(h+k)^2:2hk.$

$$\therefore \quad \frac{2hk}{(h+k)^2}=\frac{4}{9},$$

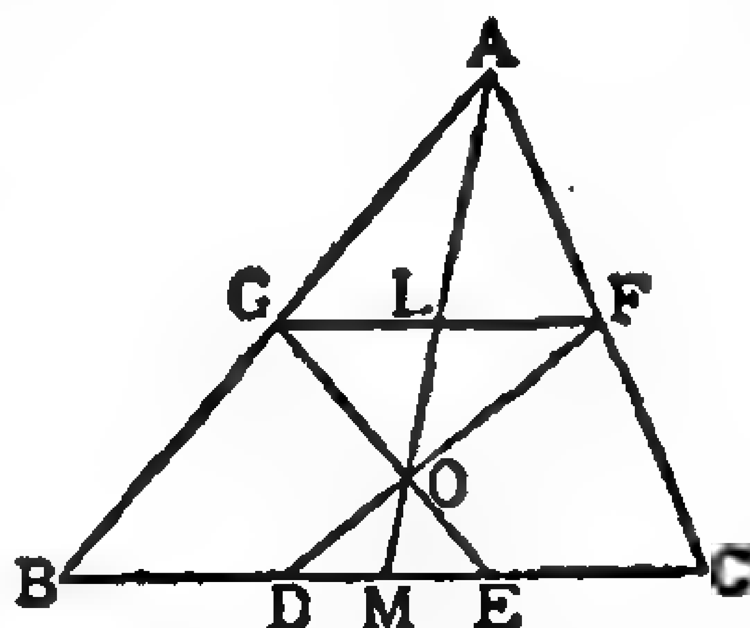
$$(2h-k)\cdot(h-2k)=0.$$

解这个方程中的 h、k，得

$$h:k=1:2 \quad 或 \quad h:k=2:1.$$

所以 P 是 BC 的三等分点之一。

1467. 设点 D、E 三等分 $\triangle ABC$ 的边 BC，即 $BD=DE=EC$，边 AC、AB 的中点分别为 F、G，DF、EG 的交点为 O，则 $S_{\triangle ODE}:S_{\triangle ABC}=1:15$。



解 设过 A、O 的直线与 GF、BC 的交点分别为 L、M，则由 $\triangle OED$、$\triangle OGF$ 相似，得

$$OM:OL=DE:GF. \quad ①$$

而 $\quad DE=\frac{1}{3}BC,\ GF=\frac{1}{2}BC.$

$$\therefore \quad DE:GF=2:3.$$

由①，得 $\quad OM:OL=2:3.$

从而得出 $\quad OM:LM=2:5. \quad ②$

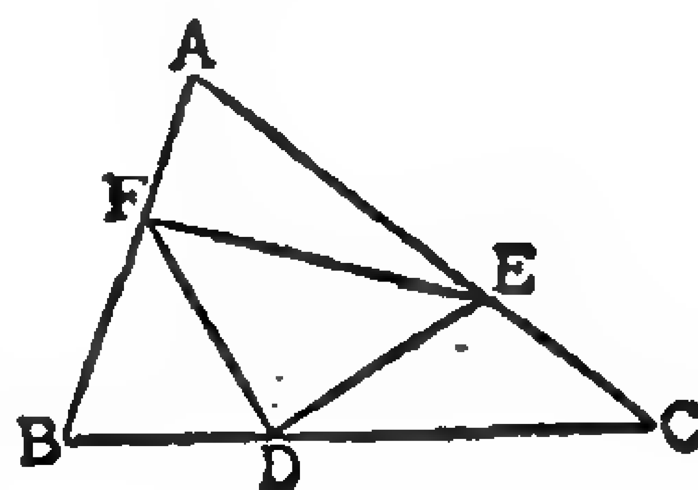
又 $\quad LM=\frac{1}{2}AM,$

由②，得 $\quad OM:AM=1:5.$

设 DE、BC 分别是 $\triangle ODE$、$\triangle ABC$ 的底边，则它们的对应高的比等于 OM 与 AM 的比，即等于1:5，又底边 DE 与 BC 的比为1:3。

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15}.$$

1468. 在 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上分别取点 D、E、F，若 $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{l}{m}$，$\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{n}{p}$，$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{q}{r}$，则



$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{lnq+mpr}{(l+m)(n+p)(q+r)}.$$

解　在△ABC与△AEF中，∠A是公共角，

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AF\cdot AE}{AB\cdot AC}=\frac{pq}{(n+p)(q+r)}.\quad ①$$

同理可得，

$$\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{lr}{(l+m)(q+r)},\quad ②$$

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{mn}{(l+m)(n+p)}.\quad ③$$

由1－(①+②+③)，得

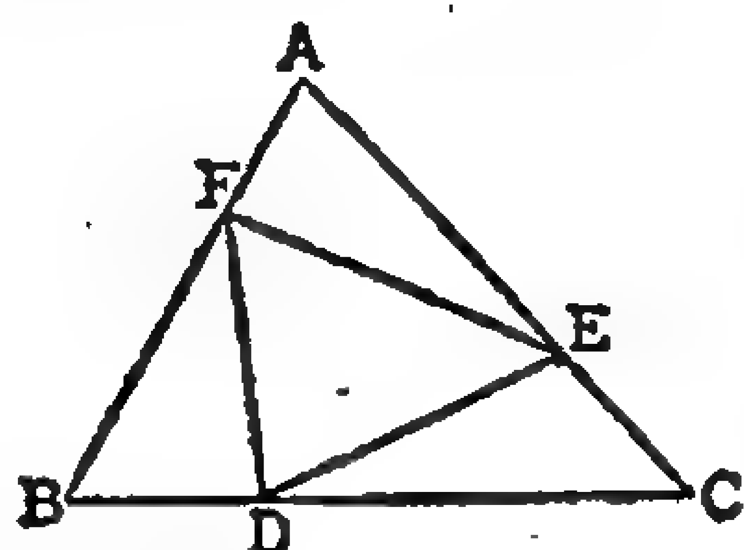
$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CED})}{S_{\triangle ABC}}$$

$$=1-\frac{pq(l+m)+lr(n+p)+mn(q+r)}{(l+m)(n+p)(q+r)}$$

$$=\frac{lnq+mpr}{(l+m)(n+p)(q+r)}.$$

1469. 在△ABC的边BC、CA、AB上分别取点D、E、F，使$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=\frac{m}{n}$（其中m、n是不等于零的定数），则△DEF与△ABC的面积的比是

$$\frac{m^2-mn+n^2}{(m+n)^2}.$$



解　在△AFE与△ABC中，∠A是公共角，

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AF\cdot AE}{AB\cdot AC}=\frac{mn}{(m+n)^2}.$$

同理可得，

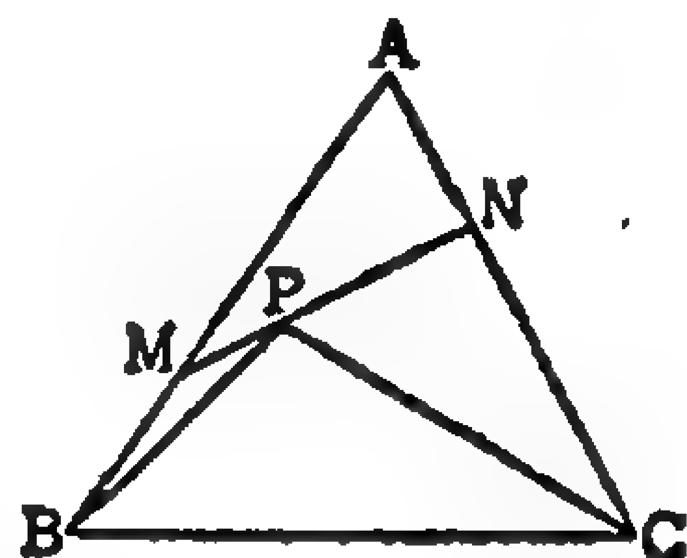
$$\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{mn}{(m+n)^2},$$

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{mn}{(m+n)^2}.$$

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=1-\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}-\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}}-\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$=1-\frac{3mn}{(m+n)^2}=\frac{m^2-mn+n^2}{(m+n)^2}.$$

1470. 在△ABC的边AB、AC上分别取点M、N，MN上取点P，使BM:AM＝AN:CN＝PM:PN，则$S_{\triangle BPC}$是$S_{\triangle AMN}$的两倍。



解　设$\frac{MB}{AM}=\frac{AN}{NC}=\frac{MP}{PN}=\frac{n}{m}$，则

在△AMN与△ABC中，∠A是公共角，

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}=\frac{mn}{(m+n)^2}.$$

若设$S_{\triangle ABC}=a$，则

$$S_{\triangle AMN}=\frac{mn}{(m+n)^2}\cdot a.\quad ①$$

又

$$\frac{S_{\triangle ANB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AN}{AC}=\frac{n}{m+n},$$

$$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ANB}}=\frac{MP}{MN}=\frac{n}{m+n}.$$

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{n^2}{(m+n)^2}.$$

同理可得，

$$\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{m^2}{(m+n)^2}.$$

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle ABC}}=1-\frac{n^2}{(m+n)^2}-\frac{m^2}{(m+n)^2}=\frac{2mn}{(m+n)^2}.$$

$$\therefore\ S_{\triangle BPC}=\frac{2mn}{(m+n)^2}\cdot a.\quad ②$$

由①、②，得

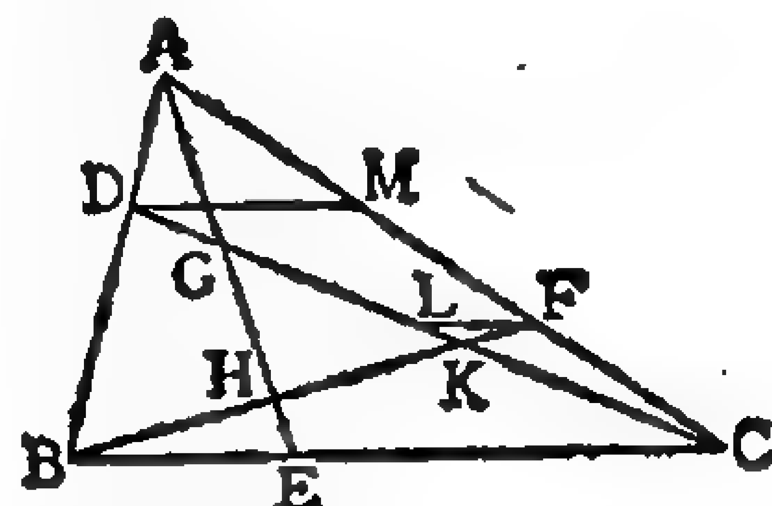
$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle BPC}}=\frac{1}{2}.$$

1471. 在△ABC的三边AB、BC、CA上分别取AD、BE、CF，使

$$AD=\frac{1}{3}AB,$$

$$BE=\frac{1}{3}BC,$$

$$CF=\frac{1}{3}AC.$$



设AE与CD、BF与AE、CD与BF的交点分别为G、H、K，则$S_{\triangle ABC}=7S_{\triangle GHK}$。

解　从D、F引BC的平行线，分别与AC、

CD相交于点M、L，则

$\because\ AD=\frac{1}{3}AB$，$\therefore\ AM=\frac{1}{3}AC$。

又　$CF=\frac{1}{3}AC$，$\therefore\ AM=MF=FC$。

$$\therefore\ FL=\frac{1}{2}DM.$$

又　$$DM=\frac{1}{3}BC,$$

$$FL=\frac{1}{2}DM=\frac{1}{6}BC.$$

$$\therefore\ BK:KF=BC:FL=6:1.$$

$$\therefore\ KF=\frac{1}{6}BK. \quad ①$$

而　$$\frac{S_{\triangle BFC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{FC}{AC}=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore\ S_{\triangle BFC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

由①，得

$$\frac{S_{\triangle BKC}}{S_{\triangle BFC}}=\frac{BK}{BF}=\frac{6}{6+1}=\frac{6}{7}.$$

$$\therefore\ S_{\triangle BKC}=\frac{6}{7}S_{\triangle BFC}=\frac{6}{7}\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$$

$$=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}.$$

同理可得，

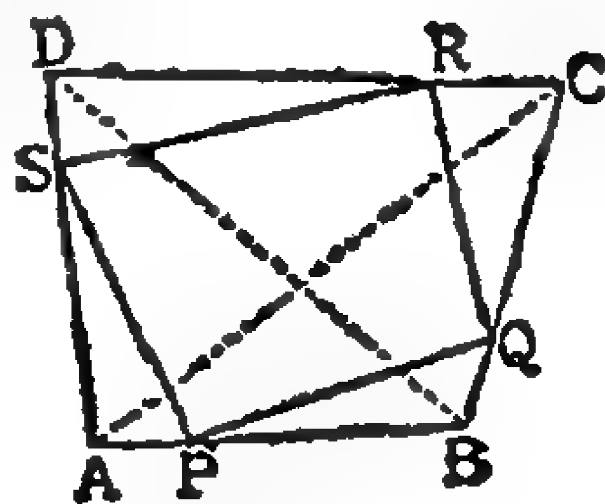
$$S_{\triangle ACG}=S_{\triangle ABH}=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}.$$

$$\therefore\ S_{\triangle GHK}=\left(1-\frac{2}{7}\times 3\right)S_{\triangle ABC}$$

$$=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}.$$

$$\therefore\ S_{\triangle ABC}=7S_{\triangle GHK}.$$

1472. 在凸四边形$ABCD$的各边上分别取点P、Q、R、S，若$\frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RD}=\frac{DS}{SA}=\frac{m}{n}$，则四边形$PQRS$的面积等于四边形$ABCD$面积的$\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$倍。



解　引对角线AC、BD，则

$$\frac{S_{\triangle BQP}}{S_{\triangle BCA}}=\frac{BQ\cdot BP}{BC\cdot BA}=\frac{BQ}{BC}\cdot\frac{BP}{BA}$$

$$=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{mn}{(m+n)^2}.$$

$$\therefore\ S_{\triangle BQP}=\frac{mn}{(m+n)^2}\cdot S_{\triangle BCA}.$$

同理可得

$$S_{\triangle DSR}=\frac{mn}{(m+n)^2}\cdot S_{\triangle DAC}.$$

设四边形$ABCD$的面积为S_1，则

$$S_{\triangle BQP}+S_{\triangle DSR}=\frac{mn}{(m+n)^2}\cdot S_1. \quad ①$$

同理可得，

$$S_{\triangle APS}+S_{\triangle CRQ}=\frac{mn}{m+n}\cdot S_1. \quad ②$$

设四边形$PQRS$的面积为S_2，则由①+②，得

$$S_1-S_2=\frac{2mn}{(m+n)^2}\cdot S_1.$$

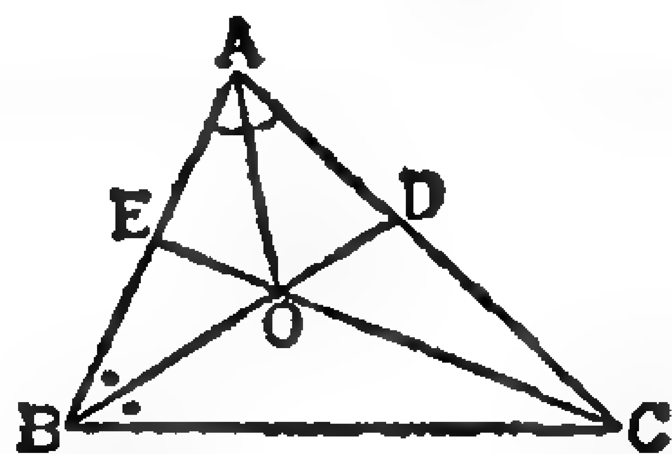
从而得出，

$$S_2=\left[1-\frac{2mn}{(m+n)^2}\right]\cdot S_1$$

$$=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}\cdot S_1.$$

即四边形$PQRS$的面积是四边形$ABCD$面积的$\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$倍。

1473. 设$\triangle ABC$的内心为O，延长BO、CO分别交对边于D、E，则



$$\frac{S_{\triangle BOE}}{S_{\triangle COD}}=\frac{AE\cdot AB}{AD\cdot AC}.$$

解　在$\triangle BOE$、$\triangle COD$中，

$$\angle EOB=\angle DOC,$$

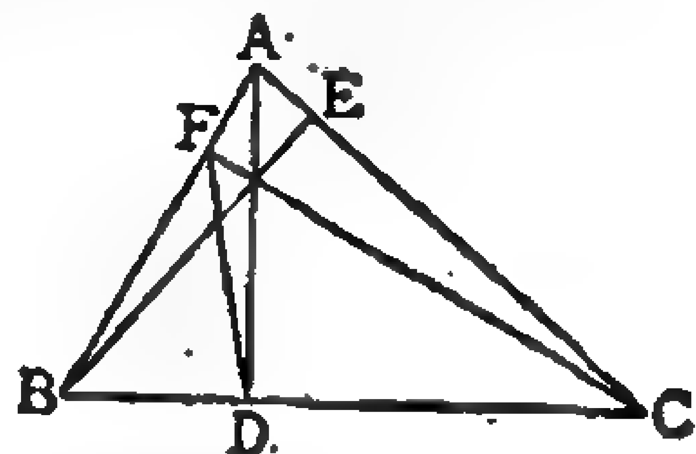
$$\therefore\ \frac{S_{\triangle BOE}}{S_{\triangle COD}}=\frac{OB\cdot OE}{OD\cdot OC}=\frac{OB}{OD}\cdot\frac{OE}{OC}.$$

而AO是$\angle A$的平分线。

$$\therefore\ \frac{OB}{OD}=\frac{AB}{AD},\ \frac{OE}{OC}=\frac{AE}{AC}.$$

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle BOE}}{S_{\triangle COD}}=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AE}{AC}=\frac{AE\cdot AB}{AD\cdot AC}.$$

1474. 由$\triangle ABC$的各顶点向对边作垂线，设垂足分别为D、E、F，则$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DBF}}=\frac{AB^2}{BD^2}$，$\frac{\text{四边形}AFDC\text{的面积}}{S_{\triangle DBF}}=\frac{AD^2}{BD^2}$。



解　因为A、F、D、C四点共圆，所以

$\angle BFD=\angle ACD$, $\angle BDF=\angle BAC$.

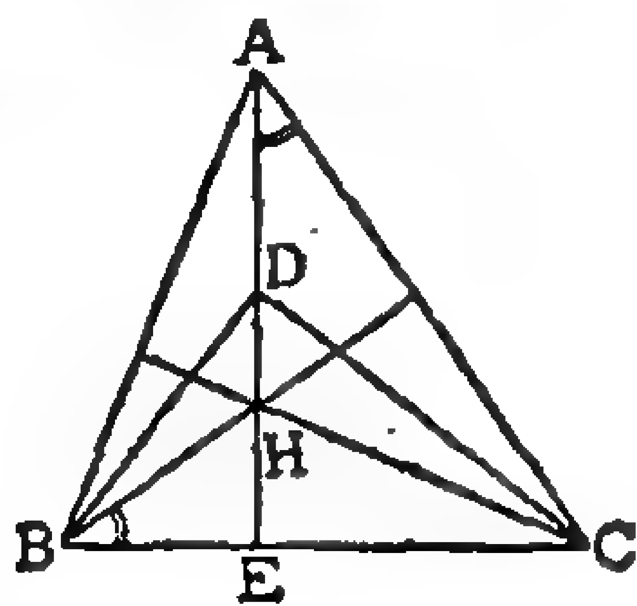
$\therefore\ \triangle ABC \backsim \triangle DBF$.

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DBF}}=\frac{AB^2}{BD^2}.$$

又，在这个等式的两边都减去1，得

$$\frac{\text{四边形 } AFDC \text{ 的面积}}{S_{\triangle DBF}}=\frac{AB^2-BD^2}{BD^2}=\frac{AD^2}{BD^2}.$$

1475. 设锐角三角形 ABC 的垂心为 H，以底边 BC 为斜边，在 AH 上取点 D 为顶点作直角三角形 DBC，则 $S_{\triangle DBC}$ 是 $S_{\triangle ABC}$ 和 $S_{\triangle HBC}$ 的比例中项.



解　设 AH 与 BC 的交点为 E，则

$\because\ \angle HBE=\angle HAC$,

$\therefore\ \triangle HBE \backsim \triangle CAE$.

$$\therefore\ \frac{BE}{HE}=\frac{AE}{CE}.$$

由此可得，

$AE\cdot HE=BE\cdot CE=DE^2$.

$$\therefore\ \frac{AE}{DE}=\frac{DE}{HE},$$

把两边的分子、分母同乘以 $\frac{1}{2}BC$，得

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DBC}}=\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle HBC}}.$$

16. 调和点列

1476. 若点 P、Q 调和分割线段 AB，则两点 A、B 也调和分割线段 PQ.



解　由点 P、Q 调和分割线段 AB，得

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{BQ}.$$

交换内项，得 $\frac{AP}{AQ}=\frac{PB}{BQ}$.

由此可知点 A、B 调和分割线段 PQ.

1477. 点 A、B、C、D 依次排列在一条直线上，设点 B、D 是线段 AC 的调和分割点，则



$$\frac{1}{BC}-\frac{1}{CD}=\frac{2}{AC}.$$

解　设 $BC=x$, $CD=y$, $AC=z$，则由 $AB:BC=AD:CD$ 得

$(z-x):x=(y+z):y$.

$\therefore\ yz-xz=2xy$.

$$\therefore\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{2}{z},$$

即 $$\frac{1}{BC}-\frac{1}{CD}=\frac{2}{AC}.$$

1478. 若一条直线上按顺序排列着四点 A、B、C、D，而 B、D 分别是分线段 AC 成相同比的内分点与外分点，则

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AC}.$$

解　设 $AB=x$, $AD=y$, $AC=z$，则由

$AB:BC=AD:CD$

得 $x:(z-x)=y:(y-z)$. $\therefore\ 2xy=yz+zx$.

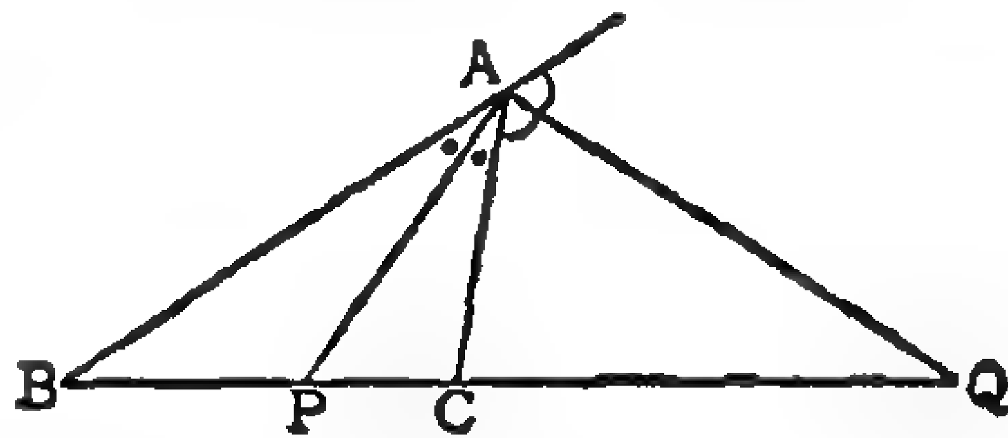
$$\therefore\ \frac{2}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},$$

即 $$\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}.$$

1479. 设 $\triangle ABC$ 的顶角 A 与它的相邻的外角的平分线分别与 BC 及其延长线交于 P、Q，则 B、P、C、Q 是调和点列.

解　由问题 **1058**，得

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{PC}=\frac{BQ}{CQ}.$$



所以点 P、Q 调和分割底边 BC，即 B、P、C、Q 是调和点列.

1480. 设 A、P、B、Q 是调和点列，M 是 AB 的中点，则 $MB^2=MP\cdot MQ$. 反之也成立.



解　因为 A、P、B、Q 是调和点列，所以

$AP:PB=AQ:QB$.

由合分比定理，得

$(AP-PB):(AP+PB)$

$=(AQ-QB):(AQ+QB)$,

即　$2MP:2MB=2MB:2MQ$.

$\therefore\ MP:MB=MB:MQ$.

$\therefore\ MB^2=MP\cdot MQ$.　①

反之，设 $AP=x$, $BP=y$, $AQ=z$, 则

$$MB=\frac{x+y}{2},\ MP=\frac{x-y}{2},$$

$$MQ=\frac{2z-x-y}{2}.$$

代入①，得 $yz=x(z-x-y)$.

$\therefore\ BP\cdot AQ=AP\cdot BQ$.

$\therefore\ AP:BP=AQ:BQ$.

即 A、P、B、Q 是调和点列。

1481. 若 A、D、B、E 为调和点列，AB 的中点为 O，则 $DA:DO=DE:DB$.

解　根据上题，得 $OA^2=OE\cdot OD$.

两边同减去 OD^2，得

$$OA^2-OD^2=OE\cdot OD-OD^2.$$

$\therefore\ (OA+OD)\cdot(OA-OD)$

$=OD\cdot(OE-OD)$.　①

而　$OA+OD=AD$,

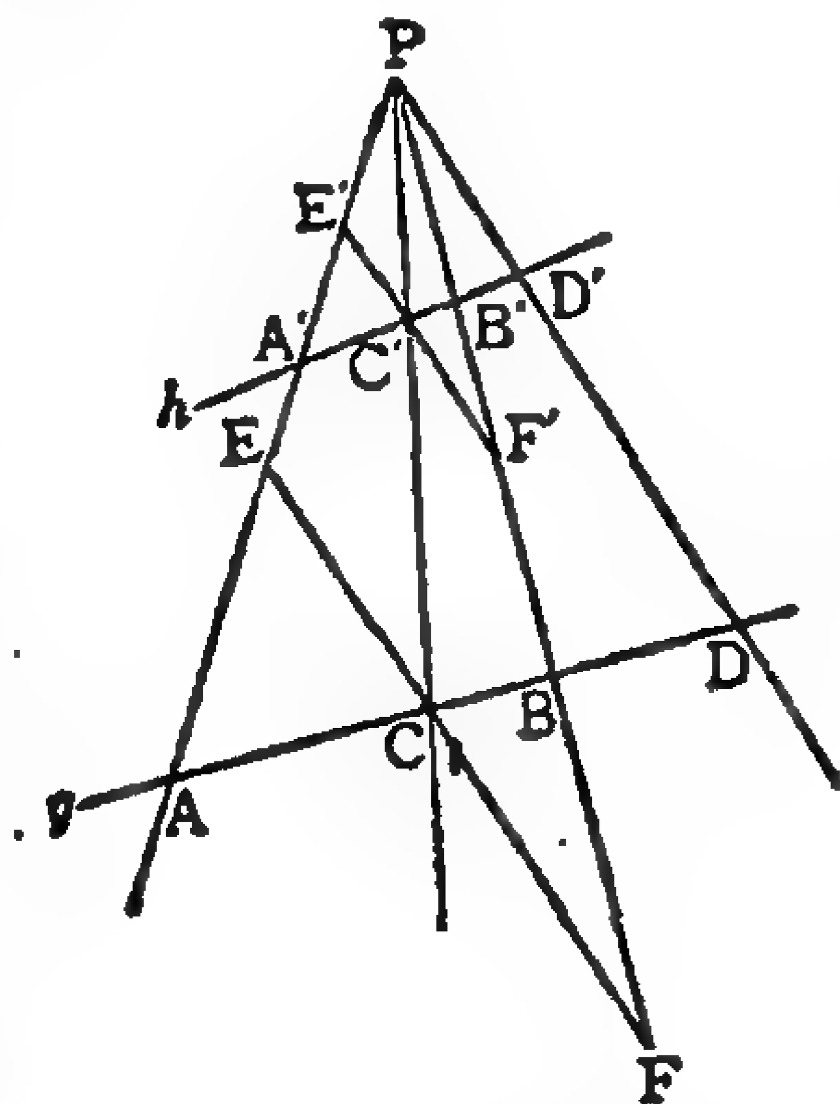
$OA-OD=DB$, $OE-OD=DE$.

由①，得　$DA\cdot DB=DO\cdot DE$.

$\therefore\ DA:DO=DE:DB$.

1482. 在不过点 P 的直线 q 上有四点 A、B、C、D，点 C、D 分别内分、外分线段 AB 成相同的比。

(1) 连结 PA、PB、PC、PD，过 C 引 PD 的平行线与直线 PA、PB 的交点分别为 E、F，证明点 C 是线段 EF 的中点。



(2) 不过点 P 引直线 h，设直线 h 与四条直线 PA、PB、PC、PD 分别交于 A'、B'、C'、D'，证明点 C'、D' 分别内分、外分线段 $A'B'$ 成相同的比。

解　(1) 因为 $EF\parallel PD$，所以

$$\frac{EC}{PD}=\frac{AC}{AD},\qquad ①$$

$$\frac{CF}{PD}=\frac{BC}{BD}.\qquad ②$$

根据假设，得

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}.$$

因此，由①、②，得 $\dfrac{EC}{PD}=\dfrac{CF}{PD}$.

$\therefore\ EC=CF$.

(2) 过 C' 引 PD 的平行线与 PA、PB 的交点分别为 E'、F',

由(1)可知，$C'E'=C'F'$.

因此，由(1)中的①、②可知，

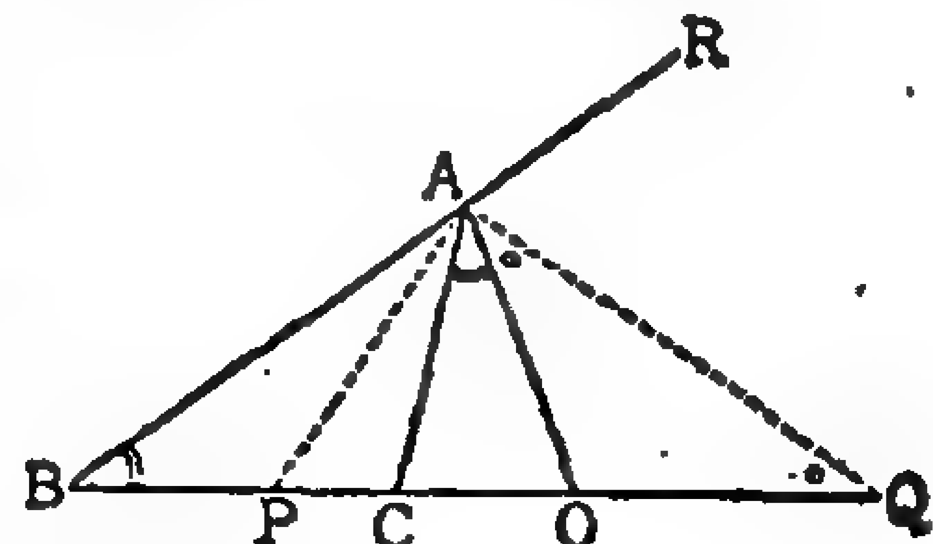
$$\frac{A'C'}{A'D'}=\frac{B'C'}{B'D'},\ 即\ \frac{A'C'}{B'C'}=\frac{A'D'}{B'D'}.$$

这就是说，点 C'、D' 分别内分、外分 $A'B'$ 成相同的比。

注　上题中的 A、B、C、D 是调和点列，可记为 (A, B, C, D)，PA、PB、PC、PD 是调和线束，可记为 $P(A, B, C, D)$。

1483. 设点 P、Q 分别内分、外分 $\triangle ABC$ 的底边 BC 成相同比，又 $\angle PAQ=90°$，证明 AP、AQ 是 $\angle BAC$ 与它相邻的角平分线。

解　设 PQ 的中点为 O，由问题 1480 可得，$OP^2=OB\cdot OC$.



因为 $\triangle PAQ$ 是直角三角形，所以 $OP=OA$.

$\therefore\ OA^2=OB\cdot OC$.

由此可得，OA 与 $\triangle ABC$ 的外接圆在点 A 相切。

$\therefore\ \angle OAC=\angle B$.　①

又　$\angle OAQ=\angle OQA$.　②

若在 BA 的延长线上取点 R，则

$\angle RAQ=\angle B+\angle OQA$.　③

由①、②、③，得 $\angle CAQ=\angle RAQ$.

所以 AQ 是与 $\angle BAC$ 相邻的外角的平分线。因为 $\angle PAQ=90°$，所以 AP 是 $\angle BAC$ 的平分线。

1484. 由圆外一点 P 向圆引两条切线，设切点为 A、B，连结圆心 O 与 P 的直线和弦 AB 相交于点 Q，和圆相交于点 C、D，则

(1) AC 是 $\angle PAB$ 的平分线;

(2) $PC:QC=PD:QD$;

(3) 具有性质(2)的点P、C、Q、D叫什么点?

解 (1) 因为AP是在点A的切线,所以

$\angle PAC=\angle ABC$.

又 $AB\perp PQ$,

$AQ=QB$,所以 $\angle CAB=\angle ABC$.

$\therefore\ \angle PAC=\angle CAB$.

因此,AC是$\angle PAB$的平分线.

(2) 因为$\angle CAD=90°$,AC是$\angle PAB$的平分线,所以AD是与$\angle PAB$相邻的外角的平分线,即AC、AD分别是$\triangle PAQ$的顶角A及与$\angle A$相邻的外角的平分线. 由此可得,

$$PC:CQ=AP:AQ=PD:QD.$$

(3) 叫做调和点列(问题**1482**).

1485. 若$\triangle ABC$的内切圆在边BC、CA、AB上的切点分别为D、E、F,EF与CB的延长线的交点为G,则G、B、D、C是调和点列.

解 引$BH\parallel AC$,则由$AE=AF$,得$BF=BH$.

由此可得

$$\frac{BD}{GB}=\frac{BF}{GB}=\frac{BH}{GB}.$$

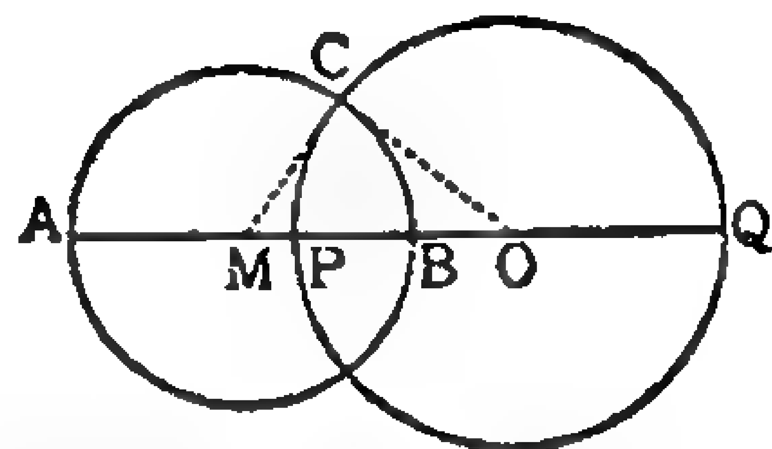
又 $\because\ CE\parallel BH$,

$$\therefore\ \frac{BH}{GB}=\frac{CE}{CG}=\frac{CD}{CG},$$

即 $$\frac{BD}{GB}=\frac{CD}{CG},$$

所以,G、B、D、C是调和点列.

1486. 设A、P、B、Q是调和点列,则以AB、PQ分别为直径的两圆垂直相交.



解 设AB的中点为M,两圆的交点之一为C,根据问题**1480**,得

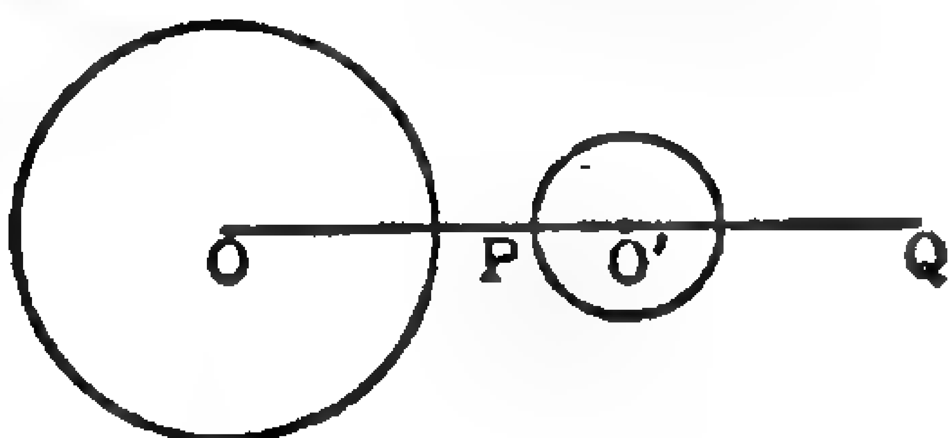
$$MP\cdot MQ=AM^2=MC^2.$$

由此可知,MC是圆PCQ的切线,且MC垂直于CO.

在点C作圆ACB的切线,则这切线必垂直于半径MC,所以这两圆垂直相交.

1487. 设两圆O、O'的内位似中心和外位似中心分别为P、Q,则O、P、O'、Q是调和点列.

解 设圆O、O'的半径分别为r、r'.



则 $\dfrac{OP}{O'P}=\dfrac{r}{r'}$, $\dfrac{OQ}{O'Q}=\dfrac{r}{r'}$. $\therefore\ \dfrac{OP}{O'P}=\dfrac{OQ}{O'Q}$,

所以,O、P、O'、Q是调和点列.

1488. 设P、Q、R、S是一条直线上的四个点,O是这直线外的一点,连结OP、OQ、OR、OS,又过R引OP的平行线,与OQ、OS或其延长线分别交于E、F,若$RE=RF$,则OP、OQ、OR、OS是调和线束,即P、Q、R、S是调和点列(问题**1482**之逆).

解 由$OP\parallel RE$,得

$$\frac{PQ}{QR}=\frac{OP}{ER}, \qquad ①$$

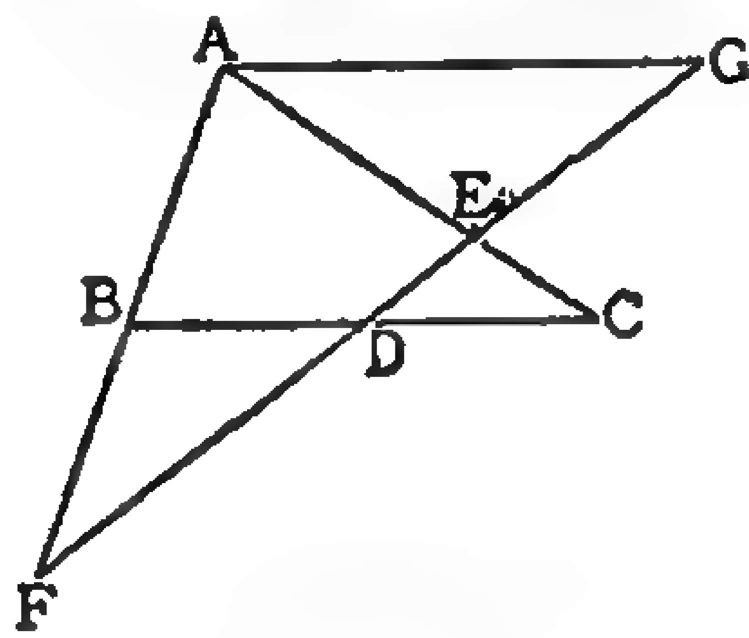
$$\frac{SP}{SR}=\frac{OP}{FR}. \qquad ②$$

而题设$RE=RF$.

由①、②,得 $\dfrac{PQ}{QR}=\dfrac{SP}{SR}$.

由此可知,P、Q、R、S是调和点列. 从而得出,OP、OQ、OR、OS是调和线束(问题**1482**).

1489. 过$\triangle ABC$的边BC的中点D引直线,与AC、AB分别交于E、F,又过A引BC的平行线与直线FDE交于G,则F、D、E、G是调和点列.



解 ∵ $AG\parallel BC$，∴ $\frac{DE}{EG}=\frac{CD}{AG}$，

$$\frac{DF}{GF}=\frac{BD}{AG}.$$

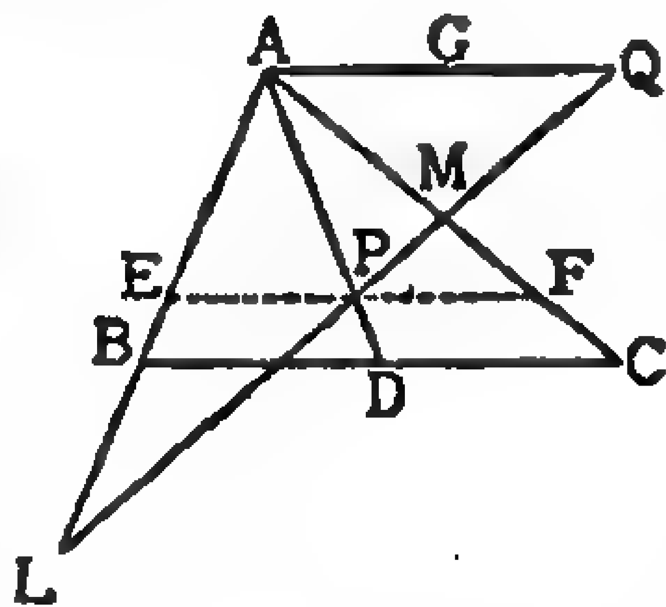
而题设 $BD=CD$.

$$\therefore\ \frac{DE}{EG}=\frac{DF}{GF},$$

即
$$\frac{DF}{DE}=\frac{GF}{EG}.$$

所以，F、D、E、G 是调和点列。

1490. 设 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，过 A 引 BC 的平行线 AG，若直线 AB、AD、AC、AG 与任意一条直线的交点分别为 L、P、M、Q，则这四点是调和点列。



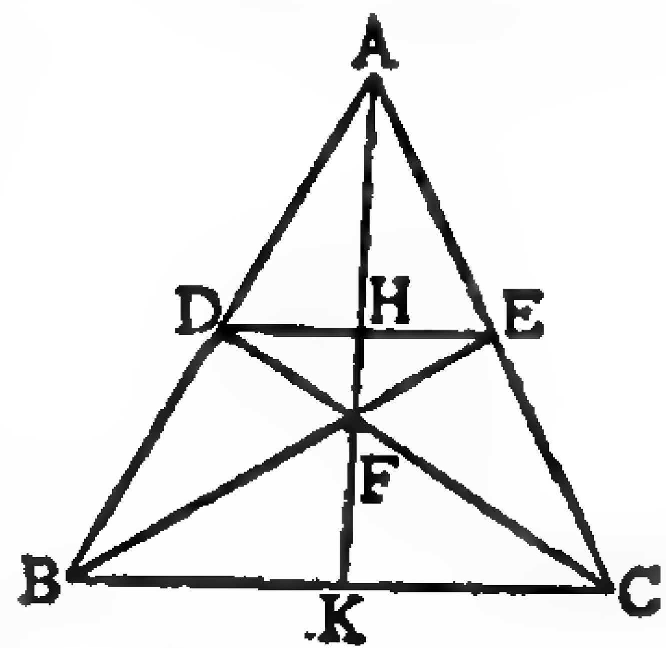
解 设任意一条直线与 AB、中线 AD、AC、BC 的平行线 AG 的交点分别为 L、P、M、Q，过 P 引 BC 的平行线与 AB、AC 的交点分别为 E、F，则

$$\frac{MQ}{PM}=\frac{AQ}{FP},\quad \frac{LQ}{LP}=\frac{AQ}{PE}.$$

而 $PE=PF$，∴ $\frac{MQ}{PM}=\frac{LQ}{LP}$.

由此可知，L、P、M、Q 是调和点列(问题 **1482**)。

1491. 在 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 上分别取点 D、E，使 $DE\parallel BC$，设 BE、CD 相交于点 F，AF、DE 相交于点 H，AF 的延长线与 BC 相交于点 K，则 A、H、F、K 是调和点列。



解 因为 H、K 分别为 DE、BC 的中点(问题 **1033**)，$HE\parallel BK$，所以

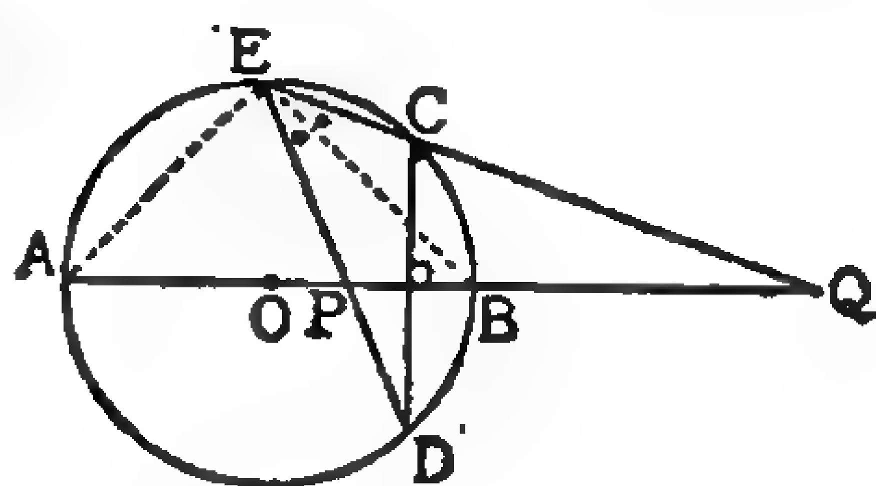
$$HF:FK=HE:BK.$$

又 $DH\parallel BK$，∴ $AH:AK=DH:BK$.

∵ $HE=DH$，∴ $HF:FK=AH:AK$.

所以，A、H、F、K 是调和点列。

1492. 在圆 O 中，直径 AB 垂直于弦 CD，E 为圆上的任意一点，若 ED、EC 与 AB 或其延长线的交点分别为 P、Q，则 A、P、B、Q 是调和点列。



解 因为直径 AB 垂直于弦 CD，所以

$$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}.$$

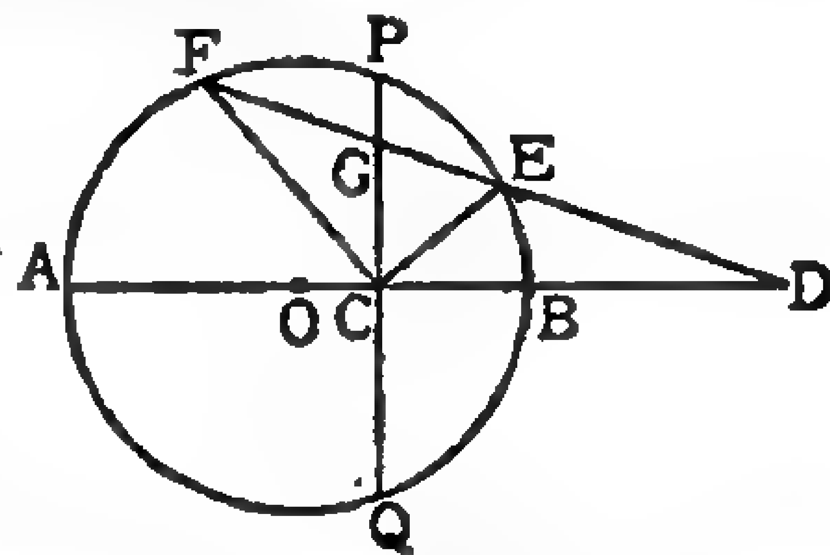
由此可得，

$$\angle BEC=\angle BED.$$

即 EB 是 $\angle CED$ 的平分线。

又 $\angle AEB=90°$，所以 EA 是与 $\angle CED$ 相邻的外角的平分线。从而得出，A、P、B，Q 是调和点列。

1493. 若 A、C、B、D 是调和点列，过点 D 引以 AB 为直径的圆的割线 DEF，过点 C 弦 PQ 垂直于 AB，设 PQ 与 EF 的交点为 G，则 D、E、G、F 是调和点列。



解 设 A、C、B、D 是调和点列，则根据阿波罗尼斯定理可知，以 AB 为直径的圆上的点到 C、D 的距离的比是定值。

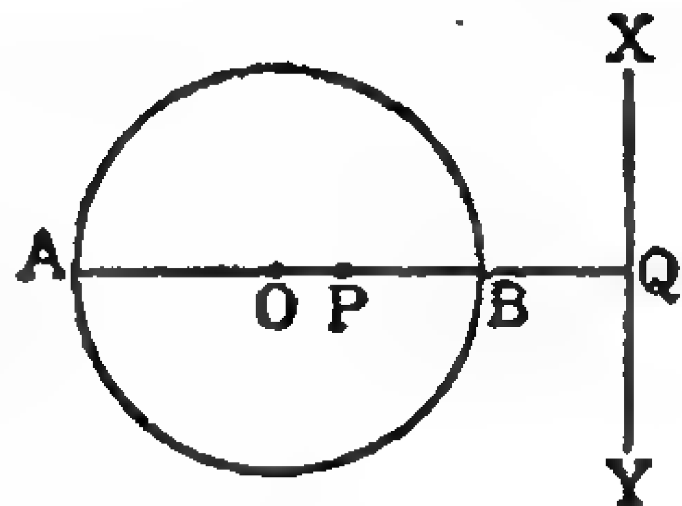
$$\therefore\ ED:EC=FD:FC.$$

即
$$EC:FC=ED:FD.$$

由此可知，CD 是 $\triangle ECF$ 在顶点 C 的外角的平分线。而 $PC\perp CD$. 由此可知，CG 是 $\angle ECF$ 的平分线。即 CG、CD 分别是 $\triangle ECF$ 在顶点 C 的内角、外角的平分线，因此 D、E、G、F 是调和点列。

注 设 DP 与圆 O 的另一个交点为 P'，则 CD 是与 $\angle P'CP$ 相邻的外角的平分线。由 $\angle PCD=90°$ 可知，P' 重合于 P。所以，DP 是圆 O 的切线。从而得出，$OC\cdot OD=OP^2=$(半径)^2. 这时，PQ 叫做圆 O 关于点 D 的极直线，D 叫做极点。

1494. 半径为 r 的圆 O 关于一点 P 的极直线为 XY，设 OP 与 XY 相交于点 Q，与圆 O 相交于点 A、B，则 P、Q 是 AB 的调和分割点。



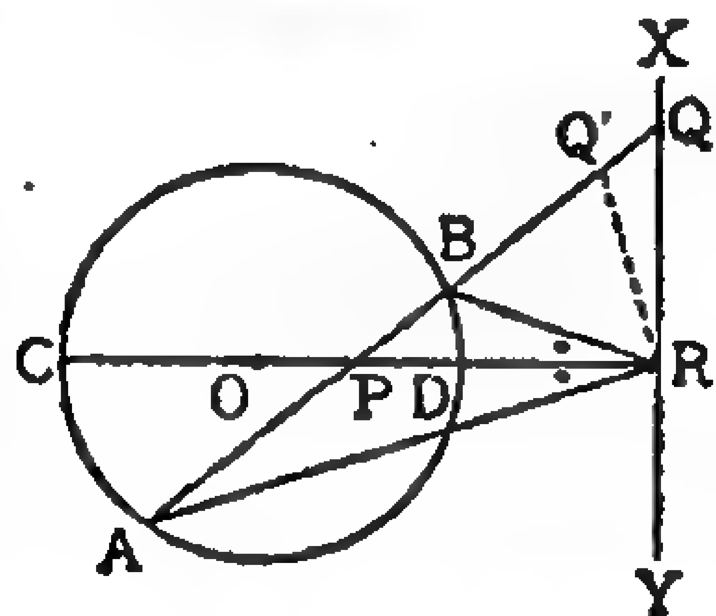
解 因为 XY 是圆 O 关于点 P 的极直线，所以 $OB^2=OP\cdot OQ$.

而 $AO=BO$. 根据问题 **1480**，得 A、P、B、Q 是调和点列。所以 P、Q 是 AB 的调和分

割点。

1495. 若半径为 r 的圆 O 关于一点 P 的极直线为 XY，过 P 引任意直线与 XY 及圆 O 的交点分别为 Q 及 A、B，则 P、Q 是 AB 的调和分割点。

反之，过 P 的任意直线与圆的两个交点为 A、B，如果点 A、P、B、Q' 是调和点列，那么点 Q' 必在极直线 XY 上。



解　设 XY 是圆 O 关于点 P 的极直线，延长 OP 与圆 O 及 XY 的交点为 C、D 及 R，则由上题可知，C、P、D、R 是调和点列，而圆 O 是阿波罗尼斯圆。

$$\therefore\quad BP:BR=AP:AR=(PD:DR).$$

$$\therefore\quad \angle ARP=\angle BRD\ (\text{问题 }\mathbf{1059}).$$

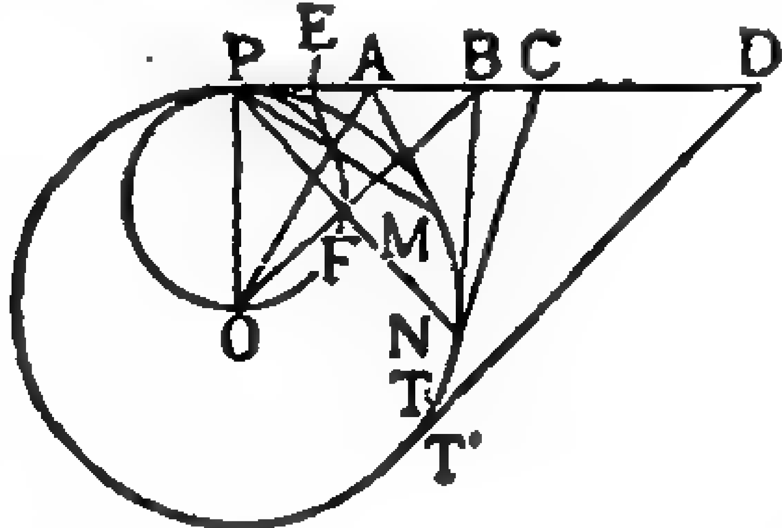
又 $PR\perp QR$，所以 QR 是与 $\angle ARB$ 相邻的外角的平分线。

$$\therefore\quad AP:PB=AQ:BQ.$$

所以，A、P、B、Q 是调和点列。

反之，设 $AP:PB=AQ':BQ'$，由 $\angle ARP=\angle BRP$ 可知，RQ' 是与 $\angle ARB$ 相邻的外角的平分线，所以 $RQ'\perp PR$。由此可得，点 Q' 在关于点 P 的极直线 XY 上。

1496. 在圆 O 上点 P 处的切线上的点 A、B、C 及 D 是调和点列，从 A、B、C、D 分别作圆 O 的切线 AM、BN、CT、DT'，则 PM、PN、PT、PT' 是调和线束。



解　设 AP、AM 是切线，PM 与 AO 的交点为 E，则 $\angle PEO=90°$。又 BO 与 PN 的交点为 F，所以 $\angle PFO=90°$。

所以，E、F 都在以 PO 为直径的圆上。

从而得出，$\angle FPE=\angle FOE$，即

$$\angle MPN=\angle AOB.$$

同理，连结 OC、OD、PT、PT'，则

$$\angle BOC=\angle NPT,\quad \angle COD=\angle TPT'.$$

而 A、B、C、D 是调和点列，知 OA、OB、OC、OD 是调和线束。在点 O 作这四条直线的夹角，和在 P 上作 PM、PN、PT、PT' 的夹角分别相等，所以这后面的四条直线也是调和线束。

1497. 若在圆 O 关于点 P 的极直线 XY 上任意取一点 Q，作圆 O 关于 Q 的极直线 $X'Y'$，则 $X'Y'$ 过点 P。

解　设圆 O（半径为 r）关于点 P 的极直线为 XY，由问题 **1495**，得

$$OP\cdot OA=r^2.$$

又在 XY 上任取一点 Q，设圆 O 关于 Q 的极直线为 $X'Y'$，由问题 **1495**，得

$$OB\cdot OQ=r^2.\quad \therefore\quad OP\cdot OA=OB\cdot OQ.$$

由此可得，点 A、P、Q、B 在同一圆上，

$$\therefore\quad \angle QAP=\angle QBP=90°.$$

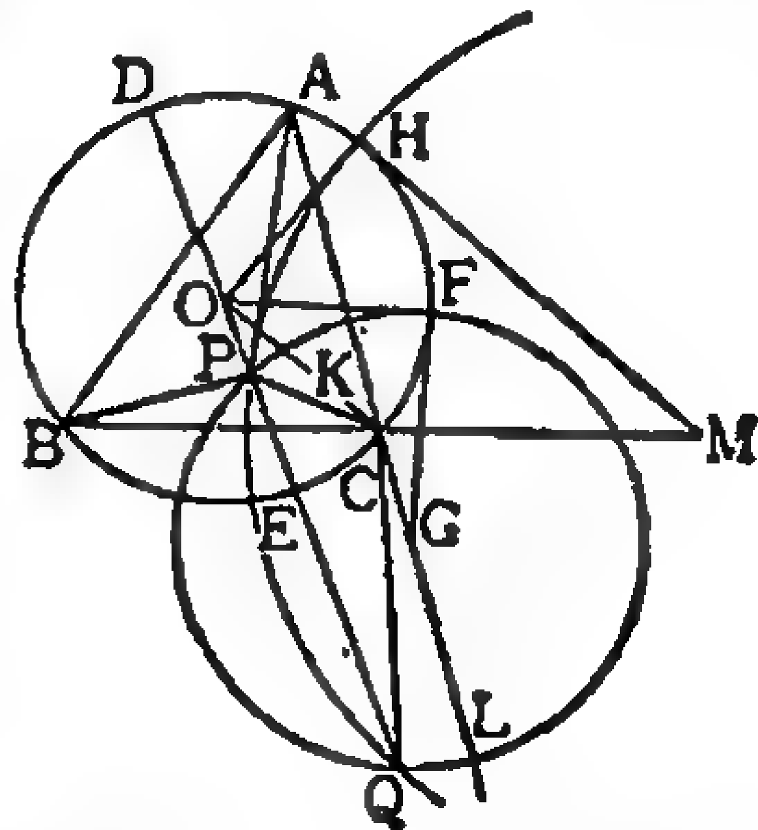
但是 $X'Y'$ 经过点 B 且与 OQ 垂直，所以 $X'Y'$ 过点 P。

注　这是关于极点、极直线的定理。

1498. 设圆 O 关于点 P 的极直线 XY 和关于点 Q 的极直线 $X'Y'$ 的交点为 R，则 PQ 是圆 O 关于点 R 的极直线。

解　根据上题可知，圆 O 关于点 R 的极直线是经过点 P，也经过点 Q 的，所以点 R 的极直线是 PQ。

1499. 若 P、Q 到 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 的距离的比都是 $l:m:n$，则 P、Q 是 $\triangle ABC$ 外接圆直径的调和分割点。



解　设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，若到 A、C 的距离的比为 $l:n$ 的点的轨迹是圆 G，则这个圆经过 P 及 Q。

设这个圆与 AC 的交点为 K、L，与圆 O 的一个交点为 F，则 A、K、C、L 是调和点列。而 G 是 KL 的中点。由此可得，

$$GC\cdot GA=GK^2=GF^2\ (\text{问题 }\mathbf{1480}).$$

$$\therefore\quad \angle OFG=90°.$$

所以 OF 是圆 G 的切线。

同理可得，若到 B、C 距离的比为 $m:n$ 的点的轨迹为圆 M，圆 M 与圆 O 的交点为 H，则 $\angle OHM=90°$。

由此可知，OH 是圆 M 的切线．而 $OH=OF$．所以 O 是两圆 G、M 根轴上的点(参考问题 **1835**)。

而直线 PQ 过两圆 G、M 的交点，是两圆的根轴．所以点 O 在直线 PQ 上．由此可得，

$$OF^2=OH^2=OP\cdot OQ. \quad ①$$

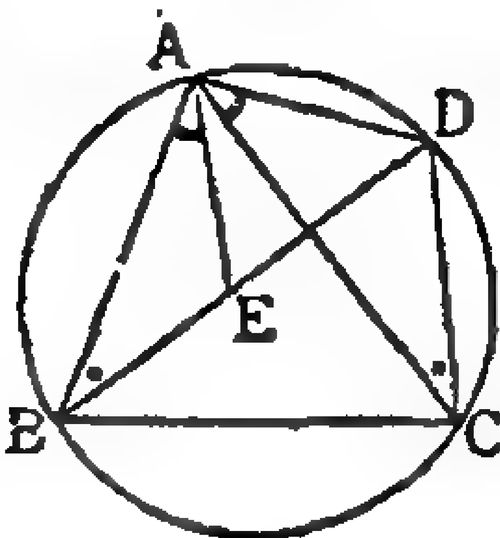
又　$OF=OH=OD=OE$。

所以，由①得，$OP\cdot OQ=OE^2=OD^2$。

因此，D、P、E、Q 是调和点列．即 P、Q 是直径 DE 的调和分割点。

17. 托勒密定理及其应用

1500. 圆内接四边形 $ABCD$ 的两组对边乘积的和 $AB\cdot CD+BC\cdot DA$ 等于它的对角线的乘积 $AC\cdot BD$．［托勒密定理］



解　作

$\angle BAE=\angle DAC$，

AE 与 BD 的交点为 E，

$\because$　$\angle BAE=\angle CAD$，

$\angle ABE=\angle ACD$，$\therefore$　$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$，

$\therefore$　$BA:BE=CA:CD$，

即　$AB\cdot CD=BE\cdot CA$．　①

又 $\angle CAB=\angle DAE$，$\angle ACB=\angle ADE$，

$\therefore$　$\triangle ABC\backsim\triangle AED$．

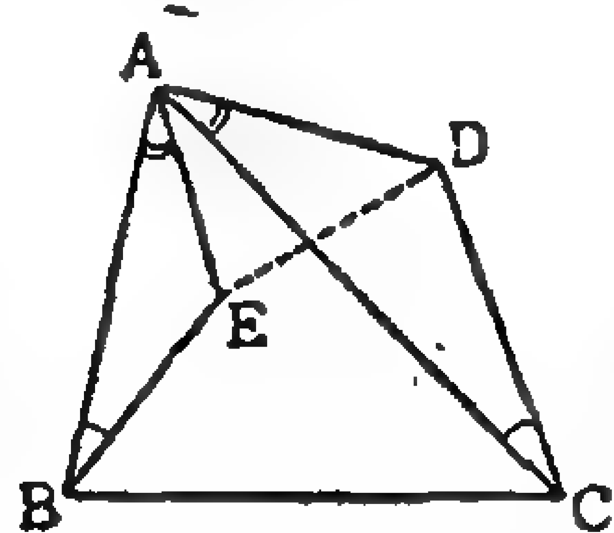
$\therefore$　$BC:AC=DE:DA$，

即　$BC\cdot DA=AC\cdot DE$．　②

把①、②的两边分别相加，得

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot(BE+ED)$$
$$=AC\cdot BD.$$

1501. 若四边形 $ABCD$ 的两组对边乘积的和等于它的对角线乘积，则 $ABCD$ 是圆内接四边形．［托勒密逆定理］



解　在四边形 $ABCD$ 内取一点 E，使 $\angle DAC=\angle BAE$，$\angle DCA=\angle ABE$，则

$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$．

$\therefore$　$AB:BE=AC:CD$．

$\therefore$　$AB\cdot CD=AC\cdot BE$．　①

又　$AB:AE=AC:AD$．

从而得出，$AB:AC=AE:AD$．

而　$\angle BAC=\angle EAD$．

$\therefore$　$\triangle ABC\backsim\triangle AED$．

$\therefore$　$AC:BC=AD:ED$．

从而得出，$AD\cdot BC=AC\cdot ED$．　②

①＋②，得

$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot(BE+ED)$．

根据假设，得

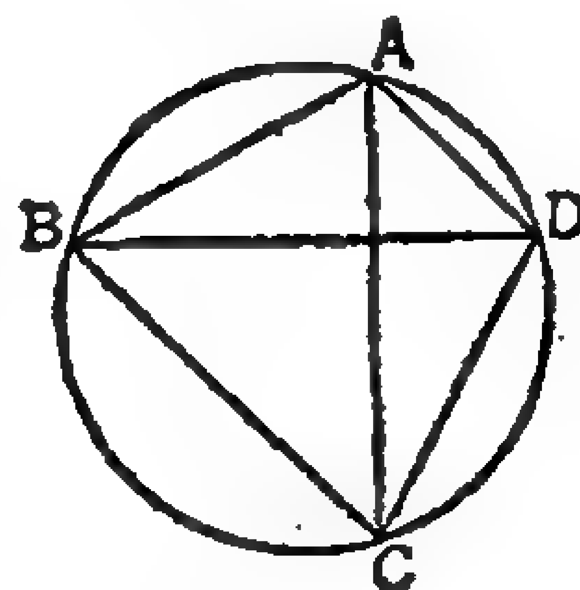
$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$．

比较上面两式，得 $BD=BE+ED$．

因此点 E 在 BD 上。

从而得出，$\angle ABE=\angle ABD=\angle ACD$．由此可知，$ABCD$ 是圆内接四边形。

1502. 若圆内接四边形的对角线互相垂直相交，则以对边为两邻边的矩形的面积的和等于四边形面积的两倍。



解　在圆内接四边形 $ABCD$ 中，设 $AC\perp BD$．根据托勒密定理，得

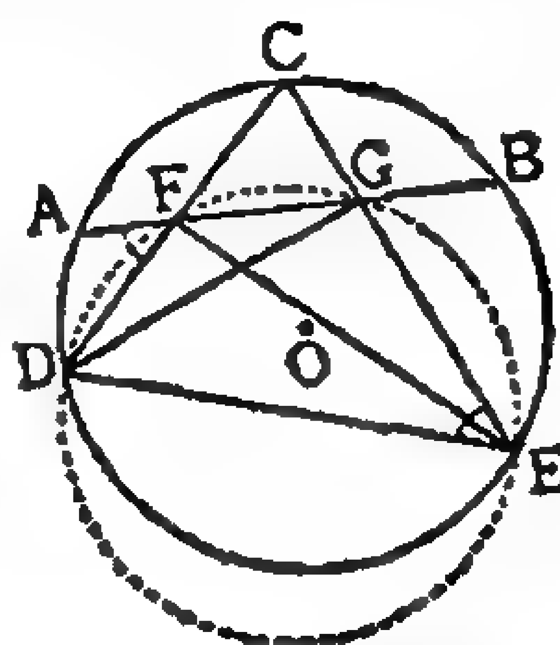
$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$．

$\because$　$AC\perp BD$，

$\therefore$　$AC\cdot BD=$ 四边形 $ABCD$ 面积的两倍．

$\therefore$　$AB\cdot CD+AD\cdot BC=$ 四边形 $ABCD$ 面积的两倍。

1503. 由圆 O 的 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 C 引弦 CD、CE 分别与 AB 相交于点 F、G，则 $DG\cdot EF=FD\cdot GE+DE\cdot FG$．



解　因为 $\angle AFD$ 等于 $\overset{\frown}{AD}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数的和的一半，它与 $\overset{\frown}{DAC}$ 所对的圆周角 DEG 相等，即 $\angle AFD=\angle DEC$，所以 $FDEG$ 是圆内接四边形。

由托勒密定理，得

$DG\cdot EF=FD\cdot GE+DE\cdot FG$．

1504. 凸四边形的两条对角线所构成的矩形面积是不大于它的两组对边所构成矩形面积的和。

解　在问题 **1501** 的图中，设 $ABCD$ 是凸四边形；

若 $ABCD$ 是圆内接凸四边形，则根据托勒密定理，得

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD. \quad ①$$

又若 $ABCD$ 不是圆内接凸四边形，则

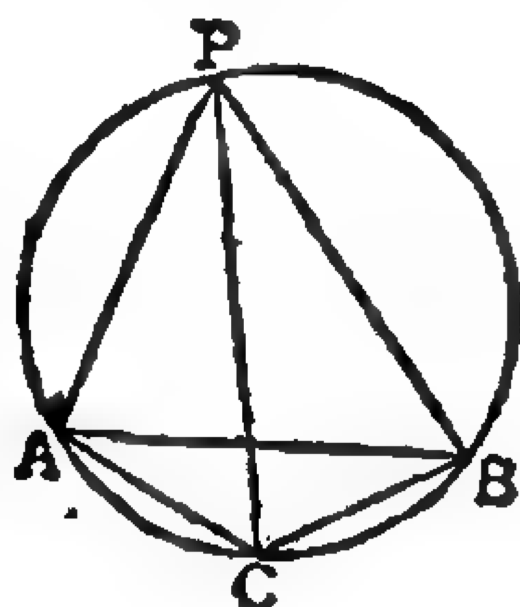
$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot(BE+DE)$.

$\because\quad BE+ED>BD$,

$\therefore\quad AB\cdot CD+AD\cdot BC>AC\cdot BD.\quad ②$

由①、②，得 $AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq AC\cdot BD$.

1505．设 A、B 是定圆上的两定点，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，P 是圆上任一点，则 $\dfrac{PA+PB}{PC}$ 或 $\dfrac{PA\sim PB}{PC}$ 是定值.



解　若点 P 与点 C 在 AB 的异侧，则四边形 $PACB$ 是圆内接四边形，根据托勒密定理，得

$AC\cdot PB+BC\cdot PA=AB\cdot PC$.

$\because\quad AC=BC$,

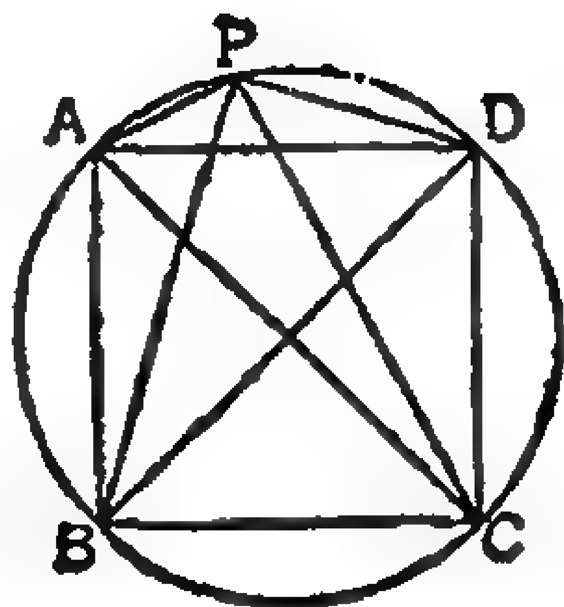
$\therefore\quad AC\cdot(PB+PA)=PC\cdot AB$.

$\therefore\quad \dfrac{PB+PA}{PC}=\dfrac{AB}{AC}$　（是定值）.

同理可得，若 P 在 $\overset{\frown}{ACB}$ 上，则

$\dfrac{PA\sim PB}{PC}=\dfrac{AB}{AC}$　（是定值）.

1506．设 P 为正方形 $ABCD$ 的外接圆的劣弧 AD 上一点，则 $\dfrac{PA+PC}{PB}$ 及 $\dfrac{PB+PD}{PC}$ 都是定值.



解　由 $PABC$ 是圆内接四边形，得

$$PA\cdot BC+AB\cdot PC=PB\cdot AC. \quad ①$$

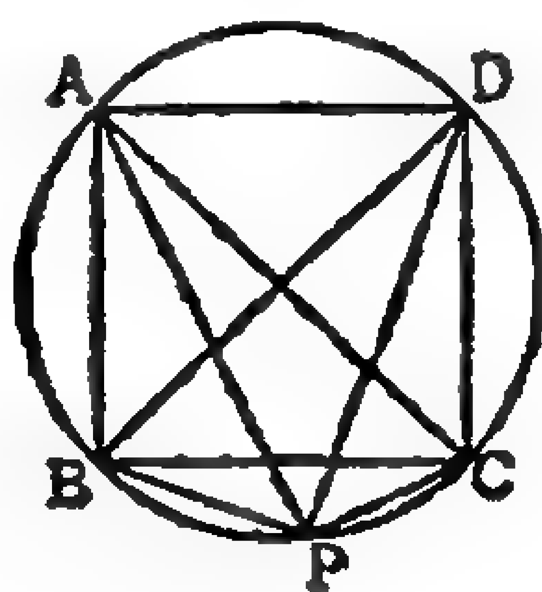
而 $ABCD$ 是正方形，设 $AB=BC=a$，则　　$AC=\sqrt{2}a$.

代入①，得 $PA\cdot a+PC\cdot a=PB\cdot\sqrt{2}a$.

$\therefore\quad \dfrac{PA+PC}{PB}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}$　（是定值）.

同理可得，$\dfrac{PB+PD}{PC}=\sqrt{2}$（是定值）.

1507．设 P 为正方形 $ABCD$ 的外接圆上的任意一点，则 $PD^2\sim PB^2=2PA\cdot PC$.



解　根据上题可得，

$$\frac{PD+PB}{PA}=\sqrt{2}. \quad ①$$

又 $PCDB$ 是圆内接四边形，

$\therefore\quad PB\cdot DC+PC\cdot BD=PD\cdot BC$.

设正方形的边长为 a，代入上式，得

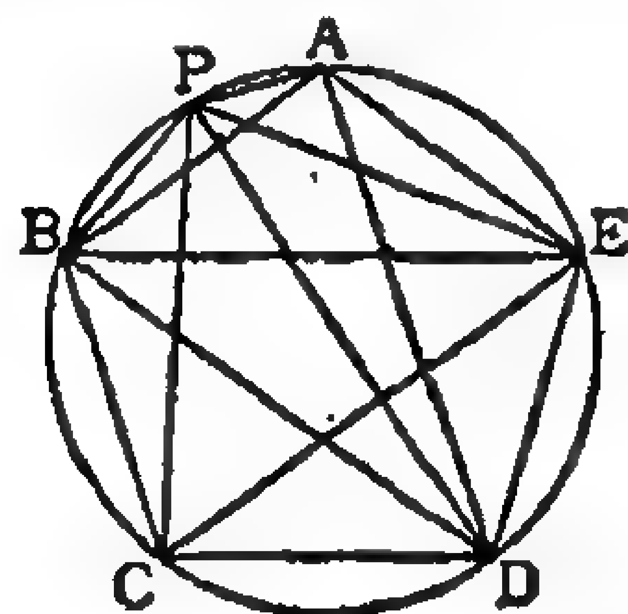
$PB\cdot a+PC\cdot\sqrt{2}a=PD\cdot a$.

$$\therefore\quad \frac{PD\sim PB}{PC}=\sqrt{2}. \quad ②$$

由①×②，得 $\dfrac{PD^2\sim PB^2}{PA\cdot PC}=2$.

所以　$PD^2\sim PB^2=2PA\cdot PC$.

1508．已知圆内接正五边形 $ABCDE$．若 P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点，则 $PA+PD+PB=PE+PC$.



解　设正五边形的各边长为 a，正五边形的对角线都相等，设为 b.

因为 $PBDA$ 是圆内接四边形，应用托勒密定理，得

$$PA\cdot b+PB\cdot b=PD\cdot a. \quad ①$$

又 $PCDE$ 也是圆内接四边形，应用托勒密定理，得

$$PE\cdot a+PC\cdot a=PD\cdot b. \quad ②$$

同理，对于四边形 $ABCE$，应用托勒密定理，得

$$a\cdot b+a^2=b^2. \quad ③$$

由①，得 $PA+PB+PD=PD\left(\dfrac{a+b}{b}\right)$.

由②，得　$PE+PC=PD\cdot\dfrac{b}{a}$.

而由③，得　$\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{b}{a}$.

$\therefore\quad PA+PB+PD=PE+PC$.

1509．在平面内有圆 O 及与圆 O 不相交的直线 l，作垂直于 l 的圆 O 的直径，设这直径离 l 较远的一个端点为 A.

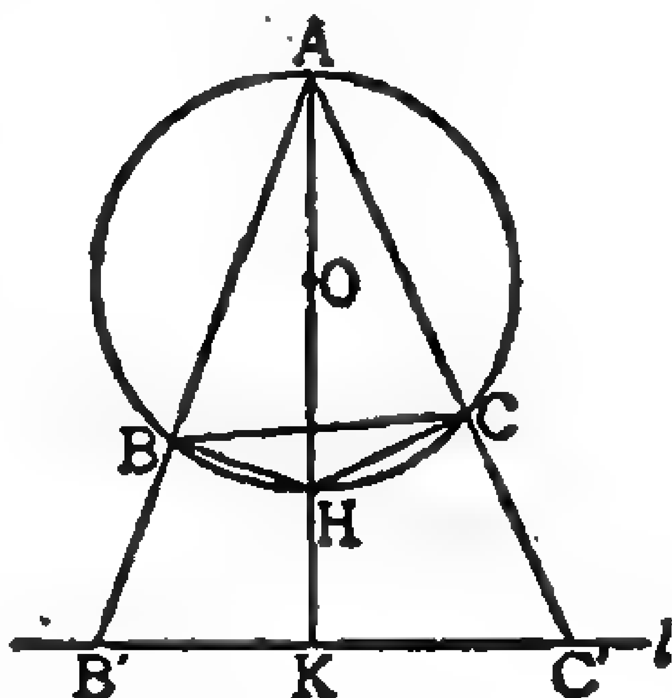
(1)　若过 A 的任意直线与圆 O 相交于点 B，与 l 相交于点 B'，证明 $AB\cdot AB'$ 是定值；

(2)　若连结 A 与圆上其他两点 B、C 的直

线交 l 分别于 B'、C'，证明

$$B'C'=BC\cdot\frac{a^2}{AB\cdot AC}\text{（设 }AB\cdot AB'=a^2\text{）。}$$

(3) 若 $ABCD$ 为圆内接四边形，直线 AB、AC、AD 与 l 的交点分别为 B'、C'、D'，则由 $B'D'=B'C'+C'D'$ 及 (2) 可导出关系式



$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

解　(1) 设直径 AH 垂直于直线 l，则

$$\angle ABH=90°.$$

又 $\angle AKB'=90°$，由此可得，$BB'KH$ 是圆内接四边形。

$$AB\cdot AB'=AH\cdot AK\text{（是定值）}.$$

(2) 与(1)同理，得 $AC\cdot AC'=AH\cdot AK$.

$$\therefore\quad AB\cdot AB'=AC\cdot AC'.$$

由此可知，$BB'C'C$ 是圆内接四边形，

$$\therefore\quad \angle ACB=\angle AB'C'.$$

从而得出，$\triangle ABC\backsim\triangle AC'B'$.

$$\therefore\quad \frac{B'C'}{BC}=\frac{AB'}{AC}=\frac{AB\cdot AB'}{AB\cdot AC}. \qquad ①$$

设 $AB\cdot AB'=a^2$. 代入①，得

$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{a^2}{AB\cdot AC}.$$

$$\therefore\quad B'C'=BC\cdot\frac{a^2}{AB\cdot AC}.$$

(3) 如图，设 AO 垂直于直线 l，则根据 (2)，得

$$B'C'=BC\cdot\frac{a^2}{AB\cdot AC},$$

$$C'D'=CD\cdot\frac{a^2}{AC\cdot AD},$$

$$B'D'=BD\cdot\frac{a^2}{AB\cdot AD}.$$

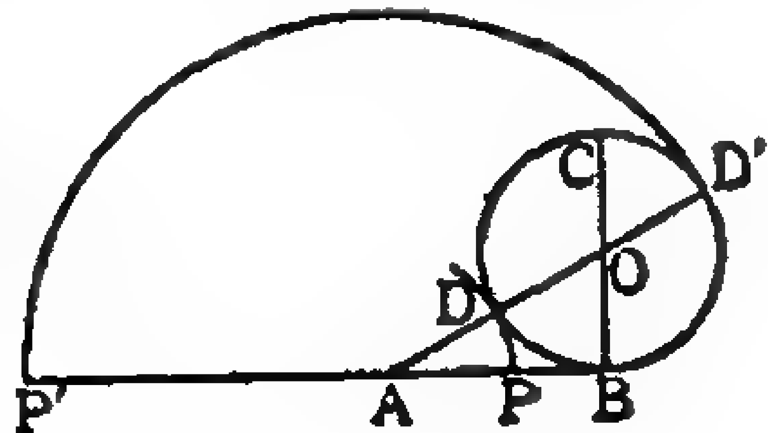
而 $B'D'=B'C'+C'D'$. 把上面三式代入，得

$$BD\cdot\frac{a^2}{AB\cdot AD}=BC\cdot\frac{a^2}{AB\cdot AC}+CD\cdot\frac{a^2}{AC\cdot AD},$$

$$\therefore\quad AC\cdot BD=BC\cdot AD+AB\cdot CD.$$

18. 中外比（黄金分割）

1510. 若 AB、BC 是两条互相垂直的等长线段。以 BC 为直径作圆 O，过点 A 的直径的两端为 D、D'，在 AB 上取 $AP=AD$，延长 BA 到 P' 使 $AP'=AD'$，则 P、P' 分别内分、外分 AB 成中外比。



解　设 $AB=BC=a$，$AD=AP=x$，

则 $PB=a-x$.

而 AB 是圆 O 的切线。

$$\therefore\quad AB^2=AD\cdot AD',\ \text{即}\ a^2=x\cdot(a+x),$$

$$\therefore\quad x^2=a^2-ax,\ x^2=a\cdot(a-x),$$

即 $$AP^2=AB\cdot PB.$$

同理可得，$AP'^2=AB\cdot P'B$.

所以 P、P' 分别内分、外分 AB 成中外比。

注　若点 P 把线段 AB 分成两条线段 PA、PB，使 $AP^2=AB\cdot PB$，则称 P 是把 AB 分成中外比（黄金分割）的点，P 是内分点。若线段 AB 的延长线上一点 P' 使 $AP'^2=AB\cdot AP'$，则称 P' 是把 AB 分成中外比的外分点。

1511. 设 C 是把 AB 分成中外比的内分点，在中项线段 AC 上取点 D 使 $CD=CB$，则 D 是把 CA 分成中外比的内分点。



解　由 C 把 AB 分成中外比的内分点，得

$$AC^2=CB\cdot AB.$$

而 $CB=CD$. 代入上式，得

$$AC^2=CD\cdot(AC+CD),$$

即 $$AC^2=CD^2+AC\cdot CD.$$

$$\therefore\quad CD^2=AC^2-AC\cdot CD,$$

$$CD^2=AC\cdot(AC-CD),$$

即 $$CD^2=AC\cdot AD.$$

所以，D 是把线段 CA 分成中外比的内分点。

1512. 设线段 $AB=a$，P 是把 AB 分成中外比的内分（或外分）点，求 AP、BP 的长度。





解 设 $AP=x$，则 $BP=a-x$。

由 $AP^2=AB\cdot BP$，得 $x^2=a\cdot(a-x)$，

即 $x^2+ax-a^2=0$。

解 这个方程，得

$$x=\frac{(-1\pm\sqrt{5})\cdot a}{2}.\ (\text{舍去负根})$$

$$\therefore\quad AP=\frac{(-1+\sqrt{5})\cdot a}{2},$$

$$BP=a-\frac{(-1+\sqrt{5})\cdot a}{2}=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)a.$$

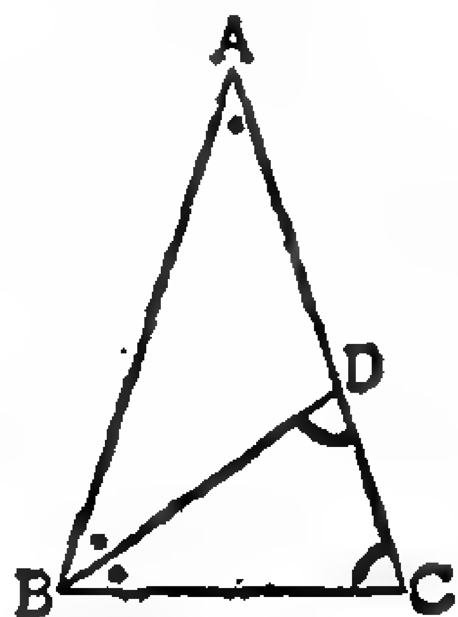
又，设 P' 是把 AB 分成中外比的外分点，$AP'=x$，则 $BP'=x+a$。

同理可得，$AP'=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot a$，

从而得出，

$$BP'=\frac{(1+\sqrt{5})\cdot a}{2}+a=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot a.$$

1513. 若等腰三角形 ABC 的底角是顶角 A 的两倍，又 $\angle B$ 的平分线与 AC 的交点为 D，则 D 是把 AC 分成中外比的点。



解 由 $\angle B=2\angle A$，得 $\angle ABD=\angle A$，$\angle DBC=\angle A$。由此可知，$\triangle ABD$ 的外接圆在点 B 与 BC 相切。

$$\therefore\quad BC^2=CD\cdot CA.\qquad ①$$

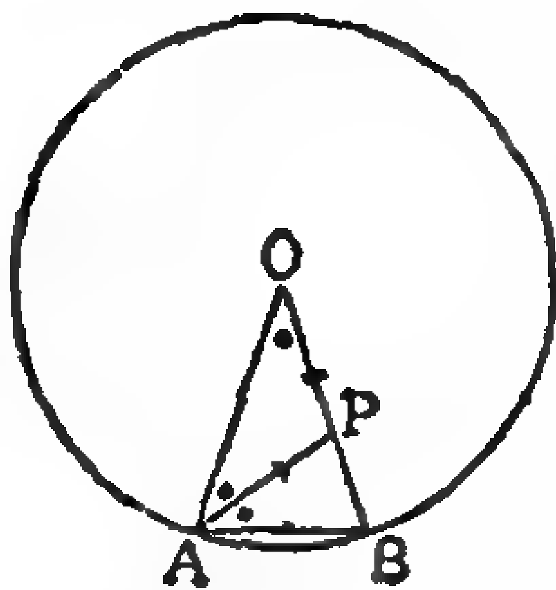
而 $AD=BD$，$BD=BC$，$\therefore\quad BC=AD$。

代入①，得 $AD^2=CD\cdot CA$。

所以，D 是把 AC 分成中外比的点。

注 本问题是等腰三角形 ABC 的顶角 $A=36°$，设以 A 为圆心，AB 为半径作圆，则边 BC 是这个圆内接正十边形的一边。所以应用本问题可以作出正十边形来。

1514. 试证圆内接正十边形的一边长等于把圆的半径分成的中外比所得的较长的一条线段。



解 设 AB 为圆 O 内接正十边形的一边，则 $\angle AOB=36°$，$\angle OAB=72°$。设 $\angle OAB$ 的平分线与 OB 的交点为 P，则 $OP=AP=AB$，由 $\angle AOP=\angle PAB$ 可知，BA 是圆 OAP 的切线。

$$\therefore\quad AB^2=BP\cdot BO.\quad \text{而 } OP=AB.$$

$$\therefore\quad OP^2=BP\cdot BO.$$

即 P 是把半径 OB 分成中外比的内分点。

1515. 正五边形的对角线与其他对角线相互内分为中外比。

解 作正五边形 $ABCDE$ 的外接圆。

$$\because\quad \widehat{BC}=\widehat{DE},$$

$$\therefore\quad BP\parallel CD.$$

同理可得，$BC\parallel PD$。所以，四边形 $BPDC$ 是平行四边形。

$$\therefore\quad PD=CB=AE.$$

又 $\widehat{AB}=\widehat{AE}$，$\therefore\quad \angle AEB=\angle ADE$。

由此可得，$\triangle PED$ 的外接圆在点 E 与 AE 相切。

$$\therefore\quad AE^2=AP\cdot AD.$$

而 $AE=PD$。代入上式，得

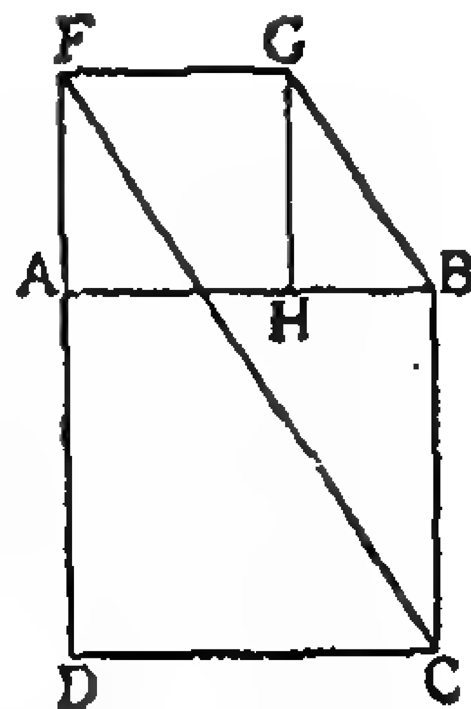
$$PD^2=AP\cdot AD.$$

同理可得，$PB^2=EP\cdot EB$。

因此，P 是把 AD、BE 分成中外比的内分点。这就是说对角线 AD、BE 相互内分为中外比。

1516. 设 H 内分线段 AB，使 $AH^2=AB\cdot BH$。在 AB 的两侧分别以 AH 及 AB 为一边作正方形 $AHGF$、$ABCD$，则

$$BG\parallel CF.$$



解 由 $AH^2=AB\cdot BH$，得

$$\frac{AH}{BH}=\frac{AB}{AH}=\frac{AH+AB}{BH+AH}.\qquad ①$$

而 $AH+AB=FD$，$BH+AH=DC$。

代入①，得 $\dfrac{GH}{HB}=\dfrac{FD}{DC}$。

又 $\angle GHB=90°=\angle D$，

$$\therefore\quad \triangle GHB\backsim\triangle FDC.$$

而 $DF\parallel HG$，$DC\parallel HB$。

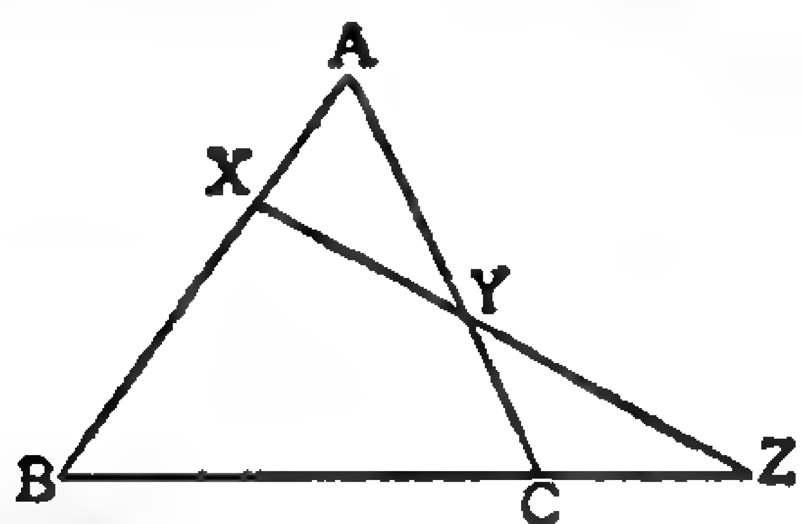
$$\therefore\quad CF\parallel BG.$$

19. 梅涅劳定理、乔巴定理

1517. 一条直线截 $\triangle ABC$ 的三条边 AB、AC、BC（或其延长线），所得的交点分别为

X、Y、Z，则

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZC}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$ [梅涅劳定理]



解 很明显，

$$\frac{AX}{XB}=\frac{S_{\triangle AXZ}}{S_{\triangle BXZ}}, \quad ①$$

$$\frac{BZ}{ZC}=\frac{S_{\triangle BXZ}}{S_{\triangle CXZ}}, \quad ②$$

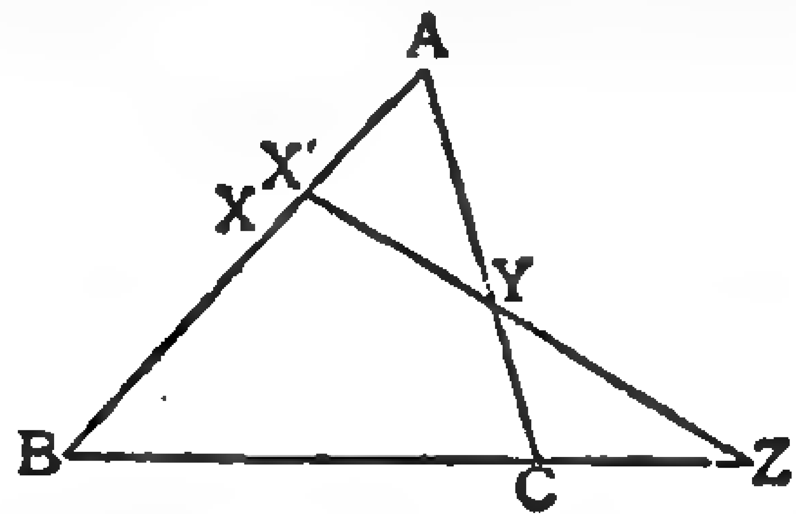
$$\frac{CY}{YA}=\frac{S_{\triangle CXZ}}{S_{\triangle AXZ}}. \quad ③$$

由①×②×③，得

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZC}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$

1518. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上分别取点 X、Y，又在 BC 的延长线上取点 Z，使 $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$，则 X、Y、Z 在同一条直线上。

[梅涅劳逆定理]



解 设延长 ZY 与 AB 相交于点 X'，则

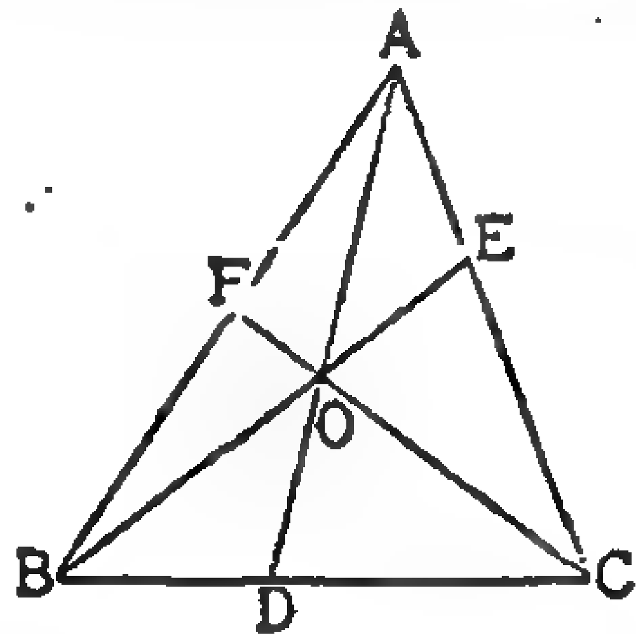
$$\frac{AX'}{X'B}\cdot\frac{BZ}{ZC}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$

而根据假设得 $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$.

$$\therefore \quad \frac{AX'}{X'B}=\frac{AX}{XB}.$$

这就是说点 X，X' 分别内分线段 AB 所得两条线段的比相等。所以点 X 与点 X' 相重合。由此可知，X、Y、Z 在一条直线上。

1519. 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内取一点 O，AO，BO、CO 或其延长线与对边的交点分别为 D、E、F，则



$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$ [乔巴定理]

解 因为

$$\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}, \quad ①$$

$$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}}, \quad ②$$

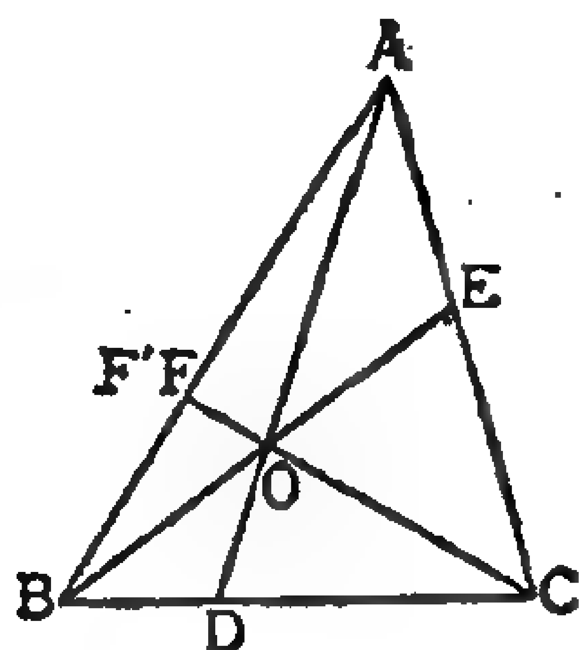
$$\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}}. \quad ③$$

由①×②×③，得

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

1520. 在 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上分别取点 D、E、F，使 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，则直线 AD、BE、CF 相交于一点。

[乔巴逆定理]



解 设 AD、BE 的交点为 O，延长 CO 与 AB 的交点为 F'，则

$$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

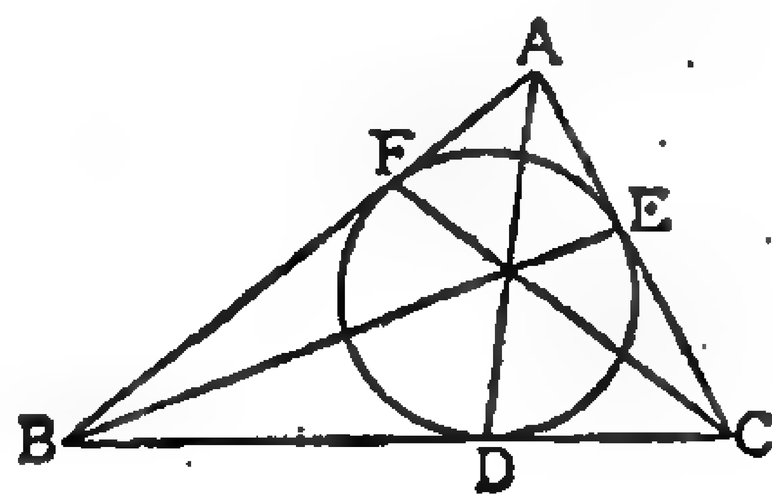
而假设 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，

由此可得，$\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$.

所以，点 F 与 F' 相重合。

注 应用这个定理可以证明三条直线交于一点。

1521. 设 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 与内切圆的切点分别为 D、E、F，则 AD、BE、CF 相交于一点。

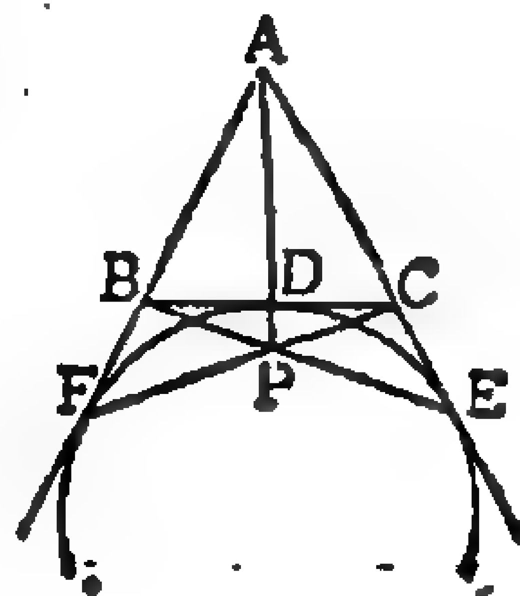


解 因为 $BD=BF$，$AE=AF$，$CD=CE$。所以

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

因此，由乔巴逆定理可知，AD、BE、CF 相交于一点。

1522. 设 $\triangle ABC$ 的一个旁切圆与 BC、CA、AB 的切点分别为 D、E、F，则 AD、BE、CF



相交于一点。

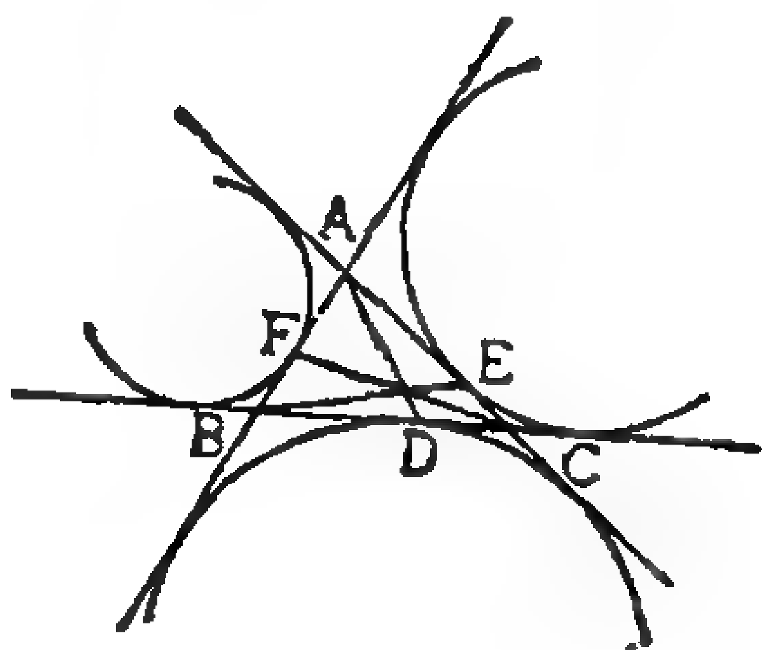
解 设D、E、F是切点，则

$$AE=AF,\ CE=CD,\ BD=BF.$$

$$\therefore\ \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

因此由乔巴逆定理可知，AD、BE、CF相交于一点。

1523. 设$\triangle ABC$的三个旁切圆在边BC、CA、AB上的切点分别为D、E、F，则AD、BE、CF相交于一点。



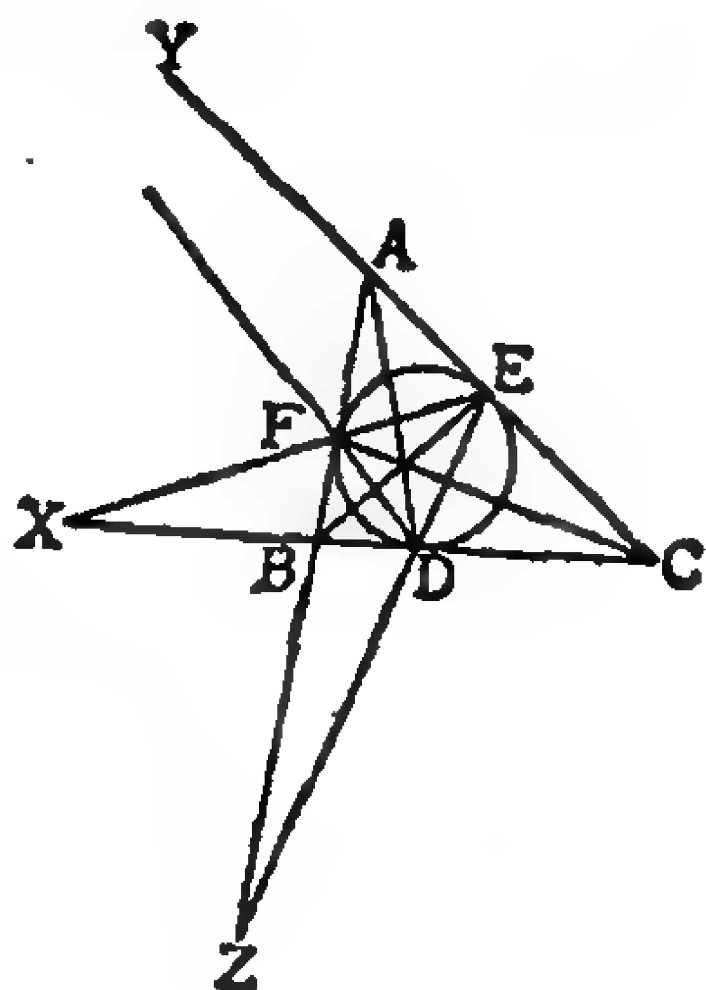
解 设$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$a+b+c=2s$（问题**447**），则

$$BD=s-c,\ DC=s-b,\ CE=s-a,$$
$$EA=s-c,\ AF=s-b,\ FB=s-a.$$

$$\therefore\ \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}$$
$$=\frac{s-c}{s-b}\cdot\frac{s-a}{s-c}\cdot\frac{s-b}{s-a}=1.$$

因此，根据乔巴逆定理可知，AD、BE、CF相交于一点。

1524. 设$\triangle ABC$的内切圆在三边BC、CA、AB上的切点分别为D、E、F，则EF与BC、FD与CA、DE与AB的交点在一条直线上。



解 由$\triangle ABC$被直线XFE所截，得

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

而 $$AE=AF.$$

代入上式，得

$$\frac{BX}{XC}=\frac{BF}{CE}. \quad ①$$

同理可得，$$\frac{CY}{YA}=\frac{CD}{AF}, \quad ②$$

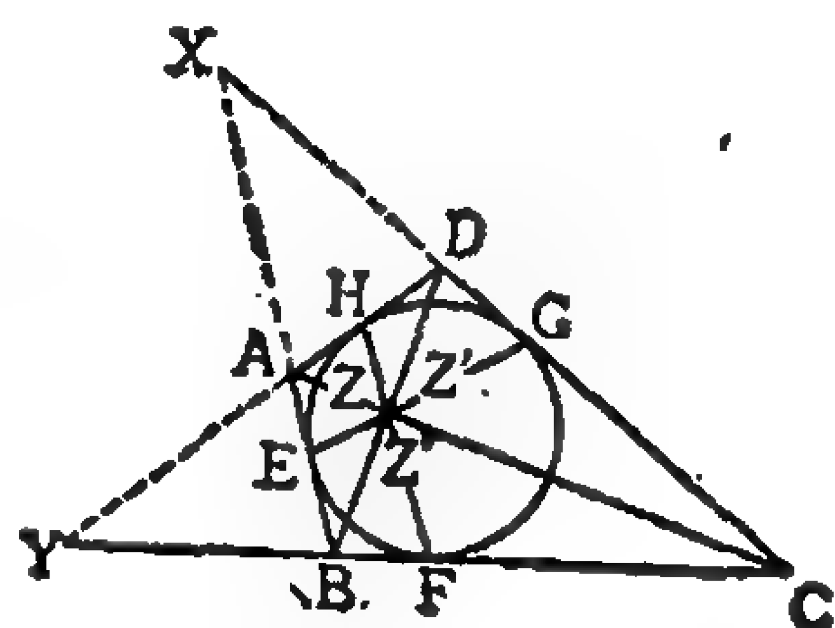
$$\frac{AZ}{BZ}=\frac{AE}{BD}. \quad ③$$

由①×②×③，得

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1.$$

因此，由梅涅劳逆定理可知，点X、Y、Z是在一条直线上。

1525. 设四边形$ABCD$外切于圆O，各边上的切点依次为E、F、G、H，则AC、BD、EG、HF相交于一点Z。



解 设BA、CD的交点为X，DA、CB的交点为Y。

若AC、EG的交点为Z'，则由$EZ'G$是截$\triangle XAC$的直线。

$$\therefore\ \frac{AE}{EX}\cdot\frac{XG}{GC}\cdot\frac{CZ'}{Z'A}=1. \quad ①$$

又设HF、AC的交点为Z''，则$HZ''F$是截$\triangle YAC$的直线。

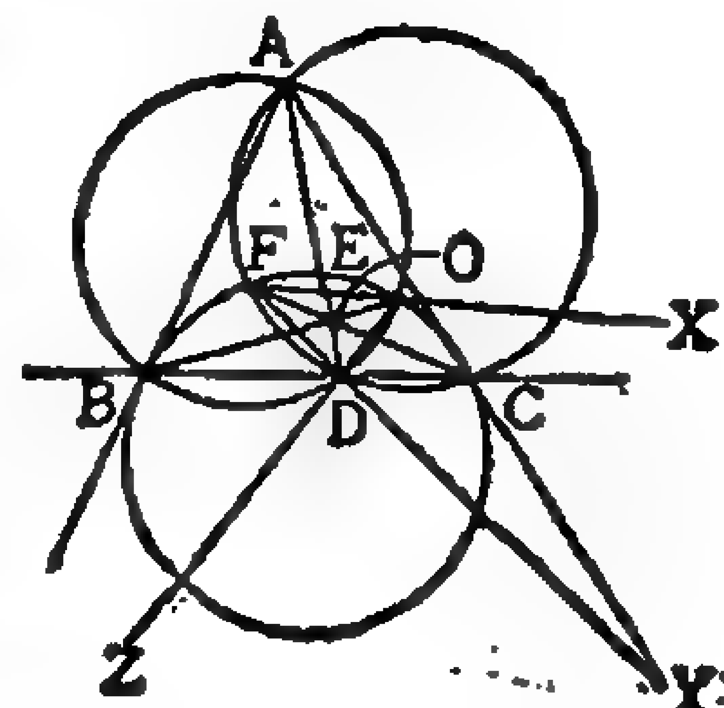
$$\therefore\ \frac{YH}{HA}\cdot\frac{AZ''}{Z''C}\cdot\frac{CF}{FY}=1. \quad ②$$

而 $$XE=XG,\ YH=YF,$$
$$AH=AE,\ CG=CF.$$

由①、②，得 $$\frac{CZ''}{AZ''}=\frac{CZ'}{AZ'}.$$

由此可知，点Z'与Z''相重合。这就是说，AC过HF、EG的交点Z。同理可得，BD也过这个交点Z。

1526. 设以$\triangle ABC$的两边AB、AC分别为弦的两个任意圆的交点为D，以BC为弦的任意圆与前两圆的交点分别为E、F，又EF、FD、DE与三边BC、CA、AB分别交于点X、Y、Z，则X、Y、Z在一条直线上。



解 由问题**1404**，得AD、BE、CF相交于一点。设这点为O，则直线XEF截$\triangle OBC$，

$$\therefore\ \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CF}{FO}\cdot\frac{OE}{EB}=1. \quad ①$$

同理，YDF、ZDE是分别截$\triangle OAC$、

$\triangle OAB$ 的直线，

$$\therefore\ \frac{CY}{YA}\cdot\frac{AD}{DO}\cdot\frac{OF}{FC}=1, \quad ②$$

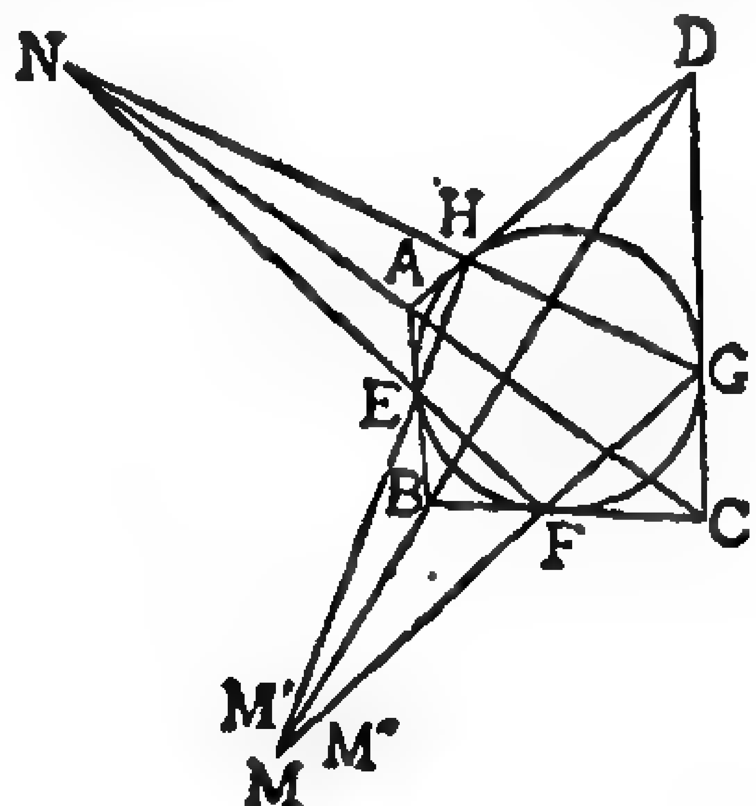
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BE}{EO}\cdot\frac{OD}{DA}=1. \quad ③$$

由①×②×③，得

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

因此，由梅涅劳逆定理可知，X、Y、Z 是在一条直线上。

1527. 设四边形 $ABCD$ 外切于圆，切点分别为 E、F、G、H，则 HE、DB、GF 相交于一点 M，或 GH、FE、CA 相交于一点 N。



解 设 HE 与 DB 的交点为 M'，则 HEM' 是截 $\triangle ABD$ 的直线，

$$\therefore\ \frac{AE}{EB}\cdot\frac{BM'}{M'D}\cdot\frac{DH}{HA}=1. \quad ①$$

又设 GF 与 DB 的交点为 M''，则 GFM'' 是截 $\triangle CBD$ 的直线，

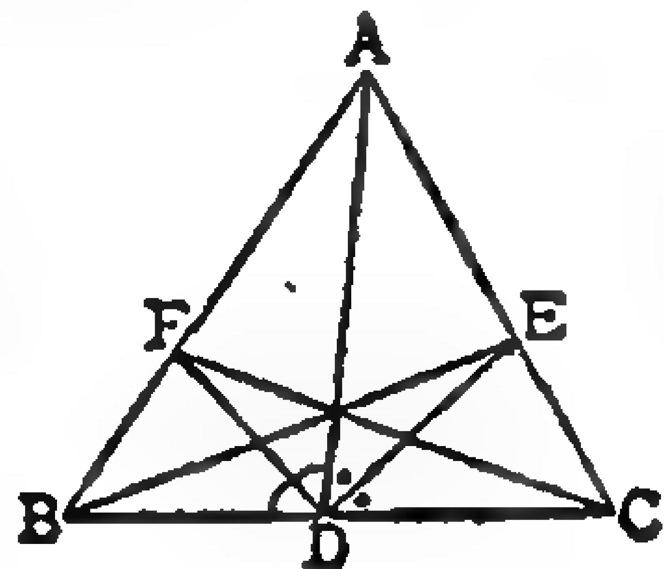
$$\therefore\ \frac{CG}{GD}\cdot\frac{DM''}{M''B}\cdot\frac{BF}{FC}=1. \quad ②$$

比较①、②，得

$$\frac{BM'}{M'D}=\frac{BM''}{M''D}.$$

由此可知，M' 与 M'' 是同一个点，即 HE、DB、GF 是相交于一点 M。同理可得，GH、FE、CA 相交于一点 N。

1528. 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上取一点 D，设 $\angle ADB$、$\angle ADC$ 的平分线与 AB、AC 分别交于 F、E，则 AD、BE、CF 相交于一点。



解 因为 DF 是 $\angle ADB$ 的平分线，所以

$$\frac{AF}{FB}=\frac{DA}{BD}. \quad ①$$

同理可得，
$$\frac{CE}{EA}=\frac{CD}{DA}. \quad ②$$

把①、②的两边分别相乘，得

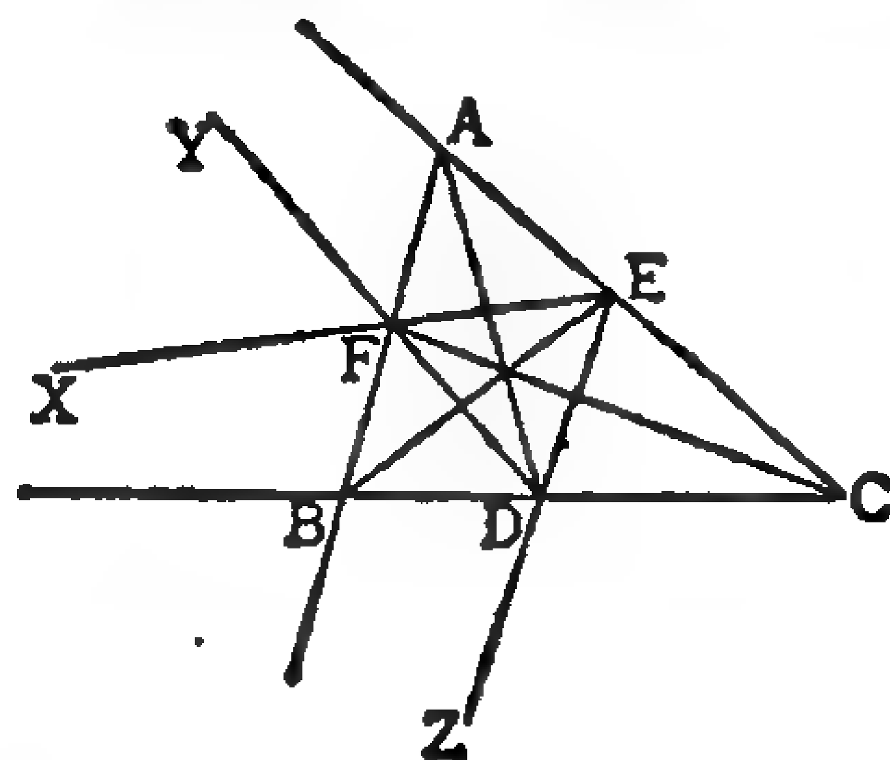
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{DA}{BD}\cdot\frac{CD}{DA}.$$

等式两边同乘以 $\frac{BD}{DC}$，得

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}=1.$$

所以 AD、BE、CF 相交于一点。

1529. 若 $\triangle ABC$ 的两个角 B、C 的平分线与对边的交点分别为 E、F，与 $\angle A$ 相邻的外角平分线及对边的交点为 D，则 D、E、F 在一条直线上。



解 由角平分线性质，得

$$\frac{AF}{FB}=\frac{CA}{BC}, \quad ①$$

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{CA}, \quad ②$$

$$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB}. \quad ③$$

由①×②×③，得

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

所以，F、E、D 在一条直线上。

1530. 设 $\triangle ABC$ 的三个角的平分线与对边的交点分别为 D、E、F，则 EF 与 BC、FD 与 CA、DE 与 AB 的交点 X、Y、Z 在一条直线上。

Y
A
E
X
F
B
D
C
Z

解 设 BE、CF 分别是 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线，又 EF 与 BC 的交点为 X，根据上题可知，AX 是与 $\angle A$ 相邻的外角的平分线。

$$\therefore\ \frac{BX}{XC}=\frac{AB}{CA}. \quad ①$$

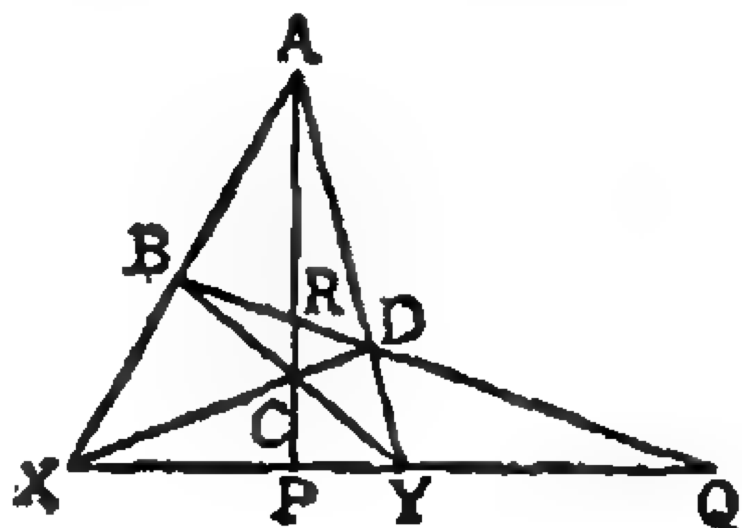
同理可得，
$$\frac{CY}{YA}=\frac{BC}{AB}, \quad ②$$

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{CA}{BC}. \quad ③$$

由①×②×③，得 $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$

所以，X、Y、Z 在一条直线上。

1531. 从 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 向对边引垂线，设垂足分别为 D、E、F，则 EF 与 BC、FD 与 CA、DE 与 AB 的三个交点 X、Y、Z 在一条直线上。



解　因为 AD、BE、CF 的交点是 $\triangle ABC$ 的垂心，所以 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形。因此 AD、DB 分别是 $\angle EDF$、与它相邻的外角的平分线。

由此可知，如图所示，DX、EY、FZ 是 $\triangle DEF$ 三个外角的平分线。所以根据上题的证明可知，X、Y、Z 在一条直线上。

1532. 在四边形 $ABCD$ 中，设 AB、DC 的交点为 X，BC、AD 的交点为 Y，AC、BD 与 XY 的交点分别为 P、Q，AC、BD 的交点为 R，则下列都是调和点列：

(1) X、P、Y、Q；(2) B、R、D、Q；(3) A、R、C、P。

解　(1) 因为直线 BDQ 截 $\triangle AXY$，所以

$$\frac{XQ}{QY}\cdot\frac{YD}{DA}\cdot\frac{AB}{BX}=1. \qquad ①$$

而在 $\triangle AXY$ 中，AP、XD、YB 相交于一点 C。

$$\therefore\quad \frac{YD}{DA}\cdot\frac{AB}{BX}\cdot\frac{XP}{PY}=1. \qquad ②$$

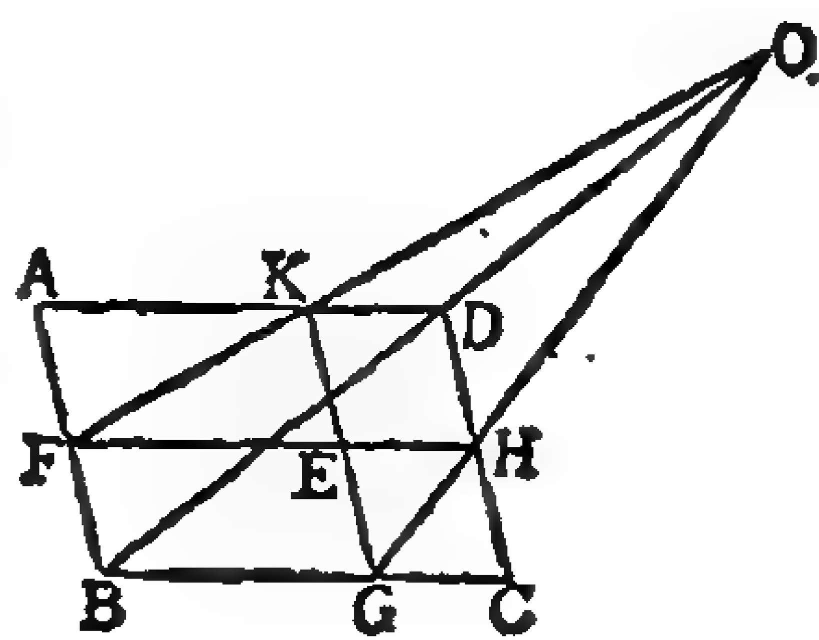
由①、②，得 $\dfrac{XQ}{QY}=\dfrac{XP}{PY}$.

所以，$(X、P、Y、Q)$ 是调和点列。

(2) 由 $(X、P、Y、Q)$ 是调和点列可知，$A(X、P、Y、Q)$ 是调和线束。用直线 BQ 去截它，由问题 **1482** 知 $(B、R、D、Q)$ 是调和点列。

(3) 因为 $(B、R、D、Q)$ 是调和点列，所以 $X(B、R、D、Q)$ 是调和线束。用直线 AP 去截它，根据问题 **1482** 知 $(A、R、C、P)$ 是调和点列。

1533. 设平行四边形 $ABCD$ 及形内一点 E，过 E 引 AB 的平行线与 AD、BC 的交点分别为 K、G，又过 E 引 AD 的平行线与 AB、CD 的交点分别为 F、H，则三条直线 FK、BD、GH 互相平行或者它们相交于一点。



解　设 BD 与 FK 的交点为 O，则直线 OKF 截 $\triangle ABD$

$$\therefore\quad \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BO}{OD}\cdot\frac{DK}{KA}=1.$$

而　$AF=DH$，$FB=HC$，

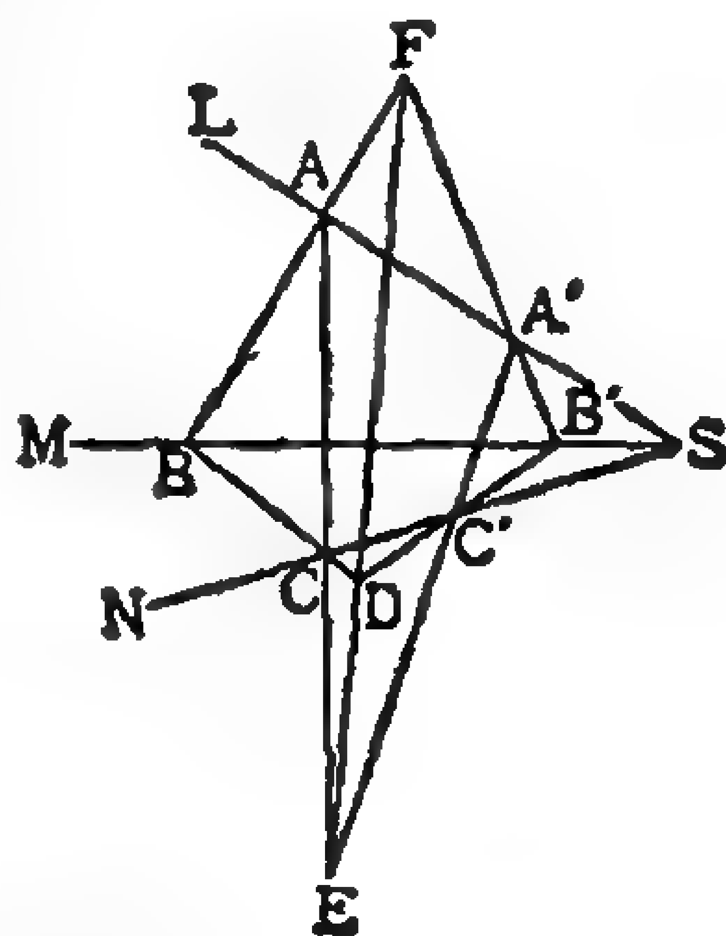
$DK=GC$，$AK=BG$。

$$\therefore\quad \frac{DH}{HC}\cdot\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BO}{OD}=1.$$

从而得出，G、H、O 在一条直线上。所以，FK、BD、GH 相交于一点 O。

1534. 在 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中，连结 AA'、BB'、CC' 使这三条直线相交于一点 S，则 AB 与 $A'B'$、BC 与 $B'C'$，AC 与 $A'C'$ 的交点 F、D、E 在同一条直线上。

［笛沙格定理］



解　直线 $FA'B'$、$EC'A'$、$DC'B'$ 分别截 $\triangle SAB$、$\triangle SAC$、$\triangle SBC$，

$$\therefore\quad \frac{SA'}{A'A}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BB'}{B'S}=1,$$

$$\frac{AA'}{A'S}\cdot\frac{SC'}{C'C}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

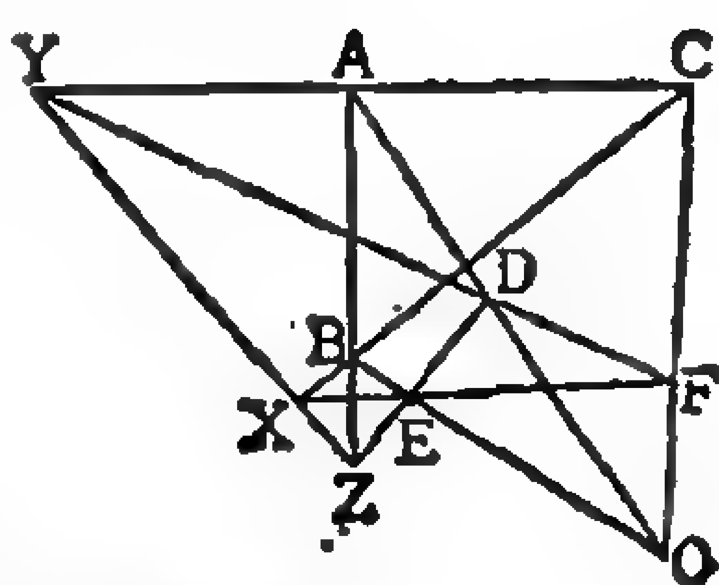
$$\frac{SB'}{B'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CC'}{C'S}=1.$$

把上面三式的两边分别相乘，得

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{BD}{DC}=1.$$

这表明 $\triangle ABC$ 被一条直线 EDF 所截得的结果。所以 F、D、E 在一条直线上。

1535. 设两个三角形 ABC、DEF 的边 BC、EF 的交点为 X；边 AC、DF 的交点为 Y；边 AB、DE 的交点为 Z，若 X、Y、Z 在一



条直线上，则 AD、BE、CF 相交于一点。

［笛沙格逆定理］

解 设 AD、BE 的交点为 O。由 CBX 是截 $\triangle ZAY$ 的直线，得

$$\frac{AB}{BZ}\cdot\frac{ZX}{XY}\cdot\frac{YC}{CA}=1.$$

同理，BEO 是截 $\triangle ZAD$ 的直线，

$$\therefore\quad \frac{ZB}{BA}\cdot\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DE}{EZ}=1,$$

FEX 是截 $\triangle ZDY$ 的直线，

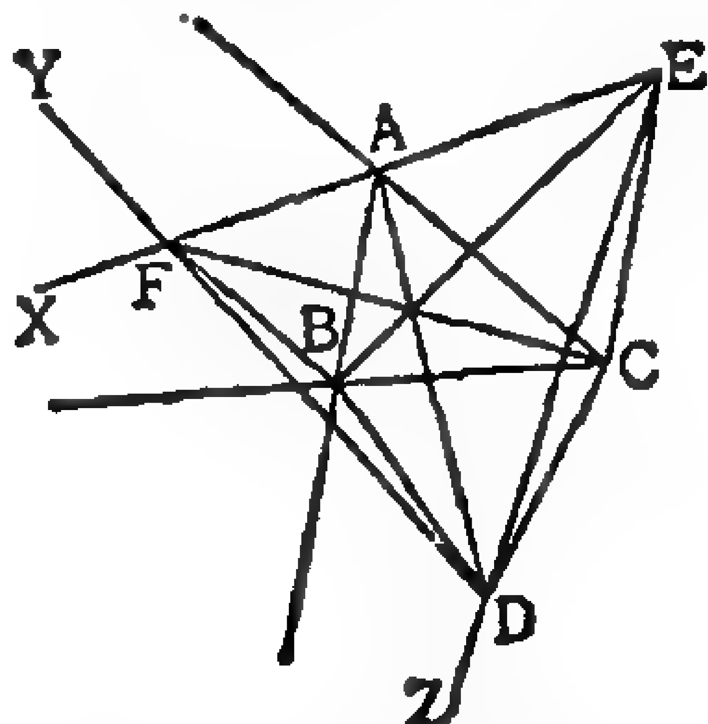
$$\frac{ZE}{ED}\cdot\frac{DF}{FY}\cdot\frac{YX}{XZ}=1.$$

把上面三式的两边分别相乘，得

$$\frac{YC}{CA}\cdot\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DF}{FY}=1.$$

这表明 $\triangle ADY$ 被一条直线 CFO 所截得的结果。所以 C、F、O 在一条直线上。由此可得，AD、BE、CF 相交于一点 O。

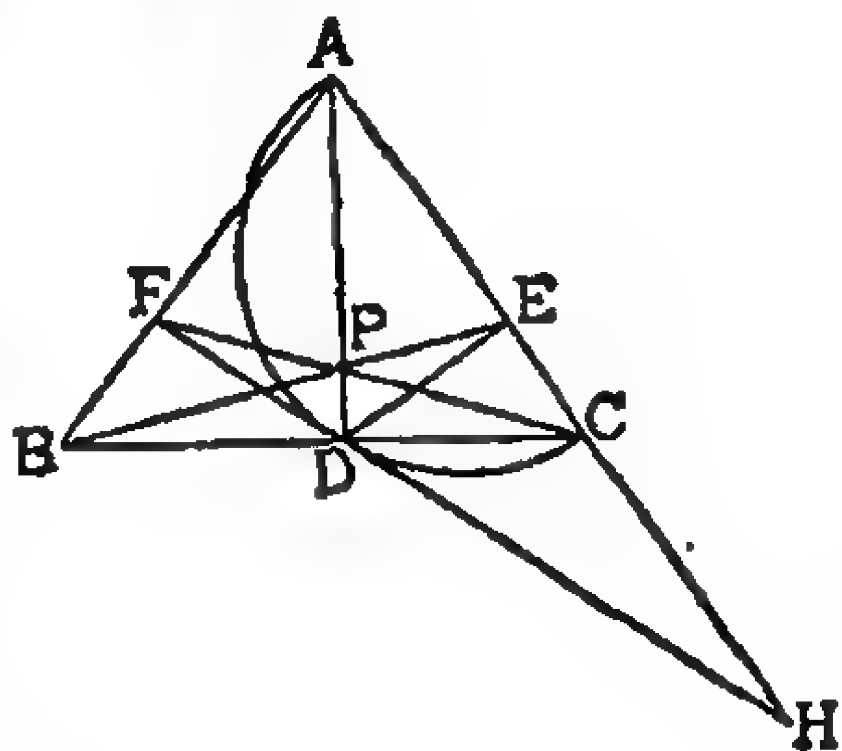
1536. 在 $\triangle ABC$ 的各边上向外侧作正三角形 BCD、CAE、ABF，则 EF 与 BC、FD 与 CA、DE 与 AB 的交点 X、Y、Z 在一条直线上。



解 根据问题 550 可知，AD、BE、CF 相交于一点。

在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中，因为 AD、BE、CF 相交于一点，所以 BC 与 EF、CA 与 FD、AB 与 DE 的交点 X、Y、Z 在一条直线上（由笛沙格定理）。

1537. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $AD\perp BC$，P 为 AD 上任意一点，延长 BP、CP 分别与 AC、AB 的交点为 E、F，则 $\angle ADE=\angle ADF$。



解 延长 FD 与 AC 的延长线交于点 H，则由直线 FDH 截 $\triangle ABC$，得

$$\frac{AH}{HC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=1. \qquad ①$$

又 AD、BE、CF 交于点 P，

$$\therefore\quad \frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=1. \qquad ②$$

由①、②，得

$$\frac{AH}{HC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

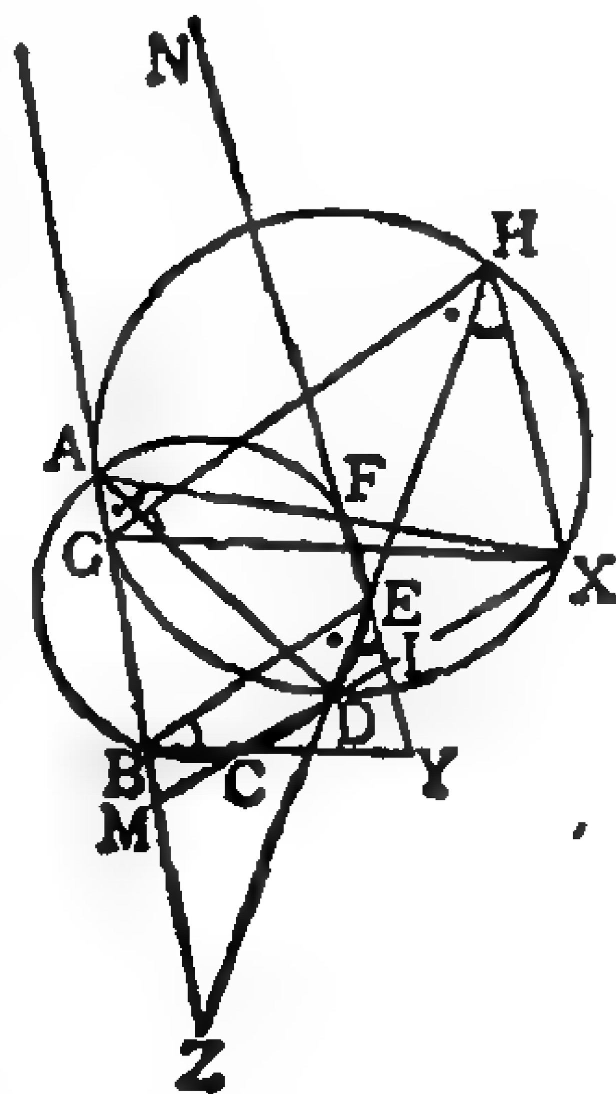
$$\therefore\quad HC:CE=AH:EA.$$

而 $\angle ADC=90^\circ$。根据问题 1483 可知，DA 是 $\triangle HDE$ 的外角 FDE 的平分线。

$$\therefore\quad \angle ADE=\angle ADF.$$

1538. 设圆内接六边形 $ABCDEF$ 的对边的延长线相交于三点 X、Y、Z，则这三点在一条直线上。

［帕斯卡定理］



解 设 FE、CD 的交点为 L，CD、AB 的交点为 M，FE、AB 的交点为 N，则 DE、AF、BC 都是 $\triangle LMN$ 的截线，所以

$$\frac{NE}{EL}\cdot\frac{LD}{DM}\cdot\frac{MZ}{ZN}=1,$$

$$\frac{LX}{XM}\cdot\frac{MA}{AN}\cdot\frac{NF}{FL}=1,$$

$$\frac{MB}{BN}\cdot\frac{NY}{YL}\cdot\frac{LC}{CM}=1.$$

把上面三式的两边分别相乘，且把 $LE\cdot LF=LD\cdot LC$，$MC\cdot MD=MB\cdot MA$，$NB\cdot NA=NE.NF$，代入后得

$$\frac{MZ}{ZN}\cdot\frac{LX}{XM}\cdot\frac{NY}{YL}=1.$$

这表明在 $\triangle LMN$ 中，点 X、Y、Z 在一条直线上。

别解 作圆 ADX，与 AZ、ZE 的交点分别为 G、H，则

$$\angle GHD=\angle GAD=\angle BED.$$

$$\therefore\quad GH\parallel BE.$$

$$\text{而}\quad \angle DHX=\angle DAX=\angle DEY,$$

$$\therefore\quad HX\parallel EY.$$

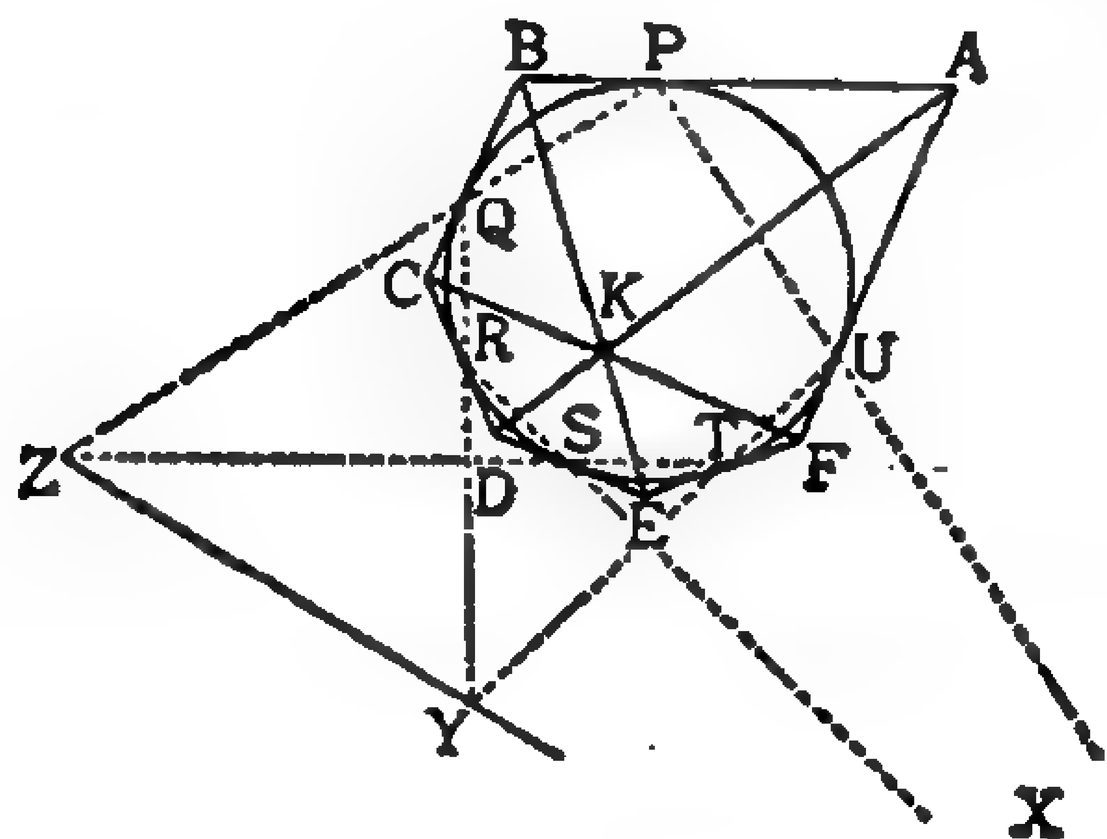
$$\text{又}\quad \angle HGX=\angle HDX=\angle EBY,$$

$\therefore\ GX \parallel BY.$

由此可知，$\triangle HGX$、$\triangle EBY$ 各边相互平行，从而得出，GB、HE、XY 相交于点 Z. 即 X、Y、Z 在一条直线上.

1539. 圆外切六边形 $ABCDEF$ 的相对顶点所连结的三条直线相交于一点.

[布利安深定理]



解 设边 AB、BC、CD、DE、EF、FA 切圆分别于 P、Q、R、S、T、U，则六边形 $PQRSTU$ 是圆内接六边形. 由帕斯卡定理可知，PU、RS 的交点 X，QR、UT 的交点 Y，PQ、TS 的交点 Z 在一条直线上. 但是，PU 是这圆关于点 A 的极直线，RS 是这圆关于点 D 的极直线，AD 是这圆关于点 X 的极直线(问题 **1498**). 同理，CF 是这圆关于点 Y 的极直线，AD、CF 的交点 K 的极直线在 XY 上. 从而 XY 上的点 Z 的极直线 BE 经过点 K(问题 **1497**).

1540. 若六边形 $ABCDEF$ 是圆内接六边形，且对角线 AD、BE、CF 交于一点，证明 $\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1.$

解 设对角线 AD、BE、CF 的交点为 O，则

$$\because\ \triangle AOB \backsim \triangle EOD,$$

$$\therefore\ \frac{AB}{DE}=\frac{AO}{EO}.$$

同理 $\because\ \triangle BOC \backsim \triangle FOE,$

$$\therefore\ \frac{EF}{BC}=\frac{EO}{CO}.$$

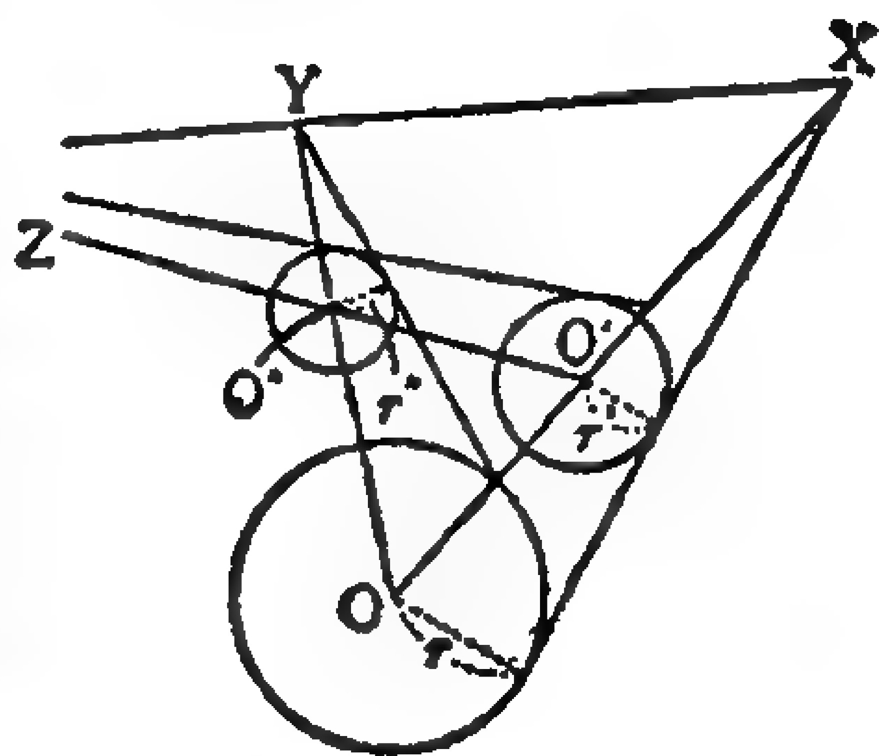
$$\because\ \triangle COD \backsim \triangle AOF,$$

$$\therefore\ \frac{CD}{FA}=\frac{CO}{AO}.$$

所以 $$\frac{AB}{DE}\cdot\frac{EF}{BC}\cdot\frac{CD}{FA}=\frac{AO}{EO}\cdot\frac{EO}{CO}\cdot\frac{CO}{AO}=1,$$

即 $$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1.$$

1541. 设三个圆 O、O'、O''(半径分别为 r、r'、r'')的两两的外公切线的交点为 X、Y、Z，则这三个交点 X、Y、Z 在一条直线上.



解 显然，$\frac{OX}{O'X}=\frac{r}{r'}$，$\frac{O'Z}{O''Z}=\frac{r'}{r''}$，

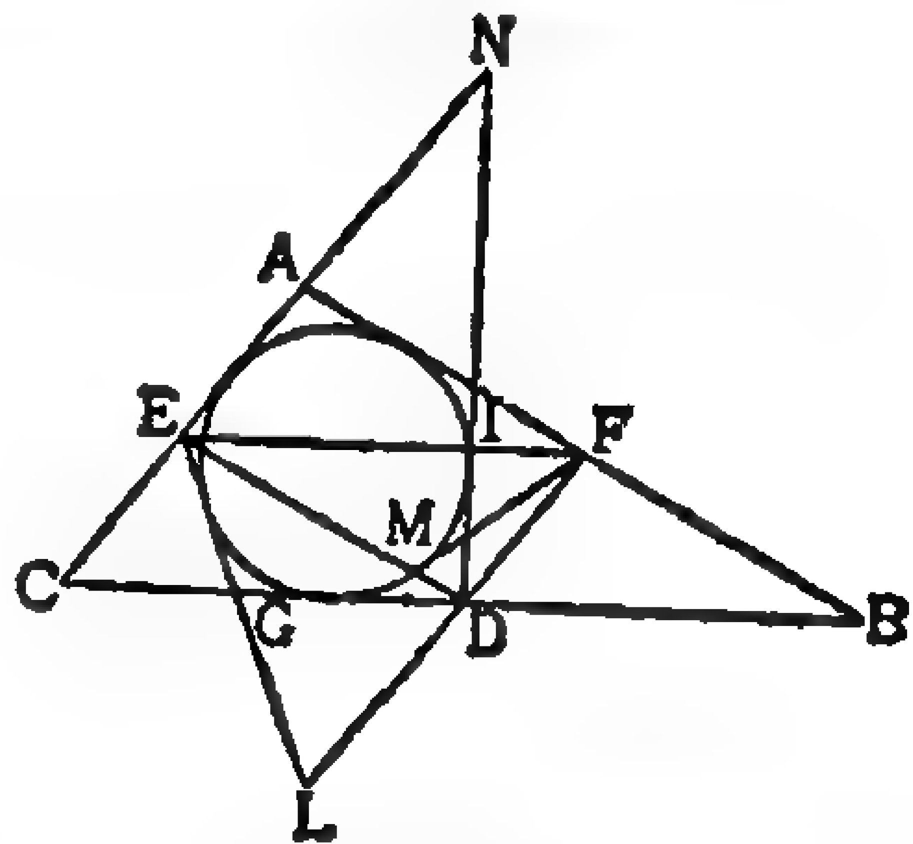
$$\frac{O''Y}{OY}=\frac{r''}{r}.$$

上面三式的两边分别相乘，得

$$\frac{OX}{O'X}\cdot\frac{O'Z}{O''Z}\cdot\frac{O''Z}{OY}=1.$$

这表明 XYZ 是截 $\triangle OO'O''$ 的直线. 所以 X、Y、Z 在一条直线上.

1542. 过 $\triangle ABC$ 的三边中点 D、E、F 向内切圆引切线，设所引的切线分别与 EF、FD、DE 交于 I、L、M，则 I、L、M 在一条直线上.



解 如果能够证明在 $\triangle EFD$ 中，

$$\frac{EI}{IF}\cdot\frac{FL}{LD}\cdot\frac{DM}{ME}=1,$$

那么 I、L、M 就在一条直线上了. 设 DI 与 CA 的交点为 N，则 $NE \parallel DF$.

$$\therefore\ \frac{EI}{IF}=\frac{EN}{DF}=\frac{CN-CE}{DF}. \quad ①$$

而 $$CE=\frac{1}{2}AC=DF.$$

设 $BC=a$, $CA=b$,
$AB=c$, $CD=a'$,
$CN=b'$, $DN=c'$,

则 $$a'=\frac{1}{2}a.$$

由①，得 $\frac{IE}{IF}=\frac{2b'-b}{b}$. ②

设 CD 与内切圆的切点为 G，在 $\triangle ABC$、$\triangle NCD$ 中，

$$CG=\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}(a'+b'-c'),\quad ③$$

又 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle NCD}=CA\cdot CB:CN\cdot CD$
$=ab:a'b'$.

而这两个相似三角形的内切圆相同。

$\therefore\ S_{\triangle ABC}:S_{\triangle NCD}$
$=(a+b+c):(a'+b'+c')$,

$$\therefore\ \frac{a'+b'+c'}{a+b+c}=\frac{a'b'}{ab}.\quad ④$$

在③、④中，$a'=\frac{1}{2}a$，求出 b'，

$$b'=\frac{2b\cdot(a-b)}{a+c-3b}.$$

代入②，得 $\frac{EI}{IF}=-\frac{a+b-3c}{a+c-3b}$.

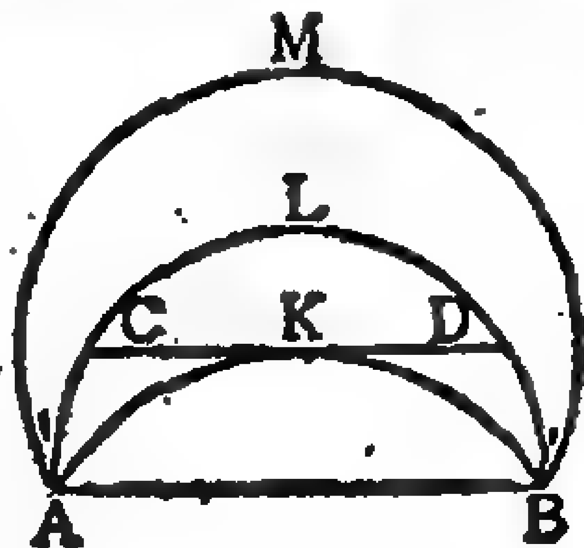
同理可得，$\frac{FL}{LD}=\frac{b+c-3a}{b+a-3c}$,

$$\frac{DM}{ME}=-\frac{c+a-3b}{c+b-3a},$$

$$\therefore\ \frac{EI}{IF}\cdot\frac{FL}{LD}\cdot\frac{DM}{ME}=1.$$

20. 圆、正多边形的比例线段

1543. 圆的弧是比围绕这弧且具有共同两端的任意线段都短。



解 设 AKB 为圆的弧，AB 为其弦。ALB、AMB、…为以 A，B 为两端围绕圆弧 AKB 的任意线。

引弧 AKB 的切线 CKD，则线 $ACKDB$ 比线 $ACLDB$ 短，从而得出 ALB 比 AKB 长。同理，围绕弧 AKB 的一切线都比 AKB 长。所以弧 AKB 最短。

1544. 半径相等的两个扇形 OAB、$O'A'B'$ 的面积的比等于弧长的比或圆心角的度量的比。

解 设 $\angle AOB$ 为 $n°$ 的圆心角，$\angle A'O'B'$ 为 $m°$ 的圆心角，则

$$\text{扇形 } OAB \text{ 的面积}=\frac{n\pi\cdot OB^2}{360},$$

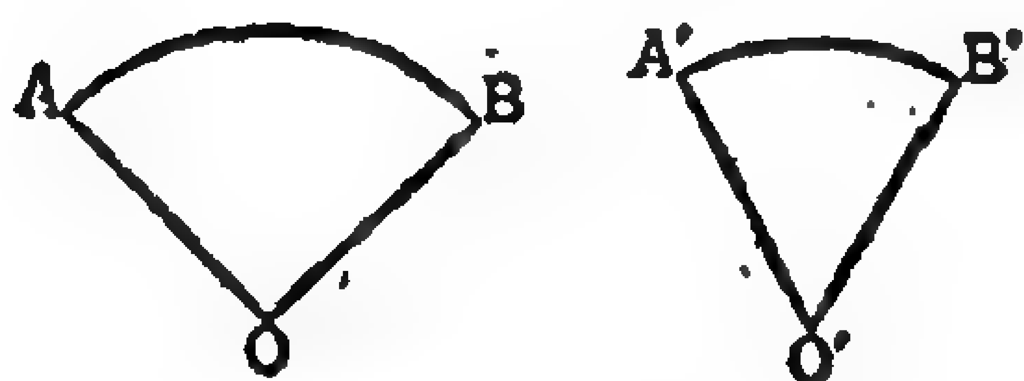
$$\text{扇形 } O'A'B' \text{ 的面积}=\frac{m\pi\cdot O'B'^2}{360}.$$

而 $OB=O'B'$.

$$\therefore\ \frac{\text{扇形 } OAB \text{ 的面积}}{\text{扇形 } O'A'B' \text{ 的面积}}=\frac{n}{m}.\quad ①$$

而 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度 $=\frac{n\pi\cdot OB}{180}$,

$$\overset{\frown}{A'B'} \text{ 的长度}=\frac{m\pi\cdot O'B'}{180}.\quad ②$$

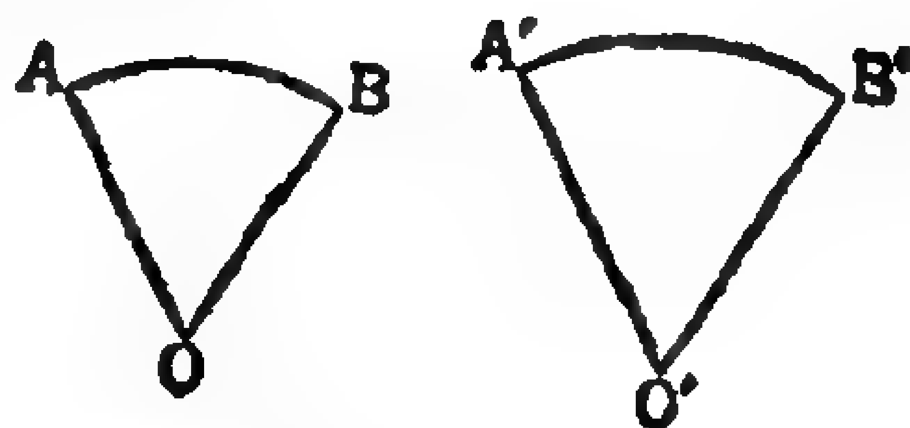


由①、②，得 $\frac{\overset{\frown}{AB}\text{ 的长度}}{\overset{\frown}{A'B'}\text{ 的长度}}=\frac{n}{m}$.

由此可得，

$$\frac{\text{扇形 } OAB \text{ 的面积}}{\text{扇形 } O'A'B' \text{ 的面积}}=\frac{n}{m}=\frac{\overset{\frown}{AB}\text{ 的长度}}{\overset{\frown}{A'B'}\text{ 的长度}}.$$

1545. 两个相似弧的比等于它们的半径的比。两个相似扇形面积的比等于它们的半径平方的比。



解 在扇形 OAB、$O'A'B'$ 中，设 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{A'B'}$ 是相似弧，则 $\angle O$ 与 $\angle O'$ 相等。设 $\angle O$ 为 $n°$，又圆 O 的周长为 $2\pi\cdot OA$，则

由 $\frac{\overset{\frown}{AB}}{2\pi\cdot OA}=\frac{n}{360}$ 可知，

$$\overset{\frown}{AB} \text{ 的长度}=\frac{n\pi\cdot OA}{180},\quad ①$$

同理可得，

$$\overset{\frown}{A'B'} \text{ 的长度}=\frac{n\pi\cdot O'A'}{180}$$

(因为 $\angle O'=\angle O$)。 ②

由①、②，得

$\overset{\frown}{AB}$ 的长度 : $\overset{\frown}{A'B'}$ 的长度 $=OA:O'A'$.

又 扇形 OAB 的面积 $=\frac{n\pi\cdot OA^2}{360}$,

扇形 $O'A'B'$ 的面积 $=\frac{n\pi\cdot O'A'^2}{360}$.

$$\therefore \quad \frac{\text{扇形}OAB\text{的面积}}{\text{扇形}O'A'B'\text{的面积}}=\frac{OA^2}{O'A'^2}.$$

1546. 两个圆的周长的比等于它们的半径之比；两个圆的面积的比等于它们的半径的平方比。

解 在两圆内作相似的内接正多边形，设 R、R' 为两圆的半径，P、P' 为两正多边形的周长，A、A' 为两正多边形的面积，则由两个多边形相似可得，

$$P:P'=R:R',$$
$$A:A'=R^2:R'^2.$$

显然，不论多边形的边数如何，这两个关系都成立。而当边数无限增加时，P 的极限是圆 O 的周长，P' 的极限是圆 O' 的周长，因为 $P:P'$ 等于定比 $R:R'$，所以它们的极限的比也等于这个定比 $R:R'$。

因此，设半径长为 R、R' 的两圆的周长分别为 C、C'，则

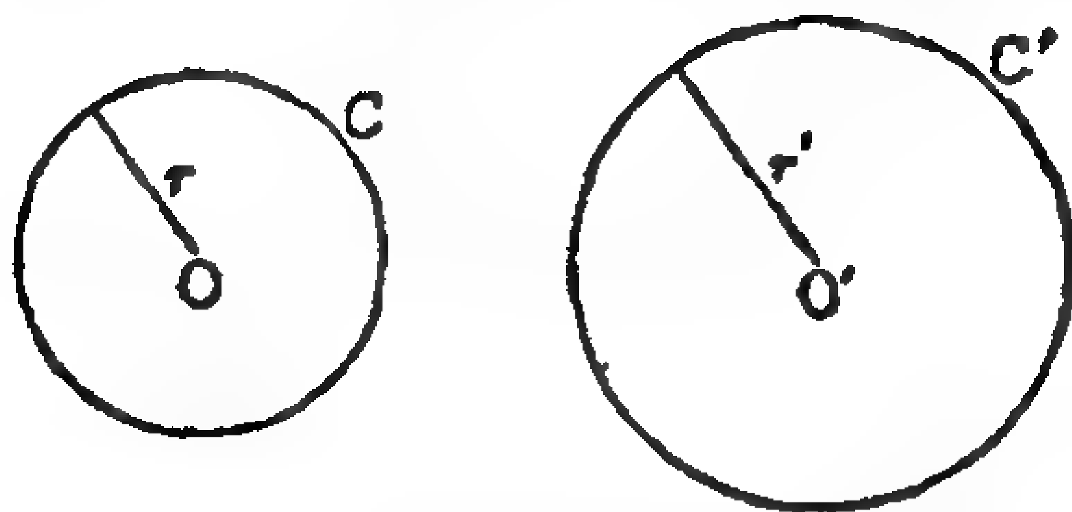
$$C:C'=R:R'.$$

同理，设 A 的极限是 S，A' 的极限是 S'，则

$$S:S'=R^2:R'^2.$$

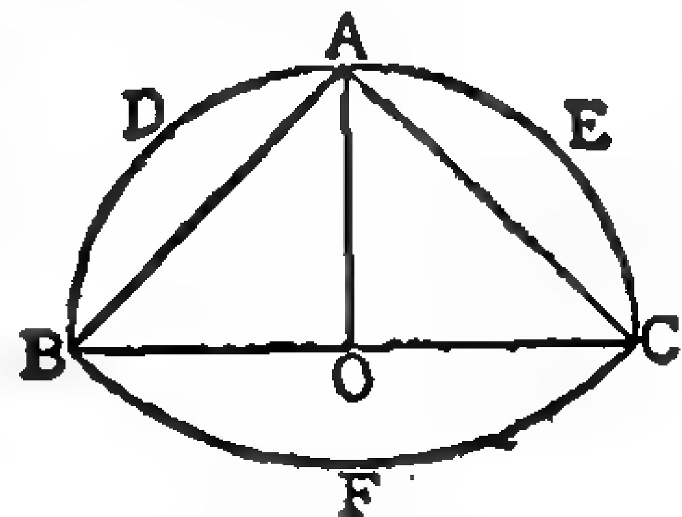
1547. 圆的周长与它的直径的比是定值。

解 由上题可知，$C:2r=C':2r'$。



这就是说，圆 O 的周长 C 与它的直径的比是定值。如把这个定比用 π 来表示，则得到以 $2r$ 为直径的圆的周长 $C=2\pi r$。

1548. 以直角等腰$\triangle ABC$的斜边 BC 为直径画半圆 $BDAEC$，又以 A 为圆心，AB 为半径画弧BFC，则弓形 BFC 的面积等于两个弓形 BDA 与 CEA 的面积的和。



解 设 BC 的中点为 O，连结 AO，则

$$\angle BAC=90^\circ=\angle AOB.$$

由此可得，弓形 BFC 的面积：弓形 BDA 的面积$=AB^2:AO^2=2:1$。即弓形 BDA 的面积等于弓形 BFC 的面积的一半。

而两个弓形 BDA 与 CEA 的面积相等，所以弓形 BFC 的面积等于两个弓形 BDA、CEA 的面积的和。

1549. 圆的面积等于圆周长与半径的乘积的一半。

解 作圆 O 的一个任意外切正多边形，设这个正多边形的面积为 T，它的周长为 P，由 O 向一边引垂线 OD，则 OD 为圆的半径 R，所以 $T=\frac{1}{2}P\times R$。

即 $$T:P=\frac{1}{2}R:1.$$

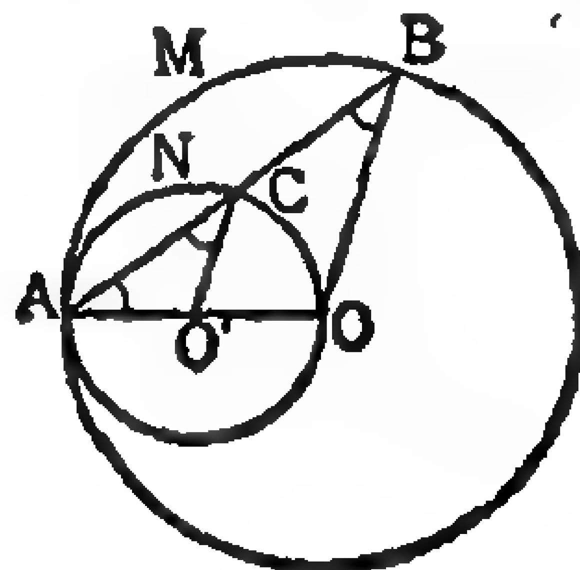
当正多边形的边数依次以 2 倍、4 倍、8 倍、16 倍、… $2n$ 倍增加时，则 T 的极限是圆的面积 S，P 的极限是圆的周长 C。

而 T 与 P 的比是一个定值 $\frac{1}{2}R$，所以它的极限的比也等于这个定值$\frac{1}{2}R$。即

$$S:C=\frac{1}{2}R:1,$$

或若 $$S=\frac{1}{2}C\times R.$$

1550. 过圆心为 O 的圆的弦 AB 的一端，以半径 OA 为直径作圆，则弦 AB 分割两圆所得的弓形面积的比等于 4:1。



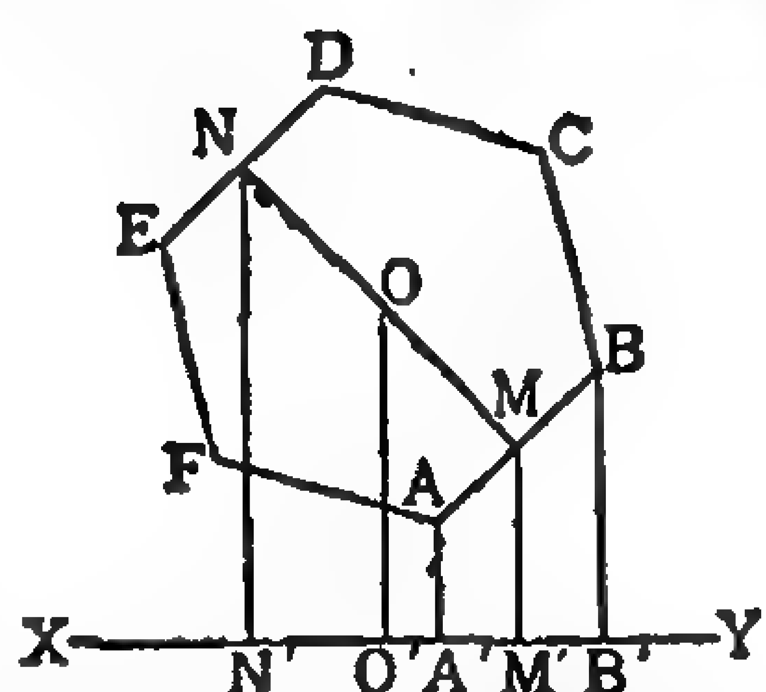
解 显然，OA 的中点 O' 是所作圆的圆心。设 AB 与圆 O' 的交点为 C，连结 $O'C$、OB，则

$$\angle OBA=\angle OAB=\angle O'CA.$$
$$\therefore \quad \angle AOB=\angle AO'C.$$

由此可得，弓形 AMB 的面积：弓形 ANC 的面积$=OA^2:O'A^2=OA^2:\left(\frac{1}{2}OA\right)^2=4:1$。

1551. 由正 $2n$ 边形的各顶点向不与多边

形相交的任意一条直线作垂线，则这些垂线长的和等于由中心O向这条直线作垂线长的$2n$倍。



解 设边数是偶数的正多边形为$ABCDEF$，AB、DE的中点分别为M、N，从A、B、M向任意直线XY作垂线AA'，BB'，MM'，A'、B'、M'为垂足，则

$$AA'+BB'=2MM'. \quad ①$$

同理，从E、D、N向XY作垂线EE'、DD'、NN'，E'、D'、N'为垂足，则

$$EE'+DD'=2NN'. \quad ②$$

因为O是MN的中点，从O向XY作垂线OO'，则

$$2MM'+2NN'=4OO'. \quad ③$$

又从F、C向XY作垂线FF'、CC'，F'、C'为垂足，则

$$FF'+CC'=2OO'. \quad ④$$

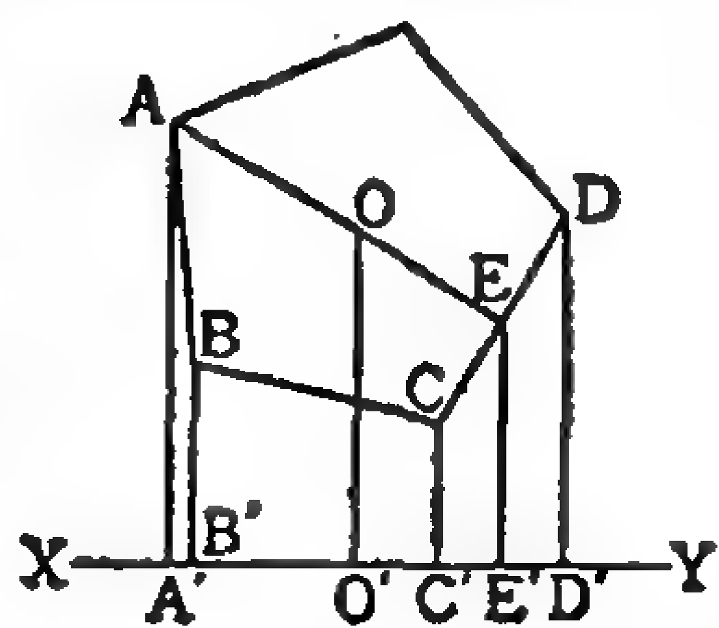
③+④，得

$$AA'+BB'+CC'+DD'+EE'+FF'=6OO'.$$

同理可得，当边数为$2n$时，则

$$AA'+BB'+CC'+\cdots=2n\cdot OO'.$$

1552. 由边数为n的正多边形$ABCD\cdots$的各顶点向不与多边形相截的一条直线XY作垂线AA'、BB'、CC'、…的和，等于由多边形的中心O向XY作垂线OO'的n倍。



解 当n为偶数时，上题已作了证明。

现证明n为奇数时的情况。

设CD的中点为E，设$\dfrac{AO}{OE}=\dfrac{p}{q}$，则

$$\frac{AA'-OO'}{OO'-EE'}=\frac{AO}{OE}=\frac{p}{q}.$$

$$\therefore\quad pEE'+qAA'=(p+q)\cdot OO'.$$

又在梯形$CDD'C'$中，

$$CE=ED,\ EE'\parallel DD',$$

$$\therefore\quad EE'=\frac{1}{2}(CC'+DD').$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}p\cdot(CC'+DD')+qAA'=(p+q)\cdot OO'.$$

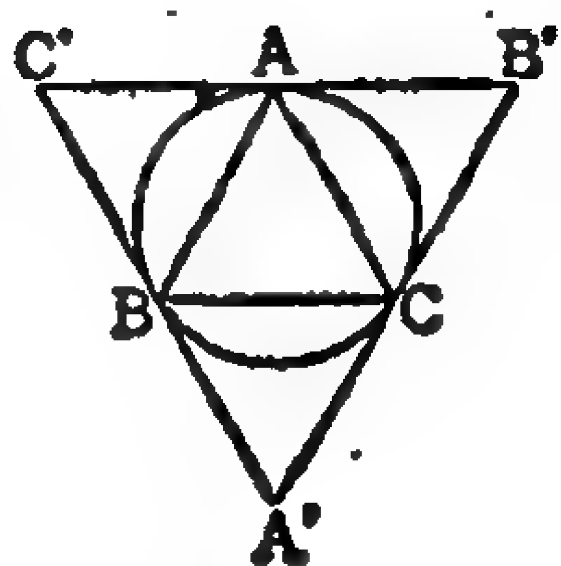
同理可得，把n个这样的式子相加，得

$$\frac{1}{2}p(AA'+BB'+CC'+\cdots+AA'+BB'+CC'+\cdots)+q\cdot(AA'+BB'+CC'+\cdots)=n\cdot(p+q)\cdot OO'.$$

$$\therefore\quad (p+q)\cdot(AA'+BB'+CC'+\cdots)=n\cdot(p+q)\cdot OO',$$

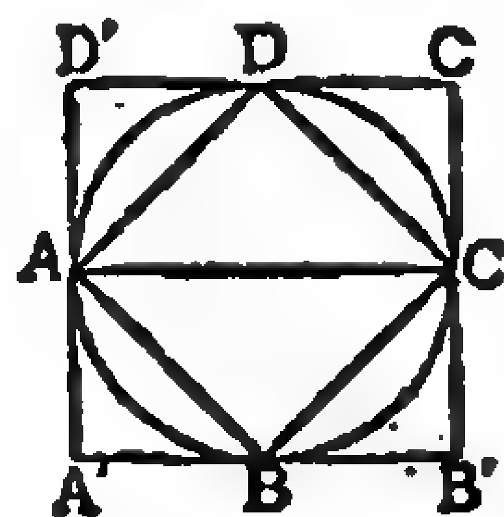
即 $AA'+BB'+CC'+\cdots=n\cdot OO'$.

1553. 圆内接的正三角形、正方形、正六边形的面积分别等于这个圆的外切正三角形、正方形、正六边形的面积的$\dfrac{1}{4}$、$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{3}{4}$。



解 设ABC、$A'B'C'$是圆内接与外切正三角形，A、B、C为切点，则外切正三角形与内接正三角形的边长的比等于$2:1$。由此可得，它们的面积的比等于$2^2:1^2$，即等于$4:1$。

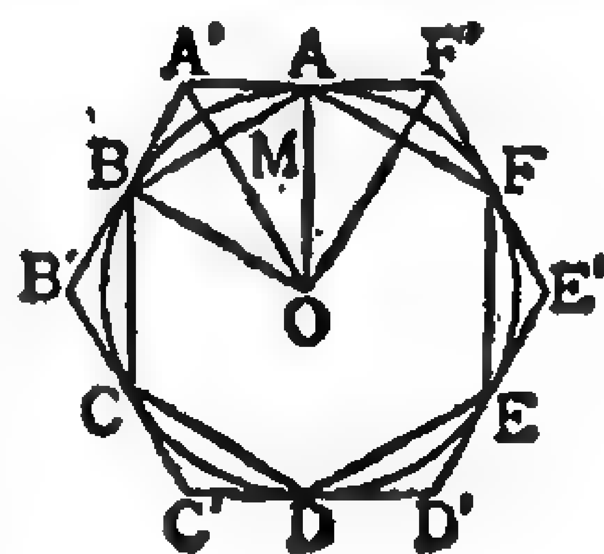
所以，圆内接正三角形的面积是圆外切正三角形的面积的四分之一。



又，设圆内接正方形为$ABCD$，圆外切正方形为$A'B'C'D'$，切点分别为A、B、C、D，则圆外切正方形的边长等于圆内接正方形的对角线AC。

由此可得，正方形$A'B'C'D'$的面积:正方形$ABCD$的面积$=AC^2:AB^2=2AB^2:AB^2=2:1$。

所以，圆内接正方形的面积是圆外切正方形的面积的二分之一。



再设圆内接正六边形为$ABCDEF$，圆外切正六边形为$A'B'C'D'E'F'$，切点为A、B、C、D、E、F，取圆心为O，连结

OA、OB、OA'、OF'，设 OA' 与 AB 的交点为 M，则 $\triangle OAB$、$\triangle OA'F$ 都是正三角形，它们面积的比等于高的平方的比，即 $OM^2:OA^2$。

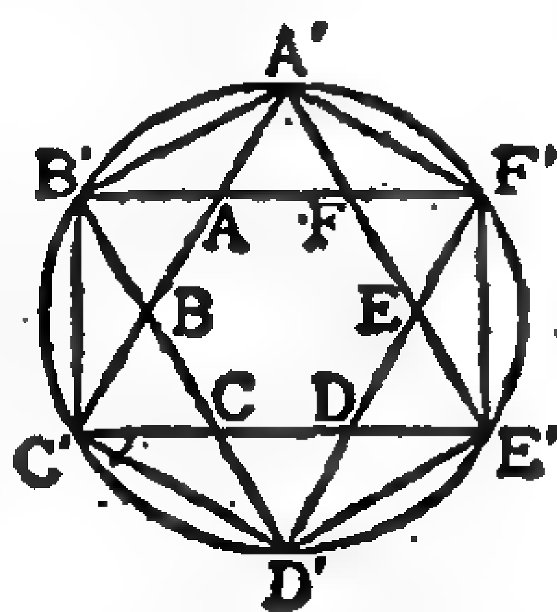
又正六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 的面积与 $ABCDEF$ 的面积分别是正三角形 $OA'F'$ 的面积与 OAB 的面积的六倍。所以，正六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 的面积:正六边形 $ABCDEF$ 的面积$=OA^2:OM^2$。

而 $OM=\frac{\sqrt{3}}{2}OA$，或 $OM^2=\frac{3}{4}OA^2$。

$$\therefore\quad OA^2:OM^2=OA^2:\frac{3}{4}OA^2=4:3.$$

所以，圆内接正六边形的面积是外切正六边形的四分之三。

1554. 把正六边形 $ABCDEF$ 的各边延长，并把所得的交点顺次连结起来得到一个新的正六边形，则这两个正六边形面积的比等于 3:1.



解 设正六边形 $ABCDEF$，延长各边得到交点 A'、B'、C'、D'、E'、F'，则六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 显然是一个正六边形。

而 $\triangle A'AF$、$\triangle B'BA$、…都是全等的正三角形。由此可得 $B'A=AF=FF'$。

又 $\triangle A'B'F'$、$\triangle A'FF'$ 显然是相似的。

$$\therefore\quad B'F':A'F'=A'F':FF'.$$

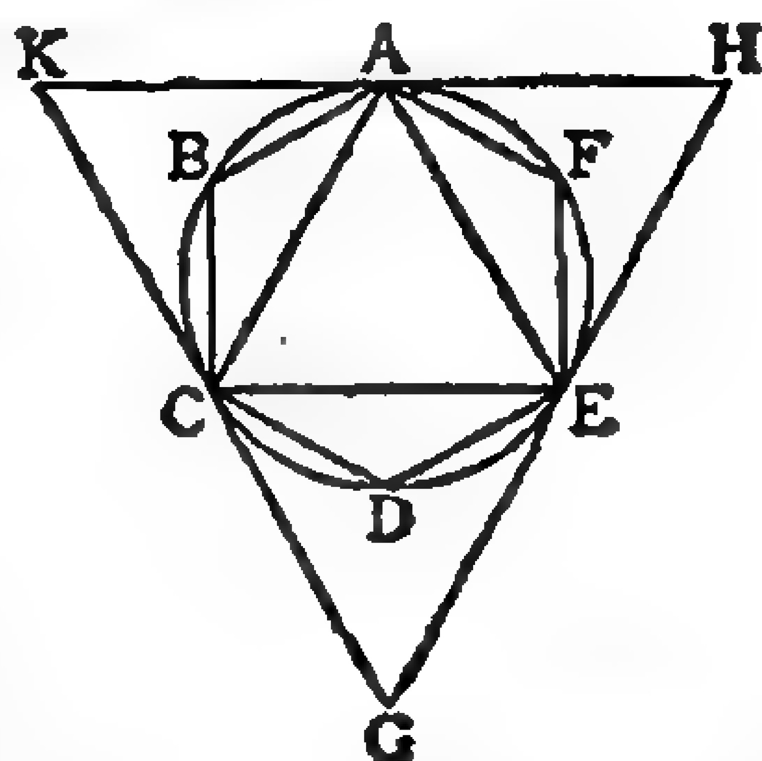
$$\therefore\quad B'F':FF'=A'F'^2:FF'^2.$$

而 $$B'F':FF'=3:1.$$

$$\therefore\quad A'F'^2:FF'^2=3:1.$$

又这两个正六边形的面积的比等于 $A'F'^2:FF'^2$。所以它们面积的比是 3:1.

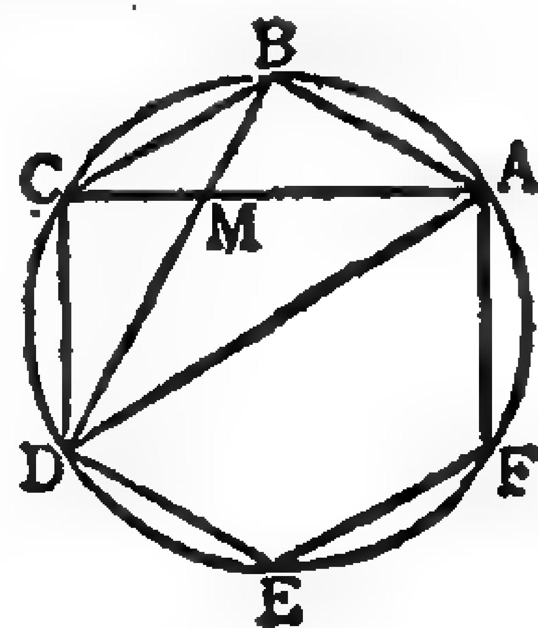
1555. 圆内接正六边形的面积是这圆的内接正三角形的面积与外切正三角形的面积的比例中项。



解 因为$\triangle GHK$ 的面积是 $\triangle ACE$ 的面积的 4 倍，正六边形 $ABCDEF$ 的面积是 $\triangle ACE$ 的面积的 2 倍，所以，

$$\frac{\triangle GHK\text{ 的面积}}{\text{正六边形 }ABCDEF\text{ 的面积}}=\frac{\text{正六边形 }ABCDEF\text{ 的面积}}{\triangle ACE\text{ 的面积}}.$$

1556. 正六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AC、BD 是按 2:1 互分。



解 设 AC、BD 的交点为 M，连结 AD，则 AD 是这正六边形的外接圆的直径。又圆内接正六边形的边长等于半径，即 $AD=2BC$。

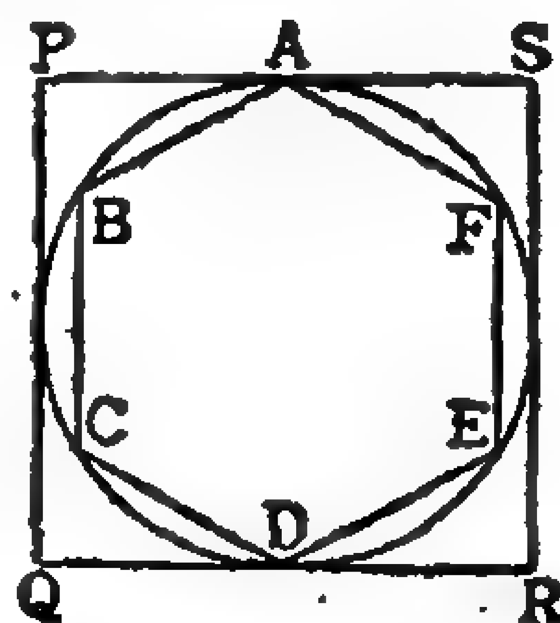
$$\because\quad AB=CD\quad\therefore\quad AD\parallel BC.$$

由此可得，

$$AM:MC=DM:MB=AD:BC$$
$$=2BC:BC=2:1.$$

即对角线是按 2:1 互分。

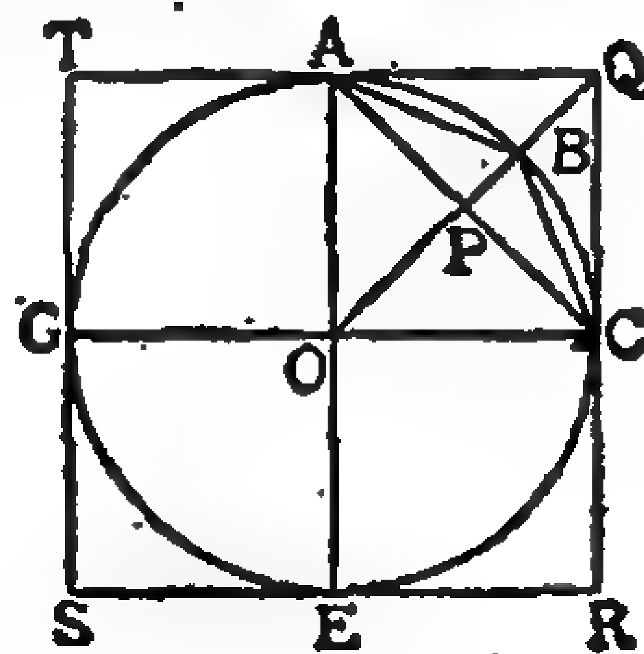
1557. 根据圆内接正六边形和外切正方形，证明圆周率 π 的值在 3 与 4 之间。



解 很明显，圆的周长大于圆的内接正六边形的周长，圆外切正方形的周长大于圆内接正六边形的周长。

而圆的内接正六边形的周长等于圆的直径的三倍，圆外切正方形的周长等于直径的四倍。所以圆的周长与直径的比的比值 π 是大于 3 而小于 4。即圆周率 π 在 3 与 4 之间。

1558. 圆内接正八边形的面积是这个圆内接正方形的面积与外切正方形的面积的比例中项。



解 设圆 O 的互相垂直的两条直径为 AE、CG，过切点 A、C、E、G 分别引切线，这四条切线所围成的四边形 $QRST$ 是圆 O 的外切正方形。AC 是内接正方形的一边。设 OQ 与弧 AC 的交点为 B，与弦 AC 的交点为 P，则 AB 是圆内接正八边形的一边。而内接正八边形的面积是 $\triangle AOB$ 的面积的八倍。因此，内接正八边形的面积

$$S=8\times\frac{1}{2}AP\cdot OB=4AP\cdot OB$$

$=2AP\cdot 2OB=AC\cdot QR$.

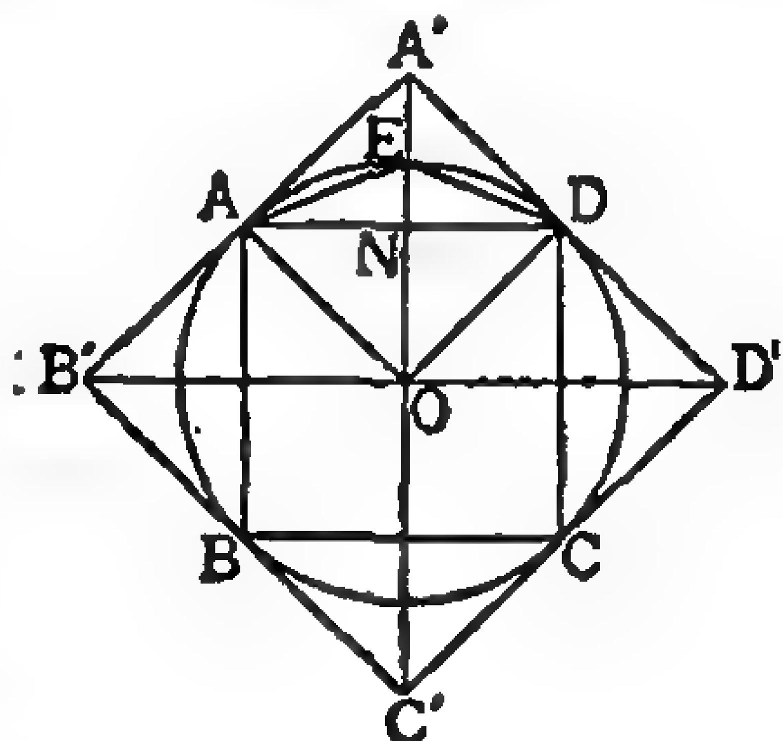
设内接正方形的面积为 S_1，外切正方形的面积为 S_2，则

$$S_1=AC^2,\ S_2=QR^2.$$

$$\therefore\quad S^2=S_1\cdot S_2,$$

由此可得，$S_1:S=S:S_2$.

1559. 圆内接正八边形的面积，等于以圆内接正方形的一边与外切正方形一边为两邻边的矩形面积。



解　设 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 分别是圆 O 的内接与外切正方形，OA' 交 AD 于点 N，交弧 $\widehat{AD}$ 于 E. 连结 DE，则 DE 是内接正八边形的一边。由此可知，正八边形的面积 S 是四边形 $OAED$ 的面积的四倍，即

$$S=4\left(\frac{1}{2}AD\cdot OE\right)=2AD\cdot OE.\qquad ①$$

而 AD 是内接正方形的一边，$2OE=2OD=A'B'$.

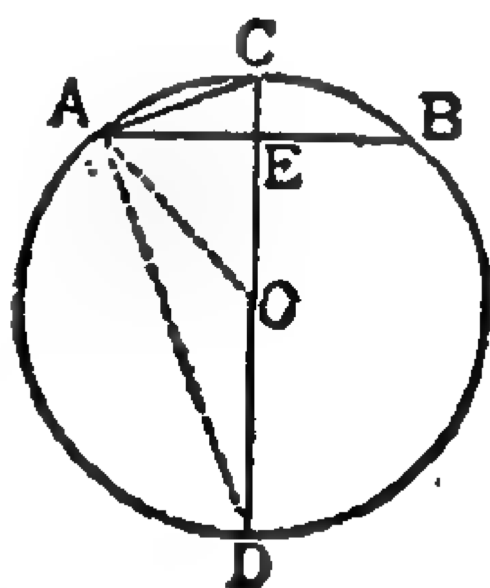
所以，由①，得

正八边形的面积 $S=AD\cdot A'B'$.

1560. 设半径为 R 的圆 O 的内接正 n 边形，它的一边长为 a，又这圆的内接正 $2n$ 边形的一边长为 a'，则

$$a'^2=R\cdot(2R-\sqrt{4R^2-a^2}),$$

$$a^2=\frac{a'^2\cdot(4R^2-a'^2)}{R^2}.$$



解　设圆内接正 n 边形的一边为 AB，圆内接正 $2n$ 边形的一边为 AC，根据假设，得 $AB=a$，$AC=a'$.

连结 CO，并延长 CO 与圆交于点 D，又设 AB、CD 的交点为 E，则 $AB\perp CD$.

连结 AO、AD，在直角三角形 ACD 中，

$$\because\quad AE\perp DC,$$

$$\therefore\quad AC^2=CD\cdot CE.$$

而 $CE=CO-EO=CO-\sqrt{OA^2-AE^2}$

$$=R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}.$$

代入上式，得

$$AC^2=CD\cdot\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}\right).$$

$$\therefore\quad a'^2=2R\cdot\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}\right).$$

$$\therefore\quad a'^2=R\cdot(2R-\sqrt{4R^2-a^2}).$$

又　$AE^2=CE\cdot ED=CE\cdot(2R-CE)$.　①

$$\because\quad AC^2=CE\cdot CD,$$

$$\therefore\quad CE=\frac{AC^2}{CD}=\frac{a'^2}{2R}.$$

代入①式，得

$$AE^2=\frac{a'^2}{2R}\left(2R-\frac{a'^2}{2R}\right)$$

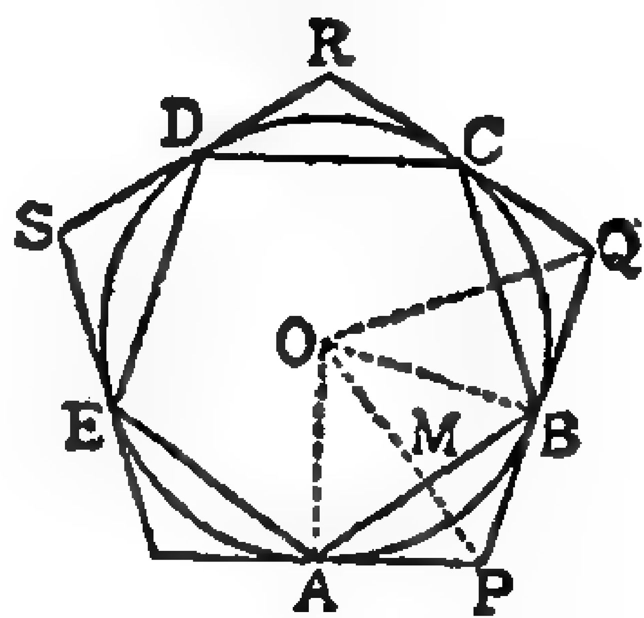
$$=\frac{a'^2(4R^2-a'^2)}{4R^2},$$

$$\therefore\quad 4AE^2=\frac{a'^2(4R^2-a'^2)}{R^2}.$$

$$\therefore\quad a^2=\frac{a'^2(4R^2-a'^2)}{R^2}.$$

1561. 设半径为 R 的圆 O 的内接正多边形的一边长为 a，边数相同的外切正多边形的一边长为 a'，则

$$a'=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}},\quad a=\frac{2a'R}{\sqrt{4R^2+a'^2}}.$$



解　设圆内接正多形 $ABC\cdots$ 的一边为 AB，边数相同的外切正多边形 $PQR\cdots$ 的一边为 PQ，则 $AB=a$，$PQ=a'$. 连结 OA、OP、OB、OQ，则 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OPQ$，因为对应角相等而相似。

$$\therefore\quad AB:PQ=OA:OP,$$

即　$a:a'=R:OP$.

而　$OP=\sqrt{OA^2+PA^2}$

$$=\sqrt{R^2+\frac{a'^2}{4}}=\frac{\sqrt{4R^2+a'^2}}{2}$$

$$\therefore\quad a:a'=R:\frac{\sqrt{4R^2+a'^2}}{2},$$

即　$a=\dfrac{2a'R}{\sqrt{4R^2+a'^2}}$.

又由 $\triangle AOB\backsim\triangle OPQ$，得

$$AB:PQ=OM:OB,$$

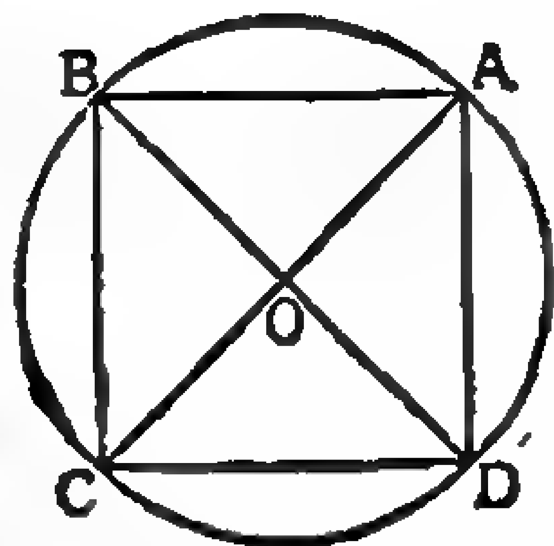
即 $$a:a'=OM:R.$$

而 $$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}$$
$$=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2},$$

$$\therefore\quad a:a'=\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}:R.$$

即 $$a'=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}.$$

1562. 设半径为 R 的圆内接正八边形的一边为 a'，则 $a'=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.



解 半径为 R 的圆的内接正方形的一边长是 $\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt{2}R$，则根据问题 **1560**，只要把式中的 a 用 $\sqrt{2}R$ 代入，即可求出圆内接正八边形的一边长 a'.

所以，正八边形一边的长 a' 用 R 的表达式是：

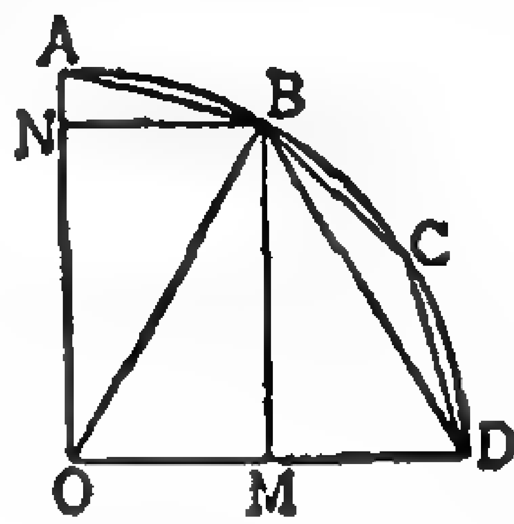
$$a'^2=R\cdot(2R-\sqrt{4R^2-2R^2})$$
$$=R\cdot(2R-R\sqrt{2})=R^2\cdot(2-\sqrt{2}).$$
$$\therefore\quad a'=R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

1563. 假设半径为 R 的圆的内接正十二边形的一边长为 a'，则 $a'=R\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

解 因为圆内接正六边形的一边长等于圆的半径，在问题 **1560** 的结论中，用 $a=R$ 代入，则正十二边形的一边长 a' 可用 R 表示出来．与上题一样，得

$$a'^2=R\cdot(2R-\sqrt{4R^2-R^2})$$
$$=R\cdot(2R-\sqrt{3R^2})=R^2\cdot(2-\sqrt{3}).$$
$$\therefore\quad a'=R\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

1564. 圆的内接正十二边形的面积等于半径上正方形面积的三倍．



解 设 $ABC\cdots L$ 是圆心为 O 的圆内接正十二边形，连结 OB、BD．从 B 向 OD 作垂线 BM，M 是垂足，则弧 BCD 是圆周长的六分之一．

$$\therefore\quad \angle BOD=\frac{1}{6}\times 360^\circ=60^\circ.$$

由此可知，$\triangle OBD$ 是正三角形．所以，M 是 OD 的中点．而 OM 等于从 B 向 OA 作垂线 BN.

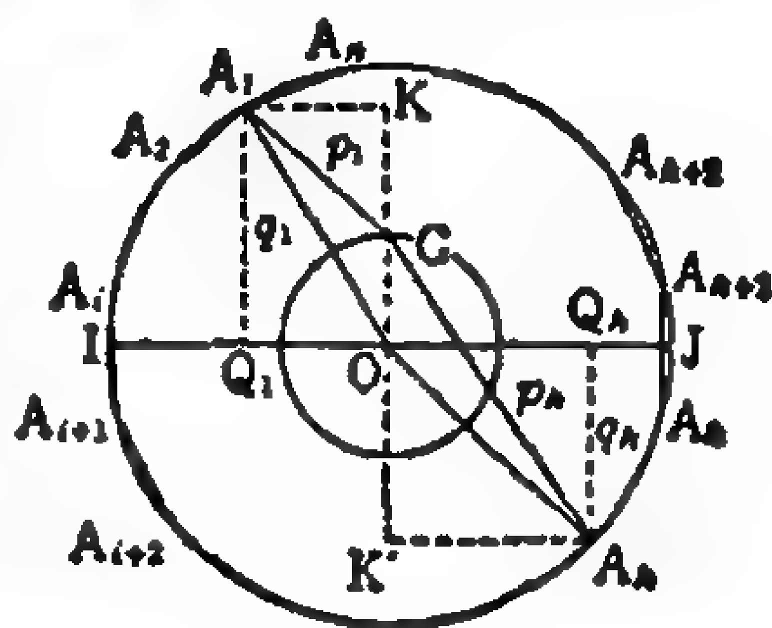
$$\therefore\quad 2S_{\triangle OAB}=OA\cdot OM$$
$$=OD\cdot\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}OD^2.$$

由此可知，圆内接正十二边形的面积就是 $\triangle OAB$ 面积的 12 倍，等于

$$6\times\frac{1}{2}OD^2=3OD^2.$$

1565. 以正 n 边形外接圆的任意同心圆上的点，与正 n 边形的各顶点连结的线段为一边的正方形面积的和，等于以这两圆半径分别为一边的正方形面积的和的 n 倍．

解 设同心圆上的任意一点 G，G 与正 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的各顶点的连结线段为 $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$．又同心圆的圆心为 O，正 n 边形的外接圆半径为 R，同心圆的半径为 r，



过 O 作与 OG 垂直的直径 IJ，由 A_1 向 IJ、OG 引垂线，垂足分别为 Q_1、K，则 $OK=A_1Q_1$.

又，由问题 **902** 可知，在 $\triangle GA_1O$ 中，$A_1G^2=OA_1^2+OG^2-2\cdot OG\cdot A_1Q_1$，这里，用 q_k 表示 A_kQ_k，则 $p_1^2=R^2+r^2-2r\cdot q_1$.

又在 IJ 上取关于 A_1 的异侧的任意顶点 A_k，由 A_k 向 IJ 作垂线，垂足为 Q_h，在 $\triangle GA_hO$ 中

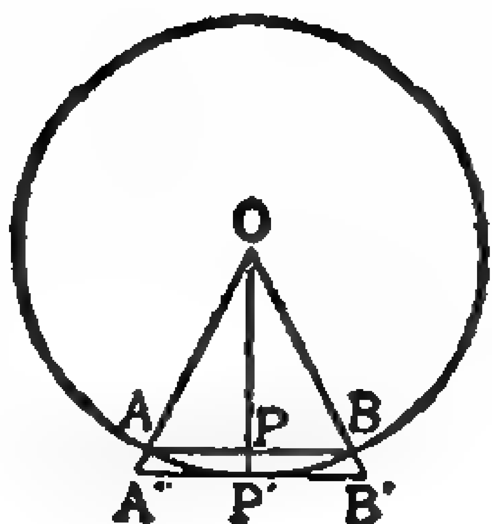
$$A_hG^2=OA_h^2+OG^2+2OG\cdot A_hQ_h.$$
$$\therefore\quad p_h^2=R^2+r^2+2r\cdot q_h.$$
$$\therefore\quad p_1^2+p_2^2+\cdots+p_h^2$$
$$=n(R^2+r^2)-2r(q_1+q_2+\cdots+q_i+q_{k+1}+\cdots+q_n)$$
$$+2r(q_{i+1}+\cdots+q_h+\cdots+q_k).$$

而 O 是正 n 边形的重心，IJ 经过重心．

$$\therefore\quad q_1+q_2+\cdots+q_i+q_{k+1}+\cdots+q_n$$
$$=q_{i+1}+\cdots+q_h+\cdots+q_k,$$
$$\therefore\quad p_1^2+p_2^2+\cdots+p_n^2=n\cdot(R^2+r^2).$$

1566. 设作一个圆的内接与外切的边数相同，都是 n 的正多边形，则它们的面积的差总小于内接正多边形的一个边长的平方．其中 $n\geqslant 5$.

解 设 AB 是圆内接正 n 边形的一边，O 是圆心。连结 OA、OB，作 $\angle AOB$ 的平分线与圆交于 P'，OP' 为圆的半径，交 AB 于 P，过 P' 作切线与 OA、OB 的延长线分别交于 A'、B'，这时 $A'B'$ 是外切正 n 边形的一边。



设内接、外切正 n 边形的面积分别为 S、S'，则

$$S_{\triangle OAB}=\frac{S}{n},\quad S_{\triangle OA'B'}=\frac{S'}{n}.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OA'B'}=S:S'.$$

而 $$S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OA'B'}=OA^2:OA'^2,$$

即 $$S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OA'B'}=OP^2:OP'^2.$$

$$\therefore\quad S:S'=OP^2:OP'^2=OP^2:OA^2.$$

$$\therefore\quad (S'-S):S'=(OA^2-OP^2):OA^2,$$

$$(S'-S):S'=AP^2:OA^2,$$

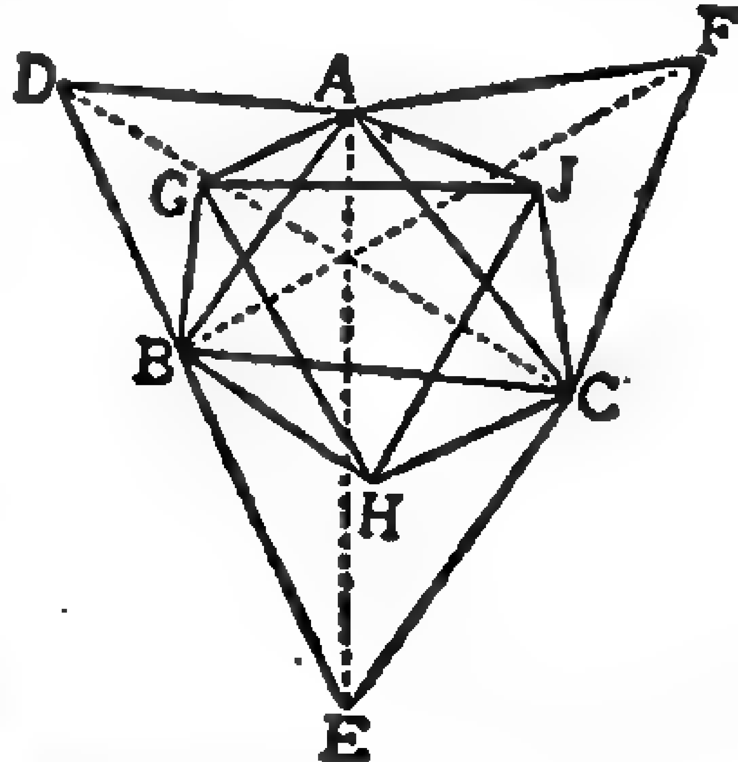
$$(S'-S):S'=4AP^2:4OA^2.$$

$$\therefore\quad (S'-S):S'=AB^2:d^2.$$

（其中 d 表示直径）。

而 $n\geqslant 5$。因为外切正 n 边形的面积 S' 比直径上的正方形面积 d^2 小，所以 $S'-S$ 也比 AB^2 小。

1567． 在任意 $\triangle ABC$ 的各边上分别向外侧及内侧作正三角形，则连结外侧正三角形、内侧正三角形的外接圆的圆心作出的两个正三角形的面积的差等于 $\triangle ABC$ 的面积。



解 设外侧的正三角形为 $\triangle ABD$、$\triangle BCE$、$\triangle CAF$，它们的外接圆的圆心分别为 G、H、J，则由 $\angle EBH=30^\circ=\angle ABG$，得

$$\angle EBA=\angle HBG.$$

又 $\triangle BCE$、$\triangle ABD$ 是正三角形，所以

$$EB^2=3BH^2,\ AB^2=3BG^2.$$

$$\therefore\quad EB:AB=BH:BG.$$

$$\therefore\quad \triangle EBA\backsim\triangle HBG.$$

$$\therefore\quad EB^2:EA^2=BH^2:HG^2.$$

而 $EB^2=3BH^2$． $\therefore\ EA^2=3GH^2$．

又设 $\triangle ABC$ 的内侧正三角形为 $\triangle ABD'$、$\triangle BCE'$、$\triangle CAF'$，它们的外接圆的圆心分别为 G'、H'、J'，则与上面完全一样可得，$AE'^2=3G'H'^2$，

$$\therefore\quad AE^2-AE'^2=3(GH^2-G'H'^2).$$

设正三角形 GHJ、$G'H'J'$ 的面积分别为 P、P'，则

$$P=\frac{\sqrt{3}}{4}GH^2,\ P'=\frac{\sqrt{3}}{4}G'H'^2,$$

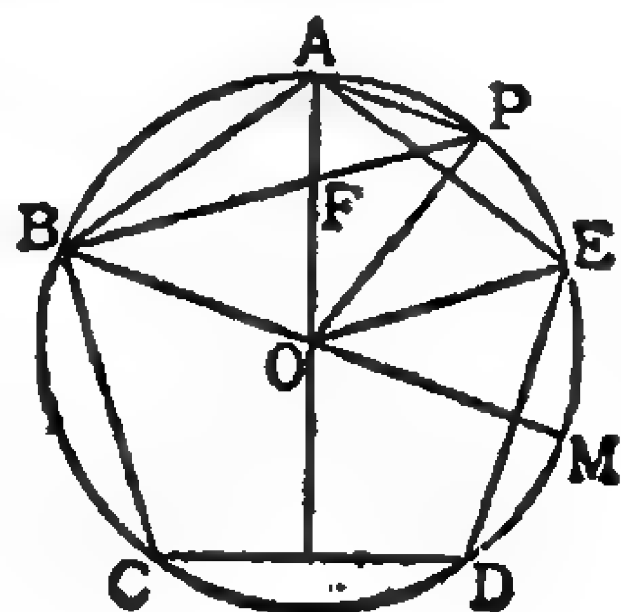
$$\therefore\quad 4\sqrt{3}(P-P')=3(GH^2-G'H'^2).$$

又设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，则由问题 **888**，得

$$4\sqrt{3}S=AE^2-AE'^2.$$

$$\therefore\quad P-P'=S.$$

1568． 边数为奇数的多边形内的一点与各顶点连结成线段，设延长这些线段把对边分成两段，则间隔取一段的积等于另一段的积。



解 设 $ABCDE$ 为边数是奇数的多边形，在多边形内任取一点 O，连结 AO、BO、CO、DO、EO，并延长这些线段，使分别与对边交于 A'、B'、C'、D'、E'。又连结 AC、AD，则

$$\frac{A'D}{A'C}=\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle ACC}}\text{（问题 1452）}.$$

同理，连结 BE、BD、CE、CA、DA，得

$$\frac{B'E}{B'D}=\frac{S_{\triangle EOB}}{S_{\triangle BOD}},\quad \frac{C'A}{C'E}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle EOC}},$$

$$\frac{D'B}{D'A}=\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle DOA}},\quad \frac{E'C}{E'B}=\frac{S_{\triangle COE}}{S_{\triangle BOE}}.$$

把上面五个等式的两边分别相乘，且化简后得

$$A'D\cdot B'E\cdot C'A\cdot D'B\cdot E'C$$
$$=A'C\cdot B'D\cdot C'E\cdot D'A\cdot E'B.$$

这个证明对任意奇数边的多边形都成立。

1569． 设圆 O（半径 r）的内接正五边形 $ABCDE$，又弧 AE 的中点为 P，则 (1) $AP\cdot BP=r^2$; (2) $AP^2+BP^2=3r^2$; (3) $AB^2-AP^2=r^2$。

解　(1) 设 M 为 $\overset{\frown}{DE}$ 的中点，则 B、O、M 是一条直线. 又设 PB、AO 的交点为 F，则

$$\angle PBM=\frac{1}{2}\angle POM=\angle EOM$$
$$=\angle AOP=36°.$$

由此可得，PO 在点 O 处与 $\triangle BOF$ 的外接圆相切.

$$\therefore\quad BP\cdot FP=OP^2.$$

又 $\because$ $FP=AP$，$\therefore$ $AP\cdot BP=r^2$.

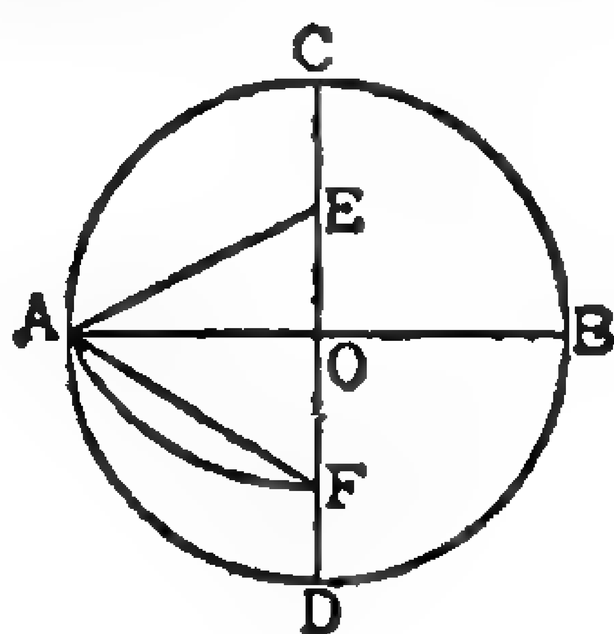
(2) $BP-AP=BF=BO=r$.

两边分别平方，得

$$BP^2-2BP\cdot AP+AP^2=r^2.$$
$$\therefore\quad BP^2+AP^2=r^2+2AP\cdot BP$$
$$=r^2+2r^2=3r^2.$$

(3) 因为 AB 是正五边形的一边，AP 是正十边形的一边，半径 AO 是正六边形的一边，根据问题 **1574** 可知，这三条线段为直角三角形的三边. 而 AB 比 AP、AO 都大. 从而得出，$AB^2=AP^2+AO^2$. 所以，$AB^2-AP^2=r^2$.

1570. 设圆心为 O 的圆内有互相垂直的两条直径 AB、CD，OC 的中点为 E，以 E 为圆心，以 EA 为半径所作的圆与 CD 的交点为 F，则 OF 是内接正十边形的一边长. AF 是内接正五边形的一边长.



解　设半径为 r，则

$$EA^2=AO^2+OE^2=r^2+\left(\frac{1}{2}r\right)^2.$$
$$\therefore\quad EA=\frac{\sqrt{5}r}{2}.$$

而　$EF=EA$，$OF=EF-OE$.

所以，$OF=EA-OE$

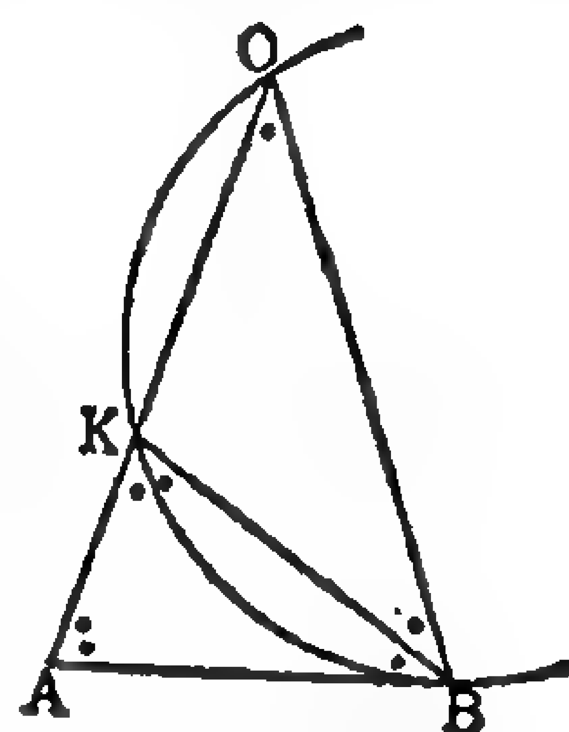
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}r-\frac{r}{2}=\frac{(\sqrt{5}-1)r}{2}.$$

由此可得 OF 是圆 O 内接正十边形的一边长(问题 **1571**).

$$AF^2=AO^2+OF^2$$
$$=r^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right)^2=\frac{(10-2\sqrt{5})r^2}{4}.$$
$$\therefore\quad AF=\frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

所以，AF 是内接正五边形的一边长(问题 **1573**).

1571. 求半径为 r cm 的圆内接正十边形的一边长.



解　设 O 为正十边形的外接圆的圆心，AB 为正十边形一边长，则

圆心角 AOB
$$=360°\div10=36°.$$

从而得出，等腰三角形 OAB 的其他两角

$$\angle OAB=\angle OBA=72°.$$

引 $\angle OBA$ 的平分线 BK，在 $\triangle BAK$ 中，$\angle ABK=\dfrac{72°}{2}=36°$，$\angle BAK=72°$. 于是 $\angle O=\angle KBA$.

由此可得，过 O、K、B 的圆在点 B 与 AB 相切.

$$\therefore\quad AK\cdot AO=AB^2.\qquad ①$$

而　　$AB=BK=OK$.

由①，得　$AK\cdot AO=OK^2$.

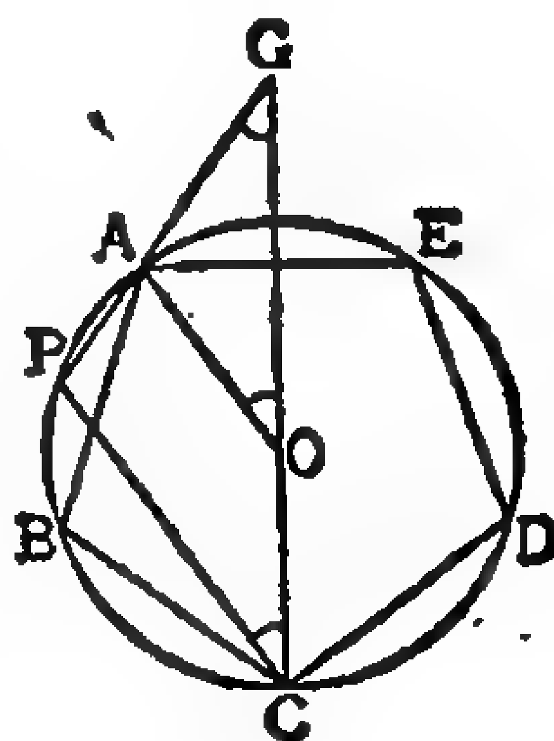
所以，设 $OA=r$，$AB=OK=x$，则

$$(r-x)\cdot r=x^2,$$

即　　$x^2+rx-r^2=0$.

$$\therefore\quad x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot r=\frac{(\sqrt{5}-1)r}{2}$$ (问题 **1514**).

1572. 设 $ABCDE$ 是圆内接正五边形，P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，则 AP 与圆半径的和等于 PC.



解　设 O 为圆心. 正五边形的每个内角是 $\dfrac{360°}{5}=72°$. 又 OC 是 $\angle BCD$ 的平分线，$\therefore$　$\angle OCB=36°$.

又，P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，

$$\therefore\quad \angle PCB=\frac{1}{3}\angle OCB=18°.$$
$$\therefore\quad \angle OCP=36°.$$

而　　$\angle CPA=\angle CBA=108°$.

设 CO、PA 的延长线相交于点 G，则 $\angle PGC=36°=\angle OCP$. 所以，$PG=PC$.

又 CG 过弧 AE 的中点，

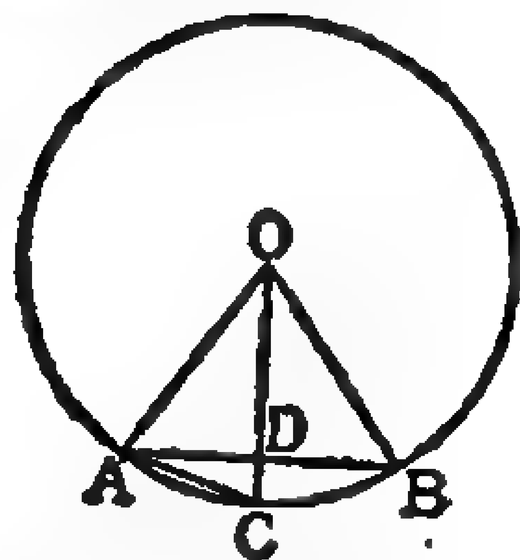
$\therefore \quad \angle AOG=36°=\angle AGO.$

所以 $AO=AG$。由此可得，

$$PC=PG=PA+AG=PA+AO.$$

1573. 半径为 R 的圆内接正五边形的一边长 a 的表达式为

$$a=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$



解 设 $OA=R$，AC 为内接正十边形的一边长，AB 为正五边形的一边长，$AB\perp OC$，因为 AC 是正十边形的一边，由问题 **1571**，得

$$AC=\frac{(\sqrt{5}-1)R}{2}.$$

设 $OD=x$，则 $DC=R-x$。

而 $\quad AO^2-AC^2=OD^2-DC^2.$

$$\therefore \quad R^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\cdot R^2=x^2-(R-x)^2.$$

$$\therefore \quad x=\frac{(\sqrt{5}+1)R}{4}.$$

又 $\quad AD^2=OA^2-OD^2,$

即 $\quad AD^2=R^2-\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}\cdot R^2$

$$=\frac{(10-2\sqrt{5})R^2}{16},$$

$$\therefore \quad AD=\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$\therefore \quad a=2AD=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

1574. 设半径为 R 的圆内接正五边形的一边为 a，内接正十边形一边为 a'，则 $a^2-a'^2=R^2$。

解 由问题 **1571**、**1573**，得

$$a'=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2},\quad a=\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

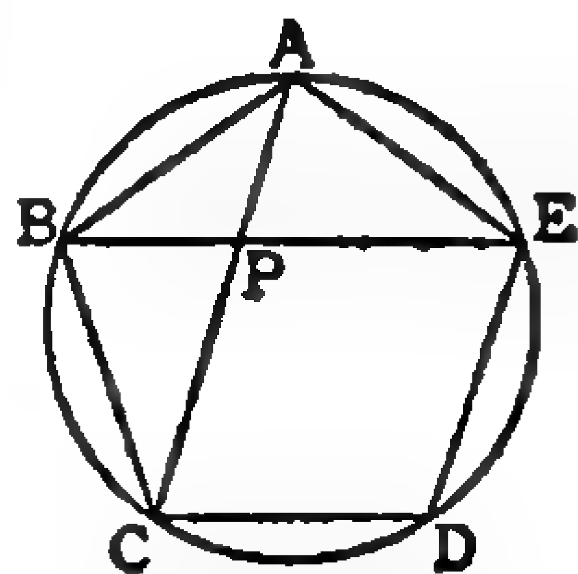
$a^2-a'^2$

$$=\frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{4}-\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4}$$

$$=\frac{R^2}{4}\times 4=R^2.$$

1575. 设半径为 R 的圆内接正五边形的对角线长为 d，则

$$d=\frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}.$$



解 设圆内接正五边形为 $ABCDE$，对角线 AC、BE 的交点为 P。由问题 **1515**，得 $PC^2=AC\cdot(AC-PC)$。

设 $PC=x$，则

$$x^2+AC\cdot x-AC^2=0.\quad \because \quad x<AC,$$

$$\therefore \quad x=PC=\frac{(\sqrt{5}-1)AC}{2}.$$

又 $\quad PC=ED=\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},$

$$\therefore \quad \frac{(\sqrt{5}-1)AC}{2}=\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

$$\therefore \quad d=AC=\frac{\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

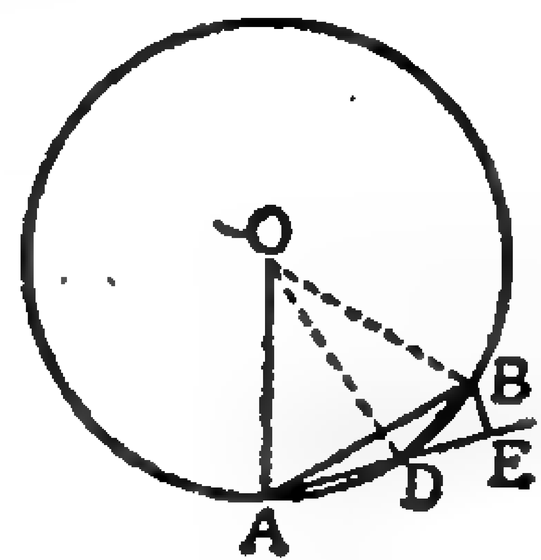
$$=\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{R\sqrt{(10-2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)^2}}{4}.$$

即 $\quad d=\frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}.$

1576. 设半径为 R 的圆内接正十五边形的一边为 a，则

$$a=\frac{R}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}).$$



解 设 $\widehat{AB}=\frac{1}{6}$ 圆，$\widehat{AD}=\frac{1}{10}$ 圆，则 BD 是正十五边形的一边，即 BD 长为 a。

又，$\quad \angle ABD=\frac{1}{2}\angle AOD=18°,$

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=12°.$$

设 $BE\perp AD$，则

$$BE=\frac{1}{2}BD.$$

而 AB 是正六边形的一边，$AB=R$，AD 是正十边形的一边，

$$AD=\frac{(\sqrt{5}-1)R}{2}\ (\text{问题 } \mathbf{1571}).$$

又 $\quad AB^2=AD^2+BD^2+2AD\cdot DE.\qquad ①$

而　$DE=\sqrt{BD^2-BE^2}$

$$=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

因此，由①，得

$$R^2=\left[\frac{(\sqrt{5}-1)R}{2}\right]^2+a^2$$
$$+2\left[\frac{(\sqrt{5}-1)R}{2}\right]\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

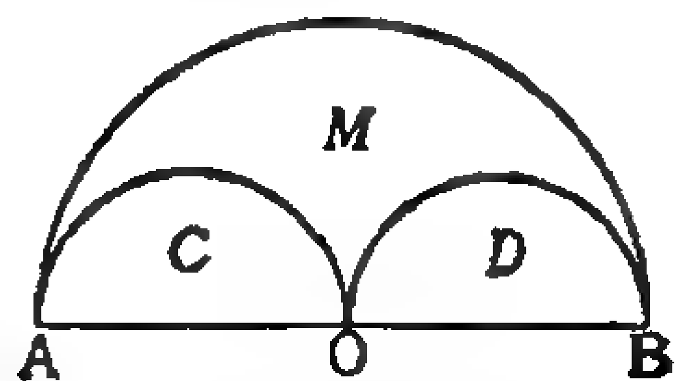
按 a 的降幂整理后得

$$a^2+\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})R}{2}\cdot a$$
$$-\frac{(\sqrt{5}-1)R^2}{2}=0.$$

因为 $a>0$，所以这个方程的解

$$a=\frac{R}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}).$$

1577. 在半圆弧 AB 的一侧，以半径 AO、BO 为直径分别作半圆，则这三个半圆之间的面积 M 等于两个小半圆面积 C、D 的和 $C+D$。



解　$M=$半圆 $AB-(C+D)$。

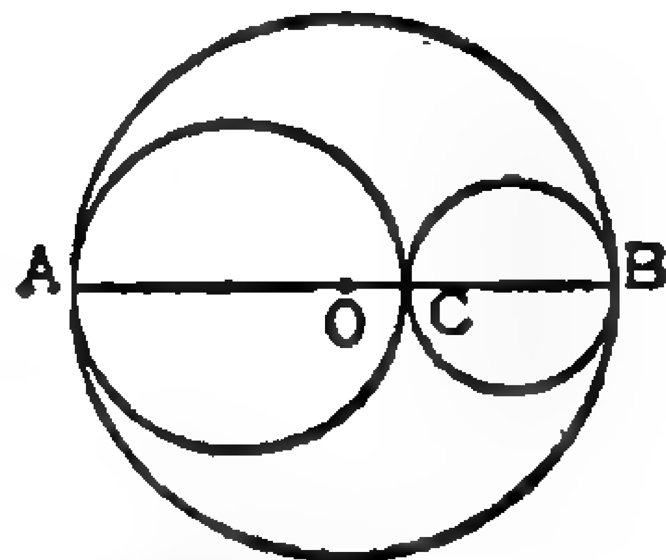
而　半圆 $AB=\frac{1}{2}\times\pi OA^2$，

又　$C+D=\frac{\pi}{4}OA^2$。

$$\therefore\ M=\left(\frac{\pi}{2}OA^2-\frac{\pi}{4}OA^2\right)=\frac{\pi}{4}OA^2.$$

$$\therefore\ M=C+D.$$

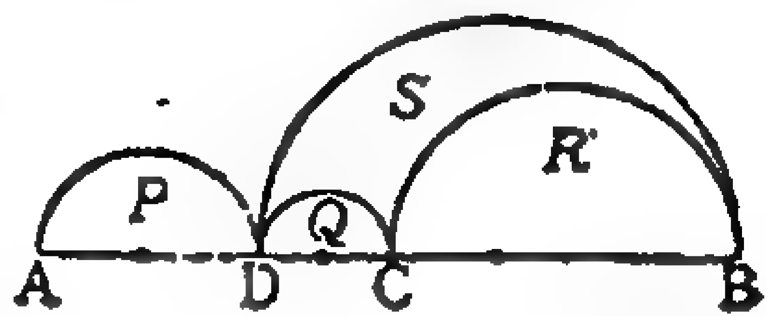
1578. 若 C 为圆 O 的直径 AB 的内分点，则圆 O 与以 AC、BC 分别为直径的两圆之间部分的面积 S，等于以 AC、BC 的比例中项为直径的圆面积的两倍。



解　设 P、Q 分别为以 AC、BC 为直径的圆的面积，则

$$S=\text{圆}O\text{的面积}-P-Q$$
$$=\frac{\pi AB^2}{4}-\frac{\pi AC^2}{4}-\frac{\pi BC^2}{4}$$
$$=\frac{\pi}{4}(AB^2-AC^2-BC^2)$$
$$=\frac{\pi}{4}\{(AC+BC)^2-AC^2-BC^2\}$$
$$=\frac{\pi AC\cdot BC}{2}=2\pi\cdot\frac{1}{4}AC\cdot BC$$
$$=2\left[\pi\left(\frac{\sqrt{AC\cdot BC}}{2}\right)^2\right].$$

1579. 设线段 AB 被 C 点二等分，D 为 AC 上任意一点，在 AB 的一侧，以 AD、DC、CB、BD 为直径分别作半圆，则图中四个部分的面积 P、Q、R、S，满足关系式



$$P+S=Q+R.$$

解　$P+S=\frac{\pi}{8}(AD^2+DB^2-DC^2-CB^2)$

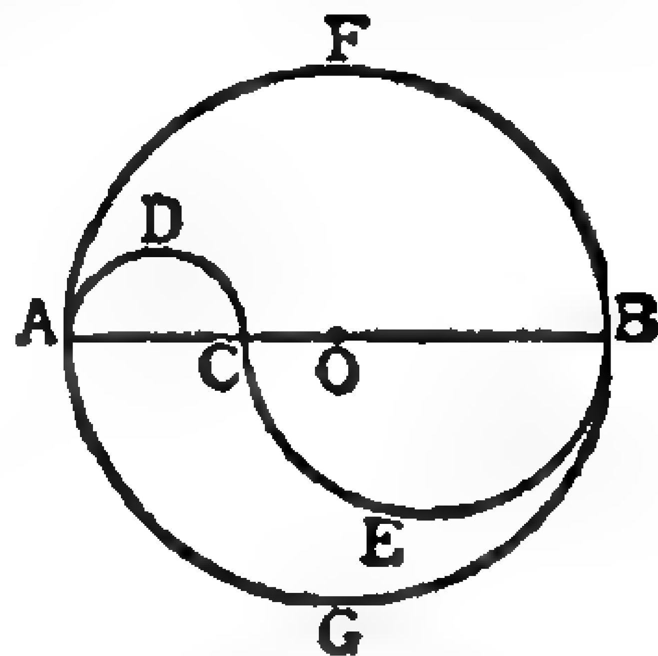
而　$AD=CB-DC$，$DB=CB+DC$。

$\therefore\ AD^2+DB^2$

$$=(CB-DC)^2+(CB+DC)^2$$
$$=2DC^2+2CB^2.$$

所以，$P+S=\frac{\pi}{8}(DC^2+CB^2)=Q+R$。

1580. 在圆 O 的直径 AB 上取一点 C，在线段 AC、BC 中一个的上侧、一个的下侧分别作两个半圆 ADC、CEB，则由两个半圆作成的曲线 $ADCEB$ 把圆 O 所分成两部分的比等于 $CB:AC$。



解　显然 AB、AC、CB 上的半圆分别与它们的直径的平方成比例。而曲线所围的 $AFBECD$ 的面积是以 AB 为直径的半圆的面积加上以 CB 为直径半圆的面积，减去以 AC 为直径的半圆。

又曲线所围的 $AGBECD$ 的面积是以 AB 为直径的半圆的面积加上以 AC 为直径的半圆的面积，减去以 CB 为直径的半圆的面积。

$\therefore$　$AFBECD$ 的面积$:AGBECD$ 的面积

$$=(AB^2+CB^2-AC^2)$$
$$:(AB^2+AC^2-CB^2).$$

而　$AB^2+CB^2-AC^2$

$$=AB^2+(CB+CA)(CB-CA)$$
$$=AB^2+AB\cdot(CB-CA)$$

$=AB\cdot(AB+CB-CA)$

$=2AB\cdot CB.$

又 $AB^2-CB^2+AC^2$

$=AB^2-(CB+AC)(CB-AC)$

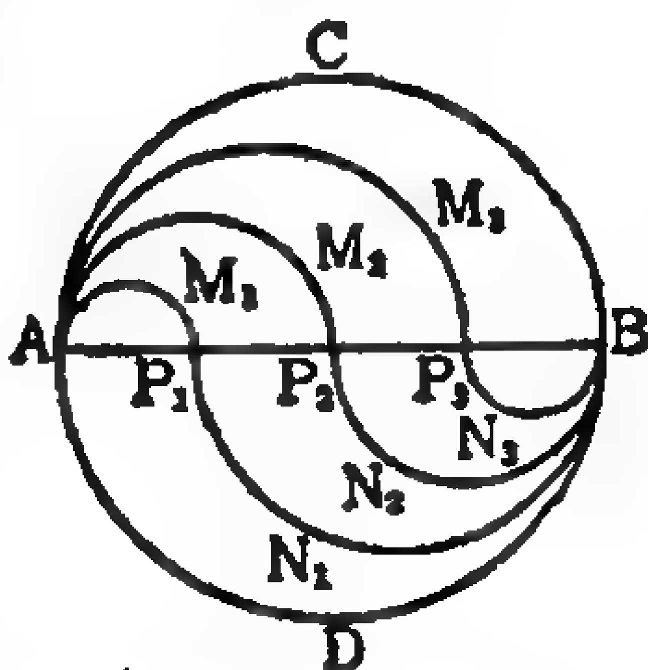
$=AB^2-AB\cdot(CB-AC)$

$=AB\cdot(AB-CB+AC)$

$=2AB\cdot AC.$

$\therefore\ \dfrac{AFBECD\text{的面积}}{AGBECD\text{的面积}}=\dfrac{2AB\cdot CB}{2AB\cdot AC}=\dfrac{CB}{AC}.$

1581. 设圆的直径 AB 被点 P_1、P_2、P_3、…、P_{m-1} 分成 m 等分，在 AB 的一侧以 AP_1、AP_2、…、AP_{n-1} 为直径作半圆，在另一侧以 BP_1、BP_2、…、BP_{n-1} 为直径作半圆，则图中 $AM_2P_2N_2BN_3P_3M_3A$ 的各曲线的周长等于给定的圆的周长，其面积等于圆面积的 m 分之一。



解 如图，曲线 $AM_2P_2N_2B$

$=$半圆 AM_2P_2+半圆 P_2N_2B

$=\dfrac{1}{2}\pi\cdot(AP_2+P_2B)$

$=\dfrac{1}{2}\pi AB=$半圆 $ACB.$

同理可得，曲线 $BN_3P_3M_3A=$半圆 BDA。

因此，曲线 $AM_2P_2N_2B$ 与 $BN_3P_3M_3A$ 的和等于以 AB 为直径的圆的周长。类似地，各曲线的周长都等于以 AB 为直径的圆的周长。

其次，假设曲线 $AM_2P_2N_2BN_3P_3M_3A$ 的面积为 S，则

$S=$半圆 AP_3+半圆 BP_2

$-$半圆 AP_2-半圆 BP_3,

即 $S=\dfrac{\pi}{8}(AP_3^2+BP_2^2-AP_2^2-BP_3^2)$.

又以 AB 为直径的圆的面积 A 等于 $\dfrac{1}{4}\pi AB^2$，所以

$A:S=2AB^2:(AP_3^2+BP_2^2-AP_2^2-BP_3^2)$. ①

而 $AP_1=P_1P_2=P_2P_3=\cdots=\dfrac{1}{m}AB,$

若设 $AB=m$，则

$AP_1=P_1P_2=P_2P_3=\cdots=1.$

从而得出，$AP_2=2$，$AP_3=3$，$BP_2=AB-AP_2=m-2$，$BP_3=AB-AP_3=m-3$。

把它们代入①式，得

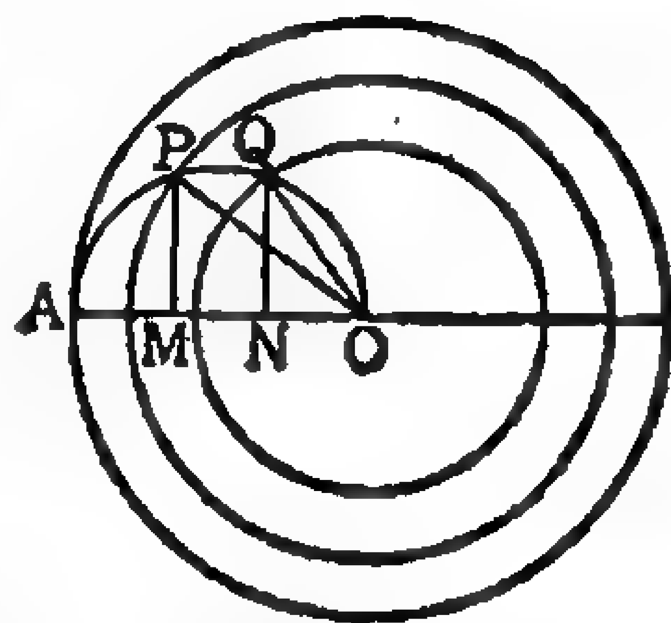
$A:S=2m^2:[3^2+(m-2)^2-2^2-(m-3)^2]$

$=2m^2:(9+m^2-4m+4-4-m^2+6m-9)$

$=2m^2:2m=m:1,$

即 S 是等于圆面积的 m 分之一。对其他曲线也完全一样。

1582. 设 OA 是圆 O 的半径，在 OA 上取两点 M、N，使 $AM=MN=NO$，以 OA 为直径在 OA 的上方作半圆，从 M、N 向 AO 引垂线与半圆交于 P、Q，则以 O 为圆心、OP、OQ 分别为半径的圆把圆 O 的面积分成三等分。



解 因为 $PO^2=MO\cdot AO$，$QO^2=NO\cdot AO$，且 $AM=MN=NO$，

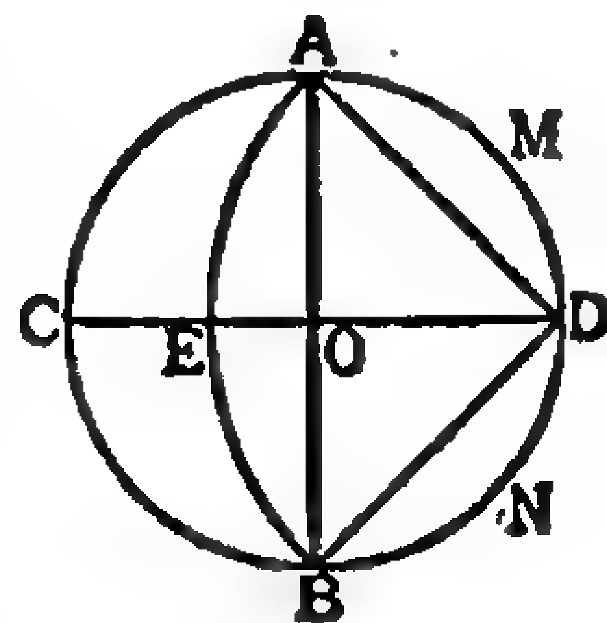
所以 $PO^2=2NO\cdot 3NO=6NO^2$,

$QO^2=NO\cdot 3NO=3NO^2$.

而 $AO=3NO$，于是 $AO^2=9NO^2$，

从而得出，以 AO、PO、QO 分别为直径的三个圆的面积与 $9NO^2$、$6NO^2$、$3NO^2$ 成比例。由此可得，以 O 为圆心，以 OP、OQ 分别为直径的两个圆把圆 O 的面积分成三等分。

1583. 在圆 O 中，作互相垂直的两条直径 AB、CD，以 D 为圆心、DA 为半径作弧 AEB，则月形 $ACBE$ 与 $\triangle DAB$ 等积。



解 因为弓形 ABE 的面积$=$弓形 ADM 的面积 $+$ 弓形 DBN 的面积(问题 **1548**)，所以

弓形 ABE 的面积$+\triangle DAB$ 的面积

$=$半圆的面积。

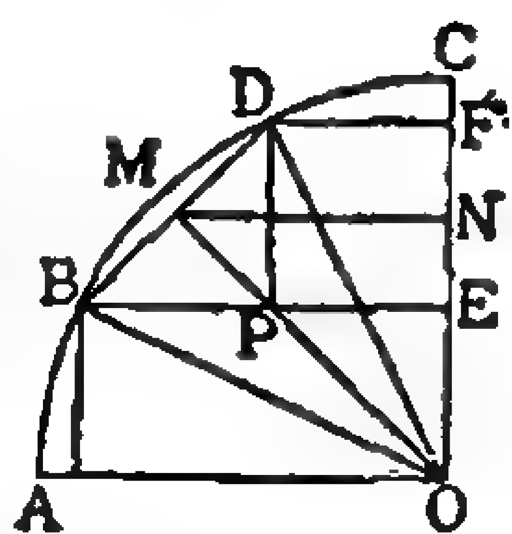
而 弓形 ABE 的面积$+$月形 $ACBE$ 的面积$=$半圆的面积。

所以， 月形 $ACBE$ 的面积

$=\triangle DAB$ 的面积。

1584. 设 OA、OC 是圆 O 的互相垂直的

两个半径，在 $\overset{\frown}{AC}$ 上取两点 B、D，使 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$。由 B 及 D 向 OC 作垂线，若垂足分别为 E、F，则图形 $BEFD$ 的面积与扇形 BOD 的面积相等。



解　$\because\ \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore\ \angle BOA=\angle DOC$。

从 B 向 OA 所作的垂线等于 DF，从 D 向 BE 作垂线 DP，则 $OE=EP$。

若延长 OP 与 BD 相交于点 M，则

$$\angle EOP=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ.$$

从而得出，OM 是 $\angle BOD$ 的平分线。所以，$OM\perp BD$。

又从 M 向 OC 作垂线 MN，则两个直角三角形 OMN、PDM 相似。

$\therefore\ OM:MN=PD:DM$。

$\therefore\ OM\cdot DM=MN\cdot PD=MN\cdot EF$。

而 M 是 BD 的中点，所以 N 是 EF 的中点。

$\therefore\ OM\cdot DM=\triangle OBD$ 的面积，

$MN\cdot EF=$梯形 $DBEF$ 的面积。

由此可得，

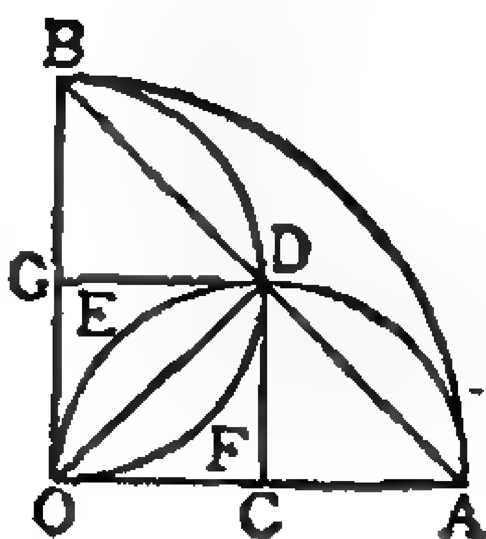
$\triangle OBD$ 的面积$=$梯形 $DBEF$ 的面积。

两边都加上弓形 MBD 的面积，则得

图形 $BEFD$ 的面积

$=$扇形 BOD 的面积。

1585． 在四分之一圆 OAB 的内部，以半径 OA、OB 分别为直径画半圆，两半圆相交于点 D，则点 A、B、D 在一条直线上。又半圆 ODA，ODB 以外的部分 $OEDB$ 及 $OFDA$ 的面积都等于 OA 上正方形面积的四分之一。



解　从 D 引 OB 的平行线 DC，引 OA 的平行线 DG，则

$\because\ \angle ODA=90^\circ$，$\angle ODB=90^\circ$，

$\therefore\ \angle ODA+\angle ODB=2\times 90^\circ=180^\circ$。

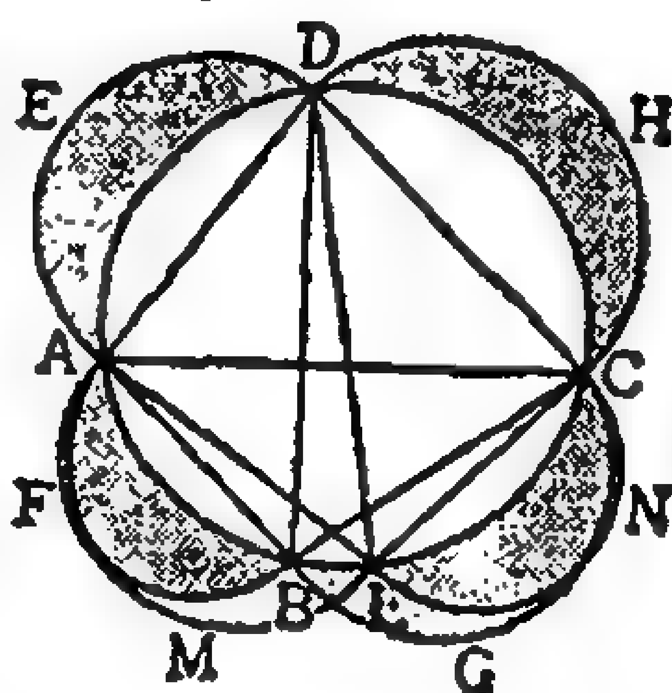
所以，A、D、B 在一条直线上。

又图形 $OFDA$ 的面积是图形 $OFDC$ 的面积与图形 DAC 即四分之一圆的面积的和。而图形 DAC 的面积等于图形 $DFOG$ 的面积(四分之一圆的面积)。

于是，图形 $OFDA$ 的面积等于正方形 $OCDG$ 的面积，即它是半径 OA 上的正方形面积的四分之一。

同理可得，$OEDB$ 的面积等于半径 OB 上的正方形面积的四分之一。

1586． 若圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 互相垂直或者一条对角线过圆心，以边 AB、BC、CD、DA 为直径，分别向外侧作半圆 AFB、BGC、CHD、DEA，则这四个月形 AFB、BGC、CHD、DEA 的面积的和与四边形 $ABCD$ 的面积相等。



解　引直径 DL，则 $DB\perp BL$。

又 $DB\perp AC$，$\therefore\ AC\parallel BL$。

$\therefore\ \overset{\frown}{AL}=\overset{\frown}{BC}$。

因此以 AL、LC 分别为直径，在 $\triangle ALC$ 的外侧作两个半圆 AML、LNC，则

月形 AML 的面积$=$月形 BGC 的面积，

月形 LNC 的面积$=$月形 AFB 的面积。

而 DL 是直径。所以，$\angle DCL=90^\circ$。

$\therefore$　月形 LNC 的面积

$+$月形 CHD 的面积

$=\triangle LCD$ 的面积。

$\therefore$　月形 AFB 的面积

$+$月形 CHD 的面积

$=\triangle LCD$ 的面积。

同理可得，月形 BGC 的面积$+$月形 DEA 的面积$=\triangle DAL$ 的面积。

$\therefore$　月形 AFB 的面积$+$月形 BGC 的面积

$+$月形 CHD 的面积

$+$月形 DEA 的面积

$=\triangle DCL$ 的面积$+\triangle DAL$ 的面积

$=$四边形 $DALC$ 的面积。

而　　$AC\parallel BL$。

$\therefore$　$\triangle ALC$ 的面积$=\triangle ABC$ 的面积，

四边形 $DALC$ 的面积

$=$四边形 $ABCD$ 的面积。

$\therefore$　月形 AFB 的面积$+$月形 BGC 的面积

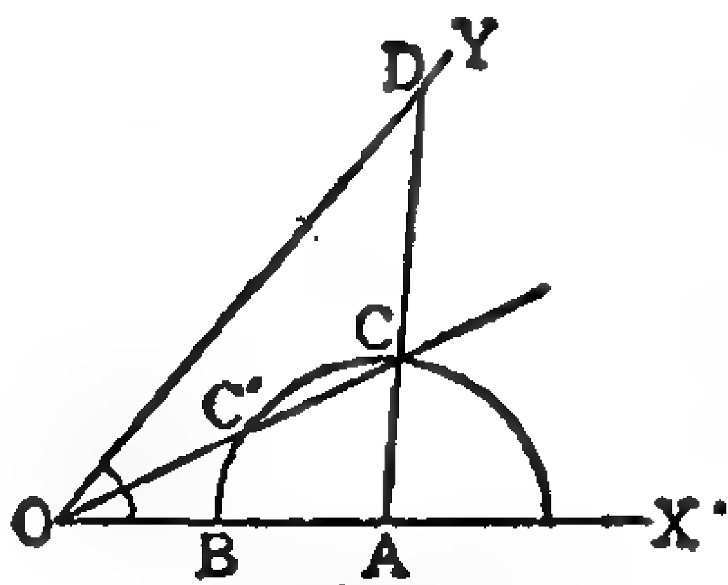
$+$月形 CHD 的面积$+$月形 DEA 的面积

$=$四边形 $ABCD$ 的面积。

当对角线过圆的中心时，这对角线就是所要引的直径，这样就可以直接加以证明了。

21. 杂题

1587. 设以 $\angle XOY$ 的一边 OX 上的一点 A 为圆心，以 OA 的一半 AB 为半径作圆，与 $\angle O$ 的平分线相交于点 C，延长 AC 与 OY 相交于点 D，则 $OA+OD=2AD$.



解 由 OC 是 $\angle AOD$ 的平分线，得

$$\frac{AC}{OA}=\frac{DC}{OD}=\frac{AC+DC}{OA+OD}=\frac{AD}{OA+OD},$$

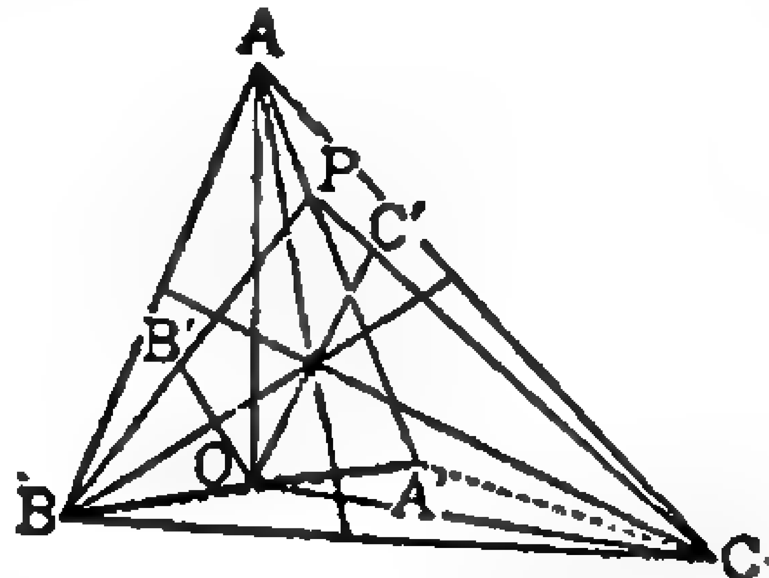
但是由假设，得

$$\frac{AC}{OA}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{OA+OD}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad OA+OD=2AD.$$

1588. 设 $\triangle ABC$ 内一点 O，点 O 关于 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线的对称点分别为 A'、B'、C'，则 AA'、BB'、CC' 相交于一点。



解 设 BB'、CC' 的交点为 P，连结 AP、AA'，这时，$\angle ACP=\angle BCO$，$\angle ABP=\angle CBO$，所以 $\triangle PAC$ 与 $\triangle OBC$、$\triangle OBC$ 与 $\triangle PAB$ 的面积的比等于夹等角两边的积的比。

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{AC\cdot PC}{CO\cdot CB}, \qquad ①$$

$$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{OB\cdot BC}{AB\cdot BP}. \qquad ②$$

①×②，得

$$\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{CA\cdot PC\cdot OB}{AB\cdot BP\cdot CO}. \qquad ③$$

同理可得，

$$\frac{S_{\triangle CAA'}}{S_{\triangle OAB}}=\frac{CA}{AB},\quad \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{OB\cdot AB}{BP\cdot BC}.$$

把上面两式的两边分别相乘，得

$$\frac{S_{\triangle CAA'}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{CA\cdot OB}{BC\cdot BP}. \qquad ④$$

同理可得，

$$\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle BAA'}}=\frac{BC\cdot PC}{AB\cdot CO}. \qquad ⑤$$

④×⑤，得

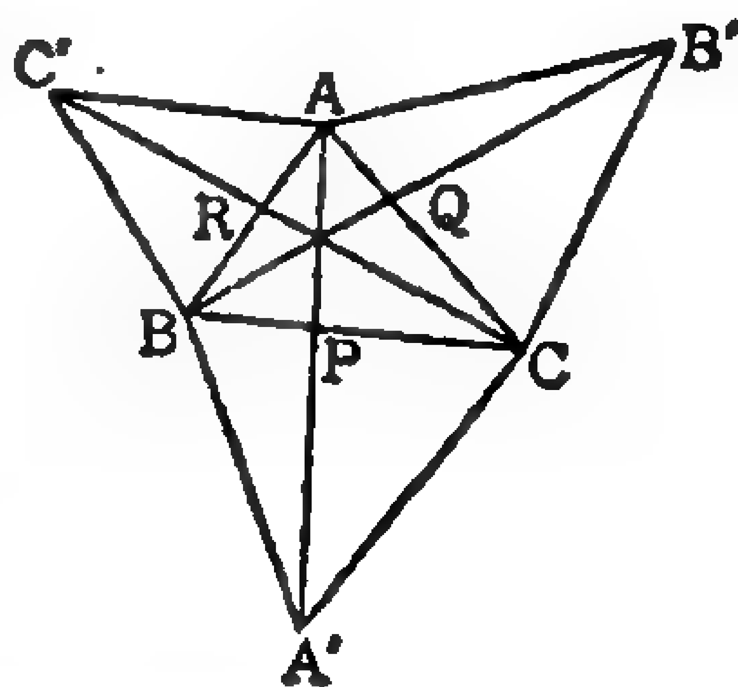
$$\frac{S_{\triangle CAA'}}{S_{\triangle BAA'}}=\frac{CA\cdot PC\cdot OB}{AB\cdot BP\cdot CO}. \qquad ⑥$$

由③与⑥，得

$$\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{S_{\triangle CAA'}}{S_{\triangle BAA'}}.$$

这个式子表明点 A、P、A' 在一条直线上。所以，AA'、BB'、CC' 相交在一点 P.

1589. 以 $\triangle ABC$ 的各边为底边向外侧作相似等腰三角形 $A'BC$、$B'CA$、$C'AB$，则 AA'、BB'、CC' 相交于一点。



解 因为三个等腰三角形是相似的，所以

$$\frac{AB}{BC'}=\frac{BC}{CA'}=\frac{CA}{AB'}=r.$$

在 $\triangle AC'C$ 与 $\triangle ABB'$ 中，

$$\angle C'AC=\angle BAB'$$

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle AC'C}}{S_{\triangle ABB'}}=\frac{CA\cdot C'A}{AB'\cdot AB}=\frac{CA}{AB'}\cdot\frac{C'A}{AB}$$

$$=r\cdot\frac{1}{r}=1$$

$$(\because\quad BC'=C'A).$$

$$\therefore\quad S_{\triangle AC'C}=S_{\triangle ABB'}, \qquad ①$$

同理可得，$S_{\triangle C'BC}=S_{\triangle ABA'}$， ②

$S_{\triangle CAA'}=S_{\triangle BCB'}$. ③

设 AA' 与 BC、BB' 与 CA、CC' 与 AB 的交点分别为 P、Q、R，则由上面的三个式子，得

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle CAA'}}\cdot\frac{S_{\triangle BCB'}}{S_{\triangle ABB'}}\cdot\frac{S_{\triangle CAC'}}{S_{\triangle C'BC}}=1.$$

所以 AA'、BB'、CC' 相交于一点（乔巴定理）。

1590. 设 $\triangle ABC(AB<AC)$ 的 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线分别为 BD、CE，它们的交点为 F，试比较 DF、EF 的大小。

解 设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. 根据问题 **1060**, 得

$$AD=\frac{bc}{a+c},\quad AE=\frac{bc}{a+b}.$$

$$\because\ c<b,\ \therefore\ a+c<a+b.$$

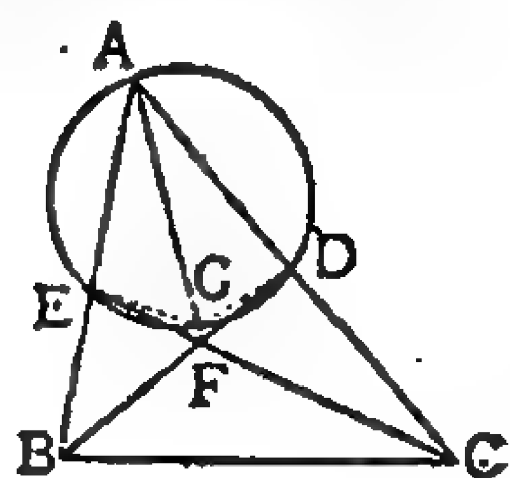
$$\therefore\ AD>AE.$$

又 F 是 $\triangle ABC$ 的内心,

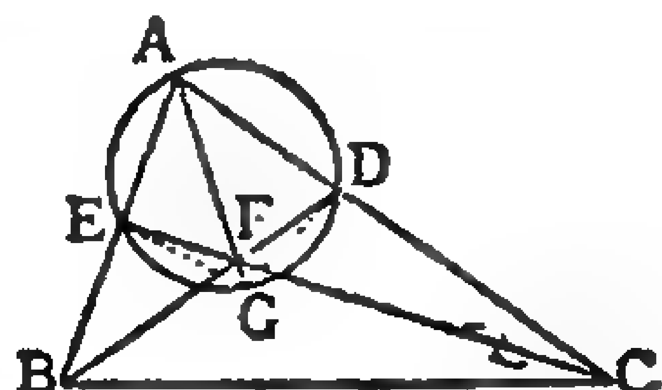
$$\angle DFE=\angle BFC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A,$$

所以,当 $\angle A \gtreqqless 60^\circ$ 时, $\angle DFE \gtreqqless 120^\circ$.

由此可见,若作圆 AED, 则当 $\angle A$ 小于、等于或大于 60° 时,点 F 在圆外(图1)、圆上、或在圆内(图 2).



(1)



(2)

设 AF 与圆的交点为 G(图 1),则由 $AD>AE$, 得 $\angle FGD<\angle FGE$.

由此可得,在 $\triangle GFD$ 与 $\triangle GFE$ 中,GF 为公共边,$GD=GE$,

$$\therefore\ DF<EF.$$

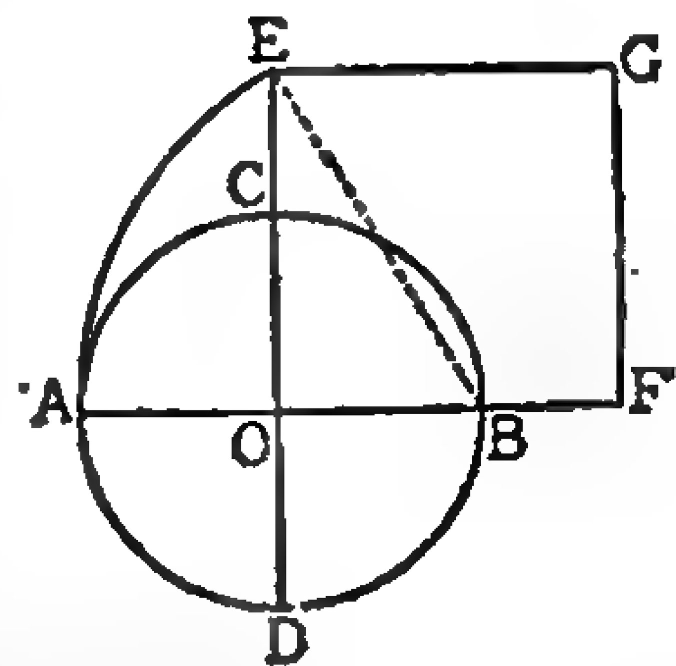
当点 F 在圆上时,显然 $DF=EF$.

当点 F 在圆内时 (图 2)时, 则 $\angle DGF>\angle EGF$, 又 FG 为公共边,$GD=GE$,

$$\therefore\ DF>EF.$$

所以,当 $\angle A \gtreqqless 60^\circ$ 时, $DF \gtreqqless EF$.

1591. 在圆 O 中, 引互相垂直相交的直径 AOB, COD, 以 B 为圆心, BA 为半径画弧与 DC 的延长线交于点 E, 试比较以 OE 为一边的正方形 $OEGF$ 的面积与圆 O 的面积的大小.

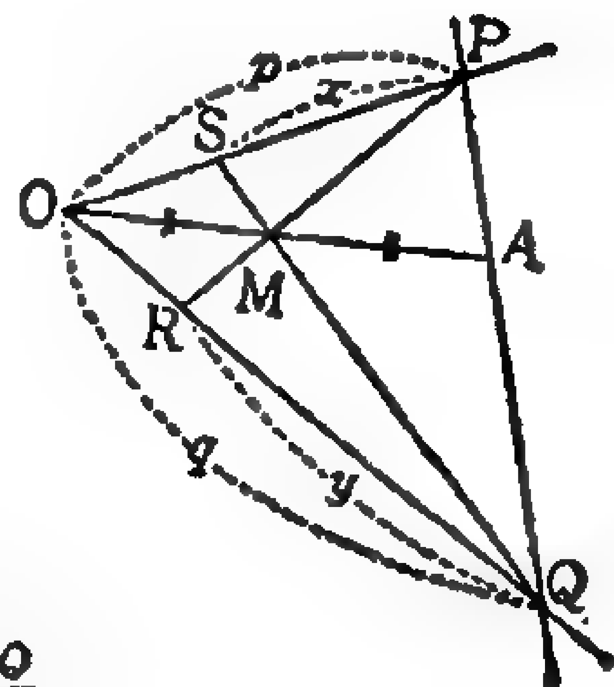


解 因为 $OE^2=BE^2-OB^2=3OB^2$, 又圆的面积是 πOB^2, 而 $\pi>3$,

$$\therefore\ \pi OB^2>OE^2.$$

即圆 O 的面积比正方形 $OEGF$ 的面积大.

1592. 设线段 OA 的中点为 M, 过 A 的任意直线与过 O 的任意两条直线分别相交于 P、Q. PM 与 OQ、QM 与 OP 的交点分别为 R、S, 若 $OP=p$, $OQ=q$, $PS=x$, $QR=y$, 证明 $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}$ 是定值.



解 $\because\ \frac{SO}{PS}=\frac{S_{\triangle OMQ}}{S_{\triangle PMQ}}$,

$$\frac{RO}{QR}=\frac{S_{\triangle PMO}}{S_{\triangle PMQ}}.$$

$$\therefore\ \frac{SO}{PS}+\frac{RO}{QR}=\frac{S_{\triangle OMQ}+S_{\triangle PMO}}{S_{\triangle PMQ}}$$

$$=\frac{S_{\triangle AMQ}+S_{\triangle PMA}}{S_{\triangle PMQ}}=1.$$

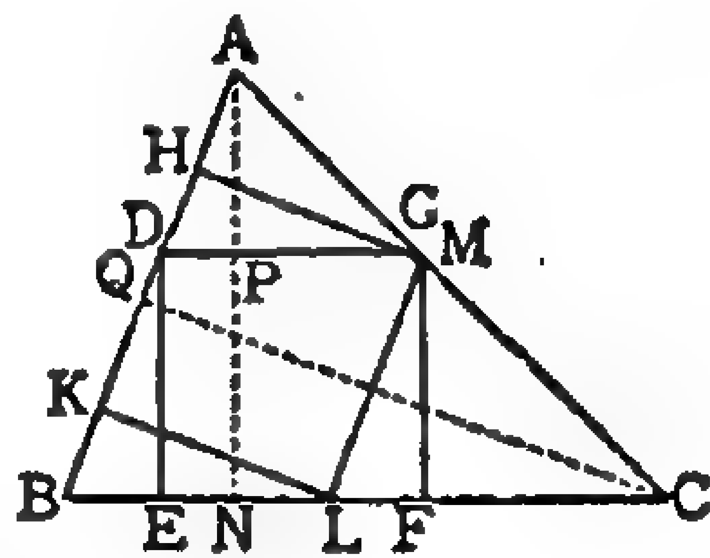
$$\therefore\ \frac{p}{x}+\frac{q}{y}=\frac{PS+SO}{PS}+\frac{QR+RO}{QR}$$

$$=2+\frac{SO}{PS}+\frac{RO}{QR}$$

$$=3(\text{定值}).$$

注 假设 OP、OQ 是具有符号的线段, 则“和是定值”就表示 $\frac{p}{x}$ 与 $\frac{q}{y}$的和或者它们的差是定值.

1593. 在$\triangle ABC$ 中,$BC>AB$,若它的内接正方形的一边在边 BC 上 (正方形 $DEFG$) 或在边 AB 上 (正方形 $MHKL$),比较它们的面积的大小.



解 设 $BC\cdot AN=\triangle ABC$面积的 2 倍$=S$, $EF=y$, $AN=h$, $BC=a$,

则 $\frac{h-y}{h}=\frac{y}{a}$. $\therefore\ EF=y=\frac{S}{a+h}$.

同理,设 $HK=y'$, $CQ=h'$, $AB=c$, 则

$$\frac{h'-y'}{h'}=\frac{y'}{c},\quad ch'=S.$$

$$\therefore\ HK=y'=\frac{S}{c+h'},$$

$$\therefore\ y'-y=\frac{(a+h-c-h')\cdot S}{(a+h)(c+h')}$$

$$=\frac{(a-c)\cdot(1-\sin B)\cdot S}{(a+h)\cdot(c+h')}.$$

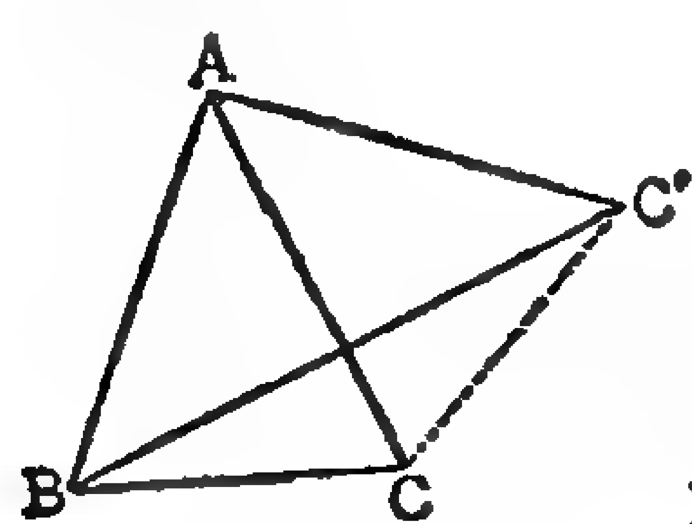
$$\therefore\ y'-y>0\quad\therefore\ y'>y,$$

即正方形 $MHKL$ 的面积$>$正方形 $DEFG$

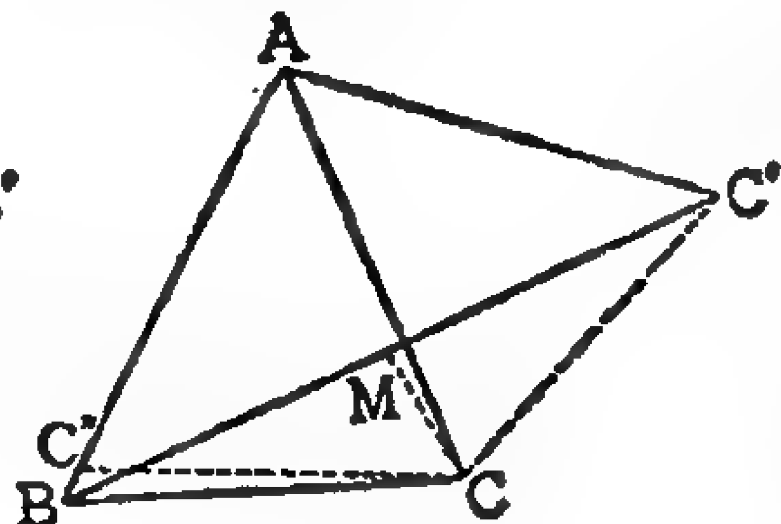
的面积。

1594. 在$\triangle ABC$中两边AB、AC的长度一定，第三边BC的长度与$\angle A$的大小是否成比例？

解　在(图1)中，设$AB=AC$，关于AC在AB的异侧作$\angle CAC'=\angle CAB$且使$AC'=AC$，显然，这时，$BC'<BC+CC'(=2BC)$，即$2\angle CAB$所对的边BC'比$2BC$小。所以，BC的长度与$\angle A$的大小是不成比例的。



(1)



(2)

其次(图2)中，设$AB>AC$，与上面一样作$\angle CAC'=\angle BAC$且$AC'=AC$，又在AB上取点C''使$AC''=AC$，

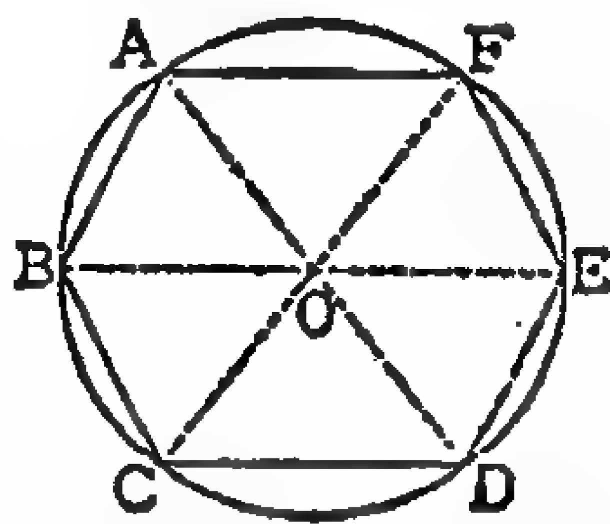
则　$\triangle ACC'\cong\triangle ACC''$。∴　$CC''=CC'$，$\triangle ACC''$是等腰三角形。由此可知，$\angle AC''C$是锐角。所以$\angle BC''C$是钝角。

$$\therefore\quad BC>CC'',\quad 即\quad BC>CC'.$$

由此可得，设M是BC'的中点，则$\angle BMC$是钝角。所以$BC>BM$，即$2BC>BC'$。

这就是说，$2\angle BAC$（即$\angle BAC'$）所对的边BC'比$2BC$小，所以BC的长度与$\angle A$的大小不成比例。

1595. 设在圆O上依次有六点A、B、C、D、E、F，且$AB:BC:CD=DE:EF:FA$，若点A，O，D在一条直线上，则点B、O、E，点C、O、F也都在一条直线上。



解　若$AB=DE$，则

$$\triangle OAB\cong\triangle ODE.$$

由此可知，点B、O、E是在一条直线上。

又由给定的比例式

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CD}{FA},$$

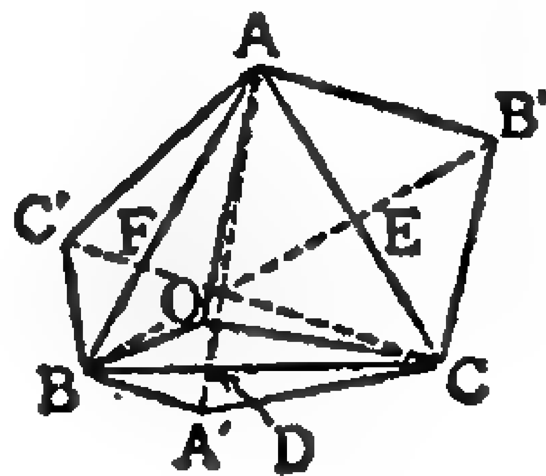
可知$BC=EF$。与上面一样可得点C、O、F在一条直线上。

其次，若$AB<DE$，则$BC<EF$，$CD<FA$。从而得出，$\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{DE}$，$\overset{\frown}{BC}<\overset{\frown}{EF}$，$\overset{\frown}{CD}<\overset{\frown}{AF}$。

把这三式的两边分别相加，得$\overset{\frown}{ABD}<\overset{\frown}{AFD}$。由此可得，$\overset{\frown}{ABD}$比半圆小，因而点$A$、$O$、$D$不可能在一条直线上。这就与假设相矛盾。

同理，当$AB>DE$时，也得出与假定相矛盾的结论。所以，本问题中，仅当$AB=DE$时，点B、O、E，点C、O、F都在一条直线上。

1596. 在正三角形ABC内任意取一点O，设点O关于三边BC，CA，AB的对称点分别为A'、B'、C'，则AA'、BB'、CC'相交于一点P。



解　设O与B'、O与C'分别是关于AC、AB的对称点，在$\triangle ABB'$、$\triangle ACC'$中，

$$AB'=AO=AC',\ AB=AC,$$
$$\angle BAB'+\angle CAC'=2\times 90^\circ$$
$$(\because\ \angle BAC=60^\circ).$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ABB'}=S_{\triangle ACC'}.\qquad ①$$

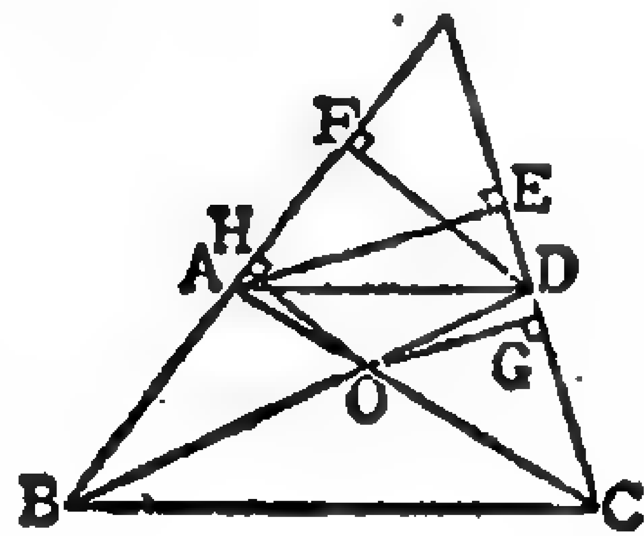
同理可得，
$$S_{\triangle CAA'}=S_{\triangle CBB'},\qquad ②$$
$$S_{\triangle BAA'}=S_{\triangle BCC'}.\qquad ③$$

设AA'与BC、BB'与AC、CC'与AB的交点分别为D、E、F，则由①、②、③，得

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}$$
$$=\frac{S_{\triangle BAA'}}{S_{\triangle CAA'}}\cdot\frac{S_{\triangle CBB'}}{S_{\triangle ABB'}}\cdot\frac{S_{\triangle ACC'}}{S_{\triangle BCC'}}=1.$$

因此，由乔巴定理可知AA'、BB'、CC'相交于一点P。

1597. 在梯形$ABCD$ ($AD\parallel BC$)中，从A向CD、从D向AB分别作垂线AE、DF，则当$AE=AB$时，$DF=DC$。



解　设两对角线的交点为O，从O向CD、AB所作的垂线分别为OG、OH，因为$AD\parallel BC$，所以$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle DOC}$。

从而得出，$OH\cdot AB=OG\cdot DC$。

即 $$\frac{AB}{DC}=\frac{OG}{OH}. \quad ①$$

又 $OG\parallel AE$，$OH\parallel DF$，所以，

$$\frac{OG}{AE}=\frac{CO}{CA}=\frac{BO}{BD}=\frac{OH}{DF}.$$

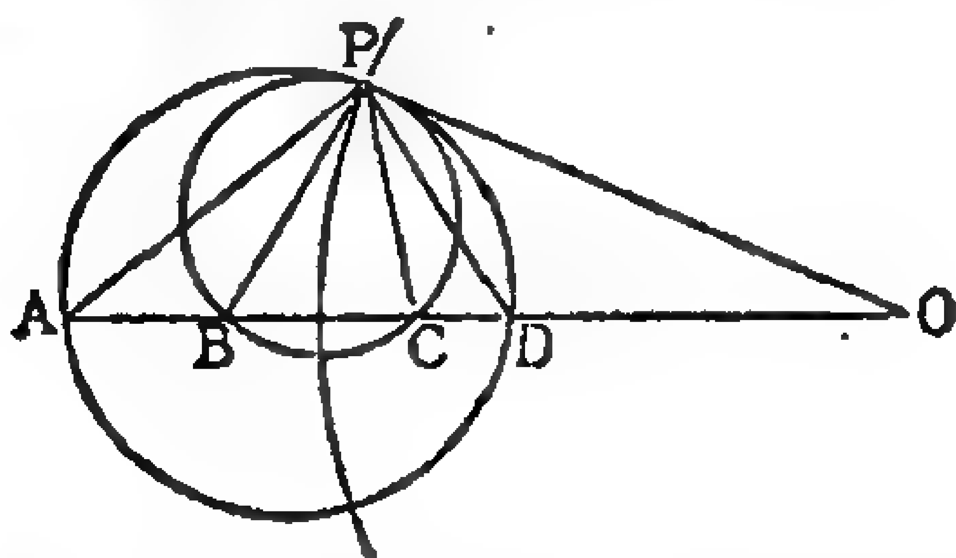
$$\therefore\ \frac{OG}{OH}=\frac{AE}{DF}. \quad ②$$

由①、②，得 $\frac{AB}{DC}=\frac{AE}{DF}$.

又根据假设，得 $AB=AE$.

$$\therefore\ DC=DF.$$

1598. 设在一条直线上有五点 A、B、C、D、O，且 $OA\cdot OD=OB\cdot OC$，若以 O 为圆心，以 OA、OD 的比例中项为半径作圆，P 为这圆上任意一点，则 $\angle APB=\angle CPD$.



解　由 $OA\cdot OD=OP^2$ 可知，OP 在点 P 与圆 APD 相切.

同理可得，OP 在点 P 与圆 BPC 相切.

由此可知，两圆 APD、BPC 在点 P 相内切，OP 是它们的公切线.

所以，$\angle APB=\angle PBO-\angle PAO$

$=\angle CPO-\angle DPO=\angle CPD$.

1599. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上取点 P、E，边 BC 上取点 D，若 $PD\parallel AC$，$DE\parallel CP$，则过两点 A、E 的任意圆与在点 P 和 AE 相切任意圆的公共弦 FG 过定点.

解　因为 $DE\parallel CP$，$PD\parallel AC$，所以

$$\frac{BE}{BP}=\frac{BD}{BC}=\frac{BP}{BA}.$$

$$\therefore\ BP^2=BE\cdot BA. \quad ①$$

连结 BG，设 BG 的延长线与圆 GPF 的交点为 F'，则由 BP 是切线，得

$$BG\cdot BF'=BP^2.$$

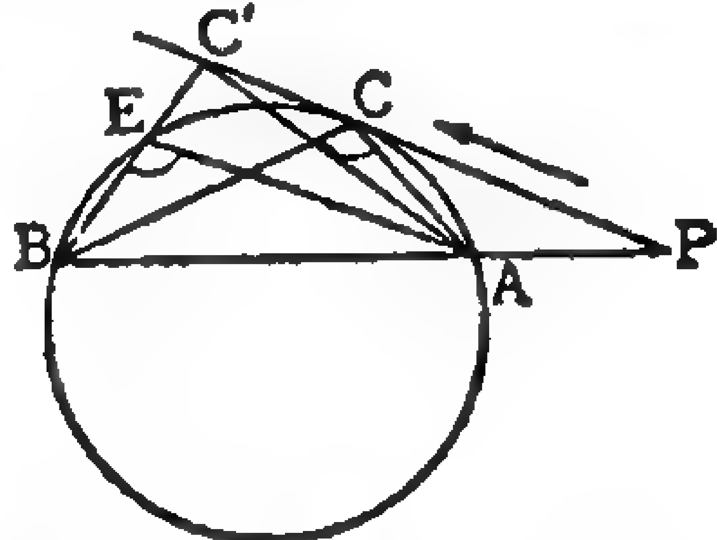
又延长 BG 与圆 AEG 交于点 F''，则

$$BG\cdot BF''=BE\cdot BA=BP^2(由①).$$

$$\therefore\ BG\cdot BF'=BG\cdot BF''.$$

因此，F'、F'' 与 F 相重合. 即 FG 过定点 B.

1600. 设在定线段 BA 的延长线上取一定点 P，若有人从点 P 出发沿过 P 的任意直线（与 AP 不同）向前行进，证明到线段 AB 所张的角最大时的点的距离一定.



解　设某人沿 PC 方向行进，过定点 A 及 B，直线 PC 上的点 C 作与 PC 相切的圆，则点 C 对线段 AB 所张的角最大. 其理由是，在直线 PC 上除点 C 外任取一点 C'，连结 AC'、BC'，设 BC' 与圆的交点为 E，连结 AE，则

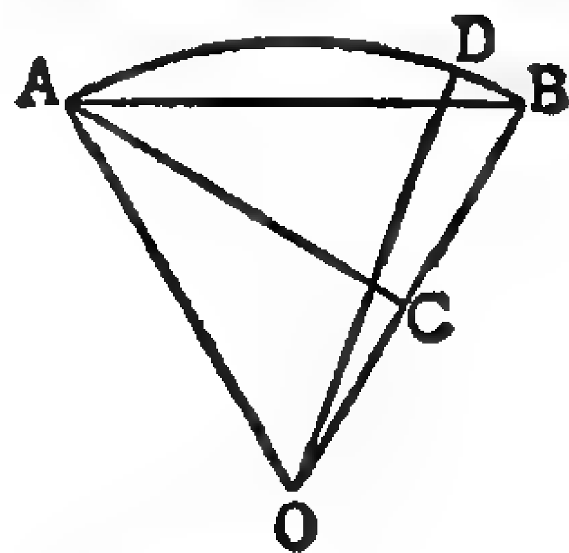
$$\angle ACB=\angle AEB,\ \angle AEB>\angle AC'B,$$

$$\therefore\ \angle ACB>\angle AC'B.$$

完全一样地可证 C' 在 C 与 P 之间的情况.

在 $PC^2=PA\cdot PB$ 中，$PA\cdot PB$ 是定值，所以 PC 也是定值. 而 PC 是从 P 不论以什么方向引出的线段，它的平方总是等于 $PA\cdot PB$. 因此，人从点 P 出发，不论以什么方向行进到 AB 所张的角最大的点的距离，总是一定的.

1601. 从点 A 向弓形 ADB 的半径 OB 引垂线 AC，在弧 AB 上取弧 AD，使它的长等于线段 AC 的长，则弓形 ADB 与扇形 OBD 等积.



解　因为弓形 ADB 的面积

$=$扇形 OAB 的面积$-\triangle OAB$ 的面积

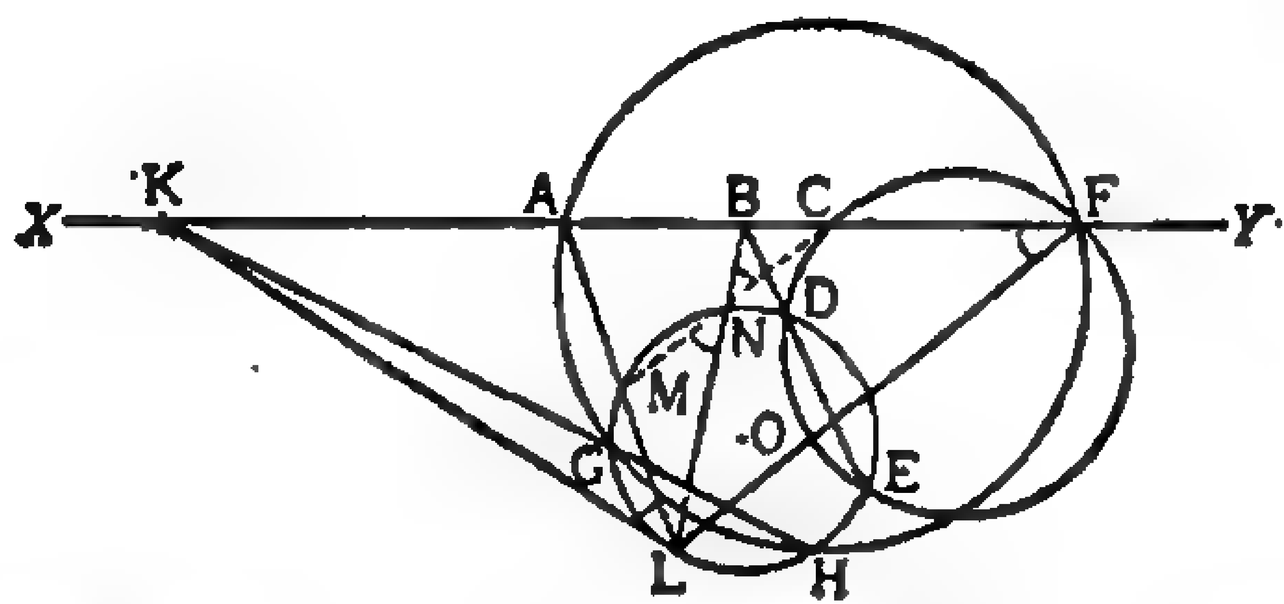
$$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}\cdot OB-\frac{1}{2}AC\cdot OB$$

$$=\frac{1}{2}OB\cdot(\overset{\frown}{ADB}-AC)$$

$$=\frac{1}{2}OB\cdot\overset{\frown}{DB}=扇形\ OBD\ 的面积.$$

1602. 设直线 XY 上有三点 A、B、C，圆 O 与直线 XY 不相交. 过 B 引直线与圆 O 的交点为 D、E，作圆 CDE 与 XY 的交点为 F，过两点 A、F 的任意圆与圆 O 的交点为 G、H，HG 与 XY 的交点为 K，从 K 向圆 O

引切线，设切点为 L、若 AL、BL 与圆 O 的交点分别为 M、N，则 M、N、C 在一条直线上。



解 因为 A、F、H、G 共圆，且 KL 是圆 O 的切线，所以，

$$KA\cdot KF=KG\cdot KH=KL^2.$$

由此可得，KL 与 $\triangle ALF$ 的外接圆在点 L 相切。

$$\therefore\quad \angle ALK=\angle F.$$

又 $\quad BC\cdot BF=BD\cdot BE=BN\cdot BL.$

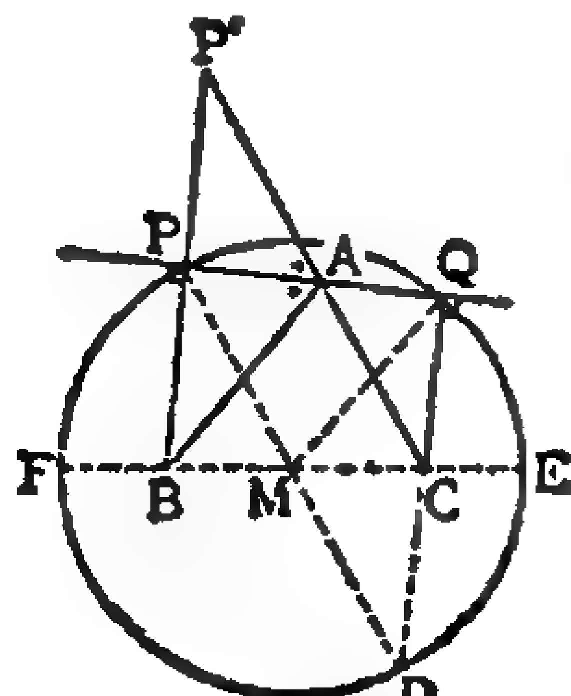
所以，L、N、C、F 在同一圆上。

由此可知，如连结 MN、NC，则

$$\angle BNC=\angle F=\angle ALK=\angle MNL.$$

所以 MN 与 NC 是一条直线。

1603. 在 $\triangle ABC$ 中，底边 BC 一定，$AB+AC=l$，若从 B、C 分别向与 $\angle A$ 相邻的外角的平分线作垂线 BP、CQ，则 $BP\cdot CQ$ 是定值。



解 设 BC 的中点为 M，CA 的延长线与 BP 的延长线交于点 P'，则 $BP=PP'$。又 $AP'=AB$。

$$\therefore\quad PM\parallel P'C \quad 且 \quad PM=\frac{1}{2}P'C.$$

$$\therefore\quad PM=\frac{1}{2}(AB+AC)=\frac{1}{2}l.$$

同理可得，$MQ=\frac{1}{2}l$。

由此可知，以 M 为圆心，MQ 为半径的圆是定圆。

在这里，延长 QC 与圆 M 交于点 D，延长 BC 与圆 M 交于点 E、F，则由 $\angle PQD=90^\circ$。所以 P、M、D 在一条直线上。

$$\therefore\quad CD=PB.$$

又 E、F 是定点，所以 $BP\cdot CQ=CD\cdot CQ=CE\cdot CF$（定值）。

1604. 设由一点 O 出发的三条直线 OL、OM、ON，OL 在 $\angle MON$ 的内部，且 $\angle MON=90^\circ$。在 OL 上任意取一点 P，过 P 引另一条定直线 XY 的平行线 AB，AB 与 OM、ON 分别交于点 A、B，由 A 向 OM 引垂线与 OL 的交点为 C，则 $PC:PB$ 是定值。

解 因为 BA 与定直线 XY 平行，所以

$$PA\cdot PB \text{ 是定值。} \qquad ①$$

又 $\angle CAO=90^\circ$，$\angle COA$ 的大小一定，由此可知，$\angle OCA$ 的大小也是一定的。而 $\angle APC$ 的大小也是一定，所以 $\triangle PAC$ 的形状一定。

$$\therefore\quad PC:PA \text{ 是定值。} \qquad ②$$

由①、②可知，$\frac{PA}{PB}$ 和 $\frac{PC}{PA}$ 都是定值，从而得出这两式的积 $\frac{PC}{PB}$ 也是定值。

1605. 若过两定点 A、B 的圆与定圆 O 相交于点 P、Q，则 $AP\cdot AQ:BP\cdot BQ$ 是定值。

解 设 BA、QP 的交点为 C，则 A、B、Q、P 共圆。所以

$$\triangle BCP\backsim\triangle QCA,\ \triangle CAP\backsim\triangle CQB.$$

$$\therefore\quad \frac{AQ}{PB}=\frac{AC}{PC},\quad \frac{AP}{QB}=\frac{PC}{BC}.$$

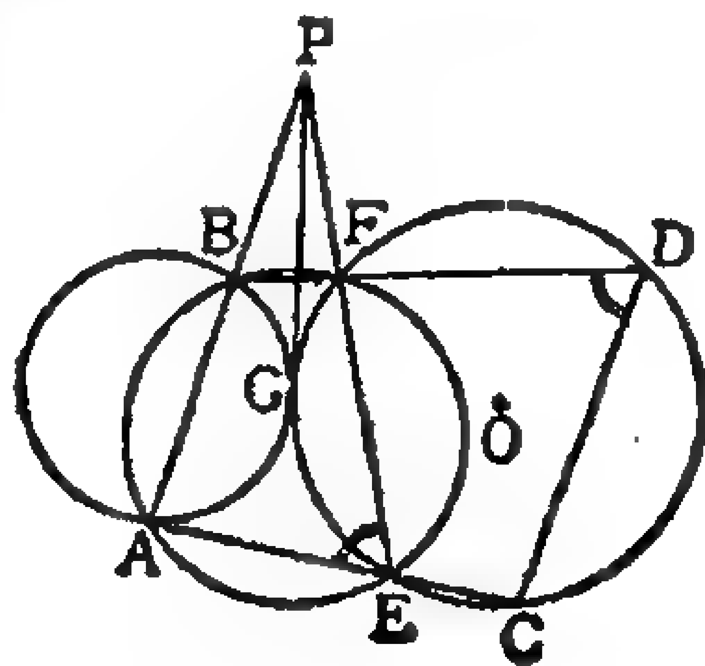
把两式的两边分别相乘，得

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{AQ}{QB}=\frac{AC}{BC}.$$

而 A、B 是定点，O 是定圆，根据问题 **1253** 可知，C 是定点。因此 $AC:BC$ 是定比。

由此可得，$\frac{AP}{BP}\cdot\frac{AQ}{BQ}$ 是定值。

1606. 设 AB 是位置一定的线段，CD 是定圆 O 内平行于 AB 的动弦，若 AC、BD 与圆 O 的交点分别为 E、F，则 EF 过 AB 上的定点。



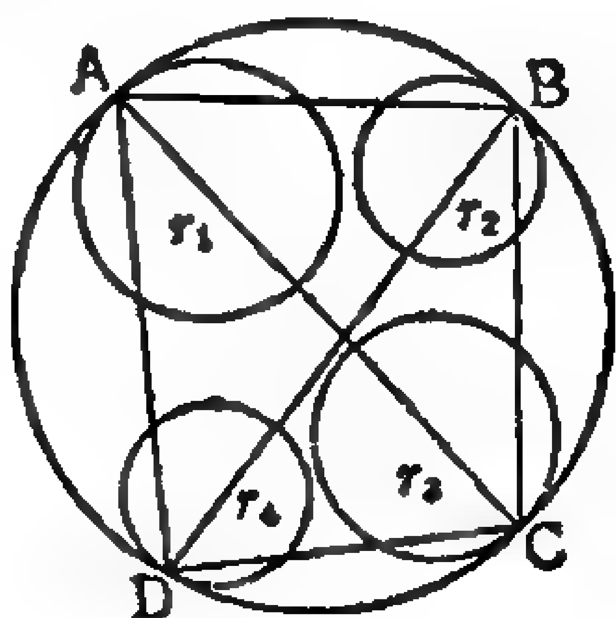
解　设 AB、EF 的交点为 P，由 P 向圆 O 引切线 PG，则 $\angle AEF=\angle D=\angle PBD$.

因此，A、B、F、E 共圆，由此可得，

$$PA\cdot PB=PE\cdot PF=PG^2.$$

若过定点 A、B 作圆 ABG 与圆 O 相切，则点 P 是圆 ABG 和圆 O 的内公切线与 AB 的交点，所以它是定点.

1607． 若有四个圆都与第五个圆内切，第一与第二两个圆的外公切线的长用 $\overline{12}$ 表示，其他两个圆的外公切线也用同样方法来记，则 $\overline{12}\cdot\overline{34}+\overline{23}\cdot\overline{14}=\overline{13}\cdot\overline{24}$.



解　设四个圆与第五个圆的切点分别为 A、B、C、D，连结 AB、BC、CD、DA、AC、BD．又设四个圆的半径分别为 r_1、r_2、r_3、r_4，第五个圆的半径为 R，根据问题 **1411**，得

$$AB^2:\overline{12}^2=R^2:(R-r_1)\cdot(R-r_2).$$

$$\therefore\quad AB^2=\frac{\overline{12}^2\cdot R^2}{(R-r_1)\cdot(R-r_2)},$$

即

$$AB=\frac{\overline{12}\cdot R}{\sqrt{(R-r_1)\cdot(R-r_2)}}.$$

同理可得，

$$CD=\frac{\overline{34}\cdot R}{\sqrt{(R-r_3)(R-r_4)}},$$

$$AD=\frac{\overline{14}\cdot R}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_4)}},$$

$$BC=\frac{\overline{23}\cdot R}{\sqrt{(R-r_2)(R-r_3)}}.$$

因为 A、B、C、D 共圆，由托勒密定理，得

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{12}\cdot\overline{34}R^2}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)(R-r_4)}}+\frac{\overline{23}\cdot\overline{14}R^2}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)(R-r_4)}}=\frac{\overline{13}\cdot\overline{24}R^2}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)(R-r_4)}},$$

即

$$\overline{12}\cdot\overline{34}+\overline{23}\cdot\overline{14}=\overline{13}\cdot\overline{24}.$$

1608． 设四边形 $ABCD$ 的四边为 a、b、c、d，对角线为 m、m'，从任一顶点向以另外三个顶点为顶点的三角形的三边作垂线，则以这三个垂足为顶点的三角形的三边长与三个矩形的面积 ac、bd、mm' 成比例．

解　从 A 向 CD、DB、CB 引垂线，设所引的垂线分别为 AE、AF、AG，则 $\angle AED=\angle AFD=90°$．所以四边形 $AEDF$ 是圆内接四边形，AD 为这个圆的直径．引另一条直径 EH，又引 $\triangle BDC$ 外接圆的直径 BI，连结 IC，则

$$\angle EHF=\angle CDB.$$

而

$$\angle CDB=\angle CIB.$$

$$\therefore\quad \angle EHF=\angle CIB.$$

又

$$\angle EFH=\angle ICB=90°,$$

$$\therefore\quad \triangle EFH\backsim\triangle BCI.$$

$$\therefore\quad EH:EF=BI:BC.$$

$$\therefore\quad EH\cdot BC=EF\cdot BI,$$

$$ac=EF\cdot BI. \qquad ①$$

同理可得，

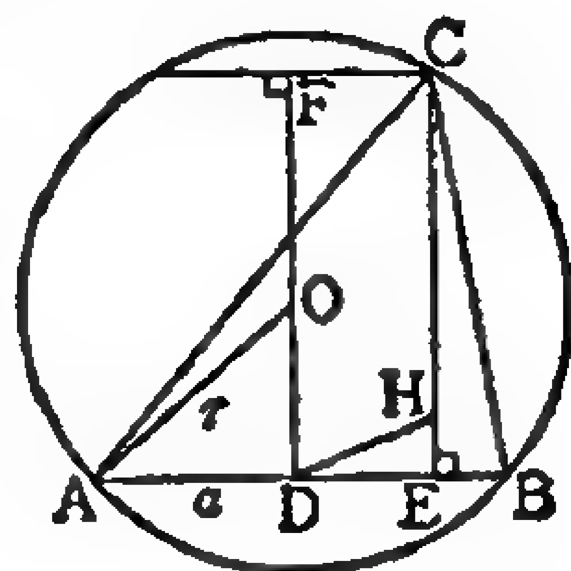
$$bd=FG\cdot BI, \qquad ②$$

$$mm'=EG\cdot BI. \qquad ③$$

由①、②、③，得

$$\frac{EF}{ac}=\frac{FG}{bd}=\frac{EG}{mm'}=\frac{1}{IB}.$$

1609． 若 $\triangle ABC$ 的高 CE 与底边 AB 相等，则垂心 H 到底边的距离 HE 和垂心到底边中点的距离 HD 的和等于底边 AB 的一半．



解　设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 r，圆心为 O，底边 $AB=2a$，高 $CE=2a$．延长 DO 与过点 C 且平行于 AB 的直线相交于点 F，则

$$OF=2a-\sqrt{r^2-a^2}.$$

$$\therefore\quad DE^2=FC^2=OC^2-OF^2=4a\sqrt{r^2-a^2}-3a^2.$$

又

$$HE=2a-CH=2a-2OD=2a-2\sqrt{r^2-a^2},$$

$$DH^2=HE^2+DE^2=4(r^2-a^2)-4a\sqrt{r^2-a^2}+a^2=(2\sqrt{r^2-a^2}-a)^2.$$

$\therefore \quad DH=2\sqrt{r^2-a^2}-a$.

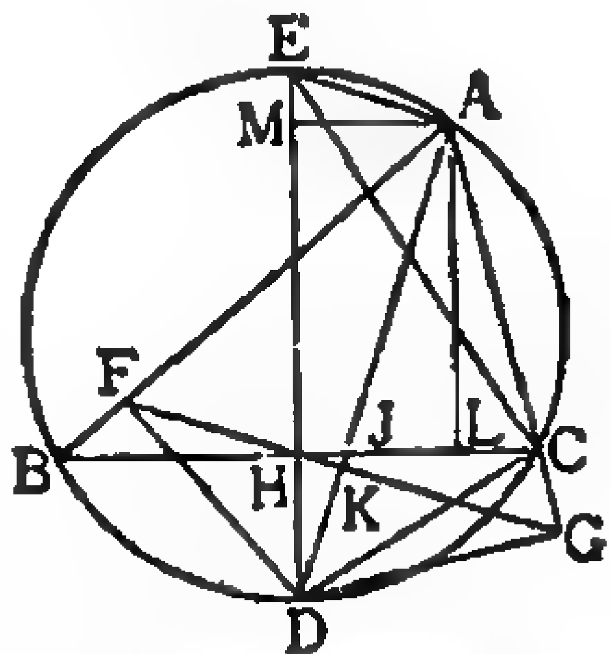
从而得出，$HD+HE=a$

($\because \quad DE^2>0$, $\therefore \quad 2\sqrt{r^2-a^2}-a>0$).

1610. 设$\triangle ABC$的底边BC的中点为H，$\angle A$的平分线AJ，高为AL，则

$$HJ\cdot HL=\left(\frac{AB\sim AC}{2}\right)^2.$$

解 设$\triangle ABC$的外接圆与AJ的延长线交于点D，引直径DE，又从D向AB、AC作垂线DF、DG，则



$$BF=CG=\frac{1}{2}(AB\sim AC)\ (\text{问题}\ \mathbf{536}).$$

很明显，若能证明$HJ\cdot HL=CG^2$就可以了。

连结FH、GH、DC、CE、EA。又从A向DE引垂线AM，则$\angle EAD=\angle EHJ=90°$。所以，四边形$EAJH$是圆内接四边形，

$\therefore \quad DE\cdot DH=DA\cdot DJ$.

而 $\angle ECD=90°$，$CH\perp ED$，

$\therefore \quad DE\cdot DH=DC^2$.

$\therefore \quad DA\cdot DJ=DC^2$. ①

又$\angle AGD=90°$，设AD与FG交于点K，则$AD\perp GK$。

$\therefore \quad DA\cdot DK=DG^2$. ②

$\because \quad DC^2-DG^2=CG^2$,

$\therefore \quad DA\cdot DJ-DA\cdot DK=CG^2$.

$\therefore \quad DA\cdot(DJ-DK)=CG^2$.

从而得出，$AD\cdot JK=CG^2$. ③

又 $\triangle ADM\backsim\triangle HJK$,

$\therefore \quad AD:AM=HJ:JK$,

即 $AD\cdot JK=HJ\cdot AM=HJ\cdot HL$.

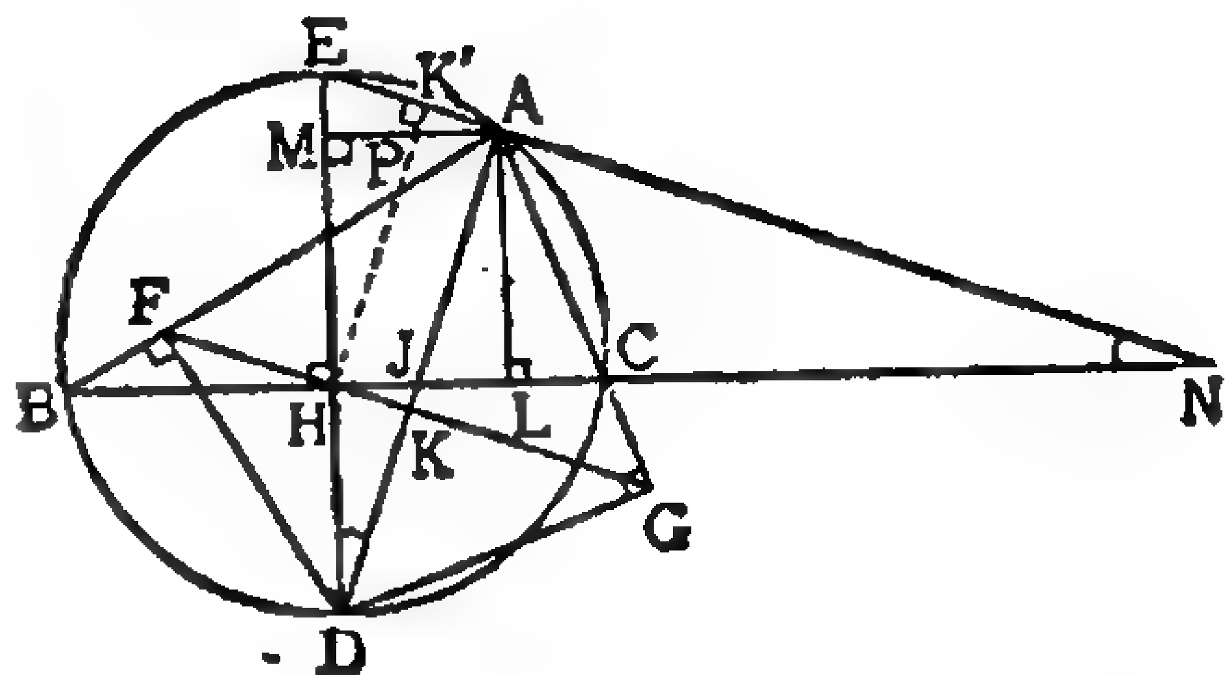
由③，得 $HJ\cdot HL=CG^2$.

$$\therefore \quad HJ\cdot HL=\left(\frac{AB\sim AC}{2}\right)^2.$$

1611. 在上题中，把顶角A的平分线用与它相邻的外角的平分线AN代替，则

$$HN\cdot HL=\left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2.$$

解 与上题一样作图，连结EA，并延长EA与BC的延长线交于点N，则EA是与$\angle A$相邻的外角的平分线。



$$\therefore \quad AF=AG=\frac{1}{2}(AB+AC)\ (\text{问题}\ \mathbf{536}).$$

本问题中如能证明$HN\cdot HL=AG^2$就可以了。

过H引AD的平行线HK'与EN交于点K'，且与AM交于点P，又AD、FG的交点为K，则

$\angle NK'H=\angle AMD=90°$.

又A、H、D、N共圆，

$\therefore \quad \angle MDA=\angle ANH$.

$\therefore \quad \triangle HK'N\backsim\triangle AMD$.

$\therefore \quad HN:HK'=AD:AM$,

即 $HN\cdot AM=AD\cdot HK'$.

而$AM=HL$. 又$K'HKA$是矩形，

$\therefore \quad HK'=AK$.

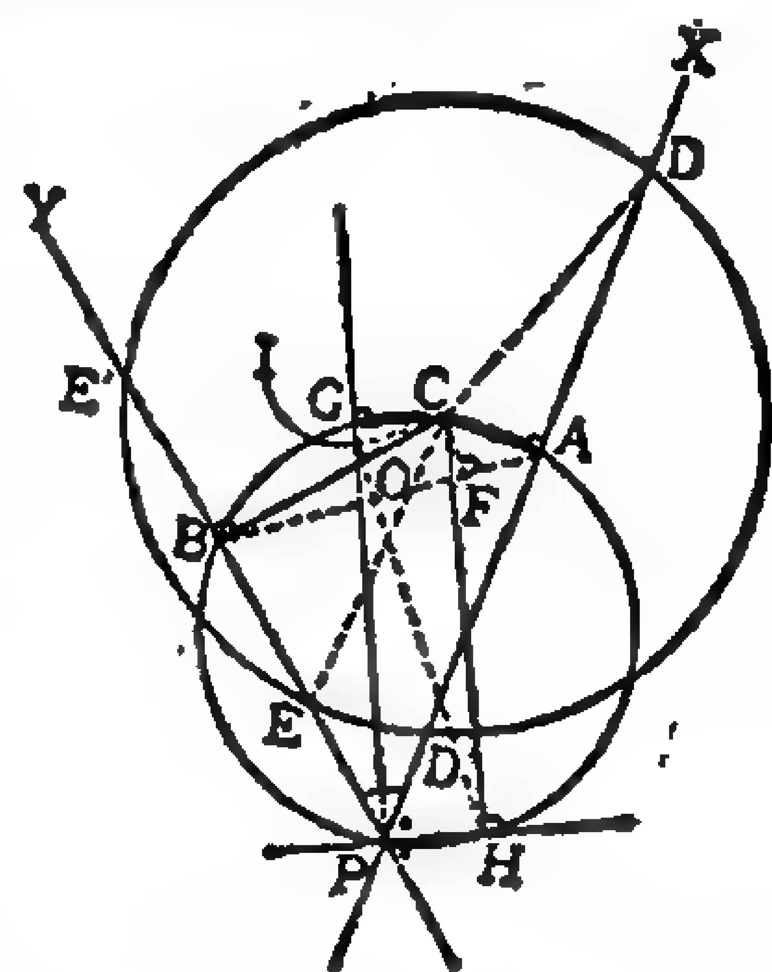
$\therefore \quad HN\cdot HL=AD\cdot AK$.

$\because \quad \angle AGD=90°$，$GK\perp AD$.

$\therefore \quad AD\cdot AK=AG^2$.

$$\therefore \quad HN\cdot HL=AG^2=\left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2\ (\text{问题}\ \mathbf{536}).$$

1612. 若圆C在两条定直线上分别割下给定的长，从圆心C向这两条定直线的夹角的两条平分线引两条垂线，则以这两垂线为邻边的矩形的面积是一定的。



解 设圆C在两条定直线PX、PY上割下的给定长分别为DD'、EE'，从圆心C向PX、PY的夹角的两条平分线所作的垂线分别为CG、CH，从C向DD'、EE'分别作垂线CA、CB，则

$AC^2+AD^2=CD^2$, $BC^2+BE^2=CE^2$.

而　　　　$CE=CD$.

$\therefore\quad AC^2+AD^2=BC^2+BE^2$.

$\therefore\quad AD^2-BE^2=BC^2-AC^2$.

而 AD、BE 分别是 DD'、EE' 的一半，且它们都是定长的线段.

所以，　BC^2-AC^2 是定值.　　①

又 $\angle CAP=\angle CBP=90°$，所以四边形 $BCAP$ 是圆内接四边形.

作四边形 $BCAP$ 的外接圆，则这个圆过点 G、H，且 $\angle GPH=90°$. 由此可知，GH 是这个圆的直径.

又 $\angle BPG=\angle APG$，所以 GH 是 BA 的垂直平分线.

设 GH、BA 的交点为 O，则 $AO=BO$.

在 AB、GH 上作垂线 CF、CI，则

$BC^2=BF^2+FC^2$, $AC^2=AF^2+FC^2$.

$$\therefore\quad BC^2-AC^2=BF^2-AF^2=(BF+AF)(BF-AF)=AB\cdot 2OF.$$

由①得出，BC^2-AC^2 是定值. 所以 $AB\cdot 2OF$ 是定值.

而 $CIPH$ 是矩形.

$\therefore\quad OF=CI$.

由此可得，$AB\cdot CI$ 是定值.

又由 $\angle APB$ 是定角，可知 AB 与直径 GH 的比是定值. 因此 $AB\cdot CI:GH\cdot CI$ 也是定值. 而 $AB\cdot CI$ 是定值. 所以 $GH\cdot CI$ 是定值.

又 $\triangle GCH\backsim\triangle CIH$，所以

$GH\cdot CI=GC\cdot CH$.

由此可得，$GC\cdot GH$ 是定值.

1613. 设把线段 AB 按 $m:n$ $(m>n>0)$ 的内分、外分的点分别为 C、D，以 CD 为直径的圆的圆心为 K. 证明下述的(1)～(3)，再回答(4).

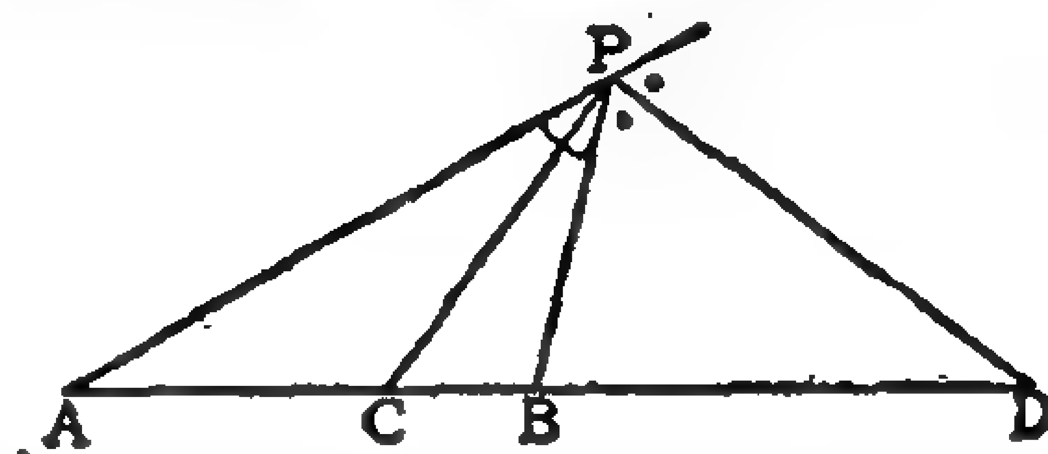
(1) 满足 $AP:BP=m:n$ 的点 P 在圆 K 上.

(2) 满足 $AP:BP>m:n$ 的点 P 在圆 K 的内部.

(3) 满足 $AP:BP<m:n$ 的点 P 在圆 K 的外部.

(4) (1)、(2)、(3)的逆命题成立吗？如果成立，说明成立的理由.

解　(1) 因为 C、D 分别是把 AB 按比 $AP:BP$ 内分、外分的点，所以 PC 是 $\angle APB$ 的平分线，PD 是与 $\angle APB$ 相邻的外角的平分线. 从而得出，$\angle CPD$ 等于直角，所以点 P 是在以 CD 为直径的圆 K 上.



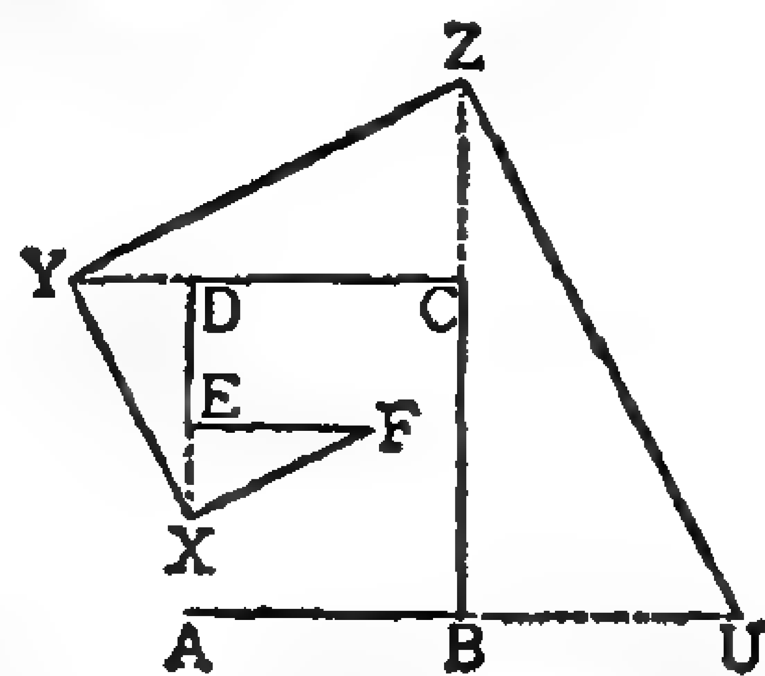
(2) 设把 AB 按 $AP:BP$ 内分、外分的点分别为 C'、D'，P 是以 $C'D'$ 为直径的圆上的点.

由假设 $AP:BP>m:n$ 可知，把 AB 按比 $m:n$ 内分的点 C 在 A 与 C' 之间，外分点 D 在 BD' 的延长线上，$C'D'$ 在 CD 上，圆 K 则在以 $C'D'$ 为直径的圆的外侧. 所以 $C'D'$ 为直径的圆上的点 P 在圆 K 的内部.

(3) 设 $AP:BP<m:n$，这时，把 AB 按比 $m:n$ 内分、外分的点 C、D 在 C'、D' 的内侧. 因此以 $C'D'$ 为直径的圆上的点 P 在以 CD 为直径的圆 K 的外部.

(4) 因为(1)、(2)、(3)的假设包括一切可能的情况，而其结论是互不相容的. 所以这定理的逆命题可根据转换法得到证明. 所以，这个定理的逆定理总成立.

1614. 图 $ABCDEF$ 表示一条折线（点 B、C、D、E 是折线的直角顶），线段的长分别为 $EF=a$，$DE=b$，$CD=c$，$BC=d$，$AB=e$. 又，作另一条直角折线 $FXYZU$，使直角顶 X 在直线 DE 上，第二直角顶 Y 在直线 CD 上，最后的直角顶 Z 在直线 BC 上，回答下列问题：



(1) $\triangle EFX$、$\triangle DXY$、$\triangle CYZ$、$\triangle BZU$ 都是相似的，为什么？

(2) 若 $\dfrac{EX}{EF}=x$，则 $EX=ax$，$DX=ax+b$. 设 AU 的长为 y，把 y 用 a、b、c、d、e、x 来表示.

解　(1) 在 $\triangle EFX$、$\triangle DXY$ 中，

$\angle FEX=\angle XDY=90°$,

$\angle EXF=90°-\angle DXY=\angle DYX$,

$\therefore\ \triangle EFX \backsim \triangle DXY$.

同理可得，$\triangle DXY \backsim \triangle CYZ \backsim \triangle BZU$.

(2) 由假设 $\frac{EX}{EF}=x$. 可得，

$$\frac{YD}{DX}=\frac{ZC}{CY}=\frac{UB}{BZ}=x.$$

而 $EF=a,\ DE=b,\ CD=c,$

$BC=d,\ AB=e$.

由此可得，$EX=ax,$

$$DX=EX+DE=ax+b,$$

$$DY=xDX=ax^2+bx,$$

$$CY=DY+CD=ax^2+bx+c,$$

$$CZ=xCY=ax^3+bx^2+cx,$$

$$BZ=ax^3+bx^2+cx+d,$$

$$BU=xBZ=ax^4+bx^3+cx^2+dx,$$

$$AU=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e.$$

第三编　轨　　迹

1. 基本轨迹

1615. 什么是适合某一条件的点的轨迹。

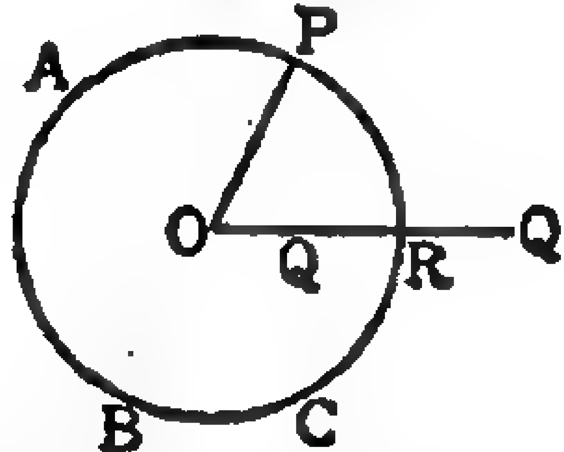
解 轨迹定义的方式虽然各种各样，但通常如下所述：

定义 若某一图形上的点，都适合于给定的条件，而适合于给定条件的点都在这个图形上，则把这个图形叫做适合于给定条件的点的轨迹。例如，到定点 O 的距离保持定长 l 的点移动时形成的一个圆，在这个圆上的点到 O 的距离都等于定长 l。反之，到定点 O 的距离等于定长 l 的点，都在这个圆上。所以，圆 O 称为到定点 O 的距离等于定长 l 的点的轨迹。

注 在证明时，两个命题都可以用它们的逆否命题来代替。

1616. 求到定点 O 的距离等于定长 l 的点的轨迹。

解 若以 O 为圆心，l 为半径画圆 ABC，则圆 ABC 就是所求的轨迹。



在圆 ABC 上取任意点 P，连结 OP。因为 OP 是圆 ABC 的半径，所以 OP 等于 l。又在这圆外的点都不适合条件，因为在这圆外(或圆内)取任意点 Q，连结 OQ，若 OQ(或延长 OQ)与圆交于 R，因为 R 与 Q 不重合，所以 $OQ\neq OR$。可是 $OR=l$，所以 $OQ\neq l$。

因此，圆 ABC 是到 O 的距离等于 l 的点的轨迹。

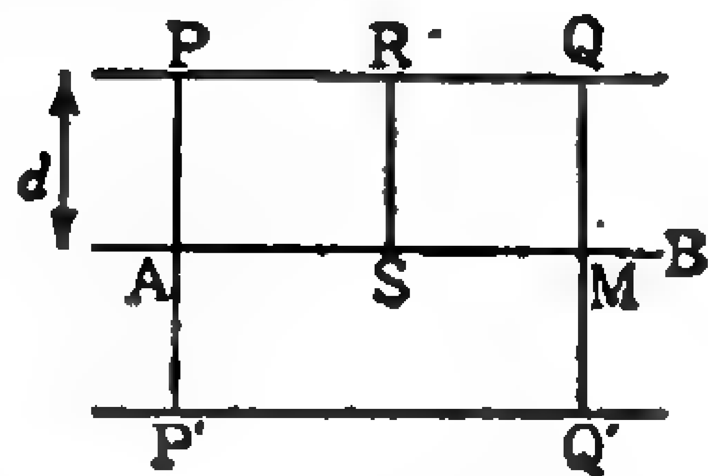
1617. 求到定直线的距离等于定长的点的轨迹。

解 设到定直线 AB 的距离等于 d 的任意点为 Q，从 Q 向 AB 作垂线 QM。

与点 Q 的同侧取一点 P，从 P 作 AB 的垂线 $AP=d$，则 $AP \mathrel{\underline{\parallel}} MQ$。

$$\therefore\ PQ\parallel AM.$$

因此，点 Q 在过 P 而平行于 AB 的直线上。其次，若从直线 PQ 上的任意点 R，向 AB 作垂线 RS，因为四边形 $PASR$ 是矩形，所以 $RS=PA=d$。因此，过 P 且平行于 AB 的直线，就是与 P 位于 AB 同一侧的且与 AB 距离为 d 的点的轨迹。对于 AB 的另一侧的情况可类似地进行讨论。



由此可得，从 AB 上的一点 A 作 AB 的垂线，在这垂线上截取 $AP=AP'=d$，得到两点 P、P'，过 P、P' 分别平行于 AB 的两条直线，就是所求的轨迹。

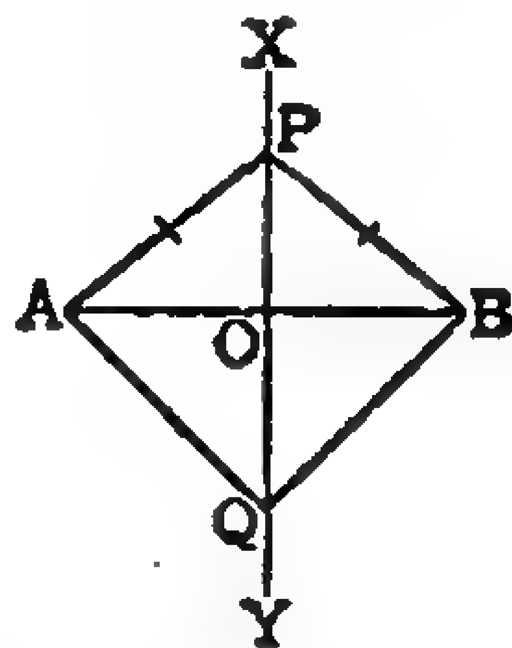
1618. 求到两定点距离相等的点的轨迹。

解 设 A、B 为两定点，P 为与 A、B 距离相等的任意点。连结 AB 的中点 O 和 P，则

$$\triangle POA\cong\triangle POB$$

(三边相等)。

$$\therefore\ \angle POA=\angle POB=90^\circ.$$



所以，点 P 在过点 O 而垂直于 AB 的直线(XY)上。

反之，设 Q 为 XY 上的任意点，则

$\triangle QAO\cong\triangle QBO$　(两边夹角相等)，

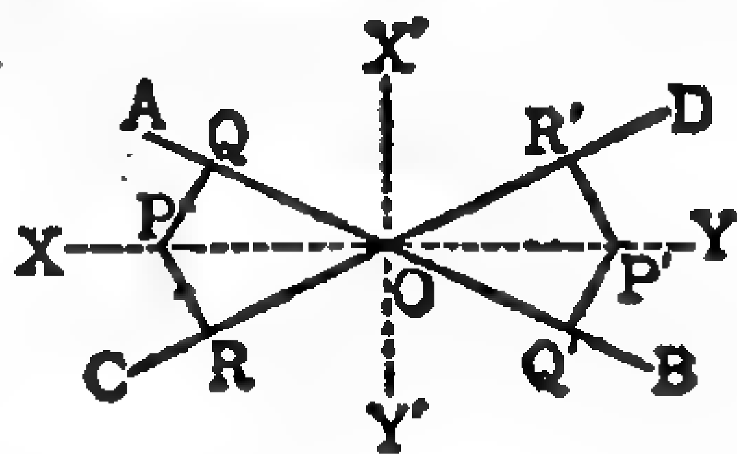
$$\therefore\ QA=QB.$$

由此可得，所求的轨迹是 AB 的垂直平分线 XY。

1619. 求到两相交直线距离相等的点的轨迹。

解 设 O 为两直线 AB、CD 的交点，P 为到 AB、CD 的距离相等的任意点，即从点 P 向 AB、CD 作垂线，设垂足分别为 Q、R，则 $PQ=PR$。

连结 PO. 两个直角三角形 POQ、POR，因为斜边和一条直角边对应相等，所以它们全等。



$\therefore\ \angle QOP=\angle ROP$.

因此，点 P 在两相交直线 AB、CD 所成角的平分线 XY 或 $X'Y'$ 上。

其次，在两相交直线 AB、CD 所成角的平分线 XY、$X'Y'$ 的任一条上，例如在 XY 上任取一点 P'，从 P' 向 AB、CD 分别作垂线 $P'Q'$、$P'R'$，则在两个直角三角形 $P'OQ'$、$P'OR'$ 中，$\angle Q'OP'=\angle R'OP'$，$OP'$ 是公共边，所以，

$$\triangle P'OQ'\cong\triangle P'OR'.$$

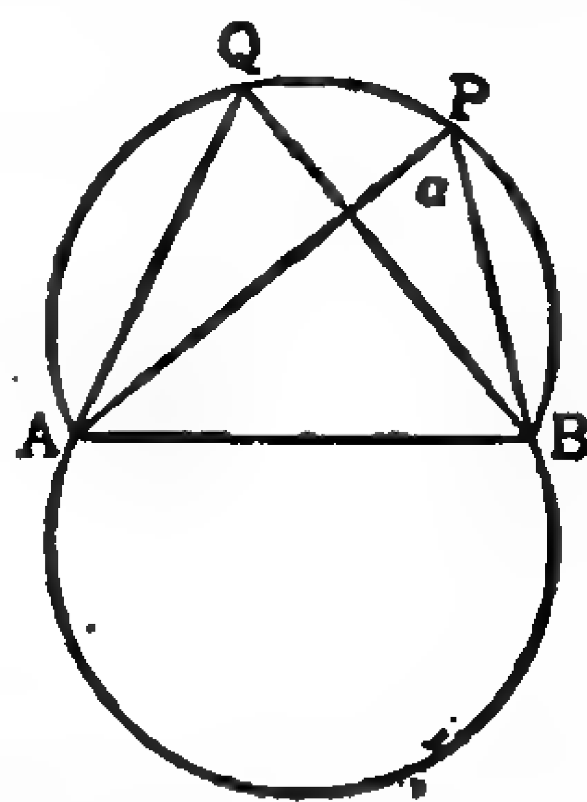
$$\therefore\ P'Q'=P'R'.$$

因此，在角平分线 XY 或 $X'Y'$ 上所有的点，到 AB、CD 的距离相等。

由此可得，到 AB、CD 的距离相等的点的轨迹，是 AB、CD 两交角的平分线 XY、$X'Y'$。

1620. 求对定线段张定角 α 的点的轨迹。

解　设在 AB 的一侧，P 为对 AB 张定角 α 的任意点，即假定 $\angle APB=\alpha$，则 P 在以 AB 为弦，所含的圆周角等于 α 的弓形弧上。



又设 Q 是弧 APB 上的任意点，则

$\angle AQB=\angle APB=\alpha$.

所以在 AB 的一侧，所求的轨迹，是以 AB 为弦，所含的圆周角等于 α 的弓形弧。

同理，在 AB 的另一侧也可以得到同样的结论。从而得出，所求的轨迹是关于 AB 对称的以 AB 为弦，所含的圆周角等于 α 的两个弓形弧。

2. 线段(或弦)的中点或其定比分点的轨迹

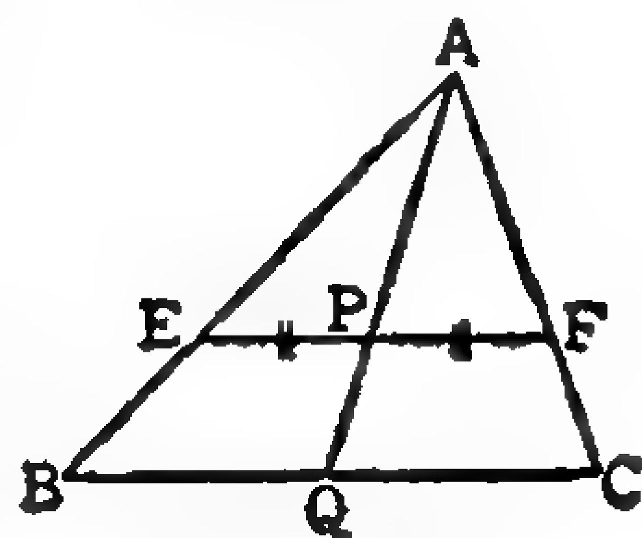
1621. 一直线平行于三角形的底边，且被其他两边所截，求所截得线段的中点的轨迹。

解　设平行于 $\triangle ABC$ 底边 BC 的直线，被两边 AB、AC 截得的线段为 EF，又 EF 的中点为 P. 连结 AP，并延长 AP 与 BC 交于点 Q，则

$$\frac{EP}{BQ}=\frac{AP}{AQ},\quad \frac{FP}{CQ}=\frac{AP}{AQ}.$$

$$\therefore\ \frac{EP}{BQ}=\frac{FP}{CQ}.$$

而 P 是 EF 的中点，所以 $EP=FP$. 从而得出，$BQ=CQ$，即 Q 为 BC 的中点。



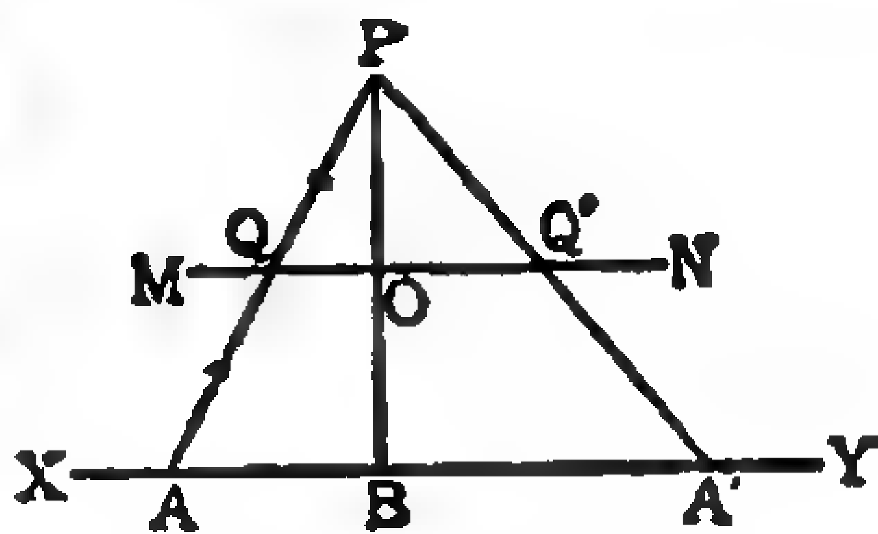
因此，点 P 在 $\triangle ABC$ 的中线 AQ 上。

反之，AQ 上的点适合条件。

因此，点 P 的轨迹，是连结 $\triangle ABC$ 的顶点 A 和底边 BC 的中点 Q 的线段。

1622. 连结定点与定直线上的任意点的线段，求这线段的中点的轨迹。

解　设 P 为定点，XY 为定直线，A 为 XY 上的任意点，连结 PA，Q 为 PA 的中点。



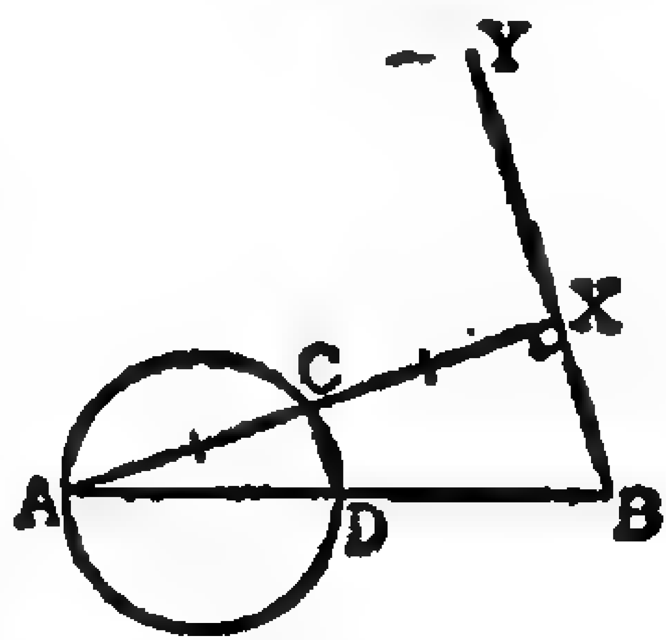
从 P 向 XY 作垂线 PB，设 O 为 PB 的中点，则 O 是一个定点。又因为 Q、O 分别是 PA、PB 的中点。所以，$QO\parallel AB$.

因此，点 Q 在过 O 而平行于 XY 的直线设为 MN 上。

反之，若在 MN 上任取一点 Q'，连结 PQ' 并延长 PQ' 与 XY 相交于点 A'. 因为 O 是 PB 的中点，且 $OQ'\parallel BA'$，所以 Q' 是 PA' 的中点。

由此可得，所求的轨迹，是过点 O 而平行于 XY 的直线。

1623. 设 A、B 是两定点，BY 是过 B 的任意射线。从 A 向 BY 作垂线 AX，求垂线 AX 的中点的轨迹。



解 设 C 为 AX 的中点，D 为 AB 的中点，则

$$\angle ACD=\angle AXB=90^\circ.$$

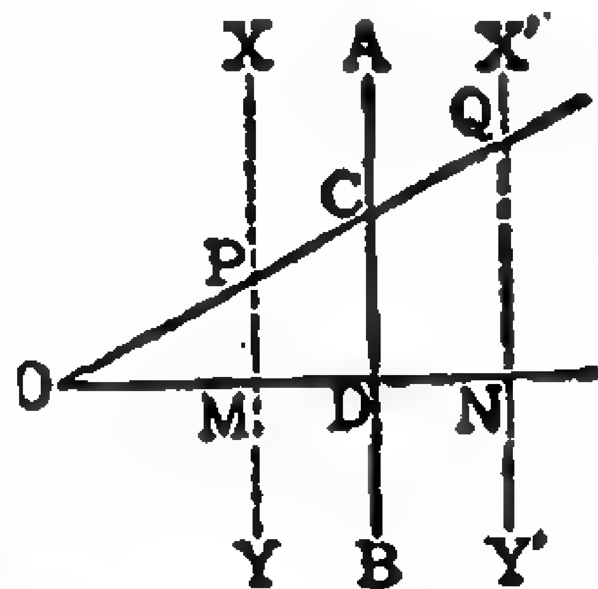
所以，C 在以 AD 为直径的圆上。

反之，很明显，以 AD 为直径的圆上的点适合条件。

由此可得，所求的轨迹是以 AD 为直径的圆。

1624. 设 O 为定点，AB 为定直线，连结 O 与 AB 上的任意点的线段，求把这线段分为 $a:b$ 的点的轨迹。

解 连结 O 与 AB 上任一点 C 得线段 OC，按比 $a:b$ 内分和外分 OC，设分点分别为 P、Q。又从 O 向 AB 作垂线 OD，按比 $a:b$ 内分和外分 OD，得分点 M、N，则 M、N 是定点。连结 PM、QN，则



$$\frac{OP}{PC}=\frac{a}{b}=\frac{OM}{MD},\quad \frac{OQ}{CQ}=\frac{a}{b}=\frac{ON}{DN}.$$

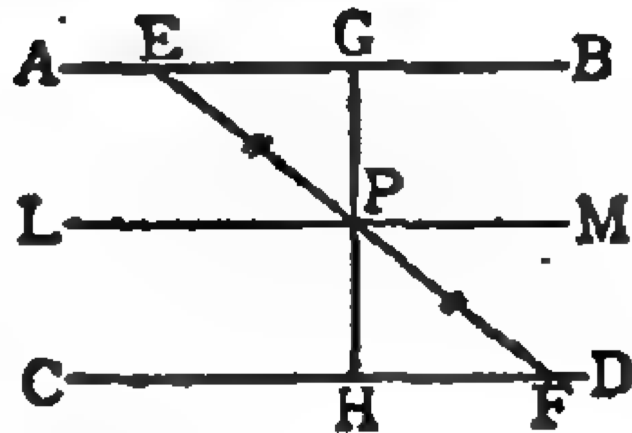
所以 PM、QN 平行于 AB。由此可知，P、Q 分别在过两定点 M、N 而平行于 AB 的直线 XY、$X'Y'$ 上。

反之，很明显，XY、$X'Y'$ 上的所有点都适合条件。

因此，XY、$X'Y'$ 就是所求的轨迹。

1625. 一线段的两端分别在两平行线上，求这线段的中点的轨迹。

解 设 EF 为一任意线段，它的两端 E、F 分别在两平行线 AB、CD 上，P 为 EF 的中点。从 P 作 AB、CD 的垂线 GPH，显然，



$$\triangle PEG\cong\triangle PFH.$$

$$\therefore\quad PG=PH.$$

由此可知，P 在到 AB、CD 的距离相等且平行于 AB 的直线上。

反之，容易证明 LM 上的任意点都适合条件。

因此，所求的轨迹是直线 LM。

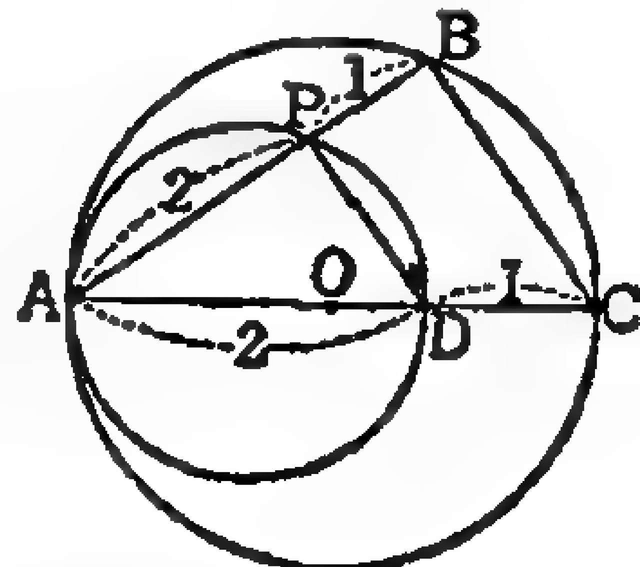
1626. A 为定圆上的定点，B 为这圆上的任一点，在弦 AB 上取点 P，使 $AP=2PB$，求点 P 的轨迹。

解 过定点 A 作任意弦 AB，在 AB 上取一点 P，使

$$AP=2PB.$$

过 A 作直径 AC，在 AC 上取一点 D，使

$$AD=2DC.$$



连结 BC、PD，则

$$AP:PB=AD:DC=2:1.$$

所以，PD 平行于 BC。

$$\because\ \angle ABC=90^\circ,\quad \therefore\ \angle APD=90^\circ.$$

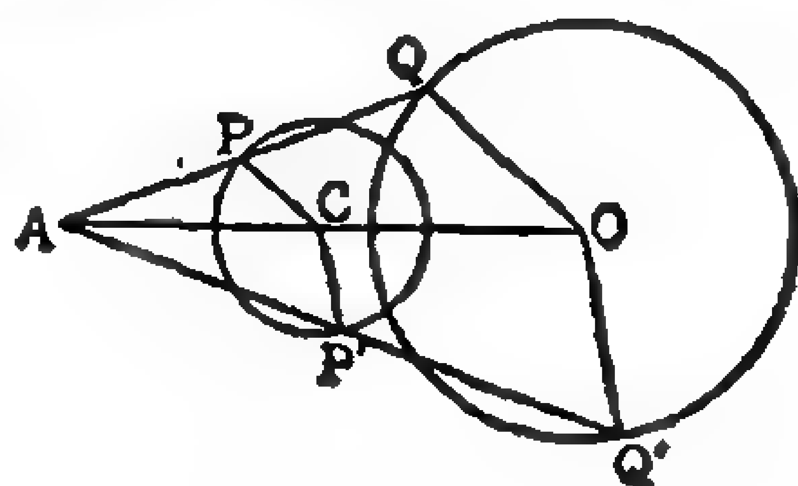
由此可知，点 P 在以 AD 为直径的圆上。

反之，容易证明以 AD 为直径的圆上的点都适合条件。

因此，所求的轨迹是以 AD 为直径的圆。

1627. 求从定点 A 到圆的线段的中点的轨迹。

解 设 O 为定圆的圆心，C 为 AO 的中点，Q 为圆上的任意点，P 为 AQ 的中点，则



$$CP=\frac{1}{2}OQ$$

(定值)。

由此可知，点 P 在以 C 为圆心，$\frac{1}{2}OQ$ 为半径的圆上。

反之，设 P' 为圆 C 上的任意点，延长 AP'，与过 O 且平行于 CP' 的直线交于 Q'，因为 C 是 AO 的中点，所以

$$AP'=P'Q' \quad 且 \quad CP'=\frac{1}{2}OQ'.$$

而 CP' 等于圆 O 的半径的一半，所以 OQ' 等于圆 O 的半径。因此，Q' 在圆 O 上。又由 $AP'=P'Q'$，可知点 P' 为 AQ' 的中点。由此可得，点 P 的轨迹是圆 C。

注 定点 A 也可以在圆 O 内。

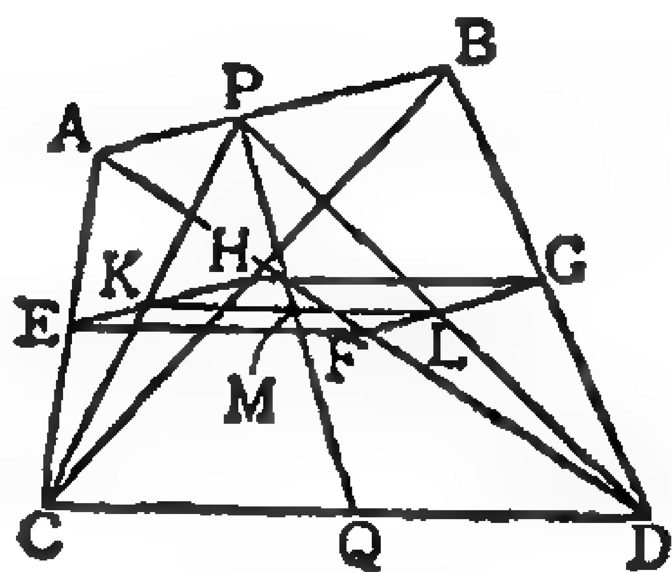
1628. 设 AB、CD 为两条不平行的线段，线段 PQ 的两端分别在 AB、CD 上，求 PQ 的中点 M 的轨迹。

解 设 E、F、H、G 分别为 AC、AD、BC、BD 的中点，则

$$EF\parallel CD\parallel HG,$$

$$EH \parallel AB \parallel FG.$$

设 PC 与 EH、PD 与 FG 分别相交于 K、L，则 K、M、L 在平行于 CD 的直线上，而且 KL 在 EF 与 HG 之间。因此 M 在两条确定的平行线段 EF 和 HG 之间。同理，



连结 QA、QB，容易知道，点 M 在 EH 和 FG 之间。由此可知，点 M 在确定的平行四边形 $EFGH$ 的边上或内部。

反之，若在 $EFGH$ 内任取一点 M'，过 M' 引 $K'L'$ 平行于 EF 且与 EH、FG 的交点分别为 K'、L'，延长 CK' 与 AB 交于点 P'。因为 $AB \parallel EH$，所以

$$EK':K'H = AP':P'B.$$

而 $$EK':K'H = FL':L'G,$$

$$\therefore \quad AP':P'B = FL':L'G.$$

又 $$FG \parallel AB,$$

所以，P'、L'、D 在一直线上。

而 $P'K' = K'C$，$P'L' = L'D$，若延长 $P'M'$ 与 CD 交于 Q'，则

$$P'M' = M'Q'.$$

所以，点 M' 适合条件。

因此，所求的轨迹是 □$EFGH$ 内的平面部分。

1629. 定圆 O 内有定长的弦 AB，在 AB 上取一点 C，使 $AC = \frac{1}{4}AB$，求点 C 的轨迹。

解 设圆 O 的半径为 r，$AB = 4l$，OC 与圆的交点为 D，DE 为直径，则

$$AC \cdot CB = DC \cdot CE,$$

即

$$l \times 3l = (r - OC)(r + OC),$$

$$3l^2 = r^2 - OC^2.$$

$$\therefore \quad OC^2 = r^2 - 3l^2.$$

$$\therefore \quad OC = \sqrt{r^2 - 3l^2}.$$

由此可知，点 C 在以 O 为圆心，半径的长为 $\sqrt{r^2-3l^2}$ 的圆上。

反之，在以 O 为圆心，半径的长为 $\sqrt{r^2-3l^2}$ 的圆上取任意点 P，以 P 为圆心，l 为半径的弧与定圆 O 相交于 Q，QP 与定圆 O 相交于 R，则

$$QP \cdot PR = (r - OP)(r + OP)$$
$$= r^2 - OP^2 = r^2 - (r^2 - 3l^2)$$
$$= 3l^2.$$

$$\therefore \quad l \cdot PR = 3l^2. \quad \therefore \quad PR = 3l.$$

$$\therefore \quad QR = 4l.$$

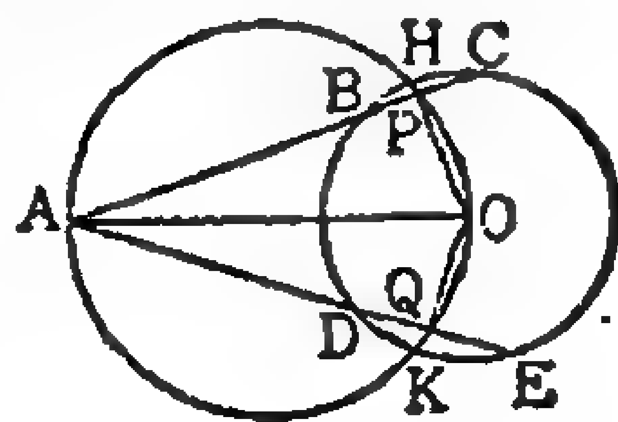
由此可知， $$QP = \frac{1}{4}QR.$$

即点 P 适合条件。

因此，所求的轨迹，是以 O 为圆心，半径的长为 $\sqrt{r^2-3l^2}$ 的圆。

1630. 过定点 A，向定圆 O 作割线，被圆所截得的弦，求这弦的中点的轨迹。

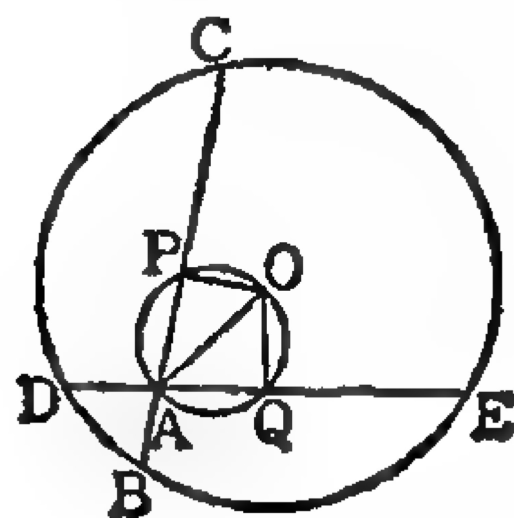
解 设 P 为适合条件的点，即从点 A 所引割线 AC，被圆所截得的弦 BC 的中点为 P。因为 $\angle APO = 90°$，所以 P 在以 AO 为直径的圆弧 HOK（图 1）或圆 APO（图 2）上。



(1)

反之，若 Q 是弧 HOK 或圆 APO 上的任意点，连结 AQ 的直线与圆 O 的交点为 D、E。因为 $\angle AQO = 90°$，所以 Q 是弦 DE 的中点，即点 Q 适合条件。

因此，所求的轨迹，当 A 在圆 O 外时，是弧 HOK（图 1）；当 A 在圆 O 内时，则是圆 APO（图 2）。



(2)

注 当 A 在圆上时，可以仿照图 2 求出轨迹。

1631. 连结定点 P 和定圆 O 上的任意点 M，在 PM 的延长线上取点 N，使

$$PM:MN = 1:2,$$

求点 N 的轨迹。

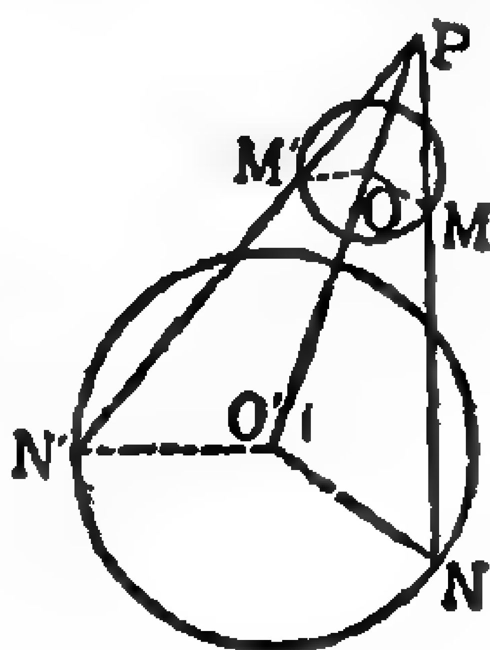
解 设已知圆 O，若在 PO 的延长线上取点 O'，使 $PO:OO' = 1:2$，则 O' 是定点。

又 $$PO:OO' = PM:MN,$$

所以 $$OM \parallel O'N.$$

$$\therefore \quad \frac{O'N}{OM} = \frac{PO'}{PO} = \frac{3}{1}.$$

因此，点 N 在以 O' 为圆心，以 $3OM$ 为半径的圆上。



反之，在以 O' 为圆心，以 $3OM$ 为半径的圆上任取一点 N'，又在 PN' 上取点 M'，使 $PM':M'N'=1:2$，则

$$PO:OO'=PM':M'N'.$$

$$\therefore\quad OM'\parallel O'N'.$$

$$\therefore\quad \frac{OM'}{O'N'}=\frac{PO}{PO'}=\frac{1}{3},$$

$$OM'=\frac{1}{3}O'N'=OM.$$

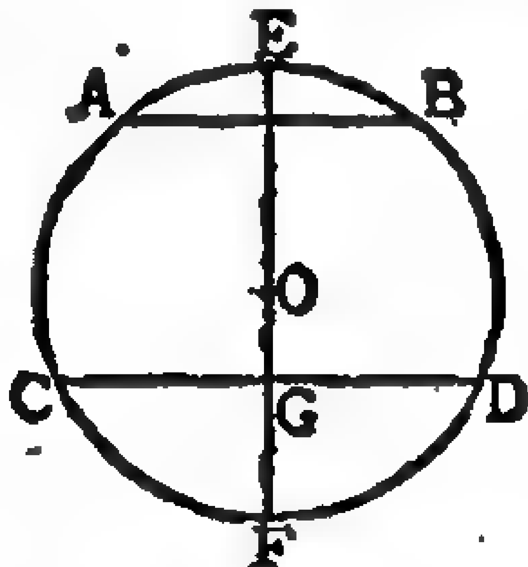
所以，点 M' 在圆 O 上。由此可知，点 N' 适合条件。

因此，所求的轨迹，是以 O' 为圆心，半径的长等于圆 O 的半径的三倍的圆。

1632. 求定圆中所有平行弦的中点的轨迹。

解 设 AB 为圆 O 的一条弦，则平行于 AB 的所有弦的中点，显然都在垂直于 AB 的直径 EF 上。

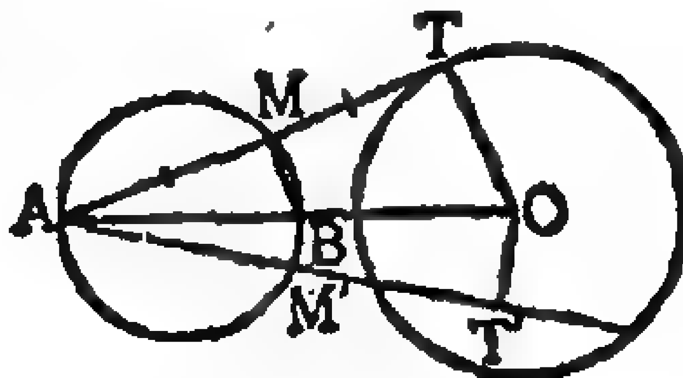
反之，在 EF 上任取一点 G，过 G 作弦 CD 平行于 AB，则 $CD\perp EF$，因此 G 是弦 CD 的中点。



因此，所求的轨迹是圆 O 的直径 EF。

1633. 设以定点 O 为圆心的许多同心圆，从这些圆外的定点 A，向所有圆作切线，求切点和点 A 的连线中点的轨迹。

解 从点 A 向任意圆 O 作切线，设切点为 T，AT 的中点为 M。



若 AO 的中点为 B，则

$$BM\parallel OT.$$

又 $\angle ATO=90°$，

所以 $\qquad \angle AMB=90°$。

所以，点 M 在以 AB 为直径的圆上。

反之，在以 AB 为直径的圆上取任意点 M'，从 O 向 AM' 的延长线作垂线 OT'，若以 O 为圆心，以 OT' 为半径作圆，则这圆在点 T' 与 AT' 相切。又 $AB=BO$，所以 M' 是 AT' 的中点。即这圆上的点都适合条件。

因此，所求的轨迹是以 AB 为直径的圆。

1634. 从直角 AOB 的一边 OB 上的定点 B，作直线和另一边 OA 交于 E，从线段 BE 上的点 P 作 $PF\perp AO$，连结 PO，求满足 $PO:PF=OE:FE$ 的点 P 的轨迹。

解 由假设，得

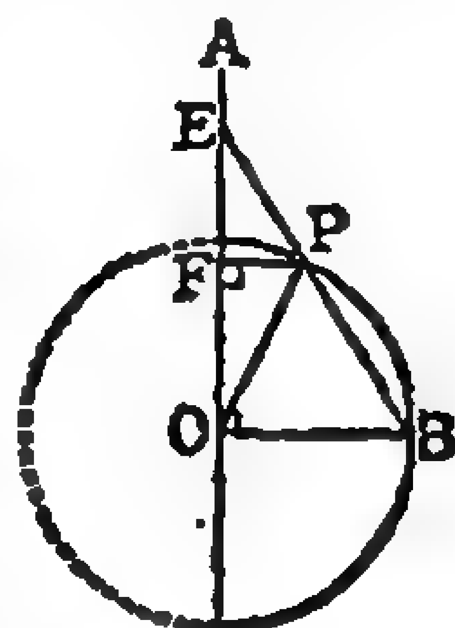
$$PO:PF=OE:FE. \qquad ①$$

因为 $PF\parallel BO$，所以，

$$OE:FE=BO:PF. \qquad ②$$

由①、②，知 $\quad PO=BO$。

因此，适合条件的点，在以 O 为圆心，OB 为半径的圆的部分圆弧上，即与点 B 在 OA 的同侧的那个圆弧。



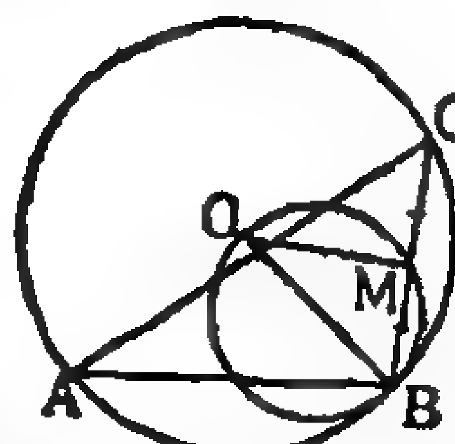
反之，若在这圆弧上任取一点，则容易证明这点满足条件。

因此，点 P 的轨迹，是以 O 为圆心，以 OB 为半径的圆上的部分圆弧，即与点 B 在 OA 的同侧的那个圆弧。

1635. 圆 O 中有定弦 AB 与动弦 AC，连结 BC，求弦 BC 中点的轨迹。

解 设弦 BC 的中点为 M。连结 OM、OB。因为 M 是 BC 的中点，所以 $OM\perp BC$。由此可知，点 M 在以 OB 为直径的圆上。

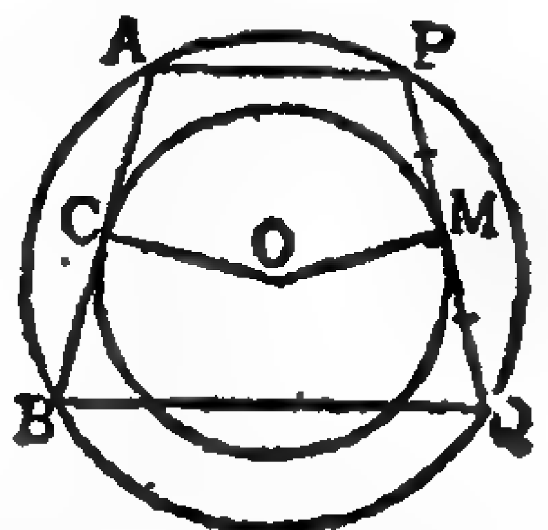
反之，设 M 为这个圆上的任意点，延长 BM 与圆 O 的交点为 C，则 $\angle OMB=90°$。所以，M 是 BC 的中点。由此可知，点 M 适合条件。



因此，所求的轨迹，是以 OB 为直径的圆。

1636. 已知圆上两定点 A、B，从 A、B 作两条平行弦 AP、BQ，求 PQ 的中点 M 的轨迹。

解 在已知圆 O 中，因为 $AP\parallel BQ$，所以 $PQ=AB$。



设 AB 的中点为 C，则 $OM=OC$。

因此，M 在以 O 为圆心、OC 为半径的圆上。

反之，在这个圆上取任意点 M'，过 M' 作垂直于 OM' 的弦 $P'Q'$。

因为 $\qquad OM'=OC,\ OC\perp AB,$

所以 $\qquad \widehat{AB}=\widehat{P'Q'},\ AP'\parallel BQ'.$

又 $OM'\perp P'Q'$，所以 M' 是 $P'Q'$ 的中点。由此可知，点 M' 适合条件。

因此，所求的轨迹是以 O 为圆心、OC 为半径的圆。

1637. 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 作任意直线，顶点 B、C 在这直线上的正射影分别为 B'、C'，求 $B'C'$ 的中点 P 的轨迹。

解　设 BC 的中点为 M，连结 PM。因为 $BB'\parallel MP\parallel CC'$，所以 $\angle MPA=90°$。由此可知，点 P 在以定线段 AM 为直径的圆上。

反之，若在这个圆上取任意点 P'，从 B、C 向 AP' 作垂线 BB''、CC''，因为
$B''P'=P'C''$，
所以点 P' 适合条件。

因此，所求的轨迹，是以 AM 为直径的圆。

1638. 两定圆 O、O' 相交于 A、B，过其中一个交点 A 作割线与两圆分别交于 P、Q，求 PQ 的中点 M 的轨迹。

解　过两圆 O、O' 的另一交点 B 作垂直于 AB 的割线分别交两圆 O、O' 于 C、D，于是 $PC\parallel QD$。

设 N 为 CD 的中点，则 N 是定点。

因为 $MN\parallel PC$，所以 $\angle AMN=\angle APC=\angle ABD=90°$。由此可知，满足条件的点，都在以 AN 为直径的圆上。

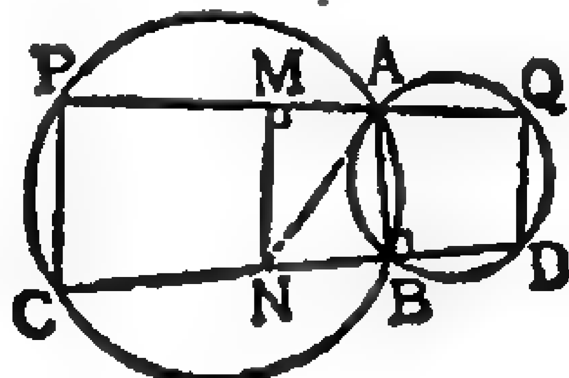
反之，容易证明，这个圆上的点都适合条件。

因此，点 M 的轨迹，是以 AN 为直径的圆。

1639. 两定圆相交，过其中一个交点 A 的任意直线，与这两圆分别交于 P、Q，问把线段 PQ 按定比内分的点 M 的轨迹是什么。

解　在右图中，设

$PM:MQ=m:n$.



过 B 作垂直于 AB 的弦 CBD，若

$$CN:ND=m:n,$$

则　　$$PC\parallel MN\parallel QD.$$

与上题同理，得 $\angle AMN=90°$，且 A、N 是定点。

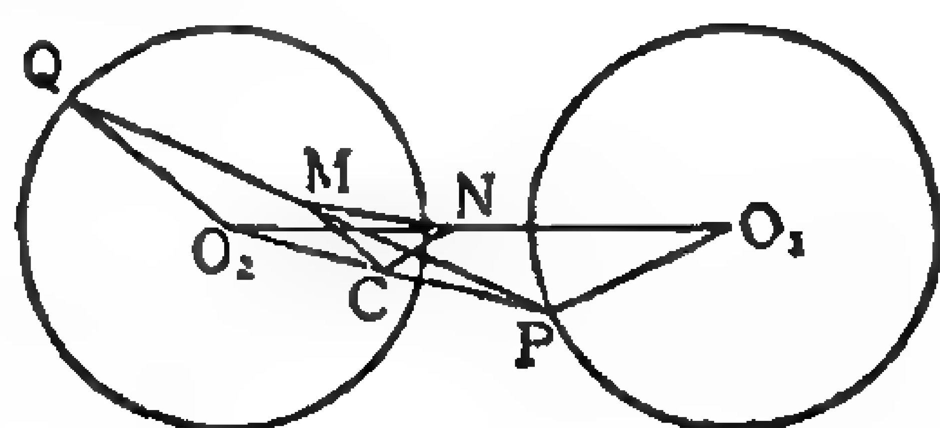
因此，点 M 的轨迹，是以 AN 为直径的圆。

1640. 当点 P 在半径为 R 的定圆 O_1 上移动，点 Q 在相同半径 R 的定圆 O_2 上移动时，试述线段 PQ 的中点 M 运动成怎样的图形？

解　设 O_1O_2 的中点为 N，PQ 的中点为 M，PO_2 的中点为 C，则

$CN\parallel PO_1$，

$CN=\frac{1}{2}R$.



又

$CM\parallel O_2Q$，

$$CM=\frac{1}{2}R.$$

而　　$MN\leqslant CM+CN$。

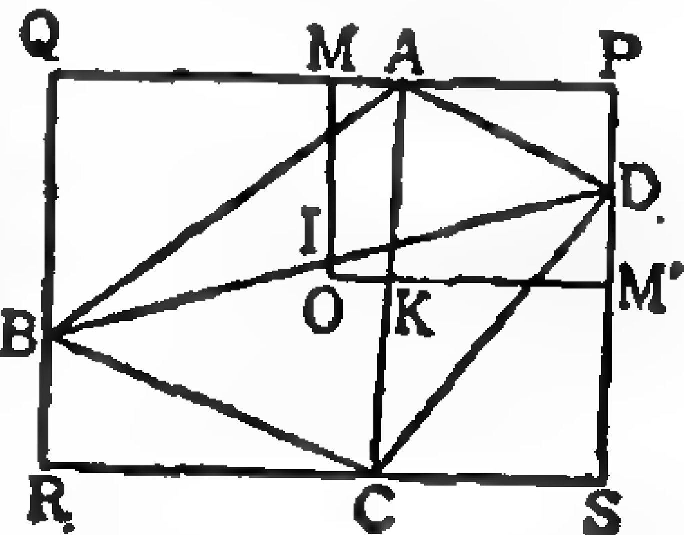
所以，　$MN\leqslant R$.

因此，M 在以 O_1O_2 的中点 N 为圆心、R 为半径的圆内或圆上。

1641. 矩形 $PQRS$ 的各边分别经过定四边形 $ABCD$ 各个顶点，求矩形 $PQRS$ 的中心的轨迹。

解　设 M、M' 分别为 PQ、SP 的中点，矩形的中心为 O，OM 与 BD、OM' 与 AC 的交点分别为 I、K，则 I、K 分别是 BD、AC 的中点，它们是定点。

又 $\angle KOI$ 是直角。由此可知，适合条件的点，都在以 KI 为直径的圆上。



反之，容易证明，以这个圆上的点作中心，可以得到四边形 $ABCD$ 的外接矩形。

因此，点 O 的轨迹，是以 KI 为直径的一个圆。

1642. 求四边形 $ABCD$ 的外接矩形各边中点的轨迹。

解　设四边形 $ABCD$ 的外接矩形为 $PQRS$，过点 A 的边 PQ 的中点为 M，过 M 作 MI 垂直于 PQ，并与对角线 BD 交于 I。因为四边形 $PDBQ$ 是梯形，$PD\parallel MI$，所以，$DI=BI$，且 $\angle AMI=90°$。而点 M 在四边形 $ABCD$ 的外面。若以 AI 为直径的

圆与 AB、AD 的交点分别为 E、F，则点 M 在弧 EAF 上。

反之，容易证明这弧上的点都适合条件。

因此，点 M 的轨迹是弧 EAF。

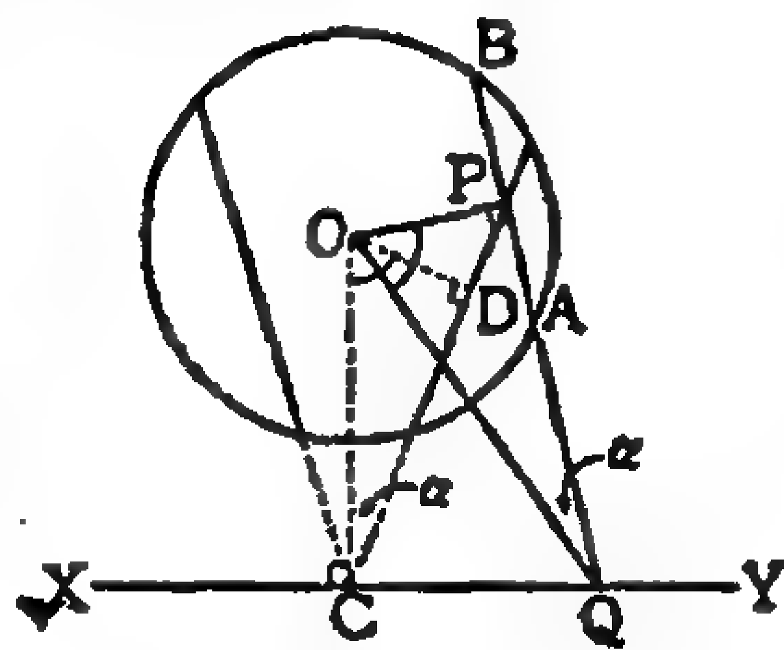
同理可以求得另外三边中点的轨迹。

1643． 设定直线 XY 在定圆 O 的外面，过 XY 上的动点 Q 作圆 O 的割线 QAB，使 $\angle OQA=\alpha$，求 AB 的中点 P 的轨迹。

解 连结 OP，则 $OP\perp AB$．因为

$\angle OQP=\alpha$，

所以 $\triangle OPQ$ 的形状一定。作 OC 垂直于 XY，又作 $\triangle OCD$ 与 $\triangle OQP$ 相似，于是 D 为定点。连结 DP。



$\because\ \angle POD=\angle QOC$，

$\therefore\ \triangle POD\backsim\triangle QOC$。

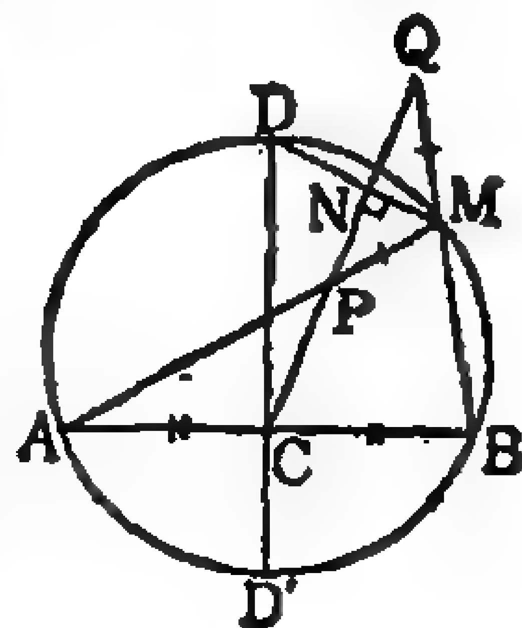
$\therefore\ \angle ODP=90°$。

由此可知，点 P 在定直线 CD 的延长线上。

因此，由 O 向 XY 作垂线，交 XY 于点 C，过 C 作两条直线各与 OC 的夹角都等于 α，则这两条直线被圆截取的两条弦就是所求的轨迹。

1644． 已知圆的定弦 AB 的中点 C，过 C 作直线 CPQ，在圆上取一点 M，连结 AM、BM，分别与直线 CPQ 交于 P、Q，且使 $MP=MQ$，求 PQ 的中点 N 及 P、Q 的轨迹。

解 (1) 因为 $\triangle MPQ$ 是等腰三角形，所以 MN 平分 $\angle AMQ$。由此可知，MN 过弧 AMB 的中点 D，且 $\angle CND$ 是直角。所以，点 N 的轨迹，是以 CD 为直径的圆。又当点 M 在弧 ADB 的共轭弧 $AD'B$ 上时，连结 C 与弧 $AD'B$ 的中点 D' 的线段 CD'，则点 N 的轨迹是以 CD' 为直径的圆。



(2) 连结弧 $AD'B$ 的中点 D' 和 M 得到直线 $D'M$，因为 $CP\perp DM$，$D'M\perp DM$，所以 $CP\parallel D'M$。

$\therefore\ \angle APC=\angle AMD'$。

又

$\angle AMD'=\angle ADD'$，

所以

$\angle APC=\angle ADC$。

因此，点 P 的轨迹，是以 AC 为弦所含圆周角等于 $\angle ADC$ 的弓形弧。当点 M 在弧 $AD'B$ 上时，它的轨迹还是一个圆弧。

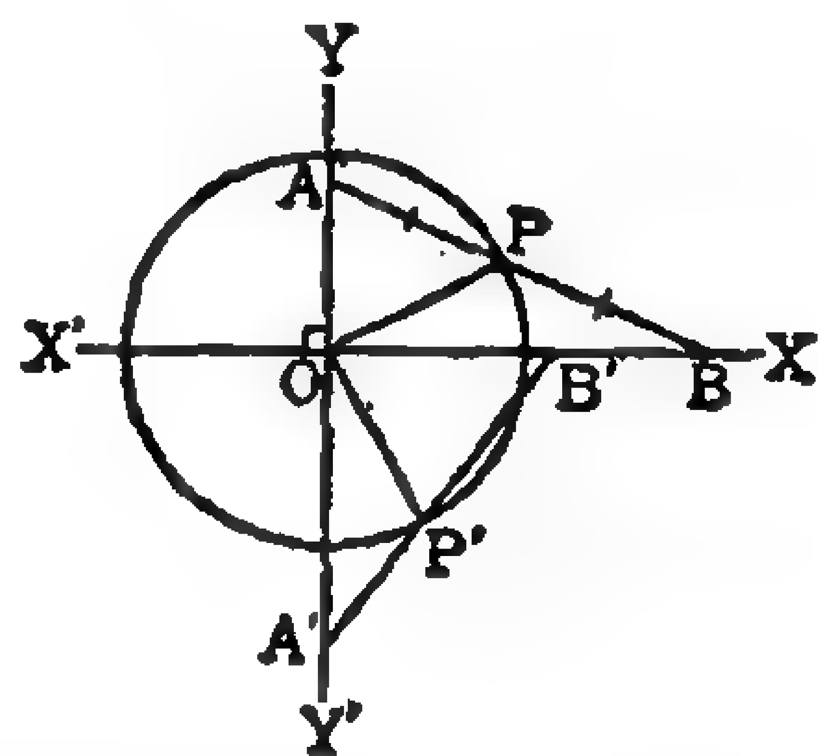
用同样的方法，可以求得点 Q 的轨迹。

1645． 定长线段 AB 的两端在相交成直角的两定直线 XX'、YY' 上移动，求 AB 的中点 P 的轨迹。

解 设 O 为两定直线 XX'、YY' 的交点，P 为定长线段 AB 的中点，则 $\triangle AOB$ 是直角三角形。因为 P 是斜边 AB 的中点，所以

$$OP=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}l\quad(l\text{ 为 }AB\text{ 的长})。$$

因此，P 在以 O 为圆心，半径长等于 $\frac{1}{2}l$ 的圆上。



反之，在这个圆上取任意点 P'，在 YY' 取点 A' 使

$$P'A'=P'O,$$

延长 $A'P'$ 与 XX' 交于点 B'。因为 $\triangle A'OB'$ 是直角三角形，所以 $A'P'=P'O=P'B'$，而且 $A'B'=2OP'=l$。由此可知，这个圆上的点都适合条件。

因此，所求的轨迹，是以 O 为圆心，半径长等于 $\frac{1}{2}l$ 的圆。

1646． 长为 b 的线段两端，在边长为 a 的正方形的边上移动，问：动线段的中点画出怎样的图形？在下列三种情况下，分别记下结果并作出图来：

(1) $a>b$ 时；(2) $a=b$ 时；(3) $a<b$ 时。

解 与上题同理，分下列情况进行考察。

(1) 当 $a>b$ 时，它的图形是由四个以正方形各顶点为圆心，半径长等于 $\frac{b}{2}$ 的圆的四分之一所组成。

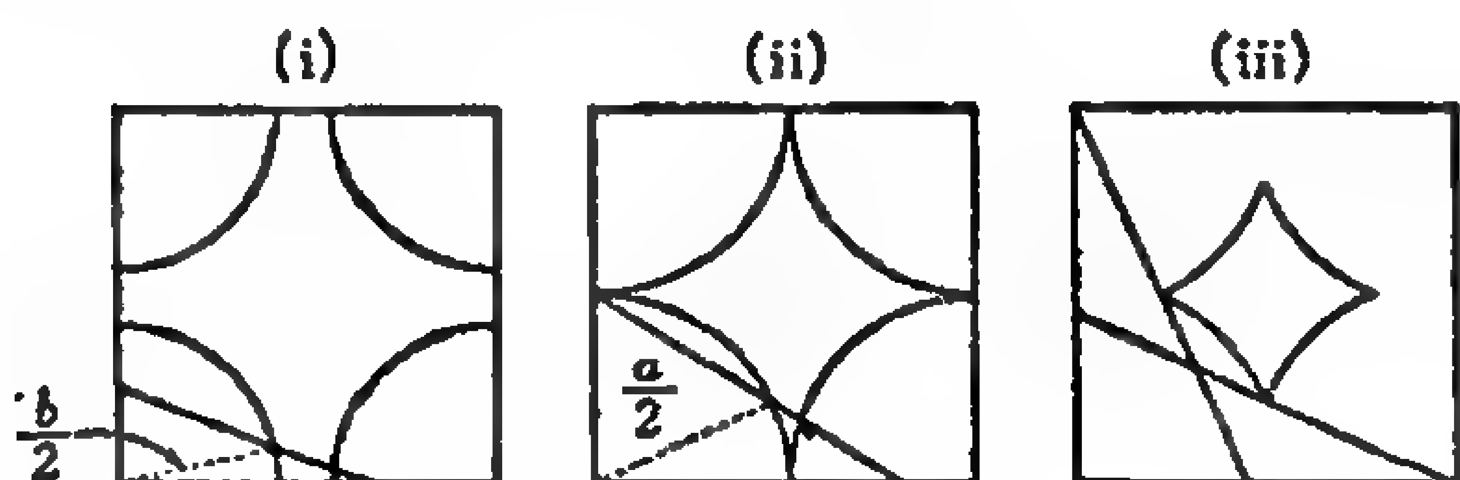
(2) 当 $b=a$ 时，它图形是由四个以正方形

各顶点为圆心，半径长等于 $\frac{a}{2}$ 的圆的四分之一所组成。

(3)（i）当 $\sqrt{2}a>b>a$ 时，它的图形是由四个以正方形各顶点为圆心，半径长等于 $\frac{b}{2}$ 的圆弧连结成的。

（ii）当 $b=\sqrt{2}a$ 时，它的图形就是正方形的中心点。

（iii）当 $b>\sqrt{2}a$ 时，不成立。



1647. 从定点 P 作互相垂直的两条直线 PQ、PR，又 OA、OB 是两条互相垂直的直线，PQ 与 OA、PR 与 OB 分别交于 Q、R，求 QR 的中点 M 的轨迹。

解　因为 $\angle QPR$、$\angle QOR$ 都是直角，M 是 QR 的中点，所以

$$PM=\frac{1}{2}QR=OM.$$

又 P、O 是定点，所以 OP 一定。因此，M 在定线段 OP 的中垂线上。

反之，在 OP 的中垂线上取任意点 M'，过 M' 作直线和 OA、OB 分别交于 Q'、R'，且使 $M'Q'=M'R'$。因为 $\angle Q'OR'$ 是直角，所以 $M'Q'=M'O=M'R'$。

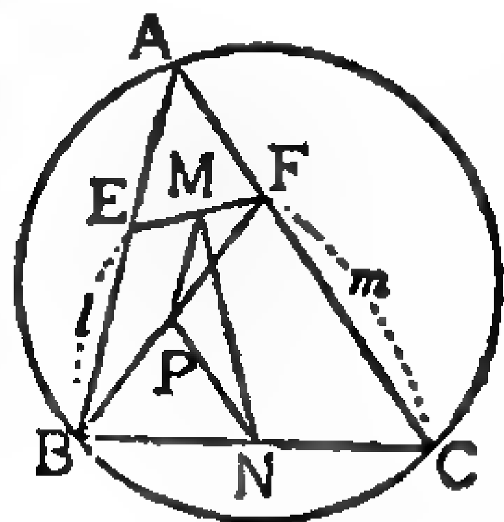
而 $M'O=M'P$，所以 $M'P=M'Q'=M'R'$。

$$\therefore\ \angle Q'PR'=90°.$$

所以，M' 是适合条件的点。

因此，所求的轨迹是 PO 的中垂线。

1648. 在 $\triangle ABC$ 中，BC 是固定的，$\angle A$ 的大小一定，在 AB、AC 上分别取 BE、CF 等于定长 l、m，求 EF 的中点 M 的轨迹。



解　设 P、N 分别为 BF、BC 的中点，则

$$PM\parallel AB,\ PN\parallel AC.$$

所以，$\angle MPN=180°-\angle A$（定值）。

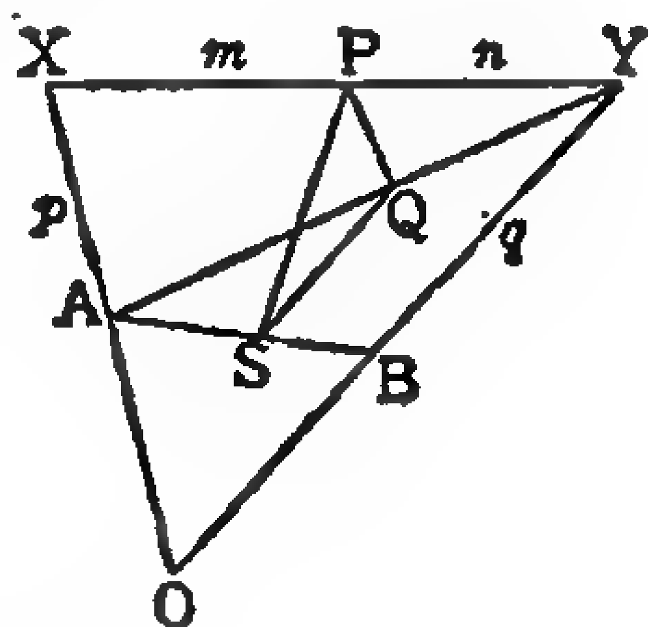
又　$$PM=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}l,$$

$$PN=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}m.$$

所以，$\triangle PMN$ 的形状和大小一定。从而得出，MN 是定长线段。

因此，点 M 的轨迹，是以 N 为圆心，定线段 NM 为半径的部分圆弧，即与点 A 在 BC 同侧的那部分圆弧（注意轨迹的界限）。

1649. 从两定点 A、B 向定方向作两线段 AX、BY，使 $AX:BY$ 恒等于定比 $p:q$。连结 XY，在 XY 上取点 P，使 $PX:PY$ 等于定比 $m:n$，求点 P 的轨迹。



解　在图中，作 $PQ\parallel XA$，$QS\parallel YB$，则

$$PQ:XA=YP:YX=n:(n+m).$$

$$\therefore\ PQ=\frac{n\cdot XA}{m+n}.$$

同理可得，

$$QS=\frac{m\cdot YB}{m+n}.$$

$$\therefore\ \frac{PQ}{QS}=\frac{n\cdot XA}{m\cdot YB}.$$

但由假设，得　$$\frac{XA}{YB}=\frac{p}{q}.$$

代入上式，得

$$\frac{PQ}{QS}=\frac{n\cdot p}{m\cdot q}\quad（定值）.$$

因为 $PQ\parallel XA$，$YB\parallel QS$，所以 $\angle PQS$ 的大小等于 XA 与 YB 的夹角的补角，即

$$\angle PQS+\angle O=180°.$$

因此，$\angle PQS$ 的大小一定，又 $PQ:QS$ 是定值，所以 $\triangle PQS$ 的形状一定。从而得出，$\angle QSP$ 的大小一定。

而 $QS\parallel BY$，所以 SQ 的方向一定。从而得出，$\angle PSB$ 也一定，SP 的方向一定。又 $AS:SB=AQ:QY=m:n$，所以 S 是定点。于是 SP 是定直线。

因此，所求的轨迹，显然是过 S 按定方向作出的直线 SP。

1650. 在已知 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上取点 D，作定向直线 DE、DF，DE 与 AB、DF 与 AC 分别交于 E、F，求把 EF 分成定比的

点 M 的轨迹。

解 作 BG 平行于 DF，与 CA 或它的延长线交于点 G；作 CH 平行于 DE，与 AB 交于点 H，则 G、H 是定点。

又

$BD:BC=BE:BH$,

$BD:BC=GF:GC$.

所以，

$BE:BH=GF:GC$.

$\therefore BE:GF=BH:GC$

(定值)。

由此可知，EF 与定直线 AB、AC 分别交于 E、F，从 E 到定点 B、从 F 到定点 G 的距离的比是一定的。

与上题同理可知，所求的轨迹是一直线。

1651. 在半径为 r 的圆 O 内，有半径为 s 的圆 C。以圆 O 的弦作折缝，把圆 O 的弧向内侧折迭，使折迭的圆弧与圆 C 外切。若这个切点随着圆弧变动而变动，当切点在圆 C 上变动一周时，求折缝弦的中点 P 的轨迹。

解 在图中，以弦 AB 为折缝把圆 O 的弧 AB 折过来与圆 C 切于点 T。设 O' 为弧 ATB 的所在圆的圆心，则圆 O、O' 是等圆。所以，线段 OO' 和 AB 的交点 P 是 OO' 的中点，即

$AP=PB$.

而 $O'C$ 经过切点 T，

$$O'C=r+s.$$

若 M 为 OC 的中点，则

$$MP=\frac{1}{2}CO'=\frac{1}{2}(r+s).$$

又 M 是定点。所以 P 在以 M 为圆心，半径长等于 $\frac{1}{2}(r+s)$ 的圆上。

反之，容易证明这个圆上的点都适合条件。

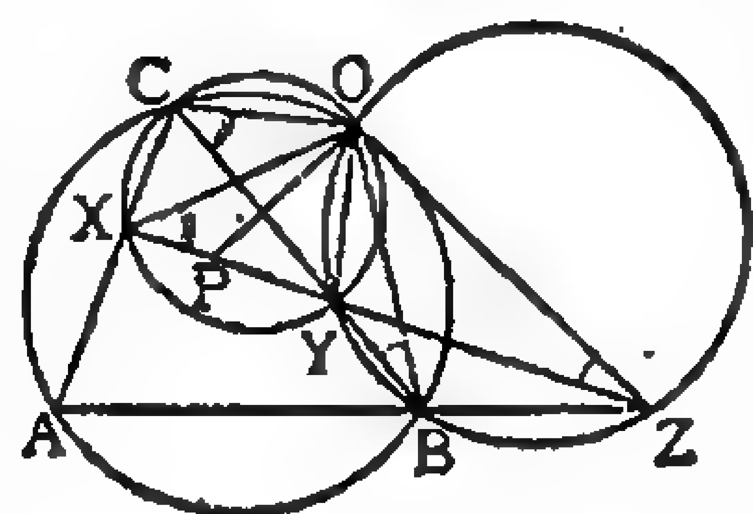
因此，所求的轨迹，是以 M 为圆心，半径的长等于 $\frac{1}{2}(r+s)$ 的圆。

1652. 直线 XYZ 截 $\triangle ABC$，当 $XY:YZ$ 是定值时，求把 XY 分成 XP、PY，使 $XP:PY$ 等于定比的点 P 的轨迹。

解 设三个三角形 ABC、XYC、YZB 的外接圆相交于一点 O，则

$$\angle XOY=\angle XCY=\text{定值},$$
$$\angle YOZ=\angle YBA=\text{定值}.$$

又 $XY:YZ$ 是定值，所以 $\triangle OXZ$ 的形状一定，于是 $\angle OXZ$ 成定角。又 $\angle OCB=\angle OXZ$，所以 $\angle OCB$ 也成为定角，O 成为定点。



又在 $\triangle OXY$ 中，

$\angle OXY=\angle OCB$

$=$定值，

$\angle XOY=\angle XCY$

$=$定值，

所以，$\triangle OXY$ 的形状也一定。而 $XP:PY$ 是定值，所以 $\triangle OPY$ 的形状也一定。而 $\triangle OPY$ 的顶点 O 是固定的。因为点 Y 在定直线 BC 上移动，所以由问题 **1862** 可知 P 的轨迹是一条直线。

1653. 在以定直线 AB 为底边，顶角为 α 的 $\triangle ABC$ 的两边 AC、CB 上，向 $\triangle ABC$ 的外侧作正三角形 DAC、EBC，求 DE 的中点的轨迹。

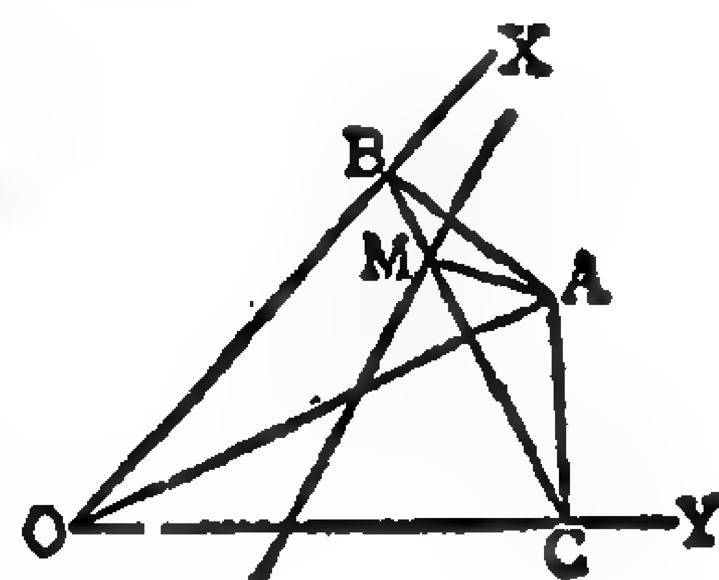
解 以 AB 为边，在 $\triangle ABC$ 的同侧作正三角形 ABF，则四边形 $FDCE$ 是平行四边形。所以，DE 的中点 M 是 FC 的中点。设 P、Q 分别为 FA、FB 的中点，则

$$\angle PMQ=\angle ACB=\alpha.$$

所以点 M 的轨迹，是以 PQ 为弦所含圆周角等于 α 的弓形弧。

1654. 有位置、大小确定的 $\angle XOY$，与顶点的位置、大小一定的 $\angle A$ 互为补角，当 $\angle A$ 绕点 A 旋转时，连结这两个角的边的交点 B、C，求把 BC 分为定比的点 M 的轨迹。

解 连结 OA。因为 $\angle O$ 与 $\angle BAC$ 互为补角，所以四边形 $ACOB$ 内接于圆。



$\therefore \angle ABC$

$=\angle AOC$

(定角)，

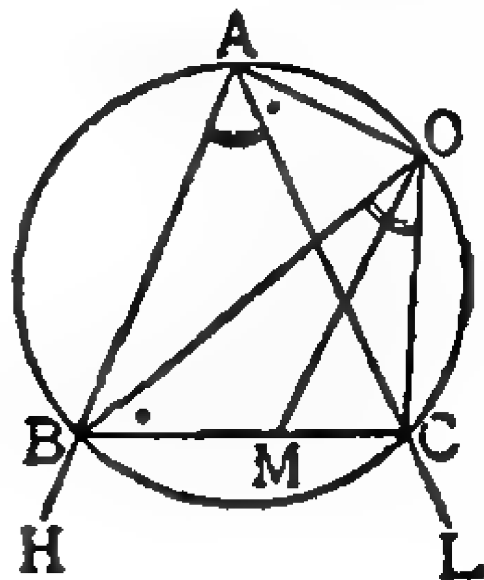
$\angle ACB=\angle AOB$ （定角）.

由此可知，$\triangle ABC$ 的形状总是一定的.

又 $BM:MC$ 是定值，所以 $\triangle AMC$ 的形状也总是一定的. 而 A 是定点，C 在 OY 上. 因此，点 M 的轨迹是一条直线(问题1862).

1655. 以 $\angle HAL$ 外的定点 O 为顶点，作 $\angle BOC$ 等于 $\angle HAL$，把 $\angle BOC$ 绕 O 旋转，它的两边分别交 $\angle HAL$ 的两边于 B、C，求按定比 $m:n$ 分线段 BC 的点 M 的轨迹.

解 因为 $\angle BOC=\angle BAC$ (定角)，所以，A、O、C、B 共圆.



$\therefore\quad \angle OBC=\angle OAC$ （定角）.

因此，$\triangle OBC$ 的形状一定.

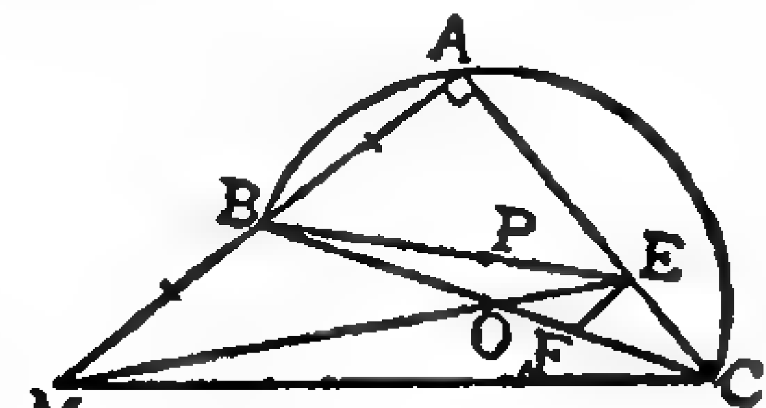
因为

$BM:MC=m:n$ （定比），

所以 $\triangle OBM$ 的形状一定. 与上题一样，从而得出，所求的轨迹是一条直线.

1656. 在直角三角形 ABC 中，斜边 BC 的位置和大小一定，O 为 BC 的中点，在 AB 的延长线上取点 M，使 $BM=AB$，延长 MO 与 AC 交于点 E，在直线 BE 上取点 P，使 $BP:PE=m:n$(定比)，求点 P 的轨迹.

解 从 E 作 AB 的平行线与 BC 交于点 F，则



$\angle FEC=90°$.

又

$$CF:CB=EF:AB$$
$$=EF:BM$$
$$=OF:OB=OF:OC,$$

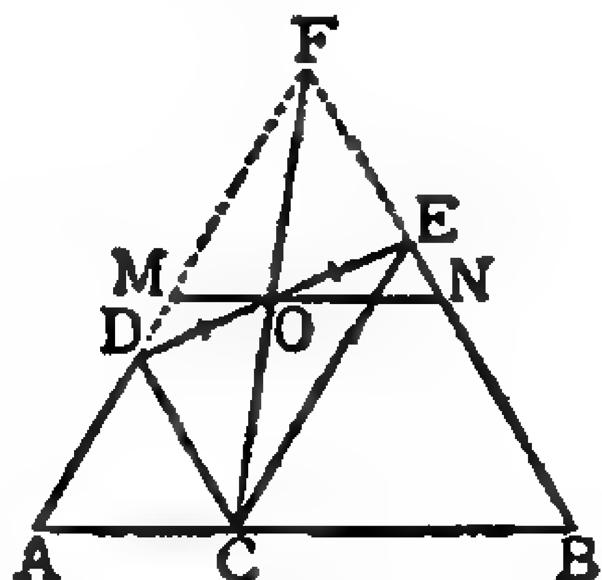
即 $\quad CF:CB=OF:OC$.

所以，$\quad CF:OF=CB:OC=2:1$.

由此可得，F 是定点. 因此，点 E 的轨迹，是以 CF 为直径的圆. 而 BE 是从定点 B 到以 CF 为直径的圆上的线段，按定比 $m:n$ 分线段 BE 得分点 P，则 P 的轨迹和问题1651一样，它是圆心在连结 $\triangle EFC$ 的外心与 B 的直线上的圆.

1657. 定线段 AB 的任意内分点 C，以 AC、CB 为底边，在 AB 的同侧作正三角形，求连结两个正三角形顶点的线段中点的轨迹.

解 作正三角形 ACD、BCE，延长 AD、BE，它们相交于点 F，则 $\triangle FAB$ 为正三角形，而且 $DF\parallel CE$，$CD\parallel EF$. 因此，四边形 $FDCE$ 是平行四边形. 所以 DE 的中点 O 又是 FC 的中点. 设 M、N 分别是 FA、FB 的中点，则 O 在线段 MN 上.

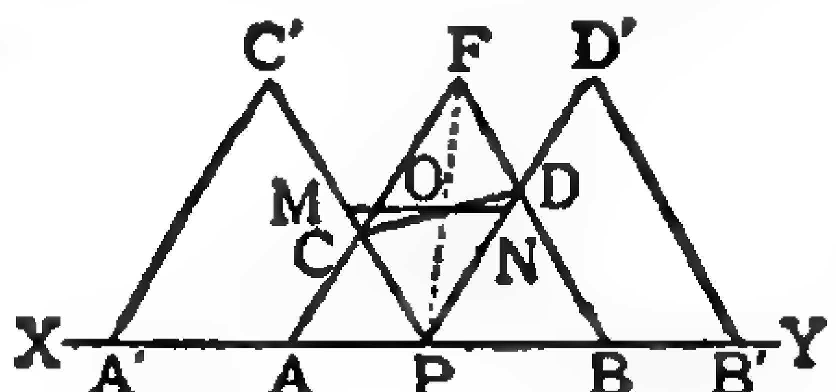


反之，在线段 MN 上取任意点 O'，延长 FO' 与 AB 交于 C'，则 O' 是 FC' 的中点. 过 C' 作 FB、FA 的平行线与 FA、FB 的交点分别为 D'、E'，则 $FD'C'E'$ 是平行四边形，$D'E'$ 被点 O' 所平分. 又 $\triangle FAB$ 是正三角形，所以 $\triangle D'AC'$、$\triangle E'C'B$ 都是正三角形. 而 O' 是 $D'E'$ 的中点，所以适合条件.

因此，所求的轨迹是线段 MN.

1658. P 为定直线 XY 上的定点，在 PX 上取点 A，在 PY 上取点 B，使 AB 的长等于定长，在 XY 的同侧作正三角形 APC、BPD，求 DC 的中点 O 的轨迹.

解 延长 AC、BD，设交点为 F. 因为四边形 $FCPD$ 是平行四边形，所以 PF 被 CD 的中点 O 所平分.

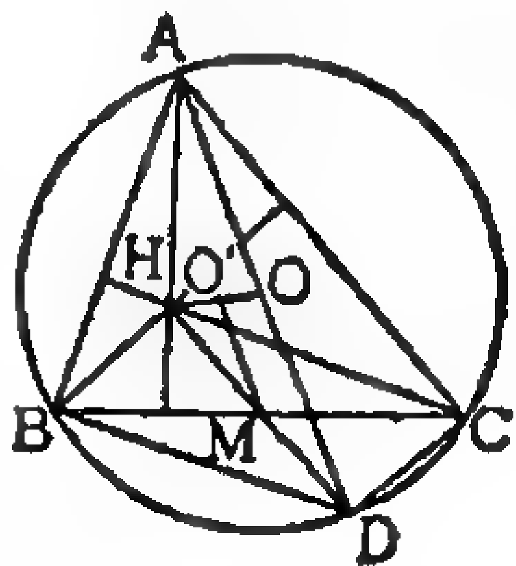


若在 PX、PY 上分别取 PA'、PB' 等于 AB，作正三角形 $PA'C'$、$PB'D'$，则 C'、F、D' 共线. 由此可知，点 F 在线段 $C'D'$ 上移动.

所以，根据问题1622，若 M、N 为 PC'、PD' 的中点，则点 O 的轨迹是线段 MN.

1659. $\triangle ABC$ 内接于定圆 O，当垂心 H 一定时，求各边中点的轨迹.

解 作直径 AD，连结 BD、CD，由问题502可知，四边形 $BHCD$ 是平行四边形. 设 HD、BC 的交点为 M，则 M 是 BC 和 HD 的中点. 连结 M 与 HO 的中点 O'，则



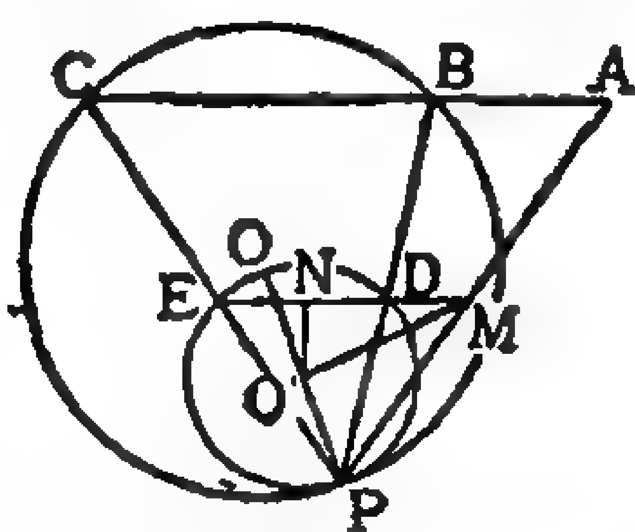
$$O'M=\frac{1}{2}OD.$$

因此，点 M 的轨迹，是以 O' 为圆心，半径的长等于圆 O 的半径的一半的圆. 同理，可以

求出其他两边的中点的轨迹。

1660. A为定圆O外的定点，P为圆O上的定点。过A向这个圆作割线，交圆于B、C，连结PB、PC。PB、PC的中点分别为D、E。求线段DE的中点N的轨迹。

解 因为D、E分别是圆O的弦PB、PC的中点，所以D、E在以PO为直径的圆O'上(问题**1635**)。又设ED的延长线与PA的交点为M，则M为PA的中点，是定点。因此，问题就变成从定点M向定圆O'作割线MDE，求弦DE的中点N的轨迹。这样，点N的轨迹是以$O'M$为直径的圆。

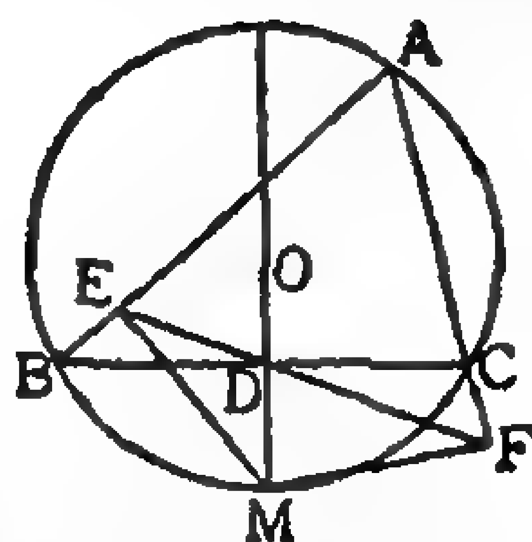


但是，因为A是在圆O的外部，所以M在圆O'之外。因此，点N的轨迹是以MO'为直径的圆在圆O'内的那部分弧。

1661. $\triangle ABC$的顶角A的位置和大小一定，两边的和$AB+AC$为定值$2m$，求第三边BC的中点D的轨迹。

解 在$\triangle ABC$的边AB、AC上，分别取点E、F，使

$$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC)=m,$$



则E、F是定点。过E作AB的垂线EM，过F作AC的垂线FM，设EM与FM交于点M，则M是定点。且M为$\triangle ABC$外接圆的$\widehat{BC}$的中点(问题**537**)。连结MD，由$BD=DC$，得$\angle MDB=90°$。因此，根据"西摩松定理"可知，E、D、F在一直线上。由此可得，点D在定直线EF上。

反之，也成立。

因此，点D的轨迹是连结E、F在$\angle BAC$内的线段。

1662. 两个定圆交于A、B，X、Y分别为两圆上的点，当$\angle XAY$为一定时，求把XY分为定比$m:n$的点P的轨迹。

解 作YN、XM分别平行于AX、AY，并与两圆分别交于N、M，过P作AX、AY的平行线PE、PF，PE与AN、PF与AM的交点分别为E、F。因为$\angle AXM$、$\angle AYN$都是$\angle XAY$的补角，所以是一定的。因而，点M、N是定点。

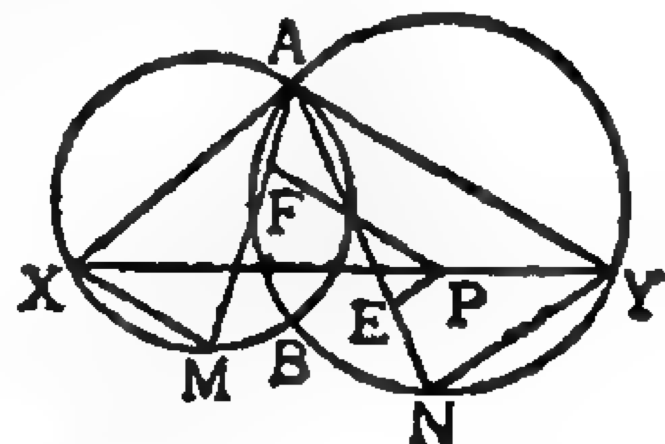
又$AX \parallel PE \parallel YN$，所以

$$\frac{AE}{EN}=\frac{XP}{YP} \quad (定比)。$$

同理可得，

$$\frac{FM}{FA}=\frac{XP}{YP}$$

(定比)。



由此可知，E、F也是定点。

又$\angle EPF=\angle AYN=\angle XAY$的补角(是定角)。

因此，点P的轨迹，是以EF为弦，所含圆周角为定角$(180°-\angle XAY)$的弓形弧。

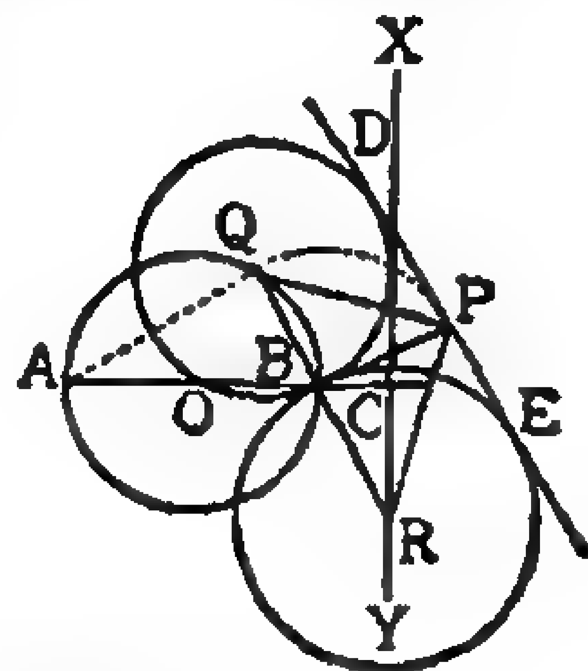
1663. AB为定圆O的直径，过AB的延长线上的定点C，作垂直于AB的直线XY。过B作动割线QBR与定圆和XY分别交于Q、R，以Q、R为圆心，分别以QB、RB为半径作两圆，求这两圆外公切线DE的中点P的轨迹。

解 设两圆Q、R外切于点B，而且在B处两圆的公切线和DE的交点是DE的中点P。

又 $\angle QPR=90°$，

$PB \perp QR$，

所以，



$\triangle PBQ \backsim \triangle RBP$。

$$\therefore \quad BP^2=BQ\cdot BR.$$

因为A、Q、C、R在同一圆上，所以，

$$BQ\cdot BR=AB\cdot BC.$$

$$\therefore \quad BP^2=AB\cdot BC \quad (定值)。$$

又B是定点，所以，点P的轨迹是以B为圆心，以BP(AB、BC的比例中项)为半径的圆。

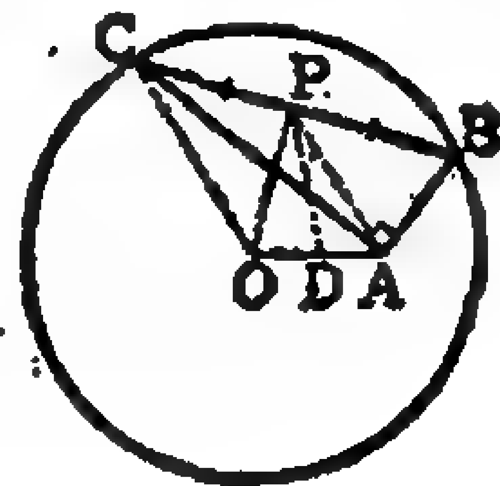
1664. 从定点A观看定圆O的弦BC的视角等于直角，求BC的中点P的轨迹。

解 连结PO、PA、CO。因为P是直角三角形ABC斜边的中点，

所以 $PA=PC$。

又 $OP\perp BC$，

所以



$$OP^2+PA^2=OP^2+PC^2=CO^2.$$

设 D 为 OA 的中点，则由中线定理，得

$$2PD^2+2OD^2=OP^2+PA^2.$$

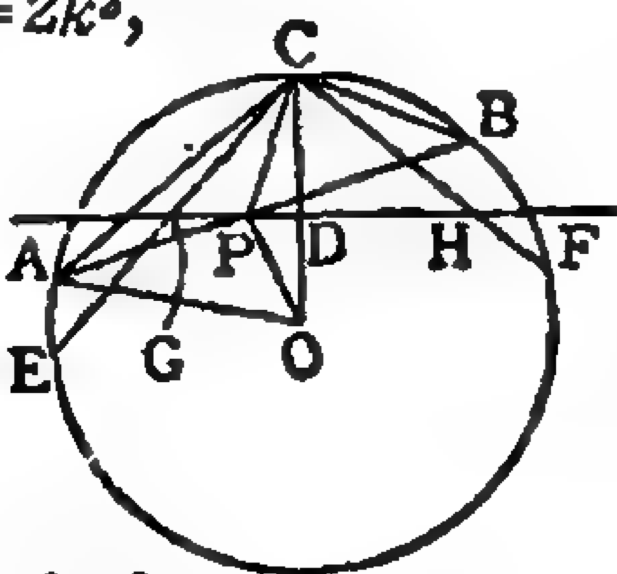
$$\therefore\quad 2PD^2+2OD^2=CO^2.$$

因此，所求的轨迹，是以 D 为圆心，半径的长等于 $\sqrt{\dfrac{CO^2}{2}-OD^2}$ 的圆。

1665. 圆 O 中，AB 是任意弦，C 是圆上的定点，连结 CA、CB，若 CA^2+CB^2 一定，求弦 AB 的中点的轨迹。

解 设 AB 的中点为 P，

$$CA^2+CB^2=2k^2,$$



则

$$CA^2+CB^2=2(CP^2+AP^2).$$

即

$$2(CP^2+AP^2)=2k^2.$$

又 $\quad AP^2=AO^2-OP^2$，

所以，$\quad 2k^2=2(CP^2+AO^2-OP^2)$。

$$\therefore\quad CP^2-OP^2=k^2-AO^2\quad(\text{定值}).$$

这就是说，点 P 到两定点 C、O 的距离平方差为定值。

所以若点 D 把线段 OC 分为：

$$CD^2-OD^2=k^2-AO^2,$$

则点 P 的轨迹是过点 D 而垂直于 OC 的直线(问题 **1334**)。又从 C 作弦 CE、CF，使

$$CE^2=CF^2=2k^2,$$

设 CE、CF 分别与上述直线交于 G、H，则 G、H 是轨迹的界限。

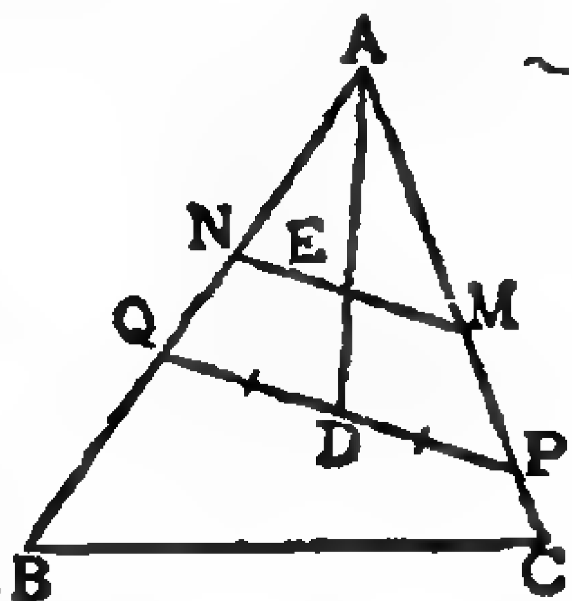
1666. 在定三角形 ABC 的边 AB、AC 或其延长线上，分别取点 Q、P，使

$$AB\cdot AQ=AC\cdot AP,$$

求线段 PQ 的中点 D 的轨迹。

解 由假定 $AB\cdot AQ=AC\cdot AP$，可知 B、Q、P、C 共圆。

$$\therefore\quad \angle APQ=\angle B.$$



又 $\triangle ABC$ 是定三角形，所以 $\angle B$ 的大小一定。从而得出，$\angle APQ$ 的大小一定。所以，$\triangle APQ$ 的形状一定，PQ 的方向一定。

作直线 MN 平行于 PQ，设 E 为 MN 的中点，则 PQ 的中点 D 在连结 AE 的直线上。

反之，过 AE 上的任意点 D'，作直线 $Q'P'$ 平行于 MN，$Q'P'$ 与 AB、AC 的交点分别为 Q'、P'。因为

$$\angle AP'Q'=\angle AMN=\angle B,$$

所以 B、C、P'、Q' 共圆。从而得出，

$$AB\cdot AQ'=AC\cdot AP'.$$

所以点 D' 适合条件。

因此，所求的轨迹是以 A 为一端过 E 的半直线。

1667. 四边形 $ABCD$ 内接于定圆 O，两组对边 BA、CD 及 AD、BC 的延长线分别交于点 F、E，若 EF 为另一定圆 O' 的弦，求 EF 的中点 M 的轨迹。

解 设圆 O、圆 O' 的半径分别为 r、r'，则

$$EB\cdot EC=EO^2-r^2, \quad ①$$

$$FA\cdot FB=FO^2-r^2. \quad ②$$

由 ① + ②，根据问题 **1380** 得

$$EF^2=EO^2+FO^2-2r^2.$$

而

$$ME^2=r'^2-O'M^2. \quad ③$$

又 $\quad EO^2+FO^2=2(OM^2+ME^2)$，

而且 $\quad 4ME^2=EF^2$，

所以，

$$4ME^2=EO^2+FO^2-2r^2$$
$$=2OM^2+2ME^2-2r^2.$$

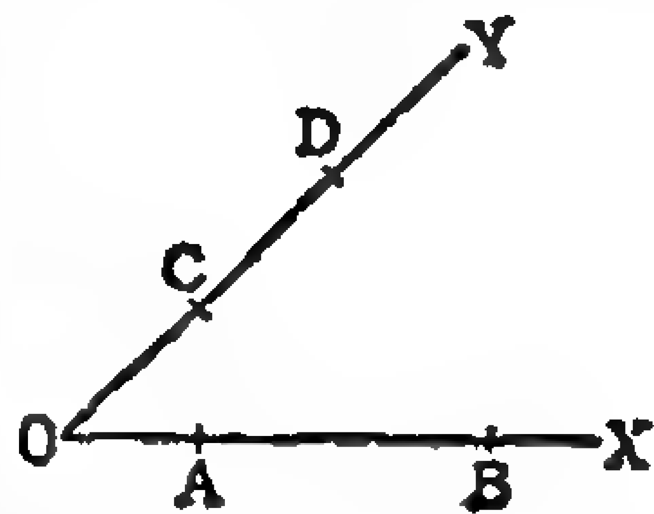
$$\therefore\quad ME^2=OM^2-r^2. \quad ④$$

由 ③、④，得

$$OM^2+O'M^2=r^2+r'^2.$$

由此可得，点 M 的轨迹是以 OO' 的中点 N 为圆心，半径的长等于 $\sqrt{\dfrac{r^2+r'^2}{2}-ON^2}$ 的圆。

1668. 如图，在 $\angle XOY$ 的一边 OX 上有两定点 A、B，在另一边 OY 上有两定点 C、D，连结线段 AB 上的任意点 P 与线段 CD 上的任意点 Q，设线段 PQ 的中点为 R，回答以下问题：



(1) 当 P 在点 A 的位置上时，点 R 的轨迹

是怎样的?

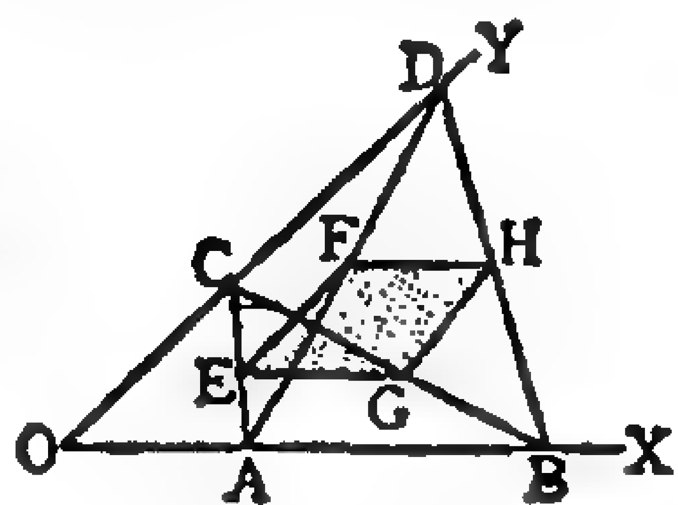
(2) 当 P 从 A 移动到 B 时,(1)的轨迹有怎样的变动?

(3) 试说出 R 存在的范围,并计算它的面积。这里,假定:

$$AB=a,\ CD=b,\ \angle XOY=45^\circ.$$

解 (1) 设 AC、AD 的中点分别为 E、F,则点 R 就在 EF 上移动,而且 $EF\parallel CD$,

$$EF=\frac{1}{2}CD.$$



(2) 当 P 从 A 移动到 B 时,R 的轨迹以原来的长度和方向移动到 GH 的位置。

(3) 因为 $EF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}b,$

$$EG=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a,$$

$$\angle FEG=\angle O=45^\circ,$$

所以

$$\square EGHF\text{ 的面积}=EF\cdot EG\sin 45^\circ$$

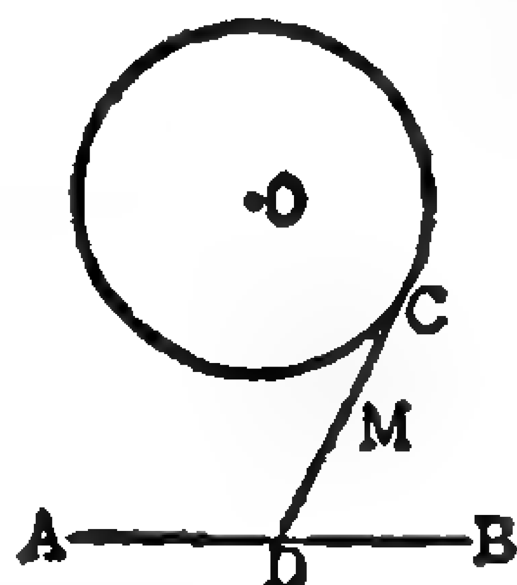
$$=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{ab}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}ab}{8}.$$

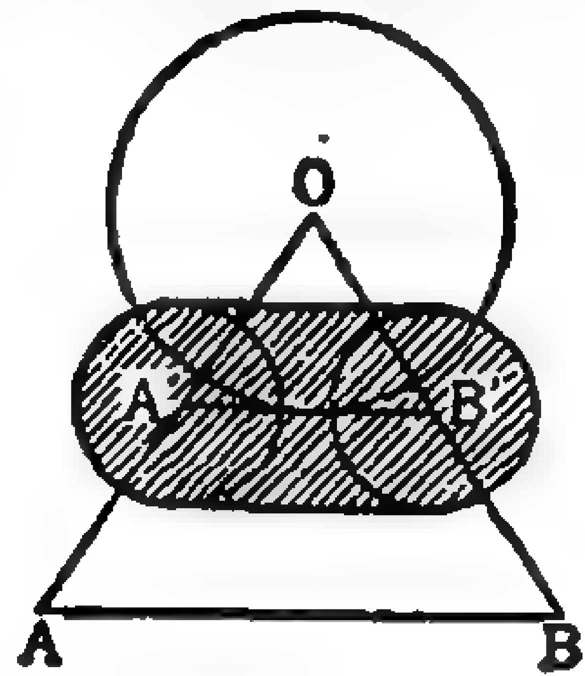
1669. 设定圆 O 和定线段 AB,又线段 CD 的两端分别在圆 O 和线段 AB 上。

(1) 若 M 为线段 CD 的中点,则 M 在什么范围内移动?用斜线表示这个范围。

(2) 试述(1)的理由。



解 (1) 设定圆 O,与问题 **1627** 同理,从一点 A 到定圆的线段中点的轨迹,是以 AO 的中点 O' 为圆心,半径的长等于圆 O 的半径的圆。



因此,在本题中,当 D 固定而 C 在圆上移动时,则 M 在以 DO 的中点 O' 为圆心,半径等于圆 O 的半径的一半的圆上。

其次,当 D 变动时,圆 O' 的圆心,是从 OA 的中点 A' 的位置,移动到 OB 的中点 B' 的位置上,从而得出,这圆经过的部分,是由圆 A' 左半圆、圆 B' 的右半圆和两圆的外公切线所围成的(包含边界),亦即图中的斜线部分是点 M 存在的范围。

(2) 设 D 为 AB 上的任意点,OD 与 $A'B'$ 的交点为 O',则 O' 是 OD 的中点。若圆 O 上的任意点为 C,CD 的中点为 M,因为

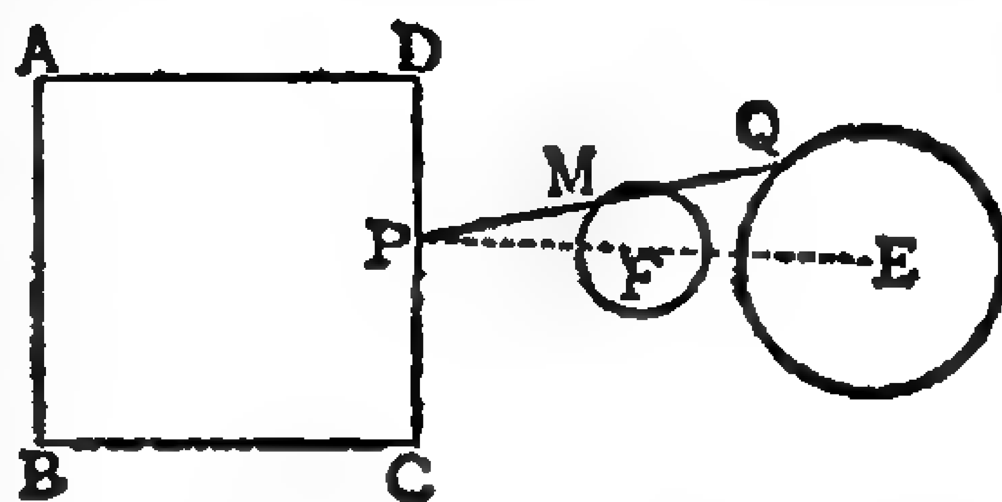
$$O'M=\frac{1}{2}OC,$$

所以点 M 是在上述的范围内。

1670. 在下图中,P 在边长为 5cm 的正方形的边上,Q 在半径为 1cm 的圆上,求线段 PQ 的中点 M 存在范围的面积。

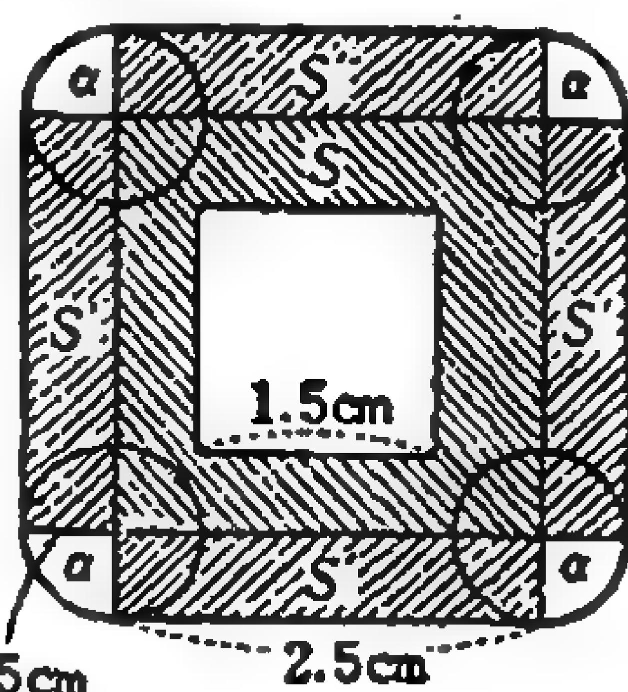


解 首先,考虑点 P 固定在正方形 $ABCD$ 的边上的情况。当点 Q 在圆 E 上移动时,连结 PQ,设 PQ 的中点为 M,PE 的中点为 F,



则点 M 画出以 F 为圆心,半径为 0.5cm 的圆。

其次,若 P 在正方形 $ABCD$ 的边上移动,则 F 画出以 E 为位似中心,边为正方形 $ABCD$ 边的一半的正方形。因此,在这个正方形的四边上,布满半径为 0.5cm 的圆,这些圆覆盖着的平面部分就是所求的面积。



S 部分的面积 $=2.5^2-1.5^2$,

S' 部分的面积 $=0.5\times2.5\times4$,

α 部分的面积 $=\pi\times0.5^2$,

所以,所求的面积 $=2.5^2-1.5^2+0.5\times2.5\times4+\pi\times0.5^2\doteq9.785(\text{cm}^2)$。

3. 两直线交点的轨迹

1671. 从定线段 AB 的两端,以任意方

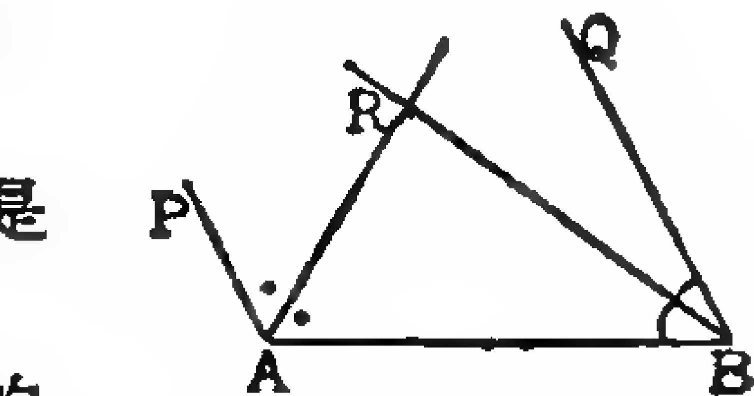
向作平行线 AP、BQ，求 $\angle PAB$、$\angle QBA$ 的平分线的交点 R 的轨迹。

解 因为 $AP\parallel BQ$，所以

$$\angle PAB+\angle QBA=180^\circ.$$

因此，每个角的一半的和为

$$\angle RAB+\angle RBA=90^\circ.$$



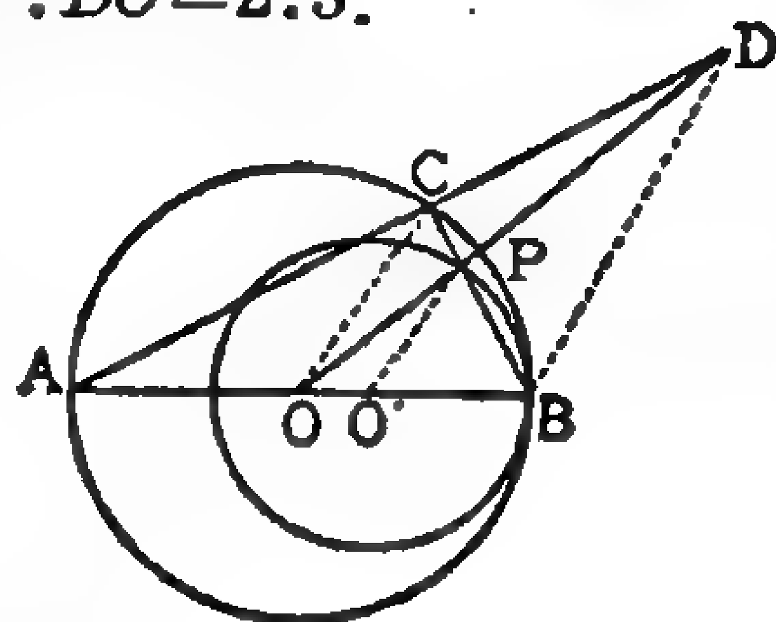
从而得出，$\angle ARB$ 是直角。

由此可知，点 R 的轨迹是以 AB 为直径的圆。

1672. 从圆 O 的直径 AB 一端 A，作任意的弦 AC，在 AC 的延长线上，取 CD 等于 AC，求 BC、OD 的交点 P 的轨迹。

解 在 $\triangle DAB$ 中，因为 O 是 AB 的中点，C 是 AD 的中点，所以 P 是 $\triangle ABD$ 的重心。

$$\therefore\quad BP:BC=2:3.$$



作 PO' 平行于 CO，AB 与 PO' 的交点为 O'，则

$$BO':BO=O'P:OC=BP:BC=2:3.$$

$$\therefore\quad BO'=\frac{2}{3}OB,\quad O'P=\frac{2}{3}OC.$$

由此可知，点 P 在以定点 O' 为圆心，半径的长等于定长 $\frac{2}{3}OC$ 的圆上。

反之，设 P 为圆 O' 上的任意点，延长 BP 与圆 O 相交于点 C，若在 AC 的延长线上取点 D，使 $CD=AC$。

因为 $OB=OC$，所以 $\angle OBC=\angle OCB$。

又 $O'B=O'P$，所以，$\angle O'BP=\angle O'PB$。

$$\therefore\quad \angle OCB=\angle O'PB.$$

从而得出，$O'P\parallel OC$。

因此，$\quad BC:BP=BO:BO'=3:2$。

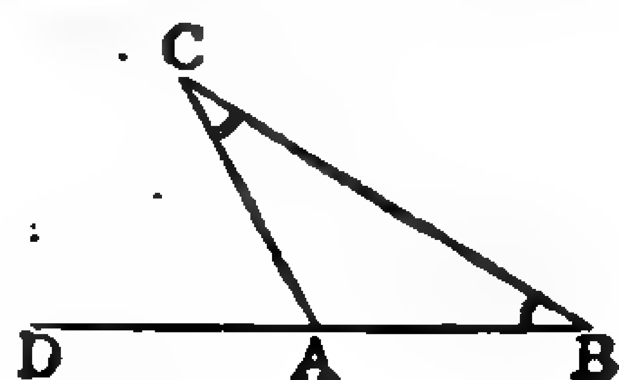
又 $AC=CD$，所以，P 是 $\triangle ABD$ 的重心。亦即 P 为 BC、OD 的交点。所以，点 P 适合条件。

因此，所求的轨迹是以 O' 为圆心，以 $\frac{2}{3}OA$ 为半径的圆(除去经过 A 和 B 的直径的两端)。

1673. 有两定点 A、B，过点 A 的直线与过点 B 的直线，都从直线 AB 的位置开始，以相同方向旋转，若过 A 的直线的旋转速度 2 倍于过 B 的直线的旋转速度，求两直线的交点 C 的轨迹。

解 因为 AC 的旋转速度为 BC 的 2 倍，所以

$$\angle CAD=2\angle ABC.$$



而

$$\angle CBA+\angle BCA=\angle CAD.$$

所以，$\quad \angle CBA=\angle BCA.$

$$\therefore\quad AC=AB.$$

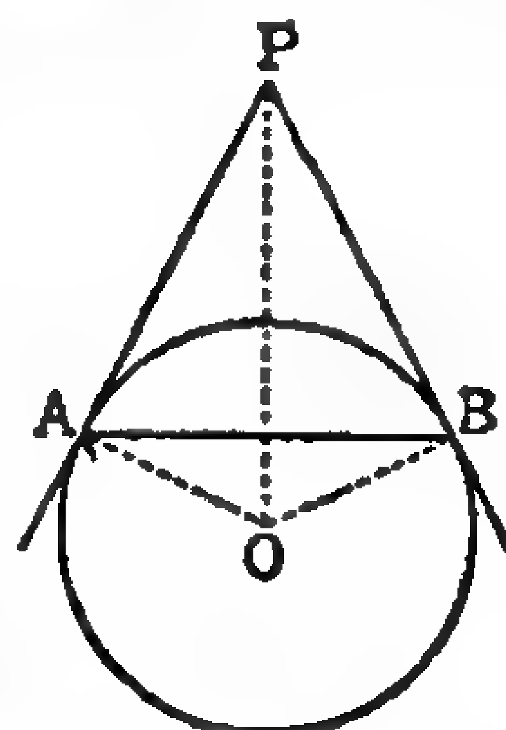
由此可知，点 C 的轨迹是以 A 为圆心，以 AB 为半径的圆。

1674. 设定圆 O，在这个圆内作定长的弦 AB，在弦的两端点作切线，求两切线交点 P 的轨迹。

解 连结 OA、OB、OP，则

$$\angle OAP=90^\circ=\angle OBP.$$

所以，四点 A、P、B、O 共圆。又 OP 是这圆的直径。



而 AB 的长度一定。所以，$\angle OAB$ 和 $\angle OBA$ 的大小一定。从而得出，

$$\angle PAB=\angle PBA$$

(大小一定)。

所以，$\triangle APB$ 的形状和大小一定。由此可知，$\triangle APB$ 的外接圆的大小也是一定的。因此，直径 PO 的长度是一定的。

所以，点 P 的轨迹是以 O 为圆心，以 OP (定长)为半径的圆。

1675. 在半径为 r 的圆中，有相互垂直的两弦，若各弦的平方和为定值 k^2，求两弦交点的轨迹。

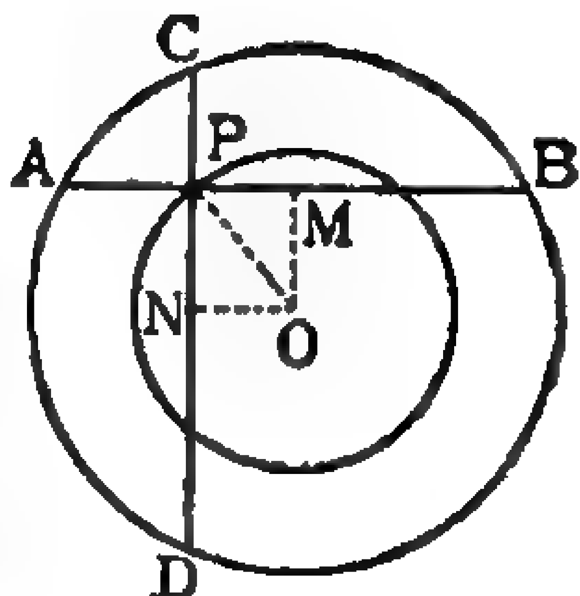
解 在圆 O 中，P 为相互垂直的两弦 AB、CD 的交点，从 O 向 AB、CD 所作的垂线分别为 OM、ON，设垂足为 M、N，则

$$\begin{aligned}AB^2+CD^2&=4(AM^2+CN^2)\\&=4[(r^2-OM^2)+(r^2-ON^2)]\\&=4[2r^2-(OM^2+ON^2)]\\&=4(2r^2-OP^2)=k^2.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad OP^2=2r^2-\frac{k^2}{4},$$

$$\therefore\quad OP=\sqrt{2r^2-\frac{k^2}{4}}.$$

所以，点 P 在以 O 为圆心，半径的长为 $\sqrt{2r^2-\frac{k^2}{4}}$ 的圆上。



反之，设 P 为这个圆上的任意点，过 P 作相互垂直的两弦 AB、CD，从 O 向 AB、CD 分别作垂线 OM、ON，垂足为 M、N，则

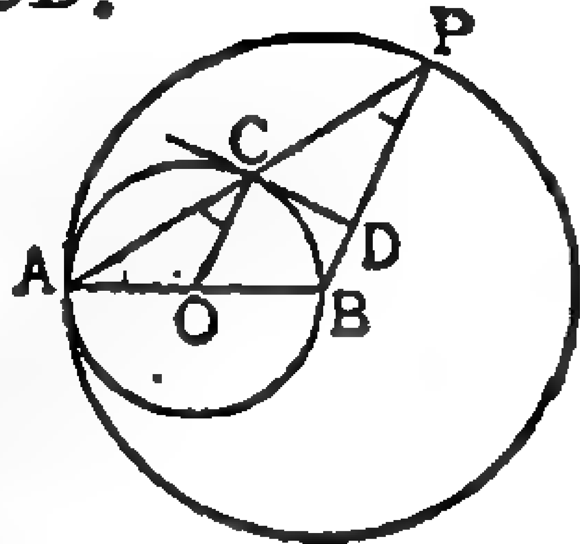
$$\begin{aligned}AB^2+CD^2&=4(AM^2+CN^2)\\&=4[(r^2-OM^2)+(r^2-ON^2)]\\&=4(2r^2-OP^2)\\&=4\left[2r^2-\left(2r^2-\frac{k^2}{4}\right)\right]=k^2.\end{aligned}$$

所以，点 P 适合条件。

因此，所求的轨迹是以 O 为圆心、半径的长为 $\sqrt{2r^2-\frac{k^2}{4}}$ 的圆。

1676. AB 是定圆 O 的直径，AC 为任意弦，过 C 作圆 O 的切线，过 B 向这切线作垂线 BD，求 AC 与 BD 的延长线的交点 P 的轨迹。

解 连结 OC，则 $OC\perp CD$.



$\therefore\quad OC\parallel BP.$

又 O 是 AB 的中点，所以

$BP=2OC=AB.$

由此可知，P 在以定点 B 为圆心，以 BA 为半径的圆上。

反之，设 P 是以 B 为圆心，BA 为半径的圆上的任意点，在 AP 与定圆 O 的交点 C 处，作定圆 O 的切线 CD，则 $OC\perp CD$.

而 $OA=OC$，$BA=BP$.

$\therefore\quad \angle CAO=\angle ACO,\ \angle PAB=\angle APB.$

$\therefore\quad \angle ACO=\angle APB,$

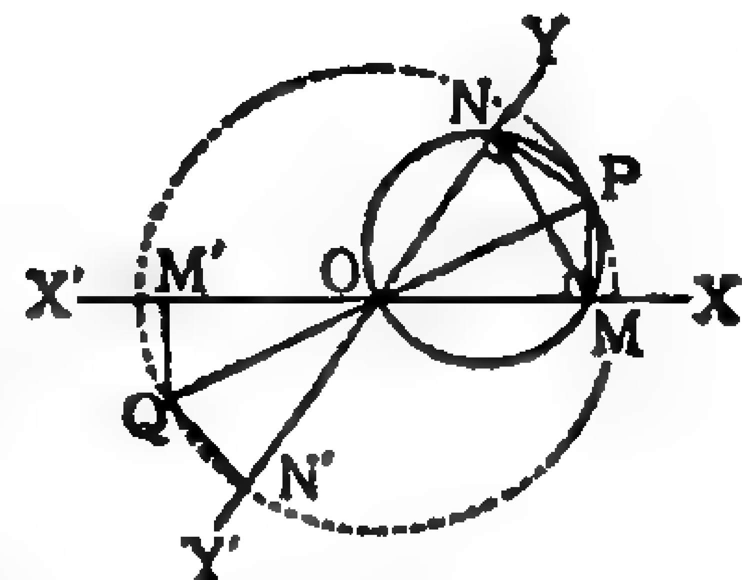
$\therefore\quad CO\parallel PB,\ CD\perp PB.$

亦即点 P 适合条件。

因此，点 P 的轨迹是以 B 为圆心，BA 为半径的圆。

1677. 从定圆外一点 P 向这圆作两条切线，切点为 A、B. 过 A 作任意弦 AC，过 P 作直线 PQ 平行 AC，设 PQ 与直线 BC 的交点为 Q，求点 Q 的轨迹。

解 因为 P 是定点，所以 A、B 也是定点。设 Q 为适合条件的点，则



$QP\parallel AC.$

$\therefore\quad \angle PQB$
$=\angle ACB$
$=\angle PAB$ (一定).

由此可知，适合条件的点，都在过 P、A、B 的圆上。

反之，设 Q 为这圆上的任意点，BQ 与定圆的交点为 C，则

$$\angle PQB=\angle PAB=\angle ACB.$$

$$\therefore\quad PQ\parallel AC,$$

从而得出，圆上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是圆 PAB.

1678. 定长线段 MN 的两端，在另外相交的两定直线 XX'、YY' 上移动，从 M、N 分别作所在的定直线 XX'、YY' 的垂线，求两垂线的交点 P 的轨迹。

解 设 $MN=a$ (定长)，作 $\triangle OMN$ 的外接圆，则

$\angle OMP=\angle ONP$
$=90°.$

所以点 P 在这圆上，且 OP 是这圆的直径。

而 $\triangle OMN$ 的外接圆的弦 MN 是定长，而且对这弦的 $\angle NOM$ 也是一定的，所以不论 MN 的位置怎样，这圆的大小总是一定的。由此可知，这圆的直径 OP 的长度也是一定的。因此点 P 在以 O 为圆心，OP 为半径的圆上。

反之，在这个圆上取任意点 Q，向 XX'、YY' 分别作垂线 QM'、QN'，则四边形 $OM'QN'$ 内接于直径是 OQ 的圆。$OP=OQ$，所以，以 OQ、OP 为直径的两圆相等且

$$\angle M'ON'=\angle MON,$$

所以 $\qquad M'N'=MN=a.$

因此，点 P 的轨迹是以两定直线的交点为圆心，OP 为半径的圆。

1679. 定三角形 ABC 的两边 AB、AC

的中点分别为 M、N，过 A 作任意直线，从 B、C 向这直线作垂线，垂足分别为 Q、R，求两直线 QM、RN(或延长线)的交点 P 的轨迹。

解　由假定，得 $\angle AQB=90°$，$\angle ARC=90°$。

因为 M、N 分别是 AB、AC 的中点，所以

$$\angle QAM=\angle AQM,$$
$$\angle NAR=\angle ARN.$$
$$\therefore\quad \angle P=\angle BAC.$$

又因为 $\angle BAC$ 一定，所以 $\angle P$ 也一定。设 O 为 BC 的中点，则

$$\angle MON=\angle BAC.$$
$$\therefore\quad \angle MPN=\angle MON.$$

由此可得，四点 M、N、O、P 共圆，亦即点 P 在 $\triangle MNO$ 的外接圆上。

反之，可以证明，在这个圆上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是 $\triangle MNO$ 的外接圆。

1680.　一直线平行于 $\triangle ABC$ 的底边 BC，它与 AB、AC 的交点分别为 E、F，求梯形 $BCFE$ 的对角线交点 O 的轨迹。

解　设梯形 $BCFE$ 的对角线 BF、CE 的交点为 O，过 O 作 BC 的平行线与 AB、AC 分别交于点 H、K，则 $OH=OK$ (根据问题 **1032**)。延长 AO 与 BC 的交点为 D，则 D 是 BC 的中点。因此，点 O 在中线 AD 上。

反之，可以证明，AD 上的点都适合条件。

因此，所求的轨迹是 $\triangle ABC$ 的中线 AD。

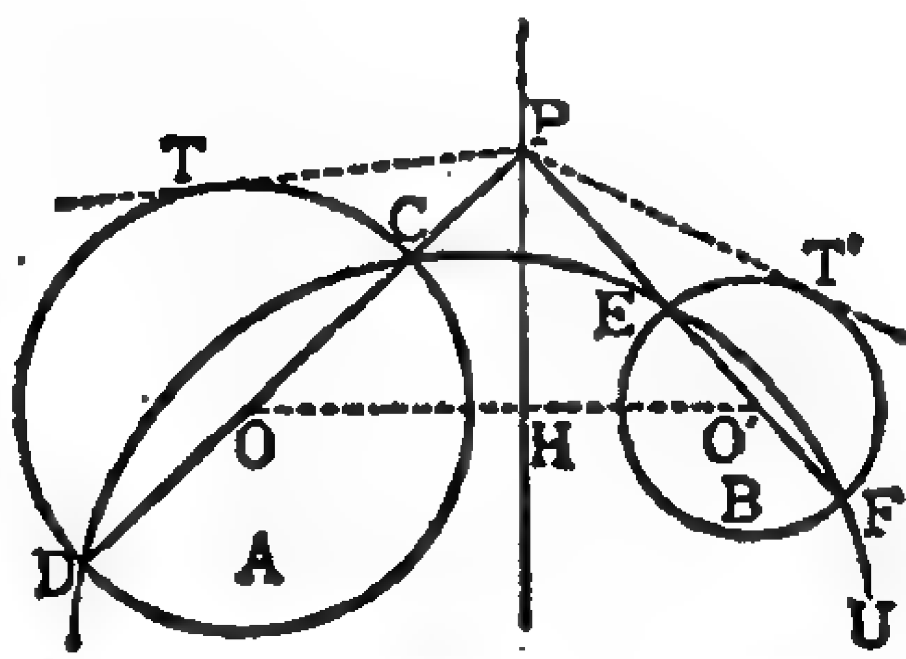
1681.　设任意圆 U 与两定圆 A、B 分别相交，两圆 A、U 的公共弦与 B、U 的公共弦的交点为 P，求点 P 的轨迹。

解　设圆 A、B 与圆 U 的交点分别为 C、D 与 E、F，又 CD、EF 的交点为 P，从 P 向圆 A、B所作的切线分别为 PT、PT'，则

$$PT^2=PC\cdot PD$$
$$=PE\cdot PF$$
$$=PT'^2.$$

从而得出，

$$PT=PT'.$$



于是，由问题 **1835** 可知点 P 的轨迹是两圆 A、B 的根轴。

1682.　若两个不相交的圆 O、O' 的圆心一定，当半径变化时，求两圆公切线交点的轨迹。

解　设 P 为两圆 O、O' 的内公切线的交点，P' 为它们的外公切线的交点，则 P、P' 在连心线 OO' 上。

又若 Q 为一外公切线和一内公切线的交点，连结 OQ、$O'Q$，则显然

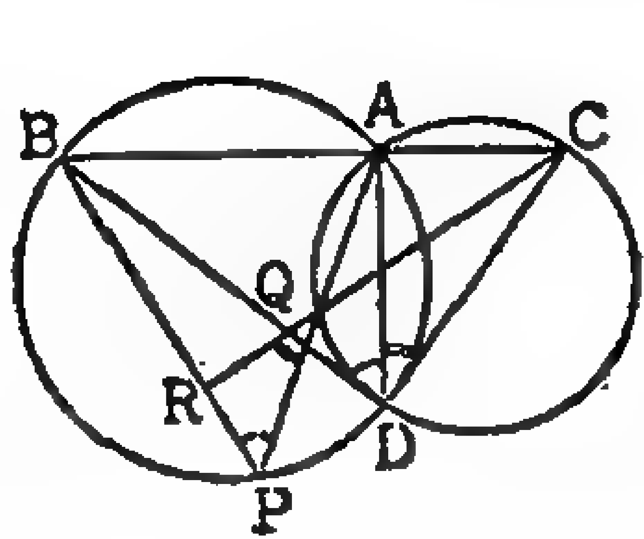
$$\angle OQO'=90°.$$

所以，点 Q 在以 OO' 为直径的圆上。因此，所求的轨迹是过 O、O' 的直线和以线段 OO' 作直径的圆。

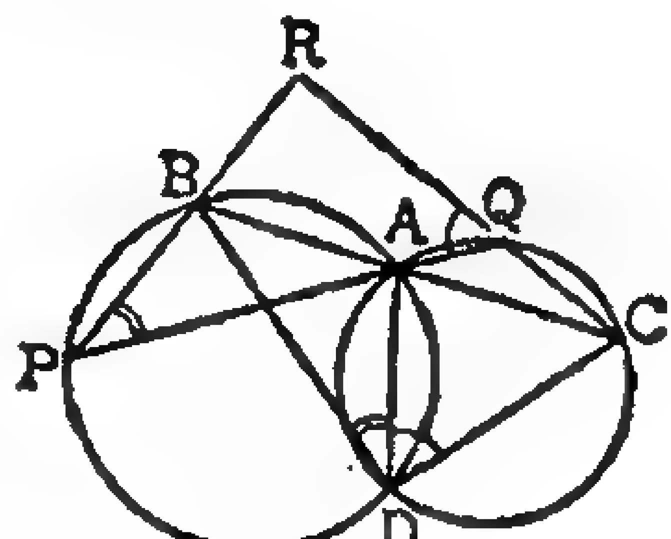
1683.　两圆相交，过其中一个交点 A 的定直线，与两圆的交点分别为 B、C，过 A 的任意直线与两圆的交点分别为 P、Q，求 PB、CQ 或其延长线的交点 R 的轨迹。但假定 B、P 与 C、Q 分别在同一个圆上。

解　设 R 为 PB、CQ 的交点，AD 为两圆的公共弦。连结 BD、CD，则

$$\angle ADB=\angle BPQ,$$
$$\angle ADC=\angle PQR.$$



(1)



(2)

$$\therefore\quad \angle BRC+\angle BDC=180°,\ (\text{图}1)$$

或　　$$\angle BRC=\angle BDC.\ (\text{图}2)$$

由此可知，点 R 在圆 BDC 上。

反之，容易证明，圆 BDC 上的任意点都适合条件。

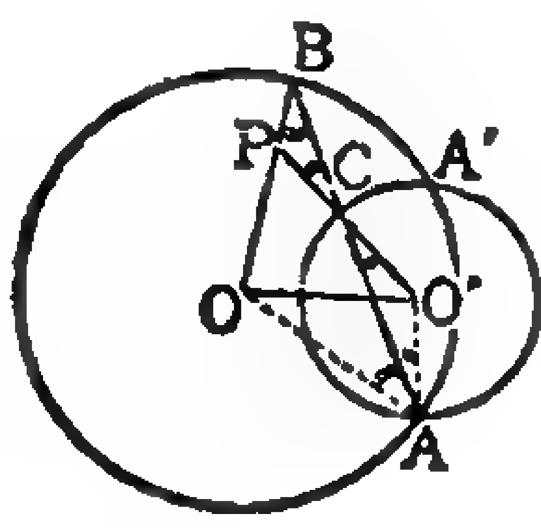
因此，所求的轨迹是 $\triangle BCD$ 的外接圆。

1684． 两定圆 O、O' 相交，过其中一个交点 A 作任意割线，与这两圆分别交于点 B、C，求 BO、CO' 的交点 P 的轨迹。

解 设两圆 O、O' 的交点为 A、A'，则

$$\angle B=\angle OAB,\quad \angle C=\angle O'AC.$$

而

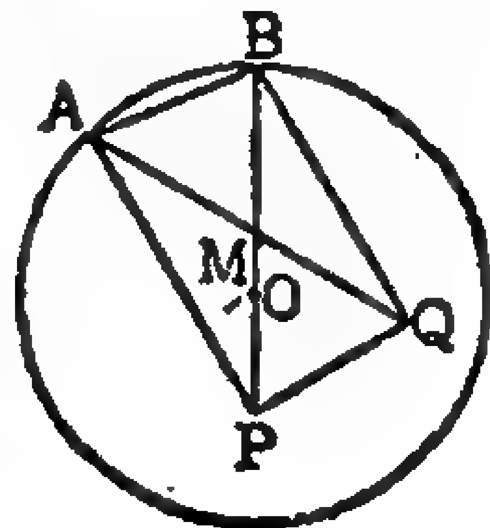


$$\angle BPC=180^\circ-(\angle B+\angle C).$$

$$\therefore\ \angle BPC=\angle OAO'=\angle OA'O',$$

所以，点 P 在 $\triangle A'OO'$ 的外接圆上。

反之，设 P 为这圆上的任意点，PO、PO' 分别与圆 O、O' 相交于点 B、C.连结 BA、CA，则



$$\angle POA=2\angle OAB,$$
$$\angle PO'A=2\angle O'AC,$$
$$\angle OPO'=\angle OAO'.$$

而四边形 $POAO'$ 的内角和为 360°，即

$$\angle POA+\angle PO'A+2\angle OAO'=360^\circ.$$

$$\therefore\ \angle OAB+\angle O'AC+\angle OAO'=180^\circ.$$

由此可知，B、A、C 成一直线．所以，点 P 适合条件。

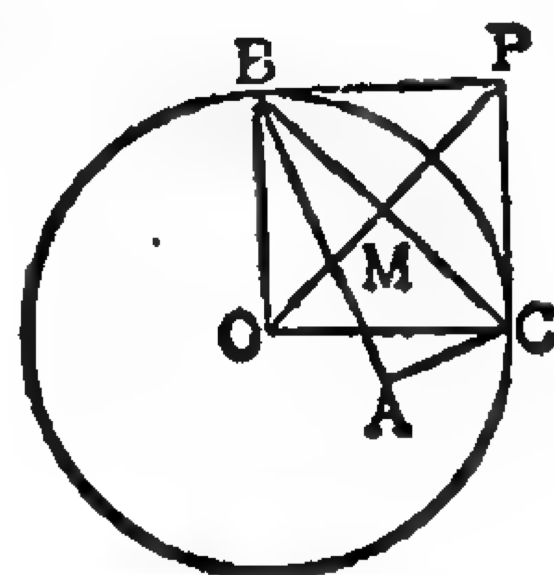
因此，点 P 的轨迹，是 $\triangle AOO'$ 的外接圆.

1685． 在定圆 O 内有一定点 P，以 P 为一顶点作矩形 $PABQ$，使相邻的两顶点 A、B 在圆 O 上，求矩形 $PABQ$ 的对角线的交点 M 的轨迹。

解 设 $PABQ$ 为矩形．因对角线 AQ、BP 的交点 M，总是 PB 的中点，所以，与问题 **1627** 一样，所求的轨迹就是从 P 向圆所作线段的中点的轨迹，即以 PO 的中点 N 为圆心，半径的长为圆 O 的半径之半的圆。

1686． 有定圆 O 和定点 A，过 A 作相互垂直的直线，分别与圆交于点 B、C，在弦 BC 的两端作切线 BP 和 CP，求这两切线的交点 P 的轨迹。

解 设 M 为 BC 的中点，由问题 **1664** 可知，点 M 的轨迹是以 OA 的中点 N 为圆心，半径长为 $\sqrt{\frac{r^2}{2}-ON^2}$ 的圆（r 是圆 O 的半径）．又 O、M、P 在一直线上，



$$\angle OBP=90^\circ,$$
$$BM\perp OP,$$
$$\therefore\ OM\cdot OP=OB^2=r^2.$$

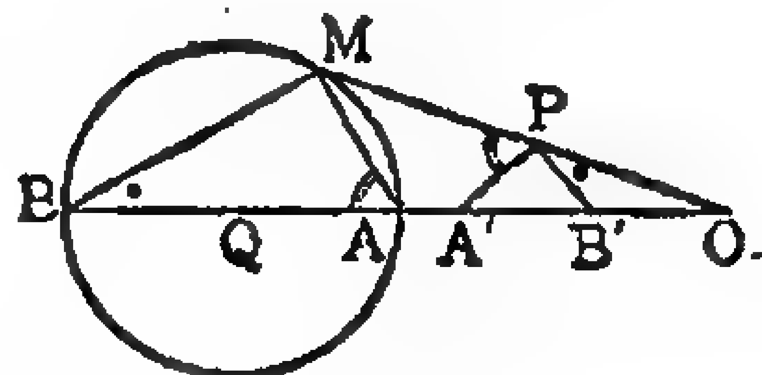
所以，点 P 的轨迹是点 M 的轨迹关于点 O 的反形（问题 **1687**）．

而点 M 的轨迹是圆，所以，点 P 的轨迹也是一个圆（问题 **1687**）．

注 当 $OM\cdot OP=r^2$（一定）时，点 P 的轨迹称为点 M 的轨迹的反形，O 叫做反演中心，r^2 叫做反演幂。

1687． 连结定点 O 与定圆 Q 上的任意点 M，若在线段 OM 或其延长线上取点 P，使 $OM\cdot OP=m^2$（m 是定长线段），则点 P 的轨迹是一个圆。

解 作过 O 的直径 AB，在 OAB 上，取点 A'、B'，使



$$OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=m^2,$$

则

$$OP\cdot OM=OA\cdot OA'=OB\cdot OB'.$$

因此，M、P、A'、A 共圆，M、P、B'、B 也共圆。

由此可得，

$$\angle MAB=\angle MPA',\qquad ①$$
$$\angle MBA=\angle OPB'.\qquad ②$$

而 AB 是直径．所以

$$\angle MAB+\angle MBA=90^\circ.$$
$$\therefore\ \angle A'PB'=90^\circ.$$

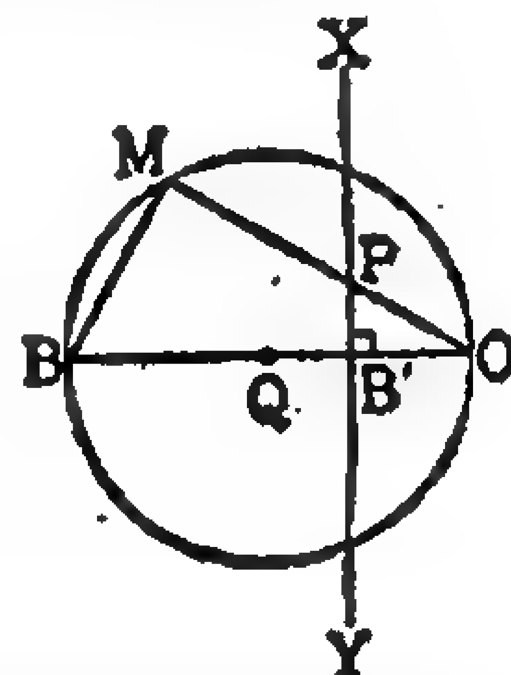
又 A、B 是定点，

$$OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=m^2,$$

所以 A'、B' 也是定点．因此，点 P 在以 $A'B'$ 为直径的圆上。

反之，可以证明这圆上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是以 $A'B'$ 为直径的圆。



注 这圆叫做圆 Q 关于点 O 的反象。

若点 O 在圆 Q 上，B' 是使

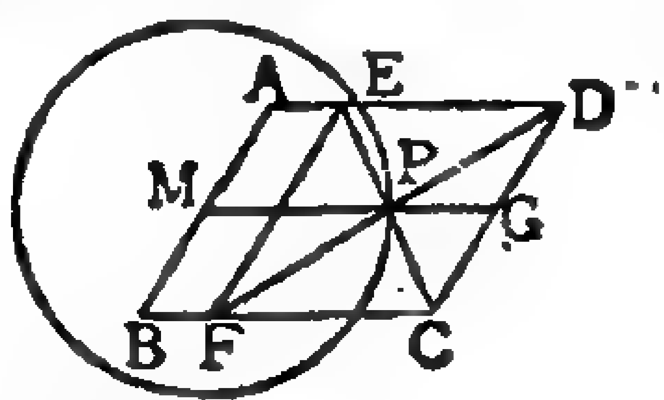
$$BO\cdot B'O=m^2$$

的定点，这时，点 P 的轨迹变成过定点 B' 而

垂直于定直径 OB 的直线 XY (参看问题 1876)。

1688. 设平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 的位置和大小一定，又 BC 的长度一定，求 $\angle C$、$\angle D$ 的平分线的交点 P 的轨迹.

解 连结 AB 的中点 M 和 P，并延长 MP 与 CD 交于点 G，又 CP、DP 的延长线与 AD、BC 分别交于 E、F，则



$$\angle DEC=\angle ECB=\angle DCE.$$

$$\therefore\ DE=DC.$$

又 $$\angle DFC=\angle ADF=\angle CDF,$$

$$\therefore\ CF=DC.$$

于是 $$DE=CF.$$

所以四边形 $EFCD$ 是平行四边形. 从而得出，P 是 CE 的中点。所以 $MP\parallel AD$. 因此，G 是 CD 的中点。

而 $$\angle DPC=90^\circ.$$

$$\therefore\ PG=DG.$$

又 $CD=AB$(定长)，所以 PG 也是定长.

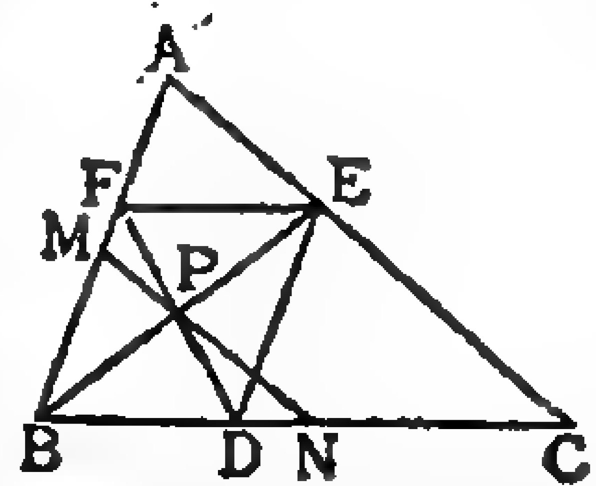
而 MG 等于 BC，是定长. 因此，$MP=MG-PG$，是定长。所以，点 P 在以 M 为圆心，以 MP 为半径的圆上.

反之，容易证明，这个圆上的点适合条件.

因此，所求的轨迹是这个圆.

1689. 在定三角形 ABC 中，内接平行四边形 $BDEF$，它和 $\triangle ABC$ 有公共角 B，求这平行四边形的对角线的交点 P 的轨迹.

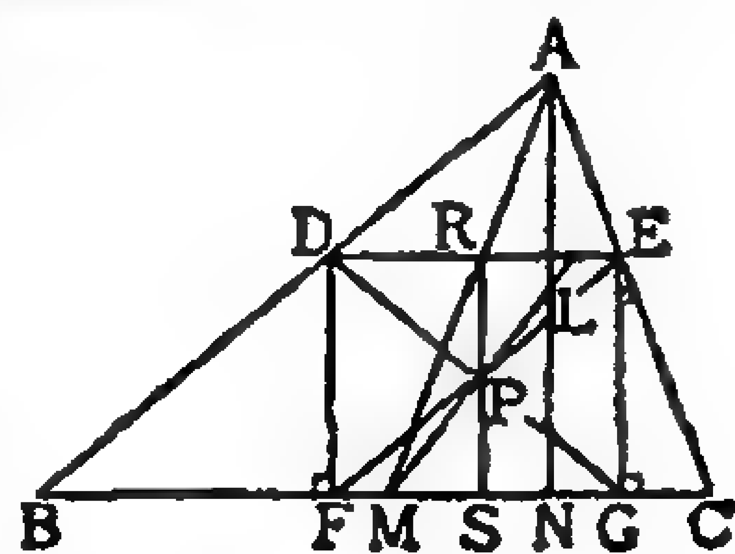
解 因为 P 是对角线 BE 的中点，所以点 P 的轨迹，与从点 B 到线段 AC 上各点的连结线段的中点的轨迹相一致。因此，由问题 **1622** 可知，所求的轨迹是连结 AB 的中点 M 与 BC 的中点 N 的线段 MN.



1690. 作 $\triangle ABC$ 底边 BC 的平行线，与 AB、AC 的交点分别为 D、E，从 D、E 向 BC 作垂线 DF、EG，得到矩形 $DFGE$，求这个矩形对角线的交点 P 的轨迹.

解 设 R 为 DE 的中点，连结 AR，并延长 AR 与 BC 交于点 M. 因为 $DE\parallel BC$，所以 M 是 BC 的中点。

其次，从 A 向 BC 作垂线 AN，从 R 向 BC 作垂线 RS，则 RS 过 P，且 P 是 RS 的中点。



又 $RS\parallel AN$，若 L 为 AN 的中点，则 P 在 ML 上.

反之，若 P 是 ML 上的任意点，从 P 向 BC 作垂线 PS，设 SP 的延长线与 AM 的交点为 R，从 R 作 BC 的平行线 DE，作矩形 $DFGE$. 容易证明，这矩形的对角线在点 P 相交.

因此，从 A 向 BC 作垂线 AN，设 L 为 AN 的中点，M 为 BC 的中点，连结 LM，则线段 LM 就是所求的轨迹.

1691. 平行四边形 $EFGH$，内接于四边形 $ABCD$，若平行四边形的一边，平行于原四边形的一条对角线，求这平行四边形对角线的交点 P 的轨迹.

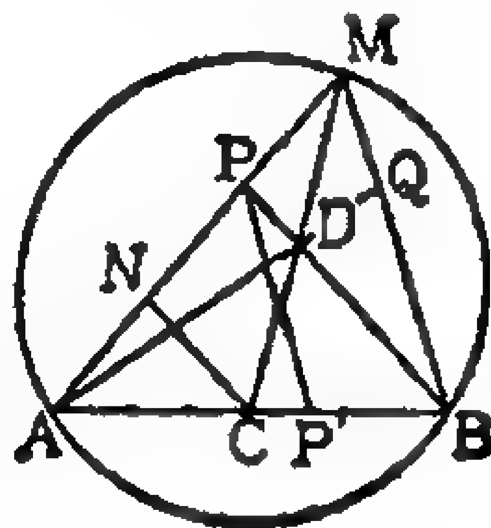
解 设 $EF\parallel AC$，则 $HG\parallel AC$.

$$\therefore\ \frac{BF}{BC}=\frac{EF}{AC}=\frac{HG}{AC}=\frac{DG}{DC}.$$

$\therefore\ FG\parallel BD.$

同理可得，

$$EH\parallel BD.$$



若 M、N 分别为 BD、AC 的中点，MA 与 EH、MC 与 FG 的交点分别为 K、L，则 K、L 是 EH、FG 的中点。从而得出，$\square EFGH$ 的对角线的交点 P 是 KL 的中点，而且 $KL\parallel AC$，所以点 P 在线段 MN 上.

反之，容易证明，在线段 MN 上的点适合条件.

因此，所求的轨迹是线段 MN.

1692. M 为定弧 AMB 上的任意点，AB 的中点为 C，连结 CM，又 D 为线段 CM 的中点，若 BD、AD 的延长线分别与 MA、MB 交于点 P、Q，求点 P、Q 的轨迹.

解 作 CN 平行于 BP，则

$$AN=NP.$$

又 $$NP=PM,$$

$$\therefore\ AP=\frac{2}{3}AM.$$

因此，若在 AB 上取点 P'，使

$$AP'=\frac{2}{3}AB.$$

连结 PP'，则 $PP'\parallel MB$.

$$\therefore\quad \angle APP'=\angle AMB\quad(\text{一定}).$$

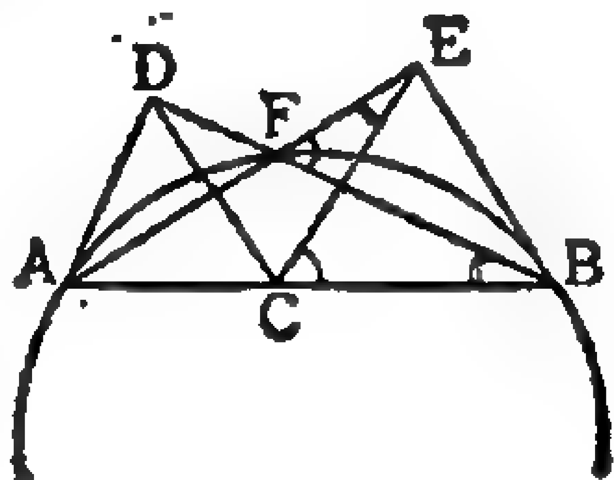
因此，点 P 的轨迹是以 AP' 为弦，所含弓形角等于圆周角 AMB 的弓形(对 AB 而言与弧 AMB 在同侧)弧(问题**1620**)。同理可得，点 Q 的轨迹也是一个弓形弧。

1693. C 为线段 AB 上的任意点，以 AC、CB 为边，在 AB 的同侧作正三角形 ACD、CBE，若 F 为 AE、BD 的交点，求点 F 的轨迹。

解 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle DCB$ 中，

$$AC=DC,\quad CE=CB,$$

$\angle ACE=\angle DCB$,



$\therefore\quad \triangle ACE\cong\triangle DCB$.

于是

$$\angle AEC=\angle DBC.$$

因此，B、C、F、E 共圆。

$$\therefore\quad \angle EFB=\angle ECB=60^\circ.$$

由此可得， $\angle AFB=120^\circ$.

所以，F 在以 AB 为弦，所含圆周角等于 120° 的弓形弧上。

反之，设 F 为这弧上的任意点，过点 B 作这弧的切线与 AF 的延长线交于点 E，则

$$\angle EBF=\angle FAB.$$

$$\therefore\quad \angle AFB+\angle ABE=180^\circ.$$

而 $$\angle AFB=120^\circ.$$

$$\therefore\quad \angle ABE=60^\circ.$$

因此，若在 BA 上取 $BC=BE$，作 $\triangle CBE$，则 $\triangle CBE$ 是正三角形。又过点 C，作 CD 平行于 BE，与 BF 的延长线交于点 D. 在 $\triangle DCB$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$CB=CE,\quad \angle CDB=\angle FBE=\angle EAC,$$

$$\angle DCA=\angle EBC=60^\circ\ (\because\ DC\parallel EB),$$

$$\therefore\quad \angle DCB=\angle ACE=120^\circ,$$

$$\therefore\quad \triangle DCB\cong\triangle ACE(\text{两角夹边}).$$

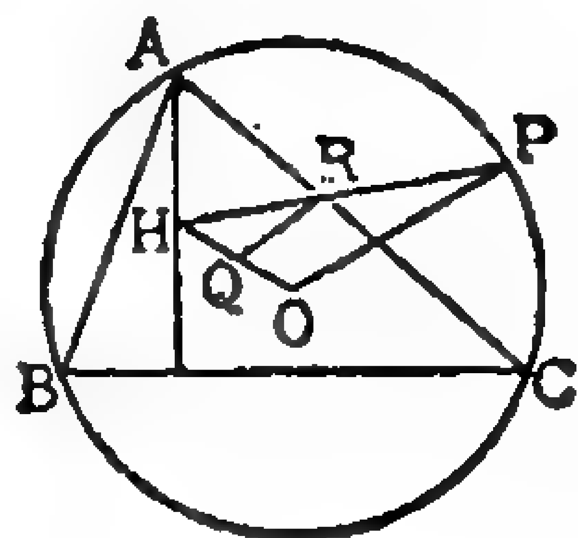
$$\therefore\quad DC=AC.$$

而 $\angle DCA=60^\circ$. 所以，$\triangle ACD$ 是正三角形。

因此，所求的点 F 的轨迹是这个圆弧。

1694. 点 P 在定三角形 ABC 的外接圆上，连结 P 与垂心 H 的直线和关于点 P 的这三角形的西摩松线相交，求交点的轨迹。

解 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，连结 HP，则关于点 P 的 $\triangle ABC$ 的西摩松线把 HP 两等分(根据问题**672**)。设分点为 R. 若 HO 的中点为 Q，则

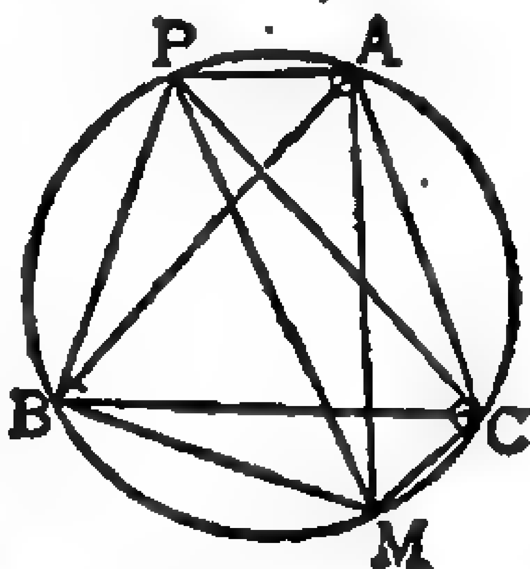


$$QR=\frac{1}{2}OP.$$

因此，点 R 的轨迹是以点 Q 为圆心，以 $\frac{1}{2}OP$ 为半径的圆，亦即是 $\triangle ABC$ 的九点圆(参考问题**675**)。

1695. 在定三角形 ABC 所在的平面内取一点 M，连结 MA、MB、MC. 若过 A 而垂直于 MA 的直线，过 B 而垂直于 MB 的直线，过 C 而垂直于 MC 的直线相交于一点，则点 M 的轨迹是怎样的。

解 设 M 为适合条件的一点，垂直于 MC 的直线 CP，与垂直于 MB 的直线 BP 相交于点 P，则 P、B、M、C 共圆，且 PM 是这圆的直径。



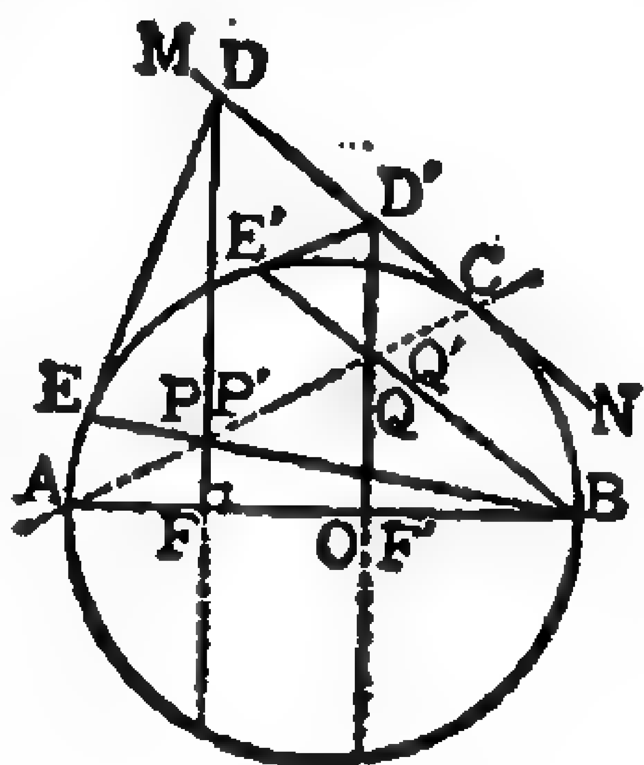
同理可得，P、A、C、M 共圆，PM 是这圆的直径。由此可知，点 M、P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上。因此，点 M 的轨迹是 $\triangle ABC$ 的外接圆。

1696. AB 为圆 O 的定直径，C 为圆上的定点，过点 C 的切线为 MN，由 MN 上的任意点 D 作圆 O 的切线 DE，从 D 作 AB 的垂线 DF，与 BE 交于 P，求点 P 的轨迹。

解 因为 DE 是切线，所以，

$$\angle DEB=\angle EAB.$$

又



$\angle AEB=90^\circ=\angle PFA$,

所以，四边形 $EAFP$ 内接于圆。

$\therefore\quad \angle EAB=\angle DPE$.

$$\therefore\quad \angle DEP=\angle DPE.$$

从而得出， $DP=DE$.

又若 AC 与 DF 的交点为 P'，则同理可得

$$DP'=DC.$$

而 $DC=DE$, ∴ $DP=DP'$.

由此可得，点 P' 与点 P 相重合。因此，DF 与 BE 的交点在定直线 AC 上。

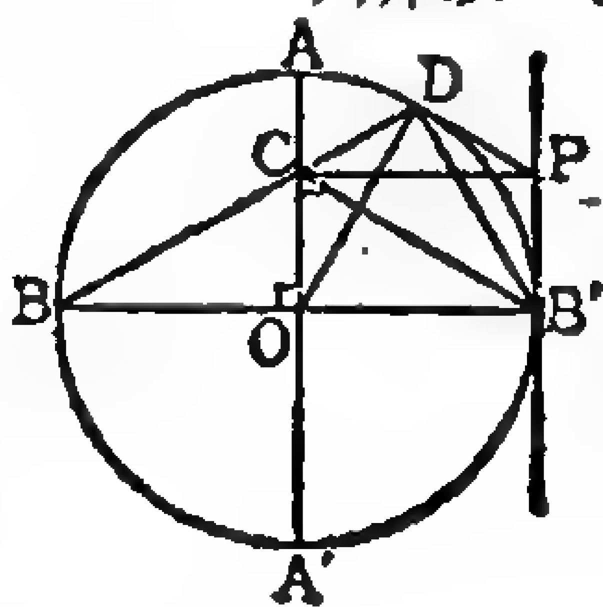
反之，在 AC 上取点 Q，从 Q 作 AB 的垂线 QF'，设 $F'Q$ 的延长线与 MN 的交点为 D'。与前面同理可得，$D'C=D'Q$.

其次，从 D' 作切线 $D'E'$，若 $E'B$ 与 $D'F'$ 的交点为 Q'，则 $D'Q'=D'E'$. 而 $D'C=D'E'$. ∴ $D'Q=D'Q'$. 从而得出，点 Q 与点 Q' 相重合。由此可知，点 Q 适合于给定的条件。

因此，所求的轨迹是直线 AC.

1697. 在定圆 O 中，两直径 AOA'、BOB' 相互垂直，过 B 的弦 BD 与 AOA' 交于点 C，过点 C 作垂直于 AOA' 的直线，与过圆 O 上一点 D 的切线相交于点 P，求点 P 的轨迹.

解 因为 $\angle ODP=\angle OCP=90°$，所以 O、C、D、P 共圆.



又 $\angle CDB'=\angle COB'=90°$. 所以 O、C、D、B' 也共圆. 由此可得，O、C、D、P、B' 共圆，从而得出，四边形 $ODPB'$ 内接于这个圆.

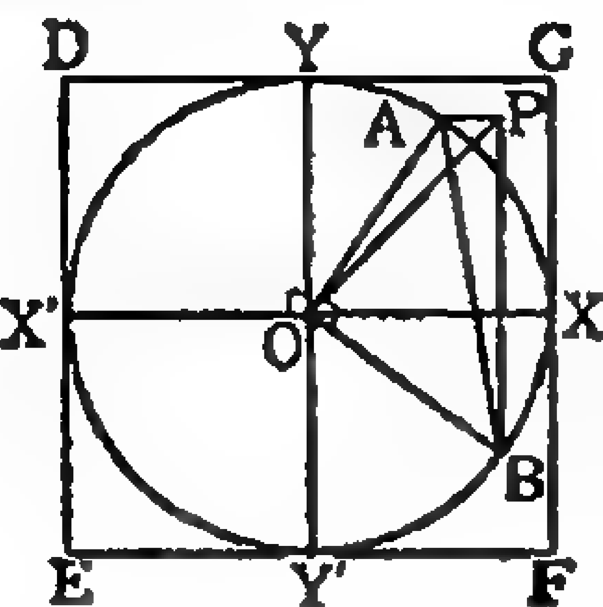
$$\therefore\quad \angle OB'P=\angle ODP=90°.$$

因此，若过点 B' 作垂直 BB' 的直线，则点 P 在这直线上. 由此可知，点 P 的轨迹是过点 B' 所作圆 O 的切线.

1698. 在圆 O 中，两定直径 XX'、YY'，相互垂直，又作相互垂直的任意两半径 OA、OB，从 A 作平行于 XX'，从 B 作平行于 YY' 的直线，求这两直线的交点 P 的轨迹.

解 因为

$$\angle AOB=90°,$$
$$\angle APB=90°,$$



所以，A、O、B、P 共圆.

$$\therefore\quad \angle APO=\angle ABO=45°.$$

又 $AP\parallel OX$,

所以， $\angle POX=\angle APO$.

$$\therefore\quad \angle POX=45°.$$

所以，点 P 在定角 XOY 的平分线上.

设在 X、Y 处的切线相交于点 G，则 G 也是适合条件的点. 所以，点 P 在 GO 上.

反之，容易证明 GO 上的点，适合于给定的条件.

因此，作边平行于圆 O 的定直径的外切正方形 $DEFG$，则这个正方形的对角线 GE、DF 就是所求的轨迹.

1699. $\triangle ABC$ 为等腰三角形，以顶点 A 为圆心作任意圆，从底边两端点 B、C，分别作这个圆的切线，求这两切线交点 M 的轨迹.

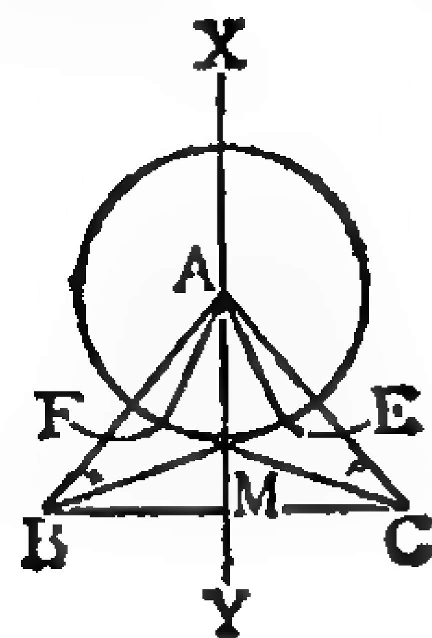
解 从 B、C 分别作圆 A 的切线 BE、CF，切点为 E、F. 设 BE、CF 的交点为 M，则在图(1)的情况下：

$$AB=AC,\quad AE=AF,$$
$$\angle AEB=90°=\angle AFC.$$
$$\therefore\quad \triangle AEB\cong\triangle AFC.$$
$$\therefore\quad \angle ABE=\angle ACF,$$

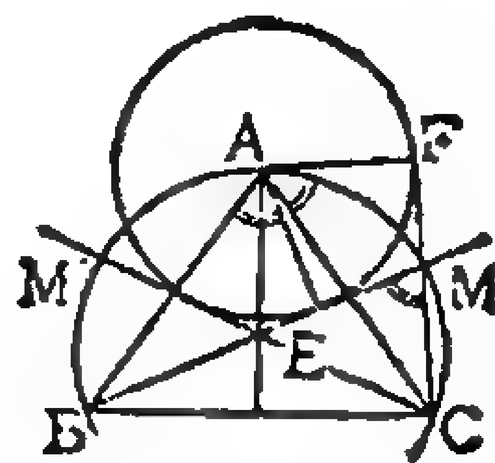
从而得出， $\angle MBC=\angle MCB$.

所以，$\triangle MBC$ 是等腰三角形. 由此可知，点 M 在 BC 的垂直平分线 XY 上.

反之，在直线 XY 上取任意点 M，连结 BM、CM，并延长 BM、CM. 从 A 作 BM、CM 的垂线，则容易证明这两垂线相等. 由此可知，以 A 为圆心，以 AE(或 AF)为半径的圆与 BM、CM 相切.



(1)



(2)

因此，所求的轨迹是 BC 的中垂线.

其次，在图(2)的情况下：

$$\because\quad \triangle AEB\cong\triangle AFC,$$
$$\therefore\quad \angle BAE=\angle CAF.$$

因而 $\angle EAF=\angle BAC$(一定).

因为 $\angle AEM=\angle AFM=90°$,

所以四边形 $AEMF$ 内接于圆.

于是 $\angle EMC=\angle EAF=\angle BAC$.

由此可得，B、A、M、C 共圆.

所以，M 在 $\triangle ABC$ 的外接圆的弧 BAC 上. 同理可以证得点 M' 也在这弧上.

反之，容易证明，这弧上的点适合条件。

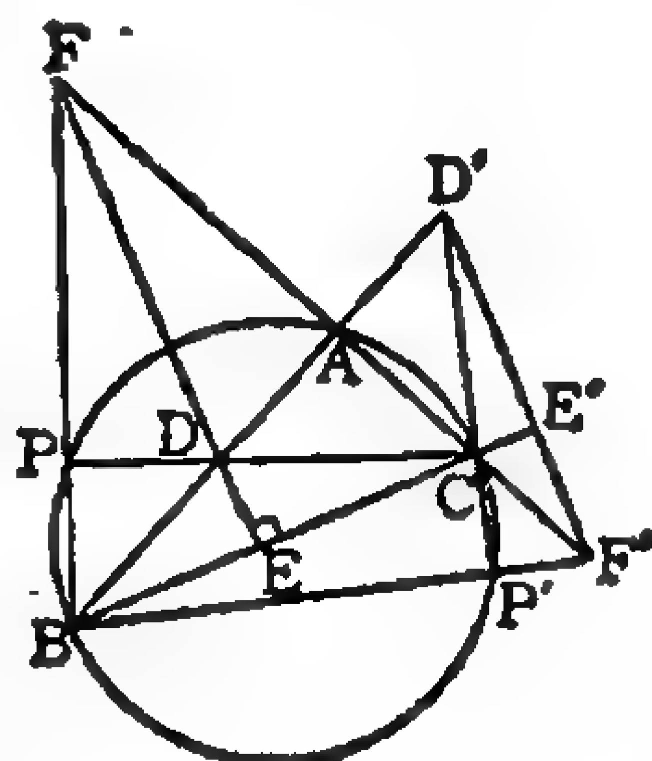
因此，所求的轨迹是弧 BAC。

1700. 在定 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，作 BC 的垂线 EF 与 AB 交于点 D，与 CA 的延长线交于点 F。若 BF、CD 的交点为 P，则当 E 在线段 BC 上移动时，点 P 的轨迹是怎样的？

解 在 $\triangle FBC$ 中，$FE\perp BC$，$BA\perp CF$，所以，D 是三角形的垂心。

$\therefore\ CD\perp BF$。

$\therefore\ \angle BPC=90°$。



因此，点 P 在以 BC 为直径的圆上。

反之，设 P' 为这圆上的任意点，直线 $P'C$ 与 BA 的交点为 D'，若 AC 与 BP' 的交点为 F'，则 C 是三角形 $BD'F'$ 的垂心。所以，$D'F'$ 是垂直于 BC 的直线。由此可知，点 P' 适合条件。

因此，所求的轨迹是以 BC 为直径的圆。

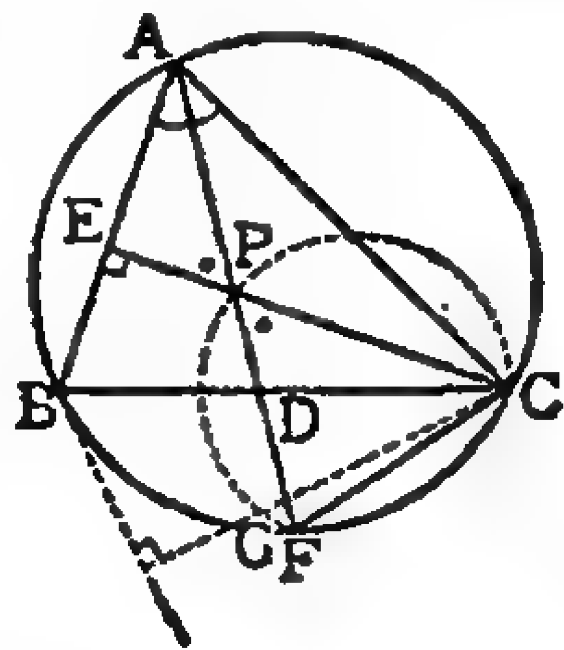
1701. 在 $\triangle ABC$ 中，边 BC 的大小、位置一定，顶角 A 的大小也一定，$\angle A$ 的平分线 AD 与从 C 所作 AB 的垂线 CE 交于 P，求交点 P 的轨迹。

解 设 AD 的延长线与 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点为 F，则 F 是弧 BC 的中点。又

$\angle CPF=\angle APE$

$=90°-\dfrac{1}{2}\angle A$

（定角）。



而 C、F 是定点，所以点 P 的轨迹是以 CF 为弦，所含的弓形角等于$\left(90°-\dfrac{1}{2}\angle A\right)$的弓形弧。

但是，当 A 趋近于 B 的极限位置时，在点 B 作切线，则适合条件的点，变成从 C 向切线作的垂线与弓形弧的交点 G，所以 G 是轨迹的界限点。因此，所求的轨迹是弧 CPG。

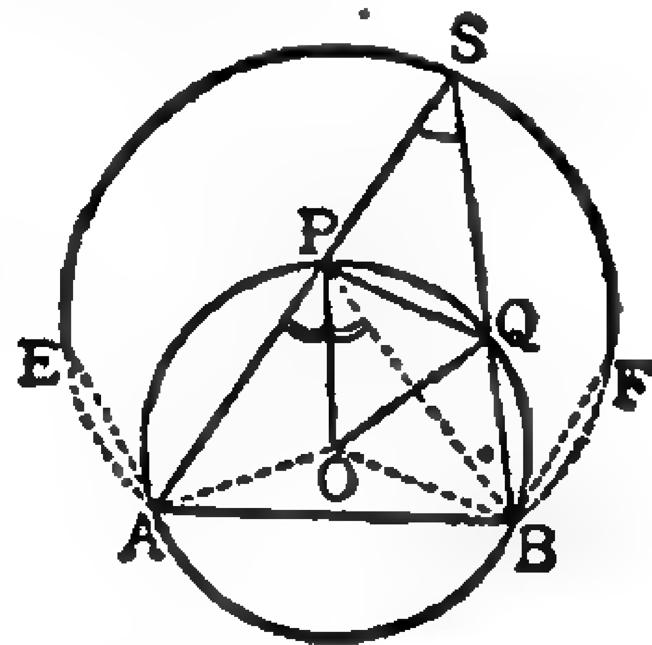
1702. 在定线段 AB 上，作一个含 $60°$ 角的弓形，在这弧上截取任意弧 PQ，使它所对的圆心角为 $60°$，求两直线 AP、BQ 的交点 S 的轨迹。这里，假定交点在弓形的外面。

解 设 S 为 AP、BQ 的交点，O 为圆心。

$\because\ \angle APB=60°$，

$\therefore\ \angle AOB=120°$。

所以，劣弧 AB 是圆 O 的 $\dfrac{1}{3}$。



其次，在这弓形弧上截取任意弧 PQ，使它所对的圆心角是 $60°$，则弧 PQ 是圆 O 的 $\dfrac{1}{6}$。于是，$(\widehat{AB}-\widehat{PQ})$是圆 O 的 $\dfrac{1}{6}$。

由问题 **325** 可以知道，$\angle ASB$ 等于张在 $(\widehat{AB}-\widehat{PQ})$ 上的圆周角。所以，$\angle ASB=30°$。因此，点 S 的轨迹是张于线段 AB 上，所含圆周角等于 $30°$ 的弓形弧。但须注意，若在 A、B 上作定弓形的切线 AE、BF，则这轨迹是夹在这两切线间的一段弓形弧。

1703. 在定圆内，以定直径和定长弦为一组对边作内接四边形，求这四边形的对角线交点的轨迹。

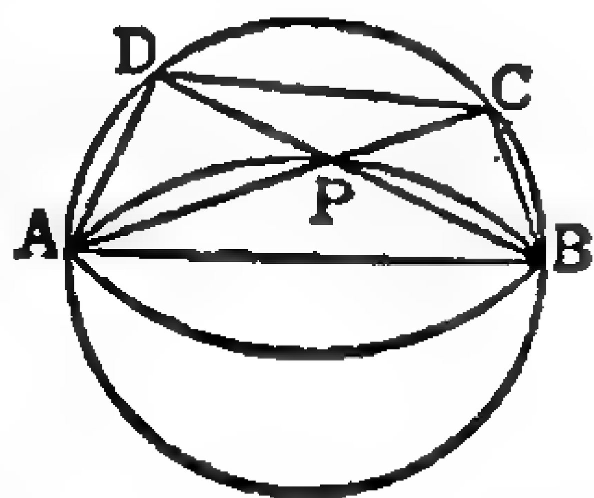
解 在定圆内，设 AB 为定直径，CD 为定长弦，内接四边形 $ABCD$ 的对角线的交点为 P，则

$\angle APB$

$=\angle ADB+\angle DAC$。

而 $\angle ADB=90°$，

$\angle DAC$ 是张在定长弧 DC 上的圆周角，所以是定角。由此可得，$\angle APB$ 为定角。因此，点 P 在以 AB 为弦，所含圆周角等于定角 APB 的弓形弧 APB 上。



反之，可以证明，这弧上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是弧 APB。但必须注意，这轨迹是由关于 AB 互相对称的两个弧所组成。

1704. 设 A 为定圆 O 上的定点，在弦 AB 的延长线上取一点 P，作圆 O 的切线 PT，使 PA 等于 PT 的 m 倍，求点 P 的轨迹。

解 设 $PA:PT=m:1$，$m>1$。

$\because\ PT$ 是切线，$\therefore\ PT^2=PA\cdot PB$。

于是，

$$PA^2:PT^2=PA^2:PA\cdot PB=m^2:1。$$

$$\therefore\ PA:PB=m^2:1。$$

设定圆的圆心为 O，在 AO 上取点 C，使

$CA:CO=m^2:1$，则 C 是定点。

又　$AO=BO$，

所以　$AC=CP$。

因此，点 P 的轨迹是以定点 C 为圆心、定长 CA 为半径的圆。

当 $m=1$ 时，轨迹变成在点 A 的切线；当 $m<1$ 时，轨迹是以上所求的轨迹，在切线相反一侧的圆。

1705. 在定三角形 ABC 中，与 $\angle A$ 相邻的外角的平分线 QAR 上，于点 A 的两旁取点 Q、R，使 $AQ\cdot AR=AB\cdot AC$，求 QB、BC 的交点 P 的轨迹。

解　因为 $AQ:AB=AC:AR$，而且

$$\angle QAB=\angle RAC,$$

所以，　$\triangle AQB\backsim\triangle ACR$。

$\therefore\ \angle Q=\angle ACR$。

由此可得，A、Q、P、C 共圆。

$\therefore\ \angle P=\angle RAC$

$=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A$。

又 B、C 是定点，

所以 P 在以 BC 为弦，所含圆周角等于 $(90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A)$ 的弓形弧 BPC 上。

反之，容易证明，这弧上的点适合条件。

又因为，关于点 A、Q 与 R 的取法可以交换次序，在这种情况下，适合条件的点的轨迹是弧 BPC 的共轭弧。因此，所求的轨迹是圆 BPC。

1706. 在定三角形 ABC 的 AB、AC 上，分别取点 P、Q，使 $BP\cdot BA+CQ\cdot CA=BC^2$，求 BQ、CP 的交点 X 的轨迹。

解　设圆 APC 与 BC 的交点为 D，则

$BP\cdot BA=BD\cdot BC$。

而

$BD\cdot BC+CD\cdot BC$

$=BC^2$。

又

$$BP\cdot BA+CQ\cdot CA=BC^2,$$

$$\therefore\ CQ\cdot CA=CD\cdot BC。$$

由此可知，A、Q、D、B 共圆。

$\therefore\ \angle QBC+\angle PCB=\angle QAD+\angle PAD$

$=\angle BAC$（定角）。

$\therefore\ \angle BXC=180^\circ-\angle BAC$。

因此，点 X 的轨迹是以 BC 为弦，所含圆周角等于$(180^\circ-\angle BAC)$的弓形弧。

1707. 在定圆 O 中，过定点 P 作任意弦 AB，在它的两端 A、B 作圆 O 的切线，求这两切线交点 X 的轨迹。

解　因为 AB 是点 X 的极值线，所以 AB 上的定点 P 的极值线过点 X（问题 **1497**）。由此可得，点 X 在点 P 的极值线 YZ 上。

反之，在 YZ 上取点 X，若作 X 的极值线，则它过定点 P（问题 **1497**）。

因此，所求的轨迹是关于圆 O 的定点 P 的极值线。

1708. AB 是定圆 O 的定弦，AB 二等分任意弦 XY，在弦 XY 的两端 X、Y 作圆 O 的切线 XP、YP，求这两切线交点 P 的轨迹。

解　设 E 为 XY 与 AB 的交点，则 E 是 XY 的中点。所以 PO 与 XY 交于点 E。

又

$\angle OXP=\angle OYP$

$=90^\circ$，

所以，$OXPY$ 是内接于圆的四边形。

$$\therefore\ OE\cdot EP=XE\cdot EY。$$

而 XY、AB 是同圆中的弦，所以

$$XE\cdot EY=AE\cdot EB。$$

$$\therefore\ OE\cdot EP=AE\cdot EB。$$

因此，四点 O、A、P、B 共圆。由此可得，点 P 在过三点 A、O、B 的圆上。

反之，可以证明，圆 AOB 在圆 O 外面的弧上的点都适合条件。

因此，圆 AOB 在圆 O 的外面的弧就是所求点 P 的轨迹。

1709. 两圆 O、O' 外切于点 A，由 A 作各圆的弦 AC、AC'，使 $AC:AC'$ 为定比，若从圆心 O 向 AC、从 O' 向 AC' 作垂线，求这两垂线交点的轨迹。

解　设 M 为 BC、AP 的延长线的交点。

$\because$ $BO=OA$, $BC\parallel OP$,

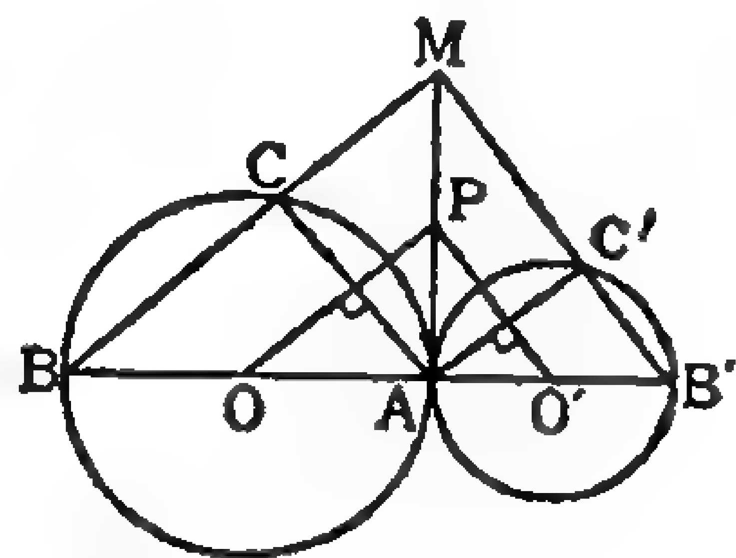
$\therefore$ $AP=PM$.

又

$AO'=O'B'$,

$PO'\parallel B'C'$,

所以 $B'C'$ 的延长线过点 M.



$$\therefore\quad \frac{OP}{O'P}=\frac{BM}{B'M}.$$

而
$$\frac{AC'}{AC}=k(\text{定比}).$$

又
$$\frac{BM}{AC'}=\frac{BB'}{AB'},\quad \frac{B'M}{AC}=\frac{BB'}{BA}.$$

$$\therefore\quad \frac{BM}{B'M}=\frac{BA}{AB'}\cdot\frac{AC'}{AC}=\frac{BA}{AB'}k.$$

$$\therefore\quad \frac{OP}{O'P}=\frac{BA}{AB'}k\ (\text{一定}).$$

由此可知，点 P 的轨迹，是与 O、O' 的距离的比为一定的"阿波罗尼斯"圆.

1710. 两定直线 x、y 垂直相交于 O，A、B 为在直线 y 上的两定点，P 为直线 x 上的动点，若在 A 作垂直于 PA 的直线，在 B 作垂直于 PB 的直线，求这两直线交点 Q 的轨迹.

解 因为 $\angle QAP$、$\angle QBP$ 都是直角，若 M 为 PQ 的中点，则

$$AM=BM=\frac{1}{2}PQ.$$

因此，点 M 在 AB 的中垂线 CX 上.

又 $CX\parallel OP$，若从 Q 向直线 y 作垂线 QD，则

$$QD\parallel CX\parallel OP.$$

又 $MQ=MP$，$\therefore OC=DC$. 所以，D 是定点.

由此可得，所求的轨迹是过定点 D 且垂直于直线 y 的直线.

1711. 在定三角形 ABC 的 $\angle A$ 的平分线上，取两点 E、F，使 $AE\cdot AF=AB\cdot AC$，求 BE、FC 的交点 P 的轨迹.

解 $\because$ $AB\cdot AC=AE\cdot AF$,

$\therefore$ $AB:AE=AF:AC$.

又 $\angle BAE=\angle FAC$,

$\therefore$ $\triangle BAE\backsim\triangle FAC$,

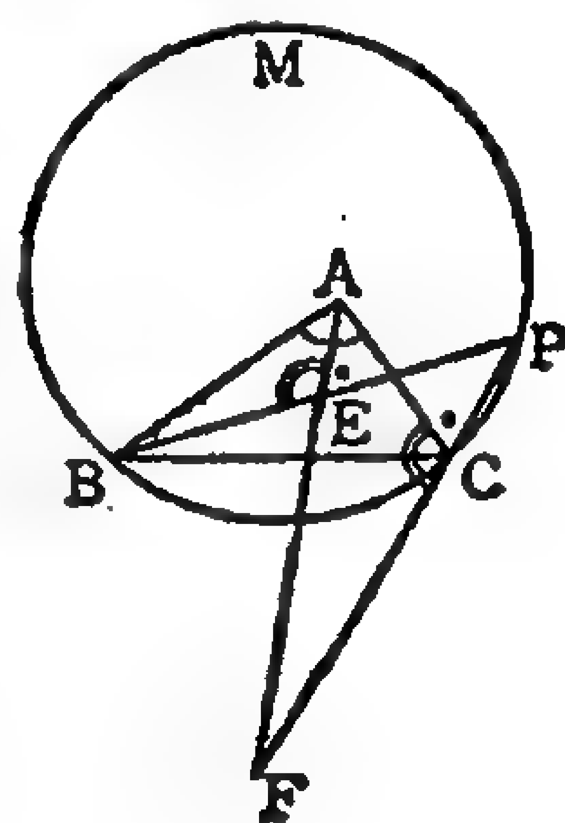
从而得出，

$$\angle AEP=\angle PCA,$$

由此可知，A、E、C、P 共圆.

$\therefore$ $\angle P=\angle CAE$

$$=\frac{1}{2}\angle A(\text{一定}).$$



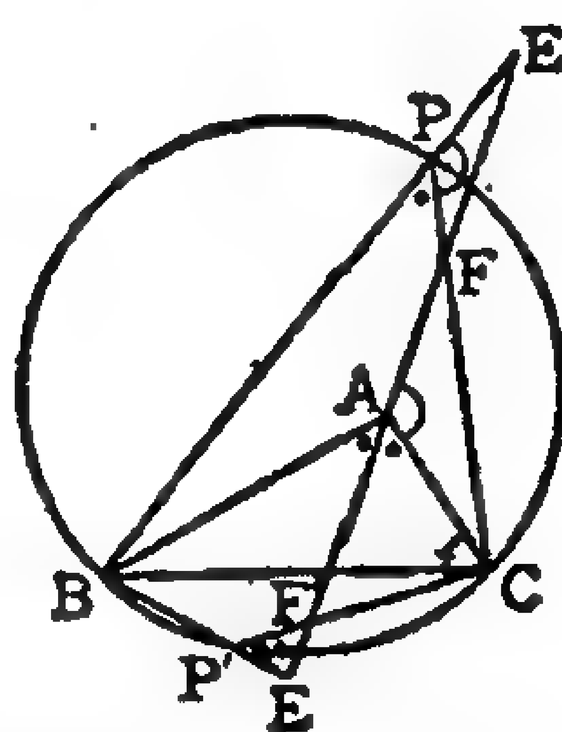
因此，点 P 在以 BC 为弦，所含圆周角等于 $\frac{1}{2}\angle A$ 的弓形弧上.

反之，在这弧上取一点 P，设 BP、CP 与 $\angle A$ 的平分线分别交于 E、F.

$\because$ $\angle BPC=\frac{1}{2}\angle A$,

所以

$$\angle EPF=\angle EAC.$$



由此可知，A、E、C、P 共圆，所以

$$\angle BEA=\angle FCA.$$

又 $\angle BAE=\angle FAC$,

所以 $\triangle BAE\backsim\triangle FAC$.

于是 $AB\cdot AC=AE\cdot AF$.

因此，点 P 适合条件.

又因为共轭弧上的点也适合条件，所以，所求的轨迹是圆 BMC.

1712. 设定菱形 $OACB$ 的对角线 AB，分菱形为两个正三角形，若过点 C 作直线 CDE 与 OB 交于 D，与 AO 交于 E，求 AD 与 BE 的交点 M 的轨迹.

解 在 $\triangle AEC$ 与 $\triangle BCD$ 中，

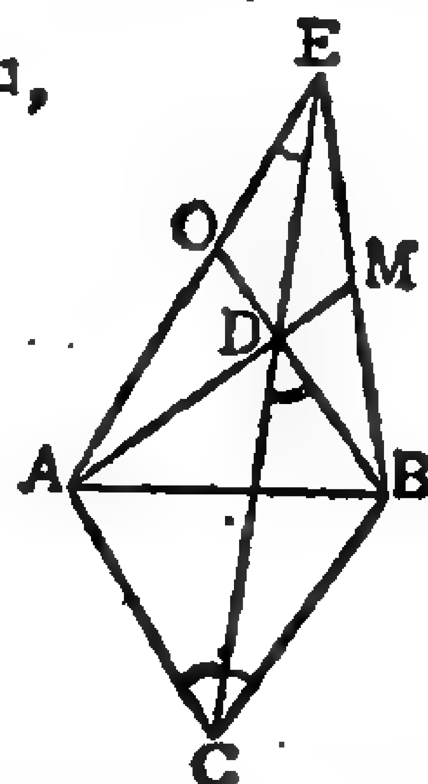
$\because$ $AC\parallel OB$,

$\therefore$ $\angle ACE=\angle BDC$.

又 $AO\parallel BC$,

$\therefore$ $\angle AEC=\angle BCD$.

$\therefore$ $\triangle AEC\backsim\triangle BCD$.



由此可得，

$$AE:AC=BC:BD.$$

$\therefore$ $AE:AB=AB:BD$.

又 $\because$ $\angle EAB=\angle DBA=60°$,

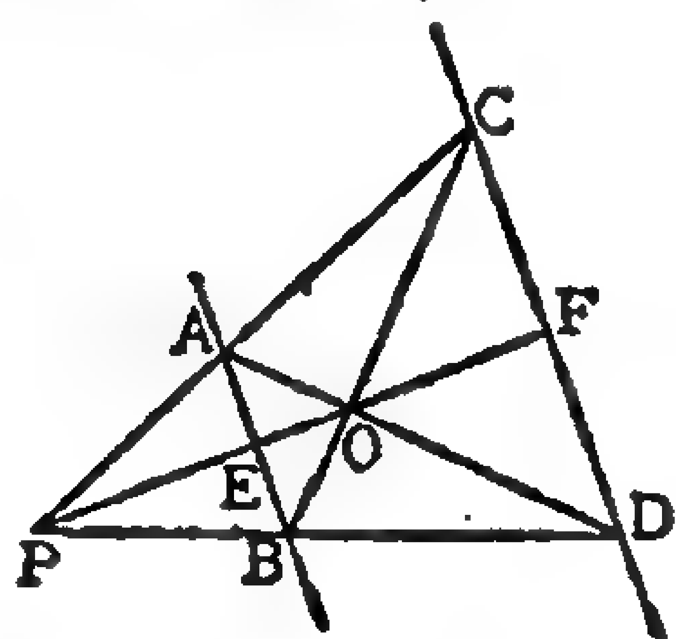
$\therefore$ $\triangle AEB\backsim\triangle BAD$.

而对应边 AE 与 BA 的交角为 $60°$，所以对应边 EB 与 AD 的交角也为 $60°$. 所以，点 M 在 $\triangle AOB$ 的外接圆上，由此可知，所求

的轨迹是$\triangle AOB$的外接圆。

1713. 过定点P的两直线PBD、PAC，和两定平行线AB、CD分别交于B、D与A、C，求BC与AD的交点O的轨迹。

解 设PO与AB、CD的交点分别为E、F。



$\because$ $AB \parallel CD$,

$\therefore$ $FO:OE=CD:AB$.

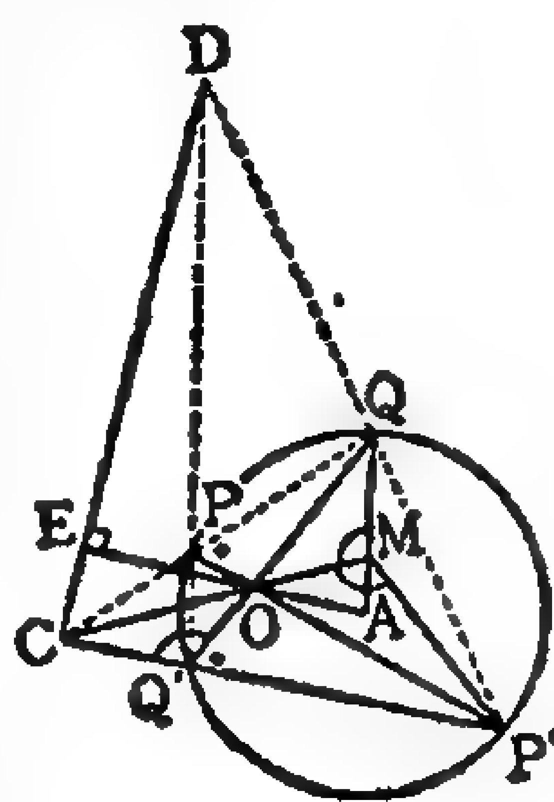
又 $CD:AB=DP:PB=FP:EP$,

$\therefore$ $FO:OE=FP:PE$.

从而得出，EF被P、O分为调和比。而P是定点，点E、F在平行线AB、CD上移动，所以点O在平行于AB的直线上。因此，所求的轨迹是过O且平行于AB的直线。

1714. O是半径为r的定圆A内的定点，过O作两弦POP'、QOQ'，求两圆POQ、$P'OQ'$的另一个交点的轨迹。

解 设M为圆POQ、$P'OQ'$的另一个交点，C为QP与$P'Q'$的延长线的交点，D为$Q'P$与$P'Q$的延长线的交点，则CD恰是点O的极值线。若延长AO与CD交于点E，则$AE\perp CD$，而且



$$AO\cdot AE=r^2. \quad ①$$

又因为圆A、圆POQ、圆$P'OQ'$的根轴交于一点，所以C在OM上。

其次，　$\angle QPO=\angle P'Q'O$,

$\therefore$ $\angle OMQ=\angle OQ'C$.

所以，四边形$CQ'MQ$内接于圆。

$\therefore$ $CO\cdot OM=Q'O\cdot OQ$

$=r^2-OA^2$（圆幂定理）

$=AO\cdot AE-OA^2$（由①）

$=AO\cdot EO$.

所以，四边形$CAME$内接于圆。

$\therefore$ $\angle CMA=\angle CEA=90°$.

由此可知，点M恒在以AO为直径的圆上。

因此，点M的轨迹是以AO为直径的圆。

1715. 若$\triangle ABC$是定三角形，过边BC的延长线上的定点D，作直线与边AC、AB分别交于点E、F，作两个三角形CDE、BDF的外接圆，求这两个圆的另一个交点M的轨迹。

解 因为四边形$FBDM$内接于圆，所以

$$\angle FBM=\angle MDE. \quad ①$$

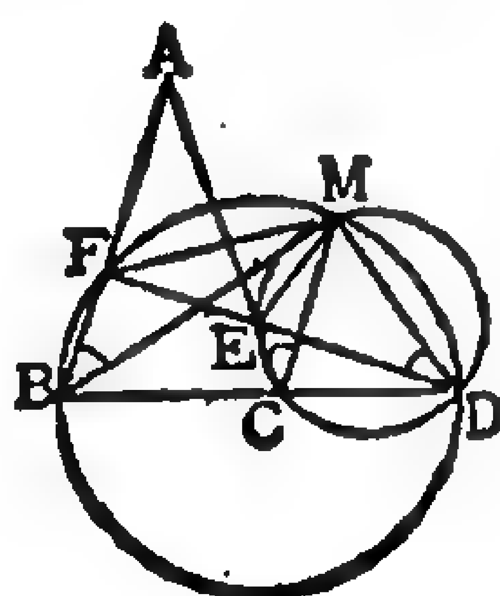
因为四边形$MECD$内接于圆，所以

$$\angle MDE=\angle MCE. \quad ②$$

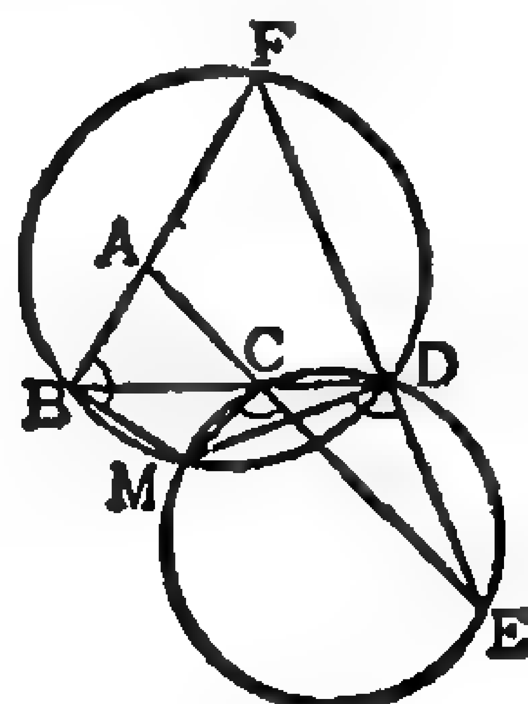
由①、②，得

$$\angle ABM=\angle ACM.$$

由此可知，点M在$\triangle ABC$的外接圆上。



(1)



(2)

反之，在$\triangle ABC$的外接圆上取一点M，设$\triangle MCD$的外接圆与AC的交点为E，ED与BA的交点为F，则

$$\angle ABM=\angle EDM=\angle ECM.$$

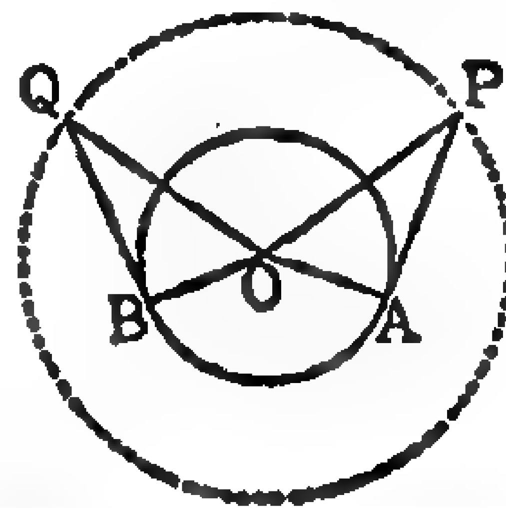
因为四边形$FBMD$内接于圆，所以M为$\triangle CED$、$\triangle BDF$的外接圆的交点。

因此，点M的轨迹是$\triangle ABC$的外接圆。

4. 定长线段一端的轨迹

1716. 若A为定圆上的任意点，在点A的切线上取$AP=l$（定长），求点P的轨迹。

解 设定圆O，连结OA、OP。因为OA是定圆的半径，所以它是定长的线段。又



$$\angle PAO=90°,$$

所以$\triangle POA$是直角三角形。因为两直角边OA、AP都是定长的线段，所以斜边也是定长线段。由此可得，点P在以O为圆心，以定长线段OP为半径的圆上。

反之，在这个圆上取任意点Q，从Q作定圆O的切线QB，连结QO、OB。在$\triangle QOB$

和 $\triangle POA$ 中，$QO=PO$，$OB=OA$，

$$\angle A=90^\circ=\angle B,$$

$$\therefore\quad \triangle QOB\cong\triangle POA,$$

从而得出，$\quad QB=PA=l$，

即QB 为定长 l 的线段。

因此，所求的轨迹是定圆 O 的同心圆，它的半径为 OP。

1717. 从定圆 O 外的点 P，向圆 O 作两条切线，若这两切线的夹角的大小一定，求点 P 的轨迹。

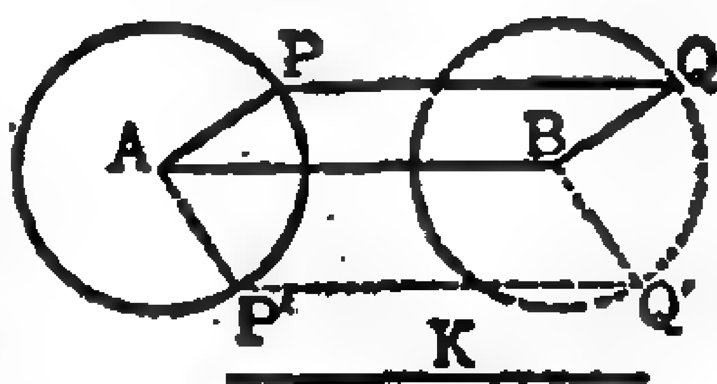
解 设 PA，PB 是从 P 向圆 O 所作的切线，因为 PA、PB 的夹角的大小一定，所以 $\angle APO$ 的大小也一定。又因为 AO 是定长线段，所以 $\triangle OAP$ 的大小一定。从而得出，OP 的长度一定。因此，点 P 在以O 为圆心，以定长线段 OP 为半径的圆上。

反之，容易证明，这圆上的任意点都适合条件。

因此，所求的轨迹，是与圆 O 同心的圆。

1718. 若线段 PQ 的长度等于定长 l，且它的方向是定方向，当一端 P 在定圆上移动时，则另一端 Q 的轨迹是与这个定圆相等的圆。

解 设定圆 A，K 为所给的方向，PQ 的长度等于定长 l，而且PQ平行于K。因为 PQ 的一端 P 在定圆 A 上移动，所以，过圆心 A 作



AB 平行于 K，使它的长度等于 l，则 B 是定点。连结 PA、QB，则 PQ、AB 都平行于 K 且它们的长度都等于 l。所以，$PABQ$ 是平行四边形。

$$\therefore\quad BQ=AP.$$

因此，BQ 等于定圆的半径，它为定长。从而得出，点 Q 在以定点 B 为圆心，以定长线段 BQ 为半径的圆上，即在与圆 A 相等的圆 B 上。

反之，在圆 B 上取任意点 Q'，作平行于 K 而且长度等于 l 线段的 $Q'P'$，连结 AP'，则

$$AB\parallel Q'P',\quad AB=P'Q'.$$

所以，$AP'Q'B$ 是平行四边形。

$$\therefore\quad AP'=BQ',$$

即 AP' 等于圆 A 的半径。所以，点 P' 在圆 A 上。

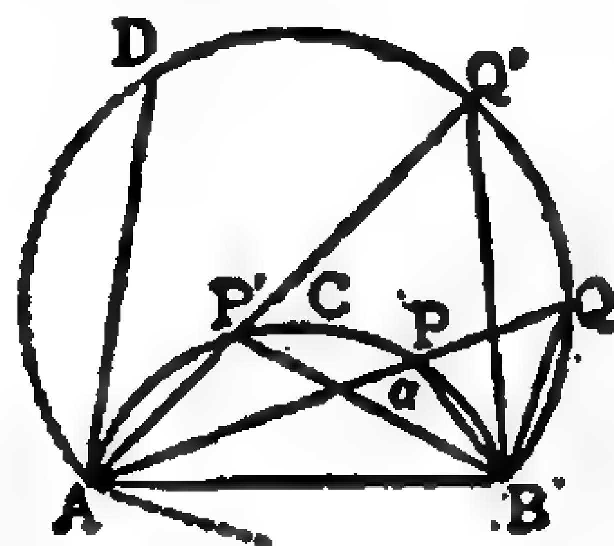
因此，点 Q 的轨迹，是与定圆 A 相等的圆 B。

1719. 若 AB 为定弓形 ACB 的弦，连结 A 与弧上任意一点 P，在 AP 的延长线上取 $PQ=PB$，求点 Q 的轨迹。

解 设 Q 为适合条件的点，因为

$$PB=PQ,$$

所以



$$\angle AQB=\frac{1}{2}\angle APB$$

$$=\frac{1}{2}\alpha$$

(α 为定弓形 ACB 的弓形角，是定角)。

因此，点 Q 在以 AB 为弦，所含圆周角等于$\frac{1}{2}\angle APB$ 的弓形弧上。又当 P 变动到 B 的位置时，点 Q 与点 B 重合；当 P 变动到 A 时，若过点 A 所作弧 ACB 的切线和弧 ADB 的交点为 D，则点 Q 与点 D 重合。所以，点 Q 在弧 DQB 上。

反之，设 Q' 为弧 DQB 上的任一点，AQ' 与弧 ACB 的交点为 P'，则

$$\angle AP'B=\alpha,\quad \angle AQ'B=\frac{1}{2}\alpha.$$

从而得出，

$$\angle P'Q'B=\frac{1}{2}\angle AP'B.$$

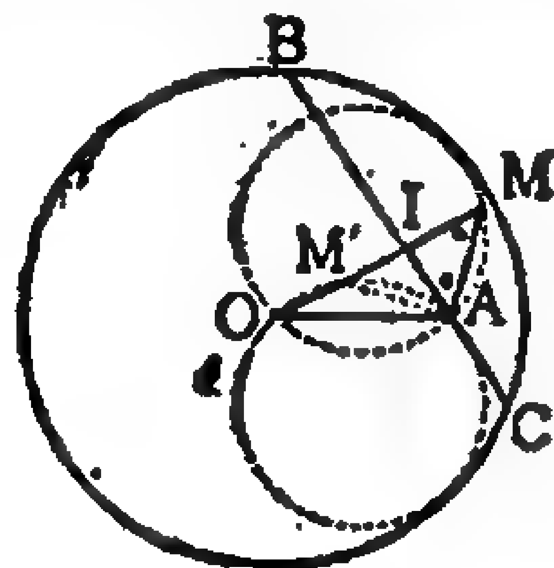
$$\therefore\quad \angle P'Q'B=\angle P'BQ'.$$

$$\therefore\quad P'Q'=P'B.$$

因此，所求的轨迹是弧 DQB。

1720. 从定点 A 向定圆 O 作任意割线。与这圆交于 B、C，过弦 BC 的中点 I 作 BC 的垂线 IM，并取 $IM=IA$，求点 M 的轨迹。

解 (1) 当 A 在圆内时：



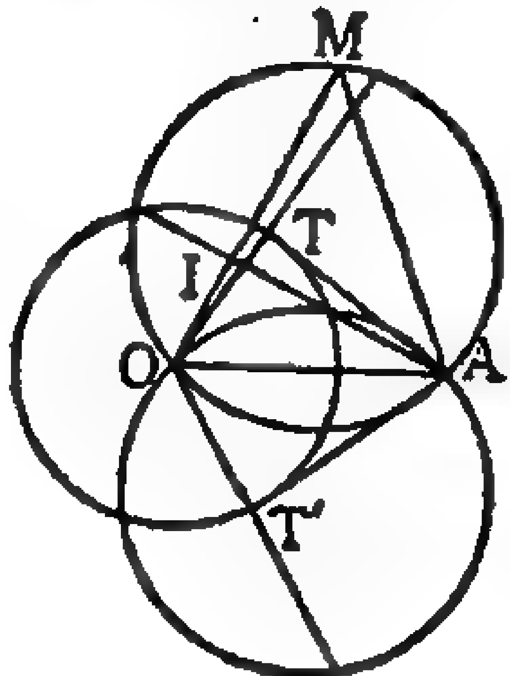
因为 IM 过 BC 的中点且垂直于 BC，所以过圆心 O。

而 $\qquad IA=IM$，

所以 $\quad \angle IMA=\angle IAM=45^\circ$。

又 M' 在线段 OI 上时，$\angle OM'A=135^\circ$，所

以，点 M 在以 OA 为弦，所含圆周角等于 45° 或 135° 的弓形弧上。但是，当 OI 关于 OA，处于和前者相反的一侧时，则对于 OA 而言，M 就在与上面弓形对称的弓形弧上。因此，点 M 在以 OA 为弦，由含圆周角等于 45° 的两个弓形组成的圆上。



反之，容易证明，这圆上的点适合条件。

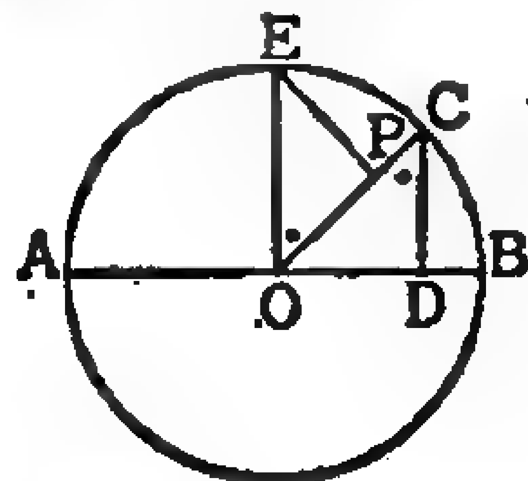
因此，所求的轨迹是以 OA 为弦，所含圆周角等于 45° 的弓形的两个整圆。

(2) 当 A 在圆外时：

与(1)同理，点 M 的轨迹是以 OA 为弦，所含圆周角等于 45° 的两个弓形的圆。但这两个圆中各有一部分不是轨迹，即从 A 作两切线 AT、AT'，则包含在 $\angle TOT'$ 内的部分不是轨迹。

1721. 从定圆上任意点 C，向这圆的定直径 AB 作垂线 CD，在 OC 上取 $OP=CD$，求点 P 的轨迹。

解 设定圆 O，先考察 C 取在 AB 的上面半个圆上的情况。



对于 AB，在点 C 同侧作半径 OE 垂直于 AB. 在 $\triangle OEP$ 和 $\triangle COD$ 中，$OE=OC$，$OP=CD$，$\angle EOP=\angle OCD$(因为都是 $\angle COD$ 的余角)，

$$\therefore\quad \triangle OEP\cong\triangle COD.$$

$$\therefore\quad \angle EPO=\angle ODC=90°.$$

因为 OE 是定线段，所以点 P 的轨迹，是以 OE 为直径的圆。

其次，若点 C 取在另半个圆上，则点 P 的轨迹是关于 AB 与圆 OE 对称的圆。

1722. 从定圆上的动点 P，向定直径 AOB 作垂线 PC，在半径 OP 上取 OQ 等于 OC，求点 Q 的轨迹。

解 设定圆 O，设点 P 在垂直于 AB 的直径 EF 的右边。在 $\triangle BOQ$ 和 $\triangle POC$ 中，

$$OQ=OC,\quad OB=OP,$$

$\angle POB$ 公共角.

$$\therefore\quad \triangle BOQ\cong\triangle POC.$$

从而得出，

$$\angle OQB=\angle OCP=90°.$$

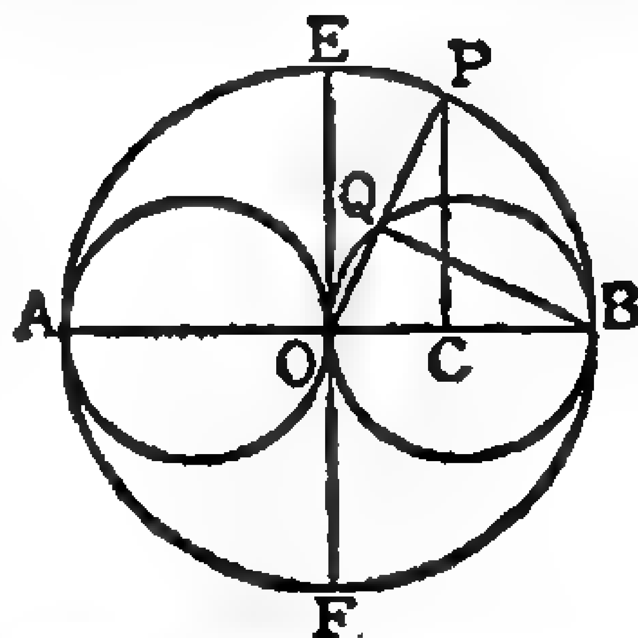
因此，点 Q 在以 OB 为直径的圆上。

反之，以 OB 为直径作圆，设 Q 为这圆上的任意点，过点 Q 作圆 O 的半径 OQP，从 P 向 OB 作垂线 PC，则容易证明

$$\triangle OQB\cong\triangle OCP.$$

从而得出， $OQ=OC$.

所以，点 Q 适合条件。因此点 Q 的轨迹是以 OB 为直径的圆。



同理可得，当 P 在直径 EF 的左侧时，点 Q 的轨迹是以 OA 为直径的圆。

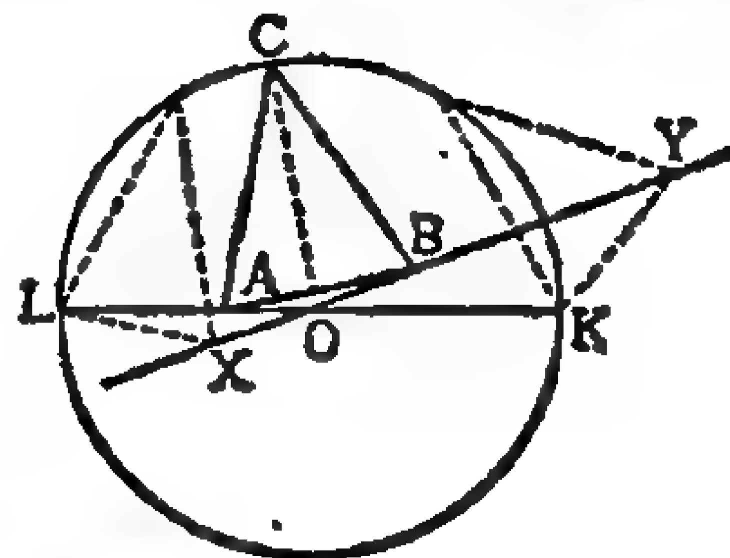
综上所述可知，所求的轨迹是以 OA、OB 分别为直径的两个相等的圆。

1723. 在半径为 r 的定圆 O 内，有 $AC=BC=r$，且 $\angle C=\alpha$ 的等腰三角形 ABC，当顶点 C 在圆上、顶点 A 在定直径 LK 上移动时，求顶点 B 的轨迹。

解 设 B 为适合条件的一个顶点，因为

$$AC=BC=CO=r,$$

所以 A、O、B 在以 C 为圆心，r 为半径的圆上。$\angle AOB$ 是这圆的圆周角，$\angle ACB$ 是它的圆心角。所以



$$\angle AOB+\frac{\alpha}{2}=180°.$$

$$\therefore\quad \angle BOK=\frac{\alpha}{2}$$

(一定)。

即 OB 和 LK 的交角是定角。

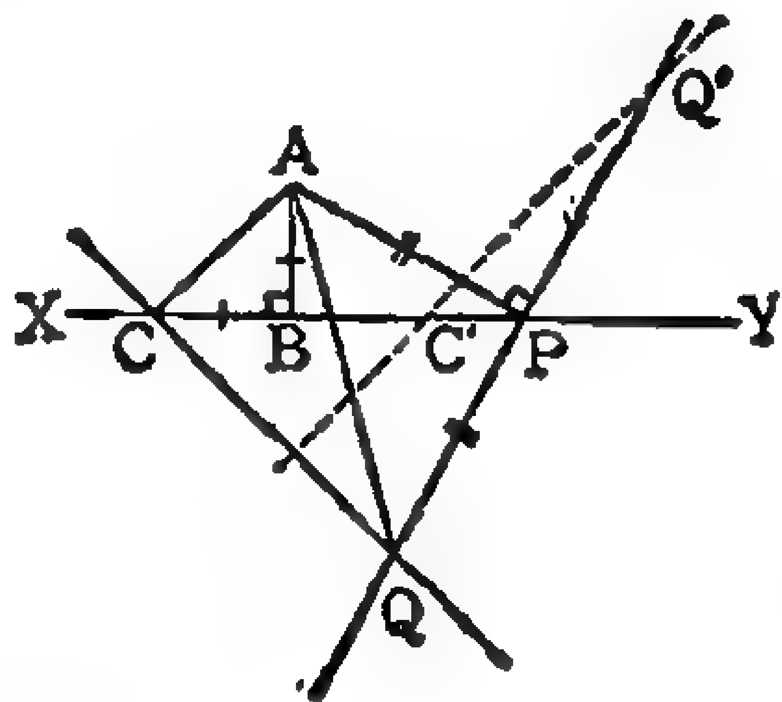
若 C 在 LK 的上方，则当点 A 移动到点 L 的位置上时，点 B 就随着移动到点 X 的位置上；当点 A 移动到 K 的位置上时，点 B 随着就移动到 Y 的位置上。所以，线段 XY 是点 B 的轨迹。

与上面相反，若 C 在 LK 的下方，则所求的轨迹，是关于 OK 与 XY 对称的线段 $X'Y'$. 但是，假定 ABC 的方向一定。

1724. A 是定点，P 是定直线 XY 上的任意一点，在点 P 作 PQ 垂直于 PA，使 $PQ=PA$，求点 Q 的轨迹。

解 设 Q 是适合条件的点，从点 A 向定直线 XY 作垂线 AB. 又在 XY 上，从点 B 向

两旁截取 $BC=AB$ 和 $BC'=AB$。连结 AC。



$\because\ AB=BC,$

$\therefore\ \angle ACB=45°.$

又 $AP=PQ,$

$\therefore\ \angle AQP=45°.$

由此可知，A、C、Q、P 在同一圆上。

而 $\angle APQ=90°.$

$\therefore\ \angle ACQ=90°.$

又 C 是定点，所以 CQ 是定直线。因此，适合条件的点 Q 在定直线 CQ 上。

反之，在直线 CQ 上任取一点 Q，作直线 QP，使 $\angle AQP=45°$，设直线 QP 与 XY 的交点为 P。因为 $\angle ACP=45°=\angle AQP$，所以四边形 $ACQP$ 内接于圆。

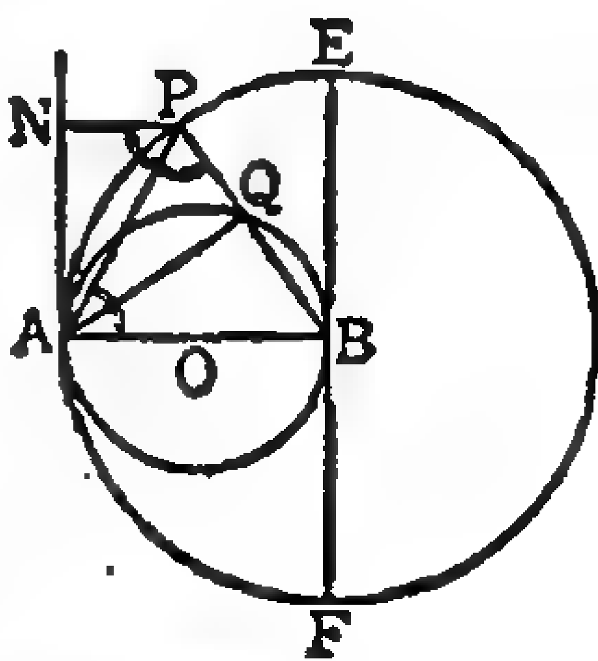
$\therefore\ \angle PAQ=\angle PCQ=45°.$

从而得出，$\triangle APQ$ 是满足条件的等腰直角三角形。因此，CQ 是所求的轨迹（参考问题 **1862**）。

又，就上面的 PQ，反向取 PQ'，则同理可得点 Q' 的轨迹是定直线 $C'Q'$。所以，所求的轨迹是两直线 CQ 和 $C'Q'$。

1725. 若 AB 是定圆 O 的定直径，在点 A 作切线 AN，过点 B 作任意弦 BQ，在 BQ 的延长线上取点 P，使过 P 向直线 AN 所作垂线 PN 等于 PQ，求点 P 的轨迹。

解 设 P 为适合条件的点，则



$\triangle PAN\cong\triangle PAQ,$

$\therefore\ \angle APN=\angle APB.$

又 $PN\parallel AB,$

$\therefore\ \angle APN=\angle PAB.$

$\therefore\ \angle APB=\angle PAB.$

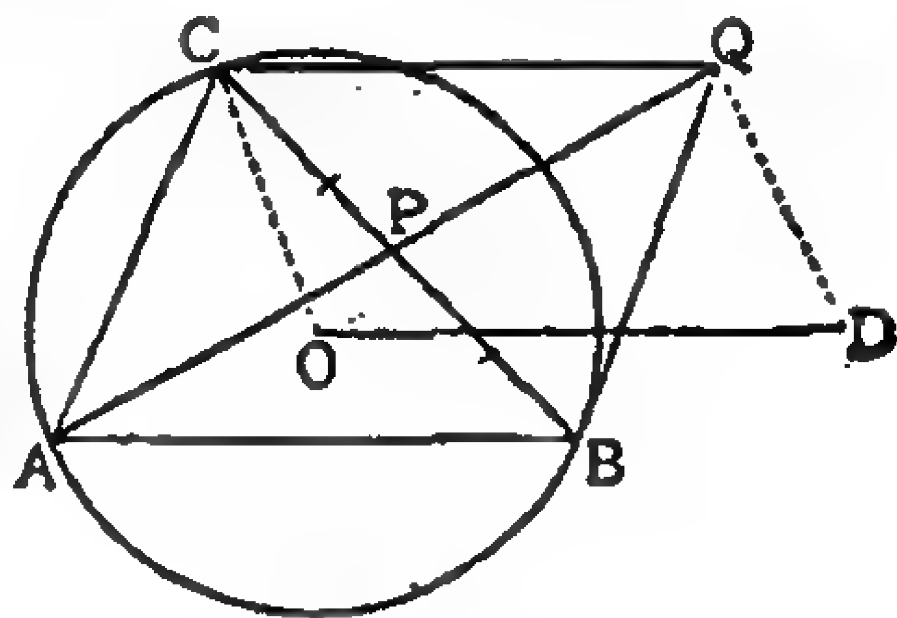
$\therefore\ PB=AB.$

所以点 P 的轨迹是以 B 为圆心，以 BA 为半径的圆。

但是，在这圆上，若作垂直于 AB 的直径 EF，则点 P 所属的范围是半圆 EAF；如果点 P 取在 QB 的延长线上，则所求的轨迹是整个圆。

1726. 设 AB 是定圆 O 的定弦，在圆上取点 C，延长 $\triangle ABC$ 的中线 AP，使 $PQ=AP$，求点 Q 的轨迹。

解 $\because\ CP=PB,\ AP=PQ.\ \therefore\ ABQC$ 是平行四边形。



$\therefore\ CQ\perp\!\!\!\!=AB$

（一定）。

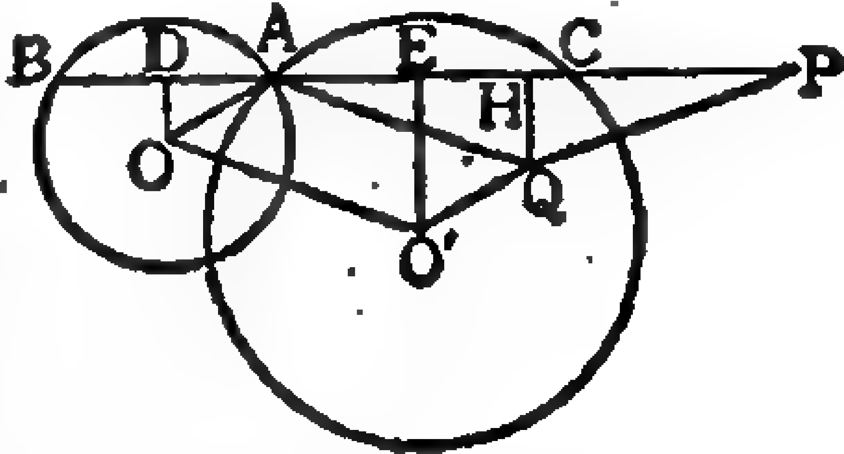
因此，本问题可以归结为问题 **1718**，即

$AB\perp\!\!\!\!=OD.$

所以，所求的轨迹是以 D 为圆心，以圆 O 的半径为半径的圆。

1727. 两个定圆相交，过一个交点 A，作直线 BAC 与两圆分别交于 B 和 C，在这直线上取点 P，使 $AP=AB+AC$，求点 P 的轨迹。

解 设两个给定圆的圆心分别为 O、O'，以 AO、OO' 为两邻边作平行四边形 $AOO'Q$，连结 QP，且从 O、O'、Q 向直线 BAC 作垂线 OD、$O'E$、QH，则 $OO'\perp\!\!\!\!=AQ$。



$\therefore\ DE=AH.$

而 $DE=\dfrac{1}{2}BC.$

$\therefore\ AH=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}AP.$

从而得出，$AH=HP.$

$\therefore\ \triangle AHQ\cong\triangle PHQ.$

$\therefore\ QP=QA=OO'.$

可是，因为 $\square AOO'Q$ 一定，所以点 Q 是定点。因此，点 P 在以 Q 为圆心，以 OO' 为半径的圆上。由此可知，所求的轨迹是圆。

5. 两线段的和与差为一定的点的轨迹

1728. 若点 P 到两条定平行直线 AB、CD 的距离的和或差为定长 l，求点 P 的轨迹。

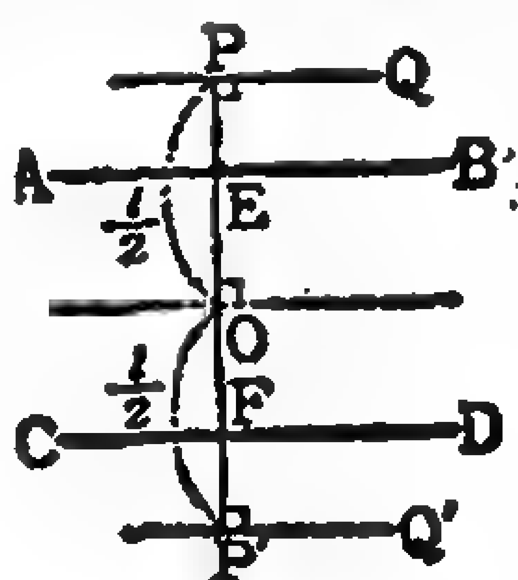
解 (1) 当和为 l 时：

设 O 为 EF 的中点，则

$$2PO=PE+PF=l.$$

$$\therefore\ PO=\frac{l}{2}.$$

因此，若 PQ、$P'Q'$ 分别为与 AB、CD 距离都等于 $\frac{l}{2}$ 的平行线，则点 P 在直线 PQ、$P'Q'$ 上。(反过来也成立，证明从略)。

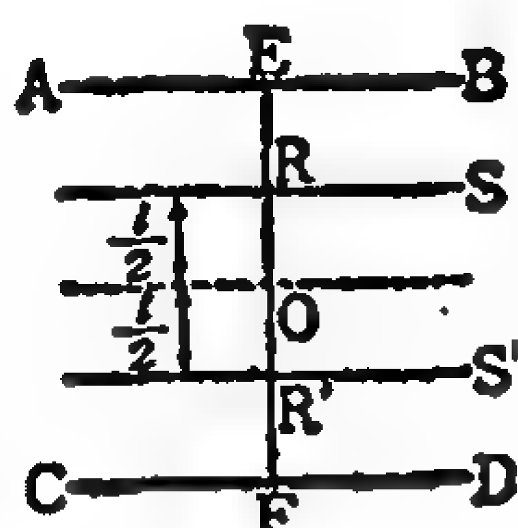


(2) 当差为 l 时：

从 R 作 AB、CD 的公垂线 RE、RF，设 O 为 EF 的中点，则

$2RO=RF\sim RE=l$。

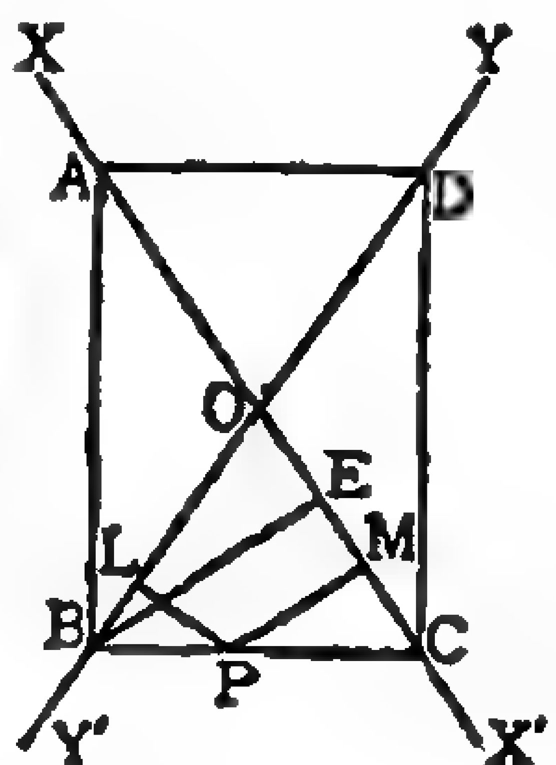
$\therefore\quad RO=\frac{l}{2}$。



因此，若 RS、$R'S'$ 分别为与 AB、CD 的距离都等于 $\frac{l}{2}$ 的平行线，则点 R 在直线 RS、$R'S'$ 上。(反过来也成立，证明从略)。

1729. 两直线 XX'、YY' 相交于点 O，从动点 P 向这两直线作垂线，设两垂线分别为 PL、PM，若 $PL+PM=m$(定长)，求点 P 的轨迹。

解 设 P 为 $\angle Y'OX'$ 内适合条件的一点，过 P 作直线 BC，使 BC 与 XX'、YY' 相交成等角，设和 OX'、OY' 的交点分别为 C、B。从 B 作 BE 垂直于 OX'，从 P 作 PL、PM 分别垂直于 OY'、OX'。因为 $\triangle OBC$ 是等腰三角形，所以



$PL+PM=BE$。

又　　$PL+PM=m$(定长)，

$\therefore\quad BE=m$。

而 $\angle BOC$ 是定角，所以 B、C 是定点。因此，适合条件的点在定线段 BC 上。

同理可得，若在 OX、OY 上分别取

$OA=OD=OB$，

则当点 P 在 $\angle X'OY$、$\angle XOY$、$\angle XOY'$ 内时，适合条件的点分别在 CD、DA、AB 上。从而得出，所求的轨迹是组成矩形的四条线段 AB、BC、CD、DA。

1730. 在上题中，若 PL、PM 的差为定长 a，求点 P 的轨迹。

解 向 XOX'、YOY' 作垂线，它们的和为 a 的点的轨迹，如上题是四条线段 AB、BC、CD、DA，则由这四条线段延长形成的八条半直线就是所求的轨迹。

设 P 为 AB 的延长线 BE 上的任一点，从 P 向 XX'、YY' 作垂线 PQ、PR，从 B 向 XX' 作垂线 BB'，从 B 作 XX' 的平行线与 PQ 的交点为 S，则 BP 是 $\angle RBS$ 的平分线，且 $PR=PS$。因为 $BSQB'$ 是矩形，$SQ=BB'=a$，所以

$PQ-PR=PQ-PS=SQ=a$。

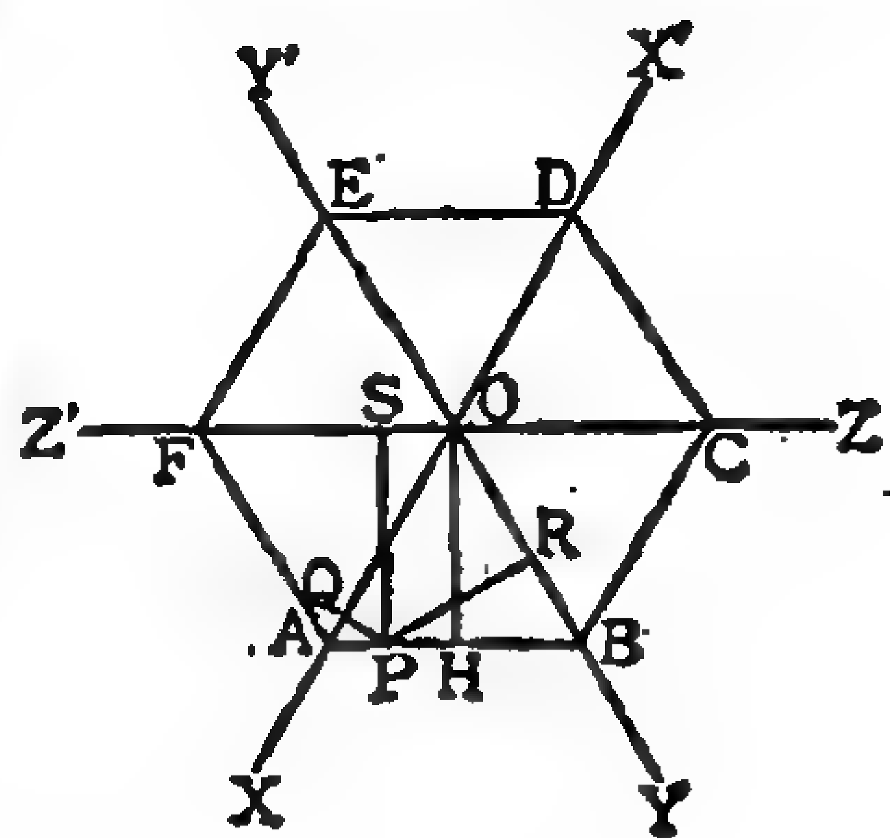
同理可得，其余七条半直线上的点都适合条件。

其次，可以证明，不在这八条半直线上的点，向 XX'、YY' 作垂线，它们的差就不为 a。因此，所求的轨迹，是延长 AB、BC、CD、DA 所形成的八条半直线。

1731. 三直线相交于一点，两两之间的夹角为 60°，从点 P 到三条直线的距离的和为定值，求点 P 的轨迹。

解 设三直线相交于点 O，两两之间的夹角为 60°，从点 P 向这三直线所作的垂线分别为 PQ、PR、PS，且

$PQ+PR+PS=m$(定值)。



如图，作正三角形 OAB，从 O 作 OH 垂直于 AB，则

$PQ+PR=OH$。

$\therefore\quad PQ+PR+PS=2\cdot OH$。

因为　　$OH=\frac{1}{2}m$(定长)，

所以，H 是定点。因此，AB 是定线段。

同理，在 OZ、OX'、OY'、OZ' 上，分别取 OC、OD、OE、OF 使它们等于 OA，则不论点 P 在 BC、CD、DE、EF 或 FA 上，都可以得到相同的结论。

反之，在这些线段(例如 AB)上，取任意点 P'，从 P' 向 OX、OY 分别作垂线 $P'Q'$、

$P'R'$，因为$\triangle OAB$是正三角形，所以

$$P'Q'+P'R'=OH=\frac{1}{2}m.$$

从P'向ZZ'作垂线$P'S'$，则

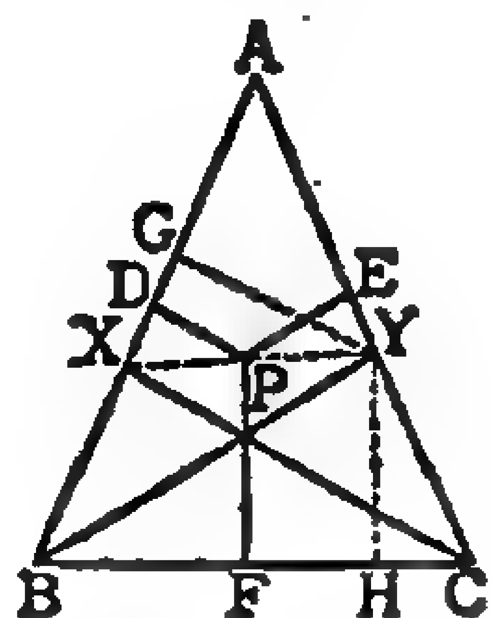
$$P'Q'+P'R'+P'S'=2\cdot OH=m,$$

所以，点P'适合条件。

因此，所求的轨迹，是构成正六边形$ABCDEF$的六条线段。

1732. 从等腰三角形ABC内一点P，向两腰AB、AC作垂线PD、PE，若$PD+PE$等于从P向底边BC所作的垂线PF，求点P的轨迹。

解　设P为适合条件的点，过P作BC的平行线与AB、AC的交点分别为X、Y。又从Y向AB、BC分别作垂线YG、YH，则



$$YH=PF=PD+PE.$$

因为$\triangle AXY$是等腰三角形，所以

$$PD+PE=YG.$$

从而得出，$YH=YG$。

由此可知，点Y是$\angle B$的平分线与AC的交点。所以，Y是定点。同样，X也是定点。因此，点P在定线段XY上。

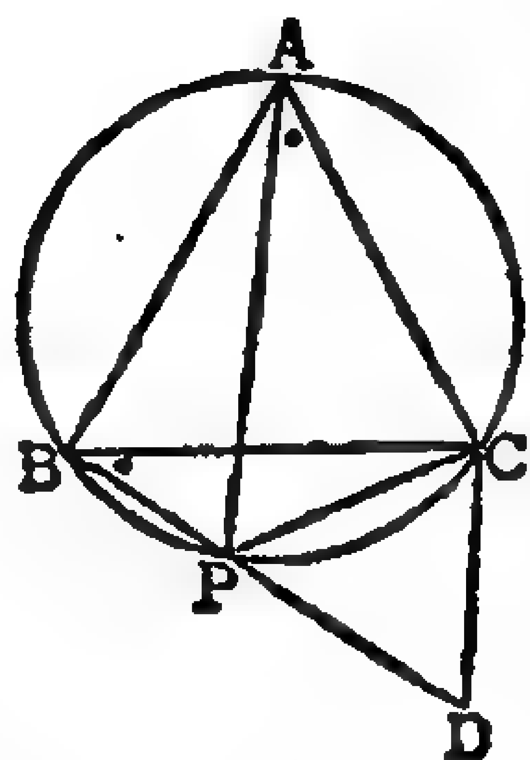
反之，容易证明，XY上的点都适合条件。

因此，所求的轨迹是线段XY。

1733. 设$\triangle ABC$为定正三角形，P为动点，连结PA、PB、PC，若$PA=PB+PC$，求点P的轨迹。

解　在BP的延长线上取$PD=PC$，则

$$BD=PA.$$



因为 $BC=AC$，

$$\angle CBD=\angle CAP,$$

所以

$$\triangle CBD\cong\triangle CAP.$$

$$\therefore\ CD=CP.$$

由此可得，$\triangle PCD$是正三角形。

$$\therefore\ \angle BPC=120^\circ.$$

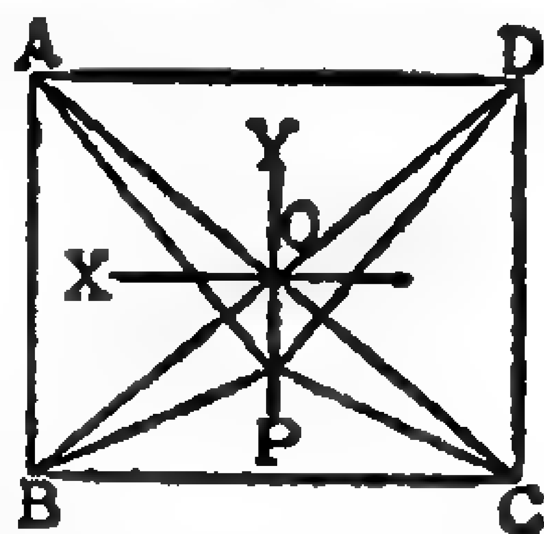
所以，点P在$\triangle ABC$的外接圆的$\overset{\frown}{BC}$上。

反之，易知$\overset{\frown}{BC}$上的点都适合条件。

因此，所求的轨迹是$\triangle ABC$的外接圆上的弧BC。

1734. $ABCD$是定矩形，求使$PA+PC=PB+PD$的点P的轨迹。

解　设O为矩形的对角线的交点，则对角线BD、AC在点O互相平分。由假设知



$$PA+PC=PB+PD.$$

所以

$$PA^2+PC^2+2PA\cdot PC=PB^2+PD^2+2PB\cdot PD.$$

而　$PA^2+PC^2=2(PO^2+AO^2)$，

$$PB^2+PD^2=2(PO^2+BO^2)=2(PO^2+AO^2).$$

$$\therefore\ PA\cdot PC=PB\cdot PD.$$

又　$PA+PC=PB+PD$，

所以，$PA=PB$或$PA=PD$。

如果$PA=PB$，则点P在过O的$\angle AOB$的平分线上，即在过O且平行于AD的直线X上。

如果$PA=PD$，则点P在$\angle AOD$的平分线上，即在过O且平行于AB的直线Y上。

反之，设P为X(或Y)上的任意点，则X(或Y)上的点与A、B(或A、D)的距离相等，从而得出与C、D(或B、C)的距离也相等。

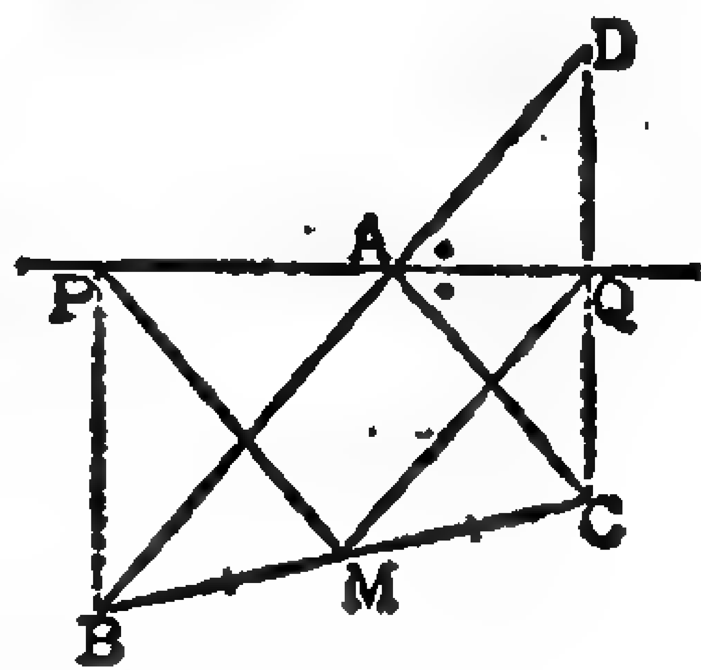
$$\therefore\ PA+PC=PB+PD.$$

因此，点P的轨迹是两直线X、Y。

6. 垂足的轨迹

1735. 已知$\triangle ABC$底边BC的大小和位置一定，AB与AC的和是定值，若从B、C向与$\angle A$相邻的外角的平分线作垂线，求垂足的轨迹。

解　设$AB+AC=m$(定值)，在BA的延长线上取$AD=AC$。若CD与$\angle A$相邻的外角平分线的交点为Q，则$CQ\perp AQ$，而且Q是CD的中点。因此，若M为BC的中点，则



$$MQ=\frac{1}{2}(AB+AD)=\frac{1}{2}m.$$

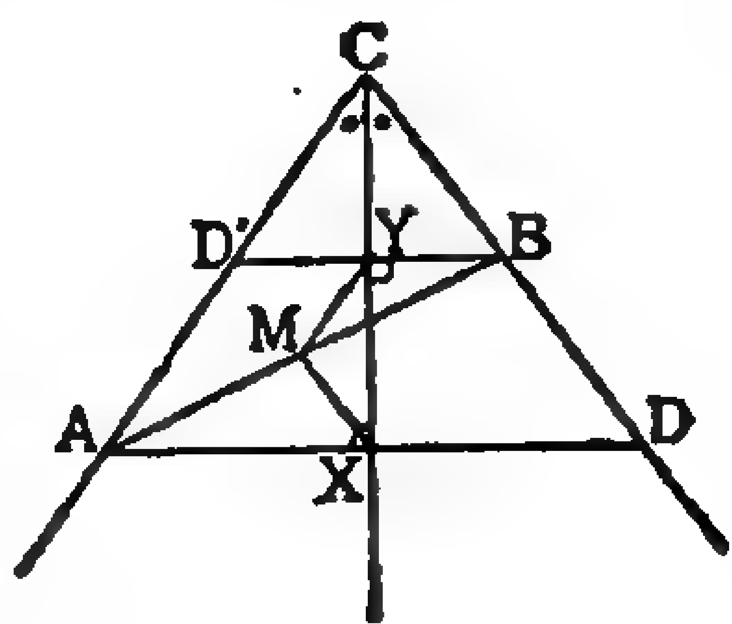
同理可得，从点B向与$\angle A$相邻的外角平分线作垂线，若垂足为P，则

$$MP=\frac{1}{2}m.$$

由此可知，垂足 P、Q 的轨迹，是以 M 为圆心，半径的长 $\frac{1}{2}m$ 的圆。

1736. 已知三角形的底边的位置和大小一定，其他两边的差也一定，若从底边两端向顶角的平分线作垂线，求垂足的轨迹。

解 设 M 为 $\triangle ABC$ 底边 AB 的中点，从底边两端 A、B 分别向顶角 C 的平分线作垂线 AX、BY，AX、BY 与对边(或延长线)的交点分别为 D、D'，则



$$AX=XD,$$
$$BY=YD'.$$

$$\therefore\quad MX=MY=\frac{1}{2}(AC\sim BC)\quad(一定).$$

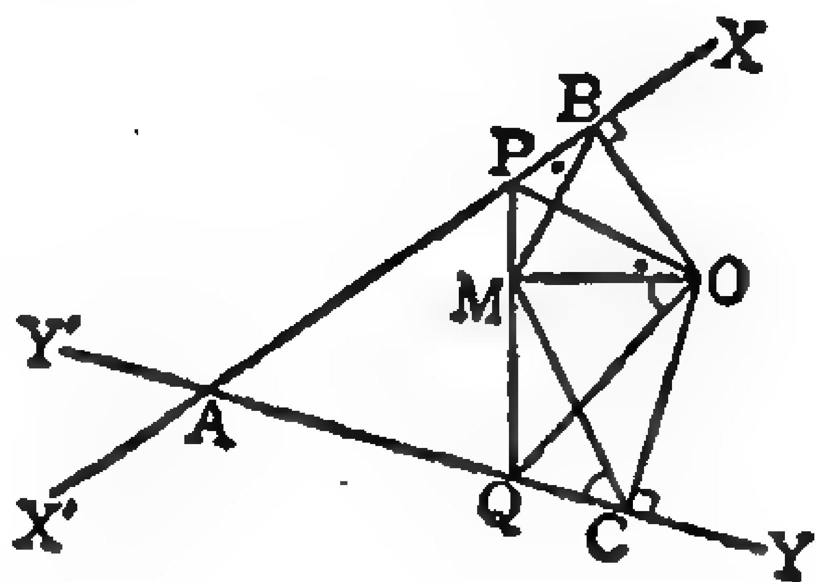
因此，点 X、点 Y 的轨迹，是与定点 M 的距离为定长(两边的差的一半)的点的轨迹，即以 M 为圆心，半径的长等于两边的差的一半的圆。

1737. 以定点 O 为顶点、大小为一定的 $\angle POQ$，它的两边 OP、OQ 分别与两定直线 XX'、YY' 交于点 P、Q，从 O 向 PQ 作垂线，求垂足 M 的轨迹。

解 设 A 为 XX'、YY' 的交点，

$$\angle POQ=\alpha.$$

从 O 向 AX、AY 分别作垂线 OB、OC，则 O、B、P、M 共圆。O、M、Q、C 也共圆。



$$\therefore\quad \angle MBA=\angle POM,$$
$$\angle MCA=\angle MOQ.$$
$$\therefore\quad \angle MBA+\angle MCA=\alpha.$$

在四边形 $BACM$ 中，

$$\angle A+\angle MBA+\angle MCA=\angle BMC,$$
$$\therefore\quad \angle A+\alpha=\angle BMC.$$

又，当 P、Q 都在 AB、AC 的延长线上时，同理可知

$$\angle BMC=\alpha-\angle A.$$

因此，以 BC 为弦，在 BC 两侧，分别作所含圆周角等于 $\alpha+\angle A$ 和 $\alpha-\angle A$ 两个弓形弧，则点 M 在这两个弓形弧上。而且可以知道，在这两个弧上的点都满足条件。

其次，若定角 XAY 与定角 POQ 互为补角，则

$$\angle BMC=180°.$$

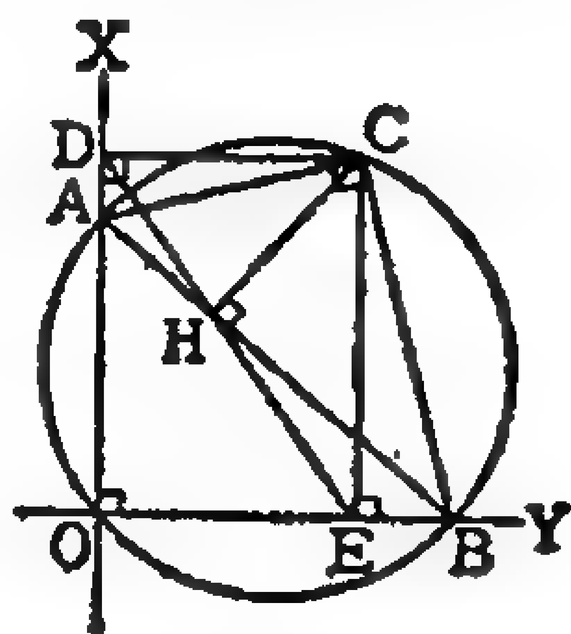
所以，B、M、C 成为直线。

因此，点 M 的轨迹是直线 BC。

1738. 若三角形的底边和顶角一定，从底边的一端向与顶角 A 相邻的外角的平分线作垂线，求垂足的轨迹。

解 在 $\triangle ABC$ 中，底边 BC 一定，顶角 A 的大小一定，则顶点 A 的轨迹是以 BC 为弦的圆弧。又与 $\angle A$ 相邻的外角的平分线过弧 BAC 的中点 M (根据问题 **534**)，所以，M 是定点。

从点 B 向与 $\angle A$ 相邻的外角的平分线作垂线，设垂足为 P。因为



$$\angle BPM=90°,$$

所以，点 P 在以 BM 为直径的圆上。

反之，设 P 是这圆上的任意点，PM 与圆弧 BAC 的交点为 A。因为 M 是弧 BMC 的中点，所以，容易证明 AM 是 $\triangle ABC$ 的与顶角 A 相邻的外角的平分线。又 $BP\perp AP$，所以点 P 适合条件。

因此，所求的轨迹是圆 BPM。

1739. 两直线 X、Y 在 O 相交成直角，以定点 C 为顶点的直角两边 CA、CB 作旋转，它与边 OX、OY 的交点分别为 A、B，从点 C 向 AB 作垂线，求垂足 H 的轨迹。

解 因为 $\angle XOY=90°=\angle ACB$，所以 A、O、B、C 共圆。

从 C 向 OX、OY、AB 作垂线，垂足分别为 D、E、H。因为 C 是 $\triangle AOB$ 的外接圆上的点，所以根据西摩松定理可知，D、H、E 在一直线上。又因为 D、E 是定点，所以点 H 的轨迹是直线 DE。

注 参考问题 **1737**。

1740. 一直线与正方形 $ABCD$ 的两边 AB、AD 分别交于 P、Q，并使 $AP+AQ=2AB$，从 C 向这直线作垂线，求垂足 M 的

轨迹.

解 $\because\ AP+AQ=2AB=AB+AD$,

$\therefore\ BP=DQ$.

又 $CB=CD$,

$\angle ABC=\angle CDQ$,

$\therefore \triangle CBP\cong\triangle CDQ$.

$\therefore\ \angle BCP=\angle DCQ$.

$\therefore\ \angle PCQ=\angle BCD=90°$.

所以，点C在$\triangle APQ$的外接圆上．因此，从C向PQ作垂线，它的垂足M在“西摩松线”BD上．

反之，设M为线段BD上的点，过M向CM作垂线，设这垂线与AB、AD的交点分别为P、Q．可以证明

$$AP+AQ=2AB,$$

因此，所求的轨迹是线段BD．

1741. 在半圆中，从圆心O向等于半径的弦作垂线，求垂足M的轨迹．

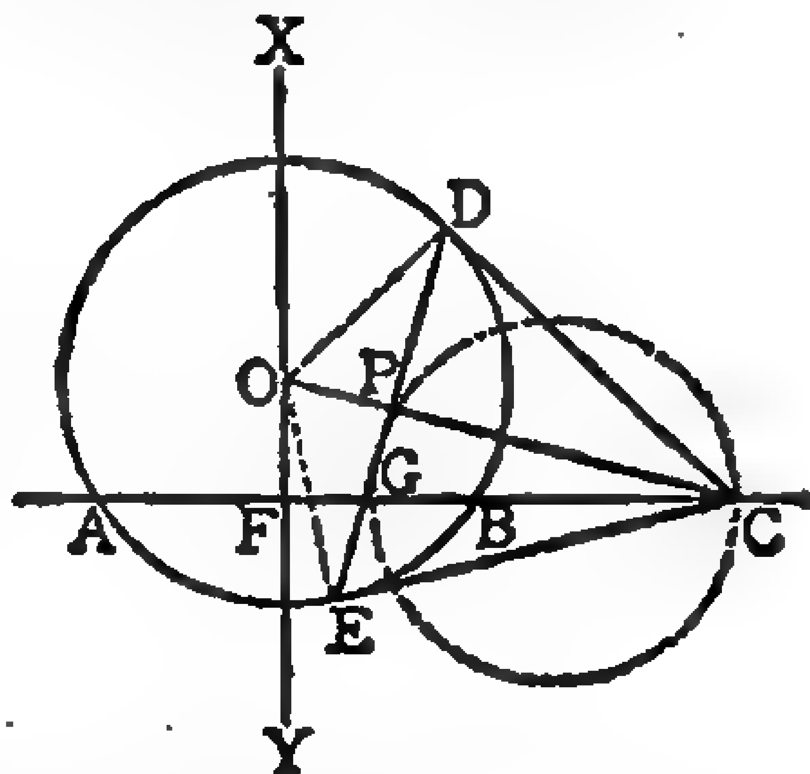
解 设弦CD等于半圆$ACDB$的半径，从O向CD作垂线OM，则OM是正三角形OCD的高．所以

$$OM=\frac{\sqrt{3}}{2}OA$$

（一定）．

由此可得，点M在以O为圆心，以$OM=\frac{\sqrt{3}}{2}OA$为半径的圆上．但必须注意，在这圆上，所求的轨迹只限于使$\angle AOP=\angle BOQ=30°$的$\angle POQ$内部的扇形弧．

1742. 直线上有三点A、B、C，过A、B作任意圆O，从点C向圆O作两切线CD、CE，求弦DE与OC的交点P的轨迹．



解 因为

$\angle ODC=90°$,

$\angle DPO=90°$,

所以

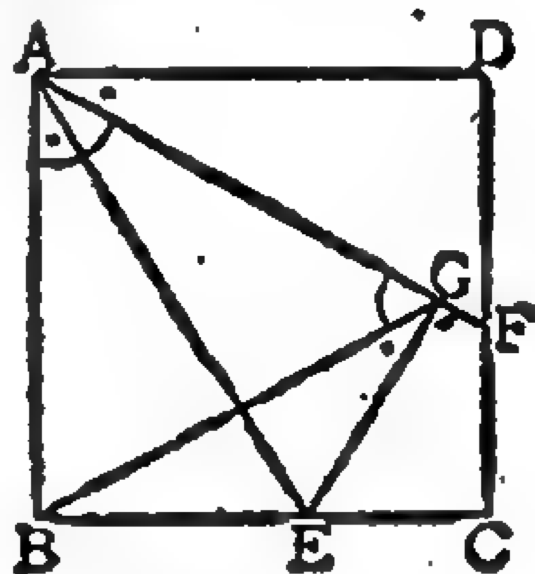
$CP\cdot CO=CD^2=CB\cdot CA$

（一定）．

设DE与直线ABC的交点为G，则$CP\cdot CO=CG\cdot CF$．但因为F是AB的中点，所以CF是确定的．因此，CG也是确定的．从而得出，点G是定点．因此，点P在以定线段GC为直径的圆上．

反过来也成立，证明从略．

1743. 在正方形$ABCD$的边CB、CD上，分别取点E、F，使$CE=CF$，从E向AF作垂线，设垂足为G．当E在边BC上移动时，则点G在什么路线上移动?



解 因为$BE=DF$，所以

$\angle DAF=\angle BAE$.

因为$ABEG$是内接于圆的四边形，所以

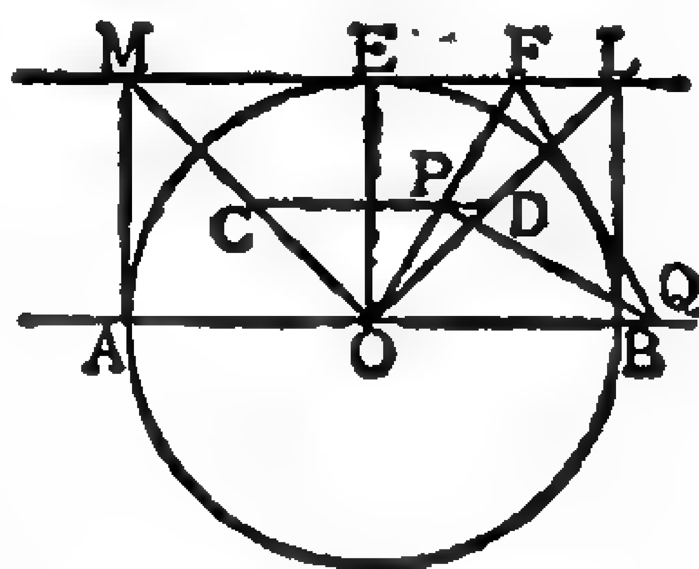
$\angle BAE=\angle BGE$.

$\therefore\ \angle DAF=\angle BGE$.

从而得出，$\angle GAB=\angle AGB$．$\therefore\ BG=BA$．

因此，以B为圆心，以BA为半径作圆，这圆在正方形内的弧，就是点G移动的路线．

1744. 设AB是定圆O的定直径，从AB的延长线上的动点Q，向这圆作切线QF，若从O向$\angle OQF$的平分线作垂线，求垂足P的轨迹．



解 延长OP与QF的交点为F，则$OP=PF$．

从F作切线FE，则

$\angle EFO=\angle OFQ=\angle FOQ$.

$\therefore\ FE\parallel AB$.

由此可知，E为弧AB的中点，是定点．从而得出，P在EO的中垂线上．

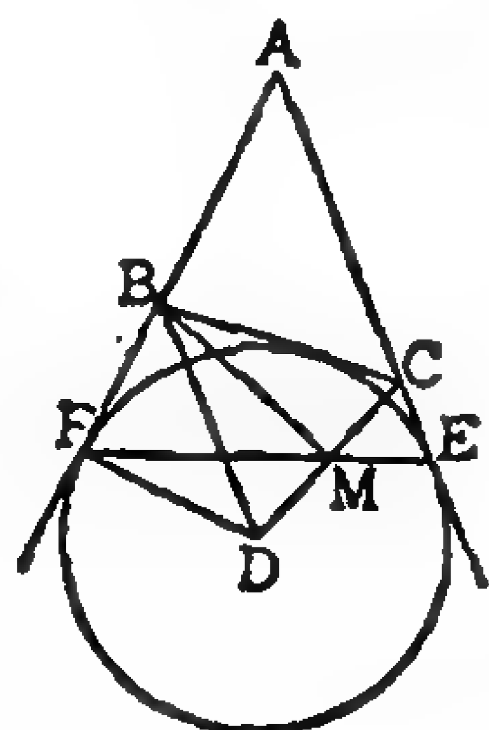
再看P的界限．当Q在A或B的位置上时，由Q点向定圆所作切线就在A、B处的切线，即AM、BL的位置上．这时，若OM、OL与OE的垂直平分线的交点分别为C、D，则P在CD上．而且因为CD上的点都适合条件，所以所求的轨迹是线段CD．但必须注意，从点Q向定圆所作切线，在AB的两侧各有一条．

因此，所求的轨迹是在AB两侧互为对称的两条线段．

1745. 在$\triangle ABC$中，顶角A的大小和位置一定，它的周长也一定，若从顶点B向

外角 BCE 的平分线作垂线 BM，求点 M 的轨迹。

解　设 D 为切于 BC 和 AB、AC 的延长线的旁切圆的圆心，又 $\angle BAC$ 是定角。因为从点 A 到切点 E 的距离等于 $\triangle ABC$ 的周长的一半，是一定的，所以 D 是定点。



又 $\angle BDC=90°-\frac{1}{2}\angle A$

（一定）。

因为 $\angle BMD=90°=\angle AFD$，所以四边形 $BFDM$ 内接于圆。

$\therefore\ \angle AFM=\angle BDM=90°-\frac{1}{2}\angle A.$

而 $\triangle AFE$ 是等腰三角形。所以

$$\angle AFE=90°-\frac{1}{2}\angle A.$$

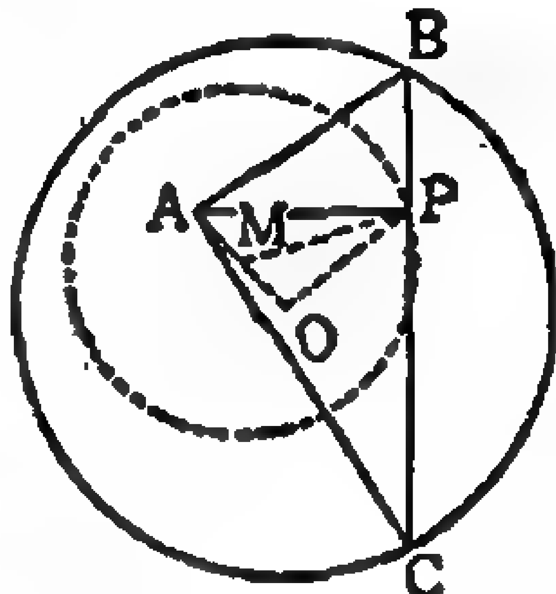
于是　　$\angle AFM=\angle AFE.$

因此，点 M 在定线段 FE 上。而且轨迹的界限，是旁切圆在 AB、AC 的延长线上的切点 F、E。

1746.　设定圆 O 的半径为 r，从定圆 O 内的定点 A，作相互垂直的两直线 AB、AC，它们与定圆的交点分别为 B、C，若从 A 向 BC 作垂线，求垂足 P 的轨迹。

解　因为 $\angle BAC=90°$，$AP\perp BC$，所以 $AP^2=BP\cdot CP$.

而 $BP\cdot CP=r^2-OP^2$（圆幂定理）。



$\therefore\ AP^2+OP^2=r^2.$

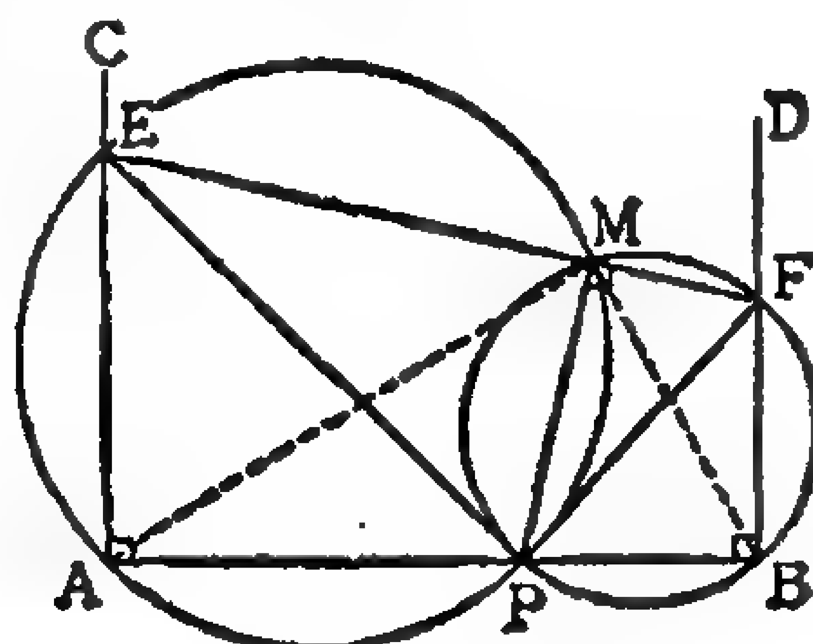
亦即从点 P 到两定点 A、O 的距离平方和是一定的．所以，点 P 的轨迹，是以 AO 的中点 M 为圆心，半径的长为 $\sqrt{\frac{r^2}{2}-AM^2}$ 的圆。

1747.　两定直线 MON、$M'ON'$ 在点 O 垂直相交。过 MN 上的定点 A，作动直线 QA 与 $M'N'$ 交于 Q，在 MN 上取点 R，使 $\frac{AR}{OQ}=\frac{m}{n}$，若从 R 向 AQ 作垂线，求垂足 P 的轨迹。

解　设 P 为适合条件的点。过 A 垂直于 MN 的直线与 RP 的交点为 B，则

$\triangle AOQ\backsim\triangle BAR.$

$\therefore\ \frac{AR}{OQ}=\frac{AB}{OA}.$



由此可得，

$$\frac{AB}{OA}=\frac{m}{n}.$$

而 OA 是定长的线段，所以点 B 是定点。又 $\angle APB=90°$，所以，点 P 的轨迹是以 AB 为直径的圆 O'.

当 Q 取在关于 MN 的另一侧，或 AR 取在关于 A 的相反方向，则点 P 的轨迹是关于 MN 与圆 O' 对称的圆 O''.

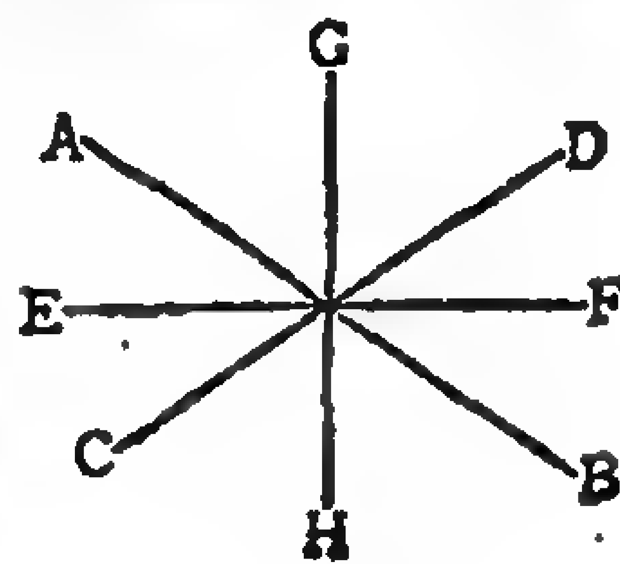
1748.　设线段 AB 的两条垂线为 AC、BD，作任意直线与 AC、BD 相交，交点分别为 E、F，在 AB 上取一点 P，使 $AP\cdot PB$ 等于 $AE\cdot BF$，若从 P 向 EF 作垂线 PM，求点 M 的轨迹。

解　由假定 $AE\cdot BF=PA\cdot PB$，

$\therefore\ \frac{AE}{PA}=\frac{PB}{BF}$，

$\angle A=\angle B.$

$\therefore\ \triangle EAP\backsim\triangle PBF$，



由此可得，

$\angle AEP=\angle BPF.$

$\therefore\ \angle AEP+\angle BFP=90°.$

因为四边形 $EAPM$、四边形 $FBPM$ 都是内接于圆的四边形，所以

$$\angle AEP=\angle AMP,$$
$$\angle BFP=\angle BMP.$$
$$\therefore\ \angle BMP+\angle AMP=90°,$$

即　　$\angle AMB=90°.$

所以，点 M 的轨迹是以 AB 为直径的圆。

7. 圆心的轨迹

1749.　若圆与相交的两直线 AB、CD 相切，求圆心的轨迹。

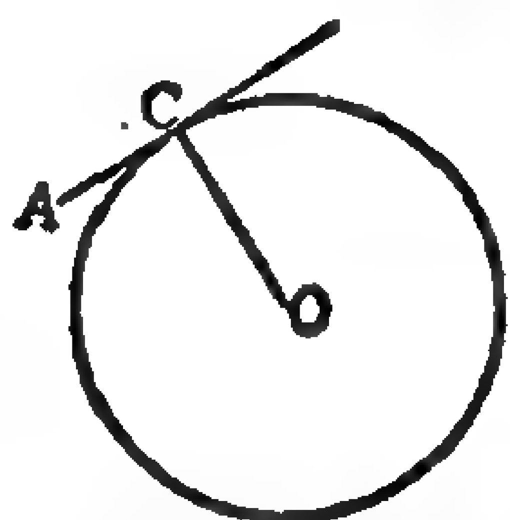
解　因为切于 AB、CD 的圆的圆心，到 AB 和 CD 的距离相等，又因为到 AB 和 CD 的距离相等的点，都为切于

AB、CD的圆的圆心．因此，所求的轨迹，是与到AB、CD的距离相等的点的轨迹相同．

由此可得，所求的轨迹是平分AB和CD的交角的两条直线EF、GH．

1750． 设定圆O上一定点C，一个圆在点C处与定圆O相交成直角，求这个圆的圆心的轨迹．

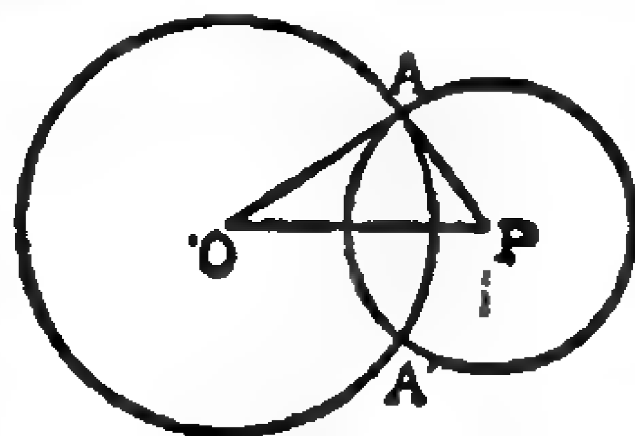
解 设定圆的圆心为O，C为圆O上的定点．在点C作定圆的切线CA，则在点C与定圆O相交成直角的圆的圆心在直线CA上．



又以CA上任意一点A为圆心，以AC为半径的圆，在C处与圆O交成直角．由此可得，所求的轨迹是切线AC．

1751． 已知定半径的圆P与定圆O相交于A、A'，若$\angle OAP=\alpha$，求圆心P的轨迹．

解 设定圆O，适合条件的圆的圆心为P，两圆的交点之一为A，则



$$\angle OAP=\alpha(\text{一定}).$$

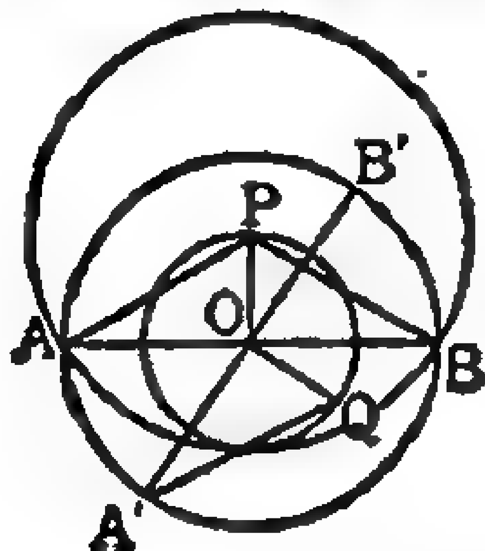
又在$\triangle OAP$中，因为AO、AP一定，它们的夹角也一定，所以OP也是一定．设OP的长度为m，则P在以O为圆心，m为半径的圆上．

反之，容易证明，这圆上的点适合条件．

因此，所求的轨迹是以O为圆心，半径的长等于m的圆．

1752． 设定半径的圆二等分定圆O，求定半径圆的圆心的轨迹．

解 设O为定圆的圆心，P为适合条件的点，即圆P二等分定圆O于A、B，PA、PB是定半径．连结OP，则



$$PO\perp AB.$$

$\therefore\ PO^2=PA^2-AO^2.$

由此可得，PO为定长．设它的长度为m，则P在以O为圆心，以定长m为半径的圆上．

反之，设Q为这圆上的任意点，$A'B'$为圆O的直径且垂直于QO、连结QA'，则$QO^2=QA'^2-A'O^2$．

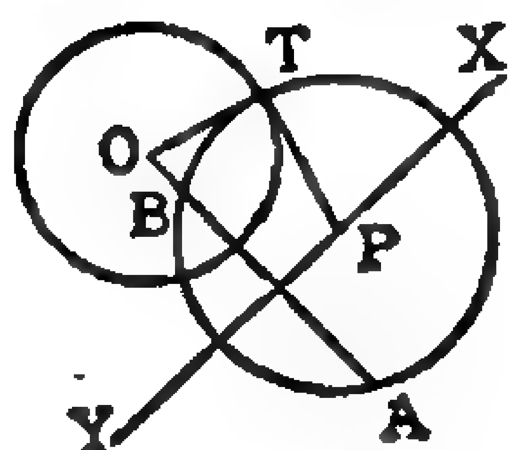
$$\therefore\ PA^2-AO^2=QA'^2-A'O^2.$$

$$\therefore\ PA=QA'.$$

即Q为具有定半径的圆的圆心，且圆Q二等分定圆于A'、B'．因此，所求的轨迹是以O为圆心，半径的长等于m的圆．但是，当定半径小于定圆O的半径时，则轨迹不存在．

1753． 已知定点A和定圆O，若过定点A的圆P与定圆O相交成直角，求圆心P的轨迹．

解 若P为适合条件的点，圆O与圆P在点T相交成直角．设OA与圆P的交点为B．因为OT切于圆P，所以，

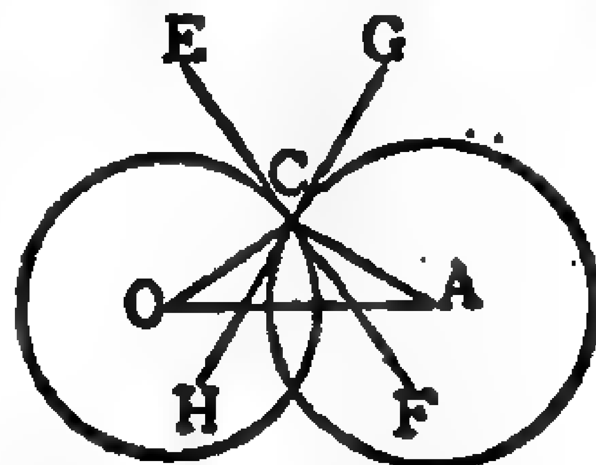


$$OA\cdot OB=OT^2.$$

而OA和OT都是定长的线段，所以OB也是定长线段，即B为定点．因此，点P的轨迹与过两定点A、B的圆的圆心的轨迹是一致的．从而得出，所求的轨迹是AB的垂直平分线．

1754． 若定半径的圆与定圆O相交成定角，求定半径的圆的圆心的轨迹．

解 设A为适合条件的圆的圆心，圆O、圆A在点C相交成定角，设在点C两圆的切线分别为ECF、GCH，则$\angle HCF$为定角．



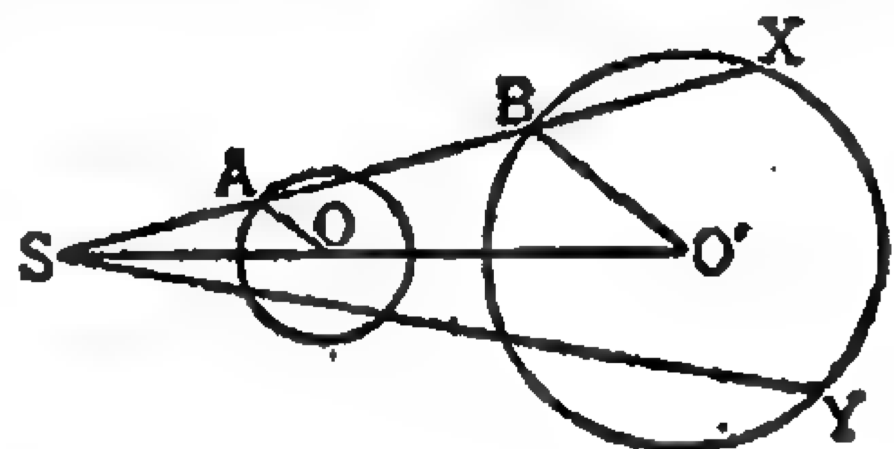
而

$$\angle ACO=\angle OCF+\angle ACH-\angle HCF$$
$$=180^\circ-\angle HCF(\text{一定}).$$

因此，所要求的轨迹可归结为问题**1751**．

1755． 从一点作出的两条射线，分别与两圆相交成定角，求两圆的圆心的轨迹．

解 设SX、SY为从一点作出的两条射线，适合条件的两圆的圆心分别为O、O'．又圆O、圆O'与SX的交点分别为A、B．连结OA、$O'B$．因为OA、$O'B$分别与SX作成定角，所以$OA\parallel O'B$．因此，若SX与OO'的交点为M，则



$$MO:MO'=OA:O'B.$$

由此可得，点M是圆O和圆O'的位似中心，SX经过圆

O 和圆 O' 的位似中心.

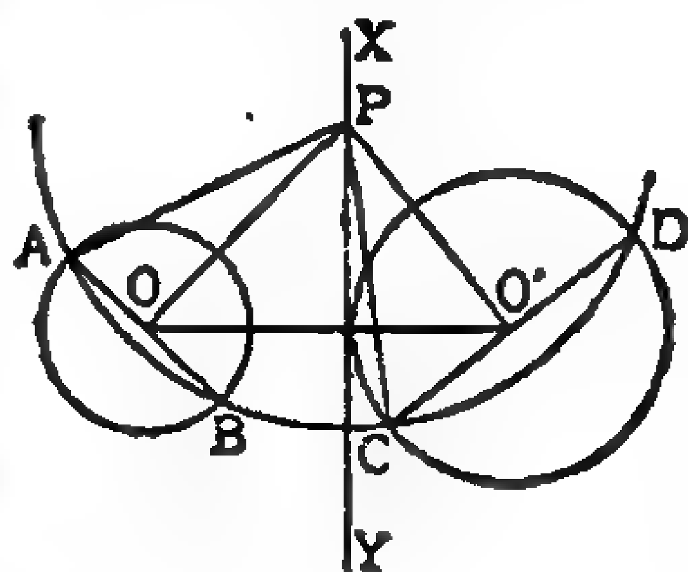
同理可得，若 SY 与 OO' 的交点为 N，则 N 也为圆 O 和圆 O' 的位似中心. 因此，不论 SX 或 SY，都过圆 O 和圆 O' 的位似中心. 所以点 S 是两圆 O、O' 的位似中心. 设 O 为适合条件的圆的圆心在 SO 上，则另一个适合条件的圆的圆心也在 SO 上.

反之，可以证明，SO 上的点是适合条件的圆的圆心.

因此，所求的轨迹是 SO.

1756. 设圆 O 和圆 O' 为两定圆，作圆 P 把两定圆二等分，求圆心 P 的轨迹.

解 设圆 P 与圆 O、圆 O' 的交点分别为 A、B 与 C、D，AB、CD 分别是圆 O、圆 O' 的直径.



$$\therefore\quad OP\perp AB,$$
$$O'P\perp CD.$$

设 r、r' 分别是圆 O、圆 O' 的半径，

$$\therefore\quad PA^2=PO^2+r^2,$$
$$PC^2=PO'^2+r'^2.$$

而 $$PA=PC.$$

所以 $$PO^2+r^2=PO'^2+r'^2.$$

于是 $$PO^2\sim PO'^2=r'^2\sim r^2\text{（一定）}.$$

因此，所求的轨迹是垂直于 OO' 的直线（问题 1834）.

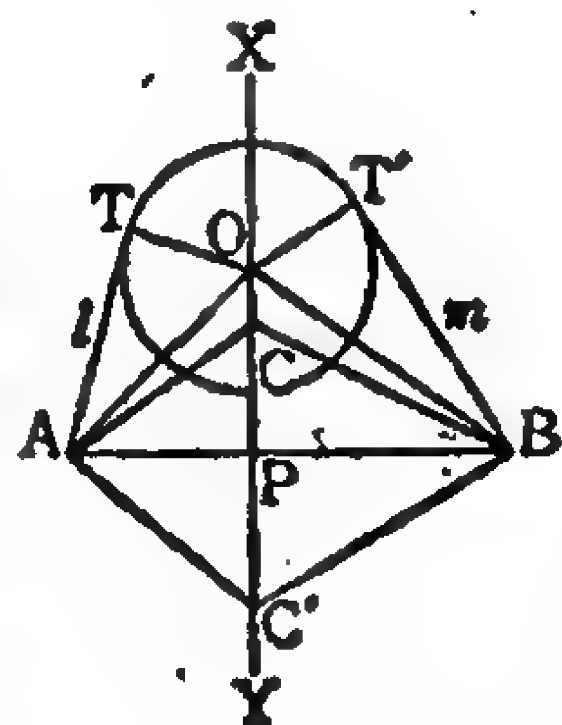
1757. A 和 B 为两定点，l 和 m 为两定长线段，若从点 A、B 向圆 O 所作切线 AT、BT'，分别等于 l、m，求圆心 O 的轨迹.

解 因为 $$OA^2=l^2+OT^2,$$
$$OB^2=m^2+OT'^2,$$

所以 $$OA^2\sim OB^2=l^2\sim m^2\text{（一定）}.$$

因此，若在 AB 上取点 P，使

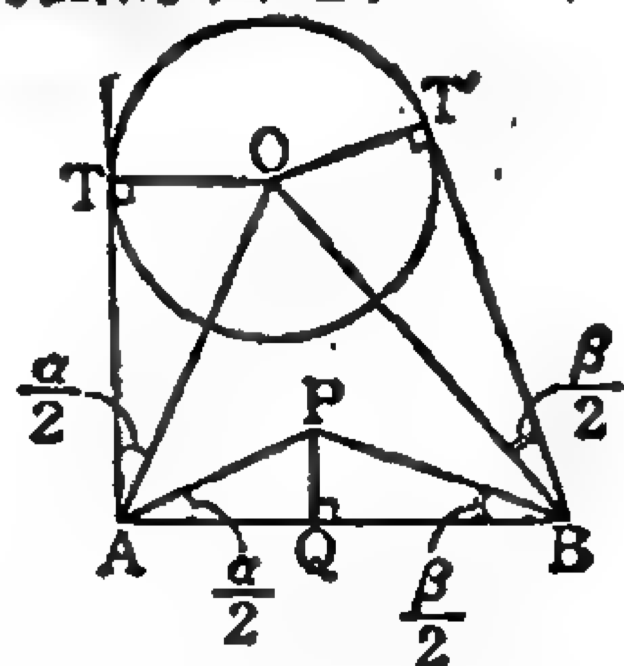
$$AP^2\sim BP^2=l^2\sim m^2,$$



则点 O 在过 P 而垂直于 AB 的直线 XY 上. 又因为 $OA>l$，$OB>m$，所以，若在 XY 上取点 C 和 C' 使 $AC=AC'=l$，则点 O 不在线段 CC' 上. 容易证明，在直线 XY 上除去线段 CC'，剩下的两条射线 CX 和 $C'Y$ 上的点都适合条件. 因此，所求的轨迹是两条射线 CX 和 $C'Y$.

1758. 从两定点 A 和 B，分别向一个圆作两条切线，使两切线之间的夹角分别等于 α、β，求这圆心的轨迹.

解 设 O 为适合条件的圆的圆心，AT 和 BT' 为切线，则



$$\angle OAT=\frac{1}{2}\alpha,$$
$$\angle OBT'=\frac{1}{2}\beta.$$

过 A 和 B 作直线 AP、BP，与 AB 之间的夹角分别等于 $\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\beta}{2}$，AP 和 BP 交于 P. 从 P 向 AB 作垂线 PQ，则

$$\triangle AOT\backsim\triangle APQ.$$
$$\therefore\quad \frac{AP}{AO}=\frac{PQ}{OT}.$$

又 $$\triangle BOT'\backsim\triangle BPQ,$$
$$\therefore\quad \frac{BP}{BO}=\frac{PQ}{OT'}.$$

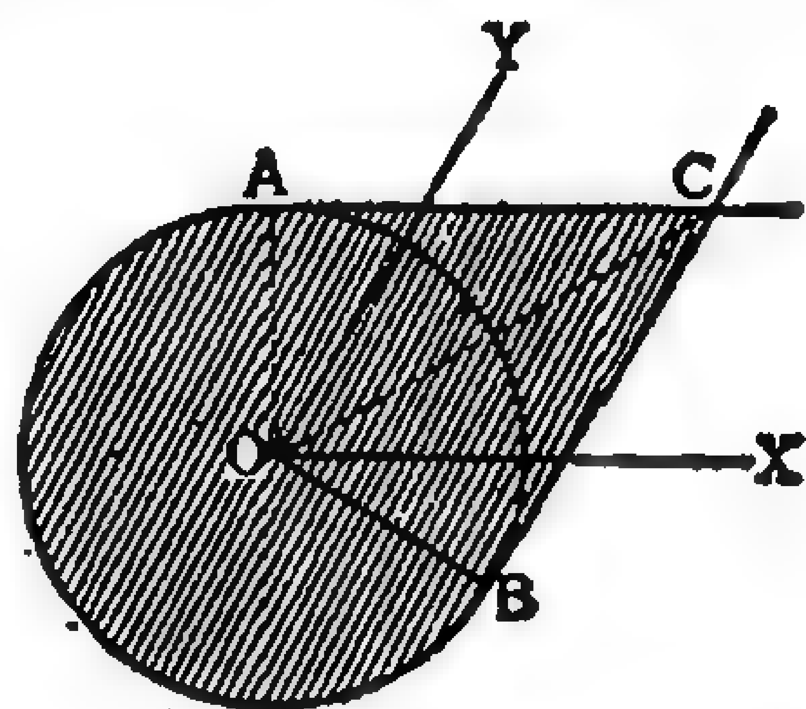
于是 $$\frac{AP}{AO}=\frac{BP}{BO},$$

即 $$\frac{AO}{BO}=\frac{AP}{BP}\text{（一定）}.$$

因此，若按比 $AP:BP$ 把线段 AB 内分和外分，则以连结这两个分点的线段为直径的圆（阿波罗尼斯圆），就是点 O 的轨迹.

1759. 设 $\angle XOY=60^\circ$，且它的位置也确定，在 $\angle XOY$ 的平面上，有半径为 a 的圆，这圆与射线 OX 和 OY（包含点 O）都至少有一个交点，则这圆的圆心在什么样的范围内. 试用图表示出这个范围，且求出它的面积.

解 在图中，设 AC 与 OX 的距离、BC 与 OY 的距离都为 a，若圆 O 的半径也为 a，则只要说明用斜线所表示的部分是所求的范围就行了.



过点 O 作直线垂直于 OX，相对于 OX 而言，在所作的垂线与 OY 同旁的部分上取 $OA=a$. 又过点 O 作

直线垂直于OY，相对于OY而言，在所作的垂线与OX同旁的部分上取$OB=a$。过A作平行于OX的直线，过B作平行于OY的直线，设这两直线的交点为C。因此，以O为圆心，a为半径的圆的优弧AB，以及AC、BC一起所围成的平面部分，就是所求圆心的存在范围。于是，所求的面积是：

$\triangle OAC$的面积$+\triangle OBC$的面积$+$扇形OAB(以优弧AB作弧)的面积

$$=\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}60^\circ+\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}60^\circ+\frac{2}{3}\pi a^2$$

$$=\sqrt{3}\,a^2+\frac{2}{3}\pi a^2=\left(\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right)a^2.$$

1760. 三角形ABC的底边BC的长度和位置一定，顶角A也一定，求这三角形的九点圆的圆心的轨迹。

解 在$\triangle ABC$中，底边BC的长度和位置一定，顶角$BAC=\alpha$。设O为$\triangle ABC$的外心，P为垂心，N为九点圆的圆心，则N是OP的中点(问题**679**)。

而P是底边BC的大小和位置一定、顶角等于定角α的$\triangle ABC$的垂心，所以点P的轨迹，是以BC为弦，所含圆周角等于$180^\circ-\alpha$的弓形弧$HBCK$(问题**1810**)。又O是定点，所以点N的轨迹，是连结定点O和$\overparen{HBCK}$上点的线段中点的轨迹。

由此可知，连结圆$HBCK$的圆心Q与O，以OQ的中点D为圆心，以圆$HBCK$的半径的一半为半径的圆，与OH、OK的交点分别为F、E，则点N的轨迹是$\overparen{FNE}$。

1761. 从已知圆上任意点P，分别作与已知两直线平行的弦PA和PB，求$\triangle PAB$内切圆的圆心的轨迹。

解 设$\triangle PAB$的内心为I，AI、BI的延长线与圆的交点分别为C、D，则C、D分别是$\overparen{PB}$、$\overparen{PA}$的中点。因为在点C的切线平行于PB，且方向一定，所以C是定点。

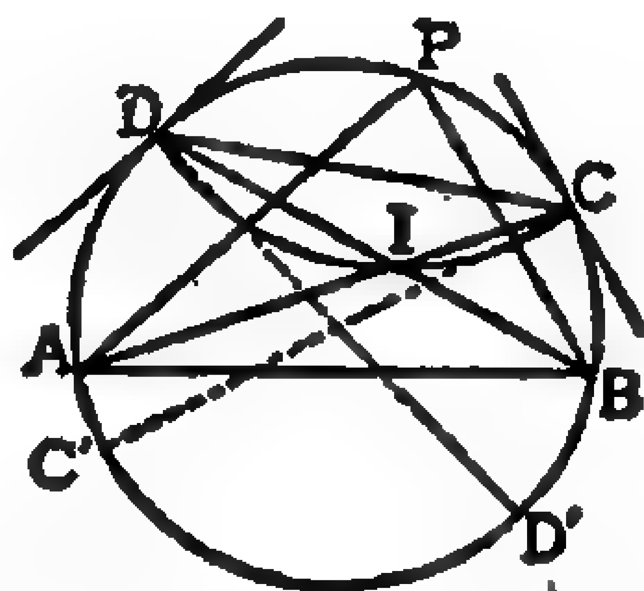
同理可得，D也是定点。

又因为$\angle APB$一定，

$$\angle AIB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle APB,$$

所以$\angle CID$一定。

由此可得，点I的轨迹是以CD为弦，所含圆周角等于$\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle APB\right)$的弓形弧。

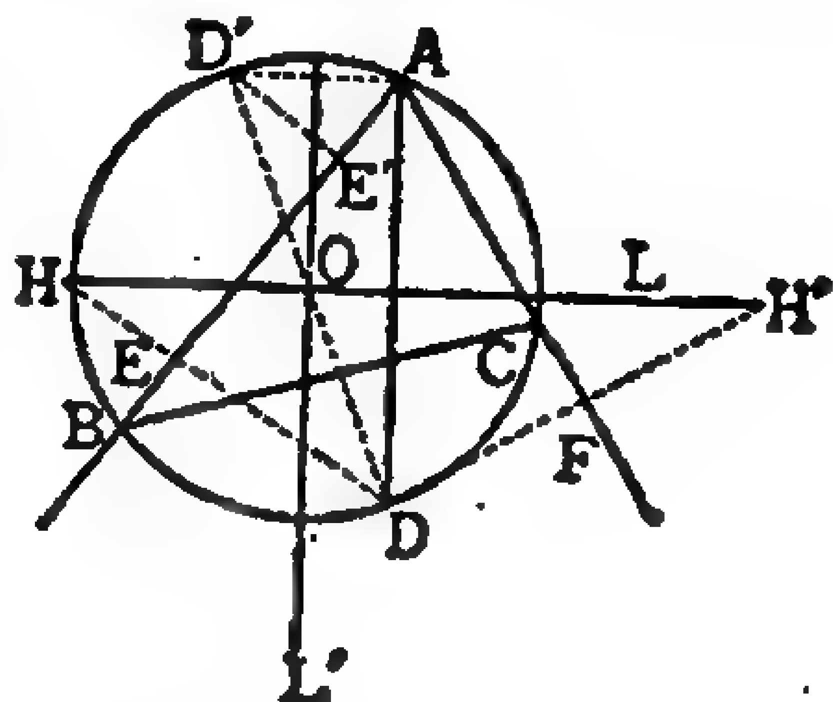


若过C、D的直径分别是CC'、DD'，当P在$\overparen{C'D'}$上，则轨迹是以$C'D'$为弦，所含圆周角等于$\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle APB\right)$的弓形弧。又若$P$在$\overparen{C'D}$或在$\overparen{CD'}$上，则轨迹分别是以$C'D$或以$CD'$为弦，所含圆周角等于$\left(90^\circ+\frac{1}{2}\alpha\right)$的弓形弧。但是，$\alpha$是已知两定直线的夹角的补角。

因此，所求的轨迹是以上四个弧。

1762. 已知$\angle BAC$的位置一定，在边AB、AC上分别取点B、C，使AB与AC的和(或差)等于定长，连结BC。求$\triangle ABC$外接圆的圆心的轨迹。

解 (1) 设$\triangle ABC$两边的和等于定长，即$AB+AC=2l$。



从$\triangle ABC$的外接圆的弧BC的中点D，向AB、AC作垂线DE、DF，则

$$AE=AF=l$$

(问题**536**)。

从而得出D是定点。所以，$\triangle ABC$的外心O在AD的中垂线L上。

再研究C或B趋近于A的极限情况，可知若延长DE、DF与L相交，则交点H、H'是点O的轨迹的界限点。

反之，容易证明HH'上的点都适合条件。因此，所求的轨迹是线段HH'。

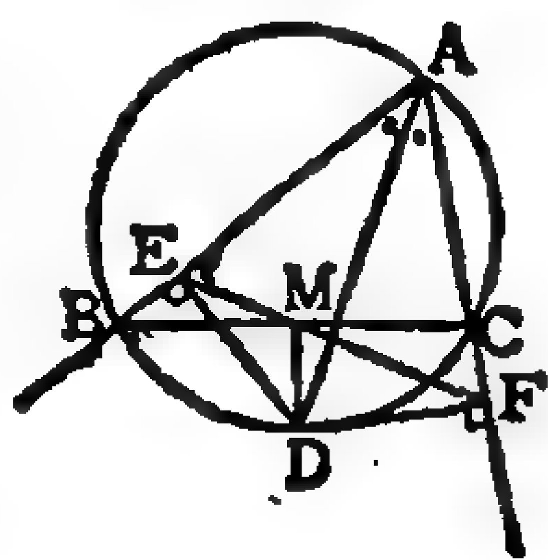
(2) 设$AB\sim AC=2l$，过D作圆O的直径DD'，则D'是弧BAC的中点。又从D'向AB作垂线$D'E'$，则$AE'=l$。又$D'A$是与$\angle BAC$相邻的外角的平分线，所以D'是定点。因此，$\triangle ABC$的外心O在AD'的中垂线L'上。

反之，容易证明，这直线上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是直线 L'。

1763. 在定角 BAC 的两边上，分别取 B、C 使 $AB+AC=2l$，求 $\triangle ABC$ 的边 BC 中点的轨迹。

解 与上题相同，$\angle A$ 的平分线与 $\triangle ABC$ 外接圆的交点为 D，从 D 向 AB、AC 作垂线分别为 DE、DF，则



$$AE=AF=l.$$

所以，E、F、D 都是定点。

设 BC 的中点为 M，连结 MD，则 $DM\perp BC$。所以，点 E、M、F 在一直线上(西摩松定理)。亦即点 M 在线段 EF 上。

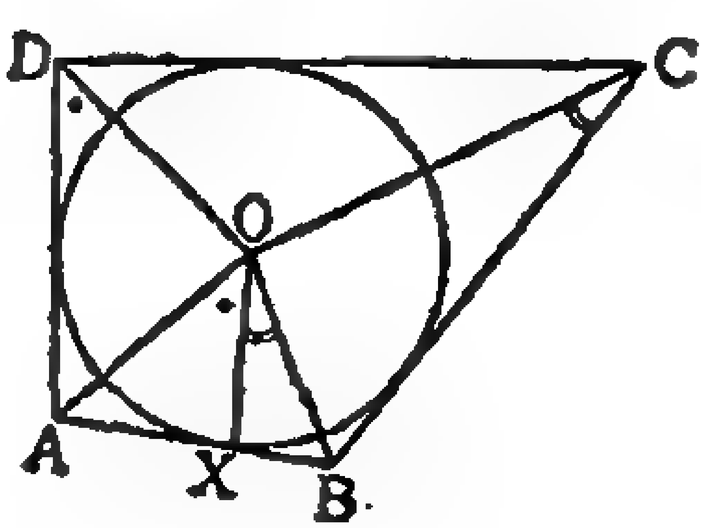
反之，容易证明，在 EF 上的点适合条件。因此，所求的轨迹是线段 EF。

1764. 在已知直线 AB 上有四边形 $ABCD$，BC、CD、DA 的长度一定，且 $AB+CD=BC+DA$，如果顶点 C、D 是动点，那么这四边形内切圆的圆心的轨迹是怎样的？

解 设内切圆的圆心为 O，连结 OA、OB、OC、OD，则

$$\angle AOB=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAD)$$
$$=\frac{1}{2}(\angle BCD+\angle ADC)$$
$$=\angle BCO+\angle ADO.$$

因此，若在边 AB 上取点 X，使



$$\angle AOX=\angle ADO,$$

则

$$\angle BOX=\angle BCO.$$

$$\therefore\quad \triangle AOX\backsim\triangle ADO.$$

从而得出，

$$AO:AX=AD:AO.$$
$$\therefore\quad AO^2=AD\cdot AX.$$

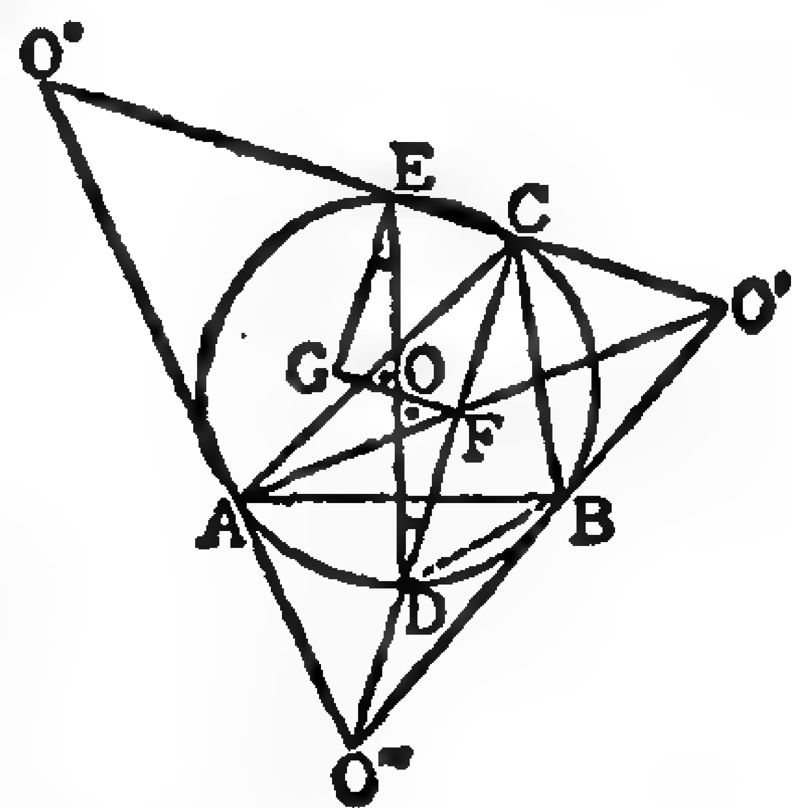
又 $$\triangle BOX\backsim\triangle BCO,$$
$$\therefore\quad BO^2=BC\cdot BX.$$

$$\therefore\quad AD\cdot BO^2+BC\cdot AO^2$$
$$=AD\cdot BC\cdot BX+BC\cdot AD\cdot AX$$
$$=AD\cdot BC\cdot AB(\text{一定}).$$

因此，点 O 的轨迹是一个圆(问题 **1841**)。

1765. 设 $\triangle ABC$ 的底边 AB 的大小和位置一定，顶角 $C=\alpha$ (一定)，求过三个旁心圆的圆心的轨迹。

解 设 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 的直径 DE 垂直于 AB，CD、CE 分别为 $\angle ACB$ 的平分线与它相邻的外角的平分线。设 O'、O''、O''' 为 $\triangle ABC$ 的旁心，AO' 与 CO''' 的交点为 F，从 E 作 CD 的平行线与 FO 的延长线相交于点 G，则在 $\triangle OEG$ 与 $\triangle ODF$ 中，



$$OE=OD,\ \angle GOE=\angle FOD,$$
$$\angle GEO=\angle FDO,$$
$$\therefore\quad \triangle GEO\cong\triangle FDO.$$

从而得出， $EG=DF$。

而 $DF=DB$(问题 **459**)。

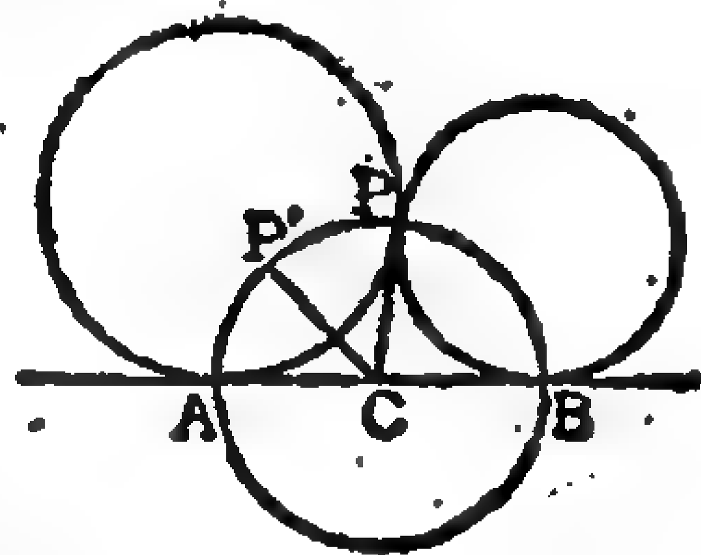
$$\therefore\quad EG=DB.$$

又由假定可知，外接圆 O 是定圆，DB 定长，所以 EG 也是定长。因为 E 是定点，因此，点 G 的轨迹是以 E 为圆心，以 EG 为半径的圆(对于 $\triangle O'O''O'''$ 来说，G 是外心，O 是九点圆的圆心，F 是垂心，G 的轨迹就是所求的轨迹)。

8. 两圆的交点(或切点)的轨迹

1766. 若切于定直线上的定点 A 的圆，和切于同一直线上的定点 B 的圆相切，求这两个圆的切点 P 的轨迹。

解 在切点 P 作公切线 PC，PC 与 AB 的交点为 C，则 C 是 AB 的中点。又



$$CP=\frac{1}{2}AB(\text{定长}).$$

因此，适合条件的点，在以 AB 的中点 C 为圆心，以 $\frac{1}{2}AB$ 为半径的圆上。

反之，设 P' 为这圆上的任意点，作过点 A、点 P' 且和 CA、CP' 相切的圆，又作过点 B、

点P'且和CB、CP'相切的圆，则CP'为两圆的公切线。由此可得，两圆相切，点P'是适合条件的点。

因此，所求的轨迹是以AB的中点为圆心，以$\frac{1}{2}AB$为半径的圆。

1767． 在定角XOY内，若切于边OX上的定点A的圆，和切于边OY上的定点B的圆外切，求切点P的轨迹。

解 连结PA、PB。在点P作两圆的公切线PT，则

$$\angle TPA=\angle OAP,\ \angle TPB=\angle OBP.$$

$$\therefore\ \angle APB=\angle OAP+\angle OBP,$$

由此可得，$\angle APB=180^\circ-\frac{1}{2}\angle XOY.$

但因为$\angle XOY$是定角，所以$\angle APB$也是定角。又因A、B是定点，所以切点P在以AB为弦，所含圆周角等于$\left(180^\circ-\frac{1}{2}\angle XOY\right)$的弓形弧上。

反之，在弧APB上取任意点P，作过点P、点A且在A切于OX的圆，又作过点P、点B且在B切于OY的圆，再在点P作切于圆AP的直线PT，则

$$\angle TPA=\angle OAP.\qquad ①$$

而 $$\angle APB=\angle OAP+\angle OBP.\qquad ②$$

由②－①，得

$$\angle TPB=\angle OBP.$$

由此可知，PT切圆BP于点B。所以，PT是圆AP、圆BP的公切线。亦即圆AP和圆BP在P点相切。

因此，弧APB是所求的轨迹。

1768． 过已知$\triangle ABC$的边BC上的点D，作任意的横截线EDF，与边AC交于点E，与边AB的延长线交于点F，作$\triangle CDE$和$\triangle BDF$的外接圆，求这两个圆的另一个交点M的轨迹。

解 因为B、F、M、D共圆，所以

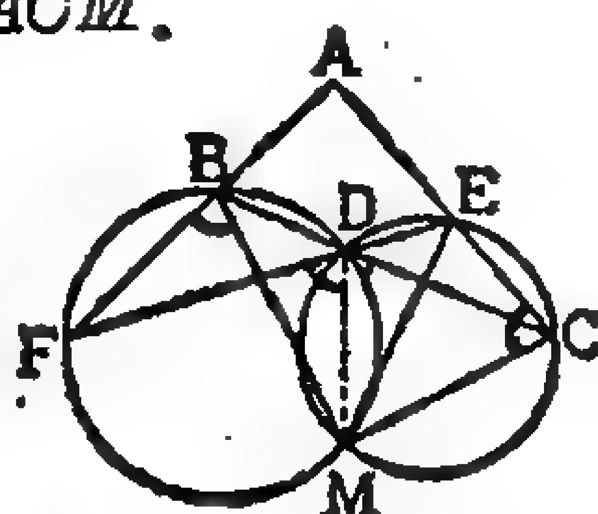
$$\angle FBM=\angle FDM.\qquad ①$$

又因为D、M、C、E共圆，所以

$$\angle FDM=\angle ECM.\qquad ②$$

由①、②，得

$$\angle FBM=\angle ACM.$$



由此可知，B、A、C、M共圆，点M在$\triangle ABC$外接圆的弧BAC的共轭弧上。

反之，在这弧上取任意点M'，作过M'、C的任意圆与AC、BC的交点分别为E'、D'，延长$E'D'$和AB的延长线的交点为F'，与上面同理，可以证明B、D'、M'、F'是同一圆上的点。

因此，弧BMC是所求的轨迹。

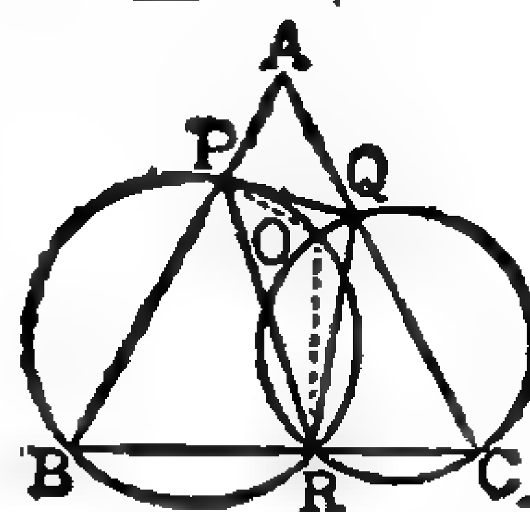
1769． 设P、Q是定三角形ABC的边AB、AC上的定点，在BC上取任意点R，作$\triangle BPR$、$\triangle CQR$的外接圆，求两圆的交点O的轨迹。

解 $\because\ \angle POR+\angle B=180^\circ,$

$$\angle QOR+\angle C=180^\circ,$$

$$\therefore\ \angle POR+\angle QOR+\angle B+\angle C=360^\circ.$$

$$\therefore\ \angle POQ=\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A.$$



即

$$\angle POQ+\angle A=180^\circ.$$

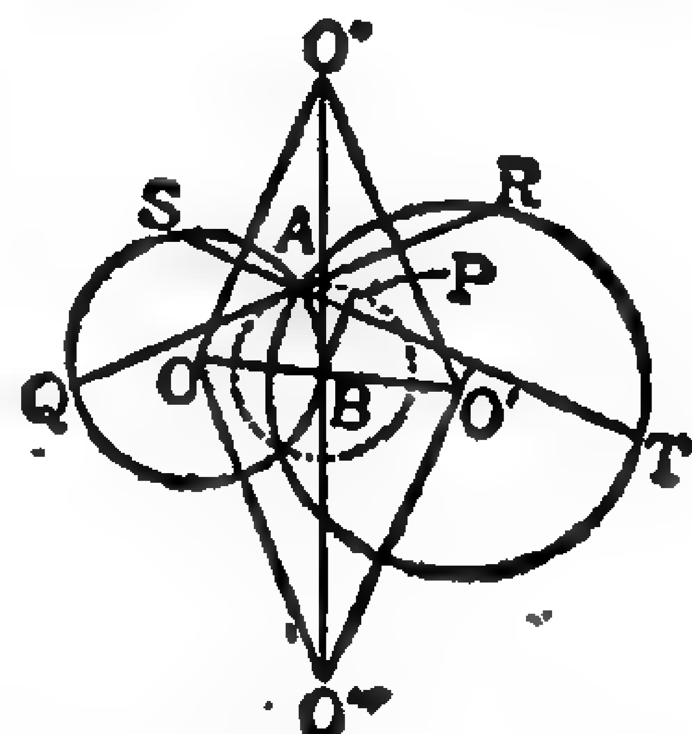
由此可知，点O在$\triangle APQ$的外接圆的弧PAQ的共轭弧上。

反之，容易证明在$\overparen{POQ}$上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是$\overparen{POQ}$。

1770． 两定圆O、O'相交，过交点A作动割线QAR、SAT，求圆SAR和圆QAT的另一个交点P的轨迹。

解 设圆SAR、圆QAT的圆心分别为O''、O'''，因为AS是圆O和圆O''的公共弦，所以$OO''\perp AS$。



又因AT是圆O'和圆O'''的公共弦，所以

$$O'O'''\perp AT.$$

$$\therefore\ OO''\parallel O'O'''.$$

同理可得，

$$OO'''\parallel O''O'.$$

所以，$OO''O'O'''$是平行四边形。由此可知，$O''O'''$过OO'的中点B。又因为AP是两圆O''、O'''的公共弦，所以$O''O'''$垂直平

分AP。从而得出，$BP=BA$(一定)。

因此，点P在以B为圆心，BA为半径的圆上。

反之，容易证明，这圆上的点适合条件。

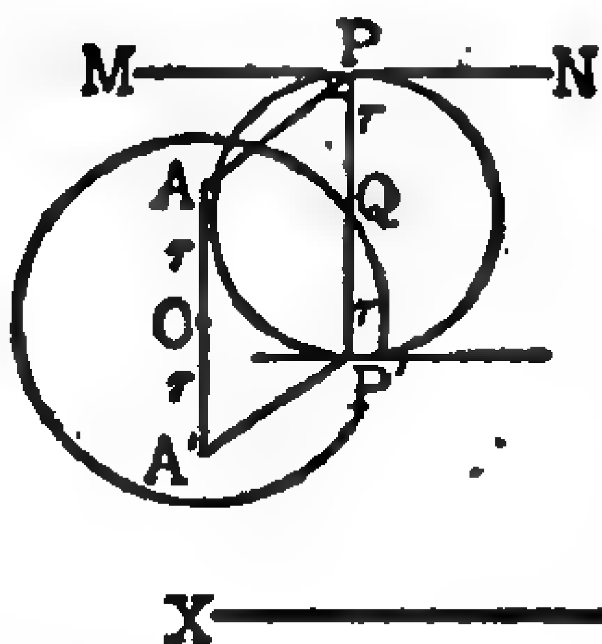
因此，所求的轨迹，是以B为圆心，以BA为半径的圆。

1771. 以已知圆上的点为圆心，以定长线段为半径作圆，按已知方向所作的圆作切线，求切点的轨迹。

解 设已知圆O，以这圆上的点Q为圆心，半径的长为定长r的圆是圆Q，MN平行于已知方向的直线XY且和圆Q相切，设切点为P，则

$$QP\perp MN.$$

$$\therefore\ QP\perp XY.$$



取OA平行而且等于QP，即$QP \mathrel{\underline{\parallel}} OA$，则

$$AP=OQ(\text{一定}).$$

又$OA\perp XY$，所以A是定点。因此，P在以A为圆心，OQ为半径的圆上。

反之，容易证明，这圆上的点适合条件。

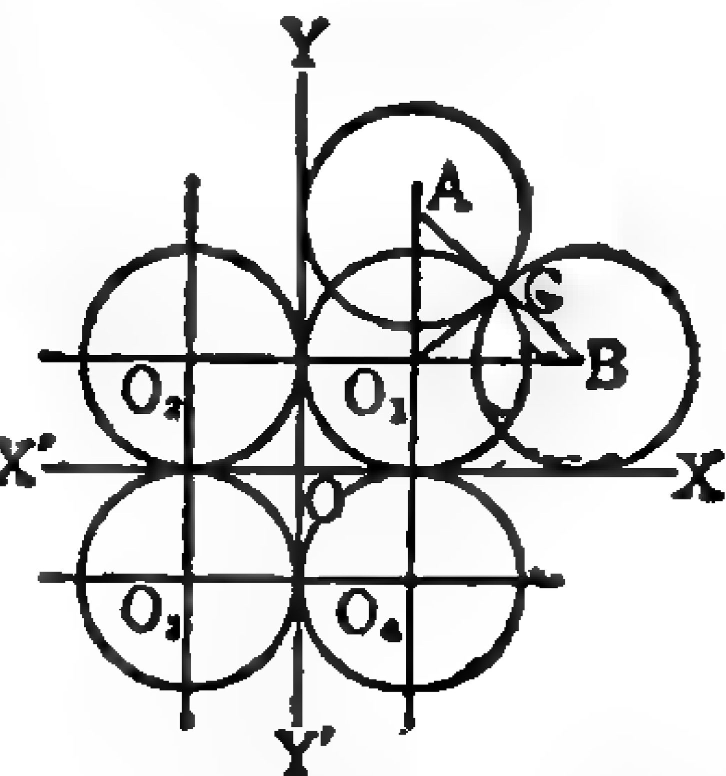
因此，点P的轨迹是圆A。

又因为平行于XY的切线有两条，所以另一条切线的切点的轨迹，是关于O与圆A对称的圆A'。

综上所述可知，所求的轨迹是圆A和圆A'。

1772. 两个半径都是r的动圆A、B互相外切于点C，又XX'、YY'是两条互相垂直相交的直线，当这两圆移动时，圆A总是与直线YY'相切，而圆B则总是与直线XX'相切，求这两圆的切点C的轨迹。

解 设两直线XX'、YY'垂直相交于点O，过两圆心A、B分别作平行于YY'、XX'的直线，设交点是O_1。设O_1在$\angle XOY$内，$\triangle O_1AB$是直角三角形，两圆A、B的切点C是AB的中点。所以



$O_1C=r$。因此，点C在以O_1为圆心，r为半径的圆上。

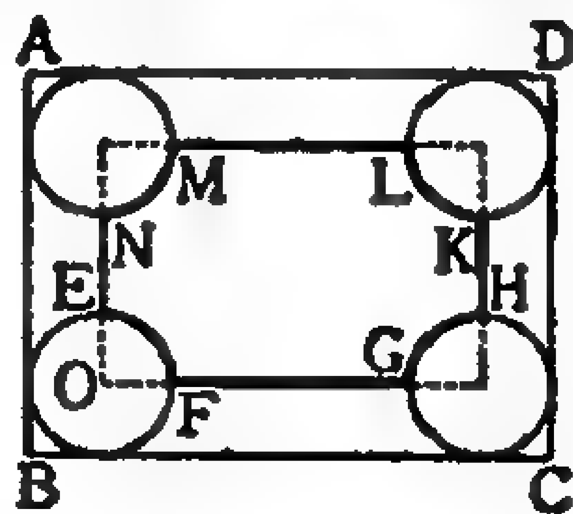
反之，设C为这圆上的任意点。以C为圆心，CO_1为半径的圆与BO_1的交点为B。延长BC，与O_1A的交点为A。若以A、B为圆心，r为半径作两个圆，则一个与XX'相切，另一个与YY'相切，而且这两圆相互外切。因此，圆O_1是所求的轨迹。

又因为两动圆A、B还可以在$\angle XOY'$、$\angle X'OY$、$\angle X'OY'$的内部，所以根据同理可以得到类似的结论。

因此，所求的轨迹是四个圆O_1、O_2、O_3、O_4。

1773. 已知两个相等的铜币，切于长方形箱的边上而且又互相外切，如果两个铜币按这样移动，求这两个铜币切点的轨迹。

解 设长方形的边缘为$ABCD$，铜币的半径为r。如果一个铜币切于AB，另一个切于BC，那么由上题可以知道，若两直线NO、GO与AB、BC的距离都等于r，且NO、GO交于点O。在以O为圆心，以r为半径的圆上，取弧EF等于$\frac{1}{4}$圆，则$\widehat{EF}$就是所求的轨迹。

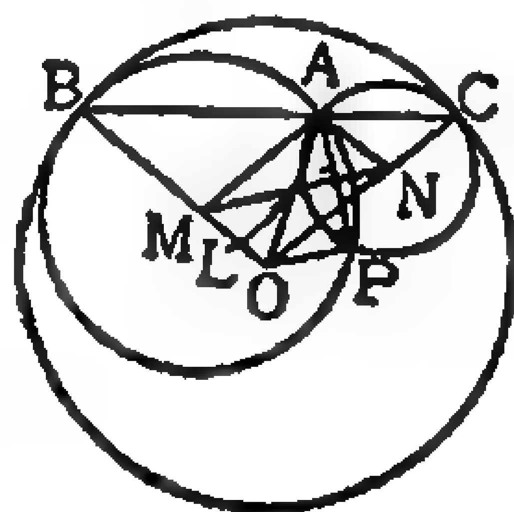


又当两个铜币都与一边BC相切时，显然可知，切点的轨迹是线段FG。因此，所求的轨迹，是四条线段FG、HK、LM、NE和四个弧：$\widehat{EF}$、$\widehat{GH}$、$\widehat{KL}$、$\widehat{MN}$。

1774. 过定圆内的定点A，作任意的弦BC，过A、B和过A、C分别作两个圆，且这两圆各在B、C和定圆相切，求这两个圆的另一个交点P的轨迹。

解 设O为定圆的圆心，在B、C内切于定圆O的圆的圆心分别为M、N，则B、M、O与C、N、O分别在同一直线上，又MN垂直平分AP。

因为$\triangle ABM$、$\triangle CBO$都是等腰三角形，且底角B是公共角，所以



$$\angle AMB=\angle COB.$$

由此可得，$MA\parallel OC$。

同理可得，　　$NA\parallel OB$。

因此，四边形$AMON$是平行四边形，MN过AO的中点L且垂直平分AP，所以，

$$MN \parallel OP. \quad \therefore \quad \angle APO = 90°.$$

因此，点 P 在以 AO 为直径的圆上.

反之，设 P 为这圆上的任意点，过 P、A 作圆 M，且在点 B 与定圆 O 相切，过 M 作 OP 的平行线，则这条直线过 AP 的中点，同时也过 AO 的中点 L. 取 $LN=ML$，若 BA、ON 的交点为 C，则四边形 $OMAN$ 是平行四边形. 因为 $\triangle AMB$ 是等腰三角形，所以 $\triangle BOC$ 也是等腰三角形. 由此可得，

$$OC=OB.$$

因此，C 是定圆 O 上的点，且 $AN=NC$，又因点 P 是点 A 关于 MN 的对称点，所以

$$AN=NC=NP.$$

从而得出，以 N 为圆心，过 A、P、C 的圆 N 在点 C 与定圆 O 相切，即点 P 适合条件.

因此，所求的轨迹，是以 AO 为直径的圆.

1775. 有以定点 O 为圆心，任意 r 为半径的圆 O，又有以两定点 A、B 分别为圆心的两圆，若这两圆分别与圆 O 相交成直角，求这两圆的交点的轨迹.

解 从 A、B 分别向圆 O 作切线 AC、BD，以 A、B 为圆心，分别以 AC、BD 为半径作圆，圆 A、圆 B 分别与圆 O 相交成直角. 设 M、N 为所作的两个圆的交点，则

$$AM^2=AC^2=AO^2-r^2,$$

$$BM^2=BD^2=BO^2-r^2.$$

$$\therefore \quad AM^2 \sim BM^2 = AO^2 \sim BO^2 \text{(一定)}.$$

同理可得，

$$AN^2 \sim BN^2 = AO^2 \sim BO^2 \text{(一定)}.$$

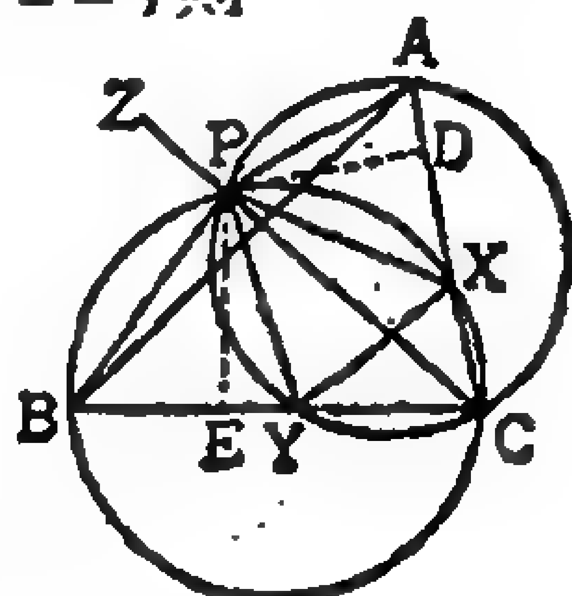
因此，若在 AB 上取点 P，使

$$PA^2 \sim PB^2 = AO^2 \sim BO^2,$$

于是 P 是定点，过定点 P 而垂直于 AB 的直线，是圆 A 与圆 B 的交点 M、N 的轨迹（问题 **1834**）. 若设点 O' 是点 O 关于 AB 的对称点，则线段 OO' 的两端点 O、O' 是轨迹的界限.

1776. 一直线平行于 $\triangle ABC$ 的边 AB，这直线与 CA、CB 分别交于 X、Y，求 $\triangle CAY$、$\triangle CBX$ 的外接圆的另一个交点 P 的轨迹.

解 设 P 为圆 CAY 与圆 CBX 的另一个交点，连结 PA、PB、PX、PY，则



$$\angle PYB=\angle PAX,$$

$$\angle PBY=\angle PXA.$$

$$\therefore \triangle PAX \backsim \triangle PYB.$$

又由 $AB \parallel XY$，得

$$\frac{AX}{BY}=\frac{AC}{BC}\text{(一定)}.$$

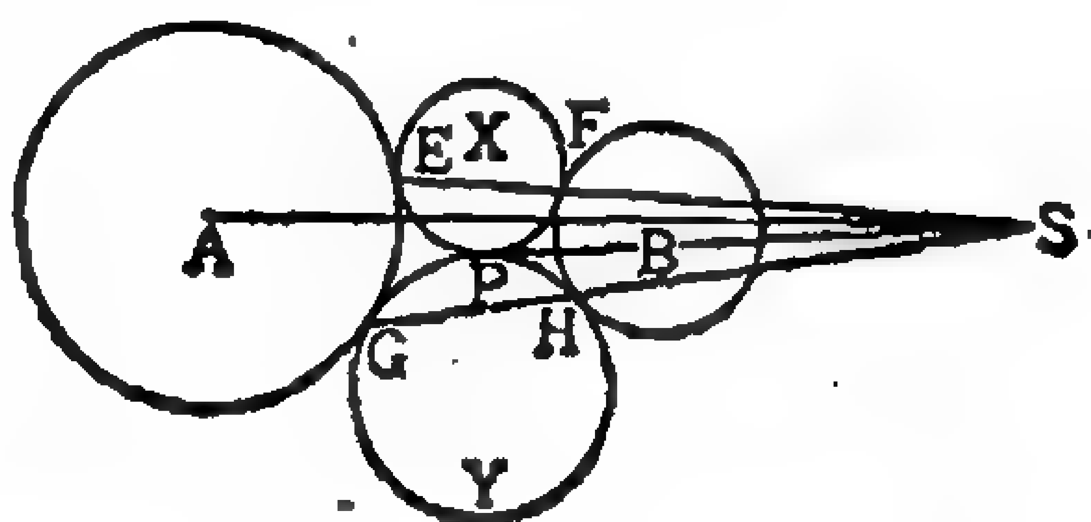
因此，从点 P 向 AX、BY 分别作高 PD、PE，则

$$\frac{PD}{PE}=\frac{AC}{BC}\text{(一定)}.$$

由此可得，点 P 的轨迹，可以转化为到两边 AC、BC 的距离的比是一定的点的轨迹. 因此，所求的轨迹是射线 CZ.

1777. 已知两个圆互相外切于 P，这两圆又分别与两个已知定圆外切，求两圆的切点 P 的轨迹.

解 设 A、B 为两已知定圆的圆心，互相外切的两圆且又分别外切于两个定圆 A、B 的两个圆心为 X、Y. 若圆 X 与两圆 A、B 的切点分别为 E、F，则 EF 过两圆 A、B 的外位似中心 S（问题 **1131**）.



同理可得，若圆 Y 切于两圆 A、B 的点分别为 G、H，则 GH 也过 S. 而且

$$SE \cdot SF = SG \cdot SH = SA \cdot SB$$

（一定）（问题 **1409**）.

因为 S 在两圆 X、Y 的根轴上，所以在两圆 X、Y 的切点 P 的切线过 S.

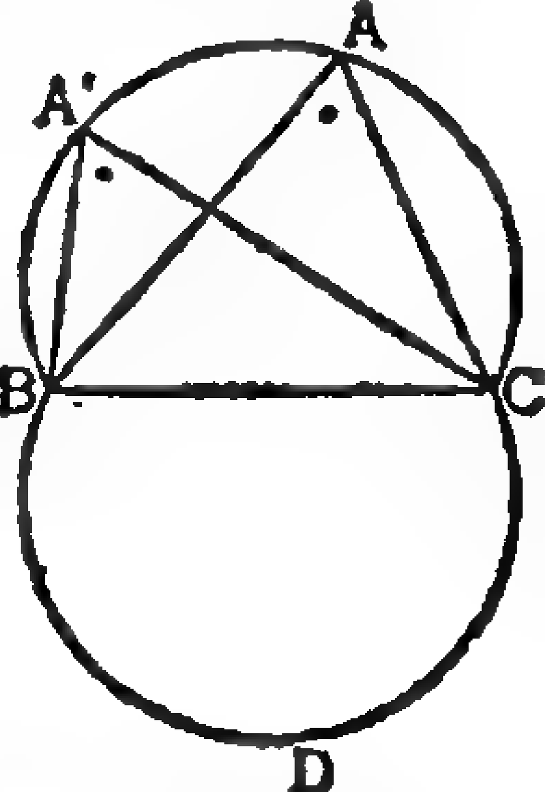
$$\therefore \quad SP^2=SE \cdot SF \text{(一定)}.$$

从而得出，SP 是定长. 因此，点 P 的轨迹，是以 S 为圆心的一个圆的弧.

9．三角形(或四边形)的顶点的轨迹

1778. $\triangle ABC$ 的底边 BC 的大小和位置一定，顶角 A 是定值 α，求顶点 A 的轨迹.

解　因为$\angle A$恒为定值α，所以A在以定线段BC为弦，所含圆周角等于α的弓形弧上．这样的弧关于BC互相对称的有两个．



反之，设A'为这弧上的任意点，则

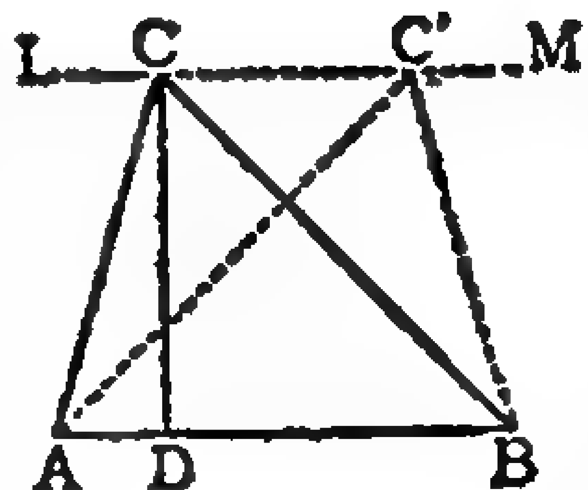
$\angle BA'C=\angle BAC=\alpha$.

所以点A'适合条件．

因此，所求的轨迹，是圆弧BAC和关于BC与它对称的弧BDC.

1779．　求同底、面积一定的三角形顶点的轨迹．

解　设$\triangle ABC$的底边AB一定，面积一定．从C作CD垂直于AB，因为底边AB和面积一定，所以它的高CD也一定，设高为h，则C在与AB的距离为h的平行线LM上．



反之，设C'为LM上的任意点，连结$C'A$、$C'B$．因为$\triangle C'AB$与$\triangle CAB$等积，所以它的面积一定．

因此，所求的轨迹，是平行于AB的直线LM．若C取在AB的另一侧，且与上面位置对称，则点C的轨迹，是关于AB与LM对称的直线．

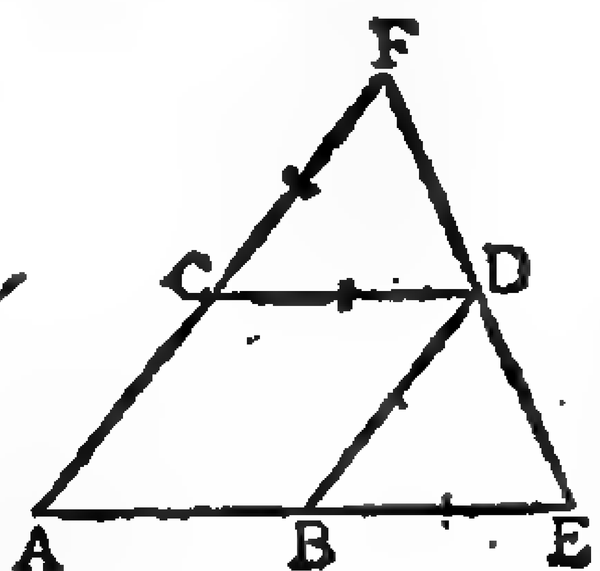
1780．　平行四边形$ABDC$的周长一定，且顶点A的位置固定，当两邻边AB、AC的方向一定时，求点D的轨迹．

解　设$\square ABDC$的周长一定$(2l)$，顶点A的位置固定，AB、AC的方向一定，且

$AB+AC=l$.

若在AB、AC的延长线上，分别取点E、F，使

$AE=AF=l$,



则E、F是定点．又$\triangle BDE$、$\triangle CDF$都是等腰三角形而且对应角相等．所以

$\angle CDF+\angle BDE$

$=180^\circ-\angle A=180^\circ-\angle BDC$.

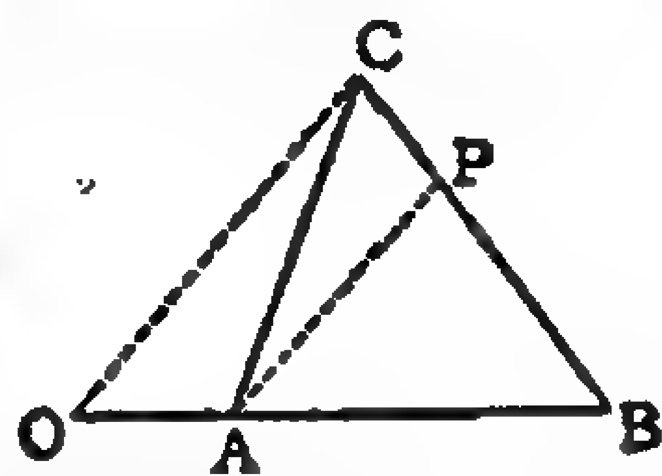
因此，连结E、F的直线恒过点D，即D在EF上．

反之，容易证明，EF上的点适合条件．

因此，所求的轨迹是线段EF．

1781．　$\triangle ABC$底边AB的大小和位置一定，在BC上取一点P，使线段AP等于定长l，且$BP:PC=m:n$，求顶点C的轨迹．

解　因为A是定点，AP是定长l，所以，点P的轨迹，是以A为圆心，以l为半径的圆．在BA的延长线上取点O，使$BA:AO=m:n$，则O是定点．而



$BP:PC=m:n$.　$\therefore$　$BP:PC=BA:AO$.

由此可得，$OC\parallel AP$.

$$\therefore\quad \frac{OC}{AP}=\frac{BC}{BP}=\frac{m+n}{m}.$$

$$\therefore\quad OC=\frac{m+n}{m}\cdot l\text{(一定)}.$$

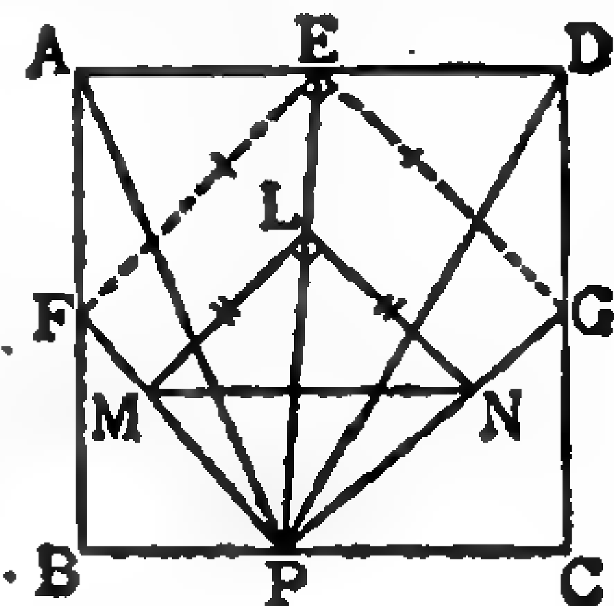
因此，C在以O为圆心，半径的长等于$\frac{m+n}{m}\cdot l$的圆上．

反之，容易证明，这个圆上的点都适合条件．

因此，所求的轨迹，是以O为圆心，半径的长等于$\frac{m+n}{m}\cdot l$的圆．

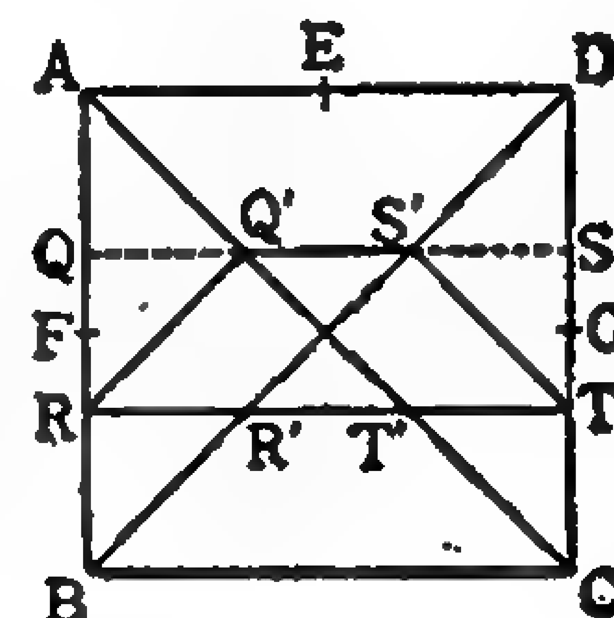
注　参照问题1631．

1782．　在已知正方形$ABCD$的边BC上，取任意点P，若三个三角形PAD、PAB、PCD的重心分别是L、M、N，则$\triangle LMN$是怎样的三角形？又当点P在边BC上移动时，L、M、N画出怎样的线段？求$\triangle LMN$的存在范围的面积．这里，假设正方形$ABCD$的边长为a．



解　设AD、AB、CD的中点分别为E、F、G，由三角形的重心性质，得

$$\frac{PM}{PF}=\frac{PL}{PE}=\frac{PN}{PG}=\frac{2}{3}.$$



而且

$\angle MLN=\angle FEG=90^\circ$,

$ML=\frac{2}{3}EF=\frac{2}{3}EG$

$=LN$.

由此可得，$\triangle LMN$是等腰直角三角形．

设点Q与点R、点S与点T分别三等分AB、DC，AC与QS、AC与RT的交点分别为Q'、T'，BD与QS、BD与RT的交点分别为S'、R'。则当点P从点B的位置移动到点C的位置上时，点L从点Q'的位置移动到点S'的位置上，点M、点N分别从点R的位置移动到点R'的位置上，从点T'的位置移动到点T的位置上。

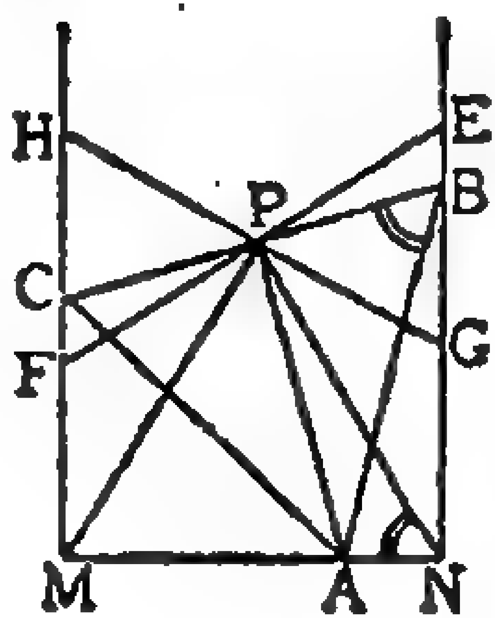
由此可知，$\triangle LMN$的存在范围是梯形$Q'RTS'$。

$$梯形Q'RTS'的面积=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{3}\right)\times\frac{a}{3}=\frac{2}{9}a^2.$$

1783. 在正三角形PMN的边MN上取任意点A，作以AP为高、顶点为A的正三角形ABC，求B和C的轨迹。

解 因为$\triangle ABC$、$\triangle PMN$都是正三角形，所以

$\angle ABC=\angle PNA=60°$。



由此可知，P、A、N、B共圆。

又 $AP\perp BC$，

$\therefore\ \angle APB=90°$。

所以，AB是这圆的直径。

连结NB，则$NB\perp MN$。

同理可得，

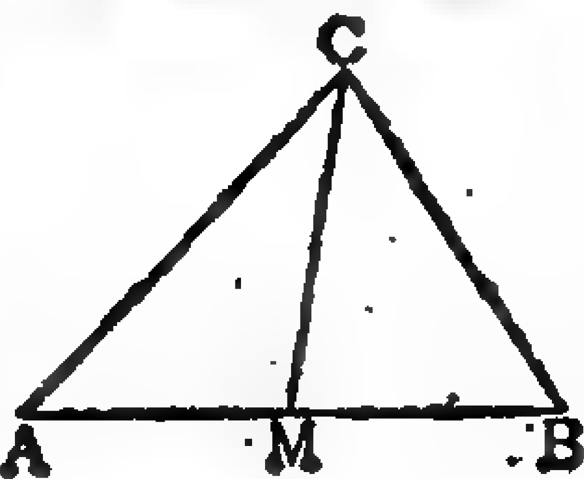
$$MC\perp MN.$$

因此C、B分别在过M和N而垂直于MN的直线上。若A限定在线段MN上移动，设过P而垂直于PN的直线，过P而垂直于PM的直线分别与NB、MC相交，设交点为E与F、G与H，则这些点是轨迹的界限。

反之，容易证明线段EG、FH上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是线段EG、FH。

1784. 三角形的底边的长度和位置一定，其他两边上的正方形面积的和一定，求这三角形顶点的轨迹。



解 设$\triangle ABC$的底边AB的长度和位置一定，又

$$AC^2+BC^2=k^2(一定).$$

若M为AB的中点，连结MC，则

$$AC^2+BC^2=2(AM^2+CM^2)$$

(中线定理)。

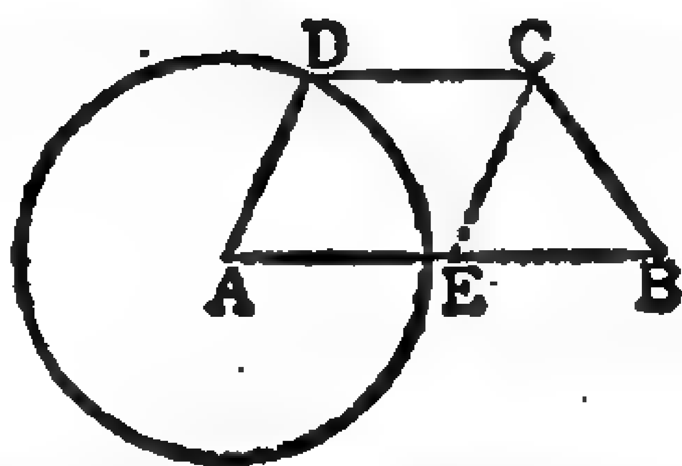
$$\therefore\ 2(AM^2+CM^2)=k^2.$$

$$\therefore\ CM^2=\frac{k^2}{2}-AM^2(一定).$$

所以，CM是定长线段。因此，点C的轨迹，是以M为圆心，半径的长度为$\sqrt{\frac{k^2}{2}-AM^2}$的圆(参考问题874)。

1785. 梯形$ABCD$的底边AB的长度和位置一定，AD、CD为定长，且顶点D在以A为圆心的圆上移动，求顶点C的轨迹。

解 因为DC是定长的线段，所以，若在线段AB上取$AE=DC$，则E是定点，$AECD$为平行四边形。

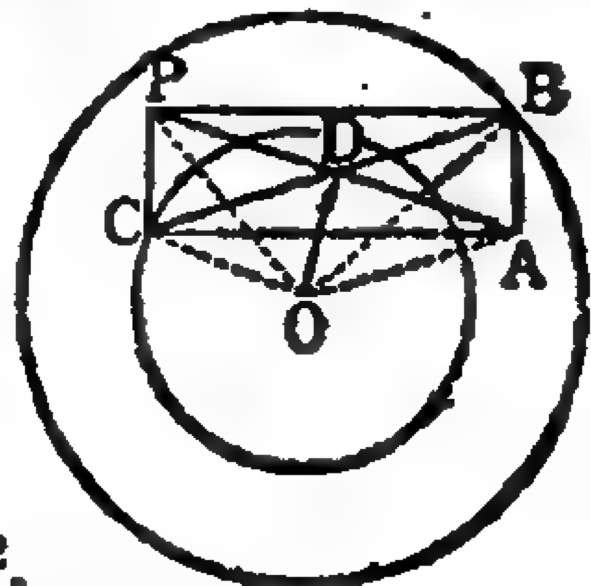


$\therefore\ EC=AD$。

因此，点C的轨迹，是以E为圆心，以等于AD的线段为半径的圆。

1786. 固定矩形$ABPC$的顶点A，与A相邻的两顶点B、C分别在两个已知的同心圆上，求第四顶点P的轨迹。

解 已知两个同心圆，设R、r分别为外圆、内圆的半径。两对角线的交点为D，连结OD、OA、OB、OP、OC，因为D是PA、BC的中点，所以



$$OP^2+OA^2=2OD^2+2PD^2,$$

$$OB^2+OC^2=2OD^2+2CD^2.$$

而 $PD=CD$.

$$\therefore\ OP^2+OA^2=OB^2+OC^2=R^2+r^2,$$

即 $OP^2=R^2+r^2-OA^2$ (一定)。

所以OP是定长的线段。由此可得，点P在以O为圆心，以定长线段为半径的圆上。

反之，容易证明，这圆上的点适合条件。

因此，所求的轨迹，是以O为圆心的圆。

1787. 从已知圆O(半径r)外一点A，向圆作线段AP，以AP为一边作正方形$APQR$，求点R和Q的轨迹。

解 以AO为一边作正方形$AOBC$。在$\triangle AOP$和$\triangle ACR$中，

$$AO=AC,\qquad AP=AR,$$

$\angle PAO=\angle BAC,$

$\therefore \triangle APC\cong\triangle ABC.$

$\therefore BC=PO=r.$

因此，点 B 在以定点 C 为圆心，以 r 为半径的圆上。

又在 $\triangle AOP$ 和 $\triangle ABQ$ 中，

$$AP:AQ=AO:AB=1:\sqrt{2},$$

$$\angle PAO=\angle QAB.$$

所以，$\triangle AOP\backsim\triangle ABQ.$

$\therefore PO:BQ=1:\sqrt{2},$

$\therefore BQ=\sqrt{2}PO=\sqrt{2}r.$

因此，点 Q 在以定点 B 为圆心，$\sqrt{2}r$ 为半径的圆上。(反过来，证明从略)

如果正方形 $APQB$ 与前者关于 AO 对称，这时这正方形在 AO 的另一侧，那么所求的轨迹是与前者两个圆关于 AO 对称的圆。

1788. 已知直角三角形 ABC 的形状和大小，斜边 AC 的两端 A、C 分别在垂直相交于 O 的两条直线 OX、OY 上移动，求直角顶点 B 的轨迹。

解 因为 $\angle AOC=\angle ABC=90°$，所以 A、O、C、B 共圆。

$\therefore \angle AOB=\angle ACB.$

但因为 $\triangle ABC$ 的形状一定，所以 $\angle C$ 的大小也一定。

若直线 OZ 与 OX 的夹角 AOZ 等于定角 C，则点 B 在直线 OZ 上。作直线平行于 OX 且与 OX 的距离等于 AB，设这两条平行线与直线 OZ 的交点为 Z、Z'，这两点就是轨迹的界限。

容易证明，线段 ZZ' 上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是线段 ZZ'。当 B 取在 AC 的另一侧时，则所求的轨迹是关于 OX 与 ZZ' 对称的线段。

1789. 菱形 $ABMD$ 的各边的长是定长，顶点 A 恒在定圆上运动，另外两顶点 B、D 与这定圆上的定点 C 的距离相等，都等于定长，求第四顶点 M 的轨迹。

解 由假设可知，$CB=CD$，$AB=AD=MB=MD$。因此，过 BD 的中点 E 作 BD 的中垂线，则 C、A、M 都在 BD 的中垂线上。

$\therefore CB^2-CE^2=BE^2$

$=AB^2-AE^2.$

从而得出，$CE^2-AE^2=CB^2-AB^2$。

但因为 CB、AB 的长度是定长，所以 CE^2-AE^2 也是一定的，设为 m^2，则

$$(CE+AE)\cdot(CE-AE)=m^2,$$

即 $CM\cdot CA=m^2.$

但因为 C 是圆 O 上的定点，A 在圆 O 上，若取点 M，使 $CM\cdot CA=m^2$，则点 M 的轨迹是垂直于过 C 的直径的直线(问题 **1876**)。

注 XY 叫做以 C 为中心的圆 O 的反象。

1790. $\triangle ABC$ 的底边 AB 的方向一定，它的内切圆在 AB 上的切点的位置与圆的半径也一定，又当三角形其他两边的差确定时，求这三角形的顶点 C 的轨迹。

解 设 $\triangle ABC$ 为适合条件的三角形中的一个，O、O' 分别是它的内心和旁心，内切圆、旁切圆与 AB 的切点分别是 P、Q，延长 PO 与内切圆的交点为 R。因为 C 是圆 O 和圆 O' 的位似中心，所以 C、R、Q 在一直线上。因此，R 是定点。因为 $PQ=AC\sim BC$(问题 **447**)，所以 Q 也为定点。

因此，点 C 的轨迹是过两定点 Q、R 的一条射线 RC。

1791. $\triangle ABC$ 的形状一定，垂心 H 的位置一定，当顶点 A 在已知直线 LM 上移动时，求另外两个顶点 B、C 的轨迹。

解 设 $\triangle ABC$ 为适合条件的任意三角形。若作

$$HA'\perp LM,$$

并使

$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，则 A'、B'、C' 是

定点。

因为 H 是这两个三角形的垂心，所以

$$\triangle HAB \backsim \triangle HA'B'.$$

$$\therefore\quad AH:A'H=BH:B'H.$$

而 $$\angle AHA'=\angle BHB'.$$

$$\therefore\quad \triangle AHA' \backsim \triangle BHB'.$$

从而得出，

$$\angle HB'B=\angle HA'A=90°.$$

但因为 $B'H$ 是定长线段，所以 B 在过 B' 而垂直于 HB' 的直线上。

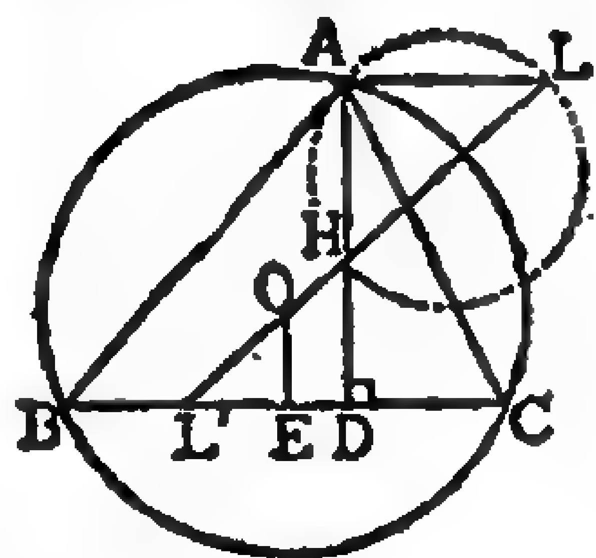
反之，容易证明，这直线上的点适合条件。

因此，B 的轨迹是过点 B' 而垂直于 HB' 的直线。

同理可得，C 的轨迹是过 C' 而垂直于 HC' 的直线。

1792. 在 $\triangle ABC$ 中，垂心和外心的位置一定，从顶点 A 向对边 BC 作垂线 AD，且垂心又为 AD 的中点，求顶点 A 的轨迹。

解 设 $\triangle ABC$ 的垂心、外心分别为 H、O，过 A 作平行于 BC 的直线 AL，AL 与 OH 的延长线的交点为 L，BC 与 HO 的延长线的交点为 L'，则



$$\triangle AHL \cong \triangle DHL'.$$

若从 O 到 BC 的距离为 OE，则

$$AH=2OE(\text{问题 }\mathbf{500}).$$

从而得出，

$$HD=2OE,\quad OE\parallel HD.$$

$$\therefore\quad HL=HL'=2OH.$$

因此，L 是定点。又 $\angle LAH=90°$，所以，点 A 的轨迹是以 HL 为直径的圆。

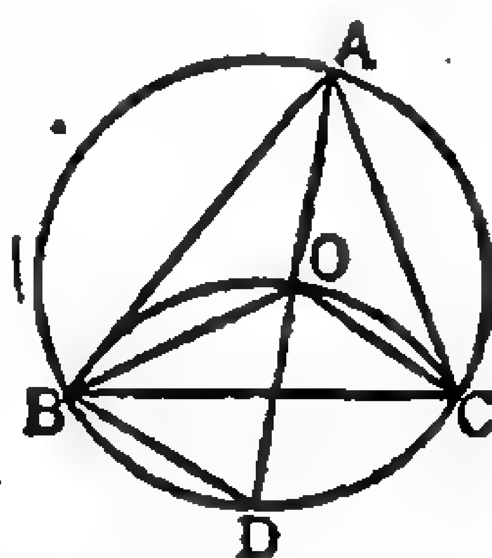
10. 三角形的外心、内心、旁心、重心、垂心的轨迹

1793. $\triangle ABC$ 的底边 BC 的位置和长度一定，顶角也一定，求 $\triangle ABC$ 的内心 O 的轨迹。

解 延长 AO 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点为 D，则

$$DO=BD(\text{问题 }\mathbf{459}).$$

又因为 BC 和 $\angle A$ 一定，所以这三角形外接圆的位置和大小一定，且 D 是定点，DB 是定长的线段。因此，O 在以 D 为圆心，以 DB 为半径的圆弧 BOC 上。

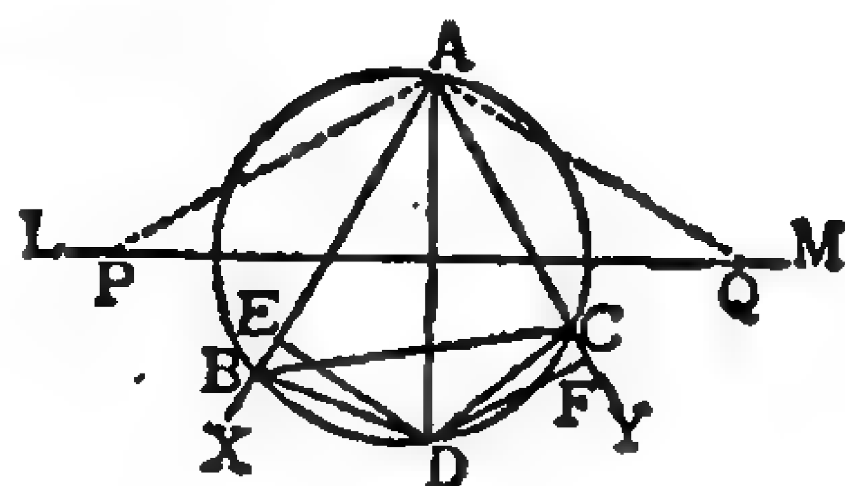


反之，在弧 BOC 上取任意一点 O'，作以 BC 为弦所含圆周角等于定角 A 的弓形弧，延长 DO' 与这弓形弧的交点为 A'。因为 $BD=DO'=DC$，所以 O' 正是 $\triangle A'BC$ 的内心。

因此，点 O 的轨迹，是以 D 为圆心，以 BD 为半径的圆弧 BC。

1794. 已知 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的位置和大小，$\angle A$ 的夹边的和 $AB+AC$ 为一定，求这三角形的外心的轨迹。

解 设 $\angle A$ 的平分线与外接圆的交点为 D。从 D 向 AB、AC 作垂线 DE、DF，则



$$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC)(\text{一定}).$$

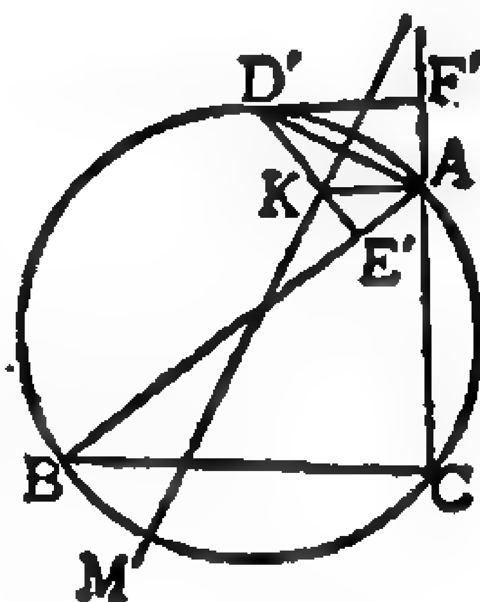
因此，E、F 是定点。从而得出，点 D 的位置确定，又 AD 是定线段。所以外心在 AD 的垂直平分线 LM 上。若过 A 作垂直于 AY、AX 的直线，这两直线与 LM 的交点分别为 P、Q，则 P、Q是轨迹的界限。

反之，容易证明，线段 PQ 上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是线段 PQ。

1795. 在上题中，若以 $AB-AC$ 替换 $AB+AC$，则 $\triangle ABC$ 外心的轨迹又是怎样呢？

解 在 $\triangle ABC$ 中，与 $\angle A$ 相邻的外角的平分线，与外接圆的交点设为 D'。从 D' 向 AB、AC 作垂线，若垂足分别为 E'、F'，则



$$AE'=AF'=\frac{1}{2}(AB-AC)(\text{一定}).$$

所以 E'、F' 是定点。从而得出，点 D' 的位置确定。因此，作 AD' 的垂直平分线，又过 A 作 AC 的垂线，这垂线与 AD' 的垂直平分

线相交于点K，则$\triangle ABC$的外心在射线KM（点K除外）上。

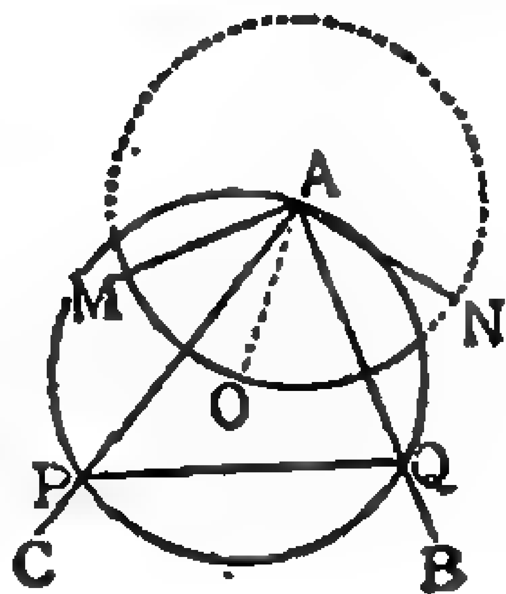
反之，可以证明KM上的点（点K除外）适合条件。

因此，所求的轨迹是射线KM（点K除外）。

1796. 设定长的线段PQ的两端，在定角CAB的两边上移动，求$\triangle APQ$外心O的轨迹。

解 因为$\triangle APQ$的边PQ的长度和$\angle A$的大小是一定的，所以它的外接圆的大小是一定的。

设O为$\triangle APQ$的外心，则半径AO为定长线段。因为A是定点，所以O在以A为圆心，以定长线段AO为半径的圆上。又若过A作垂直于AB、AC的直线，它们与圆A的交点分别为M、N，则M、N是界限点。



反之，容易证明$\overset{\frown}{MN}$（两端除外）上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是$\overset{\frown}{MN}$（两端除外）。

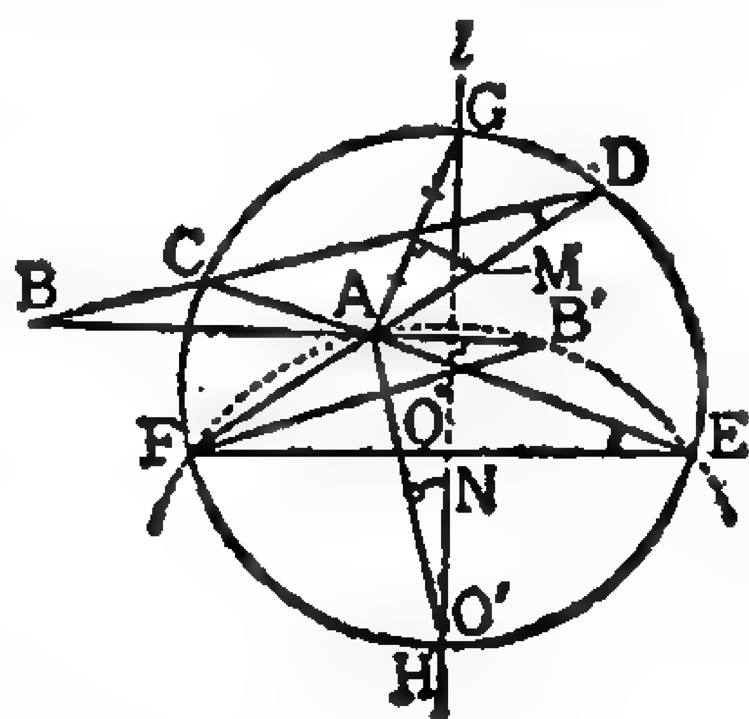
1797. 定点A、B分别在定圆O的内部和外部，过点B作割线BCD，过点A作弦CAE、DAF，求$\triangle AEF$外心O'的轨迹。

解 连结BA，延长BA与过A、F、E的圆的交点为B'，则

$\angle AEF=\angle AB'F$。

又因为

$\angle CEF=\angle CDF$，



所以 $\angle BB'F=\angle BDF$。

由此可知，B、D、B'、F在同一圆上。

$$\therefore\quad AB\cdot AB'=AF\cdot AD.$$

而A是定圆内的定点，所以$AF\cdot AD$是定值。从而得出，$AB\cdot AB'$是定值。于是B'是定点。因此，若AB'的中垂线为l，则点O'在l上。（但是，若l与圆O的交点为G、H，AG的中垂线、AH的中垂线与l的交点分别为M和N，则O'不在MN上）

反之，从直线l上除去线段MN外的点都适合条件。

因此，所求的轨迹是两条半直线。

1798. 在已知$\triangle ABC$的边AB、AC上，分别取点M、点N，使$BM=CN$，求$\triangle AMN$外心O'的轨迹。

解 设D为$\triangle ABC$的外接圆和$\triangle AMN$的外接圆的另一个交点，则

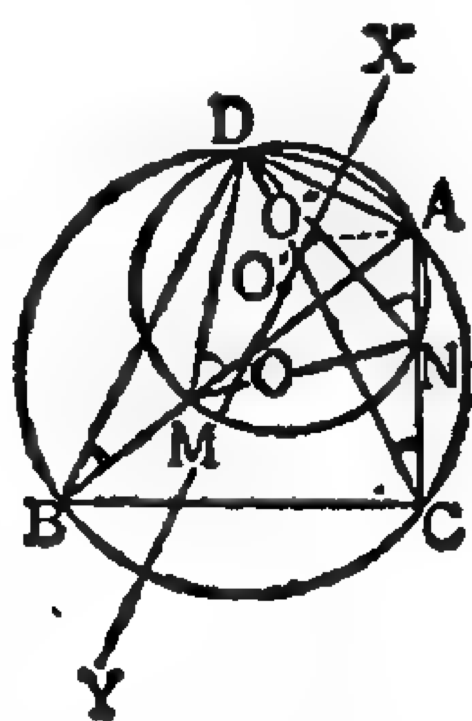
$\angle DBA=\angle DCA$, $\quad\angle DMA=\angle DNA$.

$\therefore\quad\angle DMB=\angle DNC$,

$\therefore\quad\triangle DBM\cong\triangle DCN$.

$\therefore\ DB=DC,\ DM=DN$.

因此，点D是定弧BAC的中点。



又因为圆AMN过两定点D、A，所以它的圆心O'在DA的中垂线XY上。而$\triangle ABC$的外心O，也在XY上。又过A作AC的垂线，与XY的交点为O''，则两点O、O''是轨迹的界限。

反之，容易证明OO''上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是线段OO''。

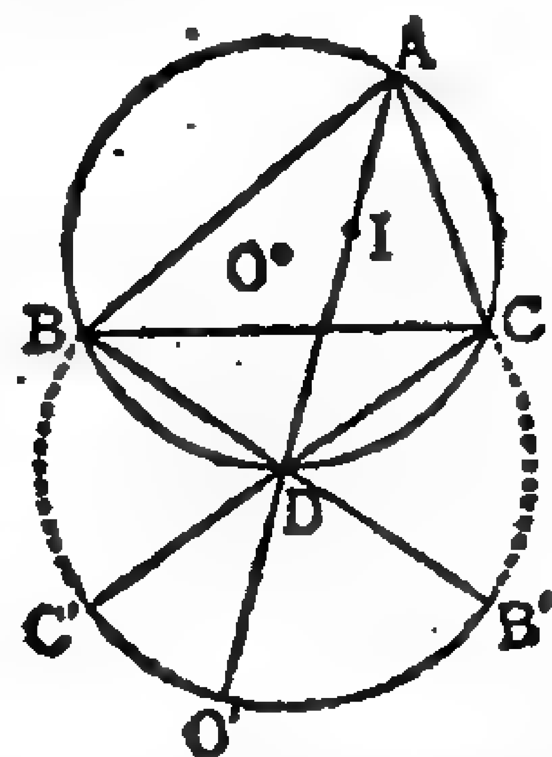
1799. 若$\triangle ABC$的底边BC的位置和长度一定，顶角A的大小一定，求相对于$\angle A$的旁心O'的轨迹。

解 设O'为相对于$\angle A$的旁心，D为外接圆上弧BC的中点，则

$DB=DO'=DC=DI$

（I是$\triangle ABC$的内心）。

因此，点O'在以D为圆心，以DB为半径的圆弧上。



为了讨论轨迹的界限，我们研究顶点A在弧BAC上移动时的情况。当A无限地趋近于B时，$\triangle ABC$的旁心O'随着就无限地趋近于B'；又当A无限地趋近于C时，O'随着就无限地趋近于C'。因此，点O'在弧$B'O'C'$上。

反之，设O''为这弧上的任意点，连结$O''D$，作以BC为弦，所含圆周角等于$\angle A$的弓形弧，延长$O''D$与这弓形弧的交点为A'。因为

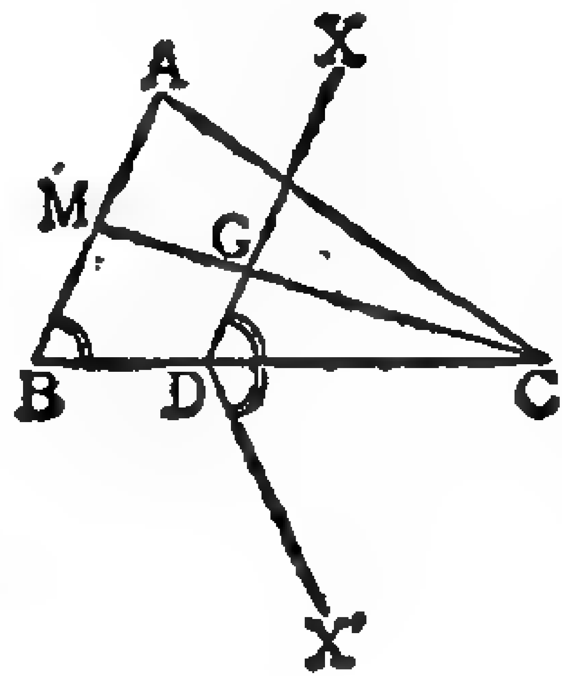
$$DB=DO''=DC=DI,$$

所以，O''是$\triangle A'BC$的旁心。

因此，所求的轨迹是弧 $B'O'C'$。

1800. 设 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的长度、位置和 $\angle B$ 的大小为一定，求 $\triangle ABC$ 重心的轨迹。

解 设 M 为 AB 的中点，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 G 在 CM 上，且



$$CG=\frac{2}{3}CM.$$

因此，过 G 作 AB 的平行线，它与 BC 的交点为 D，则

$$CD=\frac{2}{3}CB.$$

因为 BC 为一定，所以 D 是定点。又

$$\angle GDC=\angle B(\text{一定}).$$

由此可得，G 在过定点 D 而平行于 BA 的直线 DX 上。

反之，在这直线上取任意点 G'，过 B 作平行于 DG' 的直线，与 CG' 的延长线的交点为 M'，延长 BM' 到 A' 使 $M'A'=BM'$，则 CM' 是 $\triangle A'BC$ 的中线。

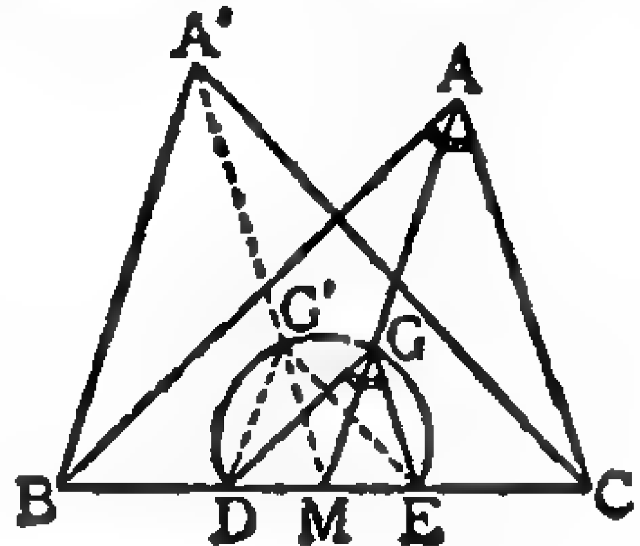
$$\therefore\quad CG':CM'=CD:CB=2:3.$$

所以 G' 为 $\triangle A'BC$ 的重心，点 G' 适合条件。

因此，射线 DX 是所求的轨迹。又过 D 作射线 DX'，使 $\angle CDX'=\angle B$，则当顶点 A 关于 BC 与前者对称即在 BC 的另一侧时，轨迹就是关于 BC 与 DX 对称的射线 DX'。

1801. 设 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的位置和长度一定，顶角 A 的大小一定，求 $\triangle ABC$ 的重心 G 的轨迹。

解 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，作中线 AM，则



$$MG=\frac{1}{3}AM.$$

从 G 向 AB、AC 作平行线，与 BC 的交点分别为 D、E，则

$$MD=\frac{1}{3}MB,\quad ME=\frac{1}{3}MC.$$

所以，D、E 是定点。

又 $$\angle DGE=\angle A,$$

所以，点 G 在以 DE 为弦，所含圆周角等于 $\angle A$ 的弓形弧上。

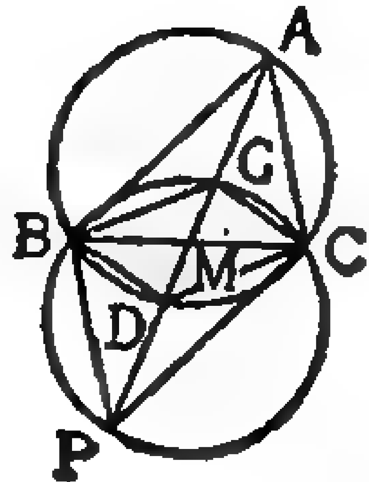
反之，在这弧上取任意点 G'，延长 MG' 到 A'，使 $G'A'=2MG'$，则 G' 是 $\triangle A'BC$ 的重心，且 $\angle A=\angle A'$（$\because\ \angle G=\angle G'$）。

因此，所求的轨迹是弧 DGE。

其次，若顶点 A 关于 BC 与前者对称取在 BC 的另一侧，则轨迹是关于 BC 与弧 DGE 对称的弧。

1802. 设 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的位置和长度一定，顶角 A 的大小也一定，G 为重心，延长 AG，与 $\triangle BGC$ 的外接圆的交点为 P，求点 P 的轨迹。

解 设 $\triangle ABC$ 的中线 AM 与它的外接圆的交点为 D，则因四边形 $ABDC$ 是内接于圆的四边形，所以



$$AM\cdot MD=BM^2. \qquad ①$$

又因为四边形 $BGCP$ 也是内接于圆的四边形，所以

$$MG\cdot MP=BM^2. \qquad ②$$

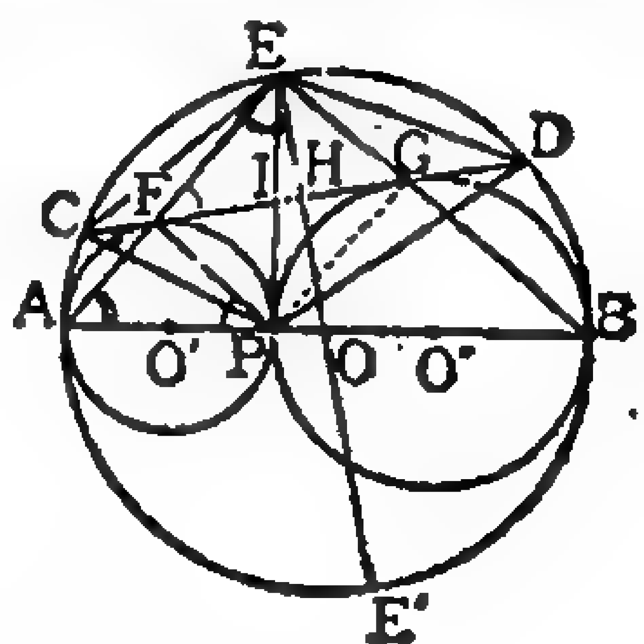
$$\therefore\quad MA\cdot MD=MG\cdot MP.$$

从而得出，$$\frac{MD}{MP}=\frac{MG}{MA}=\frac{1}{3}.$$

又 M 是定点，D 是定圆上的动点，$MP=3MD$，所以，根据问题 **1631** 可以知道，所求的轨迹是一个圆。

1803. 在已知圆 O 的直径 AB 上有一点 P，以 AP、BP 分别为直径作圆，再作这两圆的外公切线 CD，CD 与圆 O 的交点为 C、D，求 $\triangle CPD$ 的外心的轨迹。

解 设以 AP、BP 分别为直径的圆的圆心为 O'、O''，CD 与圆 O'、O'' 的切点分别为 F、G，在点 P 的两圆的内公切线与 FG 的交点为 I，则



$$FI=IP=IG.$$

由此可得，

$$\angle FPG=90^\circ.$$

在 PI 的延长线上取点 E，使 $IE=PI$，则四边形 $EFPG$ 为矩形。所以，点 E 在圆 O 上。

又作直径 EOE' 与 CD 的交点为 H。在 $\triangle FHE$ 和 $\triangle AFP$ 中，

$$\angle FEH=\angle FAP\quad(\because\ OE=OA),$$

$$\angle EFH=\angle AFC=\angle FPA,$$

$\therefore\quad \angle FHE=\angle AFP=90°$.

从而得出，

$EH\perp CD$.　$\therefore\quad EC=ED$.

又　$EC^2=EH\cdot EE'=2EH\cdot EO$.

因为四边形 $IPOH$ 内接于圆，所以，

$EH\cdot EO=EI\cdot EP=2EI^2$.

$\therefore\quad EC^2=4EI^2$.

亦即　$EC^2=EP^2$.

$\therefore\quad EC=EP$.

同理可得，　$ED=EP$.

由此可知，E 是 $\triangle CPD$ 的外心。因此，点 E 的轨迹是定圆 O.

1804. 设 A、B 分别是以 O'、O'' 为圆心的定圆上的定点，P 是动点，$O'P$ 和 $O''P$ 的夹角为一定，且 $O'P$ 与圆 O'、$O''P$ 与 O'' 的交点分别为 C、D，又 AC 和 BD 的交点为 Q，求 $\triangle AQB$ 的内心和 $\triangle CQD$ 的外心的轨迹。

解 设 AO'、BO'' 的延长线的交点为 S，则 $\angle S$ 一定．而

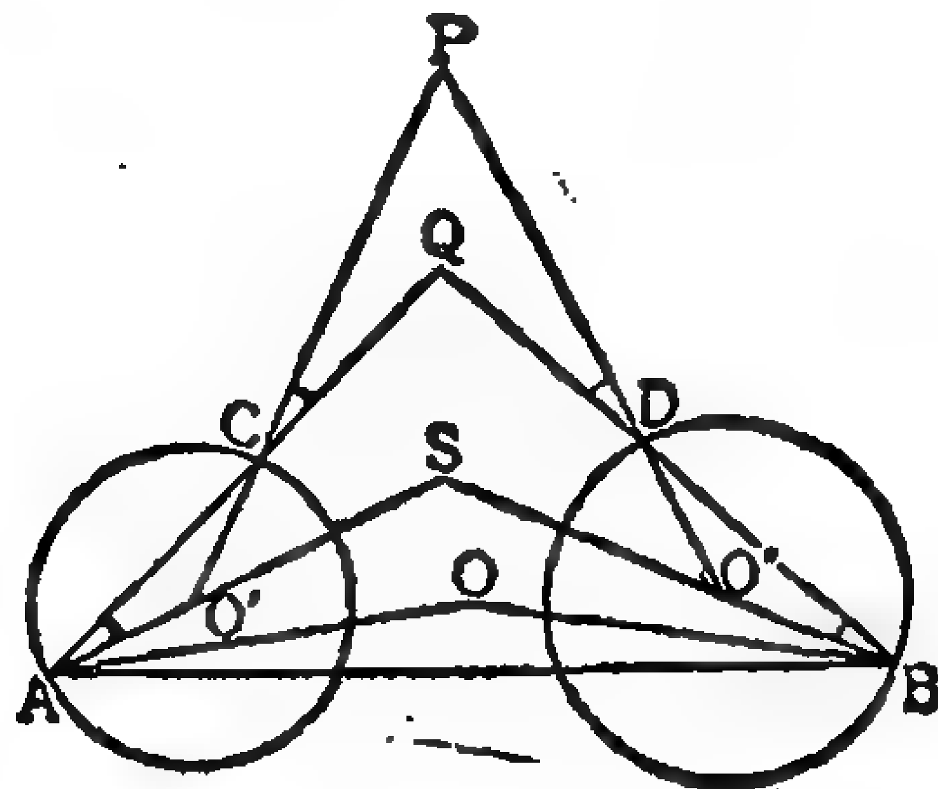
$$\angle S=\angle Q+\angle O'AC+\angle O''BD.\qquad ①$$

又　$\angle PCQ=\angle O'AC$,

$\angle PDQ=\angle O''BD$,

所以

$$\angle Q=\angle P+\angle O'AC+\angle O''BD.\qquad ②$$



由①－②，得

$$\angle S-\angle Q=\angle Q-\angle P.$$

$$\therefore\quad \angle Q=\frac{1}{2}(\angle P+\angle S)(\text{一定}).$$

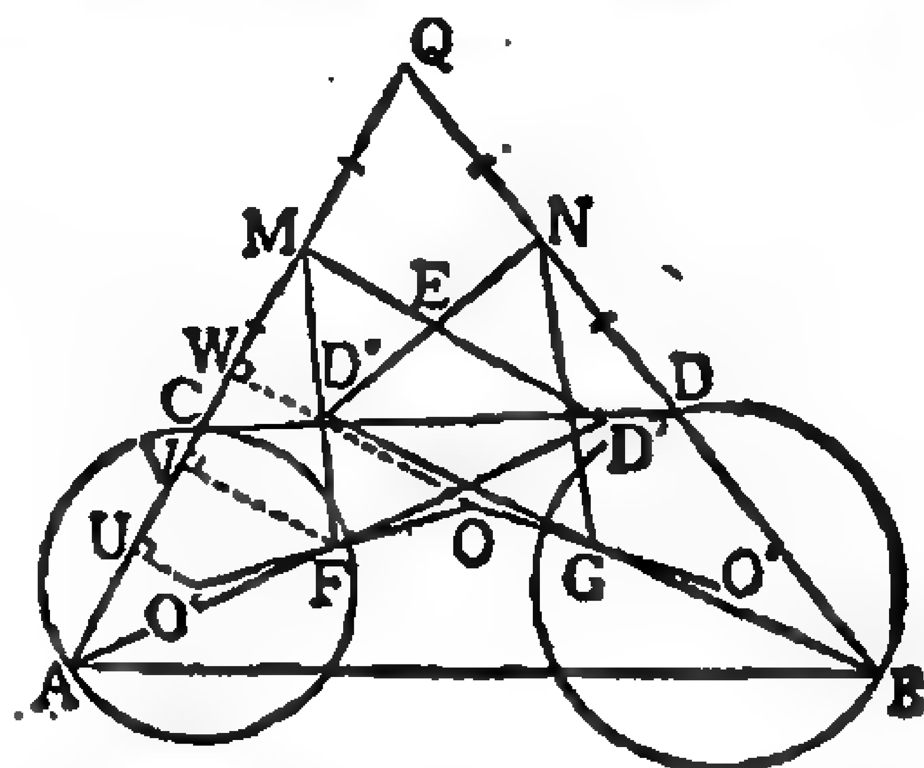
因此，$\triangle AQB$ 内心的轨迹是以 AB 为弦，所含圆周角等于$\left[90°+\frac{1}{4}(\angle S+\angle P)\right]$的弓形弧(问题 **79**)．

其次，因为 $\angle Q$ 一定，所以 $\triangle AQB$ 的外心 O 是定点。设 OO'、OO'' 的中点分别为 F、G，QC、QD 的中点分别为 M、N，连结 AF、BG、MF、NG，在点 M 和点 N，分别作 CQ 和 DQ 的垂线 ME 和 NE，这两垂线的交点为 E，AF 和 ME 的交点为 D'，BG 和 NE 的交点为 D''，则 E 是 $\triangle CQD$ 的外心。从 O'、F、O 分别向 AQ 作垂线，设垂足分别是 U、V、W，则 U 是 AC 的中点，W 是 AQ 的中点。又因为 QC 的中点是 M，OO' 的中点是 F，则 V 是 AM 的中点。所以，

$$FA=FM.$$

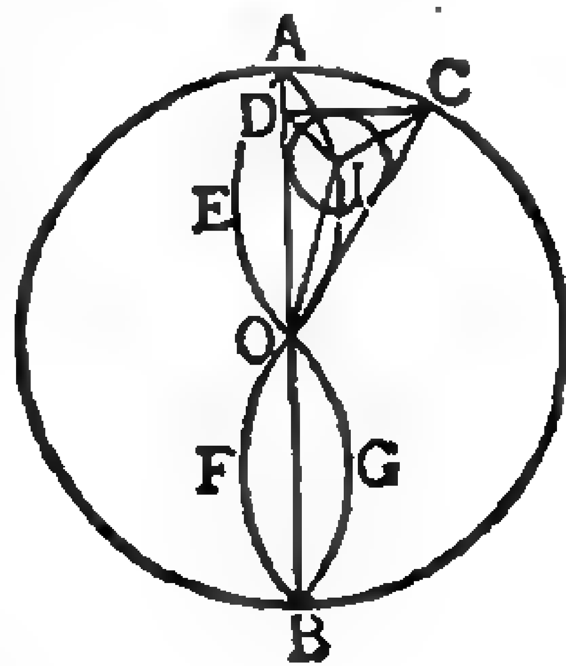
在直角三角形 AMD' 中，$AF=MF=FD'$，所以 D' 是定点。同理可得，D'' 也是定点。又 $\angle E$ 是定角 $\angle Q$ 的补角，所以 $\angle E$ 是定角。

因此，点 E 的轨迹，是以 $D'D''$ 为弦，所含圆周角等于 $\angle Q$ 的补角的弓形弧。



1805. 在定圆 O 内，从动半径 OC 的端点 C，向已知的定直径 AB 作垂线 CD，组成 $\triangle OCD$，求这三角形的内心的轨迹。

解 已知动半径 OC 的一个位置，从 C 向 OA 作垂线，它的垂足为 D，设 I 为 $\triangle OCD$ 的内心。连结 IA、IO、IC，则



$$\angle OIC=\angle D+\frac{1}{2}\angle O+\frac{1}{2}\angle C=135°.$$

而　$\triangle AOI\cong\triangle COI$.

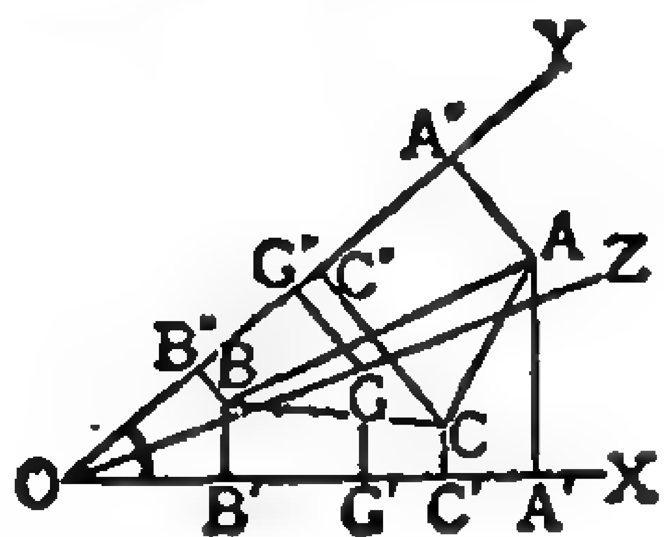
$\therefore\quad \angle OIA=\angle OIC=135°$.

因此，内心 I 的轨迹，是以 AO 为弦，所含圆周角等于 $135°$ 的弓形弧．显然，当半径 OC 取一切位置时，则点 I 的轨迹，显然是关于 AB 对称的四个弧 $\overset{\frown}{AIO}$、$\overset{\frown}{AEO}$、$\overset{\frown}{OGB}$、$\overset{\frown}{OFB}$.

1806. $\triangle ABC$ 在已知的锐角 XOY 内，从三个顶点 A、B、C 到 OX 的距离的和，等于这三点到 OY 的距离的和，求三角形 ABC

重心的轨迹．

解　设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，从 A、B、C、G 分别向 OX、OY 作垂线，垂足分别为 A'、B'、C'、G' 与 A''、B''、C''、G''，则



$$AA'+BB'+CC'=3GG',$$

$$AA''+BB''+CC''=3GG''.$$

而假定　$AA'+BB'+CC'=AA''+BB''+CC''$．

$$\therefore\quad GG'=GG''.$$

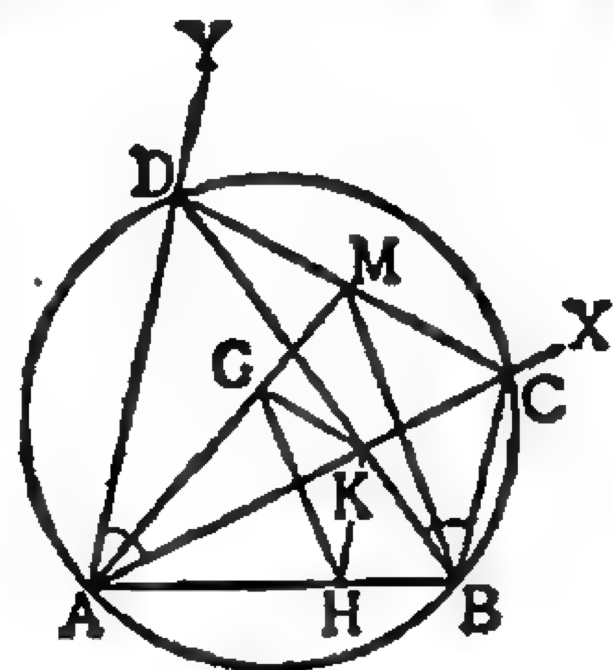
因此，适合条件的三角形的重心 G，在 $\angle XOY$ 的平分线 OZ 上．

反之，在 OZ 上取任意点 G，若作以 G 为重心的三角形 ABC，则与上面同理可以知道 G 适合条件．

因此，所求的轨迹，是 $\angle XOY$ 的平分线 OZ．

1807．　设 AB 是定线段，$\angle XAY$ 的位置和大小一定，当以 AB 为弦的圆与 AX、AY 的交点分别为 C、D 时，求 $\triangle ACD$ 的重心的轨迹．

解　过 AB 作任意圆与 AX、AY 分别交于 C 和 D．设 M 为 CD 的中点，连结 AM．



又设 G 为 $\triangle ACD$ 的重心，连结 CB、DB、MB．从点 G 作 MB 的平行线与 AB 的交点为 H，又从点 G 作 MC 的平行线与 AC 的交点为 K，连结 HK，则 $HK\parallel BC$．

$$\therefore\quad \triangle GHK\backsim\triangle MBC.$$

但是，在 $\triangle DBC$ 中，

$$\angle DBC=\angle XAY,$$

$$\angle BCD=180^\circ-\angle BAY,$$

所以，$\triangle DBC$ 的形状一定．又 M 是 CD 的中点，所以 $\triangle MBC$ 的形状也为一定．由此可知，$\triangle GHK$ 的形状也一定．又，

$$BH:AH=1:2,$$

即点 H 是定点．点 K 在定直线上移动．因此，第三顶点 G 的轨迹是一直线（问题 **1862**）．

1808．　过定角 XOY 内的定点 A 和顶点 O 的圆，与角的两边 OX、OY 分别交于 P、Q，求三角形 OPQ 的重心和垂心的轨迹．

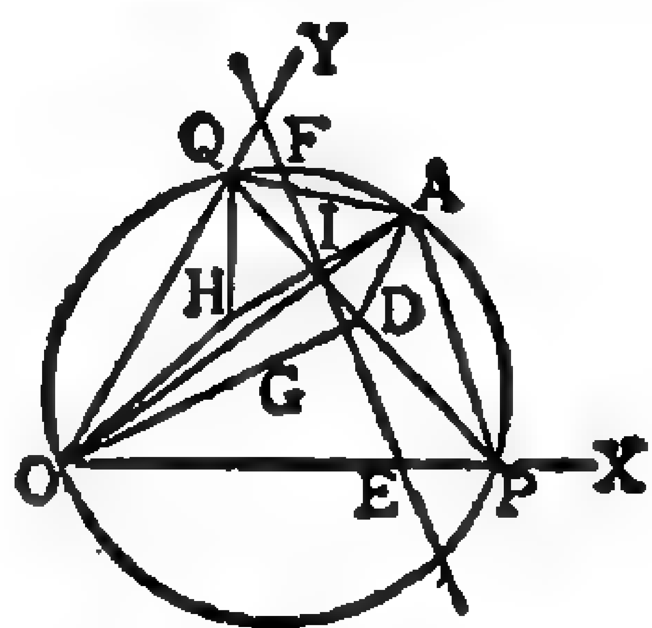
解　(1) 设过 A、O 的圆与 OX、OY 的交点，分别为 P、Q．$\triangle OPQ$ 的重心 G 在中线 OD 上，且

$$OG=\frac{2}{3}OD.$$

在 $\triangle APQ$ 中，

$$\angle PQA=\angle POA,\ \angle QPA=\angle QOA,$$

而 $\angle POA$、$\angle QOA$ 都是定角．所以 $\angle PQA$、$\angle QPA$ 也都是定角．



因此，$\triangle APQ$ 的形状一定．

由此可得，$\triangle APD$ 的形状也一定．因为顶点 A 是定点，顶点 P 在 OX 上移动，所以顶点 D 的轨迹是一直线（问题 **1862**）．又

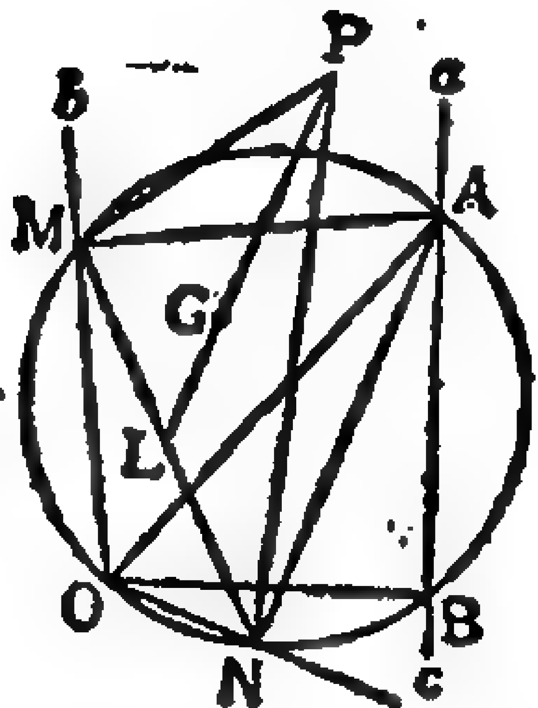
$$OG=\frac{2}{3}OD,$$

所以点 G 的轨迹是与点 D 的轨迹平行的一条直线．

(2) 连结 $\triangle OPQ$ 的垂心 H 和 A 的直线，被点 A 的西摩松线 EIF 所平分（问题 **672**）．可是，若从 A 向 OX、OY 作垂线，它的垂足分别为 E、F（定点），则点 A 的西摩松线正是过 E、F．因此，点 H 的轨迹是平行于 EIF 的一条直线．

1809．　从定直线 a 上的任意点 A，向定直线 b、c 作垂线，设垂足分别为 M、N，又设 P 为已知的定点，求 $\triangle PMN$ 的重心的轨迹．

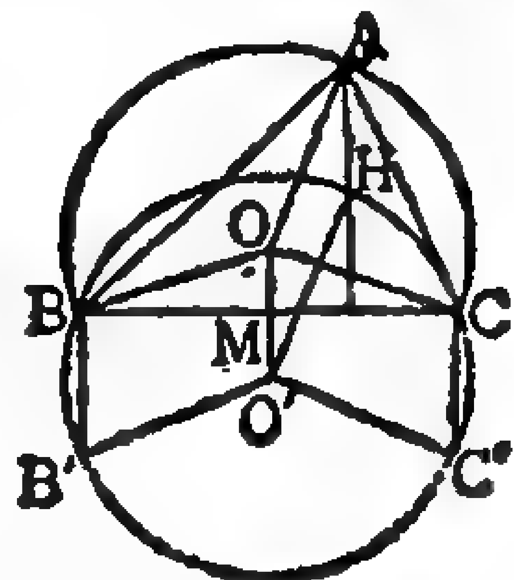
解　设 O 为两直线 b、c 的交点，从 O 向直线 a 作垂线，垂足为 B，则 O、B 都是定点．若以 OA（A 不是定点）为直径作圆，则这圆过 N、B、A、M、O．设 MN 的中点为 L，和在上题中求 PQ 的中点 D 的轨迹一样，可以知道 L 的轨迹是一条直线．因为 $\triangle PMN$ 的重心 G，是按 $2:1$ 内分 PL 的点，所以点 G 的轨迹是一条直线．



1810. 在以定线段BC为弦的已知弓形弧上，取任意点A，作$\triangle ABC$，设$\triangle ABC$的垂心为H，求H的轨迹。

解 设O为$\triangle ABC$的外心，从O向BC作垂线OM，则

$2OM=AH$（问题**500**）。



延长OM，取$MO'=OM$，则$OO'=AH$，且

$$OO' \parallel AH.$$

$\therefore$ $O'H=OA$（一定）。

但因BC是定线段，O是定点，OA是定长，所以O'是定点，$O'H$是定长。所以，点H在以O'为圆心，以等于OA为半径的圆上。又因为A在弧BAC上移动，所以，当点A趋近于点B时，点H随着就趋近于点B'，这里$O'B' \perp OB$；当点A趋近于点C时，点H随着就趋近点C'，这里$O'C' \perp OC$。因此，点H在弧$B'BHCC'$上。

反之，设H'为这弧上的任意点，作$\square OO'H'A'$，因为$OA'=O'H'$，而$O'H'$等于圆O的半径，所以A'在圆O上，且

$$A'H'=OO'=2OM.$$

由此可知，点H'恰是$\triangle A'BC$的垂心。所以，点H'适合条件。

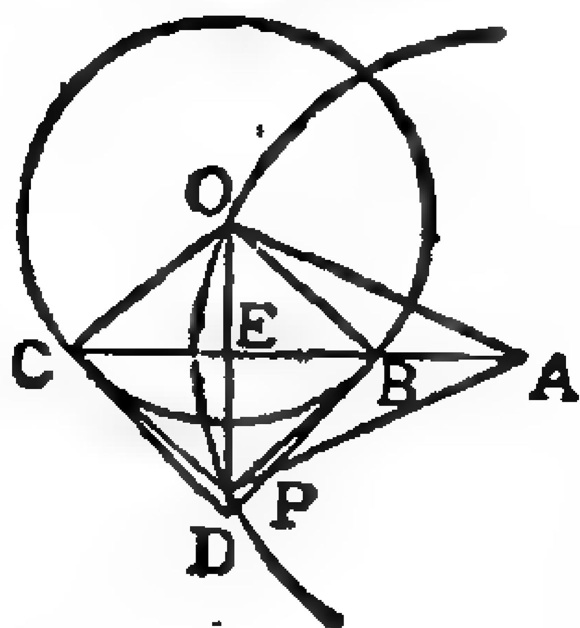
因此，所求的轨迹是弧$B'BCC'$。

1811. 从定点A向定圆O作任意的割线ABC，过点B和点C作圆O的切线，两切线的交点为D，求$\triangle DBC$的垂心的轨迹。

解 设P为$\triangle BDC$的垂心，因为OB、CP都垂直于BD，所以$OB \parallel CP$。同理可得

$$BP \parallel OC.$$

又 $OB=OC$,



所以四边形$OBPC$是菱形。设OP、BC的交点为E，则

$$OE=EP,$$

$$\angle OEA=\angle OEB=90°.$$

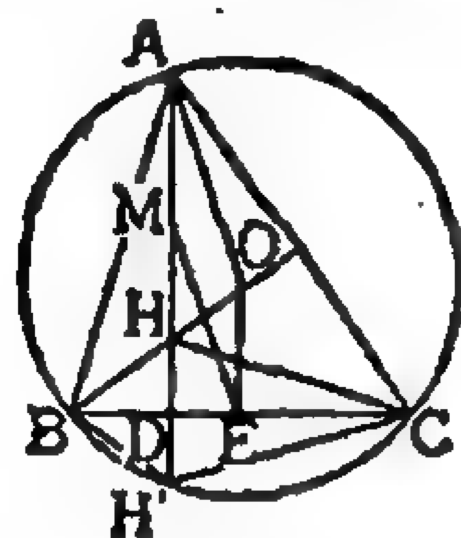
所以，EA是OP的中垂线，$AO=AP$。又A、O都是定点，所以AO是定长的线段。因此，P在以A为圆心、AO为半径的圆上。由此可得，点P的轨迹，是以A为圆心，以AO为半径的圆。

但是，如果定点A在圆外时，从A向圆O作两切线，连结O和切点的直线的延长线与圆A（半径为AO）的交点，很显然是轨迹的界限。

1812. 若$\triangle ABC$的两个顶点B、C的位置一定，连结另一顶点A和垂心H的线段AH是定长时，试分别求出点A、点H及AH中点的轨迹。

解 设O为$\triangle ABC$的外心，B、C的位置一定，AH是定长。因为O到BC的距离

$$OE=\frac{1}{2}AH,$$



所以，$\triangle ABC$的外心O的位置确定。因此，适合题意的三角形，都内接于同一个圆。从而得出A的轨迹是一个圆。

若延长AH与$\triangle ABC$的外接圆交于H'，则

$$\triangle BHC \cong \triangle BH'C.$$

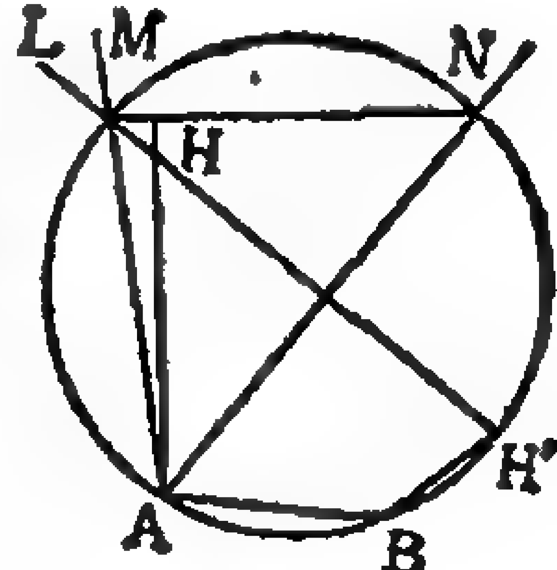
因此，这两个三角形的外接圆也相等。设点O'是点O关于BC的对称点，则以O'为圆心与圆O全同的圆是点H的轨迹（若交换A和H的位置来考虑也行，即设A的轨迹是圆O'，则H的轨迹是圆O）。

又，若M为AH的中点，从O向边BC作垂线OE，因为四边形$AOEM$是平行四边形，所以$ME=AO$。

因此，点M的轨迹是以点E为圆心，与圆O全同的一个圆。

1813. 过两定点A、B的圆，与过A作的两条定直线分别交于M、N时，求$\triangle AMN$的垂心的轨迹。

解 设$\triangle AMN$的垂心为H，连结MH，延长MH与圆交于H'，则点H'是点H关于AN的对称点（根据问题**498**）。又A、M、H'、B共圆，所以



$$\angle ABH'=\angle AML$$

$$=\angle MAN+90°（一定），$$

即$\angle ABH'$是定角。由此可知，点H'在过B的直线上。所以，点H的轨迹，是关于AN与BH'对称的直线。

1814. 设定点A、B分别在定角XOY的两边OX、OY上，在OX、OY上取相等长

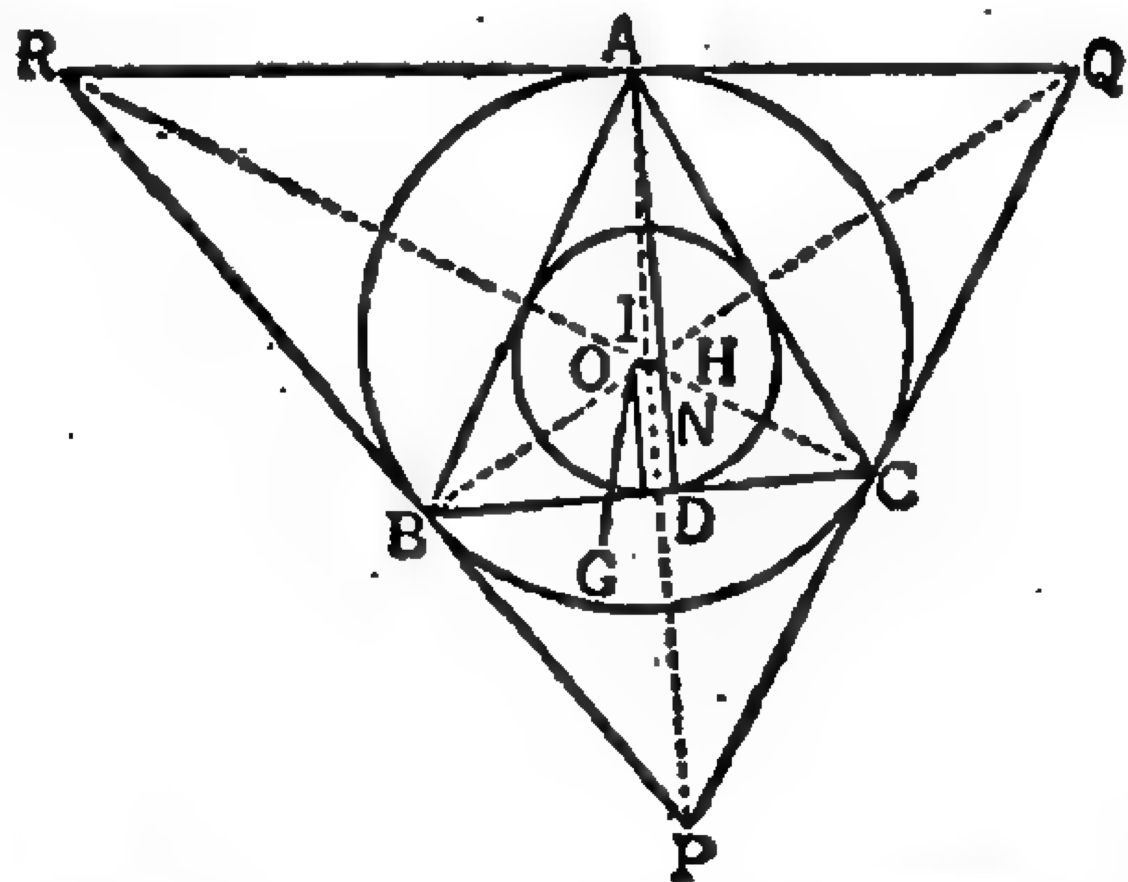
度的线段 AP、BQ，求三角形 OPQ 的垂心 H 的轨迹。但是，P、Q 相对于 A、B，与 O 都在同侧或相反一侧。

解 设 $\triangle OAB$ 的两条边上的垂线 AA' 和 BB' 的交点为 C，$\triangle OPQ$ 的两条边上的垂线 PP' 和 QQ' 的交点为 H。因为 $AP=BQ$，所以 AP 投向 OY 上的正射影，与 BQ 投向 OX 上的正射影相等。即

$$A'P'=B'Q'.$$

由此可得，线段 CH 投向 OX、OY 上的正射影相等。所以 CH 平行于 $\angle XOY$ 的平分线。又因为 C 是定点，所以，所求的轨迹是过 C 而平行于 $\angle XOY$ 的平分线的直线。但是，从 O 作 OX 或 OY 的垂线，若这垂线与 CH 的交点为 O'，则 O' 是轨迹的界限。因此，所求的轨迹是射线 $O'H$。

1815. 设 $\triangle ABC$ 内接于定圆 O，且外切于另一个定圆 I，求 $\triangle ABC$ 的垂心、重心及旁心的轨迹。



解 设 N 为 $\triangle ABC$ 的九点圆的圆心，则 $\triangle ABC$ 的内切圆 I 与九点圆 N 相内切（问题 **687**）。又设 R、r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆、内切圆的半径，因为 $\triangle ABC$ 的九点圆的半径等于它的外接圆的半径的一半，所以

$$IN=\frac{1}{2}R-r\text{（一定）}.$$

因此，点 N 的轨迹是以 I 为圆心，以 $\left(\frac{1}{2}R-r\right)$ 为半径的圆。

设 H 为垂心，G 为重心，则 O、H、G、N 在同一直线上，且 $OH=2ON$（参考问题 **679**）。因为

$$OG=\frac{2}{3}ON,$$

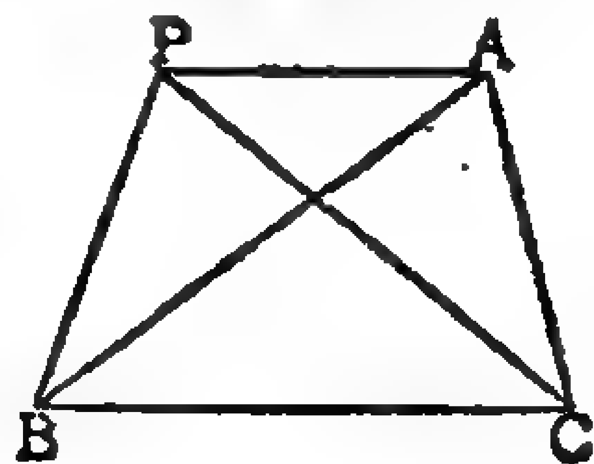
所以点 H 及点 G 的轨迹，也分别是一个圆。

其次，设 P、Q、R 是 $\triangle ABC$ 的三个旁心，则圆 O 变为 $\triangle PQR$ 的九点圆，I 便是 $\triangle PQR$ 的垂心。因此，若设 O' 为 $\triangle PQR$ 的外心，则 O 是 IO' 的中点。即在 IO 的延长线上取 $OO'=IO$，O' 就是 $\triangle PQR$ 的外接圆的圆心。又因 $\triangle PQR$ 的外接圆的半径为 $2R$，所以旁心 P、Q、R 的轨迹，是以 O' 为圆心，以 $2R$ 为半径的圆。

11. 直线形面积的轨迹

1816. 设 A、B、C 为已知三角形的顶点，求使 $\triangle PAB$ 的面积 $=\triangle PAC$ 的面积的点 P 的轨迹。

解 我们分别研究 P 在 $\angle BAC$ 或它的对顶角的外部和相反的两种情况。

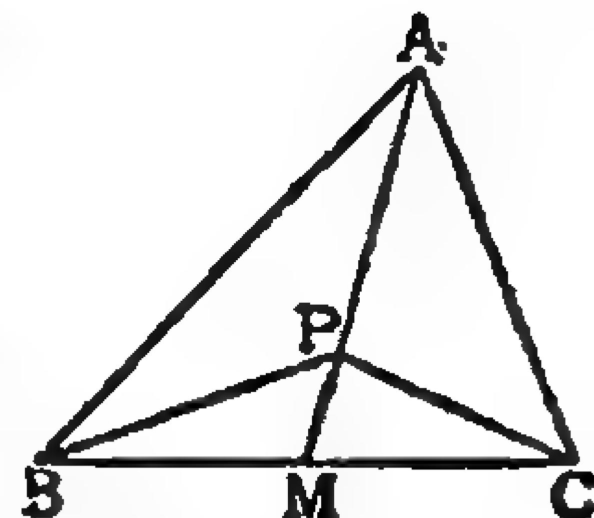


当 P 在 $\angle BAC$ 或它的对顶角的外部时：

$\because$ $\triangle PAB$ 的面积 $=\triangle PAC$ 的面积，

$\therefore$ $AP \parallel BC$。

因此，P 在过 A 而平行于 BC 的直线上。当 P 在 $\angle BAC$ 或它的对顶角的内部时，因为



$\triangle PAB$ 的面积 $=\triangle PAC$ 的面积，

则显然 AP 或它的延长线过 BC 的中点。

反之，可以证明，过 A 而平行于 BC 的直线，或过 A 与 BC 中点 M 的直线上的点，都适合条件。

因此，所求的轨迹，是过 A 而平行于 BC 的直线，及过 A 与 BC 的中点 M 的直线。

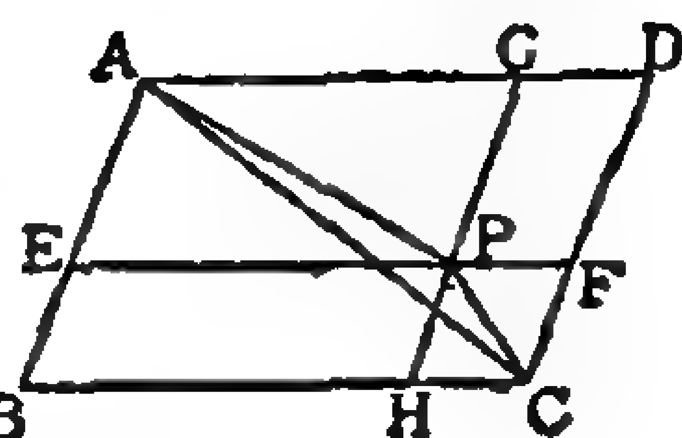
1817. 在已知平行四边形 $ABCD$ 内取一点 P，过 P 作平行于 AB、BC 的直线 GH、EF。当 $\square PEBH$ 的面积 $=\square PFDG$ 的面积时，求点 P 的轨迹。

解 设过 P 作平行于 AB 的直线，与 AD、BC 的交点分别为 G、H，又过 P 作平行于 BC 的直线，与 AB、CD 的交点分别为 E、F。因为四边形 $AEPG$ 和四边形 $CFPH$ 都

是平行四边形，所以

$S_{\triangle AEP}=S_{\triangle PGA}$,

$S_{\triangle HPC}=S_{\triangle FCP}$.



而

$\square PEBH$ 的面积

$=\square PFDG$ 的面积.

因此，四边形 $ABCP$ 与 $ADCP$ 等积. 所以，点 P 在对角线 AC 上.

反之，由问题 **787**，知道 AC 上的点都适合条件。

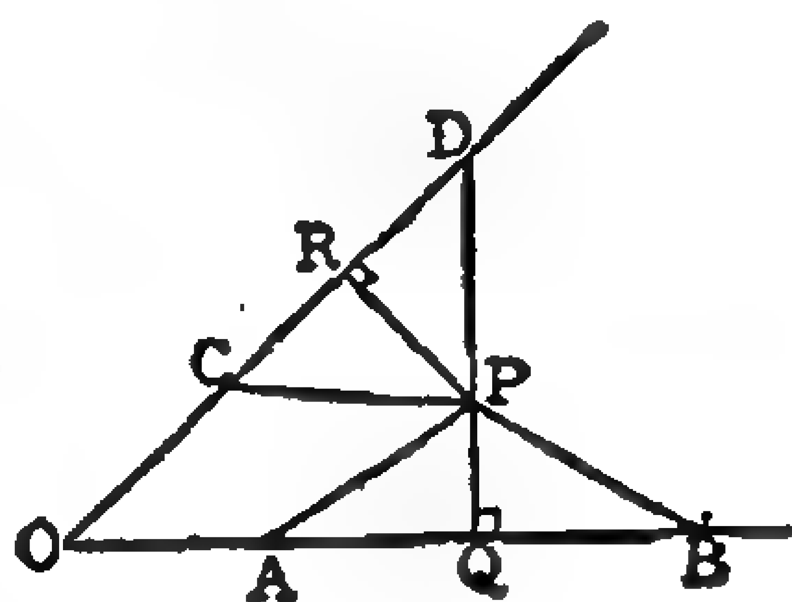
因此，所求的轨迹是对角线 AC。

1818. 当线段 AB 和 CD 的位置和长度一定时，求使 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 等积的点 P 的轨迹.

解 设 O 为 BA 和 DC 的延长线的交点. 从 P 向 AB、CD 分别作垂线 PQ、PR，则

$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}AB\cdot PQ$,

$S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}CD\cdot PR$.



$\therefore\quad AB\cdot PQ=CD\cdot PR$.

$$\therefore\quad \frac{PQ}{PR}=\frac{CD}{AB}\ (一定).$$

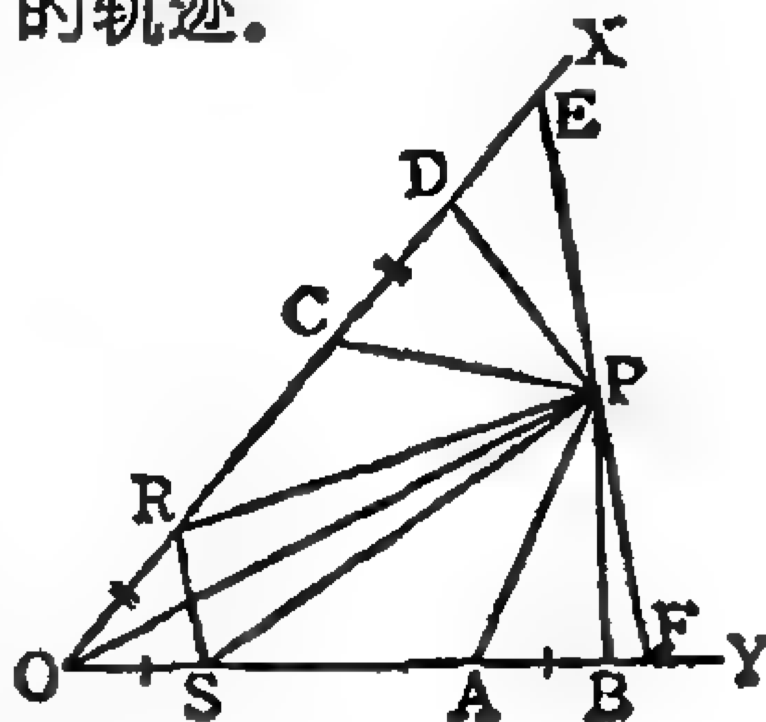
这就是说，从 P 到 AB 和 CD 的距离的比等于定值的比 $CD:AB$. 所以点 P 的轨迹，是过 O 的两条直线(问题 **1855**).

1819. 在定角 XOY 的一边 OX 上，有两定点 C、D，在另一边 OY 上，有两定点 A、B，以这个角内的一点 P 为顶点，作两个三角形 PAB、PCD，求使这两个三角形的面积的和为定值的点 P 的轨迹.

解 设在 OY、OX 上分别取 OS、OR，使

$OS=AB$,

$OR=CD$,



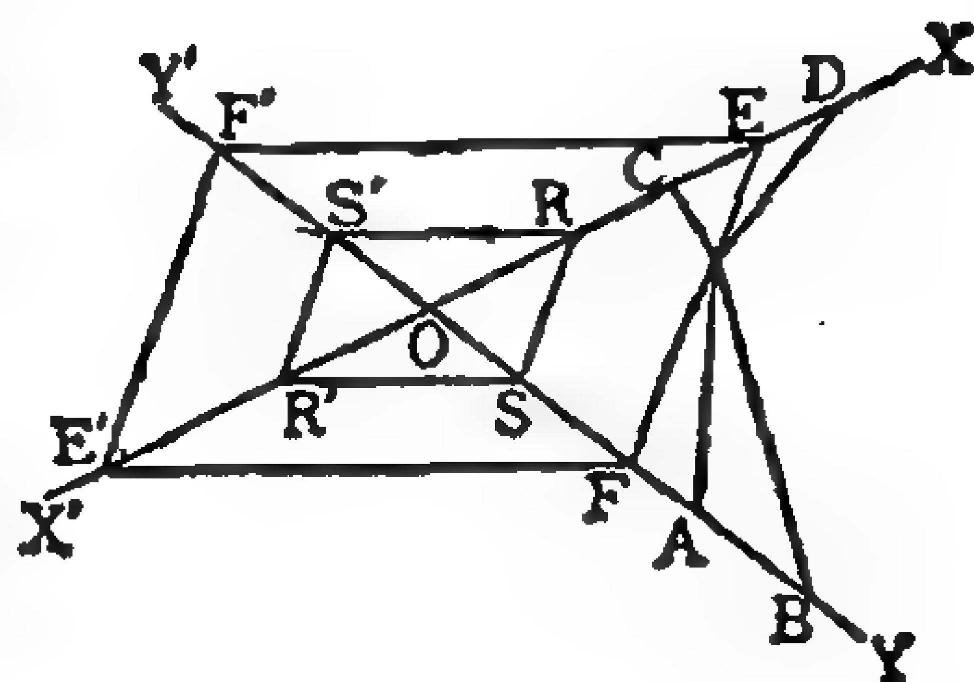
则 $\triangle PAB$ 和 $\triangle POS$ 的底边 AB、OS 相等，且顶点 P 是公共点，所以它们等积. 即 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle POS}$.

同理可得，$S_{\triangle PCD}=S_{\triangle POR}$.

$\therefore$ 四边形 $PROS$ 的面积 $=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}$ $=$ 定值.

但因为 OS、OR 都是定长，$\angle ROS$ 是定角，所以 $S_{\triangle ORS}$ 为定值. 从而得出，$S_{\triangle PRS}$ 也是定值. 因此，点 P 在平行于 RS 的线段 EF 上.

反之，容易证明，线段 EF 上的点适合条件。



因此，所求的轨迹是线段 EF。

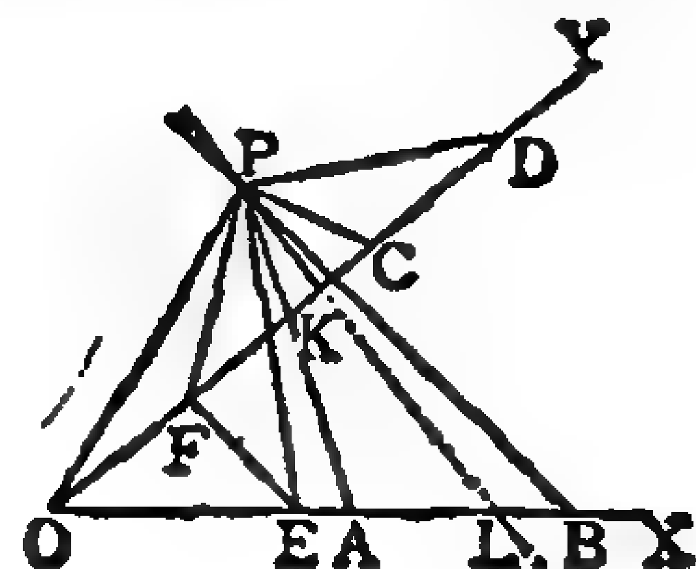
注 若点 P 不限定在 $\angle XOY$ 的范围内，则轨迹是如图的平行四边形 $EFE'F'$.

1820. OX、OY 是定直线，A、B 是 OX 上的定点，C、D 是 OY 上的定点. 在 $\angle XOY$ 的外部取一点 P，使两三角形 PAB 和 PCD 的面积的差为定值 k^2，求点 P 的轨迹.

解 在 OX、OY 上分别取点 E、F，使

$OE=AB$、

$OF=CD$,



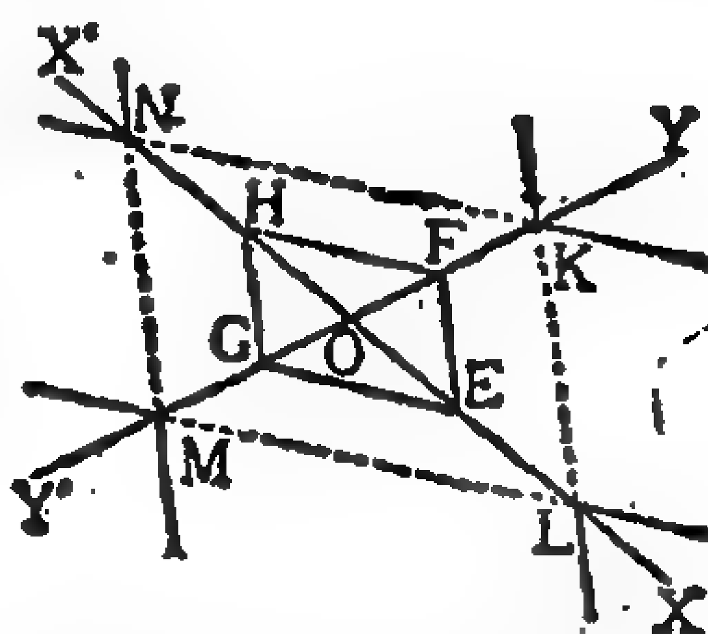
则

$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle POE}$,

$S_{\triangle PCD}=S_{\triangle POF}$.

$\therefore\quad S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PCD}$ $=S_{\triangle POE}-S_{\triangle POF}$ $=k^2$.

而 $S_{\triangle POE}-S_{\triangle POF}$ $=S_{\triangle OEF}+S_{\triangle PEF}$.



又 OE、OF 是定长的线段，$\angle EOF$ 是定角. 所以 $\triangle OEF$ 的面积是定值.

$$\therefore\quad S_{\triangle PEF}=k^2-S_{\triangle OEF}=定值.$$

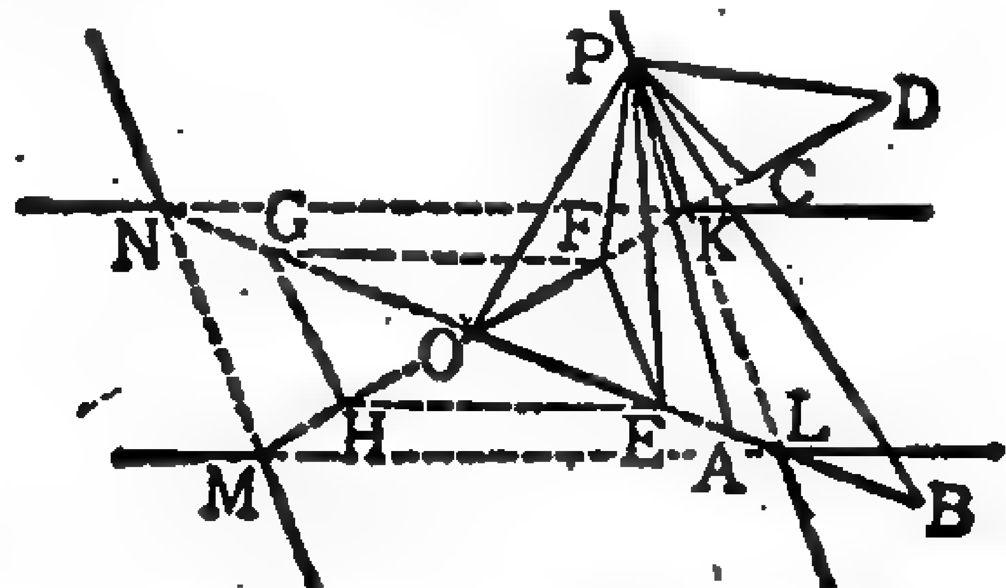
从而得出，点 P 的轨迹，是平行于 EF 的直线 KL 的延长部分.

注 若点 P 不限定在 $\angle XOY$ 的外部，则所求的轨迹是平行四边形 $KLMN$ 的各条边的延长部分.

1821. 设点 P 为两个三角形 PAB、PCD 的公共顶点，这两个三角形的底边 AB 和 CD 的长度、位置一定，它们的面积的差为定值 k^2，求公共顶点 P 的轨迹.

解 设 DC、BA 的延长线的交点为 O. 因

为 DC、BA 的位置一定，所以 $\angle DOB$ 为定角。由此可见，这个问题与上题中的注完全一样。从而得出，所求的轨迹如上题图中的 $\square KLMN$ 的各条边的延长部分。



1822. 在已知 $\triangle ABC$ 内取一点 P，使 $S_{\triangle APB}-S_{\triangle APC}=S_{\triangle BPC}$，求点 P 的轨迹。

解 由

$$S_{\triangle APB}-S_{\triangle APC}=S_{\triangle BPC},$$

得

$$S_{\triangle APB}=S_{\triangle APC}+S_{\triangle BPC}.$$

由此可得，

$$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

所以，若 M、N 分别为边 CA、BC 的中点，则 P 在线段 MN 上。

反之，设 P' 为 MN 上的任意点，则

$$S_{\triangle AP'B}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

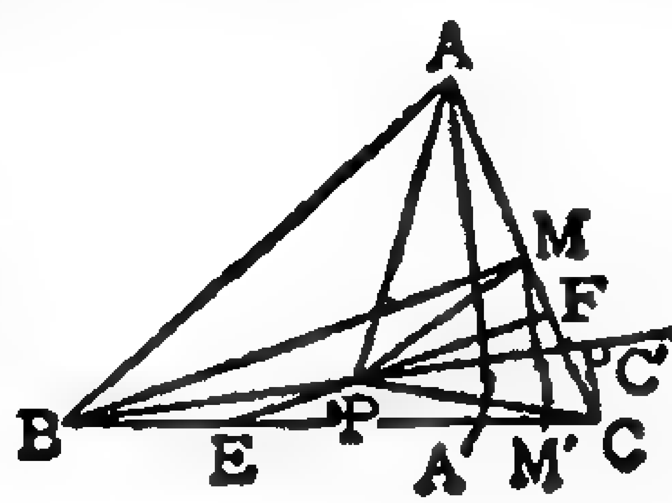
$$\therefore\quad S_{\triangle AP'B}=S_{\triangle AP'C}+S_{\triangle BP'C}.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle AP'B}-S_{\triangle AP'C}=S_{\triangle BP'C}.$$

由此可知，点 P' 适合条件。因此，点 P 的轨迹，是连结 AC、BC 的中点 M、N 的线段 MN。

1823. 在已知 $\triangle ABC$ 内取一点 P，使 $S_{\triangle APB}-S_{\triangle BPC}=$定值 m^2，求点 P 的轨迹。

解 设 M 为 AC 的中点，从 A、M、C 向 BP 作垂线，垂足分别为 A'、M'、C'，则



$$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}BP\cdot AA',$$

$$S_{\triangle BPC}=\frac{1}{2}BP\cdot CC'.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle APB}-S_{\triangle BPC}=\frac{1}{2}BP(AA'-CC')$$
$$=BP\cdot MM'$$
$$=2S_{\triangle BPM}.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle BPM}=\frac{1}{2}m^2.$$

因为 $\triangle BPM$ 的面积是定值，所以，点 P 在平行于 BM 的线段 EF 上。

反之，在 EF 上取任意点 P'，则

$$S_{\triangle AP'B}-S_{\triangle BP'C}=2S_{\triangle BP'M}=m^2.$$

由此可知，点 P' 适合条件。

因此，所求的轨迹是线段 EF。

1824. 过已知 $\square ABCD$ 内一点 P，作各边的平行线，当两个平行四边形 $PEBH$ 与 $PFDG$ 的面积的差是定值时，求点 P 的轨迹。

解 因为 $ABCD$ 是平行四边形，所以

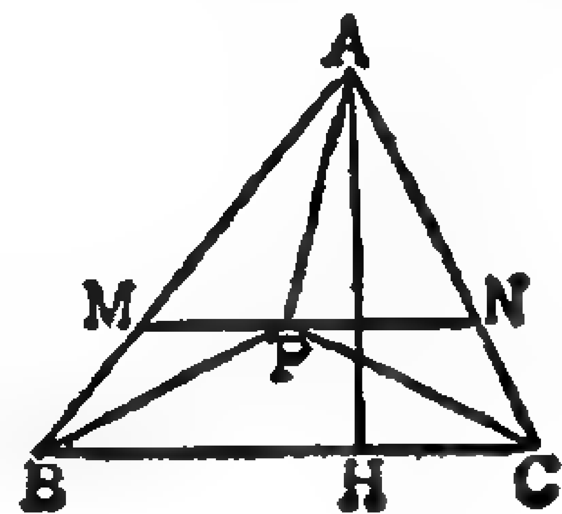
$\square PEBH$ 的面积$\sim\square PFDG$ 的面积
$=2\triangle PAC$ 的面积(问题 **796**)。

设

$\square PEBH$ 的面积$-\square PFDG$ 的面积
$=m^2$ （m^2 是定值），

则

$\triangle PAC$ 的面积
$=\frac{1}{2}m^2$.



因此，当 P 在 AC 两侧时，过 P 作平行于 AC 的线段 LM、$L'M'$，则 P 在线段 LM、$L'M'$ 上。

反之，在这两条线段上取任意点 P'，过 P' 作 AB、BC 的平行线，与 AB、BC、CD、DA 的交点分别为 E'、H'、F'、G'，则

$\square P'E'BH'$ 的面积$\sim\square P'F'DG'$ 的面积
$=2\triangle P'AC$ 的面积.

而 $\triangle P'AC$ 的面积$=\triangle PAC$ 的面积$=\frac{1}{2}m^2$.

$\therefore$ $\square P'E'BH'$ 的面积$\sim\square P'F'DG'$ 的面积
$=m^2$.

由此可知，LM、$L'M'$ 上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是 LM、$L'M'$。

1825. 在定三角形 ABC 内取点 P，使 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$，它们的面积成等差数列，求点 P 的轨迹。

解 若 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$，它们的面积成等差数列，则

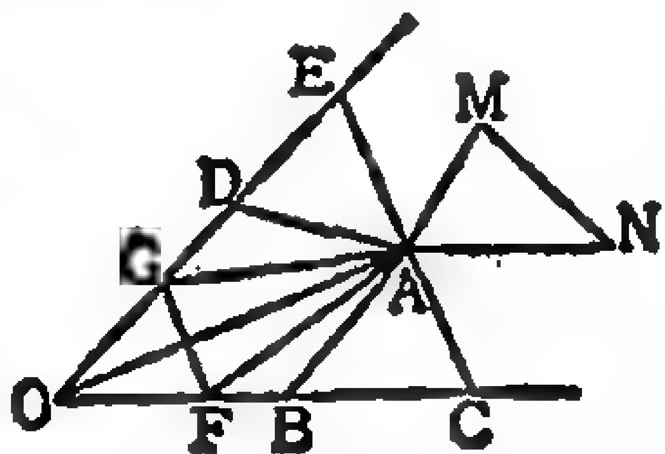
$$2S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCA}.$$

而 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PCB}=S_{\triangle ABC}.$

$$\therefore\quad S_{\triangle PBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

因此，若作直线平行 BC 且与 BC 的距离等于 $\frac{1}{3}AH$，则这直线在 $\triangle ABC$ 内的部分 MN 就是点 P 的轨迹。

1826. 设三个三角形 ABC、ADE、AMN 的公共顶点是 A，它们的底边的长度和位置都一定，又它们的面积的和也是定值，求公共顶点 A 的轨迹。



解 设 O 为 CB 与 ED 的交点。在 OB、OD 上分别取 OF、OG，使 $OF=BC$，$OG=DE$，则

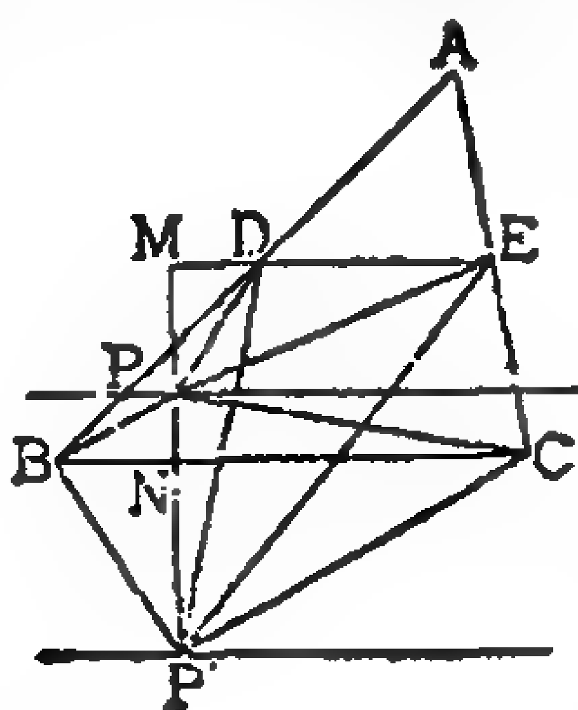
$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADE}=$ 四边形 $AFOG$ 的面积 $=S_{\triangle GOF}+S_{\triangle AGF}.$

$\therefore\quad S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADE}+S_{\triangle AMN}=S_{\triangle GOF}+S_{\triangle AGF}+S_{\triangle AMN}.$

而 $\triangle GOF$ 的两边 OF、OG 及其夹角都是定值，所以 $\triangle GOF$ 的面积也是定值。从而得出 $(S_{\triangle AGF}+S_{\triangle AMN})$ 也是定值。因此，由问题 **1819** 可知，所求的轨迹是四条线段。

注 本题可以推广到四个以上的三角形的情况。

1827. 设 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 的中点分别为 D、E，求使 $S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PDE}$ 的点 P 的轨迹。



解 从 P 向 DE、BC 分别作垂线 PM、PN。

$\because\quad S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PDE},$

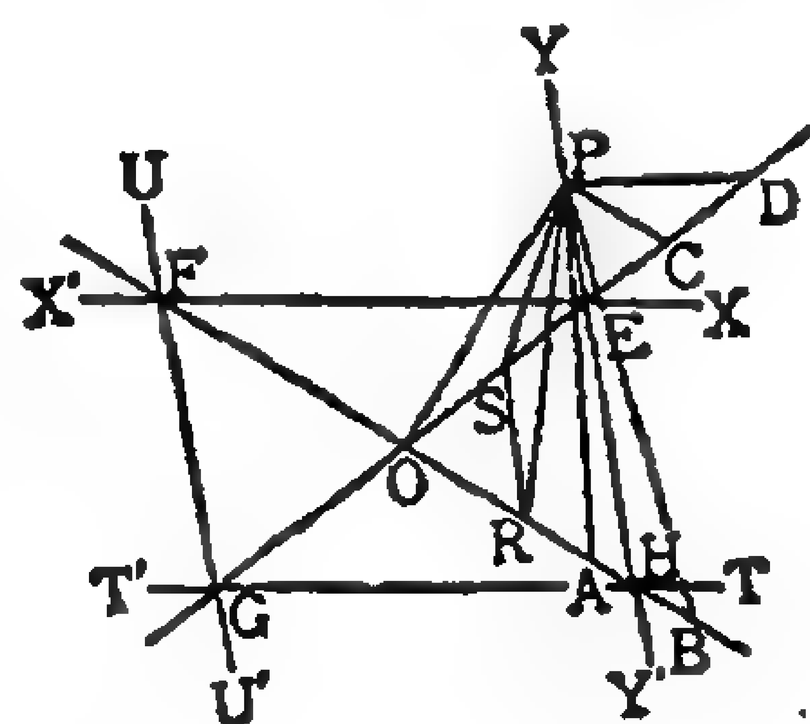
$\therefore\quad \frac{1}{2}BC\cdot PN=\frac{1}{2}DE\cdot PM.$

又因为 $BC\,\underline{\parallel}\,2DE,$

所以 $PM:PN=2:1.$

因此，作 DE、BC 的公垂线 MN，把 MN 内分和外分成 $PM:PN=P'M:P'N=2:1$，得内分点 P 和外分点 P'，又过 P、P' 作平行于 BC、DE 的直线，这两条直线就是所求的轨迹。

1828. $\triangle ABP$、$\triangle CDP$ 的底边 AB、CD 的长度为一定，m、n 为两个整数，当 $m\cdot S_{\triangle ABP}-n\cdot S_{\triangle CDP}$ 为定值时，求点 P 的轨迹。



解 设 O 为 BA、DC 的延长线的交点，在 OA、OC 上，分别取

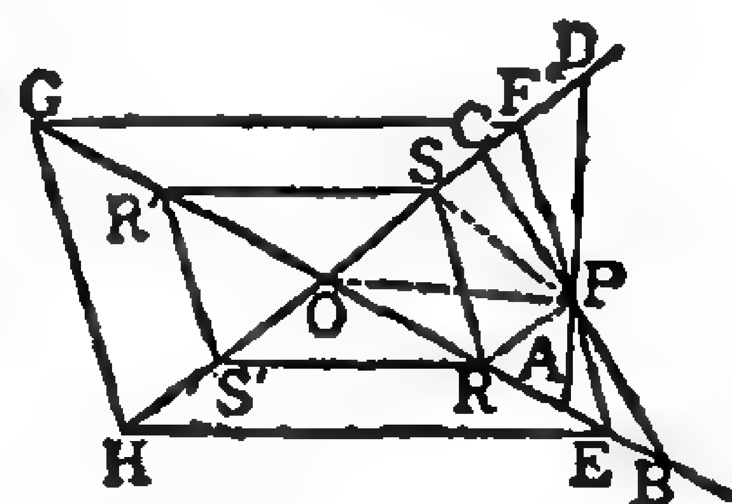
$OR=mAB,$

$OS=nCD,$

则 $m\cdot S_{\triangle ABP}-n\cdot S_{\triangle CDP}=S_{\triangle POR}-S_{\triangle POS}$ (定值)。

因此，根据问题 **1821** 可以知道，如图中的八条射线 EX、EY、FU、FX'、GU'、GT'、HT、HY' 是所求的轨迹。

1829. $\triangle ABP$、$\triangle CDP$ 的底边 AB、CD 的位置和长度为一定，m、n 是两个整数，当 $m\cdot S_{\triangle ABP}+n\cdot S_{\triangle CDP}$ 为定值时，求点 P 的轨迹。

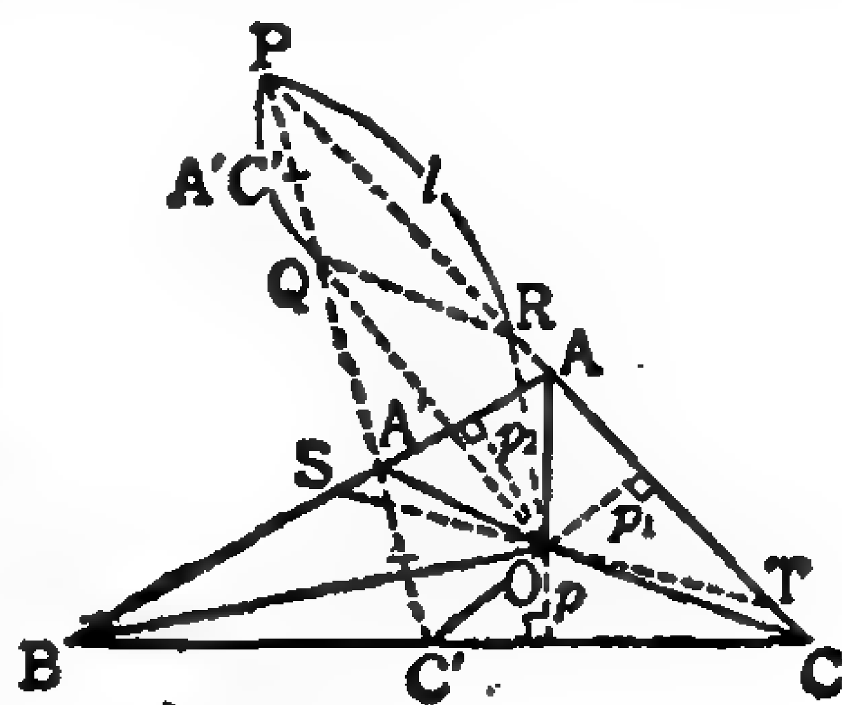


解 设 O 为 BA、DC 的延长线的交点，在 OA、OC 上，分别取 $OR=mAB$，$OS=nCD$，则

$m\cdot S_{\triangle ABP}+n\cdot S_{\triangle CDP}=S_{\triangle POR}+S_{\triangle POS}$ (定值)。

因此，根据问题 **1819** 可以知道，点 P 的轨迹，是图形中的平行四边形 $EFGH$ 的四条边。

1830. 从已知 $\triangle ABC$ 内一点 O，向各边作垂线，求此三垂线之和为一定的点 O 的轨迹。



解 设 O 为适合条件的一点，由 O 向各边作的垂线分别为 p、p_1、p_2，设 AC 是 $\triangle ABC$ 的最小边。在 BA、BC 上，分别取 A'、C'，使

$$BA'=BC'=CA=l,$$

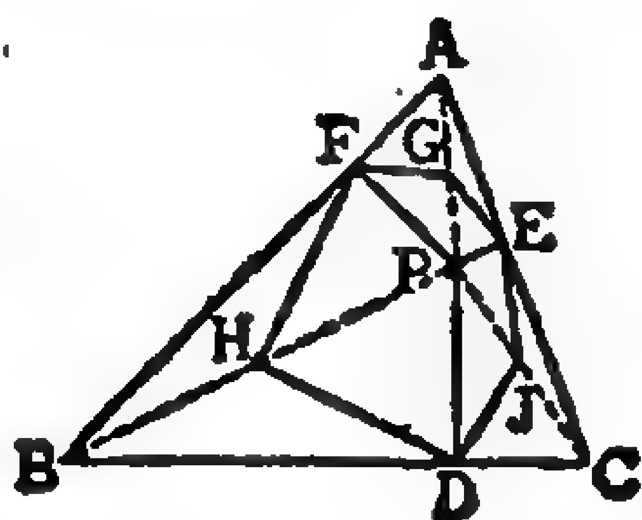
则

$$l(p+p_1+p_2)=2(S_{\triangle OBC'}+S_{\triangle OCA}+S_{\triangle OA'B}).$$

因而，$\triangle OBC'$、$\triangle OCA$、$\triangle OA'B$ 的和是一定的。由于底边 BC'、CA、$A'B$ 的位置、大小一定，所以，由问题1826知道，图中的 $\triangle OQR$ 的面积为一定。因此，点 O 的轨迹，是平行于 QR 的线段 ST。

1831. 从已知三角形内一点 P，向各边作垂线，连结垂足作成三角形，求使这个三角形的面积为一定的点 P 的轨迹。

解 已知三角形 ABC，设 P 为适合条件的一点，由 P 向三角形的三边作垂线，垂足为 D、E、F。连结 AP、BP、CP。



又 AP、BP、CP 的中点分别为 G、H、J，则 G、H、J 分别是圆 $AFPE$、$BDPF$、$CEPD$ 的圆心。若连结 FG，则

$$AG=GP.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle AFP}=2S_{\triangle GFP}.$$

同理可得，

$$S_{\triangle AEP}=2S_{\triangle GEP}.$$

$\therefore$ 四边形 $AEPF$ 的面积

$=2$ 四边形 $GEPF$ 的面积。

同理可得，

四边形 $BDPF$ 的面积

$=2$ 四边形 $HDPF$ 的面积，

四边形 $CEPD$ 的面积

$=2$ 四边形 $JEPD$ 的面积。

因此，$DJEGFH$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的一半。因为 $\triangle DEF$ 的面积是定值，所以

$$S_{\triangle EGF}+S_{\triangle FHD}+S_{\triangle DJE}\text{(定值)}.$$

又 G 是 $\triangle AFE$ 的外心，所以

$$S_{\triangle EGF}=\frac{1}{2}GE\cdot GF\sin 2A$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{AP}{2}\right)^2\sin 2A$$

$$=\frac{\sin 2A}{8}\cdot AP^2.$$

同理可得，

$$S_{\triangle FHD}=\frac{\sin 2B}{8}\cdot BP^2,$$

$$S_{\triangle DJE}=\frac{\sin 2C}{8}\cdot CP^2.$$

设 $\quad\dfrac{\sin 2A}{8}=m,\quad \dfrac{\sin 2B}{8}=n,$

$$\frac{\sin 2C}{8}=p,$$

则

$$S_{\triangle EGF}+S_{\triangle FHD}+S_{\triangle DJE}$$

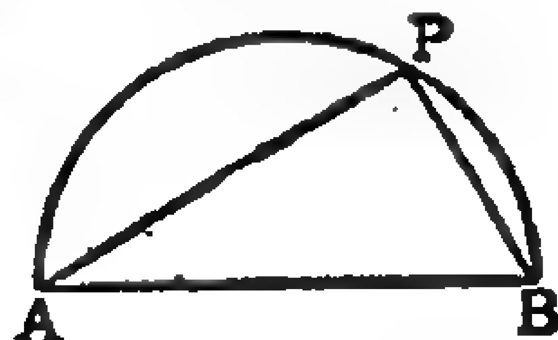
$$=mAP^2+nBP^2+pCP^2\text{(一定)}.$$

因此，点 P 的轨迹是一个圆（根据问题 **1843**）。

注　根据同样的方法，可以把边数进行任意推广。

12. 到两定点(或三定点)距离的平方和或平方差为一定的点的轨迹

1832. 已知两点 A、B，以 A、B 到另一点 P 的距离为边作正方形，若这两个正方形的面积的和等于以距离 AB 为边作正方形的面积，求点 P 的轨迹。



解 设 A、B 为两个已知点，P 为适合条件的点，连结 PA、PB、AB，则

$$PA^2+PB^2=AB^2.$$

$$\therefore\quad \angle APB=90^\circ.$$

因此，点 P 在以 AB 为直径的圆上。

其次，容易证明，在这圆上的点适合条件。

因此，点 P 的轨迹是以 AB 为直径的圆。

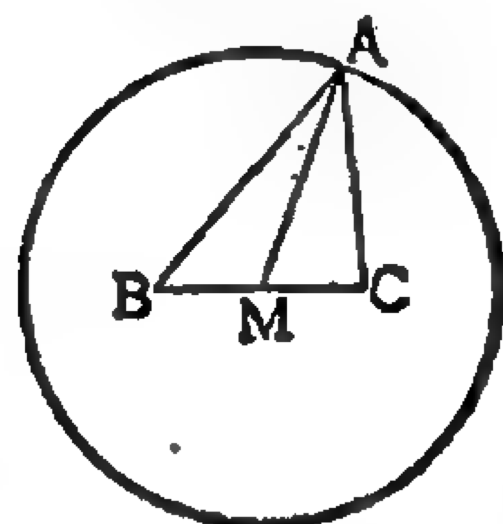
1833. 若点 A 到两定点 B、C 的距离的平方和为定值，求点 A 的轨迹。

解 设 BC 的中点为 M，则

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$（中线定理）。

$$\therefore\quad AM^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-BM^2.$$

而 (AB^2+AC^2)、BM^2 都为定值，若设



$$AB^2+AC^2=m^2,$$

$$BC=a,$$

即 $\quad BM=\dfrac{1}{2}a,$

所以 $\quad AM=\dfrac{1}{2}\sqrt{2m^2-a^2}.$

又 M 是 BC 的中点，所以点 A 在以 M 为圆心，半径的长等于 $\frac{1}{2}\sqrt{2m^2-a^2}$ 的圆上。

反之，设 A' 为这圆上的任意点，则

$$A'M^2=AM^2.$$

$$\therefore\quad A'B^2+A'C^2=2(A'M^2+BM^2)$$
$$=2(AM^2+BM^2)$$
$$=AB^2+AC^2=m^2.$$

因此，这圆上的点适合所给的条件。

从而得出，所求的轨迹是以 BC 的中点 M 为圆心，半径的长等于 $\frac{1}{2}\sqrt{2m^2-a^2}$ 的圆。

1834. 设点 A 到两定点 B、C 的距离的平方差 $(AB^2\sim AC^2)$ 等于定值 m^2，求点 A 的轨迹。

解 设 A 为适合条件的点，即

$$AB^2\sim AC^2=m^2.$$

又设 $BC=a$，从 A 到 BC 上的垂线、中线分别为 AH、AM，则

$$AB^2\sim AC^2=2BC\cdot MH\text{（问题 894）},$$

即

$$m^2=2a\cdot MH.$$

$$\therefore\quad MH=\frac{m^2}{2a}.$$

因此，MH 是定长线段，H 是定点（点 H 在 M 的两侧），即点 H 到 BC 的中点 M 的距离为 $\frac{m^2}{2a}$，过点 H 作垂直于 BC 的直线，则点 A 在这条直线上。

反之，在这直线上取任意点 A'，在 $\triangle A'BC$ 中，

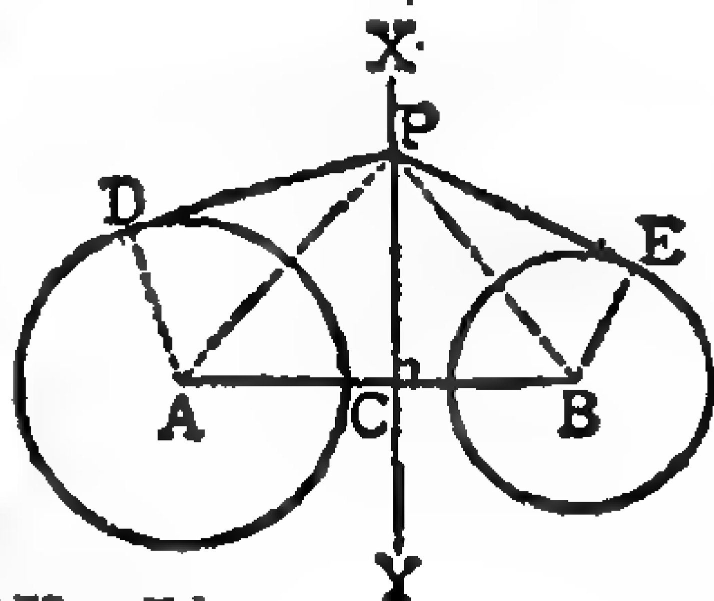
$$A'B^2\sim A'C^2=2BC\cdot MH.$$

$$\therefore\quad A'B^2\sim A'C^2=AB^2\sim AC^2=m^2,$$

由此可得，A' 是适合条件的点。

因此，过 H 而垂直于 BC 的直线，是所求的轨迹（这样的直线有两条）。

1835. 从点 P 向已知两圆作切线，求使切线相等的点 P 的轨迹。



解 设 A、B 为已知两圆的圆心，P 为适合条件的任意点，从点 P 分别向两圆作的切线为 PD、PE，则

$$PD=PE.$$

连结 AB、AD、BE、PA、PB，则 $\triangle PAD$、$\triangle PBE$ 都是直角三角形。

$$\therefore\quad PA^2-AD^2=PD^2,$$
$$PB^2-BE^2=PE^2.$$

而

$$PD^2=PE^2.$$

$$\therefore\quad PA^2-AD^2=PB^2-BE^2.$$

$$\therefore\quad PA^2-PB^2=AD^2-BE^2$$

（这里，设圆 A 为较大的圆）。

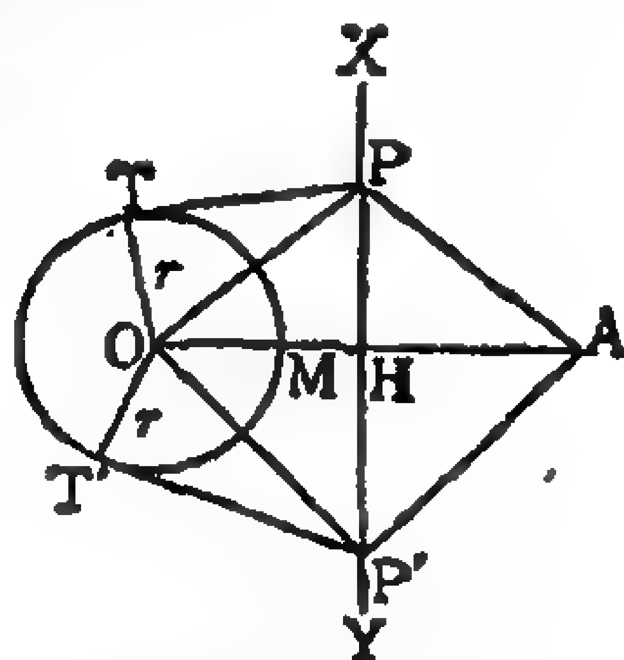
上式的右边是两圆半径的平方差，是定值，设这定值为 a^2，即

$$PA^2-PB^2=a^2.$$

因此，根据上题可知，从 P 向 AB 作垂线，所得的垂足 C 是定点，而点 P 的轨迹，是过点 C 而垂直于 AB 的直线 XY（因两圆的大小已确定，所以轨迹为一直线）。

注 这条直线 XY 称为两圆的根轴。当两圆相交时，则根轴是过两圆交点的直线；当两圆相切时，根轴是过切点的公切线。

1836. 已知定圆 O 和定点 A，从点 P 向圆 O 作切线 PT，求使 PT 等于 PA 的点 P 的轨迹。



解 设 P 为适合条件的点，连结 PO，则

$$PO^2=PT^2+OT^2$$
$$=PT^2+r^2.$$

$$\because\quad PA=PT.\quad\therefore\quad PO^2=PA^2+r^2,$$

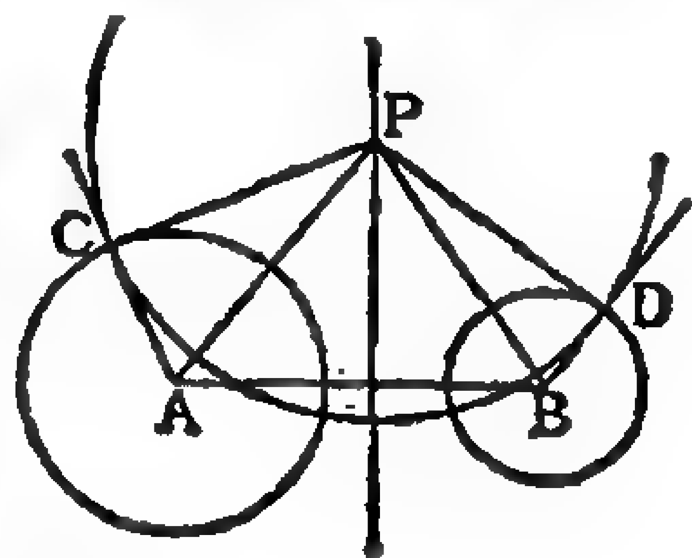
即

$$PO^2-PA^2=r^2.$$

因此，所求的点 P 的轨迹，是垂直于 OA 的直线 XY（问题 1834）。

注 根据上题可知，若把本题中的一个圆的半径看作是 0，则可以得出相同的结论。

1837. 若圆 P 与两定圆相交成直角，求圆 P 的圆心的轨迹。



解 设 A、B 为两定圆的圆心，P 为适合条件的圆的圆心。若圆 P 与圆 A 的交点为 C，则

$$\angle ACP=90^\circ.$$

又圆 P 与圆 B 的交点为 D，则

$$\angle BDP=90^\circ.$$

$$\therefore\quad PA^2\sim PB^2$$
$$=(PC^2+AC^2)\sim(PD^2+BD^2)$$
$$=AC^2\sim BD^2,$$

即 $PA^2\sim PB^2$ 是定值。因此，点 P 的轨迹，

是两圆 A、B 的根轴(问题 **1835**)。

1838. 若 P 为正三角形 ABC 的平面上一点，求使 $PB^2+PC^2=PA^2$ 的点 P 的轨迹。

解 设 P 为适合条件的任意点，D 为 BC 的中点. 在 AD 的延长线上，取点 E 使

$$DE=AD,$$

则

$$PA^2+PE^2=2PD^2+2AD^2, \quad ①$$

$$PB^2+PC^2=PA^2, \quad ②$$

$$PB^2+PC^2=2PD^2+2BD^2. \quad ③$$

由 ①、②、③，得

$$PE^2=2(AD^2-BD^2).$$

又 $$AD=\sqrt{3}BD,$$

$$\therefore\ PE^2=4BD^2.$$

$$\therefore\ PE=AB(\text{定长}),$$

且 E 是定点. 因此，P 在以 E 为圆心，以 AB 为半径的圆上.

反之，设 P' 为这圆上的任意点，则

$$P'A^2+P'E^2=2P'D^2+2AD^2,$$

$$P'B^2+P'C^2=2P'D^2+2BD^2.$$

$$\therefore\ P'A^2+P'E^2-(P'B^2+P'C^2)=2(AD^2-BD^2).$$

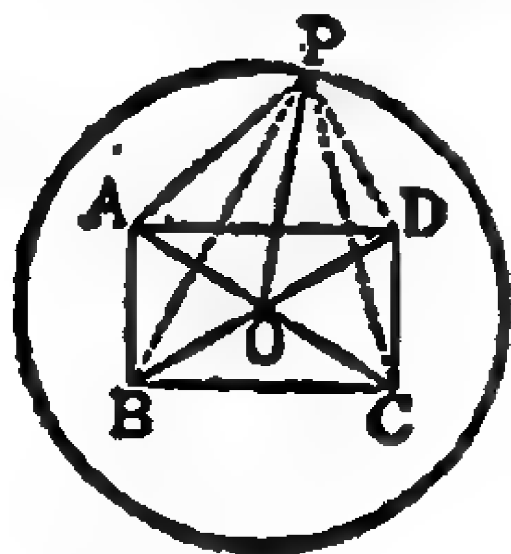
$$\therefore\ P'A^2-(P'B^2+P'C^2)=2AD^2-2BD^2-AB^2\ (\because P'E=AB)$$

$$=(2AB^2-2BD^2)-2BD^2-AB^2$$

$$=2AB^2-AB^2-AB^2=0.$$

由此可知，点 P' 适合条件. 因此，所求的轨迹是以 E 为圆心，以 AB 为半径的圆.

1839. 已知定矩形 $ABCD$，点 P 到这矩形各顶点的距离的平方和是定值，求点 P 的轨迹.



解 设 P 为适合条件的点. AC、BD 的交点为 O，则

$$AO=BO=CO=DO.$$

$$\therefore\ PA^2+PC^2=2PO^2+2AO^2,$$

$$PB^2+PD^2=2PO^2+2BO^2.$$

$$\therefore\ PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=4PO^2+2AO^2+2BO^2$$

$$=4PO^2+4AO^2.$$

而假定 $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ 是定值. 又 AO 是定长，所以 OP 是定长的线段. 因此，所求的轨迹是以 O 为圆心，以 OP 为半径的圆.

1840. 已知定三角形 ABC，求使 $PB^2+PC^2=2PA^2$ 的点 P 的轨迹.

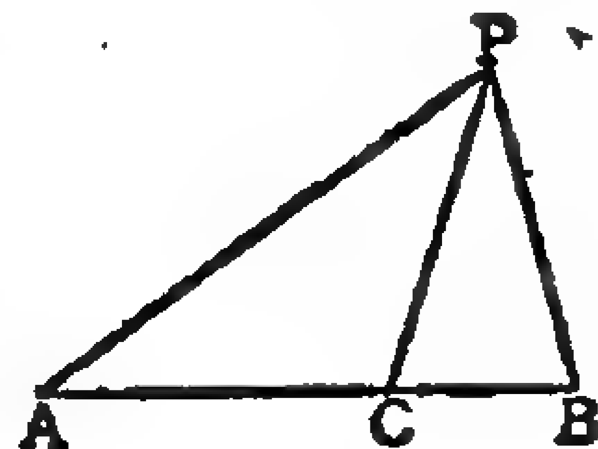
解 设 M 为 BC 的中点，则 PM 是 $\triangle PBC$ 的中线.

$$\therefore\ 2PM^2+2BM^2=PB^2+PC^2=2PA^2.$$

$$\therefore\ PA^2-PM^2=BM^2(\text{一定}).$$

又因为 A、M 是定点，所以，点 P 的轨迹是垂直于 AM 的直线 XY(问题 **1834**).

1841. 连结点 P 与两定点 A、B，使 $m\,PA^2+n\,PB^2$ 是定值 k^2，求点 P 的轨迹.



解 设点 C 是线段 AB 的内分点，且

$$\frac{AC}{BC}=\frac{n}{m}.$$

由题设 $$m\,AP^2+n\,BP^2=k^2,$$

但根据问题 **890** 可得，

$$m\,AP^2+n\,BP^2=m\,AC^2+n\,BC^2+(m+n)PC^2.$$

$$\therefore\ k^2=m\,AC^2+nBC^2+(m+n)PC^2.$$

$$\therefore\ PC^2=\frac{k^2-(m\,AC^2+n\,BC^2)}{m+n}.$$

上式的右边是定值，设这个值为 l^2. 所以

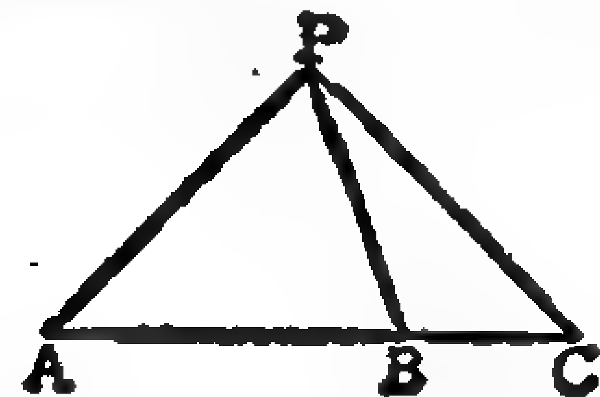
$$PC=l(\text{一定}).$$

因此，点 P 在以 C 为圆心，l 为半径的圆上.

反之，容易证明，这圆上的点适合条件.

从而得出，所求的轨迹是以 C 为圆心、l 为半径的圆.

1842. 连结点 P 与两定点 A、B，使 $m\,PA^2-n\,PB^2$ 是定值 k^2，求点 P 的轨迹.



解 设点 C 是线段 AB 的外分点，且

$$\frac{AC}{BC}=\frac{n}{m}.$$

由问题 **890** 可知，

$$m\,PA^2-n\,PB^2=k^2$$

$$=m\,AC^2-n\,BC^2+(m-n)\cdot PC^2,$$

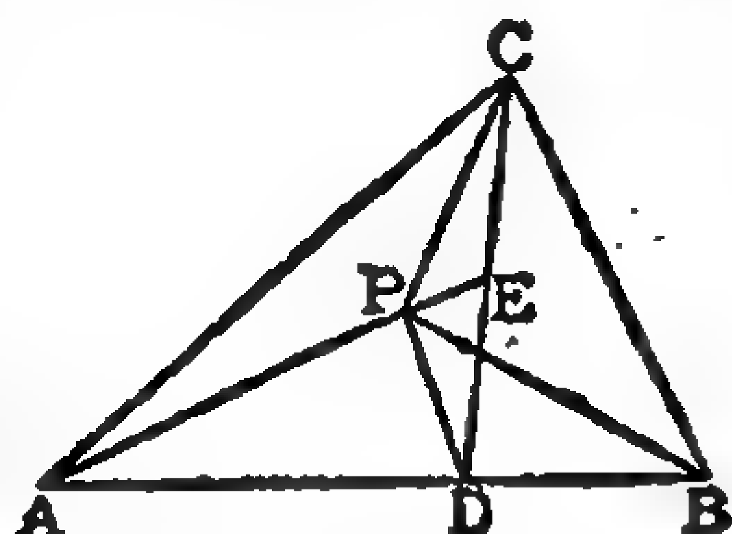
$\therefore\quad PC^2=\dfrac{k^2-(m\,AC^2-n\,BC^2)}{m-n}$(定值)。

设这个定值为 l^2，则

$$PC=l.$$

因此，点 P 的轨迹，是以 C 为圆心，l 为半径的圆。

1843. A、B、C 为已知的三个定点，P 为动点，求使 $m\,AP^2+n\,BP^2+p\,CP^2$ 是定值 k^2 的点 P 的轨迹。



解　设在 AB 上取点 D，使

$$m\,AD=n\,DB,$$

则 D 是定点。由问题 **890**，得

$$m\,AP^2+n\,BP^2=m\,AD^2+n\,DB^2+(m+n)\cdot DP^2.$$

又，在 DC 上取点 E，使

$$(m+n)\cdot DE=p\cdot EC,$$

则 E 也是定点。

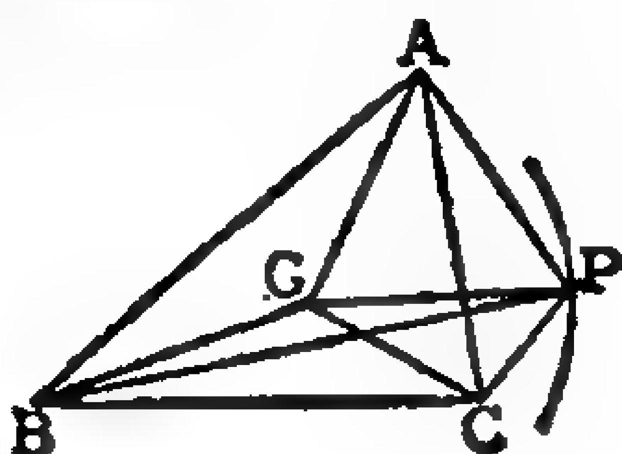
同理可得，

$$(m+n)\cdot DP^2+p\,CP^2=(m+n)\cdot DE^2+pEC^2+(m+n+p)\cdot EP^2.$$

$$\therefore\quad m\,AP^2+n\,BP^2+p\,CP^2=mAD^2+nBD^2+(m+n)\cdot DE^2+p\,EC^2+(m+n+p)\cdot EP^2=k^2.$$

而 $m\,AD^2+n\,BD^2$、$(m+n)DE^2$、pEC^2 都是定值，所以，$(m+n+p)EP^2$ 也是定值，从而得出 EP 是定值。因此，点 P 的轨迹是以 E 为圆心的一个圆。

1844. 设 A、B、C 是已知的三个定点，在这三点的平面上取一点 P，使 $PA^2+PB^2+PC^2$ 为定值 l^2 时，求点 P 的轨迹。



解　设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心。根据问题 **884**，得

$$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2.$$

$$\therefore\quad GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2=l^2.$$

从而得出

$$PG^2=\frac{1}{3}(l^2-GA^2-GC^2-GB^2).$$

因为上式右边的值是定值，所以 PG^2 也是定值。从而得出 PG 也是定值。因此，点 P 在以 G 为圆心，以定长 PG 为半径的圆上。

反之，设 P' 为这圆上的任意点，则

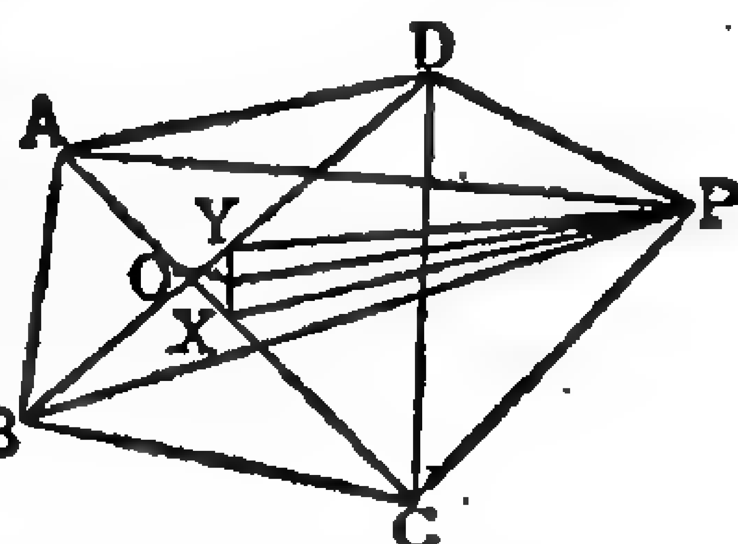
$$GP=GP'.$$

$$\therefore\quad P'A^2+P'B^2+P'C^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GP'^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GP^2=l^2.$$

所以点 P' 适合条件。

从而得出，点 P 的轨迹是以 G 为圆心，定长线段 PG 为半径的圆。

1845. 已知定四边形 $ABCD$，点 P 到这四边形各顶点的距离的平方和是定值 k^2，求点 P 的轨迹。



解　设 AC、BD 为定四边形 $ABCD$ 的对角线，AC、BD 的中点分别为 X、Y，XY 的中点为 O，则 O 是定点。设 P 为适合条件的任意点，则

$$AP^2+BP^2+CP^2+DP^2=k^2.$$

$$AP^2+CP^2=2PX^2+2AX^2,$$

$$BP^2+DP^2=2PY^2+2BY^2,$$

$$2PX^2+2PY^2=4(PO^2+OX^2).$$

$$\therefore\quad 2\{2(PO^2+OX^2)+(AX^2+BY^2)\}=k^2.$$

而在上式中，OX^2、AX^2、BY^2、k^2 都是定值。所以，PO 的长度一定。因此，点 P 的轨迹是以定点 O 为圆心，定长线段 PO 为半径的圆。

注　这个问题，能够推广到一般多边形的情况。设 n 边形的重心为 O，则点 P 的轨迹是以 O 为圆心，半径的长等于

$$\sqrt{\frac{k^2-(AO^2+BO^2+\cdots+NO^2)}{n}}$$

的圆(问题 **887**)。

1846. A、B、C、… 为分布在一个平面上的 n 个点，以点 P 到这些点的距离为边作正方形，若这些正方形的面积的和等于定值 k^2，求点 P 的轨迹。

解　设 O 为 A、B、C、… 的平衡中心，P 为适合条件的点，则可以证明

$$AO^2+BO^2+CO^2+\cdots+n\,OP^2=k^2$$

(研究两点、三点、四点、……逐步进行推广)。

即

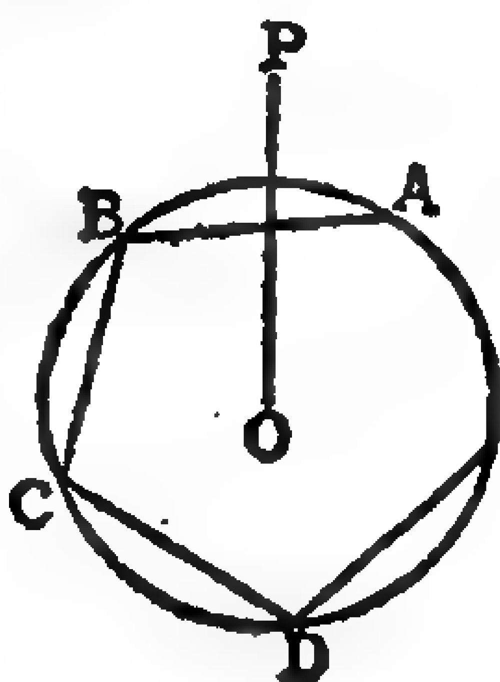
$$OP^2=\frac{1}{n}[k^2-(AO^2+BO^2+CO^2+\cdots)].$$

由此可得，OP 是定长线段。所以，点 P 的轨迹是以 O 为圆心，半径的长等于

$$\sqrt{\frac{1}{n}[k^2-(AO^2+BO^2+CO^2+\cdots)]}$$

的圆。

1847. 以点 P 到正多边形的各顶点的距离为边作正方形，若这些正方形的面积的和是定值，求点 P 的轨迹。



解 因为 O 是正多边形顶点 A、B、C、D、…的平衡中心，由问题 887，得

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2+\cdots$$
$$=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2+\cdots+n\,OP^2.$$

所以，若设

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2+\cdots=k^2,$$
$$OA=OB=OC=OD=\cdots=r,$$

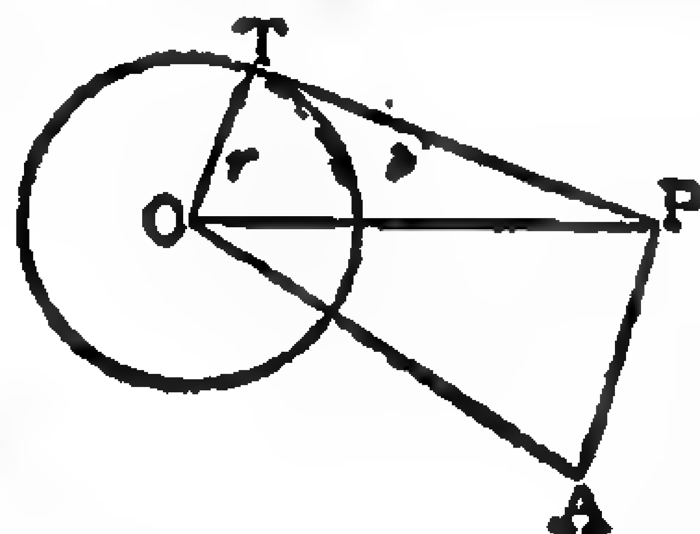
则 $$k^2=nr^2+n\,OP^2.$$

又 k、n、r 是定值，所以 OP 是定长的线段。从而得出，点 P 的轨迹，是以 O 为圆心的一个圆。

1848. 已知半径为 r 的定圆 O 与定点 A，从一点 P 向圆 O 作切线 PT，求使

$$PT^2+PA^2=m^2$$

的点 P 的轨迹。



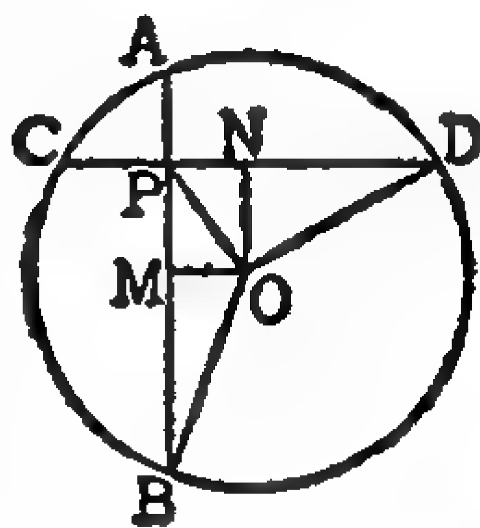
解 设 PT 为定圆 O 的切线，则

$$PT^2=PO^2-r^2.$$
$$\therefore\quad PT^2+PA^2=PO^2-r^2+PA^2.$$

而 $$PT^2+PA^2=m^2.$$
$$\therefore\quad PO^2+PA^2=m^2+r^2\text{(一定)}.$$

由此可知，点 P 的轨迹是以 OA 的中点为圆心的一个圆(问题 1833)。

1849. 设 AB、CD 为定圆 O 内相交成直角的两弦，当 $AB^2+CD^2=m^2$ 时，求两弦 AB 和 CD 交点 P 的轨迹。



解 设 M、N 分别为 AB、CD 的中点，则

$$AB^2+CD^2=4(BM^2+DN^2).$$

而 $$BM^2=OB^2-OM^2,$$
$$DN^2=OD^2-ON^2.$$

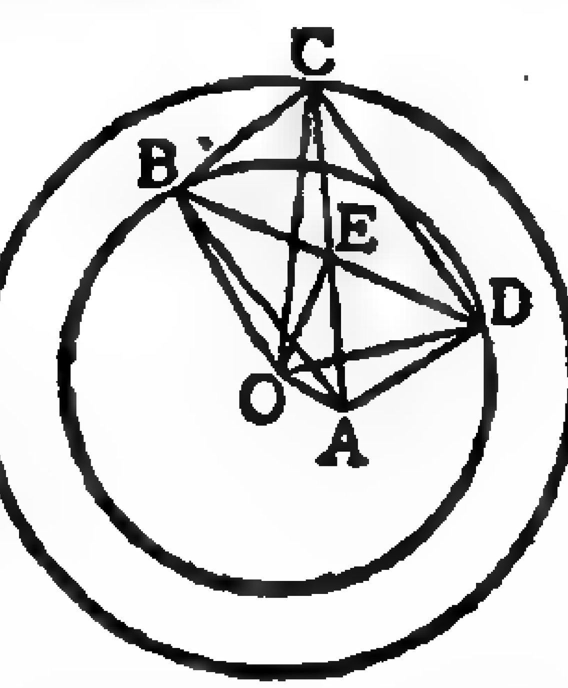
设圆 O 的半径为 r，则

$$AB^2+CD^2$$
$$=4[(r^2-OM^2)+(r^2-ON^2)]$$
$$=4(2r^2-OP^2).$$
$$\therefore\quad m^2=8r^2-4OP^2,$$

即 $$OP^2=\frac{8r^2-m^2}{4}\text{(一定)}.$$

由此可得，OP 是定长。所以，点 P 的轨迹是以 O 为圆心，半径的长等于 $\frac{1}{2}\sqrt{8r^2-m^2}$ 的圆。

1850. 设 A 是定圆 O 内的定点，以 A 为顶点作矩形 $ABCD$，且对角线 BD 的两端在圆 O 上，求顶点 C 的轨迹。



解 设 AC、BD 的交点为 E。因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 E 是 BD、CA 的中点。

$$\therefore\quad OA^2+OC^2=2(OE^2+CE^2),\quad ①$$
$$OB^2+OD^2=2(OE^2+BE^2).\quad ②$$

而 $CE=BE$。所以由①、②得

$$OA^2+OC^2=OB^2+OD^2.\quad ③$$

设 $OB=OD=r$，$OA=d$，所以由③，得

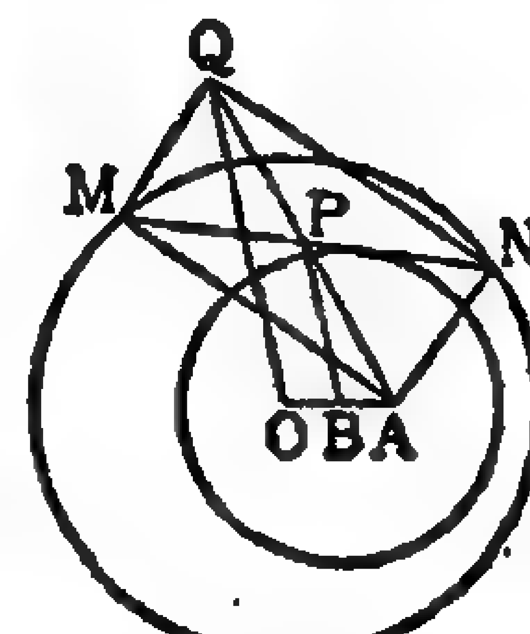
$$d^2+OC^2=2r^2.$$
$$\therefore\quad OC=\sqrt{2r^2-d^2}.$$

因此，点 C 在以 O 为圆心，半径的长等于$\sqrt{2r^2-d^2}$ 的圆上。

反之，容易证明，这圆上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是以 O 为圆心，半径的长等于 $\sqrt{2r^2-d^2}$ 的圆。

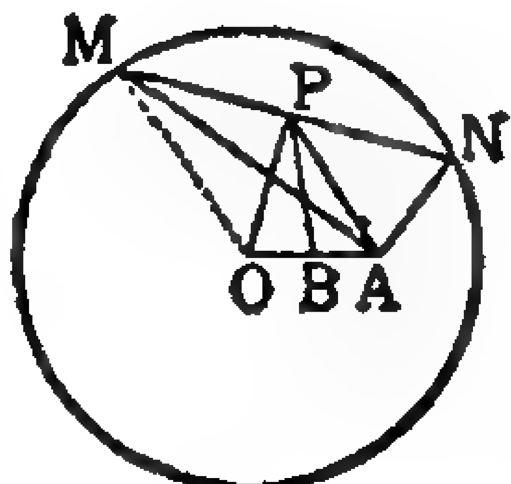
1851. 设 A 是半径为 r 的定圆内的定点，过 A 作相互垂直的两直线 AM、AN，分别与圆交于 M、N，求弦 MN 的中点 P 的轨迹。



解 作矩形 $MANQ$，由上题可知，顶点 Q 的轨迹，是以 O 为圆心，OQ 为半径的圆，而 P 是 QA 的中点。若点 B 是 OA 的中点，则

$$BP=\frac{1}{2}OQ.$$

所以，点 P 的轨迹是以 B 为圆心，$\frac{1}{2}OQ$ 为半径的圆。



别解 设 P 是 MN 的中点。因为 $\triangle MAN$ 是直角三角形，所以

$$PA=PM.$$

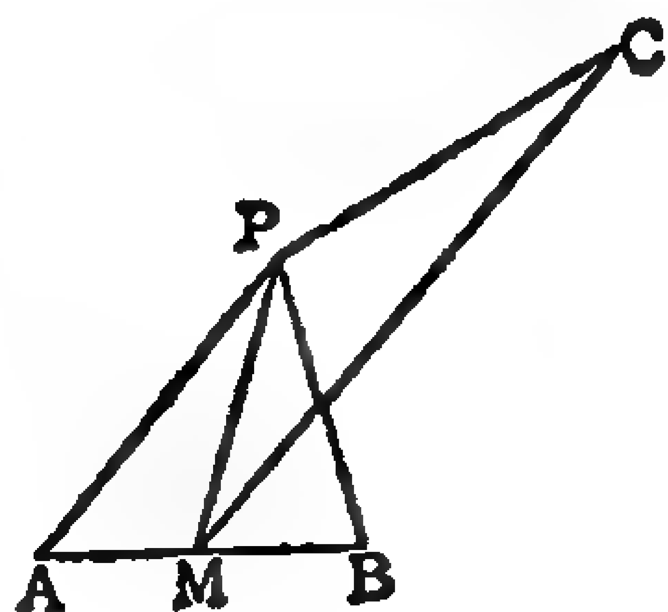
且 $OP\perp MN$。

$$\therefore\quad PA^2+PO^2=PM^2+PO^2=MO^2=r^2$$

（r 是圆 O 的半径）。

又 A 是定点，所以，P 是到两定点 O、A 的距离平方和为一定的点。因此，点 P 的轨迹，是以 OA 的中点 B 为圆心，BP 为半径的圆（问题 **1842**）。

1852. 设点 P 到定点 C 的距离的平方，等于点 P 到另外两定点 A、B 的距离平方的和，求点 P 的轨迹。



解 设 M 为 AB 的中点，则 M 是定点。

$$\therefore\quad AP^2+BP^2=\frac{AB^2}{2}+2MP^2.$$

而
$$AP^2+BP^2=CP^2.$$

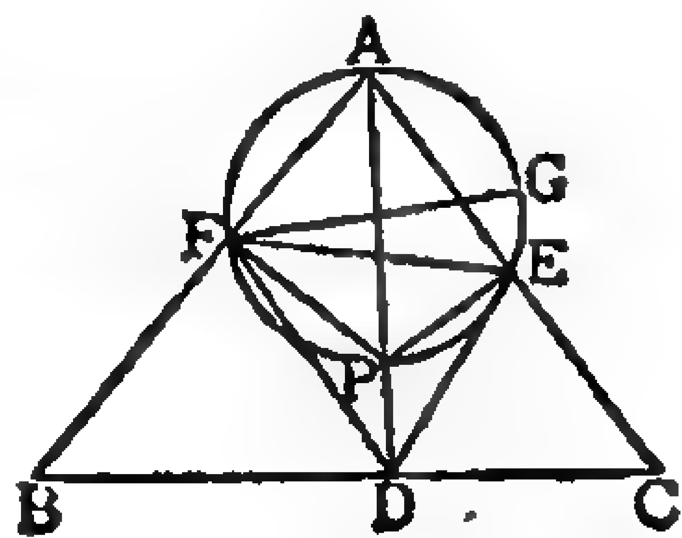
$$\therefore\quad CP^2=\frac{AB^2}{2}+2MP^2,$$

$$CP^2-2MP^2=\frac{AB^2}{2},$$

即
$$2CP^2-4MP^2=AB^2.$$

因此，若按 1:2 的比外分 MC，则以这外分点为圆心的一个圆是所求的轨迹（问题 **1842**）。

1853. 从定三角形 ABC 内一点 P，向三角形的三边作垂线，以连结垂足的线段为边作正方形，若这些正方形的面积的和是定值，求点 P 的轨迹。



解 从点 P 向 $\triangle ABC$ 的各边作垂线，设垂足分别为 D、E、F，则四边形 $AEPF$ 内接于以 AP 为直径的圆。作这个圆的直径 FG，因为在 $\triangle FGE$ 中，

$$\angle FEG=90^\circ,\quad \angle EGF=\angle A,$$

所以 $\triangle FGE$ 的形状一定。由此可得，$EF:FG$ 是定值。因此，$EF:AP$ 是定值。从而得出，$EF^2:AP^2$ 也是定值。设

$$EF^2:AP^2=m:1,$$

则
$$EF^2=mAP^2.$$

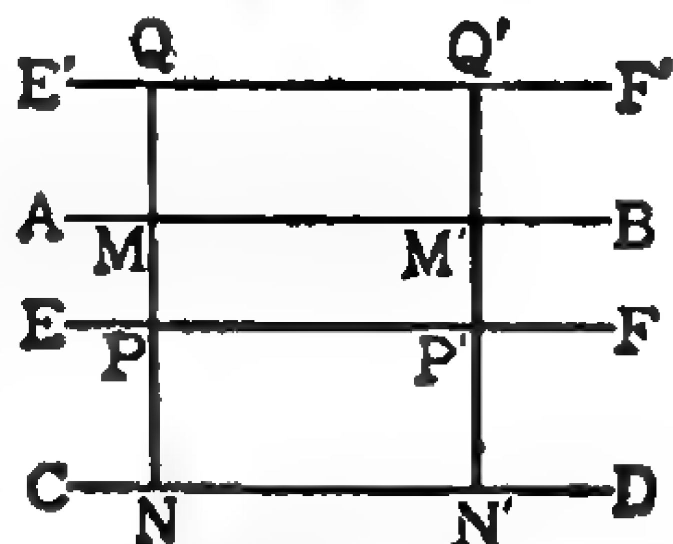
同理可得，设 n、p 为定值，则

$$FD^2=nBP^2,\quad DE^2=pCP^2.$$

而 $EF^2+FD^2+DE^2$ 是定值。所以 $mAP^2+nBP^2+pCP^2$ 是定值。因此，根据问题 **1843**，点 P 的轨迹是一个圆。

13. 到两定点（或两定直线）的距离的比为一定的点的轨迹

1854. 一点到两条平行直线 AB、CD 的距离的比等于定比 $m:n$，求这个点的轨迹。



解 从 AB 上取一点 M，作 AB 的垂线，与 CD 的交点为 N。把 MN 按定比 $m:n$ 内分和外分，得内分点 P 和外分点 Q，即

$$PM:PN=QM:QN=m:n.$$

设 P' 为适合条件的任意一点，过 P' 作 AB、CD 的公垂线，垂足分别为 M'、N'，则

$$P'M':P'N'=m:n.$$

因此，当 P' 在 AB、CD 之间时，则四边形 $PP'M'M$ 是矩形。而当 P' 是在 AB、CD 外部的点，设在点 Q' 的位置上时，则四边形 $QQ'M'M$ 也是矩形。因此，过点 P 或点 Q 作平行于 AB 的直线 EF 或 $E'F'$，则 P' 或 Q' 在 EF、$E'F'$ 上。

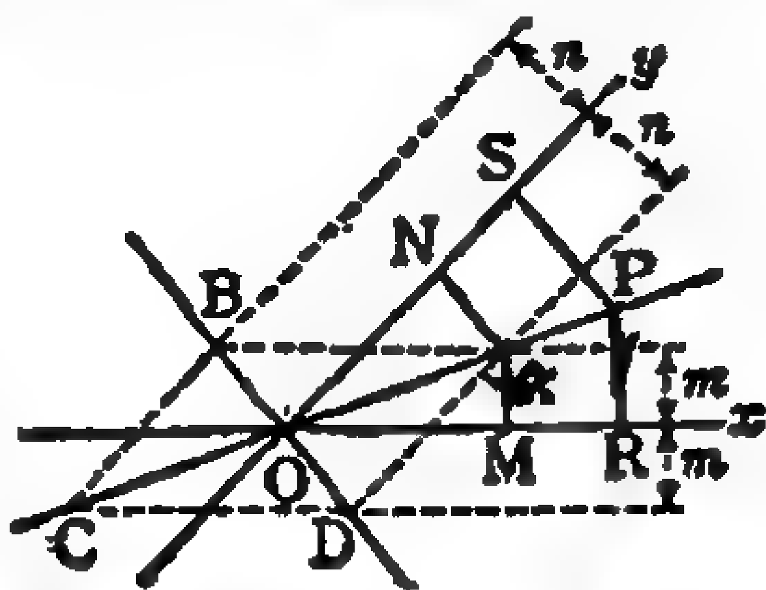
反之，容易证明，在这两条直线上的任意一点，到 AB、CD 的距离的比一定是 $m:n$。

因此，所求的轨迹是两条直线 EF、$E'F'$。

1855. 设两直线 Ox、Oy 相交于 O，一点到 Ox、Oy 的距离的比等于定比 $m:n$，求这个点的轨迹。

解 作与 Ox 的距离等于 m 且平行于 Ox 的直线，作与 Oy 的距离等于 n 且平行于 Oy 的直线，设它们的交点是 A、B、C、D. 这时，

A、O、C 与 B、O、D 分别在一直线上，这两直线就是所求的轨迹。其理由是：



由直线 OA 上的任意一点 P，向 Ox、Oy 分别作垂线 PR、PS，又从点 A 向 Ox、Oy 分别作垂线 AM、AN，则

$$\triangle POR \backsim \triangle AOM,$$

$$\therefore \quad \frac{OP}{OA}=\frac{PR}{AM}.$$

又 $$\triangle OPS \backsim \triangle OAN,$$

$$\therefore \quad \frac{OP}{OA}=\frac{PS}{AN},$$

$$\therefore \quad \frac{PR}{AM}=\frac{PS}{AN}.$$

$$\therefore \quad PR:PS=AM:AN.$$

又 $AM=m$, $AN=n$,

$$\therefore \quad PR:PS=m:n.$$

由此可知，直线 OA 上的点适合条件。同理可得，直线 OB 上的点也适合条件。

其次，设 P' 是不在直线 OA、OB 上的点，从 P' 向 Ox、Oy 作垂线 $P'R'$、$P'S'$，则容易证明 $P'R':P'S'\neq AM:AN$。

因此，所求的轨迹是直线 OA 和 OB。

1856. 一点到两定点 A、B 的距离的比等于定比 $m:n$，求这个点的轨迹（但 $m\neq n$）。[阿波罗尼斯圆]

解 设 P 为适合条件的点，则

$$PA:PB=m:n.$$

若 $\angle APB$ 的平分线与 AB 的交点为 C，则

$$PA:PB=AC:CB.$$

$$\therefore \quad AC:CB=m:n.$$

所以，C 是定点。同理可得，$\angle APB$ 的邻补角的平分线，与 AB 的延长线交点为 D，则 D 也是定点。又 $\angle CPD=90°$，所以 P 在以 CD 为直径的圆上。

反之，设 Q 为这个圆上的任意点，作

$$\angle CQB'=\angle CQA,$$

由 $$\angle CQD=90°,$$

得到 CQ、QD 分别为 $\angle AQB'$ 及其邻补角的平分线。

$$\therefore \quad \frac{AC}{CB'}=\frac{AD}{B'D}.$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{AD}=\frac{CB'}{B'D}.$$

而 $$\frac{AC}{AD}=\frac{CB}{BD}.$$

$$\therefore \quad \frac{CB}{BD}=\frac{CB'}{B'D}.$$

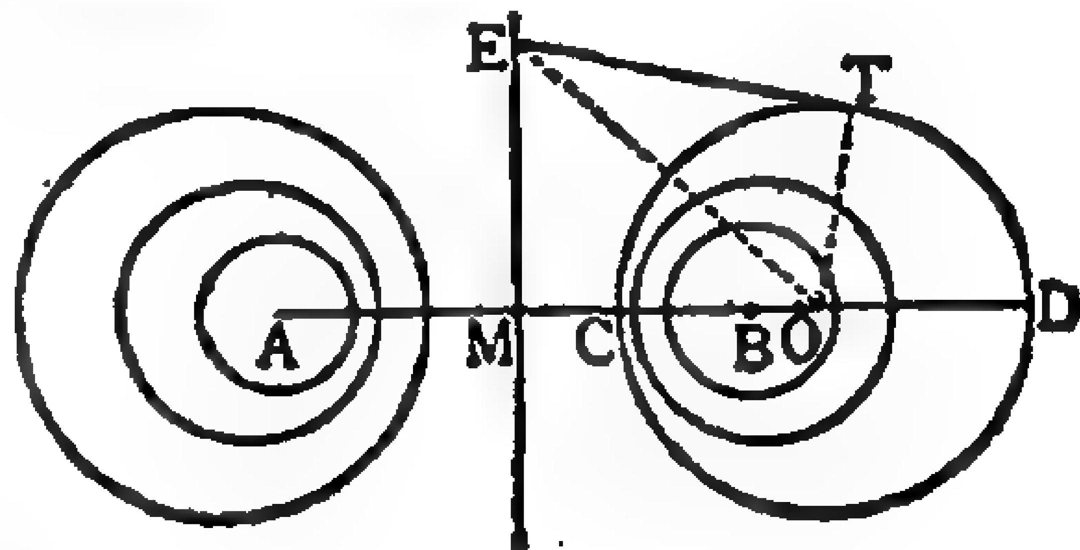
因为按已知定比内分 CD 的点，仅仅只有一个，所以点 B' 与点 B 相重合。因此，QC 平分 $\angle AQB$。

$$\therefore \quad \frac{QA}{QB}=\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}.$$

因此，点 P 的轨迹，是以 CD 为直径的圆。

注　当 $m=n$ 时，所求的轨迹是过 AB 的中点而垂直于 AB 的直线。

1857. 在平面上，一动点到两定点 A、B 的距离的比等于定比 $m:n(m\neq n)$，试用图来说明，当 $m:n$ 的值起变化时，这动点的轨迹是怎样变化的。其次，从 AB 的中垂线上的点，向上述所求的任何一个圆作切线，试证明所作的切线的长度是一定的。



解 当 $\frac{m}{n}=1$ 时，则轨迹为 AB 的中垂线。

当 $\frac{m}{n}>1$ 时，以 AB 的中垂线为界，在点 B 的这一侧，随着 $\frac{m}{n}$ 的增大而作出如图那样的逐渐缩小的圆群。

当 $0<\frac{m}{n}<1$ 时，以 AB 的中垂线为界，在 A 的这一侧，随着 $\frac{m}{n}$ 的减少而作出如图那样的逐渐缩小的圆群。

设 E 为线段 AB 的中垂线上的定点，作直径为 CD 的圆 O，从 E 向圆 O 作切线，切点为 T。现在就 $m>n$ 的情况进行证明（同理可证明 $m<n$ 时的情况）。

设 $AB=a$，由

$$AC:CB=m:n, \quad AD:BD=m:n,$$

得　$AC=\frac{ma}{m+n}$，$AD=\frac{ma}{m-n}$。

$$\therefore\quad CD=AD-AC=\frac{2mna}{m^2-n^2}.$$

$$\therefore\quad OC=\frac{mna}{m^2-n^2}.$$

设 AB 的中点为 M，则

$$MO=AC+OC-AM$$

$$=\frac{ma}{m+n}+\frac{mna}{m^2-n^2}-\frac{a}{2}$$

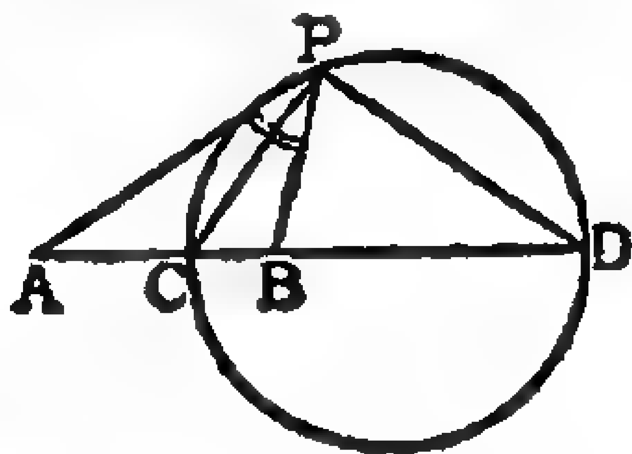
$$=\frac{(m^2+n^2)a}{2(m^2-n^2)}.$$

$$\therefore\quad ET^2=EO^2-OT^2=EM^2+MO^2-OC^2$$

$$=EM^2+\frac{a^2}{4}=EM^2+MB^2=EB^2.$$

由此可得，ET 的长度是一定的。

1858. 三角形的底边的长度是定值，与顶角相邻的外角的平分线，与底边的延长线的交点是定点，求这样的三角形顶点的轨迹。



解　设 AB 为三角形的底边，它的长度是定值，又与顶角 $\angle APB$ 相邻的外角的平分线，与底边的延长线的交点为 D，它是定点。若点 C 把 AB 内分成

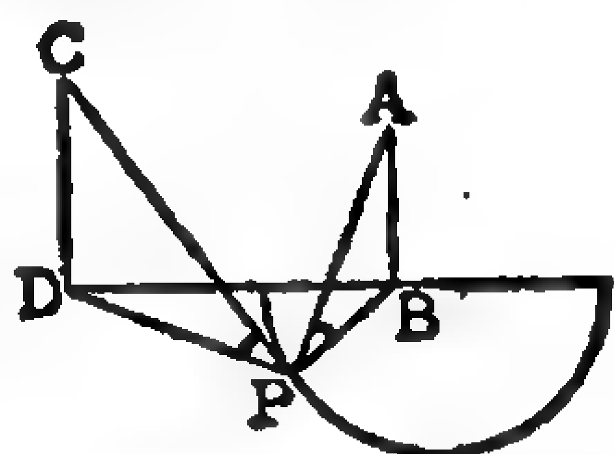
$$AC:CB=AD:BD,$$

则 CP 为 $\angle APB$ 的平分线。从而得出，

$$\angle CPD=90°.$$

因此，点 P 的轨迹，是以 CD 为直径的圆（问题 **1856**）。

1859. 在一个平坦的原野上，有两座塔，某人去原野时，若恒能以相等的仰角了望这两座塔顶，问此人按怎样的路线而行。



解　设 AB、CD 为两座塔，P 为此人的某一个位置．连结 PA、PB、PC、PD。根据题设条件，得

$$\angle APB=\angle CPD,$$

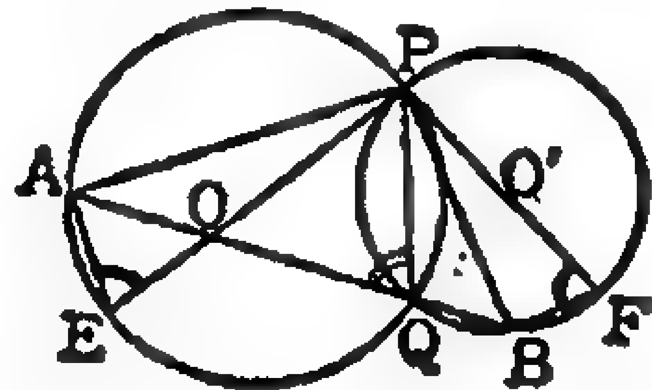
$$\angle ABP=90°=\angle CDP.$$

$$\therefore\quad \triangle ABP\backsim\triangle CDP.$$

从而得出，$AB:CD=BP:DP$。

而 AB、CD 的长度是定长，所以 $AB:CD$ 是定比。从而得出，$BP:DP$ 也是定比。因为 P 是使 $BP:DP$ 为定比的点，所以，此人所走的路线，与问题 **1856** 相同，是一个圆（阿波罗尼斯圆）。

1860. Q 为定线段 AB 上的动点，以 AQ、BQ 为弦分别作圆 O、圆 O'，使它们的直径的比等于定比 $m:n$，求这两圆的另一个交点 P 的轨迹。



解　若作圆 O、圆 O' 的直径分别是 PE、PF，则在 $\triangle APE$、$\triangle BPF$ 中

$$\angle PEA=\angle PQA,\quad \angle PFB=\angle PQA,$$

$$\therefore\quad \angle PEA=\angle PFB.$$

又　$$\angle PAE=\angle PBF=90°,$$

$$\therefore\quad \triangle PAE\backsim\triangle PBF.$$

$$\therefore\quad PA:PB=PE:PF.$$

但是，根据假定，得

$$PE:PF=m:n.$$

$$\therefore\quad PA:PB=m:n.$$

所以 $PA:PB$ 是定比。从而得出 A、B 是定点。因此，若以定比 $m:n$ 内分和外分线段 AB，以连结这两个分点的线段为直径作圆，则适合条件的点 P 在这个圆上。

反之，在这圆上任意取一点 P'，作过 P'、A 的任意圆，这圆与 AB 的交点为 Q'，作直径 $P'E'$。在 $P'B$ 上，作 $\triangle P'BF'$ 与 $\triangle P'AE'$ 相似，设 $P'A$ 与 $P'B$ 为对应边。这时，

$$\angle P'E'A=\angle P'F'B.$$

又　$$\angle P'Q'A=\angle E',$$

所以　$$\angle P'Q'A=\angle F'.$$

由此可知，$\triangle P'BF'$ 的外接圆过点 Q'。

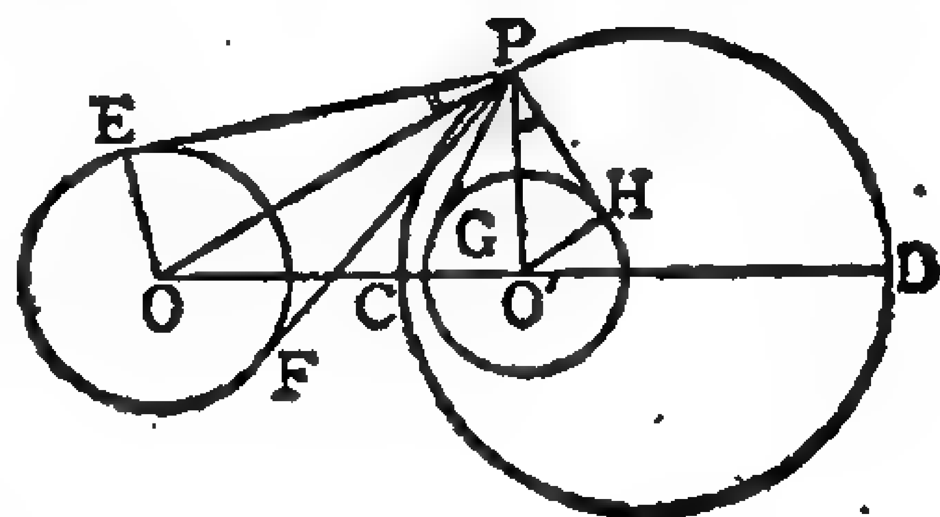
但因为，$\triangle P'AE'\backsim\triangle P'BF'$，所以

$$\angle P'BF'=\angle P'AE'=90°.$$

且　$$P'E':P'F'=PA:PB=m:n.$$

因此，若以定比 $m:n$ 内分和外分线段 AB，以连结这两个分点的线段为直径作圆，则这圆就是所求的轨迹。

1861. 从一点 P 向已知两圆分别作两条切线，当两条切线的夹角相等时，求点 P 的轨迹。



解　设 P 为适合条件的

点。从点 P 向两圆 O、O' 分别作切线 PE 与 PF、PG 与 PH，则

$$\angle EPF=\angle GPH.$$

$$\therefore\ \angle OPE=\angle O'PH.$$

又 $$\angle OEP=90^\circ=\angle O'HP,$$

$$\therefore\ \triangle OPE\backsim\triangle O'PH.$$

$$\therefore\ OP:O'P=OE:O'H.$$

因此，所求的轨迹，是到 O、O' 的距离的比等于定比 $OE:O'H$ 的点 P 的轨迹，而不可能是其他。所以，若以定比 $OE:O'H$ 内分和外分 OO'，以连结这两个分点的线段 CD 为直径作圆，则点 P 是在这个圆上(问题 **1856**)。

反之，设 P 是这圆上的任意点，则

$$OP:O'P=OE:O'H.$$

$$\therefore\ \triangle OEP\backsim\triangle O'HP.$$

从而得出 $$\angle OPE=\angle O'PH.$$

$$\therefore\ \angle EPF=\angle GPH.$$

由此可知点 P 适合条件。

因此，若以两已知圆半径的比，内分和外分 OO'，以连结这两个分点 C、D 的线段 CD 为直径的圆，就是点 P 的轨迹。

注　当已知的两圆相等时，则点 P 的轨迹是过 OO' 的中点而垂直于 OO' 的直线。

14. 相似三角形的第三顶点的轨迹

1862. 设 $\triangle ABC$ 和定三角形相似，又 $\triangle ABC$ 的顶点 A 固定，顶点 B 在定直线 XY 上移动，求顶点 C 的轨迹。

解　设 $\triangle ABC$ 适合条件。从顶点 A 向定直线 XY 作垂线 AD，若以 AD 为一边，作 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似，则

$$AB:AD=AC:AE.$$

$$\therefore\ AB:AC=AD:AE.$$

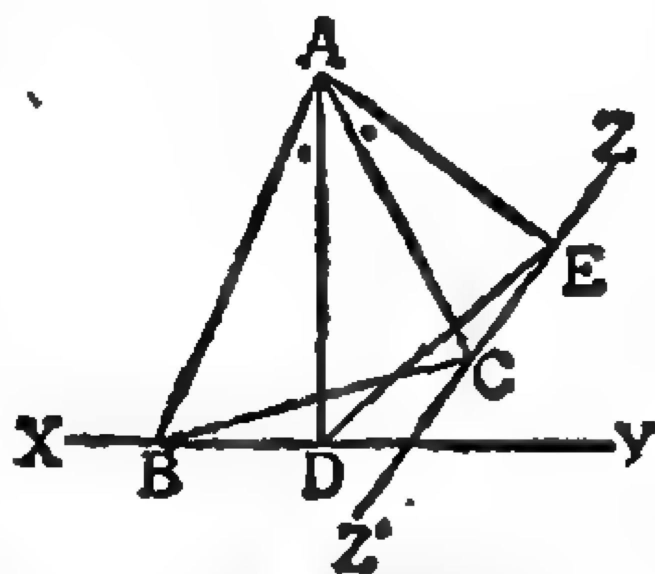
而 $\angle BAC=\angle DAE$.

$\therefore\ \angle BAD=\angle CAE$.

由此可得，

$\triangle ABD\backsim\triangle ACE$,

$\therefore\ \angle AEC=\angle ADB=90^\circ$.



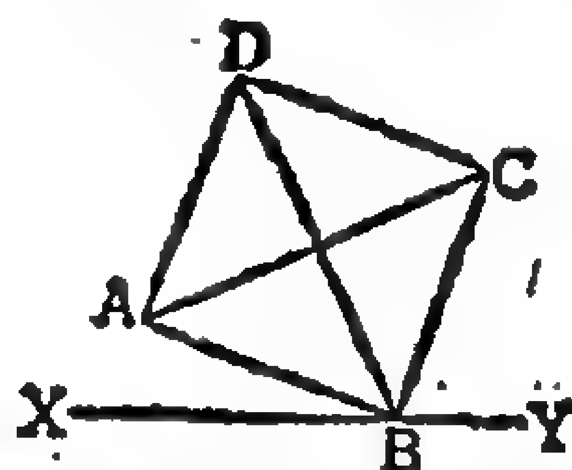
但因为 AE 是定长线段，$\angle AEC$ 是直角，所以，点 C 在过 E 而垂直于 AE 的直线 ZZ' 上。

反之，容易证明，ZZ' 上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是 ZZ'，和关于 AD 与 ZZ' 对称的直线。

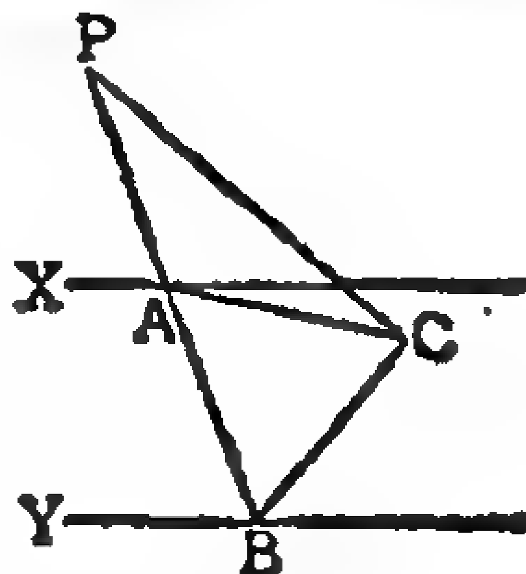
注　作 $\triangle ADE'$ 关于 AD 与 $\triangle ADE$ 对称，则垂直于 AE' 的直线也是所求的轨迹。

1863. 以已知点 A 为一个顶点，以定直线 XY 上的任意一点 B 为第二顶点，作正方形 $ABCD$，求顶点 C 及 D 的轨迹。



解　因为 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 都是等腰直角三角形，所以它的形状一定。又因为一个顶点 A 是定点，顶点 B 在定直线 XY 上，所以，根据上题可知，第三顶点 C、D 的轨迹分别是两条直线。

1864. 已知两条定平行直线 X、Y 及定点 P，过 P 作直线 PAB，与 X、Y 分别交于 A、B，以 AB 为一边作正三角形 ABC，求顶点 C 的轨迹。



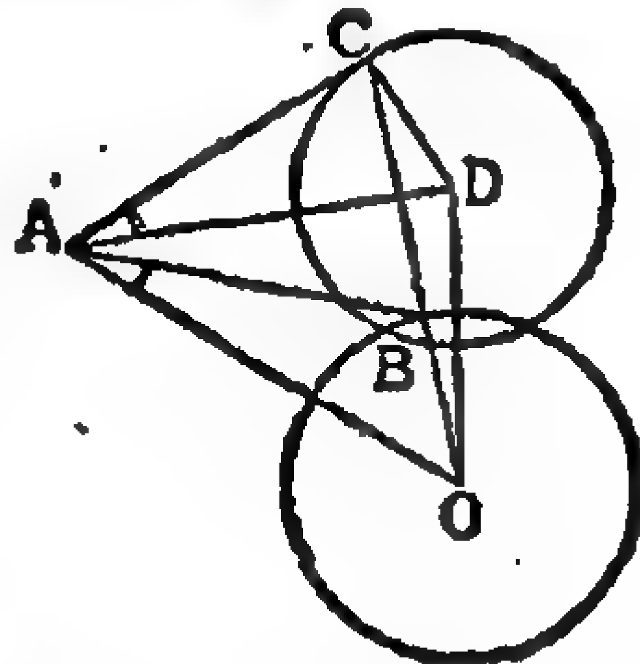
解　因为 P 是定点，X、Y 是定平行线，所以，在直线 PAB 上，$PB:AB$ 恒为一定。

而 $$AB=BC.$$

所以，$PB:BC=PB:AB$(一定)。

又 $\angle ABC=60^\circ$，所以 $\triangle PBC$ 的形状一定。因此，本题可以归结为：以 P 为一个顶点，B 在定直线上移动时，求 $\triangle PBC$ 的第三顶点 C 的轨迹。所以，所求的点 C 的轨迹是两条直线(问题 **1862**)。

1865. 设 $\triangle ABC$ 和已知的定三角形相似，顶点 A 的位置一定，顶点 B 在定圆 O 上，求顶点 C 的轨迹。



解　因为 $\triangle ABC$ 和定三角形相似，所以它的三边长的比一定，设

$$AB:BC:CA=l:m:n$$

(l、m、n 表示定长线段)。

在 OA 上，作 $\triangle AOD$ 与 $\triangle ABC$ 相似，则

$$AC:AD=AB:AO,$$

即 $$AC:AB=AD:AO.$$

又 $$\angle CAB=\angle DAO,$$

所以 $$\angle CAD=\angle BAO.$$

$$\therefore\ \triangle ACD\backsim\triangle ABO.$$

$\therefore \quad DC:OB=AD:AO.$　①

在上式中，因为 OB 是定圆 O 的半径，是定长的线段，而且 $AD:AO$ 是定比，所以 DC 也是定长线段。因此，点 C 在以 D 为圆心，DC 为半径的圆上。

反之，在这圆上任意取一点 C'，在 AC' 上作 $\triangle C'AB'$ 与 $\triangle DAO$ 相似（但假定 $\triangle C'AB'$、$\triangle DAO$ 关于 AC'、AD 是在相同的一侧）。连结 OB'，则

$$\triangle AC'D \backsim \triangle AB'O.$$

$\therefore \quad DC':OB'=AD:AO.$　②

比较①、②，得

$$DC:OB=DC':OB'.$$

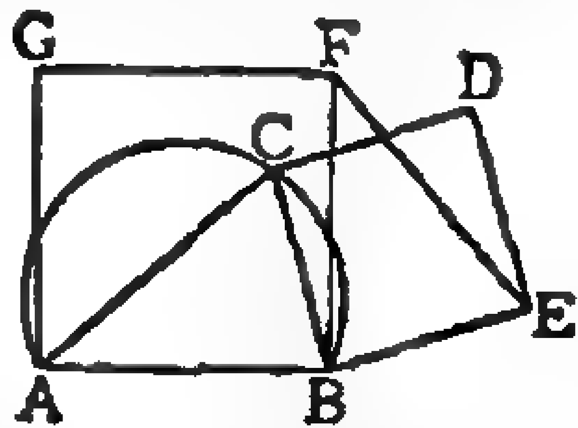
$\because \quad DC'=DC, \qquad \therefore \quad BO=B'O.$

由此可知，点 B' 在圆 O 上。从而得出，点 C' 是适合条件的点。

因此，所求的轨迹是以 D 为圆心，以 DC 为半径的圆。

注　与定三角形相似的 $\triangle AOD$，可以把它作在 AO 的两侧中的任何一侧，因此，本题的轨迹，是关于 AO 相互对称的两个圆。

1866.　设 $\triangle ABC$ 的底边 AB 的长度和位置一定，顶角 C 是定角。若在边 BC 上向三角形的外侧作正方形，求这正方形的一个顶点的轨迹。



解　设 $\triangle ABC$ 是三角形的一个位置，以 BC 为一边作正方形 $BCDE$。又以 AB 为一边，对于 AB 与 $\triangle ABC$ 同侧，作正方形 $ABFG$。连结 EF，则

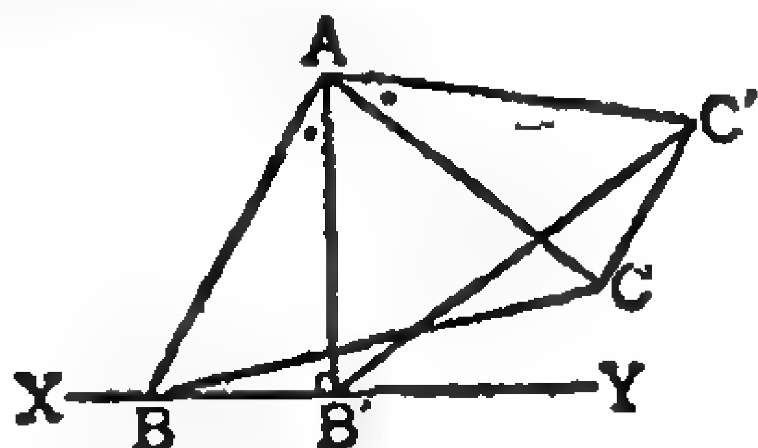
$$\triangle ABC \cong \triangle FBE.$$

因此，点 E 的轨迹，是以 BF 为弦，所含圆周角等于 $\angle ACB$ 的一个圆弧。

同理可得，点 D 的轨迹，是以 BG 为弦，所含圆周角也等于 $\angle ACB$ 的一个圆弧。

注　（参照问题 1787）。

1867.　已知定点 A 及定直线 XY。过点 A 作两条直线 AB、AC，使 $\angle BAC$ 等于定角，AB 与 XY 的交点为 B。当矩形的面积 $AB \cdot AC$ 等于已知的正方形的面积时，求点 C 的轨迹。



解　过 A 向 XY 作垂线 AB'。作

$$\angle B'AC'=\angle BAC,$$

且使　$AB' \cdot AC'=AB \cdot AC,$

则　$AB:AB'=AC':AC.$

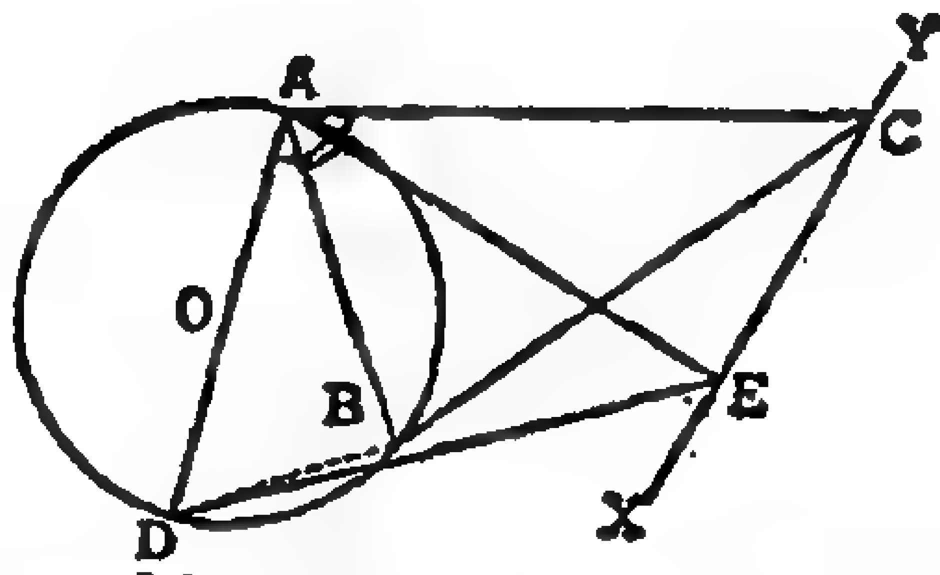
又　$\angle BAB'=\angle CAC',$

$\therefore \quad \triangle ABB' \backsim \triangle AC'C.$

$\therefore \quad \angle ACC'=\angle AB'B=90°.$

因此，点 C 的轨迹，是以 AC' 为直径的圆。若把 AC 作在关于 AB 与前者相反的一侧，则轨迹是关于 AB'，与以 AC' 为直径的圆对称的圆。

1868.　设 $\triangle ABC$ 的顶角 $A=\alpha$，两边的积 $AB \cdot AC$ 等于 m^2，顶点 A 是定圆 O 上的定点，顶点 B 在这圆上移动，求顶点 C 的轨迹。



解　以直径 AD 为一边作 $\triangle ADE$，使

$$\angle DAE=\alpha,$$

$$AD \cdot AE=m^2,$$

而且要把关于 AD 的 $\triangle ADE$，和关于 AB 的 $\triangle ABC$ 作在同一侧，则 E 是定点。

$\because \quad AD \cdot AE=AB \cdot AC,$

$\therefore \quad AD:AB=AC:AE.$

又　$\angle DAB=\angle CAE,$

$\therefore \quad \triangle ADB \backsim \triangle ACE.$

$\therefore \quad \angle AEC=\angle ABD=90°.$

因此，点 C 在过 E 且垂直于 AE 的直线 XY 上。

反之，容易证明，XY 上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是直线 XY。若对于 AB 而言，把 $\triangle ABC$ 作在另一侧，则轨迹是关于 AD，与直线 XY 对称的直线。

1869.　设 A 是已知圆上的定点，B 是同一圆上的动点。当 $\angle APB$ 及比 $PA:PB$ 为一定时，求点 P 的轨迹。

解　作定圆的直径 AOC，使 AC 对应于 AB，作 $\triangle AQC$ 与 $\triangle APB$ 相似，而且要把关于 AC 的 $\triangle AQC$，和关于 AB 的 $\triangle APB$ 作

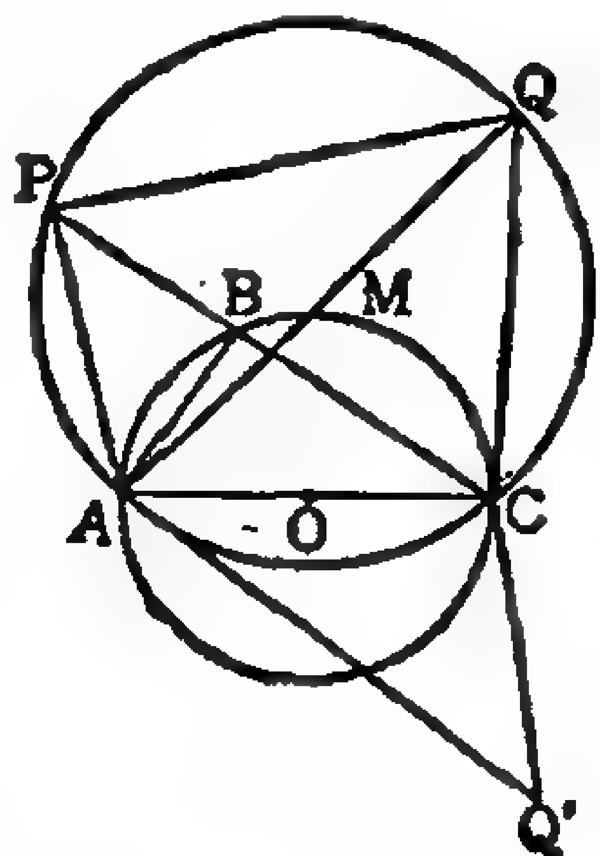
在同一侧，则

$$\triangle AQC \backsim \triangle APB.$$

$$\therefore \quad AQ:AP=AC:AB. \qquad ①$$

又 $$\angle PAQ=\angle BAC. \qquad ②$$

连结 PQ、BC。



由①、②，得

$\triangle APQ \backsim \triangle ABC$.

$\therefore \angle APQ=\angle ABC$

$=90°$.

因此，点 P 在以 QA 为直径的圆 M 上。

反之，在圆 M 上取任意点 P，连结 AP。若使 AP 对应于 AQ，作 $\triangle APB$ 与 $\triangle AQC$ 相似，而且要把关于 AP 的 $\triangle APB$，和关于 AQ 的 $\triangle AQC$ 作在同一侧，则

$$\triangle APB \backsim \triangle AQC.$$

又 $$\angle PAB=\angle QAC,$$

$$\therefore \quad PA:QA=AB:AC. \qquad ③$$

而 $$\angle PAQ=\angle BAC. \qquad ④$$

由③、④，得

$$\triangle PAQ \backsim \triangle BAC.$$

$$\therefore \quad \angle APQ=\angle ABC.$$

而 QA 是圆 M 的直径，所以

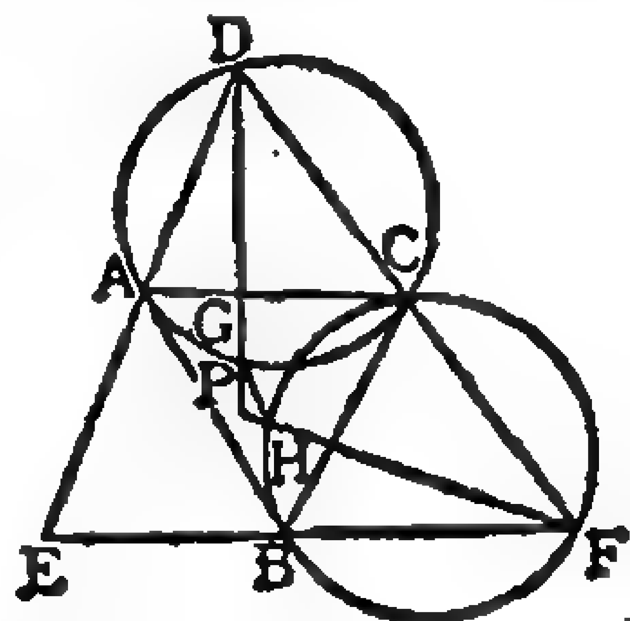
$$\angle APQ=90°.$$

$$\therefore \quad \angle ABC=90°.$$

所以，点 B 在圆 O 上。由此可知，点 P 适合条件。

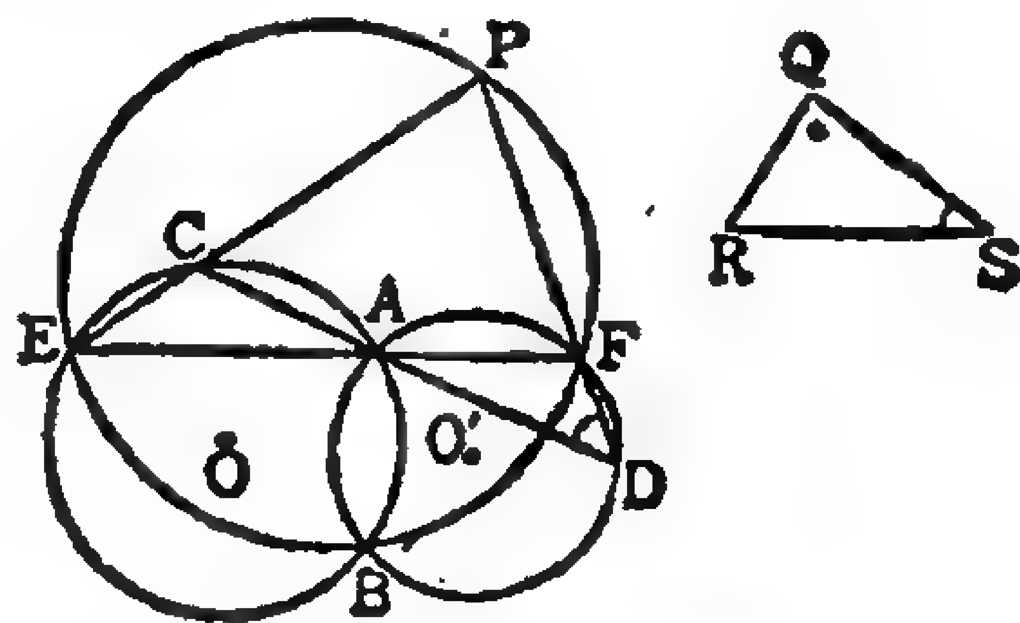
因此，所求的轨迹是圆 M。若把 $\triangle ABP$ 作在与前者相反的一侧，则所求的轨迹是关于 AC 与圆 M 对称的圆。

1870． 设定三角形 DEF 外接于定三角形 ABC，且与另一个定三角形相似，又在 $\triangle DEF$ 内取点 P，当 $\angle PDF$、$\angle PFD$ 分别等于定角时，求点 P 的轨迹。



解 因为 $\triangle DEF$ 与一个定三角形相似，所以 $\angle D$、$\angle F$ 的大小都一定。又因为 AC、BC 都是定长线段，所以不管怎样移动 $\triangle DEF$，点 D 总是在以 AC 为弦，所含圆周角等于 $\angle D$ 的弓形弧上，而点 F 总是在以 BC 为弦，所含圆周角等于 $\angle F$ 的弓形弧上。设 PD、PF 与圆 ADC、圆 BFC 的交点分别为 G、H，因为 $\angle PDF$、$\angle PFD$ 分别等于定角，所以 G、H 是定点。又 $\angle GPH$ 的大小也一定，所以点 P 的轨迹，是以 GH 为弦，所含圆周角等于定角 GPH 的弓形弧。

1871． 过相交的两定圆 O、O' 的交点 A，在两圆间作动割线 CAD，以 CAD 为底边，在 CAD 上作 $\triangle PCD$ 与定三角形 QRS 相似，求顶点 P 的轨迹。



解 设 PC、PD 与两定圆的交点分别为 E、F，则

$$\angle D=\angle S(\text{定角}).$$

又

$$\angle ECA=180°-\angle PCA=180°-\angle QRS$$
（定角）。

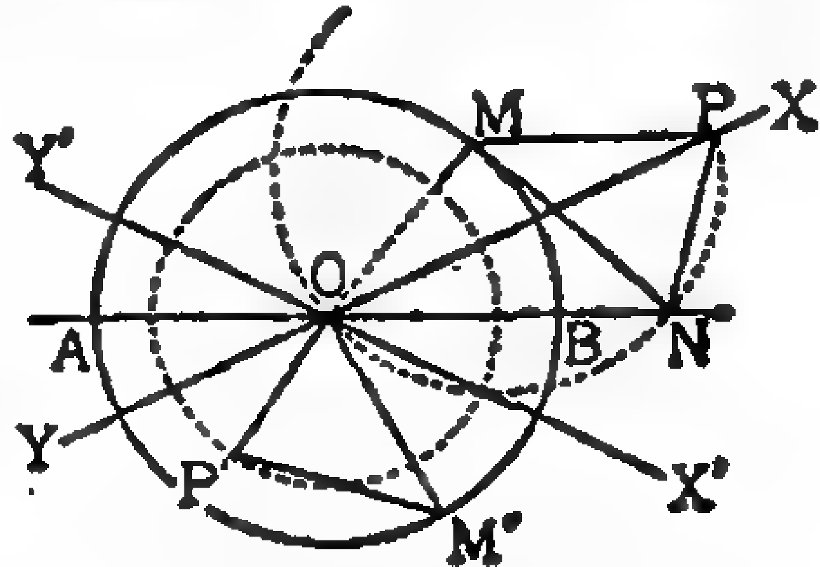
所以，F、E 都是定点。

又 $$\angle P=\angle Q(\text{定角}),$$

所以，所求的轨迹，是以 EF 为弦，所含圆周角等于 $\angle Q$ 的弧 EPF。

注 过点 A 作动割线时，若只考虑 C、D 在点 A 的两侧的情况，则点 P 的轨迹是上述的弧 EPF；若 C、D 取在 A 的同一侧，则点 P 的轨迹是弧 EPF 的圆。其次，当 $\triangle PCD$ 关于 CD，作在相反的一侧时，容易证明，所求的轨迹仍是一个圆。

1872． 设等腰三角形 MNP ($MN=MP=a$) 的形状和大小一定，顶点 M 在半径为 a 的定圆 O 上移动，底边的一端 N，在过圆心 O 的定直线 AB 上移动，求顶点 P 的轨迹



解 因为 $OM=a=MN=MP$，所以 O、N、P 在以 M 为圆心，以 OM 为半径的圆上。

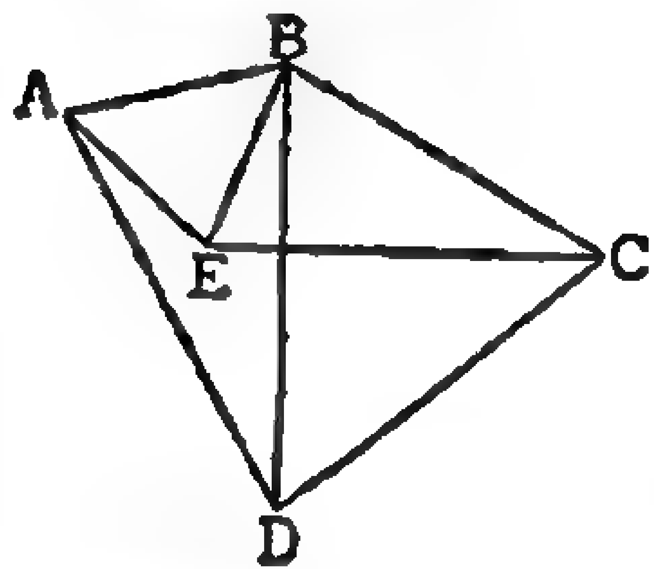
$$\therefore\quad \angle BOP=\frac{1}{2}\angle NMP(\text{一定}).$$

又 O 是定点，若过点 O 作直线 XY、$X'Y'$，使 XY、$X'Y'$ 与 AB 的夹角都等于定角 $\frac{1}{2}\angle NMP$，则直线 XY、$X'Y'$ 是所求的轨迹。因为 $\triangle MNP$ 的形状和大小一定，所以点 P 与圆 O 的距离不能大于 a。因此，轨迹的界限必须是：

$$OX=OY=OX'=OY'=2a.$$

又当 N 移动到点 O 的位置上，并使它固定，M 在圆 O 上旋转到 M' 的位置上时，则底边 NP 就在 OP' 的位置上。又因为 OP' 是定长，所以点 P' 的轨迹，是以 O 为圆心，以 OP' 为半径的圆。

1873. 四边形 $ABCD$ 的两个顶点 A、C 的位置一定，$\triangle BCD$ 的三个角的大小一定，且以四边形 $ABCD$ 的两组对边的积分别为矩形的面积的比等于定值 k，求另外两个顶点 B 及 D 的轨迹。



解 设 BA 对应于 BD，作 $\triangle BAE$ 与 $\triangle BDC$ 相似，并且关于 AB 这两个三角形和四边形在同一侧，则

$$\frac{BA}{BD}=\frac{BE}{BC}.$$

又 $\qquad \angle ABD=\angle EBC,$

$$\therefore\quad \triangle ABD\backsim\triangle EBC.$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{EC}=\frac{BD}{BC}. \qquad ①$$

又 $\qquad \triangle ABE\backsim\triangle DBC,$

$$\therefore\quad \frac{AE}{DC}=\frac{AB}{DB}. \qquad ②$$

由①×②，得

$$\frac{AE}{DC}\cdot\frac{AD}{EC}=\frac{AB}{DB}\cdot\frac{BD}{BC}.$$

$$\therefore\quad \frac{AE}{CE}=\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot BC}=k.$$

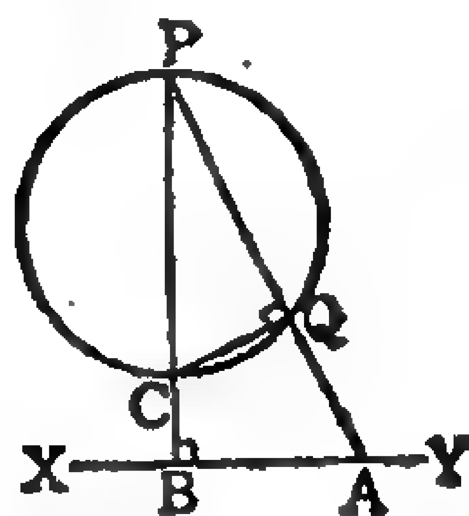
因为 A、C 是定点，所以点 E 的轨迹是一个圆(问题 1856)。又因为 $\triangle AEB$ 的三个角的大小一定，所以它的形状一定。因为顶点 A 是定点，另一顶点 E 在定圆上移动，所以点 B 的轨迹是一个圆。因此，点 D 的轨迹也是一个圆(问题 1865)。

15. 以分成的线段为边矩形的面积一定时分点的轨迹

1874. A 为定直线 XY 上的点，连结定点 P 和点 A 的线段，设点 Q 内分或外分线段 PA。当 PA 和 PQ 的积为矩形的面积是定值 m^2 时，求点 Q 的轨迹。

解 从 P 向 XY 作垂线 PB，在 PB 上取点 C，使 $PB\cdot PC=m^2$，则

$$PB\cdot PC=PA\cdot PQ.$$



由此可知，B、C、Q、A 共圆。

$$\therefore\quad \angle CQP=\angle CBA=90^\circ.$$

因此，点 Q 在以 PC 为直径的圆上。

反之，在这个圆上，任取一点 Q'，延长 PQ' 与 XY 的交点为 A'。因为

$$\angle PQ'C=90^\circ=\angle CBA',$$

所以 $BA'Q'C$ 是内接于圆的四边形。

$$\therefore\quad PA'\cdot PQ'=PB\cdot PC=m^2.$$

由此可得，点 Q' 是适合条件的点。

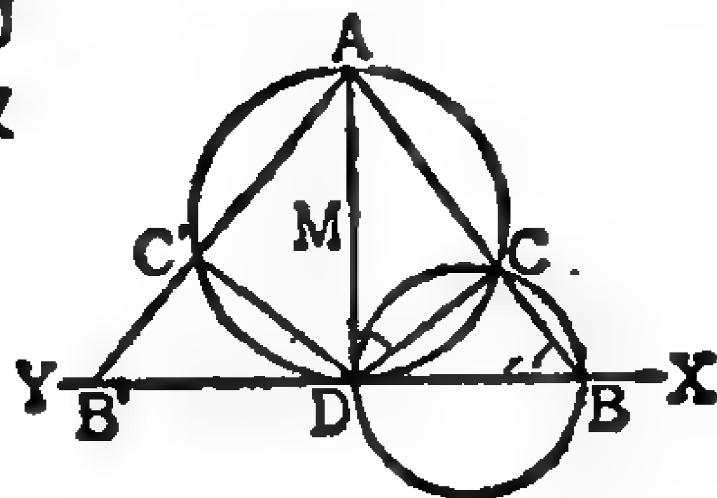
因此，所求的轨迹，是以 PC 为直径的圆。

注 把点 Q 的轨迹叫做以 P 为反演中心，以 m 为反演幂的 XY 的反象。

1875. 从定点 A 向定直线 XY 作垂线 AD，B 为 XY 上的任意点，在 AB 上取点 C，使

$$AB\cdot AC=AD^2,$$

求点 C 的轨迹。



解 设 $AB\cdot AC=AD^2$，则圆 BCD 在点 D 与 AD 相切。

$$\therefore\quad \angle ADC=\angle DBC.$$

又在 $\triangle ACD$、$\triangle ADB$ 中，因为 $\angle DAB$ 是公共角，所以

$$\angle ACD=\angle ADB=90^\circ.$$

因此适合条件的点 C，在以 AD 为直径的定圆(称这圆为圆 M)上。

反之，在圆 M 上任取一点 C'，如果 AC' 与 XY 相交于点 B'，则

$$\angle AC'D=\angle ADB'=90^\circ.$$

又在 $\triangle AC'D$、$\triangle ADB'$ 中，$\angle DAB'$ 是公共角，

$$\therefore\quad \angle ADC'=\angle AB'D.$$

因此，圆 $B'C'D$ 与 AD 在点 D 相切。

从而得出，　$AB'\cdot AC'=AD^2$。

所以，圆 M 上的任意点适合所给的条件。

因此，所求的轨迹是圆 M。

1876. 过圆上的定点 A 作任意弦 AB，在 AB 或它的延长线上取一点 C，当 $AB\cdot AC=m^2$ 时，求点 C 的轨迹。

解 设

$$AB\cdot AC=m^2$$

(m 表示定长线段)。作直径 AD，在 AD 或其延长线上取点 E，使

$$AD\cdot AE=m^2.$$

由此可得，

$$AB\cdot AC=AD\cdot AE.$$

所以 D、B、C、E 共圆。

又因为 AD 是直径，所以

$$\angle ABD=90°.$$

由此可得，

$$\angle DEC=\angle ABD=90°.$$

因此，点 C 在过 E 而垂直于 AE 的直线 XY 上。

反之，在 XY 上取任意点 C'，AC' 与圆的交点为 B'，则

$$\angle AB'D=90°=\angle DEC'.$$

由此可知，D、E、C'、B' 共圆。

$$\therefore\quad AB'\cdot AC'=AD\cdot AE.$$

而

$$AD\cdot AE=m^2.$$

$$\therefore\quad AB'\cdot AC'=m^2.$$

所以，XY 上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是直线 XY。

1877. 在已知弓形的弦 AB 的一端 A，作任意圆 X 与 AB 相切，设圆 X 与弓形弧的交点为 C，连结 B 与 C 的直线和圆 X 的交点为 P，求 P 的轨迹。设弓形小于半圆。

解 容易知道，

$BC\cdot BP=AB^2$(一定)。把弓形 ACB 作成一个整圆，设这圆的直径为 BD。若从 P 向 BD 作垂线 PE，则

$$PB\perp DC,\quad PE\perp DB,$$

由此可知，P、C、E、D 共圆。

$$\therefore\quad BD\cdot BE=BP\cdot BC=AB^2. \qquad ①$$

因此，E 是定点。

所以，点 P 在过定点 E 而垂直于 BD 的直线上。又这直线经过点 A，所以点 P 在半直线 AY 上。

反之，设 P' 为 AY 上的任意点，$P'B$ 与已知弧的交点为 C'，如果过三点 P'、C'、A 作圆，则这圆在点 A 切于 AB。其理由是：

$$\because\quad BD\perp P'E,$$

又 BD 是直径，

$$\therefore\quad \angle DC'B=90°.$$

因此，P'、C'、E、D 共圆。

$$\therefore\quad BC'\cdot BP'=BD\cdot BE.$$

由①，得　$BC'\cdot BP'=AB^2$.

由此可知，过 P'、C'、A 的圆，在点 A 切于 AB。

因此，所求的轨迹是射线 AY。

1878. 设 O 为定点，A 为定圆 C 上的点，取一点 P，使线段 OA 与线段 OP 的夹角等于定角 α，而且使 $OP\cdot OA=k^2$，求点 P 的轨迹。

解 若在 OA 上取点 P'，使 $OA\cdot OP'=k^2$，则点 P' 的轨迹，根据问题 **1687** 可以知道，它是一个圆，设这圆的圆心为 D，半径为 DP'。若以 O 为中心，把 $\triangle OP'D$ 旋转一个定角 α 到 $\triangle OPD'$ 的位置，则点 D' 的位置一定。因为 $D'P=P'D$(一定)，所以，点 P 的轨迹是以 D' 为圆心，以 $D'P$(与 DP' 等长)为半径的圆。

注 关于 OC 与求得的轨迹对称的图形，也是所求的轨迹。

1879. 设 AB 为已知圆 O 的任意弦，点 P 把 AB 内分为两部分 AP 和 PB，使以 $AP\cdot PB$ 为矩形的面积是定值 m^2 时，求分点 P 的轨迹。

解 过点 P 作圆 O 的直径 DE，则

$$AP\cdot PB=PE\cdot PD. \qquad ①$$

设 $OE=OD=r$,

又 $AP\cdot PB=m^2$.

则由①,得

$$AP\cdot PB=(OE+OP)\cdot(OD-OP).$$

$$\therefore\ m^2=(r+OP)\cdot(r-OP)$$
$$=r^2-OP^2,$$
$$\therefore\ OP^2=r^2-m^2.$$

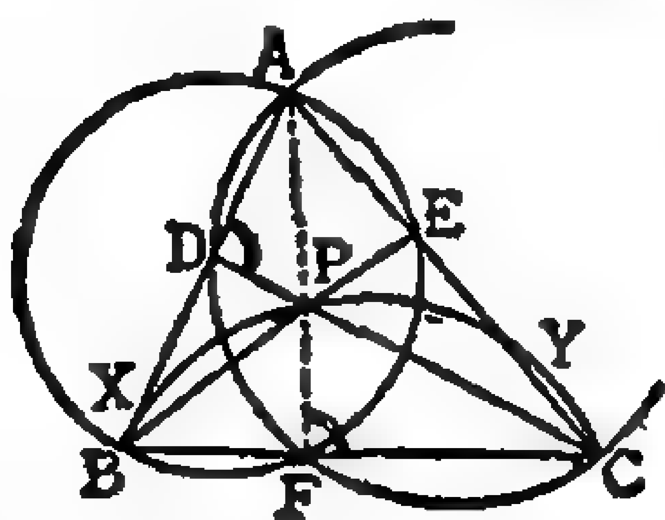
因此,点 P 在以 O 为圆心,半径的长等于 $\sqrt{r^2-m^2}$ 的圆上.

反之,因为这圆上的点适合条件.

因此,所求的轨迹是以 O 为圆心、半径的长等于 $\sqrt{r^2-m^2}$ 的圆.

1880. 已知 $\triangle ABC$,在 AB、AC 上分别取点 D、E,使 $BD\cdot BA+CE\cdot CA=BC^2$,若 BE、CD 的交点为 P,求点 P 的轨迹.

解 设圆 ABE 与 BC 的另一个交点为 F,则



$$CE\cdot CA=CF\cdot BC.$$
$$CE\cdot CA+BD\cdot BA=BC^2.$$
$$\therefore\ BD\cdot BA=BC^2-CF\cdot BC,$$

即 $BD\cdot BA=BC\cdot BF$.

由此可知,A、D、F、C 共圆.

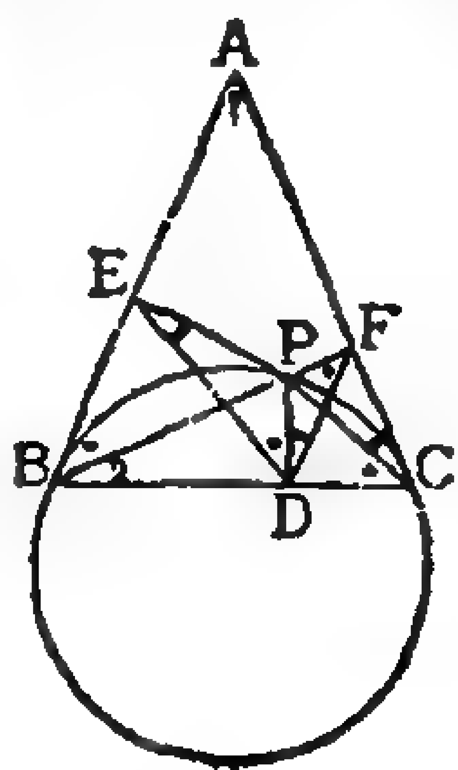
$$\therefore\ \angle ADC=\angle AFC=180^\circ-\angle AFB$$
$$=180^\circ-\angle AEB.$$

所以,A、D、P、E 共圆.

$$\therefore\ \angle BPC=\angle DPE=180^\circ-\angle A.$$

又 B、C 是定点,所以点 P 的轨迹是以 BC 为弦,所含圆周角等于 $180^\circ-\angle A$ 的弓形弧 BPC. 但是,若 D、E 只限定在 AB、AC 上时,则所求的轨迹是在 BPC 形内的部分弧 XY;若 D、E 还可以取在 AB、AC 的延长线上,则所求的轨迹是 BPC 的整个圆.

1881. 已知等腰三角形 ABC,从点 P 向腰 AB、AC 作垂线,设垂足分别是 E、F,当以 PE、PF 为矩形的面积,等于从 P 向底边 BC 所作的垂线 PD 上的正方形面积时,求点 P 的轨迹.



解 设 PD、PE、PF 分别为从 P 向三边 BC、AB、AC 作的垂线,则

$$\because\ \angle B=\angle C,$$
$$\therefore\ \angle EPD=\angle FPD.$$

又 $PD^2=PE\cdot PF$,

即 $PE:PD=PD:PF$,

$$\therefore\ \triangle EPD\backsim\triangle DPF.$$
$$\therefore\ \angle PDE=\angle PFD. \quad ①$$

而四边形 $EPDB$、四边形 $FPDC$ 都内接于圆,所以

$$\left.\begin{array}{l}\angle PDE=\angle PBE,\\ \angle PFD=\angle PCD.\end{array}\right\} \quad ②$$

由①、②,得

$$\angle PBE=\angle PCD.$$

因此,BE 切过 B、P、C 的圆于点 B. 同理可得,CF 切过 B、P、C 的圆于点 C.

由此可知,过 B、C 作圆,且使这个圆切 AB、AC 分别于 B、C,则点 P 在这个圆上.

反之,在这圆上取任意点 P',若从 P' 向 AB、BC、CA 分别作垂线 $P'E'$、$P'D'$、$P'F'$.

$$\because\ \angle E'BP'=\angle P'D'E',$$
$$\angle P'CD'=\angle P'F'D',$$
$$\angle E'BP'=\angle P'CD',$$
$$\therefore\ \angle P'D'E'=\angle P'F'D'.$$
$$\therefore\ \triangle P'D'E'\backsim\triangle P'F'D'.$$

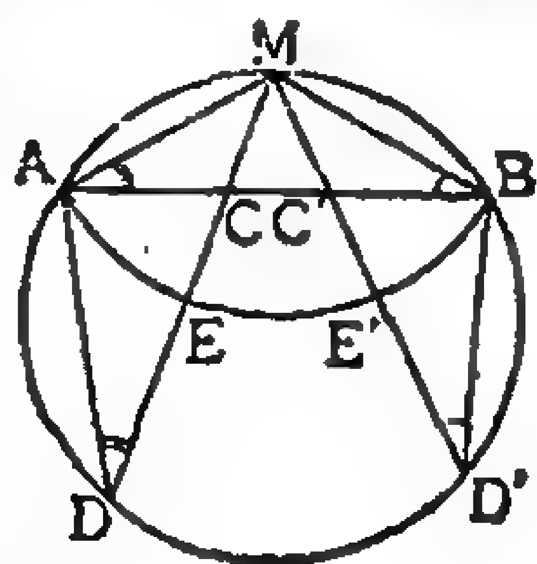
从而得出,

$$P'E':P'D'=P'D':P'F',$$

即 $P'D'^2=P'E'\cdot P'F'$.

因此,所求的轨迹,是过点 B、C,且切 AB、AC 分别于点 B、C 的圆.

1882. 过圆弧 AB 的中点 M,作弦 MD,它与弦 AB 的交点为 C. 在弦 MD 上取点 E,使 $MC\cdot MD=ME^2$,求点 E 的轨迹.



解 因为点 M 是弧 AB 的中点,所以

$$\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{MA}.$$
$$\therefore\ \angle MAB=\angle ADM.$$

因此,圆 ACD 切 AM 于点 A.

$$\therefore\ MC\cdot MD=MA^2.$$

设 E 为适合条件的点,

则 $MC\cdot MD=ME^2$.

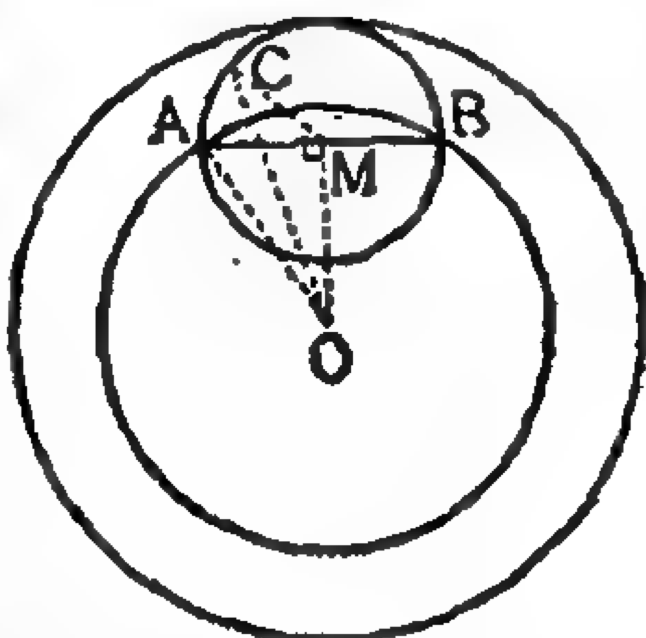
$$\therefore\ ME=MA,$$

因此，以 M 为圆心，以 MA 为半径作圆，则点 E 在原已知圆内的弧 AEB 上。

反之，容易证明，这个弧上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是弧 AEB。

1883. 在平面上，若以定圆的任意弦为直径作圆时，求所作的圆经过的点的存在范围。



解 设定圆的圆心为 O，半径为 r，任意的弦为 AB。从 O 向 AB 作的垂线，设垂足为 M。若以 AB 为直径作圆 M，在这圆上取任意点 C，则

$$OC \leqq OM+MC=OM+MA \leqq \sqrt{2}\,r.$$

其理由是：

$$\because\quad OM^2+MA^2=r^2,$$

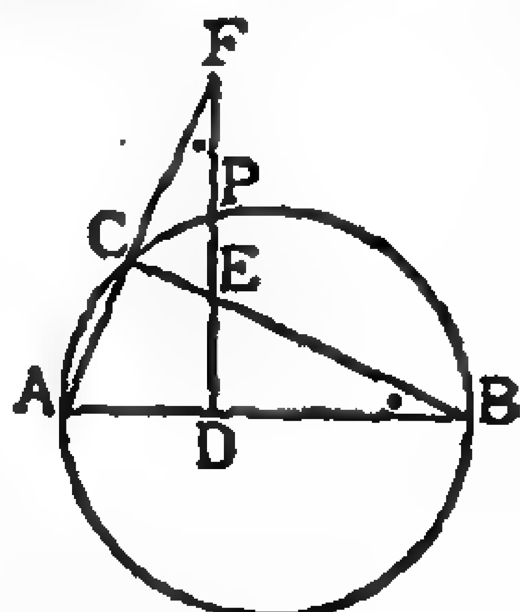
$$\therefore\quad (OM+MA)^2+(OM-MA)^2=2r^2,$$

即 $\quad (OM+MA)^2=2r^2-(OM-MA)^2.$

因此，当 $OM=MA$ 时，$OM+MA$ 取得最大值 $\sqrt{2}\,r$。所以，圆 M 上的点，是在圆心为 O，半径等于 $\sqrt{2}\,r$ 的圆内或圆上。

反之，当点 P 是在这个范围内时，因为在圆上可以适当地取两点 C、D，使 $\angle CPD$ 为直角，所以可以认为，P 是以圆 O 的适当的弦作直径圆上的点。因此，所求的范围是这个部分。

1884. 已知直角三角形 ABC，过斜边 AB 上的任意点 D 作 AB 的垂线，与 BC、AC 或其延长线分别交于点 E、F，若在这垂线上取点 P，使 $DP^2=DE\cdot DF$，求点 P 的轨迹。



解 $\triangle ADF$、$\triangle EDB$ 中，

$$\because\quad \angle ADF=\angle EDB=90^\circ,$$

$$\angle F=90^\circ-\angle A=\angle B.$$

$$\therefore\quad \triangle ADF \backsim \triangle EDB,$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{DF}=\frac{DE}{DB}.$$

$$\therefore\quad DE\cdot DF=AD\cdot DB.$$

由假定，得 $\quad DP^2=DE\cdot DF.$

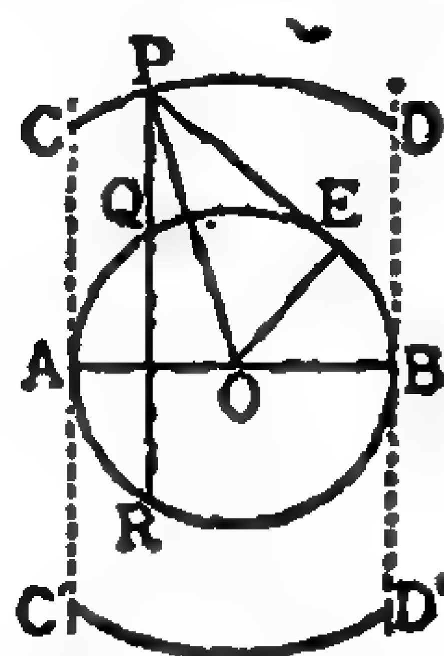
$$\therefore\quad DP^2=AD\cdot DB.$$

因此，点 P 在以 AB 为直径的圆上。

反之，可以证明，这圆上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是以 AB 为直径的圆。

1885. 设 QR 为定圆 O 的定方向弦，在 RQ 的延长线上取点 P，使 $RQ\cdot PR=m^2$，求点 P 的轨迹。



解 从 P 向定圆 O 作切线 PE，则

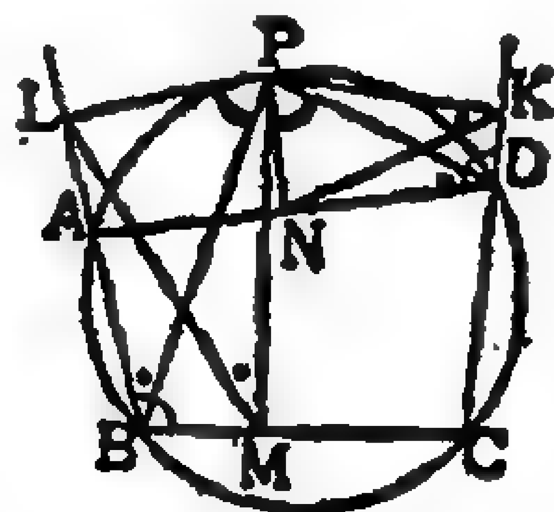
$$PE^2=PQ\cdot PR=m^2.$$

$$\therefore\quad PE=m.$$

由此可知，PE 是定长线段。所以，点 P 的轨迹是以 O 为圆心，且过 P 的圆。

但是，在定圆 O 中，作直径 AB 垂直于 QR，在直径两端 A、B，分别作垂直于 AB 的两条直线，则这两条直线间的两段弧是所求的轨迹。

1886. 圆内接四边形 $ABCD$，从一点 P 向它的两组对边作垂线，以两组对边的垂线的积分别为矩形的面积，若这两个矩形面积相等时，求点 P 的轨迹。



解 从点 P 向各边作垂线，设垂足分别为 L、M、K、N，则四边形 $PLBM$、四边形 $PNDK$ 都内接于圆。

$$\therefore\quad \angle LPM+\angle ABM=180^\circ,$$

$$\angle NPK+\angle ADK=180^\circ.$$

又四边形 $ABCD$ 也内接于圆，所以

$$\angle ABM=\angle ADK.$$

$$\therefore\quad \angle LPM=\angle NPK.$$

而 $\quad PL\cdot PK=PM\cdot PN.$

$$\therefore\quad \frac{PL}{PM}=\frac{PN}{PK}.$$

$$\therefore\quad \triangle LPM \backsim \triangle NPK.$$

从而得出，$\quad \angle LMP=\angle NKP.$

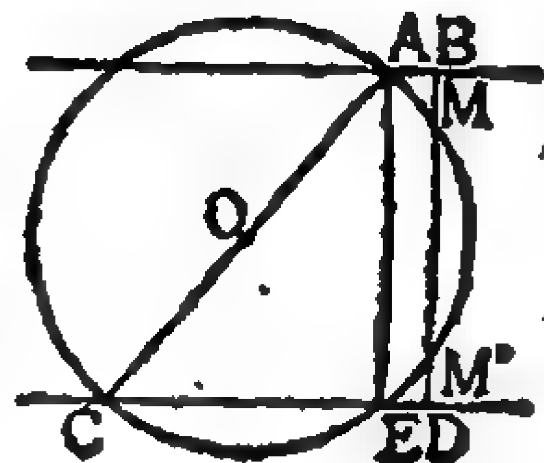
又 $\quad \angle LMP=\angle ABP,$

$$\angle NKP=\angle ADP,$$

$$\therefore\quad \angle ABP=\angle ADP.$$

因此，点 P 在过 A、B、D 的圆上。所以，所求的轨迹，是四边形 $ABCD$ 的外接圆。

1887. 设 A、C 分别为平行线 AB、CD 上的定点，作这两平行线的公垂线 BD，在 BD 上取点 M，使



$$MB\cdot MD=AB\cdot CD,$$

求点 M 的轨迹。

解　若在 DB 上取 $DM'=BM$，则

$$BM\cdot MD=DM'\cdot MD.$$

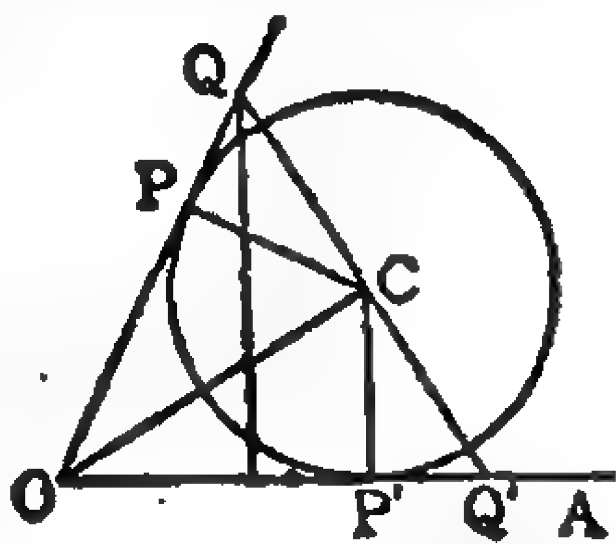
从点 A 向 CD 作垂线 AE，则

$$AB=ED.$$

$$\therefore\quad DM'\cdot MD=CD\cdot ED.$$

所以，C、E、M'、M 在同一个圆上。但因为过 M、M' 的圆的圆心是在 MM' 的中垂线上，又这个圆过 C、E，所以它的圆心也在 CE 的中垂线上。因此，圆 $CEM'M$ 变成了以 AC 为直径的圆。由此可得，点 M 的轨迹，是以 AC 为直径的一个圆。

1888.　过定点 O 作有定方向的直线 OA，定半径的动圆 C 切于 OA，从 O 向圆 C 作切线 OP，并延长到 Q，使 $OP\cdot PQ$ 等于定半径的平方，求点 Q 的轨迹。



解　过 C 作 CO 的垂线，与 OP、OA 的交点分别为 Q、Q'，则

$$\angle OCQ=90^\circ.$$

$$\because\quad CP\perp OQ,$$

$$\therefore\quad OP\cdot PQ=CP^2.$$

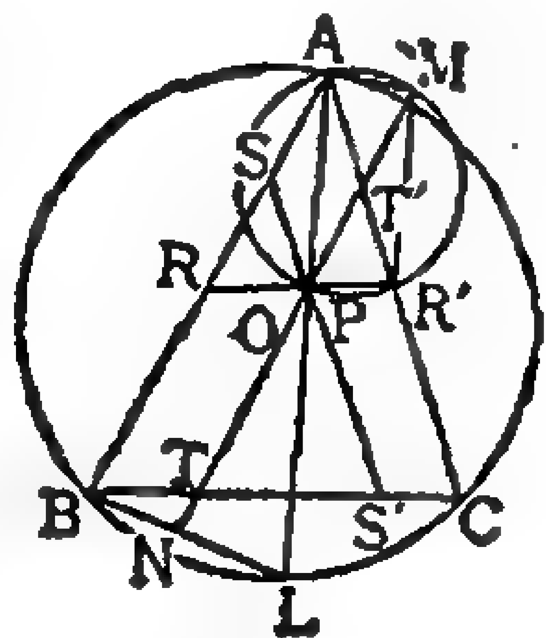
所以点 Q 是适合条件的点。

又 OC 是 $\angle POQ'$ 的平分线，所以

$$QC=Q'C.$$

由此可得，从 Q 到 OA 的距离是半径的两倍。所以点 Q 的轨迹，是到 OA 的距离为定半径的两倍且平行于 OA 的直线。若把圆 C 作在 OA 的相反一侧，则轨迹是关于 OA 与上面对称的直线。

1889.　已知 $\triangle ABC$ 内一点 P，过 P 作 BC、CA、AB 的平行线分别为 RPR'、SPS'、TPT'，且使 $PR\cdot PR'+PS\cdot PS'+PT\cdot PT'$ 为定值，求点 P 的轨迹。



解　设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心。$\triangle APR'$ 的外接圆与 TT' 的延长线的交点为 M，AP 的延长线与 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点为 L，连结 BL，BL 与直线 $MT'PT$ 的交点为 N，则

$$\triangle AT'M\backsim\triangle TPS'\text{（两角相等）}.$$

$$\therefore\quad \frac{PS'}{PT}=\frac{T'M}{AT'}.$$

而　　$AT'=PS.$

$$\therefore\quad PS\cdot PS'=PT\cdot T'M.$$

又　　$\triangle PMR'\backsim\triangle TBN,$

$$\therefore\quad \frac{PR'}{PM}=\frac{TN}{TB}.$$

而　　$TB=PR.$

$$\therefore\quad PR\cdot PR'=PM\cdot TN.$$

$$\therefore\quad PR\cdot PR'+PS\cdot PS'=PM\cdot TN+PT\cdot T'M.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad PR\cdot PR'+PS\cdot PS'+PT\cdot PT'&=PM\cdot TN+PT\cdot T'M+PT\cdot PT'\\&=PM\cdot TN+PT\cdot PM=PM\cdot PN.\end{aligned}$$

但因为 A、M、L、N 在同一个圆上，所以

$$PM\cdot PN=PA\cdot PL=(\text{半径})^2-OP^2$$

（问题 **1246**）。

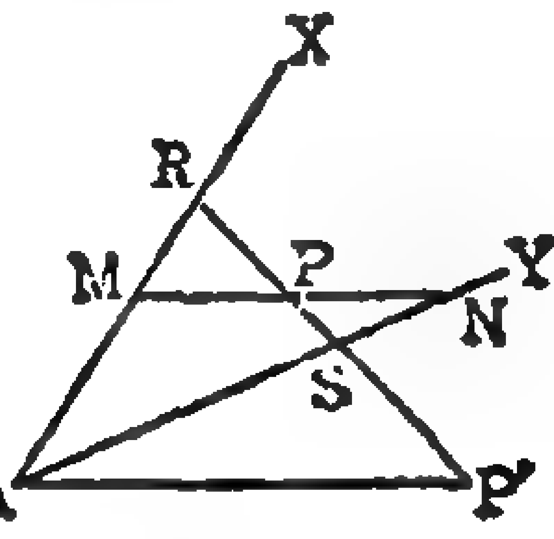
从而得出

$$PR\cdot PR'+PS\cdot PS'+PT\cdot PT'=(\text{半径})^2-OP^2.$$

由此可知，OP 为定长线段。所以点 P 的轨迹，是以 $\triangle ABC$ 的外心为圆心的一个圆。

16. 调和点列的轨迹

1890.　设两直线 AX、AY 交于点 A，过定点 P 的任意直线与 AX、AY 分别交于 R、S，若 P' 是 P 关于 RS 的调和共轭点，求点 P' 的轨迹。



解　设 $RP:PS=RP':SP'$。过 P 作 AP' 的平行线，与 AX、AY 的交点分别为 M、N，则

$$MP:AP'=RP:RP',$$

$$PN:AP'=PS:SP'.$$

而　　$RP:PS=RP':SP'.$

$$\therefore\quad MP:AP'=PN:AP'.$$

$$\therefore\quad MP=PN.$$

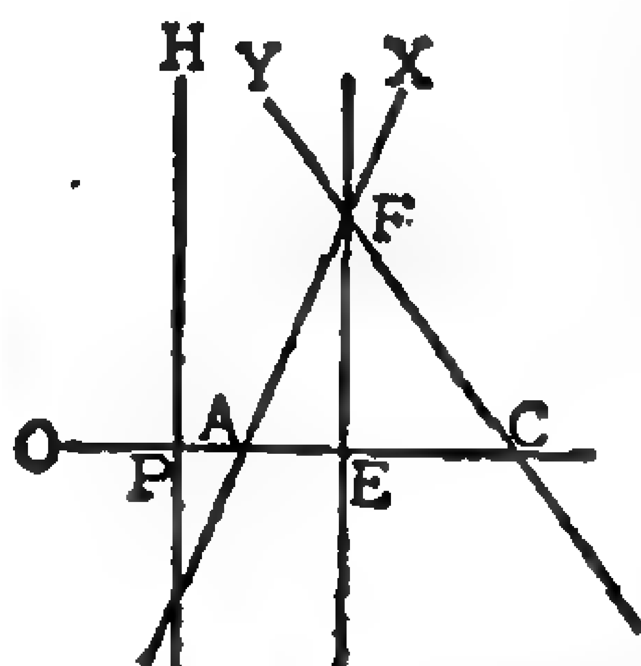
因为定点 P 是 MN 的中点，所以 MPN 为定长的线段。由此可知，点 P' 的轨迹，是过 A 所作定线段 MPN 的平行线。

1891.　两定直线 X、Y 相交于点 F，O 为直线 X 和直线 Y 的夹角外部的定点，过 O 作一直线与 X、Y 分别交于 A、C，在 OC 上

取点P，使

$$\frac{1}{OP}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC},$$

求点P的轨迹。



解 在AC上取点E，使O、A、E、C为调和点列，则点E的轨迹是过定直线X、Y的交点F的直线(问题**1890**)。

其次，设P为OE的中点，过P作PH平行于EF，则PH是所求的轨迹。其理由是：

因为O、A、E、C成调和点列，所以

$$\frac{2}{OE}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC}\text{（问题 1478）.}$$

而 $$2\cdot OP=OE.$$

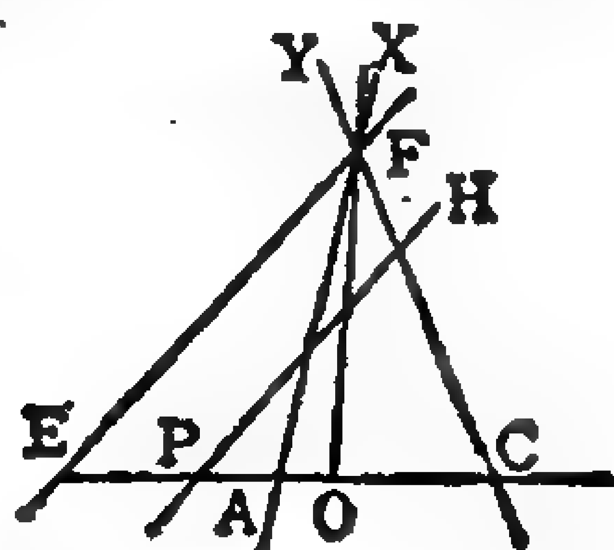
$$\therefore\quad \frac{1}{OP}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC}.$$

因此，点P适合条件。从而得出，所求的轨迹是直线PH。

1892. 两定直线X、Y相交于点F，O为直线X和直线Y的夹角内部的定点，过O作一直线与X、Y分别交于A、C，在这直线上取点P，使

$$\frac{1}{OP}=\frac{1}{OA}-\frac{1}{OC},$$

求点P的轨迹。



解 若在AC上取点E，使E、A、O、C作成调和点列，则点E的轨迹是过直线X和直线Y的交点F的直线(问题**1890**)。

其次，设P为OE的中点，过P作PH平行于EF，则PH是所求的轨迹。其理由是：

$$\because\quad OA:OC=EA:EC,$$

$$\therefore\quad OA:OC=(EO-OA):(EO+OC).$$

$$\therefore\quad OA\cdot(EO+OC)=OC\cdot(EO-OA),$$

$$OA\cdot EO+OA\cdot OC=OC\cdot EO-OA\cdot OC.$$

$$\therefore\quad 2\cdot OA\cdot OC=EO\cdot(OC-OA).$$

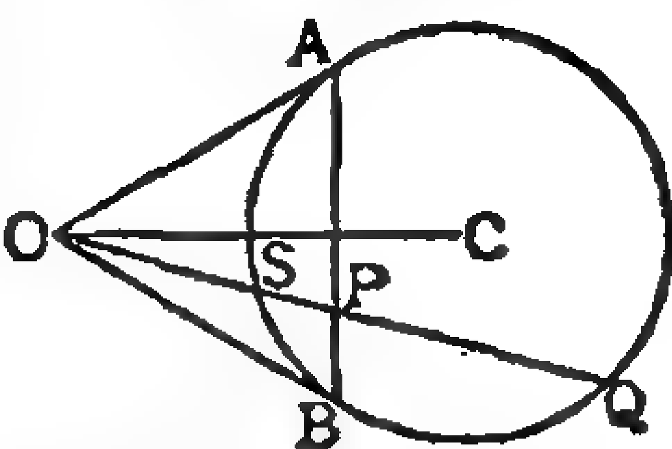
$$\frac{2}{OE}=\frac{OC-OA}{OA\cdot OC}=\frac{1}{OA}-\frac{1}{OC}$$

(问题**1477**)。

又 $$\frac{2}{OE}=\frac{1}{OP},$$

所以 $$\frac{1}{OP}=\frac{1}{OA}-\frac{1}{OC}.$$

1893. 设O是定点，C是已知圆的圆心。过O作任意割线OSQ与圆交于S、Q，若点P是点O关于S、Q的调和共轭点，求P的轨迹。但假设O在圆C的外部。



解 从O向圆C作两条切线OA、OB，连结切点A、B，弦AB与SQ的交点为P，则由问题**1495**，得

$$OQ:OS=PQ:PS, \qquad ①$$

即AB上的点适合条件。

反之，若在SQ上取点P'，使

$$OQ:OS=P'Q:P'S.$$

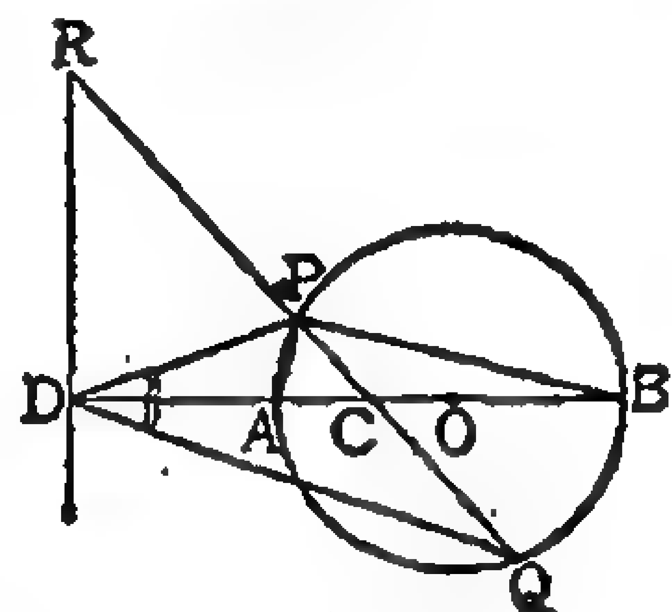
由上式与①，得

$$P'Q:P'S=PQ:PS.$$

由此可知，点P'与点P重合，即适合条件的点都在AB上。

因此，点P的轨迹是线段AB。

1894. 设C为定圆O内的定点，过C作任意弦PQ，在QP的延长线上取点R，使点R是点C关于P、Q的调和共轭点，求点R的轨迹。



解 过C作圆O的直径AB，在BA的延长线上取点D，使D、A、C、B成调和点列。连结DP、DQ，则P、Q是阿波罗尼斯圆上的点。

$$\therefore\quad PD:PC=DA:AC.$$

又 $$DA:AC=DQ:CQ,$$

$$\therefore\quad PD:PC=QD:QC.$$

由此可知，DC平分$\angle PDQ$。

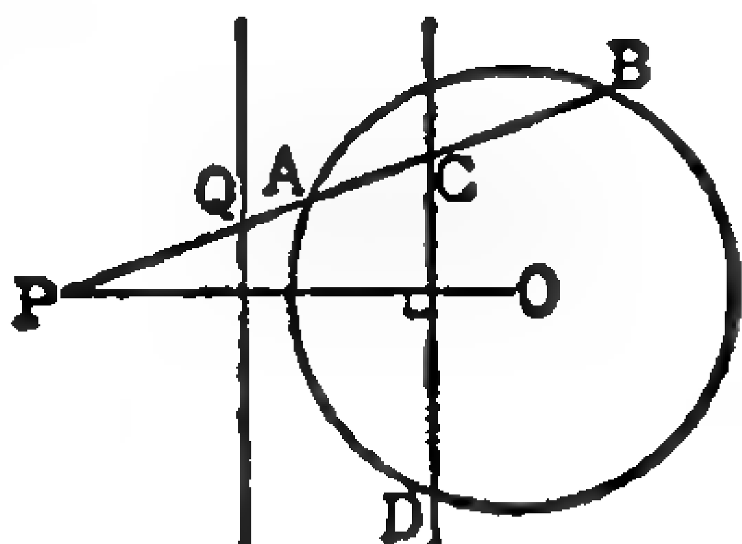
而R、P、C、Q成调和点列，且DC是$\angle QDP$的平分线，所以DR平分与$\angle QDP$相邻的外角。从而得出$DR\perp DC$。因此点R在过定点D而垂直于DC的直线上。

反之，可以证明这直线上的点适合条件。

从而得出，所求的轨迹是过D而垂直于DA的直线。

1895. 过定圆外的定点P，作割线

PAB，求满足 $\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}$ 的点 Q 的轨迹。



解 设关于圆 O 的点 P 的极值线为 CD，CD 与 AB 的交点为 C，则 P、A、C、B 成调和点列。

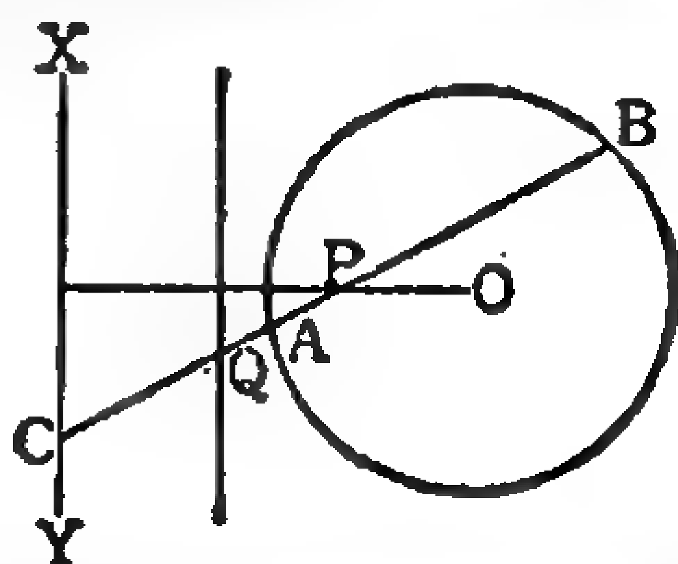
$$\therefore \quad \frac{2}{PC}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{PQ}=\frac{2}{PC}.$$

从而得出， $PQ=\frac{1}{2}PC$.

所以，所求的轨迹，是过点 Q 而平行于 CD 的直线上的一部分。亦即这直线夹在从点 P 向圆 O 所作的两条切线间的部分，才是所求的轨迹。

1896. 过定圆 O 内的定点 P，作割线 BPA，在 BA 的延长线上取点 Q，使 $\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PA}-\frac{1}{PB}$，求点 Q 的轨迹。



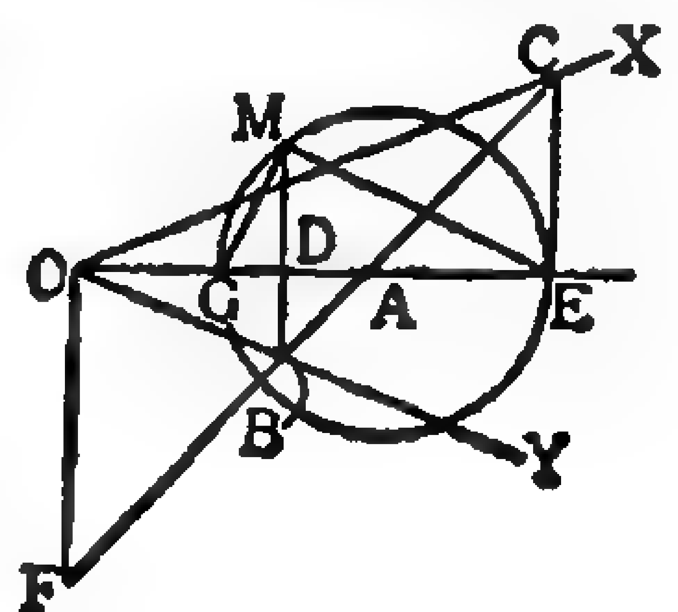
解 设关于圆 O 的点 P 的极值线为 XY，XY 与 BA 的交点为 C，则 PC 被点 A 及点 B 分为调和比，即 C、A、P、B 成调和点列。

$$\therefore \quad \frac{2}{PC}=\frac{1}{PA}-\frac{1}{PB}.$$

所以 $$\frac{1}{PQ}=\frac{2}{PC}.$$

从而得出，所求的轨迹是过点 Q 而平行于 XY 的直线。

1897. 设 A 为 $\angle XOY$ 的平分线上的定点，过点 A 作直线 BAC，它与角的两边分别交于 B、C，过 B、C 向角平分线作垂线 BD、CE，G 为 OA 的中点，以 GE 为直径作圆，求这圆与垂线 BD 的交点 M 的轨迹。



解 $\because \quad \angle GME=90°,$

$MD\perp GE,$

$$\therefore \quad GM^2=GD\cdot GE.$$

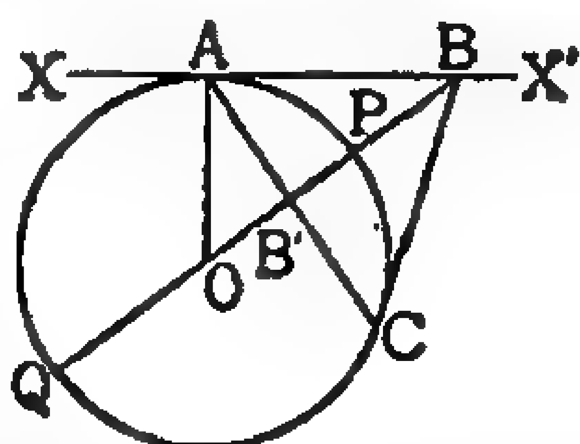
其次，过点 O 作 OF 垂直于 OE，延长 CAB 与直线 OF 交于点 F，则直线 AF 被 B、C 分为调和比。因此，OA 被 D、E 分为调和比。又 G 是 AO 的中点，所以

$$GA^2=GD\cdot GE.$$

$$\therefore \quad GM=GA.$$

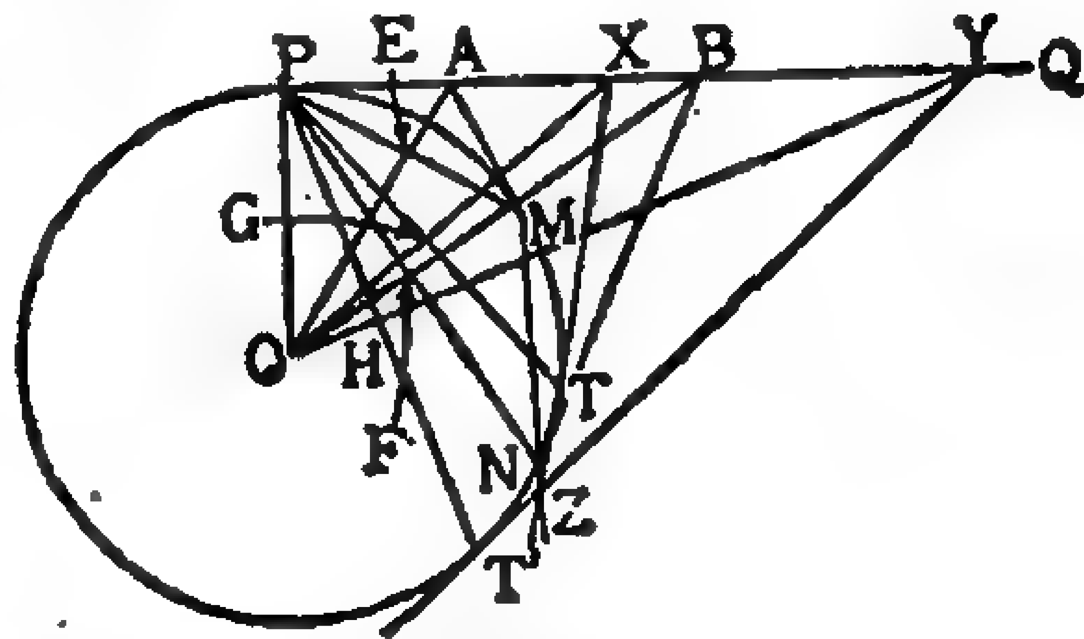
由此可知，点 M 的轨迹是以 OA 为直径的圆。

1898. 设 A 为定圆 O 上的定点，过 A 作圆 O 的切线 XAX'，B 为 XX' 上的任意点，过 B 作圆 O 的直径 PQ，在 PQ 上取点 B'，使 B、P、B'、Q 为调和点列，求点 B' 的轨迹。



解 从 B 向定圆 O 作切线 BC，设 AC、PQ 的交点为 B'，则 B、P、B'、Q 成调和点列(问题1434)。又因为 $AC\perp PQ$，所以 $\angle AB'O=90°$。由此可知，点 B' 的轨迹是以 AO 为直径的圆。

1899. 过定圆 O 上的点 P 作切线，A、B 为这切线上的两定点，X、Y 是关于 A、B 的调和点列，从 X、Y 向圆 O 作切线，求这两切线的交点 Z 的轨迹。



解 因为圆 O 的定切线 PQ 上的点 A、X、B、Y 是调和点列，若连结 OA、OX、OB、OY，则 OA、OX、OB、OY 成调和线束。从 A、X、B、Y 向圆 O 作切线，设切线分别为 AM、XT、BN、YT'。连结 PM、PT、PN、PT'。设 PM 与 OA 的交点为 E，PT 与 OX 的交点为 G，PN 与 OB 的交点为 F，PT' 与 OY 的交点为 H，因为 $\angle OEP$、$\angle OGP$、$\angle OFP$、$\angle OHP$ 都为直角，所以 E、G、F、H 在以 OP 为直径的圆上。于是

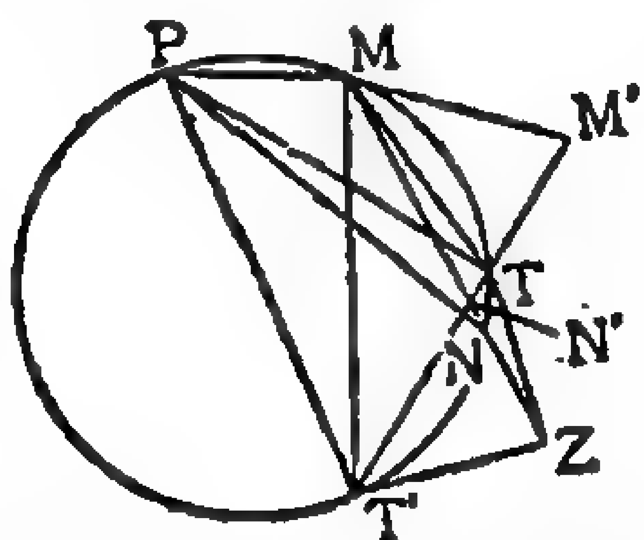
$$\angle EPG=\angle EOG,$$

即 $$\angle MPT=\angle AOX.$$

同理可得，

$\angle TPN=\angle XOB$，$\angle NPT'=\angle BOY$.

因此，PM、PT、PN、PT' 成调和线束.



其次，在右图中，连结 TT'，设 TT' 与过点 M 的切线相交于点 M'，TT' 与 MN 的交点为 N'，则 MM'、MT、MN'、MT' 成调和线束（其理由是：$\angle M'MT=\angle MPT$，$\angle TMN'=\angle TPN$，$\angle N'MT'=\angle NPT'$，而 PM、PT、PN、PT' 是调和线束）．从而得出，M'、T、N'、T' 成为调和点列．所以，由问题 **1495** 可知，点 M' 的极值线过点 N'．但因为从 M' 向圆 O 作切线，设切点为 M，M' 的极值线过 M，所以 M' 的极值线是 MN．因为 Z 的极值线 TT' 过 M'，所以 M' 的极值线 MN 过 Z（问题 **1497**）．因此，Z 的轨迹是直线 MN（但仅仅是圆外的部分，若平行于 PQ 的切线与 MN 的交点为 N''，则 N'' 是轨迹的界限，轨迹不包括点 N''）．

17. 杂题

1900. 从一点张望平行四边形的相邻两边，若所张的角互为补角，求这点的轨迹．

解 设 $ABCD$ 为平行四边形，AB、BC 为相邻两边．若 P 是轨迹上的点，由假定，得

$\angle APB+\angle BPC=180°$.

因此，A、P、C 共线．从而得出，点 P 在对角线 AC 上．

其次，若 P 为这对角线上的一点，很明显

$$\angle APB+\angle BPC=180°.$$

因此，若以 AB、BC 为相邻的两边，则所求的轨迹是对角线 AC．同理可得，若以 AD、DC 为相邻的两边，则所求的轨迹也是对角线 AC．若以 AB、AD(或 BC、DC) 为相邻的两边，则所求的轨迹是对角线 BD．

1901. 已知线段 AB，直线 XY 平行于 AB，CD 是在 XY 上的定长线段，AC、BD 的交点为 O，当 CD 在 XY 上变动位置时，求点 O 的轨迹．

解 设 AC、BD 的交点为 O，在 XY 上取 $C'D'=CD$．连结 AC'、BD'，设 AC'、BD' 的交点为 O'，则

$$AO:CO=AB:CD,$$

又

$$AO':C'O'=AB:C'D'.$$

$\therefore\quad AO:CO=AO':C'O'.$

从而得出，

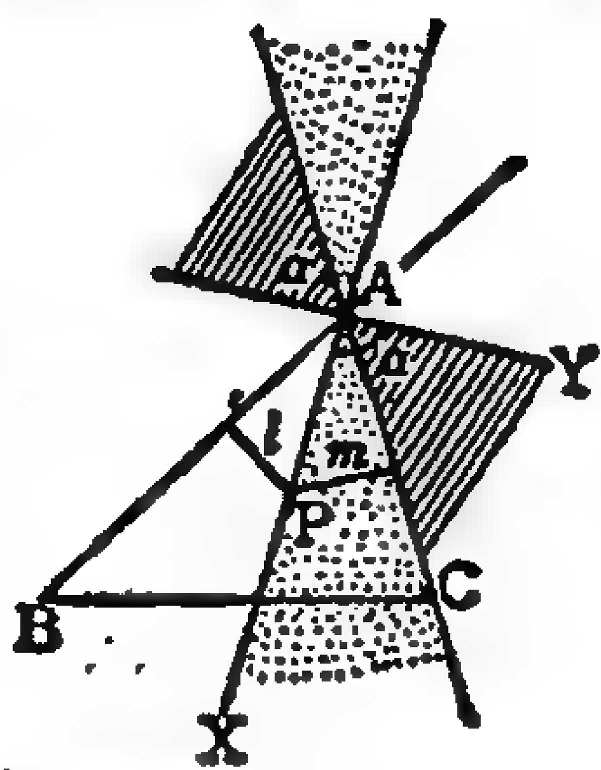
$$AC:CO=AC':C'O'.$$

所以，　　$OO'\parallel CD\parallel AB$.

反之，容易证明 OO' 上的点适合条件．

因此，所求的轨迹是平行于 AB 的直线 OO'．

1902. 已知 $\triangle ABC$ 所在平面上的点 P，从 P 向 AB、AC(或它的延长线)作垂线，设垂线的长分别为 l、m，求满足 $l>m$ 的点 P 的存在范围．



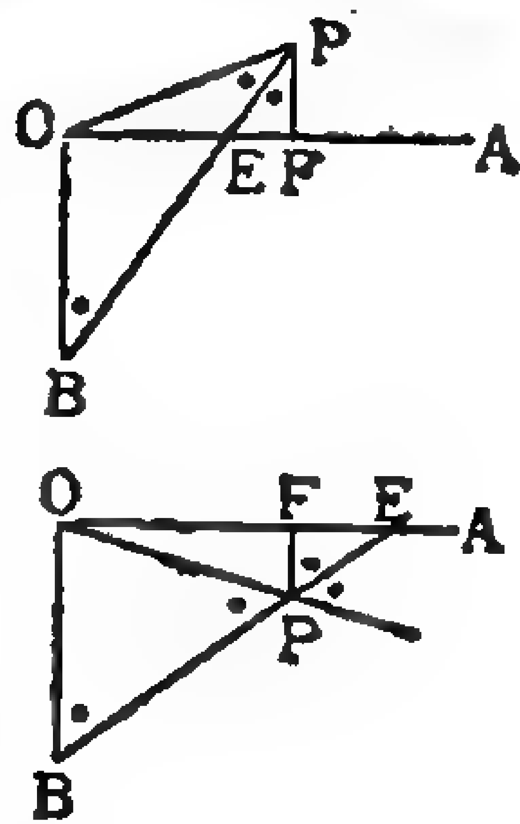
解 设 $\angle A$ 与它相邻的外角的平分线分别为 AX、AY，P 为 AX 或 AY 上的任意点．从 P 向 AB、AC 作垂线，设垂线长分别为 l、m，则很明显，$l=m$．

因此，适合 $l>m$ 的条件的点的范围是在 $\angle XAC$、$\angle YAC$ 及其对顶角的内部．

1903. 设 B 为直角 AOB 的边 OB 上的定点，过 B 作任意直线 BP，与另一边 OA 交于点 E，P 是一个动点，若从 P 向 OA 作垂线 PF，连结 PO，使

$$PO:PF=OE:EF,$$

求点 P 的轨迹．



解 设点 E 在线段 BP 上．因为

$$PO:PF=OE:EF,$$

所以 PE 平分 $\angle OPF$．但

$$OB\parallel PF,$$

$\therefore\quad \angle OBE=\angle EPF.$

$$\therefore\quad \angle OBE=\angle OPE$$

由此可得，OP 是定长线段．

如果 E 在线段 BP 的延长线上，则 PE 是 $\triangle POF$ 在顶点 P 的外角的平分线．所以

$$OB=OP.$$

因此，点 P 的轨迹是以 O 为圆心，以 OB

为半径的圆。

1904. 在正方形 $ABCD$ 内：(1)从一点张望边 AD 和边 BC，且所张的角相等，试用图形表示这种点的轨迹。(2)若从这点张望 AB 和 BC 呢？

解 (1) 望见 AD 和 BC 的张角相等的点，它的存在范围由下面三个部分集合所组成。

(i) AB 及 DC 的中垂线。

(ii) 对角线 AC、BD 向正方形外面延长的部分。

(iii) 作正方形的外接圆，这圆的劣弧 AB 及劣弧 CD。

$$\because\quad \widehat{AD}=\widehat{BC},$$

设 P 为 $\widehat{AB}$ 或 $\widehat{CD}$ 上的任意点，则

$$\angle APD=\angle BPC.$$

(2) 望见 AB 和 BC 的张角相等的点，它的存在范围由下面两个部分集合所组成。

(i) 对角线 BD 及其延长线。

(ii) 作正方形的外接圆，这圆的半圆弧 ADC。其理由是：

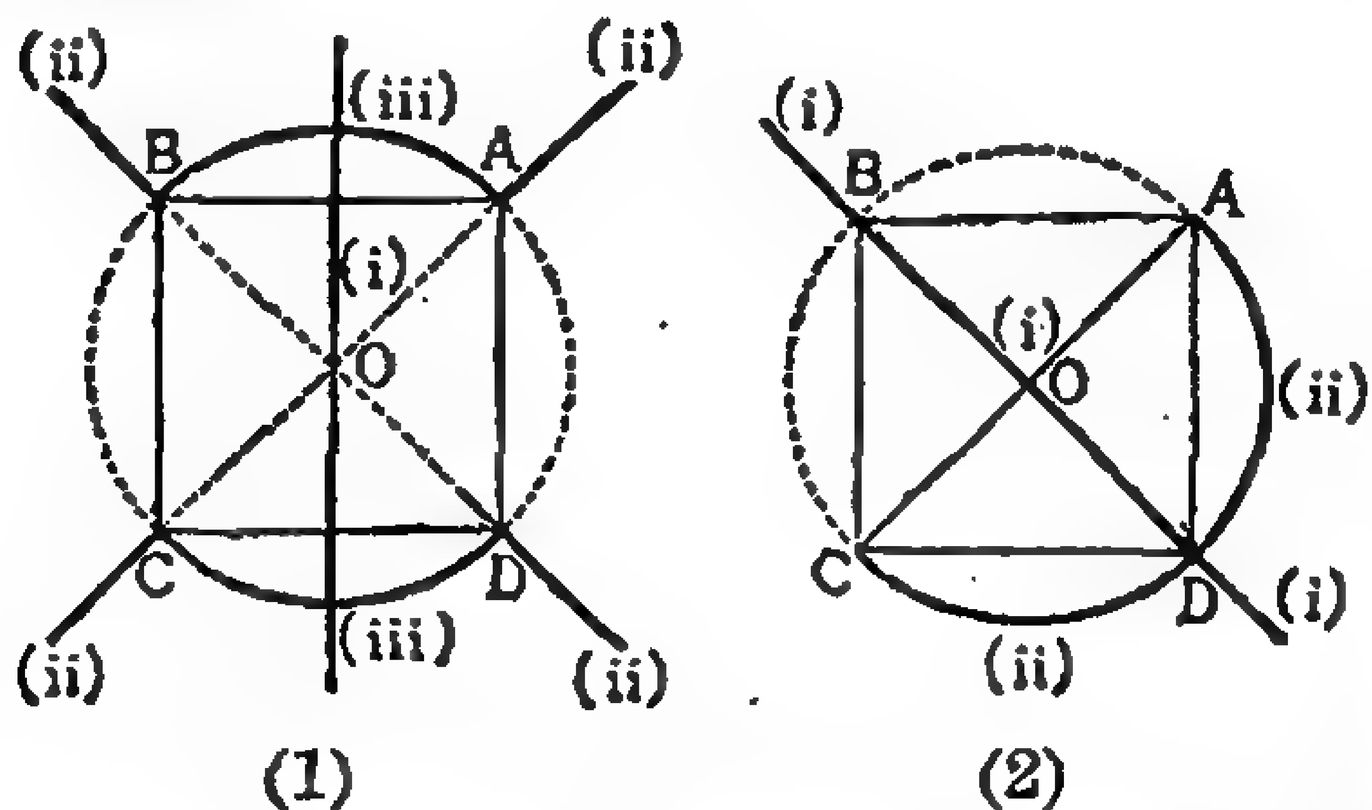
$$\because\quad \widehat{AB}=\widehat{CD},$$

若 P 为弧 ADC 上的任意点，则

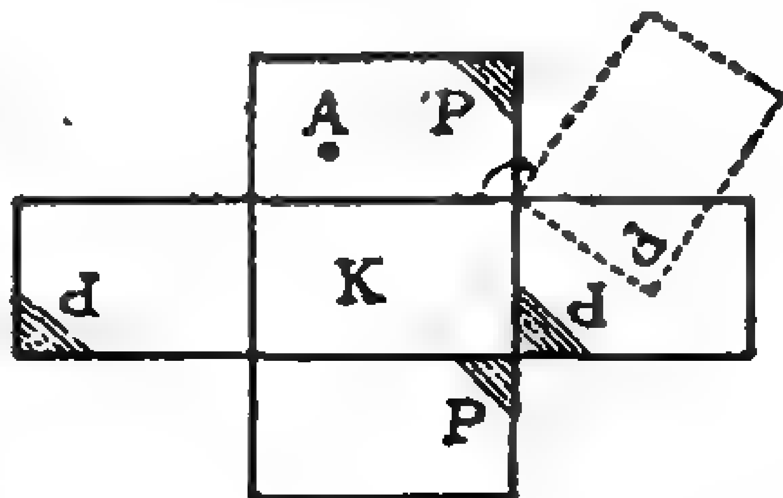
$$\angle APB=\angle BPC.$$

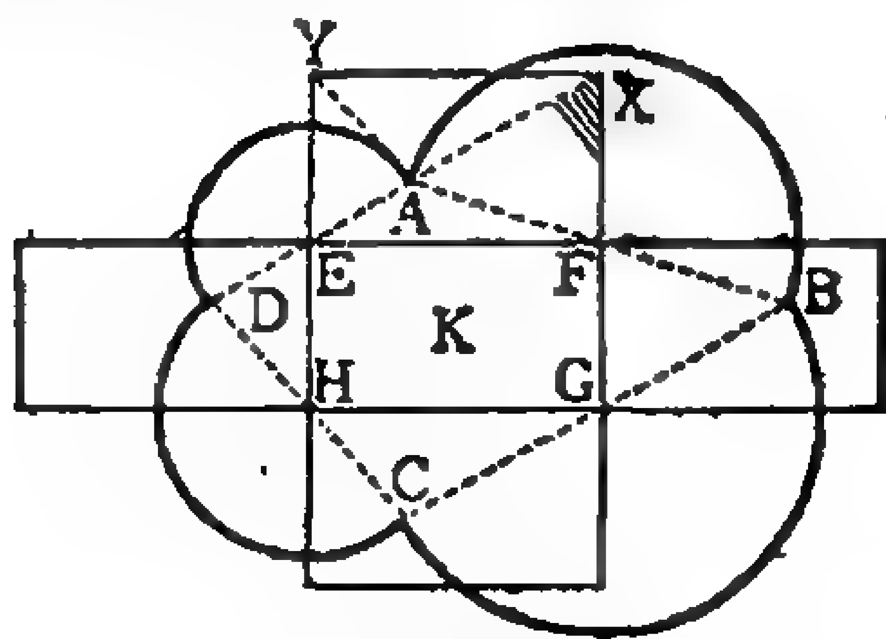
以上无论哪个部分，反过来都成立。

［答］ 在下图中，用粗线所示的部分是所求的轨迹。



1905. 在平面上，有矩形 K。把与 K 全等且有一边重合的矩形 P 绕着 K，一个接一个地旋转，再回到原来的位置，试画出 P 内的点 A 运动的轨道。其次，要使这条轨道的全长为最小，则点 A 取在 P 内何处为宜。





解 设矩形 K 为 $EFGH$，矩形 P 的最初位置为 $EFXY$，A 关于 F 的对称点为 B，B 关于 G 的对称点为 C，C 关于 H 的对称点为 D，则点 A、点 D 关于 E 对称。点 A 运动的轨道，是以 AB、BC、CD、DA 为直径的四个半圆。

轨道的长度 $=\pi(AF+BG+CH+DE)$。

$$\because\quad BG=AX,\ CH=AY,\ DE=AE.$$

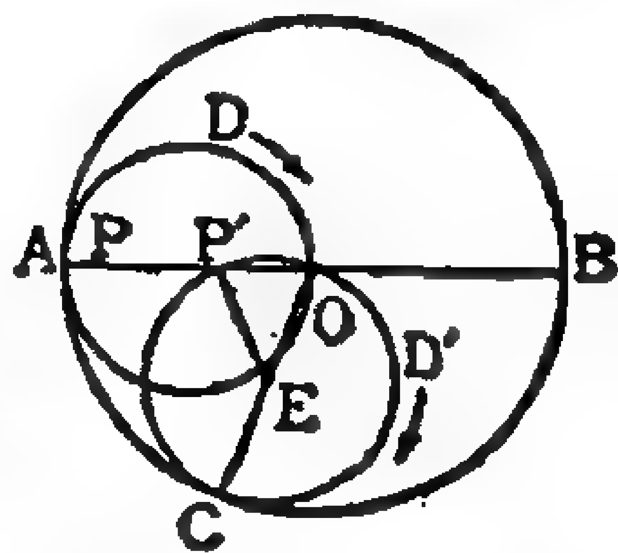
$\therefore$ 轨道的长度

$$=\pi(AF+AX+AY+AE),$$

而 $\quad AF+AY\geq FY,\ AX+AE\geq EX,$

所以，要使轨道的长度取得最小值，只需上面两式中取等号。亦即是，只当点 A 为 FY、EX 的交点(即矩形 P 的中心)时，轨道的长度才取得最小值。

1906. 已知定圆 ABC，圆 OPD 是以定圆的半径为直径的圆，若小圆 OPD 不停地在旋转，但它总是内切于定圆 ABC，则小圆上的定点 P 的轨迹是怎样的？



解 首先，当小圆上的定点 P 切于大圆上的点 A 时，小圆的位置为 PDO。再按箭头方向旋转，在某一时刻，小圆的位置为 $OD'C$，圆心为 E。过 A 作大圆的直径 AOB，AOB 与小圆交于点 P'。因为这时小圆仍是以大圆的半径为直径的圆，所以，在这两种情况下的小圆，它们的交点之一的点 O，即是大圆的圆心。

其次，连结 OE，并延长 OE，则显然 OE 过切点 C。在 $\triangle OEP'$ 中，

$$\angle CEP'=\angle OP'E+\angle P'OE.$$

而 $$OE=EP'.$$

$$\therefore\quad \angle OP'E+\angle P'OE=2\angle EOP'.$$

$$\therefore\quad \angle CEP'=2\angle AOC.$$

从而得出，　　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{P'C}$。

因此，小圆从第一个位置变动到第二个位置时，亦即切点从 A 变到 C 时，P 点变到 P'。换言之，点 P 恒在直径 AB 上移动，所以，直径 AB 是所求的轨迹。

1907. 设四点 A、B、C、D 在一直线上，从点 P 望见两线段 AB、CD 所张的角相等时，求点 P 的轨迹。

解 设 P 为适合条件的点。作 $\triangle PAD$ 的外接圆，从 P 作这圆的切线与 AD 的延长线的交点为 O，则

$$\angle OPD=\angle A. \qquad ①$$

但由假定，得

$$\angle APB=\angle CPD. \qquad ②$$

由 ①、②，得

$$\angle OPD+\angle DPC=\angle A+\angle APB.$$

而　　$\angle A+\angle APB=\angle PBC.$

$$\therefore\ \angle OPC=\angle PBC. \qquad ③$$

由此可知，OP 切 $\triangle PBC$ 的外接圆于点 P。从而得出，$\triangle PBC$ 的外接圆在点 P 内切于 $\triangle PAD$ 的外接圆。

$$\therefore\ PO^2=OA\cdot OD=OB\cdot OC.$$

$$\therefore\ \frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{OA-OC}{OB-OD}=\frac{AC}{BD},$$

即　　$\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{AC}{BD}$（一定）。

由此可知，O 是定点。因为 $OP^2=OD\cdot OA$，所以 OP 为定长的线段。因此，点 P 在以 O 为圆心，以 OP 为半径的圆上。

反之，以 O 为圆心，以 OP 为半径的圆上的点适合条件。

因此，所求的轨迹是以定点 O 为圆心，以定长线段 OP 为半径的圆。

1908. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，求使 $\angle APB=\angle APC$ 的点 P 的轨迹。但设点 P 在 $\triangle ABC$ 的平面内。

解 设 P 为适合条件的点。在 $\triangle APB$、$\triangle APC$ 中，因为 $AB=AC$，AP 公用，

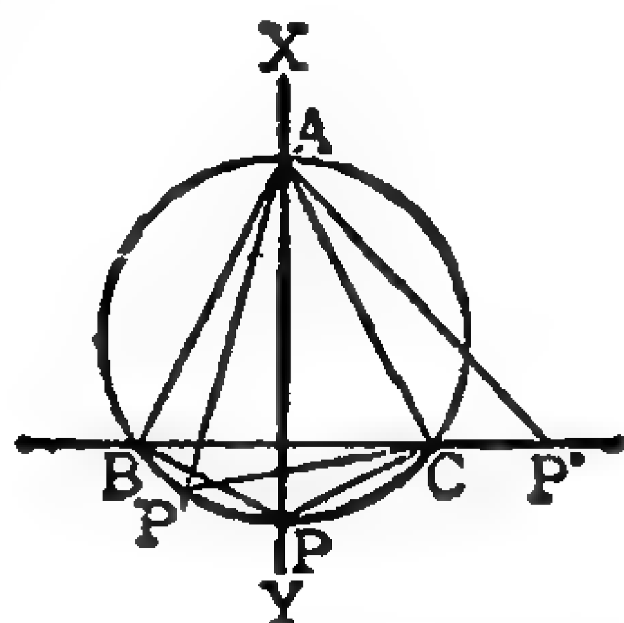
$$\angle APB=\angle APC,$$

所以，这两个三角形变成所谓两意三角形的情形，这就是 $\angle ABP$ 与 $\angle ACP$ 或者相等，或者相补。若 $\angle ABP$ 与 $\angle ACP$ 相等时，则

$$\triangle APB\cong\triangle APC.$$

$\therefore\ BP=CP.$

因此，点 P 在 BC 的中垂线上。



其次，若 $\angle ABP$ 与 $\angle ACP$ 相补时，则四边形 $ABPC$ 成为内接于圆的四边形。所以，点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆的弧 BC 上，设在点 P' 的位置上，或在 BC 的双方延长线上，设在点 P'' 的位置。这也都适合条件。因此，适合条件的点，或在 BC 的中垂线上，或在 BC 的双方延长线上，或在弧 BC 上。

反之，若在 XY 上取任意点 P。因为 $\triangle APB$、$\triangle APC$ 三边分别相等，所以

$$\triangle APB\cong\triangle APC,$$

从而得出　　$\angle APB=\angle APC.$

其次，在弧 BC 上取任意点 P'。因为

$$AB=AC,$$

所以　　$\angle APB=\angle AP'C.$

又在 BC 的双方延长线上取任意点 P''，则

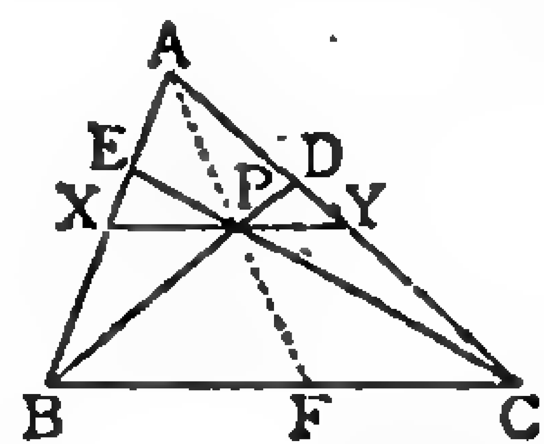
$$\angle AP''B=\angle AP''C.$$

综上所述可知，点 P 的轨迹，是底边 BC 的中垂线、底边 BC 的双方延长线部分及弧 BC。

1909. 设 P 为 $\triangle ABC$ 内一动点，BP 与 AC、CP 与 AB 的交点分别为 D、E，求满足

$$\frac{AD}{CD}+\frac{AE}{BE}=1$$

的点 P 的轨迹。



解 设 AP 的延长线与 BC 的交点为 F，BD 是过 $\triangle ACF$ 的截线，

$$\therefore\ \frac{AD}{CD}\cdot\frac{PF}{AP}\cdot\frac{BC}{BF}=1\ \text{（梅涅劳斯定理）}.$$

$$\therefore\ \frac{AD}{CD}\cdot\frac{PF}{AP}=\frac{BF}{BC}. \qquad ①$$

同理可得，　　$\dfrac{AE}{BE}\cdot\dfrac{PF}{AP}=\dfrac{CF}{BC}. \qquad ②$

把 ①、② 的两边分别相加，得

$$\frac{PF}{AP}\left(\frac{AD}{CD}+\frac{AE}{BE}\right)=\frac{BF+CF}{BC}=1,$$

而　　$\dfrac{AD}{CD}+\dfrac{AE}{BE}=1.$

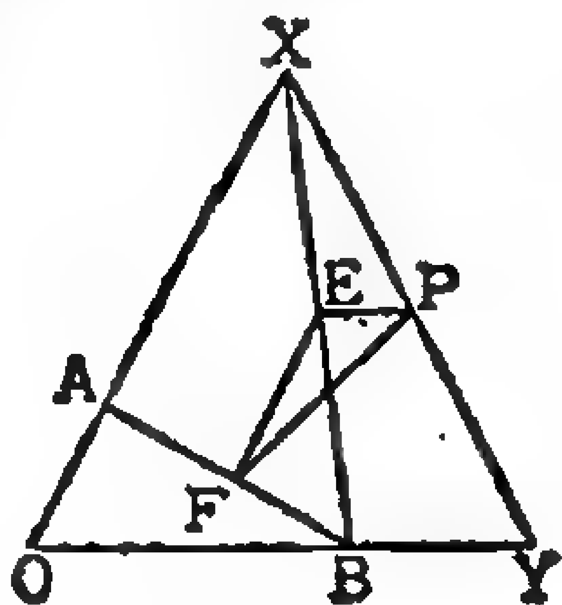
所以 $PF=AP$.

因此，点 P 的轨迹是连结 AB、AC 的中点的线段 XY.

1910. 设 A、B 分别为 $\angle XOY$ 的两边 OX、OY 上的定点，取点 X、Y，使 $AX:BY=m:n$，在 YX 上取点 P，使

$PX:PY=p:q$，

求点 P 的轨迹。



解 作

$PE\parallel BY$, $EF\parallel AX$,

则 $$\frac{AF}{FB}=\frac{XE}{EB}=\frac{XP}{PY}=\frac{p}{q}.$$

由此可知，F 是定点。

又 $$\frac{EF}{AX}=\frac{FB}{AB}=\frac{q}{p+q},$$

$$\therefore\quad EF=\frac{q}{p+q}\cdot AX. \qquad ①$$

同理可得，

$$EP=\frac{p}{p+q}\cdot BY. \qquad ②$$

由①、②，得

$$\frac{EF}{EP}=\frac{q}{p}\cdot\frac{AX}{BY}.$$

而 $$\frac{AX}{BY}=\frac{m}{n},$$

所以

$$\frac{EF}{EP}=\frac{q}{p}\cdot\frac{m}{n}(\text{一定}). \qquad ③$$

因为 $EP\parallel OY$, $EF\parallel OX$，所以

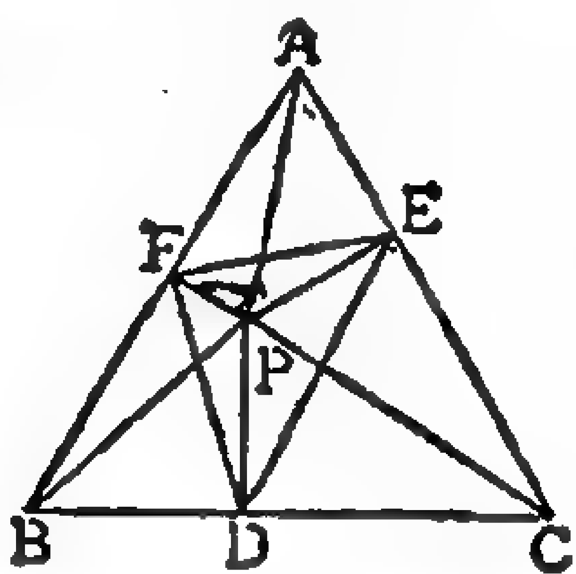
$$\angle PEF \text{ 一定}. \qquad ④$$

由③、④可知，$\triangle EPF$ 的形状是一定的。从而得出 $\angle EFP$ 的大小一定。

而 $EF\parallel OX$，所以，EF 的方向一定。所以，FP 的方向也是确定的。

因此，点 P 在过定点 F 且有定方向的直线上，这直线就是所求的轨迹。

1911. 设 P 为正三角形内一点，从 P 向各边作垂线，垂足分别为 D、E、F，若以 D、E、F 为顶点所作的三角形是锐角三角形，则 P 在怎样的范围内？又怎样作出这个范围？



注 在本题中，为了要使 $\triangle DEF$ 是锐角三角形，就必须证出 $\angle BPC$、$\angle CPA$、$\angle APB$ 都小于 $150°$ 才是。亦即采用如下的证法。

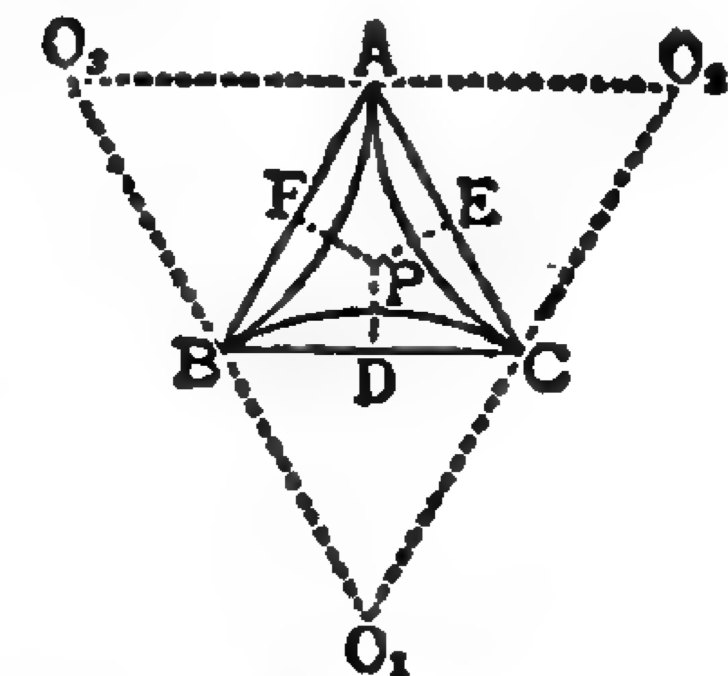
解 设 $\triangle ABC$ 为正三角形，P 为适合条件的点，由 P 向各边 BC、CA、AB 作垂线，垂足分别为 D、E、F，则

$$\begin{aligned}\angle BPC&=\angle PBA+\angle BAC+\angle ACP\\&=\angle BAC+\angle PDF+\angle PDE\\&=\angle BAC+\angle EDF\\&=60°+\angle EDF.\end{aligned}$$

而 $\angle EDF<90°$.

所以

$\angle BPC<150°$.



因此，作以 BC 为弦，所含圆周角等于 $150°$ 的弓形弧，则点 P 在这弓形弧的外部，且与点 A 位于 BC 的同侧。

同理可得，$\angle CPA<150°$,

$\angle APB<150°$.

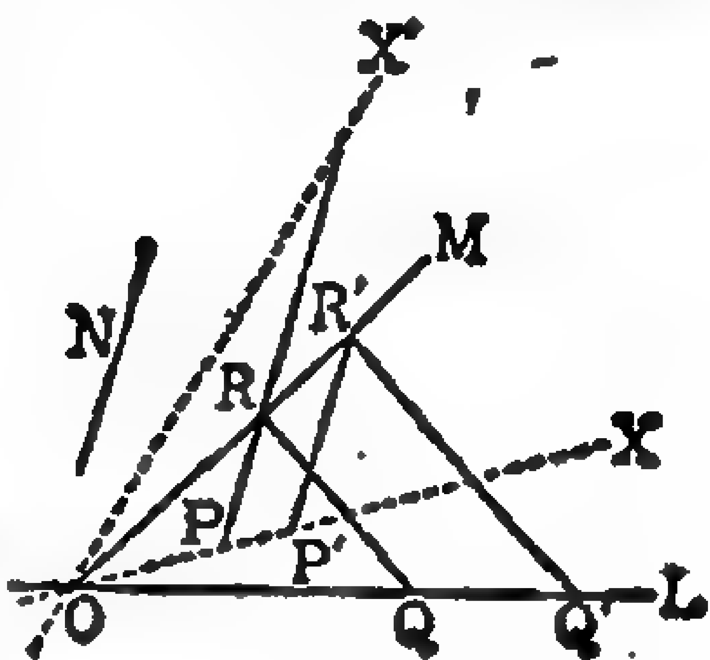
因此，作以 CA 为弦，所含圆周角等于 $150°$ 的弓形弧，则点 P 在这弓形弧的外部，且与点 B 位于 CA 的同侧；又作以 AB 为弦，所含圆周角等于 $150°$ 的弓形弧，则点 P 在这弓形弧的外部，且与点 C 位于 AB 的同侧。但因这三个弓形弧在 $\triangle ABC$ 的三个顶点两两相切，所以用这三个弓形弧所围成的部分，就是所求的范围。可以象下面那样作出所求的范围。

以 BC、CA、AB 分别为一边，在原三角形的外侧作正三角形，设这三角形的第三个顶点分别为 O_1、O_2、O_3，以 O_1、O_2、O_3 分别为圆心，以等于 BC 的长的线段为半径作圆，这些圆在原三角形的内部的三个弧所围的部分，就是所求的范围。

1912. 设 OM、OL 及 N 为三条定直线，Q 为 OL 上的任意点，从 Q 向 OM 作垂线 QR，过 R 作平行于 N 的直线 RP，求使

$$\frac{QR}{RP}=\frac{m}{n}$$

的点 P 的轨迹。



解 因为 $\triangle OQR$ 的形状一定，所以

$\frac{OR}{QR}$ 是一定，设为 p. 而

$$\frac{QR}{RP}=\frac{m}{n}.$$

$$\therefore\quad \frac{OR}{RP}=\frac{OR}{QR}\cdot\frac{QR}{RP}=p\cdot\frac{m}{n}(\text{一定}).$$

又 $\angle ORP$ 是定角，所以，$\triangle OPR$ 的形状一定。由此可知，$\angle ROP$ 的大小为一定。因此，作直线 OX 与 OM 的夹角等于这个定角，则点 P 在直线 OX 上。

反之，在 OX 上取一点 P'，过 P' 作 $P'R'$ 平行于 N，作 $R'Q'$ 垂直于 OM，则

$$\frac{R'P'}{RP}=\frac{OR'}{OR}=\frac{Q'R'}{QR},$$

即

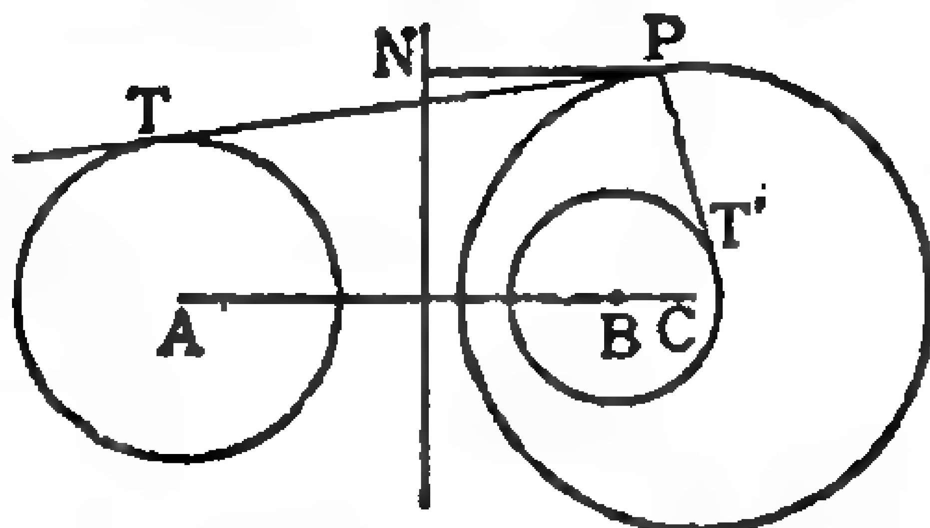
$$\frac{Q'R'}{R'P'}=\frac{QR}{RP}=\frac{m}{n}.$$

所以，点 P' 适合所给的条件。

因此，点 P 的轨迹是直线 OX。

当把 RP 作在关于 OM 与上面相反的一侧时，则所求的轨迹是直线 OX'。

1913. 从一点 P 向两定圆 A、B 作切线，使两切线的长度的比等于定比，求点 P 的轨迹。



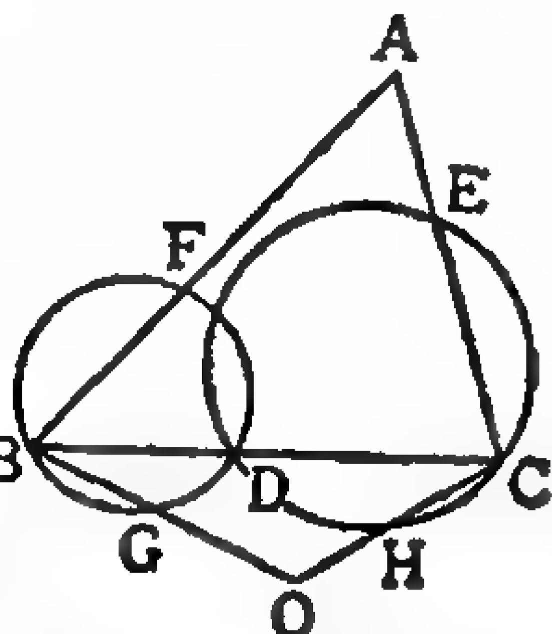
解 设 P 为适合条件的点，PN 是向圆 A、B 的根轴所作的垂线。过 P 作圆 A、B 的共轴圆，设圆心为 C(问题 **970**)，则

$$PT^2=2CA\cdot PN,\quad PT'^2=2CB\cdot PN.$$

$$\therefore\quad CA:CB=PT^2:PT'^2\ (\text{一定}).$$

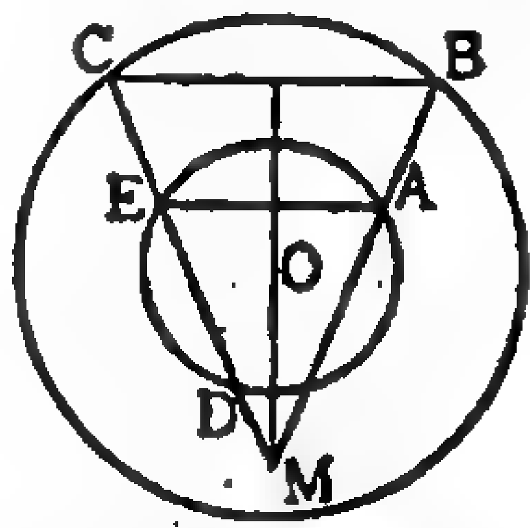
因此，若以定比 $PT^2:PT'^2$ 外分线段 AB，则以外分点 C 为圆心的一个圆是所求的轨迹。

1914. 设四边形 $ABOC$ 的形状一定，当 $\triangle ABC$ 不断地移动位置，且它的三边 BC、CA、AB 分别过定点 D、E、F 时，求点 O 的轨迹。



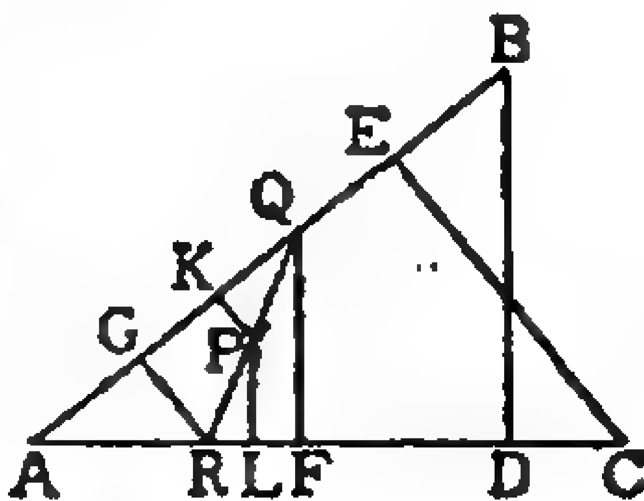
解 因为 DF 是定长，$\angle DBF$ 的大小一定，所以圆 DBF 一定。又因 $\angle DBO$ 的大小也一定，设圆 DBF 与 BO 的交点为 G，则弧 GD 的长一定。由此可知，G 是定点。同理可得，H 也是定点。因为 $\angle GOH$ 的大小一定，所以点 O 的轨迹，是以 GH 为弦，含 $\angle GOH$ 的圆弧。

1915. 设三角形 BCM 为等腰三角形，两底角 B、C 的大小一定，且又在定圆 O 上移动，边 BM 过定点 A，求点 M 的轨迹。



解 以 O 为圆心、OA 为半径作圆，设这圆与直线 MC 的交点为 D、E. 由 $AE\parallel BC$ 及 $\angle AED$ 一定，可知点 D 是定点。又因为 $\angle CMB$ 的大小一定，所以点 M 的轨迹，是以 AD 为弦，所含圆周角等于 $\angle CMB$ 的两个弓形弧。

1916. 设两直线 AB、AC 相交，点 P 到 AB 的距离的 m 倍，它到 AC 的距离的 n 倍的和(m、n 是正整数）等于定长，求点 P 的轨迹。



解 设 m、n 为正整数。作 BD、CE 分别垂直于 AC、AB，若 BD、CE 的长都等于定长 l，则 AB、AC 相等且等于定长。又在 AB、AC 上分别取 AQ、AR，使

$$AQ=\frac{1}{n}AB,\quad AR=\frac{1}{m}AC.$$

连结 QR，则在直线 QR 上的任意点 P 适合条件。其理由是：

若从 P 向 AB、AC 分别作垂线 PK、PL，从 R 向 AB 作垂线 RG，则

$$CE:RG=AC:AR,$$

即

$$l:RG=AC:\frac{1}{m}AC.$$

$$\therefore\quad m\cdot RG=l.$$

$$\because\quad \frac{PK}{RG}=\frac{QP}{QR},$$

$$\therefore\quad \frac{m\cdot PK}{l}=\frac{QP}{QR}.\qquad ①$$

同理可得，

$$\frac{n\cdot PL}{l}=\frac{RP}{QR}.\qquad ②$$

由①+②，得

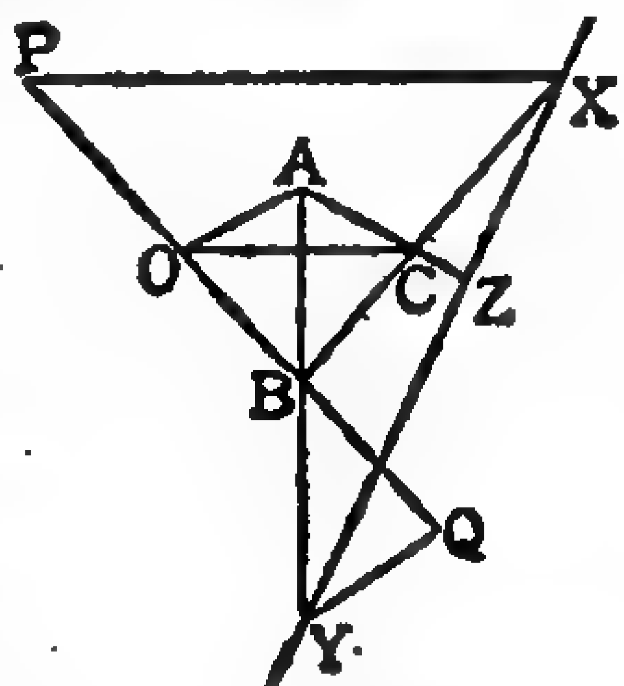
$$\frac{m\cdot PK+n\cdot PL}{l}=\frac{PQ+PR}{QR}=\frac{QR}{QR}=1.$$

因此，QR 上的点适合条件。

其次，可以知道，在这直线外的点不适合条件。

因此，点 P 的轨迹是直线 QR。

1917. 设 $\triangle ABC$ 的三边过一直线上的三点 X、Y、Z，两顶点 A、B 分别在已知直线 OA、OB 上，求点 C 的轨迹。



解 从 Y 作 OA 的平行线，从 X 作 CO 的平行线，它们分别与 BO 相交于 Q、P，则 ACZ 是 $\triangle BXY$ 的截线。

$$\therefore\quad \frac{XC}{CB}\cdot\frac{BA}{AY}\cdot\frac{ZY}{XZ}=1$$

（梅涅劳斯定理）。

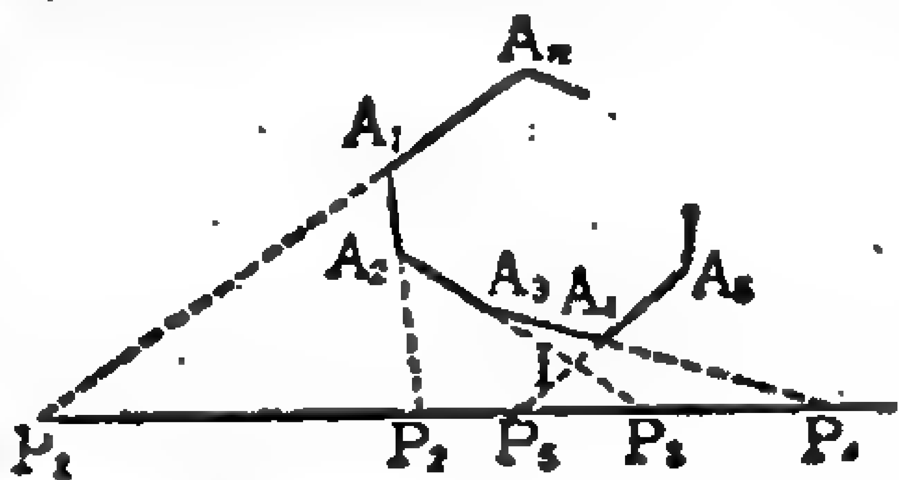
$$\therefore\quad \frac{XZ}{ZY}=\frac{XC}{CB}\cdot\frac{BA}{AY}$$

$$=\frac{PO}{OB}\cdot\frac{BO}{OQ}=\frac{PO}{OQ}.$$

因为 $\dfrac{XZ}{ZY}$ 是定值，所以 $PO:OQ$ 也是定值。又 O、Q 是定点，所以，P 也是定点。因此，XP 是定直线。

从而得出，点 C 的轨迹是平行于 XP 的直线 CO。

1918. 多边形的各边（或延长线），总是分别过已知直线上的定点，除去一个顶点外，其他顶点总是分别在一定直线上移动，求这个被除外的顶点的轨迹。

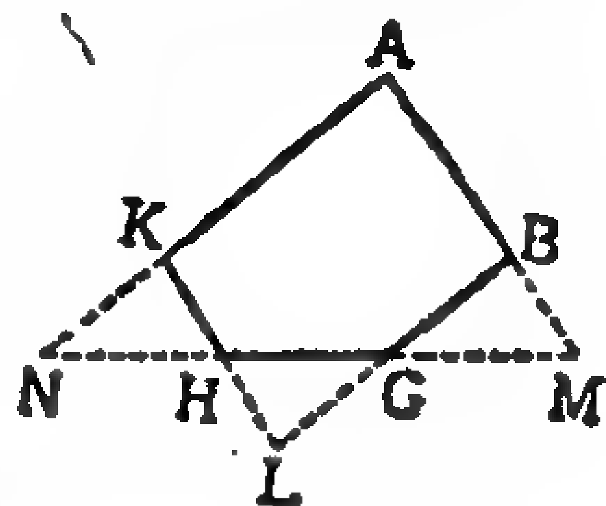


解 由上题可知，若多边形是三角形，则所求轨迹已经被证明。

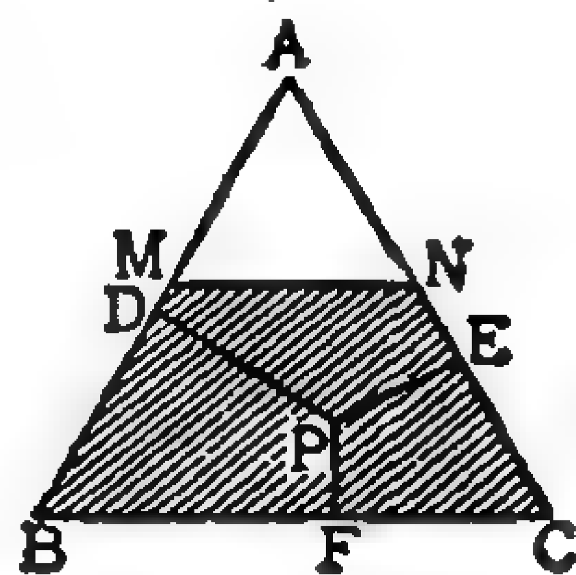
其次，若对于 $(n-1)$ 条边的多边形，它的轨迹是直线，则我们可以证明，对于 n 条边的多边形，它的轨迹也是直线。设具有 n 条边的多边形为 $A_1A_2\cdots A_n$，若除外的一个顶点为 A_1，它的各边分别经过一直线上的 n 个定点 P_1、P_2、…。设 A_2A_3 与 A_4A_5 的交点为 I，若作出 $\triangle A_3A_4I$，因它的三边分别经过一直线上的三定点 P_3、P_4、P_5，两顶点 A_3、A_4 分别在定直线上移动，所以顶点 I 的轨迹为一直线。

这样一来，问题便归结为边数为 $(n-1)$ 的多边形 $A_1A_2IA_5A_6\cdots A_n$，且各边分别经过一直线上的 $(n-1)$ 个定点，除去 A_1 外，其他 $(n-2)$ 个顶点分别在定直线上移动时，而求点 A_1 的轨迹。象这样进行下去，若顶点逐次减少一个，最后，问题便归结为三角形的三边经过定直线上的三点，且两顶点分别在两定直线上移动时，而求剩下的一个顶点的轨迹。因此，我们可以知道，所求的轨迹是一条直线。

注 现以五边形 $ABGHK$ 为例，设 BG、KH 的交点为 L。研究四边形 $ABLK$ 时，若 $ABLK$ 是平行四边形，则由此不能得到三角形的情况。这时，我们就研究这种情况，设 AB、HG 的交点为 M，AK、GH 的交点为 N，则点 M 的轨迹是直线，点 N 的轨迹也是直线，再研究 $\triangle AMN$，就知道 A 的轨迹是直线了。



1919. 若从正三角形 ABC 内的点 P，向三边 AB、AC、BC 分别作垂线，垂足为 D、E、F，则满足 $PD+PE>PF$ 的点 P 在什么范围内变动？



解 从正三角形内的点向三边作垂线，垂线的和等于正三角形的高。设正三角形 ABC 的高为 h，$PD=x$，$PE=y$，$PF=z$，则

$$x+y+z=h.$$

$$x+y>z.$$

$$\therefore\quad 2z<h,$$

$$z<\frac{h}{2}.$$

因此，若 AB、AC 的中点分别为 M、N，则点 P 对于 MN 而言，与 A 在相反一侧就行。由此可得，所求的范围是梯形 $MNCB$ 的内部。

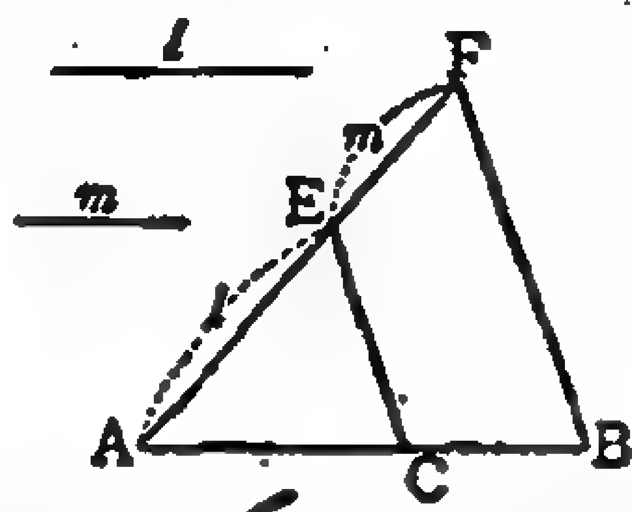
第四编　作　图　题

第一章　求点的位置

1. 在已知线段上求适合条件的点

1920. 将已知线段 AB 按照两条线段的长 l、$m(l>m)$ 的比内分成两段。再按同样的比例外分。

解　过点 A 作射线，在此射线上截取 $AE=l$，$EF=m$；连结 FB，过 E 作直线平行于 FB，与 AB 相交于 C，则点 C 就是把 AB 内分为 $l:m$ 的点。理由如下：

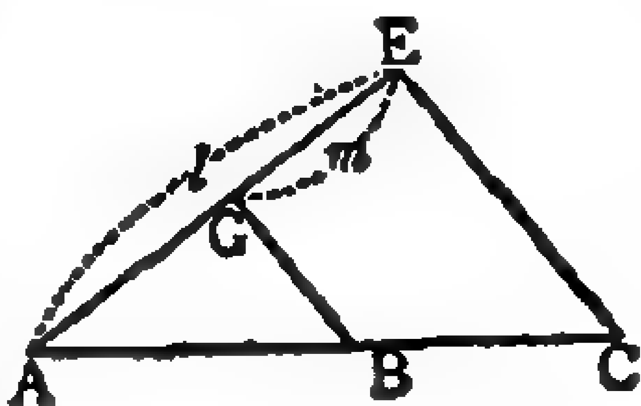


$\because$　$BF \parallel CE$，

$\therefore$　$AC:CB=AE:EF=l:m$。

因此点 C 把 AB 内分为 $l:m$。

外分时，取 $AE=l$，从 E 向 A 取 $EG=m$，连结 GB；再作直线 $EC \parallel GB$，EC 与 AB 的延长线相交于 C。$\because GB \parallel EC$，所以

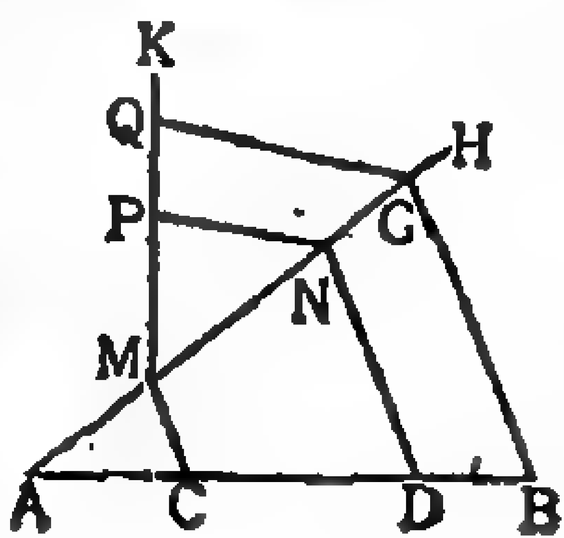


$$AC:CB=AE:EG=l:m.$$

因此点 C 把 AB 外分为 $l:m$。

1921. 用点 C 和 D 把已知线段 AB 分成三部分，使 $AC:CD=m:n$，$CD:DB=p:q$。其中 m、n、p、q 表示已知线段的长。

解　[作图]　在过点 A 的任意射线 AH 上，取 $AM=m$，$MN=n$；再从 M 作任意射线 MK，在 MK 上取 P、Q 两点，使 $MP=p$，$PQ=q$；连结 PN，从 Q 作 QG 平行 PN，与 AH 相交于 G；再从 N 和 M 作 ND 和 MC 平行 GB，与 AB 分别相交于 D、C。则 C、D 就是所求作的点。



[证明]　$AC:CD=AM:MN=m:n$，

$CD:DB=MN:NG=MP:PQ=p:q$。

因此 AC、CD、DB 符合条件。

1922. 在一条直线上有三个定点，顺序为 A、B、C。在 AC 的延长线上求一点 O，使 OB 为 OA、OC 的比例中项。

A　B　C　O　D

解　设所求点为 O，则 $OB^2=OA\cdot OC$。延长 BO 到 D，使 $BO=OD$，A、B、C、D 就构成调和点列(问题 **1480**)。

因此，先求把 AC 外分为 $AB:BC$ 的点 D，再求 BD 的中点 O，则 O 即为所求的点(问题 **1920**)。

1923. A、C、D、B 为一条直线上的有序点，在这条直线上求一点 P，使 $AP:PB=CP:PD$。

解　[作图]　把线段 CD 在 P 点内分，使

$$AC:DB=CP:PD,$$

则 P 即为所求的点。

A　C　P D　B

[证明]　根据作图

$$AC:DB=CP:PD,$$

$$\therefore\ AC:CP=DB:PD,$$

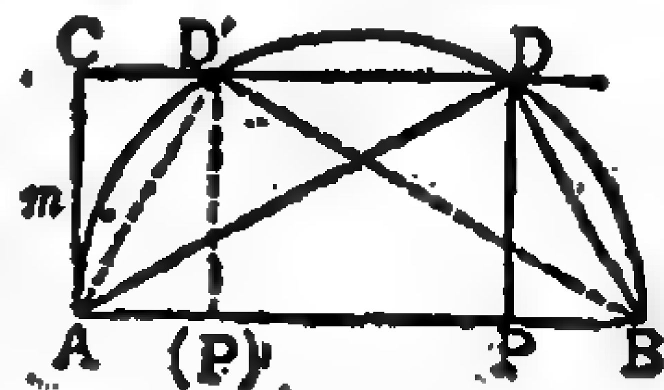
$$(AC+CP):CP=(DB+PD):PD.$$

即　$AP:CP=BP:PD$，

$$\therefore\ AP:BP=CP:PD.$$

1924. 在线段 AB 上求一点 P，而且使 $AP\cdot BP=m^2$，其中 m 为已知线段的长。

解　以 AB 为直径作半圆，过 A 作 AB 的垂线 AC。取 $AC=m$，过 C 作 AB 的平行线与半圆相交于 D、D'。再由 D (或 D') 向 AB 作垂线，设垂足为 P，则 $\angle ADB=\angle R(\angle AD'B=\angle R)$。所以

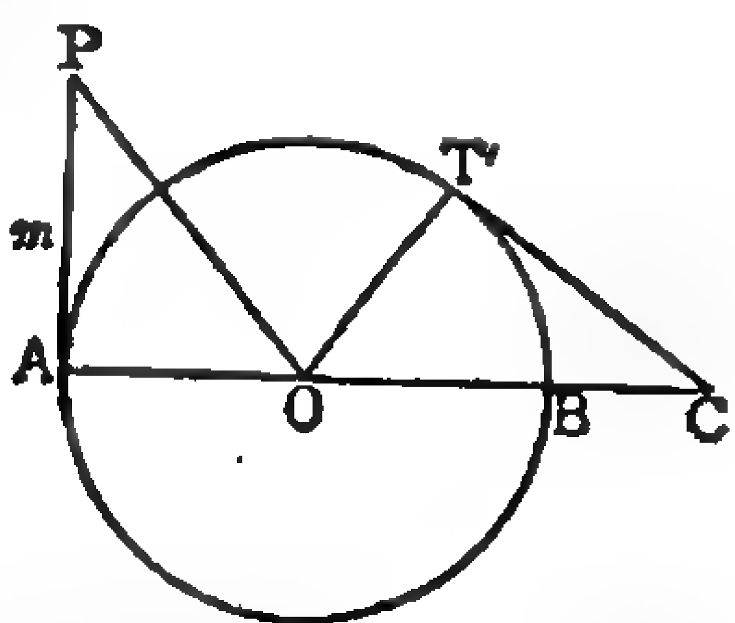


$$AP\cdot PB=DP^2=m^2.$$

因此 P 为适合条件的点。

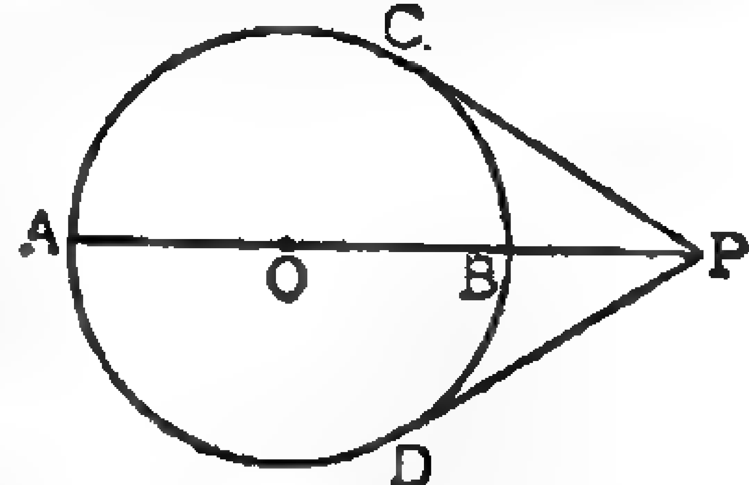
1925. 在线段 AB 的延长线上求点 C，使 $CA\cdot CB=m^2$。其中 m 为已知线段的长。

解 [作图] 先以 AB 为直径作圆 O，从 A 作 AB 的垂线 AP，使 $AP=m$，连结 PO。再在 AB 的延长线上求点 C，使 $OC=OP$，则 C 即为所求的点。



[证明] 如果从 C 向圆 O 作切线 CT，则 $\triangle OAP \quad \triangle OTC$，所以 $CT=PA=m$。又因 CT 为切线，所以 $CA\cdot CB=CT^2=m^2$，因此 C 为适合条件的点。

1926. 从定圆 O 的直径 AB 延长线上的一点 P，向圆 O 作两条切线，设切点为 C、D，求当 $PC+PD=PA$ 时点 P 的位置。



解 设适合条件的点 P 已作出，则

$$PC=PD,\quad \therefore\quad PA=2PC.$$

$$\because\quad PC^2=PA\cdot PB,$$

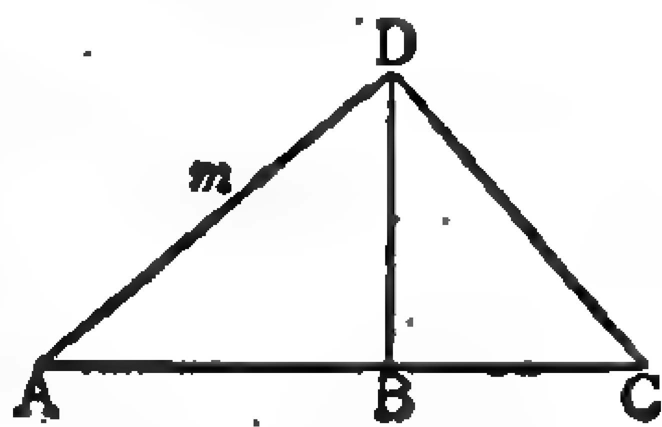
$$\therefore\quad \left(\frac{PA}{2}\right)^2=PA\cdot PB.$$

即 $PA=4PB$，　因此　$PB=\frac{1}{3}AB$。

由此可求出点 P 的位置。

1927. 在线段 AB 的延长线上求点 C，使 $AB\cdot AC=m^2$。其中 m 为定长，且 $m>AB$。

解 过点 B 作 AB 的垂线 BD。以 A 为圆心，以 m 为半径作圆，设该圆与 BD 的交点为 D。过 D 作 AD 的垂线 DC，设 DC 与 AB 的延长线的交点为 C，则 C 为所求的点。这是因为：



$\triangle ADC$ 为直角三角形，DB 是该三角形斜边上的高。所以

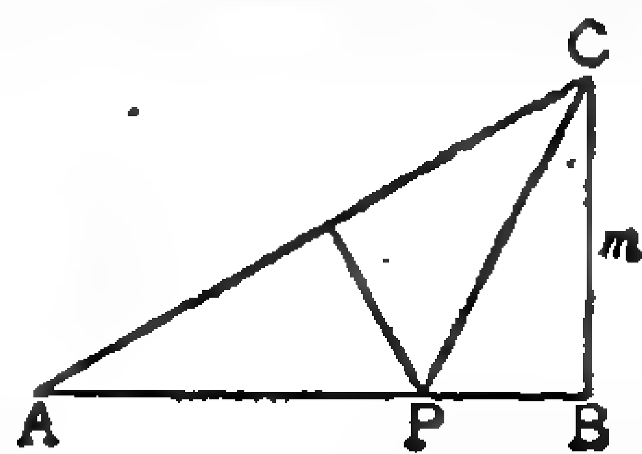
$$AB\cdot AC=AD^2=m^2.$$

1928. 在线段 AB 或其延长线上求一点 P，使 $AP^2+BP^2=m^2$。其中 m 为定线段的长。

解 [作图] 从 B 作射线 BX，使

$$\angle ABX=45^\circ.$$

以 A 为圆心，m 为半径作圆弧与 BX 相交于 D（一般有两个交点）。再由 D 作 AB 的垂线 DP，则垂足 P 就是所求的点。



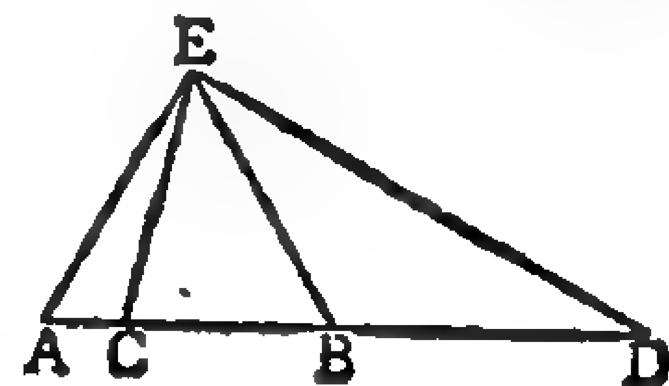
[证明] 因为 $\angle B=45^\circ$，$DP\perp AB$，所以 $PB=PD$。

$$\therefore\quad AP^2+BP^2=AP^2+PD^2=AD^2=m^2.$$

因此，P 为适合条件的点。

1929. 在线段 AB 或者它的延长线上求一点 P，使 $AP^2-BP^2=m^2$。其中 m 为已知线段长。

解 [作图] 过 B 作 AB 的垂线 BC，使 $BC=m$。设 AC 的垂直平分线与 AB 相交于点 P，则 P 就是所求的点。



[证明] 由作图，P 为 AC 的垂直平分线上的点，所以 $PA=PC$。又由 $\angle B=\angle R$，$PC^2-PB^2=BC^2$，

$$\therefore\quad AP^2-PB^2=PC^2-PB^2=BC^2=m^2.$$

由此，P 为适合条件的点。

1930. 用点 C 把已知线段 AB 分为两部分，使 $AB^2+AC^2=2BC^2$。

解 [作图] 以 AB 为边作正三角形 ABE。在 AB 的延长线上取点 D，使

$$AB=BD.$$

再在 AD 上取 $DC=DE$，则 C 即为所求的点。

E
A C B D

[证明] $\because\quad BA=BD=BE,$

$$\therefore\quad \angle AED=\angle R.$$

$$\therefore\quad DE^2=AD^2-AE^2=(2AB)^2-AB^2=3AB^2.$$

因而　　$DE=DC=\sqrt{3}AB.$　　①

因 B 为 AD 的中点，所以

$$DC=AB+BC,\quad AC=AB-BC.$$

$$\therefore\quad DC^2+AC^2=2AB^2+2BC^2.$$

由①，$DC^2=3AB^2$。所以

$$3AB^2+AC^2=2AB^2+2BC^2,$$

即　　$AB^2+AC^2=2BC^2.$

1931. 在线段 AB 的延长线上求一点

C，使 $2AC\cdot BC=AC^2+AB^2$。

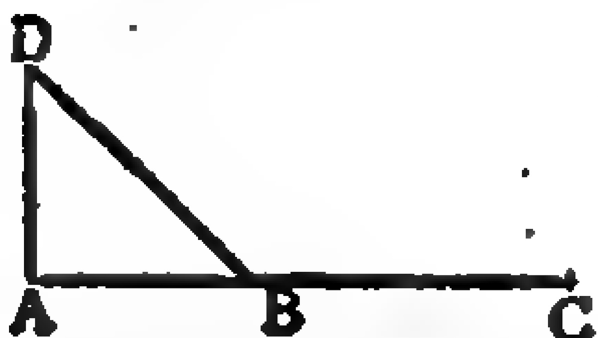
解 ［分析］ $AB^2=(AC-BC)^2$

$=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC$，

$\therefore\ 2AC\cdot BC=AC^2+BC^2-AB^2$。 ①

根据题意， $2AC\cdot BC=AC^2+AB^2$。

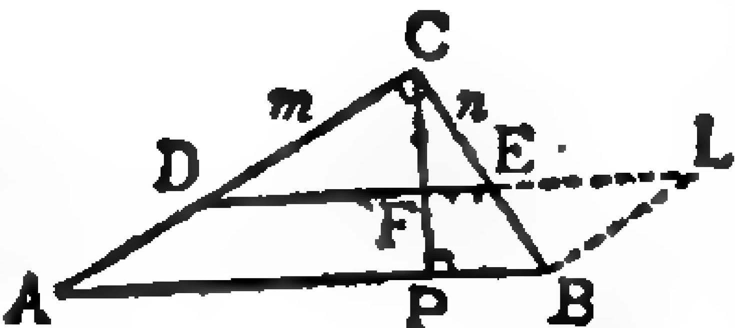
由①知， $AC^2+BC^2-AB^2=AC^2+AB^2$，即必须使 $BC^2=2AB^2$。因此可如下作图。



［作图］ 过 A 作 AB 的垂线 AD，使 $AB=AD$。在 AB 的延长线上求点 C，使 $BC=BD$，则 C 就是所求的点。

1932. 在线段 AB 上求点 P，使 AB 内分为 $AP:PB=m^2:n^2$。其中 m 和 n 表示已知线段的长。

解 ［作图］ 作垂直相交的两条直线 CD 和 CE，且 $CD=m$，$CE=n$。在 DE 或其延长线上取线段 $DL=AB$，过 L 作 CD 的平行线与 CE 或其延长线相交于 B。从 B 作 $BA\parallel DE$ 与 CD 或其延长线相交于 A。再由 C 作 AB 的垂线 CP，则 P 即为所求的点。



［证明］ 根据作图，$\angle DCE=\angle R$，设 CP 与 DE 相交于 F，则

$$DF:FE=CD^2:CE^2=m^2:n^2。$$

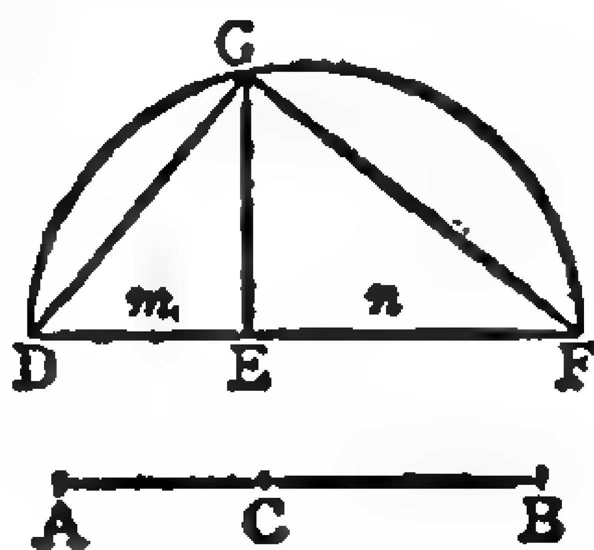
又知 $DE\parallel AB$，所以

$$AP:PB=DF:FE=m^2:n^2。$$

因此 P 为适合条件的点。

1933. 在线段 AB 上求一点 C，使 $AC^2:CB^2=m:n$。其中 m，n 为已知线段的长。

解 ［作图］ 在一直线上顺次取 D、E、F 三点，使 $DE=m$，$EF=n$。以 DF 为直径作半圆，从 E 作 DF 的垂线，与半圆相交于 G。再在 AB 上找一点 C，把 AB 内分为 $AC:CB=DG:GF$，则 C 即为所求的点。



［证明］ 根据作图，$\angle DGF=\angle R$，$GE\perp DF$。

$$\therefore\ DG^2:GF^2=DE:EF=m:n。$$

因为 $DG:GF=AC:CB$，

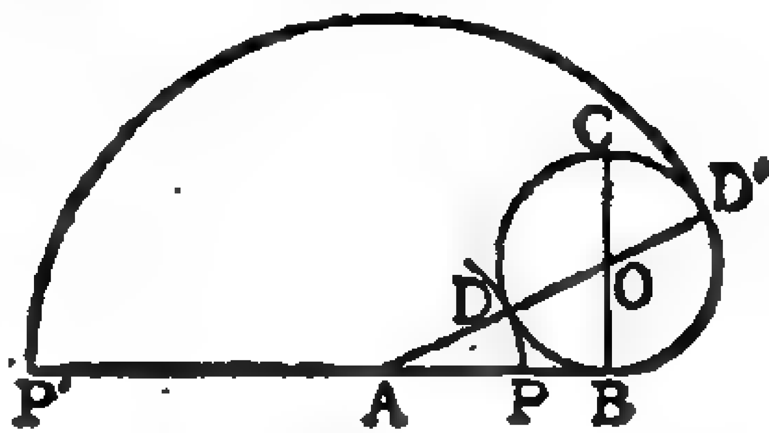
$$\therefore\ DG^2:GF^2=AC^2:CB^2，$$

$$\therefore\ AC^2:CB^2=m:n。$$

1934. 用点 P 把线段 AB 内分或外分，使 AP 为 AB 与 BP 的比例中项。

注 这叫做黄金分割或分为中外比。

解 ［作图］ 从 AB 的一端 B 作 AB 的垂线 BC，使 $BC=AB$，以 BC 为直径作圆，设圆心为 O。连结 AO，设 AO 及其延长线与圆 O 相交于点 D 和 D'，在线段 AB 和 BA 的延长线上分别取 $AP=AD$，$AP'=AD'$。则 P 和 P' 分别为把 AB 内分和外分成中外比的点。



［证明］ $\because$ AB 为圆的切线，

$$\therefore\ AB^2=AD\cdot AD'。 \quad ①$$

又 $AD=AP$，所以

$$AD'=AD+DD'=AP+DD'$$
$$=AP+AB。$$

由①知， $AB^2=AP\cdot(AP+AB)$

$=AP^2+AP\cdot AB$，

$\therefore\ AP^2=AB\cdot(AB-AP)$

$=AB\cdot PB$。 ②

但 $AD'=AP'$，

$$AD=AD'-DD'=AP'-AB。$$

再由①，$AB^2=(AP'-AB)\cdot AP'$。因此 $AP'^2=AB\cdot BP'$。

1935. 用点 C 和 D 把已知线段 AB 调和分割，使 CD 的长等于已知长。



解 设 AB 的中点为 O，A、C、B、D 成为调和点列，所以

$$OC\cdot OD=OB^2$$

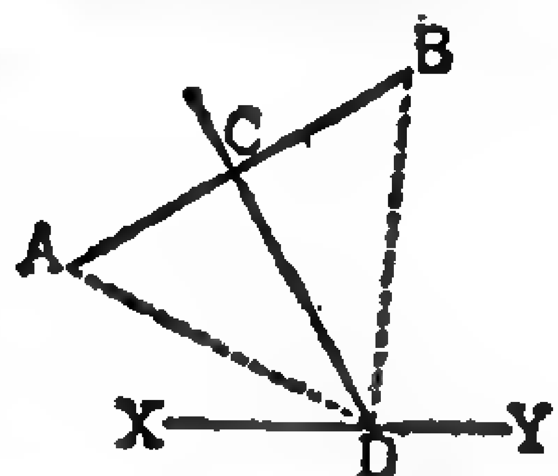
（问题1480），这里 CD，OB 的长都是已知的。根据问题1925，OC、OD 的长可以确定。

2. 到已知点（或已知直线）的距离

1936. 在直线 XY 上或者圆 O 上，求到两个已知点 A、B 距离相等的点。

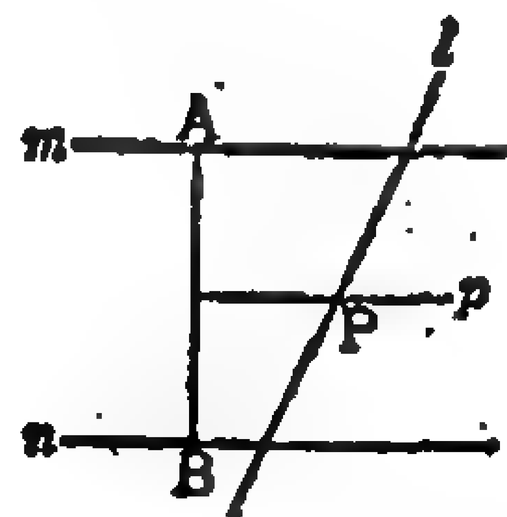
解 作直线 CD 垂直平分 AB，设它与 XY 的交点为 D，则 D 即为所求的点，其理由

是：CD 是到 A、B 等距离的点的轨迹．所以 $AD=BD$．在圆上也同样如此．



［讨论］ 如果 AB 不垂直于 XY，则此题只有一解．在圆的场合，当 AB 的垂直平分线与圆相交时，则符合条件的点有两个；当相切时，则符合条件的点只有一个；当无公共点时，此题无解．

1937． 在已知直线 l 上，求作与已知直线 m 和 n 等距离的点．

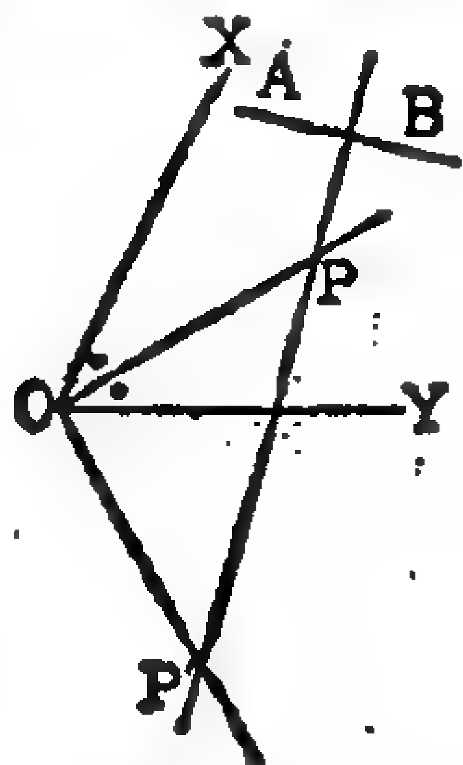


解 设 m 与 n 相交，则与 m、n 等距离的点的轨迹，是 m、n 交角的平分线 p 和 p'，故所求的点为 p 与 l 的交点 P，p' 与 l 的交点 P'．

设 $m\parallel n$，与 m、n 等距离的点的轨迹，是和 m、n 距离相等的一条平行线 p．故所求点为 p 和 l 的交点 P．

如果 $p\parallel l$，p' 与 l 不平行，则所求点只有 p' 与 l 的交点 P'；如果 p 与 l 重合，则此题有无数个解；如果 $m\parallel n\parallel l$，而 l 与 m、n 距离不相等，则此题无解；如果 l 与 m、n 等距离，则有无数个解．

1938． 求到已知点 A、B 等距离，且到已知角 XOY 两边等距离的点．

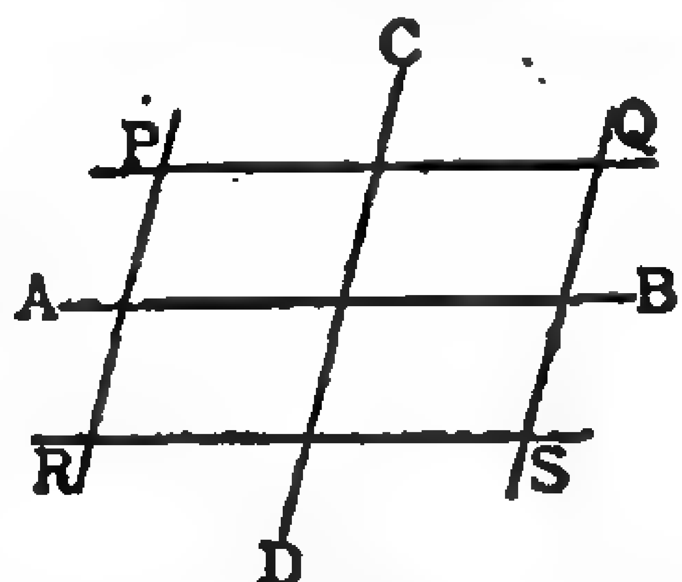


解 设 AB 的垂直平分线与 $\angle XOY$ 的平分线及它的外角平分线的交点分别为 P 和 P'，则 P 和 P' 就是所求的点．因为 P 是 AB 的垂直平分线上的点，所以 $PA=PB$；又因为 P 是 $\angle XOY$ 的平分线上的点，所以 P 到 OX、OY 距离相等．即 P 到已知点 A、B 距离相等，到 OX、OY 距离也相等，因此 P 是适合条件的点．同样 P' 也是适合条件的点．

如果 $\angle XOY$ 的平分线与 AB 的垂直平分线平行，那末就没有交点 P，这时本题无解；如果这两条直线重合，则有无数多个解．

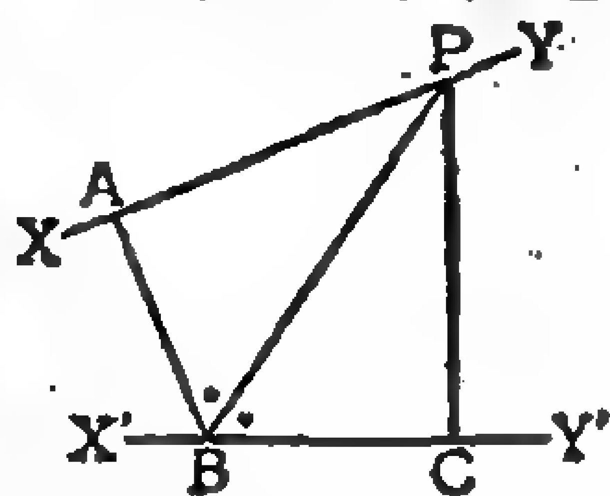
1939． 已知直线 AB 与 CD 相交，求到 AB 的距离为 l，到 CD 距离为 m 的点．

解 ［作图］ 在 AB 两侧作与 AB 的距离为 l 的两条平行线 PQ 和 RS，在 CD 的两侧作与 CD 的距离为 m 的两条平行线 RP、SQ．这两组平行线的交点 P、Q、R、S 就是所求的点．



［证明］ PQ 和 RS 是与 AB 的距离为 l 的点的轨迹，RP 和 SQ 是与 CD 的距离为 m 的点的轨迹，因此这四直线的交点 P、Q、R、S 为适合条件的点．

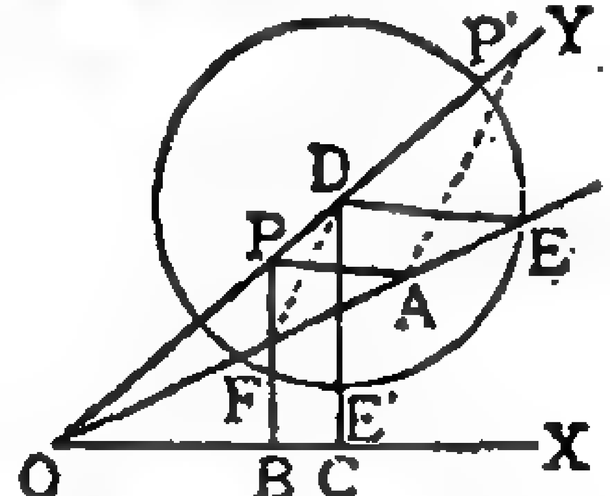
1940． 在已知直线 XY 上求点 P，使它与 XY 上的已知点 A 和另一条直线 $X'Y'$ 的距离相等．



解 从 A 作 XY 的垂线 AB，与 $X'Y'$ 相交于 B，AB 与 $X'Y'$ 所成角的平分线与 XY 相交于 P，则 P 即为所求的点．其理由是：由 P 作 $X'Y'$ 的垂线 PC，在直角三角形 PAB 与 PCB 中，由于一条斜边和一个锐角相等，所以两个三角形全等．$\therefore PA=PC$．

注 如果 $XY\perp X'Y'$，设它们的交点为 C，则线段 CA 的中点 P 是适合条件的点．

1941． 在直线 OY 上求点 P，使 P 到直线 OX 的距离和到点 A 的距离的比为 $m:n$．



解 从 OY 上的任意点 D 作 OX 的垂线 DC，在 DC 上取一点 E'，使

$$DC:DE'=m:n.$$

再以 D 为圆心、DE' 为半径作圆，设过 O 和 A 的直线与圆相交于 E、F．过点 A 作 AP 平行于 ED 和 AP' 平行于 FD，分别与 OY 相交于 P 和 P'．则 P 和 P' 即为所求的点．其理由是：

如果由 P 作 OX 的垂线 PB，则

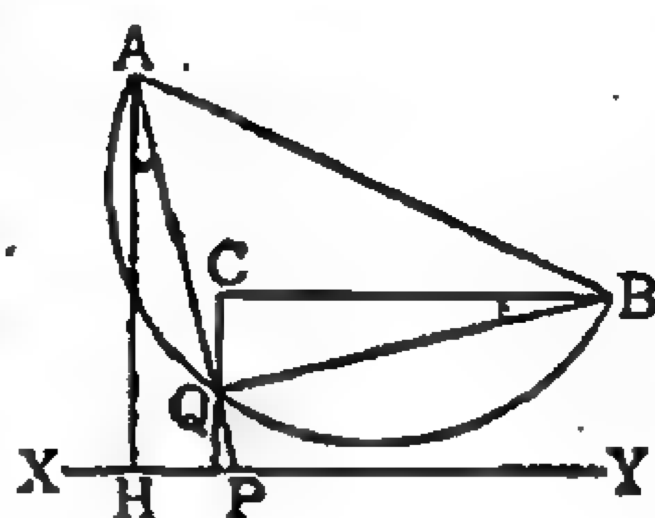
$$PB:DC=OP:OD=PA:DE.$$

因为 $DE=DE'$，所以 $PB:DC=PA:DE'$．

因此 $$PB:PA=DC:DE'=m:n.$$

1942. 在直线 XY 外有两点 A、B，在 XY 上求一点 P，使 $AP=BQ$。其中 Q 是过 B 所作 AP 或其延长线的垂线的垂足。

解 [分析] 设此图已作出，由 A 作 XY 的垂线 AH。作 $\triangle BCQ$ 使 $BC \parallel XY$，$CQ \parallel AH$，则在 $\triangle AHP$ 和 $\triangle BCQ$ 中，



$$AP=BQ,\ \angle AHP=\angle BCQ=\angle R,$$

并且 $\angle HAP=\angle CBQ$

$$(\because\ BC\perp AH,\ BQ\perp AP)。$$

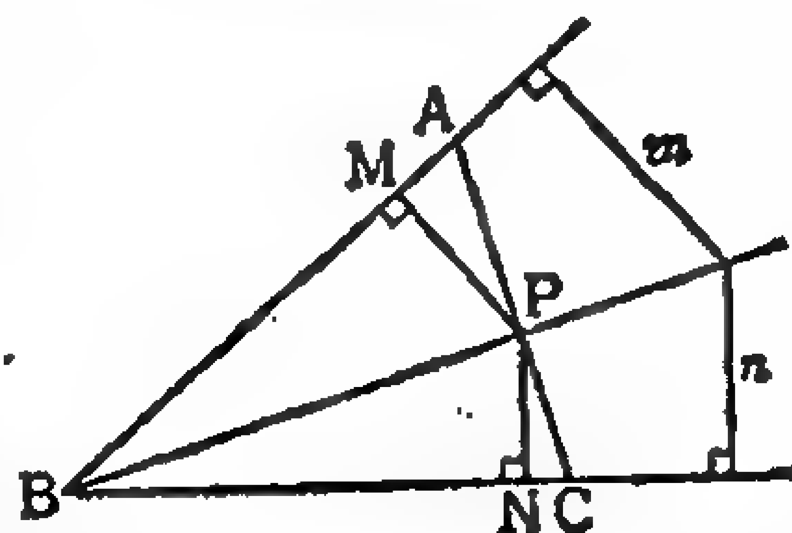
$$\therefore\ \triangle AHP\cong\triangle BCQ,$$

因而 $BC=AH$（定长），且 $\angle AQB=\angle R$。因此可作图如下。

[作图] 由 A 作 XY 的垂线 AH，由 B 作 $BC \parallel XY$，使 $BC=AH$。以 AB 为直径作圆，由 C 作 XY 的垂线与圆相交于 Q（有两个交点），并延长 AQ 与 XY 相交于 P，则点 P 即为所求的点。

1943. 在三角形 ABC 的边 AC 上求一点 P，使 P 到 AB、BC 的距离的比为 $m:n$。

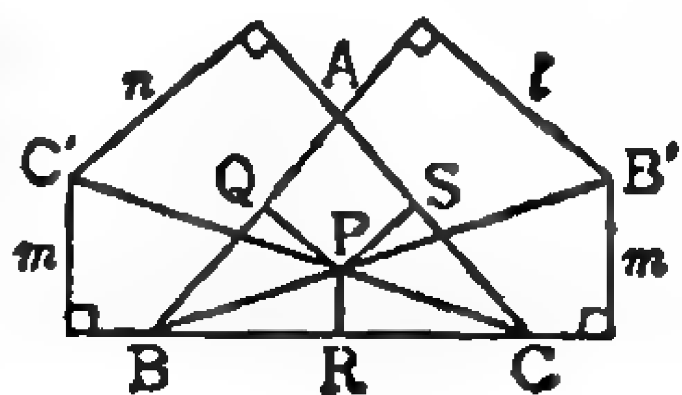
解 [作图] 与 AB 和 BC 距离的比为 $m:n$ 的点的轨迹与 AC 相交于 P，则 P 即为所求的点（根据问题 **1855**）。



注 由问题 **1855** 知，上述轨迹为两条直线，但在 $\angle ABC$ 的外角内的轨迹与 AC 的延长线相交，所以没有必要。

1944. 在 $\triangle ABC$ 内求一点，使它到三角形三边 AB、BC、CA 的距离的比为 $l:m:n$。

解 [作图] 根据问题 **1855**，设到 AB 和 BC 距离的比为 $l:m$ 的点的轨迹为 BB'，到 BC 和 CA 距离的比为 $m:n$ 的点的轨迹为 CC'；BB' 和 CC' 相交于 P，则 P 即为所求的点。

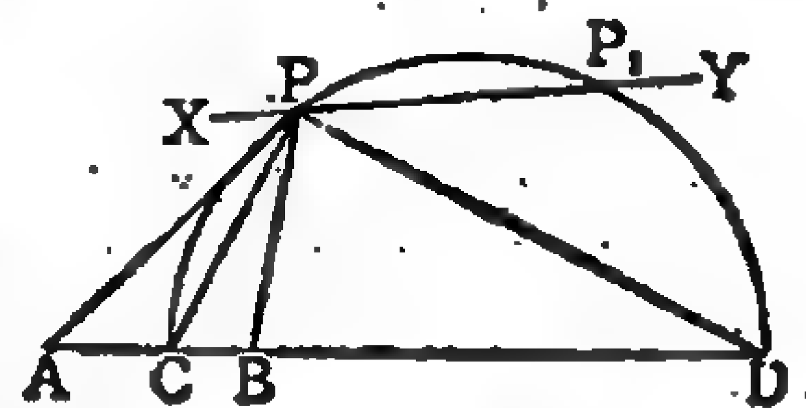


从 P 作三角形三边的垂线 PQ，PR，PS，则

$$PQ:PR:PS=l:m:n。$$

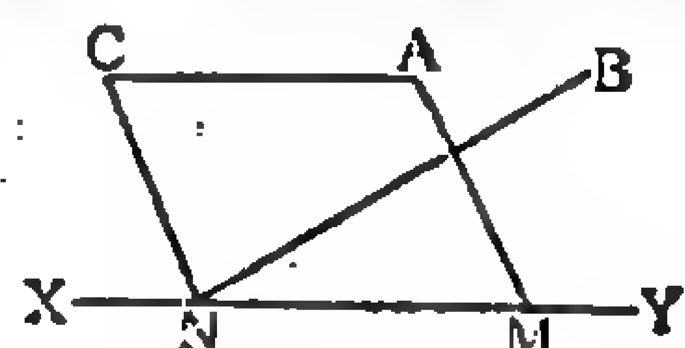
1945. 已知两点 A 和 B 和一直线 XY。在 XY 上求一点 P，使 $PA:PB=3:2$。

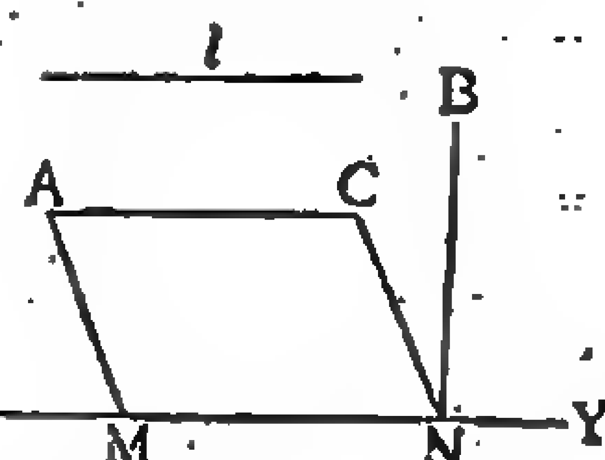
解 [作图] 作与 A 和 B 的距离的比是 3:2 的点的轨迹（阿波罗尼斯圆），与 XY 相交于 P，则 P 即为所求的点。



[讨论] 此圆一般与 XY 有两个交点 P、P_1，所以有两解；如果此圆与 XY 相切，则有一解；如果此圆与 XY 不相交，则无解。

1946. 已知两定点 A、B 在直线 XY 的同侧，在 XY 上求两点 M 和 N，使 MN 的长等于已知线段 l，并使 $AM:BN=m:n$（$m:n$ 为已知比）。





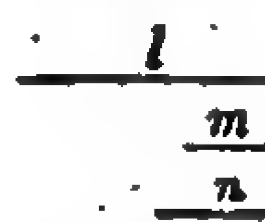
解 过 A 作 $AC \parallel XY$，取 $AC=l$，利用上题的作图，在 XY 上求点 N，使 $CN:BN=m:n$；过 A 作 $AM \parallel CN$，与 XY 相交于 M。这时 $MN=AC=l$，$AM=CN$。

$$\therefore\ AM:BN=NC:NB=m:n。$$

[讨论] 如果 AC 沿相反方向作图，则结果如下图。无论上图或下图，如果阿波罗尼斯圆与 XY 有两个交点，则有两解。如果相切则有一解。如果 XY 与圆无公共点，则此题无解。

1947. 有三个已知点 A、B、C 和三条线段 l、m、n。求一点 P，使 $PA:PB:PC=l:m:n$。

解 [作图] 连结 AB，在 AB 及其延长线上分别求出把 AB 内分为 $l:m$ 的点和外分为 $l:m$ 的点，并以这两点为直径作圆（阿波罗尼斯圆），则此圆就是与 A、B 的距离为 $l:m$ 的点的轨迹（问题 **1856**）。



连结 AC，在 AC 及其延长线上分别求出把 AC 内分成 $l:n$ 的点和把 AC 外分成 $l:n$ 的点，以这两点为直径作圆（阿波罗尼斯圆）。设

这两条轨迹相交于 P(若相交则有两个交点，若相切则有一个交点)，则 P 为所求的点。

［证明］ $PA:PB=l:m$,

$$PA:PC=l:n,$$

$$\therefore\quad PA:PB:PC=l:m:n.$$

3. 求构成定角(或者等角)的点

1948. 已知 A、B 两点在直线 XY 的两侧，在 XY 上求一点 P，使 AP 和 BP 与 XY 构成等角。

解 ［作图］ 从 A(或 B)作 XY 的垂线 AC 并延长到 D，使 $AC=CD$。设 BD 的延长线与 XY 相交于 P，则 P 为适合条件的点。设 AB 与 XY 相交于 P'，则 P' 也是适合条件的点。

［证明］ $\because\ \triangle ACP\cong\triangle DCP$,

$$\therefore\ \angle BPC=\angle DPC=\angle APC.$$

因而 P 为所求的点。

又 $\qquad \angle XP'A=\angle BP'Y$,

所以 P' 亦为所求的点。

［讨论］ 如果 $BD\parallel XY$ 时，则无解。因此本题的解只有二个。

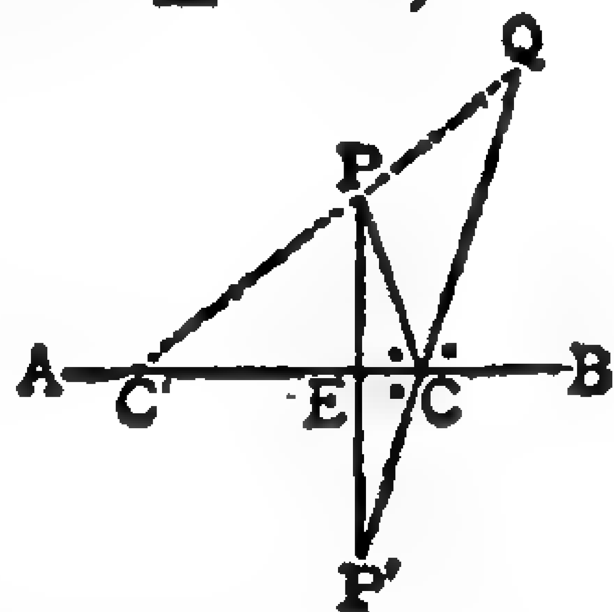
1949. 在直线 AB 的同侧有两点 P、Q。在 AB 上求一点 C，使 PC、QC 与 AB 所成的角相等。

解 求出点 P 关于 AB 的对称点 P'，连结 $P'Q$，与 AB 相交于 C，则 C 即为所求的点。理由是：设 PP' 与 AB 相交于 E，则

$$PE=P'E,\ \angle PEC=\angle P'EC,$$

EC 为公共边，所以

$\triangle PEC\cong\triangle P'EC$。



因而

$\angle PCE=\angle P'CE$。

因为

$\angle P'CE=\angle QCB$,

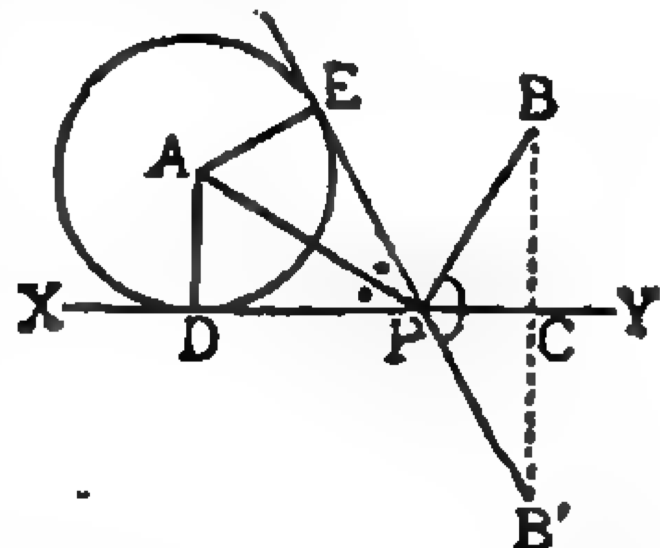
所以 $\qquad \angle PCE=\angle QCB$.

同样，QP 的延长线与 AB 相交的点 C' 也是所求的点。

1950. 已知两点 A、B 在直线 XY 的同侧，在 XY 上求一点 P，使

$$2\angle APX=\angle BPY.$$

解 由 A 作 XY 的垂线 AD，以 A 为圆心，AD 为半径作圆 A。作点 B 关于 XY 的对称点 B'，由 B' 作圆 A 的切线 $B'E$，与 XY 相交于 P，则 P 即为所求的点。理由是：



B、B' 是关于 XY 的对称点。所以

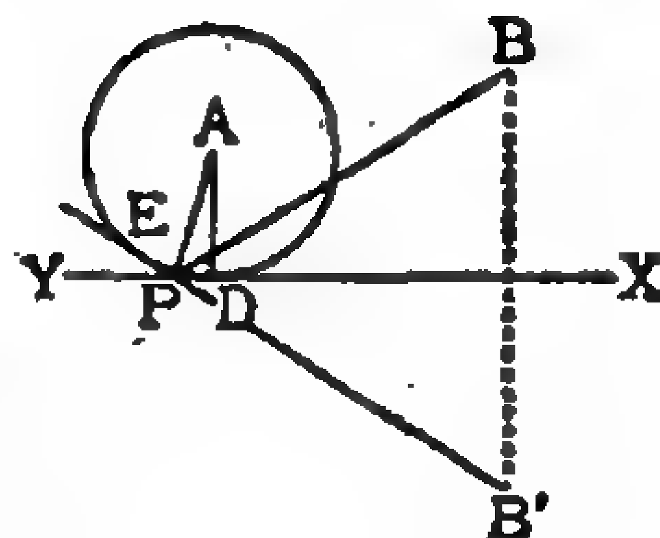
$$\angle BPY=\angle B'PY. \qquad ①$$

又 $\qquad \angle B'PY=\angle DPE=2\angle APD.\qquad ②$

根据①、②，

$\angle BPY=2\angle APX$。

注 若如右图，则 P 也是所求的点。即 $\angle BPX=\angle B'PX$。所以

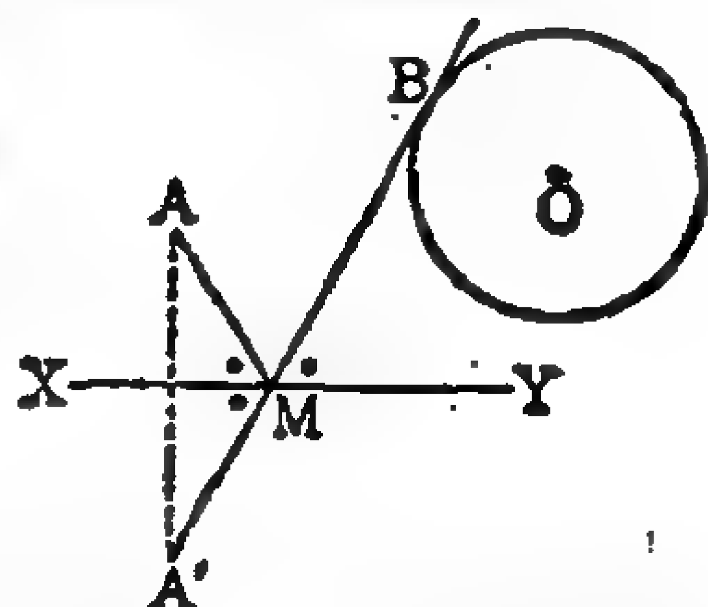


$$\angle BPY=\angle B'PY,$$

$$\angle B'PY=\angle EPX=2\angle APX.$$

因此 $\qquad 2\angle APX=\angle BPY.$

1951. 已知点 A 和圆 O 在直线 XY 的同侧，在 XY 上求一点 M，使过 M 所作圆 O 的切线和 MA 分别与 XY 组成等角。



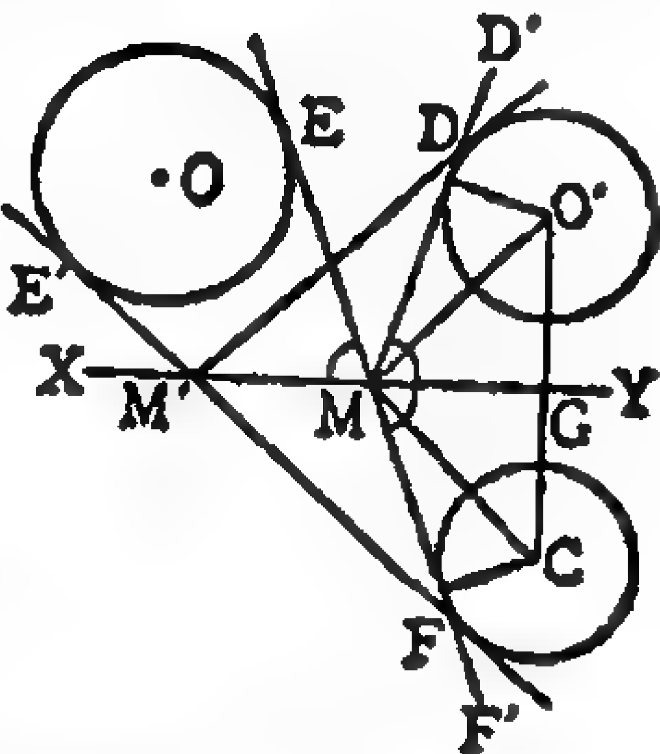
解 作 A 点关于 XY 的对称点 A'，过 A' 作圆 O 的切线 $A'B$，设 $A'B$ 与 XY 相交于 M，则 M 即为所求的点。理由是：

$$\angle BMY=\angle A'MX,$$

因 A 与 A' 关于 XY 对称，所以 $\angle AMX=\angle A'MX$，因此 $\angle AMX=\angle BMY$。

若过 A' 作圆 O 的另一条切线，则得另一解。

1952. 已知圆 O 和 O' 在直线 XY 的同侧，在 XY 上求一点 M，使过 M 所作圆 O 和圆 O' 的切线与 XY 所成的角相等。



解 ［作图］ 由 O' 作 XY 的垂线 $O'G$，在 $O'G$ 的延长线上取一点 C，使 $GC=O'G$。以 C 为圆心作与圆 O' 相等的圆。再作圆 O

和圆 C 的公切线 EF，与 XY 相交于点 M。则 M 即为所求的点。

［证明］　过 M 作圆 O' 的切线 MD，则

$\triangle MO'G\cong\triangle MCG$，$\triangle MDO'\cong\triangle MFC$。

所以　$\angle DMY=\angle YMF$，

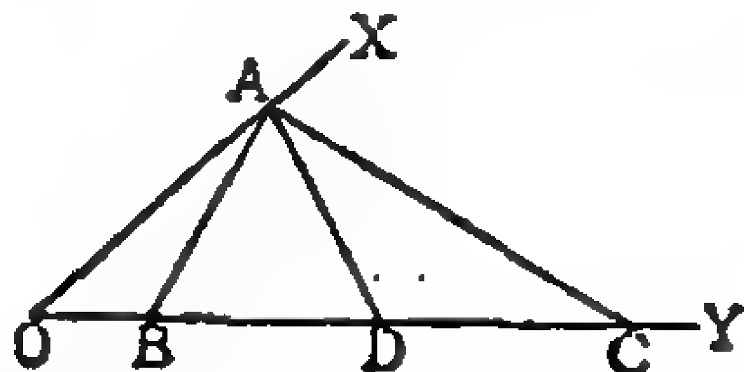
且　$\angle YMF=\angle EMX$。

$\therefore\ \angle DMY=\angle EMX$。

［讨论］　因为圆 O 和圆 C 的公切线一般有四条。因此所求的点 M 一般有四个。若作圆 O 和圆 O' 的公切线(四条)与 XY 相交于 M，则 M 也是适合条件的点(四个)。因此适合条件的点有八个。

1953.　在 $\angle XOY$ 的边 OX 上有一点 A，在边 OY 上求两点 B、C，使 $BC=l$ 且 $\angle BAC=\angle R$。

解　［作图］　以 A 为圆心、$\frac{1}{2}l$ 为半径作圆，与 OY 相交于 D。在 OY 上 D 的两侧分别取 B、C 两点，使 $DB=DC=\frac{1}{2}l$，则 B、C 即为所求的点。



［证明］　在 $\triangle ABC$ 中，$AD=DB=DC$，

所以　$\angle BAC=\angle R$。

根据作图，$AD=\frac{1}{2}l$，$\therefore BC=l$。

［讨论］　当 A 到 OY 的距离小于 $\frac{1}{2}l$ 时，则以 A 为圆心、$\frac{1}{2}l$ 为半径的圆与 OY 不相交，此题无解。

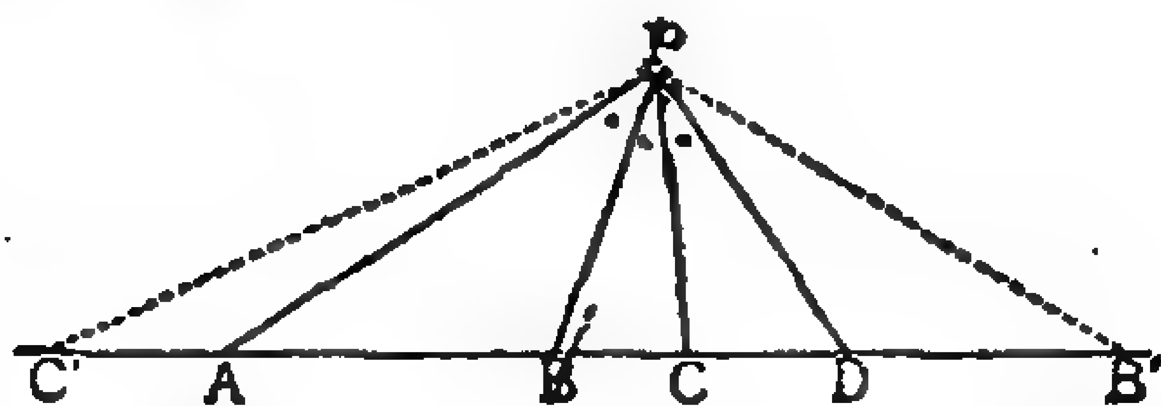
1954.　在一条直线上顺次有 A、B、C、D 四点。在直线外求一点 P，使

$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD.$$

解　假定此题已解出，P 为所求的点，$\angle APB=\angle BPC$。根据阿波罗尼斯定理，作点 B 关于 AC 的调和共轭点 B'，则 P 在以 BB' 为直径的圆上。

同样，$\angle BPC=\angle CPD$，作点 C 关于 BD 的调和共轭点 C'，则 P 在以 CC' 为直径的圆上。因此，可作图如下：

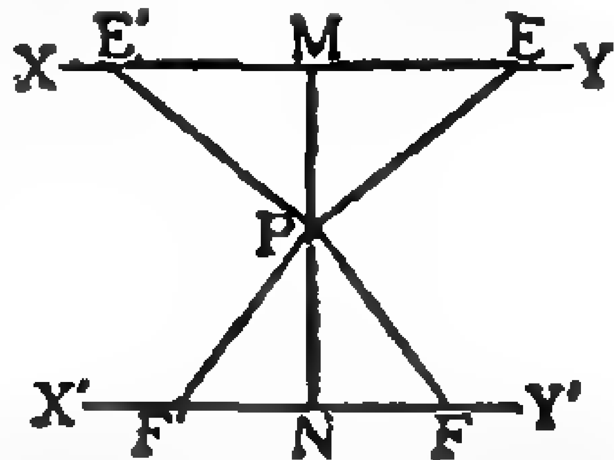
作 B 点关于 AC 的调和共轭点 B'，C 点关于 BD 的调和共轭点 C'。以 BB' 和 CC' 为直径分别作圆。则两圆的交点 P 即为所求的点(一般有两个交点)。



1955.　已知两条平行线 XY 和 $X'Y'$ 和一点 P，分别在 XY 和 $X'Y'$ 上求点 E、F，使 $PE=PF$，且 $\angle EPF=\angle R$。

解　［作图］　过 P 作 XY、$X'Y'$ 的公垂线，与 XY，$X'Y'$ 分别相交于 M、N，在 $X'Y'$ 上 N 的两侧求 F、F' 两点，使

$NF=PM=NF'$。



过 P 作 PF、PF' 的垂线 PE、PE'，分别与 XY 相交于 E、E'。则 E、F 和 E'、F' 即为所求的点。

［证明］　在 $\triangle PNF$ 和 $\triangle EMP$ 中，

$$\angle PNF=\angle R=\angle EMP.$$

根据作图，　$\angle EPF=\angle R$，

$\therefore\ \angle MEP=\angle NPF$。

又　$MP=NF$，　$\therefore\ \triangle EMP\cong\triangle PNF$。

$\therefore\ PF=PE$。

同理，　$PF'=PE'$。

注　可利用问题 **1862** 的轨迹作图。

1956.　在直线 XY 上有一定点 A，在 XY 两侧有两定点 B 和 C。在 XY 上求一点 P，使

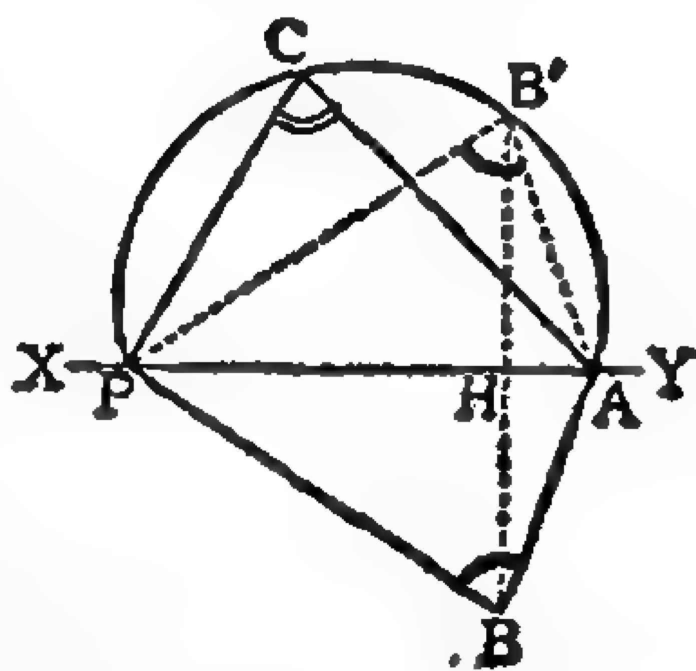
$$\angle PBA=\angle PCA.$$

解　［分析］　设 P 点已求得。作 B 点关于直线 XY 的对称点 B'，则

$$\angle PB'A=\angle PBA,$$

所以 $\angle PCA=\angle PB'A$，从而 P、C、B'、A 在同一圆上。这个圆过已知点 A、B'、C，因而是已知圆。因此，可作图如下。

［作图］　作 B 点关于直线 XY 的对称点 B'。过 A、B'、C 三点作圆，与 XY 相交于 P。则 P 即为所求的点。



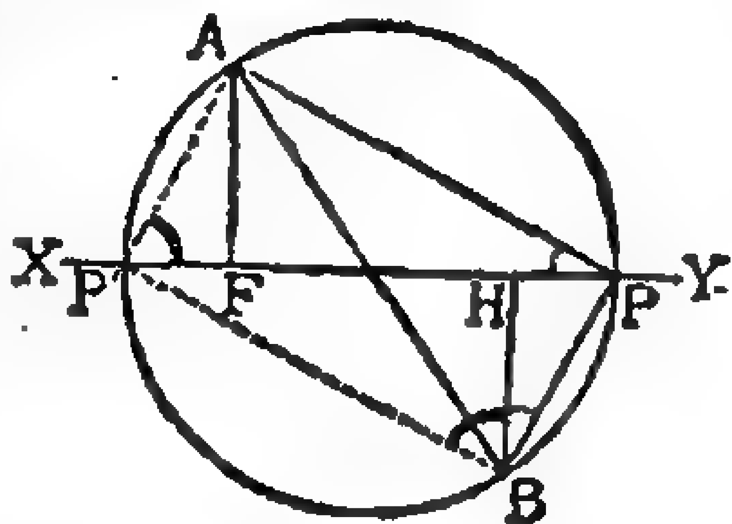
［证明］　根据分析，已很明确，故证明省

略。

[讨论] 为了确定点 P 的位置，必须过 A、B'、C 三点作圆。如果 B' 与 C 重合，则 XY 上所有的点都符合条件，因此本题的解不定。如果 A、B'、C 在一条直线上，就不可能过 A、B'、C 三点作圆，所以无解。过 A、B'、C 三点的圆，一般与 XY 相交于 A 和另一点，所以一般有一解。如果过 A、B'、C 的圆在点 A 与 XY 相切，则此题无解。

1957. 在直线 XY 的两侧有两个定点 A 和 B，过 A、B 作 XY 的垂线，垂足分别为 F、H。在线段 FH 的延长线上求点 P，使

$\angle APF=\angle HBP$。



解 [作图] 以 AB 为直径作圆，与 XY 相交于 P、P'。则 P、P' 即为所求的点。

[证明] AB 为圆的直径，

$\therefore\ \angle APB=\angle R$。

因而 $\angle APF+\angle HPB=\angle R$。

又 $\angle BHP=\angle R$，

所以 $\angle HBP+\angle HPB=\angle R$。

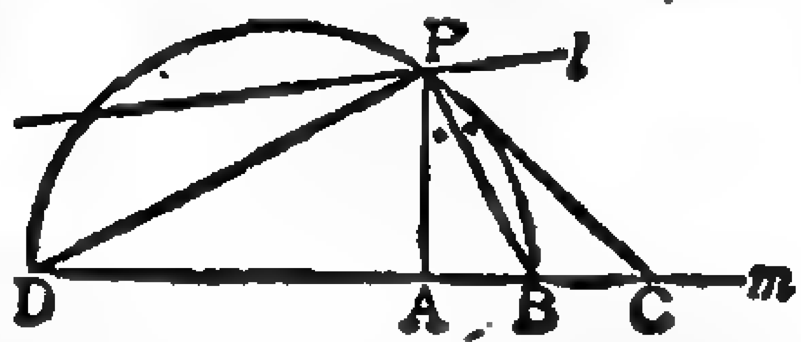
于是 $\angle APF=\angle HBP$。

同理，$\angle AP'F=\angle HBP'$。

1958. 在已知直线上有三点 A、B、C，在另一直线上求一点 P，使

$$\angle APB=\angle BPC。$$

解 [作图] 设已知直线 m 上有三点 A、B、C，另一直线为 l，先在 m 上求点 D，使 $CB:AB=CD:AD$。再以 BD 为直径作圆弧与 l 相交于 P，则 P 即为所求的点。

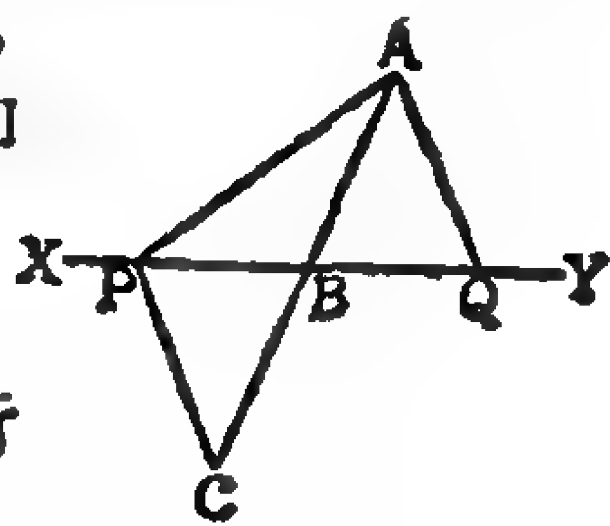


[证明] 根据作图，圆 BPD 是阿波罗尼斯轨迹，所以 PB 是 $\angle APC$ 的平分线，即 $\angle APB=\angle BPC$。所以 P 为所求的点。

[讨论] 如果以 BD 为直径的圆与 l 相交，则有两解。如果圆与 l 相切，则只有一解。如果圆与 l 无公共点，则本题无解。

1959. 已知两点 A、B，直线 XY 过点 B，在 XY 上求与 B 等距离的两点 P、Q，使 $\angle PAQ=\alpha$。(α 为已知角)

解 延长 AB 至 C，使 $BC=AB$。以 AC 为弦，作含有 $(2R-\alpha)$ 的弓形弧，与 BX 相交于 P。在 BY 上求点 Q，使 $BQ=BP$，则 P、Q 即为所求的点，理由是：



$AB=BC$，$BP=BQ$，

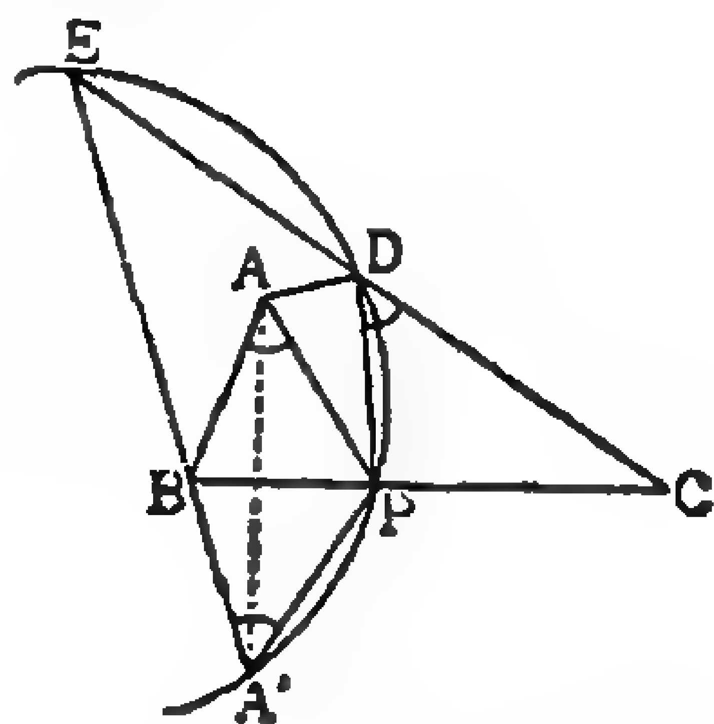
$\therefore$ 四边形 $APCQ$ 为平行四边形。

$\therefore\ \angle PAQ+\angle APC=2\angle R$。

但 $\angle P=2\angle R-\alpha$，$\therefore\ \angle A=\alpha$。

1960. 在四边形 $ABCD$ 的一边 BC 上求一点 P，使 $\angle PAB=\angle PDC$。

解 [作图] 作 A 点关于 BC 的对称点 A'，设 $A'B$ 与 CD (或延长线) 的交点为 E。过三点 A'、D、E 作圆，与 BC 相交于 P。则 P 为所求的点。



[证明] 根据作图，E、D、P、A' 共圆。

$\therefore\ \angle CDP=\angle PA'E$。 ①

因 A 和 A' 关于 BC 对称，

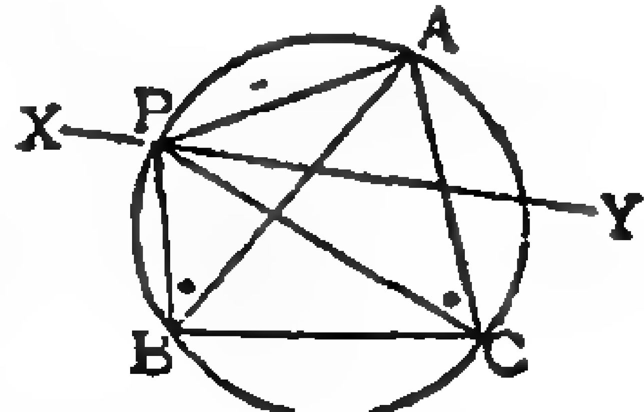
$\therefore\ \angle PA'E=\angle PAB$。 ②

根据①，②，$\angle PAB=\angle PDC$。

1961. 已知直线 XY 与三角形 ABC 相交，在 XY 上求一点 P，使

$\angle ABP=\angle ACP$。

解 设 P 为符合条件的点(图 1)，则 $\angle ABP=\angle ACP$。



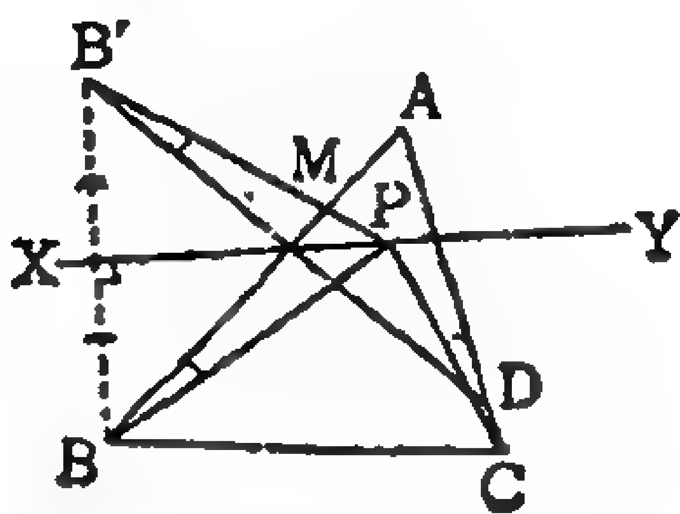
(1)

所以 A、C、B、P 四点共圆。因此过 A、B、C 作圆，与 XY 交于 P，则 P 即为所求的点。

如图(2)，设 P 在三角形 ABC 内，

$\angle ABP=\angle ACP$。

设点 B 关于 XY 的对称点为 B'，XY 与 AB 相交于 M，$B'M$ 与 AC 相交于 D，则



(2)

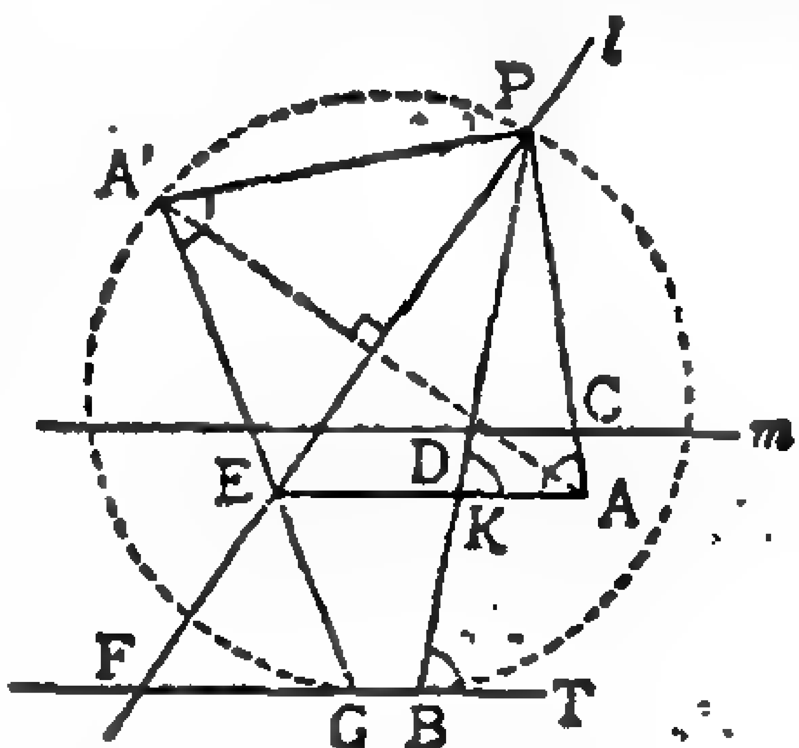
$$\angle PB'M=\angle PBA=\angle PCA。$$

所以 B'、P、D、C 四点共圆。因 B'、D、C 为已知点，所以过 B'、D、C 三点的圆与 XY 的

交点 P 即为所求的点。

1962. 已知两条直线 l、m 和两个点 A、B。在 l 上求一点 P，使 PA、PB 分别与 m 相交于 C、D，且 $\angle PCD=\angle PDC$。

解 ［分析］ 假定本题已解出，P 为符合条件的点，$\angle PCD=\angle PDC$。过 A 作 m 的平行线，与 PB 和 l 分别相交于 K、E。过 B 作 m 的平行线 BF，与 l 相交于 F。作 A 点关于 l 的对称点 A'，$A'E$ 与 BF 相交于 G。



图中，$\angle A=\angle A'$，$\angle PKA=\angle KBT$，

且　$\angle C=\angle D$，$\angle A=\angle PKA$。

$\therefore \angle KBT=\angle A'$，因而 A'、G、B、P 四点共圆。因此可作图如下。

［作图］ 过 A、B 分别作 m 的平行线，与 l 相交于 E、F，作 A 关于 l 的对称点 A'，连结 $A'E$，与 BF 相交于 G。过 A'、G、B 三点作圆，与 l 相交于 P。则 P 即为所求的点。

1963. 在直角 XOB 的一边上有两定点 A、B，在另一边上求一点 X，使 $\angle AXB=2\angle ABX$。

解 假定本题已解出，X 为所求的点。设 AB 的中点为 P，过 P 作 AB 的垂线与 BX 相交于 Y，则 $AY=BY$。

$\therefore \angle AYX=2\angle ABX$，从而

$$\angle AXY=\angle AYX。$$

由此　　　$AX=AY$。

设 XY 的中点为 C，则 $AC\perp XY$，所以 C 在以 AB 为直径的圆上。过 C 作 AB 的垂线 CD，则 D 为 OP 的中点。故得作图方法如下：

作以 AB 为直径的圆（圆心为 P），与 OP 的垂直平分线相交于 C，延长 BC 与 OX 相交于 X，则 X 即为所求的点。

1964. 求一点 P，使它对已知线段 AB 的张角 APB 等于角 α，且过 P 点向已知圆所引两条切线的夹角等于角 β。

解 设一点 P，过 P 向圆 O 所作的两条切线所成的角等于 β，如图，

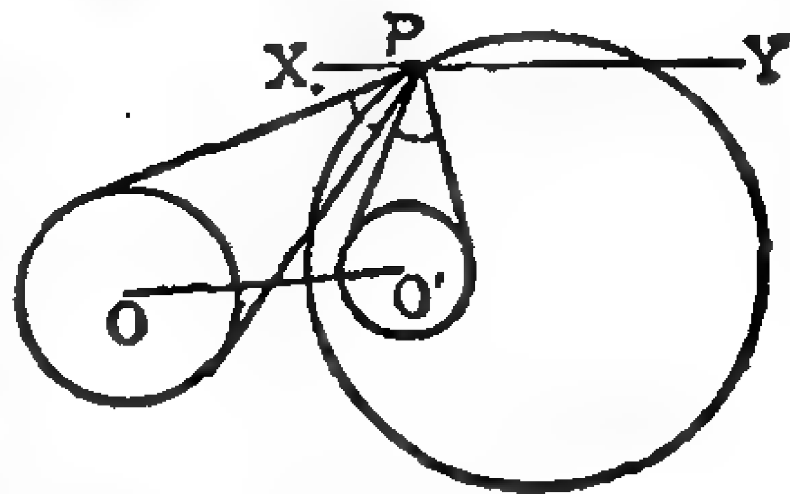
$$\angle DPO=\frac{1}{2}\beta,$$

$$\angle ODP=\angle R。$$

又因 OD 是已知的，所以 $\triangle DOP$ 的形状、大小是一定的，OP 的长也一定。所以点 P 的轨迹是以 O 为圆心，线段 OP 为半径的圆。其次使对线段 AB 的张角等于已知角 α 的点的轨迹，是以 AB 为弦的圆弧。因此这两条轨迹的交点 P 即为所求的点。

1965. 在已知直线 XY（或已知圆）上求点 P，使另两个已知圆分别与以 P 为顶点的两个等角的两边相切。

解 设另两个已知圆 O 与 O' 的半径分别为 r、r'，使圆 O、O' 与两个相等角的两边相切的点的轨迹，是与圆心 O、O' 的距离的比为 $r:r'$ 的阿波罗尼斯圆（问题 1863）。因此，这条轨迹与 XY（或已知圆）的交点即为所求。



1966. 有一张长方形弹子球台 $ABCD$，由 AB 边上的任意点 P 开始打球，使球碰到 BC 边，然后碰到 CD、DA 边，又回到 P 点。那么最初从 P 点打球时，应根据怎样的方向发球？试用作图求之。

设球除了改变方向外，总是直线前进，并且当球在改变方向时的前后球的路线与过该点所作该边的垂线构成等角。

解 ［分析］ 设球从 AB 边的 P 点出发，先后碰到 BC、CD、DA 边上的 Q、R、S 点，又回到 P 点。则 QR 的位置应从点 P 关于 BC 的对称点 P' 出发；RS 应从 P' 关于 CD 的对称点 P'' 出发；SP 应从 P'' 关于 DA 的对称点 P''' 出发。因此，作图如下。

［作图］ 设点 P 关于 BC 的对称点为 P'，P' 关于 CD 的对称点为 P''，P'' 关于 DA 的对称点为 P'''。连结 PP'''，与 DA 相交于 S，SP'' 与 CD 相交于 R，RP' 与 BC 相交于 Q。则应该根据 PQ 的方向发球。

［证明］ $\because P$、P' 关于 BC 对称，

$$\therefore \angle PQB=\angle P'QB,$$

$\angle PQB=\angle CQR$.

因此沿 PQ 方向打出的球，在点 Q 向 QR 方向运动。同样，球在点 R，点 S 分别向 RS、SP 方向运动，最后回到点 P。

［讨论］　经常有解。

1967． 求点 P，使三个已知圆分别与过点 P 的三个等角的两边相切。

解　设三个已知圆为 A、B、C，并设它们的半径分别为 r、r'、r''。若圆 A、圆 B 分别与两个等角的两边相切，则此两等角的公共顶点的轨迹是以把 AB 内分为 $r:r'$ 和把 AB 外分为 $r:r'$ 的两点连线为直径的圆（参照问题1861）。同样，若圆 B、圆 C 分别与两个等角两边相切，则此两等角的公共顶点的轨迹也是一个圆。因此，若这三个圆分别与三个等角两边相切，则此三个等角的公共顶点是这两条轨迹相交的两个点。

4．线段的和、差为定值

1968． 在已知弧 ACB 上取一点 E，使

(1) $AE+EB=l$，　(2) $AE\sim EB=l$。

解　(1)［作图］　以弧 ACB 的中点 C 为圆心、CA 为半径作圆弧；以 A 为圆心、l 为半径作圆弧，这两条弧相交于 D，AD 与弧 ACB 相交于 E，则 E 即为所求的点。

［证明］　∵ C 是圆 ADB 的圆心，

∴　$\angle ACB=2\angle ADB$，

且　　$\angle ACB=\angle AEB$。

∴　$\angle AEB=2\angle ADB$。

但　$\angle ADB+\angle DBE=\angle AEB$。

∴　$\angle ADB=\angle DBE$，$ED=EB$，

从而　$AE+EB=AE+ED=AD=l$。

(2)［作图］　以弧 ACB 的共轭弧中点 F 为圆心、FA 为半径作圆弧，与以 A 为圆心、l 为半径的圆弧相交于 D，延长 AD 与弧 ACB 相交于 E，则 E 为所求的点。

［证明］　∵ F 为圆心，所以

$2\angle BAD=\angle BFD$。

又　　$\angle BAD=\angle BAE=\angle BFE$，

∴　$\angle DFE=\angle BFE$　且　$DF=BF$。

∴　$\triangle DEF\cong\triangle BEF$。

∴　$BE=ED$，　$AE-BE=AD=l$。

1969． 在 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上求一点 D，过 D 作 AC 和 AB 的平行线，分别与 AB、AC 相交于 E、F，使 $DE+DF=l$（l 为已知线段长）。

解　在 AB、AC 或它们的延长线上分别取 $AB'=AC'=l$，$B'C'$ 与 BC 相交于 D。则 D 为所求的点。理由是：

∵ $\triangle AB'C'$ 为等腰三角形，$ED\parallel AC'$。

∴　$B'E=ED$。

又因 $AEDF$ 为平行四边形，

∴　$AE=DF$。 ∴　$DE+DF=AB'=l$。

1970． 在三角形 ABC 的边 BC 上求一点 P，过 P 作 AC、AB 的平行线，与 AB、AC 相交于 E、F，使 $PE\sim PF=m$（m 为已知线段长）。

解　在 BA 的延长线上取一点 M，在 AC 上取一点 N，使 $AM=AN=m$。延长 MN 与 BC 相交于 P。则 P 即为所求的点。理由是：

∵　$PE\parallel AC$，

$AM=AN$。

∴　$PE=EM$。　①

又　∵　$PF\parallel AE$，

$PE\parallel AF$，

∴　$PF=AE$。　②

由①、②，$PE-PF=EM-EA=AM=m$。

注　如果在 CA 的延长线上取点 N，在 AB

上取点 M，这样作图，则 $PF-PE=m$。P 为适合条件的点。

1971. 在已知三角形 ABC 的底边 BC 上求一点 P，从 P 作 AB、AC 的垂线 PE、PF，使 $PE+PF=m$（m 为已知线段长）。

解　［分析］　设适合条件的点 P 已求出。通过 P 作直线 LPM，使与 AB、AC 构成等角，设这条直线与 AB、AC 分别交于 L、M，则 $\triangle ALM$ 为等腰三角形。

由 L 作 AC 的垂线 LN（根据问题 **150**），则

$$PE+PF=LN=m\ (\text{定长})。$$

因此可作图如下。

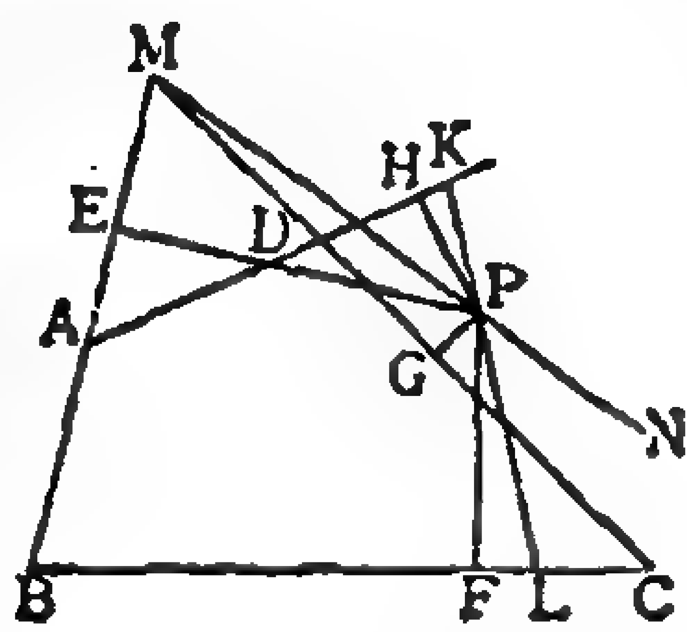
［作图］　在与 AC 的距离为 m 处作 AC 的平行线，与 AB 或者 AB 的延长线相交于 L；在 AC 或者 AC 的延长线上取 $AM=AL$，连结 LM，与 BC 相交于 P。则 P 为所求的点。

1972. 在 $\triangle ABC$ 的一边 BC 上求一点 P，从 P 作 AB、AC 的垂线 PE、PF，使 $PE\sim PF=m$（m 为已知线段的长）。

解　在 BA 的延长线上取点 L，在 AC 上取点 M，使 $AL=AM$，且 M 到 AB 的距离 $MN=m$。则等腰三角形 AML 的底边 LM 的延长线上所有点到 AB、AC 的距离的差都等于 m（问题 **151**）。

由此，设 LM 与 BC 相交于 P，由 P 作 AB、AC 的垂线 PE、PF，则 $PE-PF=m$。所以 P 为适合条件的点。

1973. 求一点，使它到已知四边形 $ABCD$ 的两条对边 AD、BC 距离的和为 l，到另外两边 AB，CD 距离的比为 $m:n$（m，n 为已知线段长）。



解　设 P 为适合条件的点，则满足 $PH+PF=l$ 的点 P 的轨迹是与 AD、BC 构成等角的线段 KL（问题 **1729**），又满足 $\dfrac{PE}{PG}=\dfrac{m}{n}$ 的点 P 的轨迹是通过 BA 和 CD 的交点 M 的直线 MN（问题 **1855**）。

［讨论］　因为第一个轨迹是矩形的四条边，第二个轨迹是两条直线，因此最多有四个适合条件的点。

1974. 在三角形 ABC 的边 BC 上求一点 P，过 P 作两条已知直线 XX' 和 YY' 的平行线 PQ 和 PR，与 AB、AC 分别相交于 Q、R，使 $PQ+PR=l$（l 为已知线段长）。

解　［分析］　假定此题已解出，设 PQ、PR 为所求线段。延长 QP 至 G，使 $PG=PR$。过 B 作 $BF\parallel QG$，且使 $BF=QG$，则

$$BF=QG=PQ+PR=l。$$

即 BF 的长和方向一定，F 为定点。延长 CG 与 BF 相交于 E，则

$$PG:BE=CP:CB,$$

$$PR:BD=CP:CB\quad(BD\parallel PR)。$$

$$\therefore\quad PG:BE=PR:BD。$$

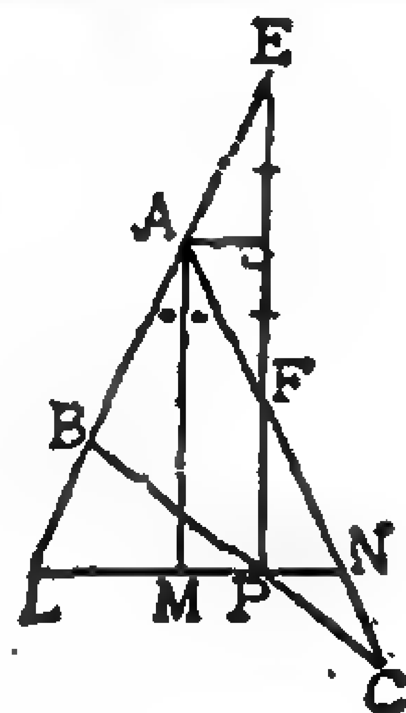
根据作图，　$PR=PG$。　$\therefore$　$BD=BE$。

从而 E 为定点，CE 为定直线，且 $FG\parallel AB$，故可确定点 G 的位置。因此可作图如下。

［作图］　过点 B 作 $BD\parallel YY'$，与 AC 相交于 D；又过点 B 作 $BE\parallel XX'$，使 $BE=BD$，在 BE 上取点 F，使 $BF=l$。过点 F 作 AB 的平行线，与 EC 相交于 G，又过 G 作 $GQ\parallel EB$，与 BC 相交于 P，则 P 为所求的点。

1975. 在 $\triangle ABC$ 的 BC 边上求一点 P，过 P 作 $\angle A$ 的平分线的平行线，分别与 BA 的延长线、AC 相交于 E，F，使 $PE+PF=2m$（m 为已知线段的长）。

解　作 $\angle A$ 的平分线 AM，取 $AM=m$，过 M 作 AM 的垂线，分别与 AB、AC 或它们的延长线相交于 L、N，设 LN 与 BC 相交于 P。则 P 为所求的点。其理由是：



根据问题 **149**，

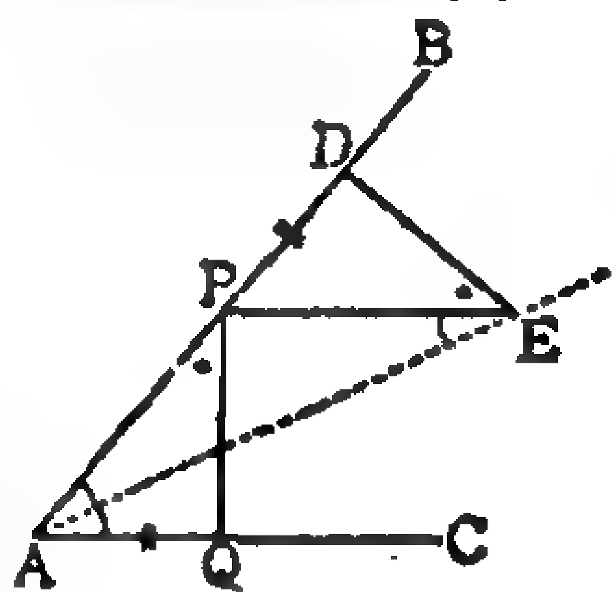
$$PE+PF=2AM。$$

$$\because\quad AM=m,\quad\therefore\quad PE+PF=2m。$$

［讨论］ 根据 m 的长度，若直线 LMN 与边 BC 不相交，则此题无解。LMN 与 BC 重合时，此题的解不定。除此之外，一般有一解。

1976. 有相交于点 A 的两条直线 AB、AC。在 AB 上求一点 P，由 P 作 AC 的垂线 PQ，使 $AP+AQ=l$（l 为已知线段的长）。

解 在 AB 上取 $AD=l$，过 D 作 $DE\perp AB$，与 $\angle A$ 的平分线相交于 E。过 E 作 $EP\parallel AC$，与 AB 相交于 P。再由 P 作 AC 的垂线 PQ，则 $AP+AQ=l$。其理由是：



在 $\triangle APQ$ 和 $\triangle PED$ 中

$\angle Q=\angle D=\angle R$，$\angle PAQ=\angle DPE$，

$\therefore\ \angle APQ=\angle PED$。

且 $\angle PAE=\angle EAC$

$=\angle PEA$（根据作图）。

因而 $PA=PE$，

$\therefore\ \triangle APQ\cong\triangle PED$。

由此 $AQ=PD$，

$AP+AQ=AP+PD=AD=l$（定长）。

1977. 在 $\angle BAC$ 的一边 AB 上求一点 P，过 P 作 AC 的垂线 PQ，使

(1) $AP+PQ=m$（m 为已知线段长）；

(2) $AP-PQ=m$（m 为已知线段长）。

解 (1) 在 AB 上取 $AD=m$，过 D 作 AC 的垂线 DE。设 $\angle ADE$ 的平分线与 AC 相交于 Q，再由 Q 作 AC 的垂线，与 AB 相交于 P，则 P 为所求的点。其理由是：

$\because\ PQ\parallel DE$，DQ 为 $\angle D$ 的平分线，

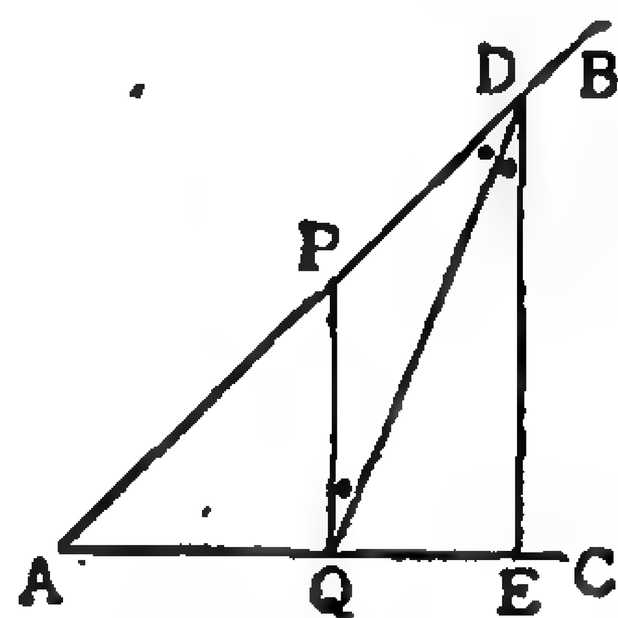
$\therefore\ \angle PQD=\angle QDE=\angle PDQ$。

因而 $PQ=PD$，

$AP+PQ=AP+PD$

$=AD=m$。

因此 P 为适合条件的点。



(2) 在已知角的一边 AB 上取 $AD=m$，由 D 作 AC 的垂线 DE，$\angle EDB$ 的平分线与 AC 相交于 Q。过 Q 作 AC 的垂线 QP 与 AB 相交于 P。则 $AP-PQ=m$。理由是：

因为 $PQ\parallel DE$，DQ 是 $\angle EDB$ 的平分线。

所以

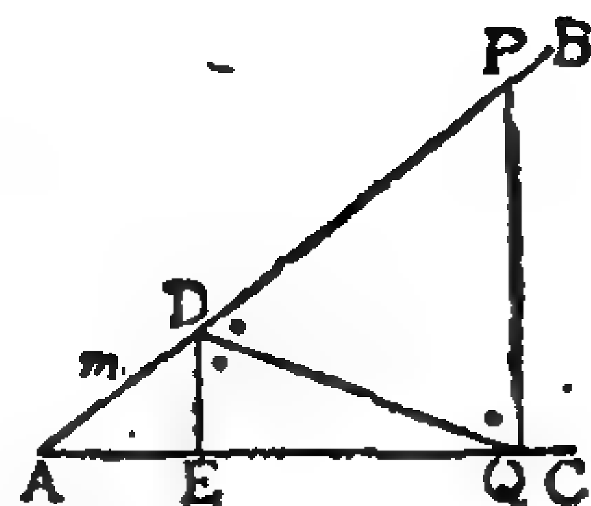
$\angle DQP=\angle EDQ$

$=\angle PDQ$。

因而 $PD=PQ$，

即 $AP-PQ$

$=AP-PD=AD=m$。

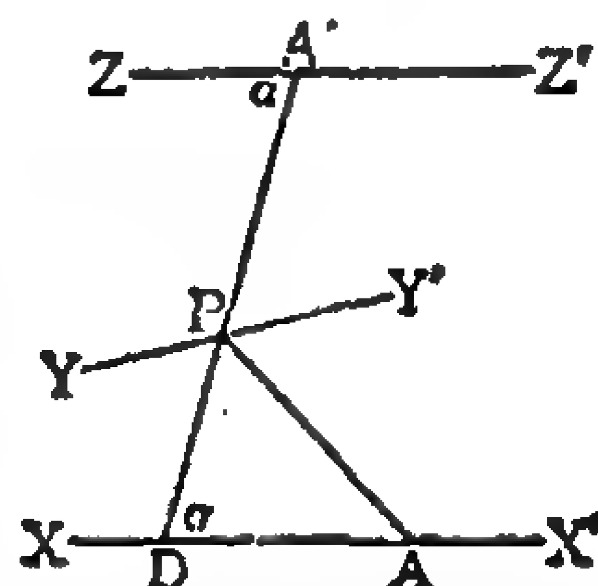


1978. 在直线 XX' 上有一点 A，在直线 YY' 上求一点 P。过 P 作与直线 XX' 的夹角为 α 的直线 PD 与 XX' 交于 D，使 $PD+PA=m$ 或 $PD\sim PA=m$（m 为定长）。

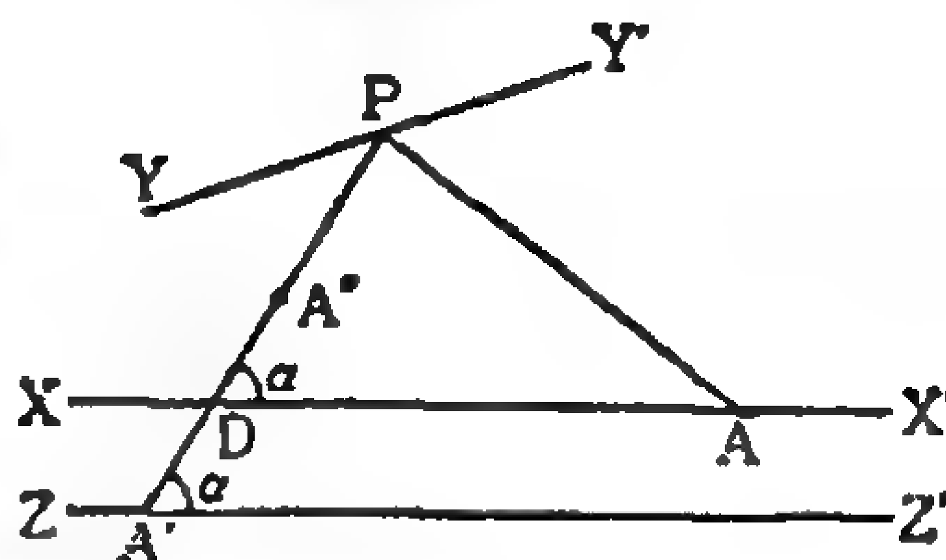
解 (1) 假定已求出适合条件的点 P，则 $\angle PDA=\alpha$，且

$PD+PA=m$。

将 DP 延长至 A'，使 $PA'=PA$，过 A' 作 XX' 的平行线 ZZ'，



由于 $DA'=m$，$\angle A'DX'=\alpha$。所以 ZZ' 的位置可确定。因此，本题只须在 YY' 上求点 P，过 P 作与 ZZ' 的夹角为 α 的直线 PA'，使 $PA'=PA$。此题就可归结为问题 **2058**。

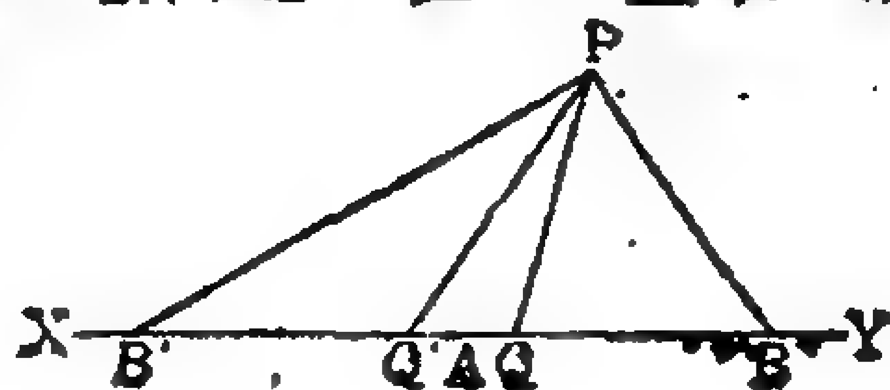


(2) 假定已求得适合条件的点 P，$PD\sim PA=m$，在 PD 或其延长线上求点 A'，使 $PA'=PA$，则 $DA'=m$。再过 A' 作 XX' 的平行线 ZZ'，则 $\angle DA'Z'=\alpha$，$DA'=m$。所以 ZZ' 的位置可确定。因此，只须在 YY' 上求点 P，使 $PA=PA'$ 即可。所以与(1)同样归结为问题 **2058**。

注 在 $A'D$ 的延长线上取点 A''，使 $DA''=DA'$，再如上图，则还有一解。

1979. 在直线 XY 上有一点 A，在 XY 外有一点 P。在这条直线上求一点 Q，使 $AQ+QP=l$（l 为已知长），或使 $AQ-QP=m$（m 为已知长）。

解 和的情况：［作图］ 在 XY 上取一线段 $AB=l$，作 PB 的垂直平分线，与 XY 相交于 Q。Q



即为所求的点。

［证明］ 因为 Q 是 PB 的垂直平分线上的点，所以

$$PQ=QB,$$

因而 $QA+QP=QA+QB=AB=l$。

差的情况：［作图］ 在 XY 上取点 B，使 $AB=m$。作 PB 的垂直平分线，与 XY 的交点 Q 即为所求。

［证明］ 省略。

1980. 在直线 MN 的两侧有两点 A、B，在直线 MN 上求一点 P，使 $PA+PB$ 为定长 l。

解 作点 A 关于 MN 的对称点 A'。以 B 为圆心、l 长为半径作圆 B，过 A、A' 作与圆 B 内切的圆（问题 **2637**），设切点为 C，连结 B、C 与直线 MN 相交于 P，则 P 即为所求的点。其理由是：

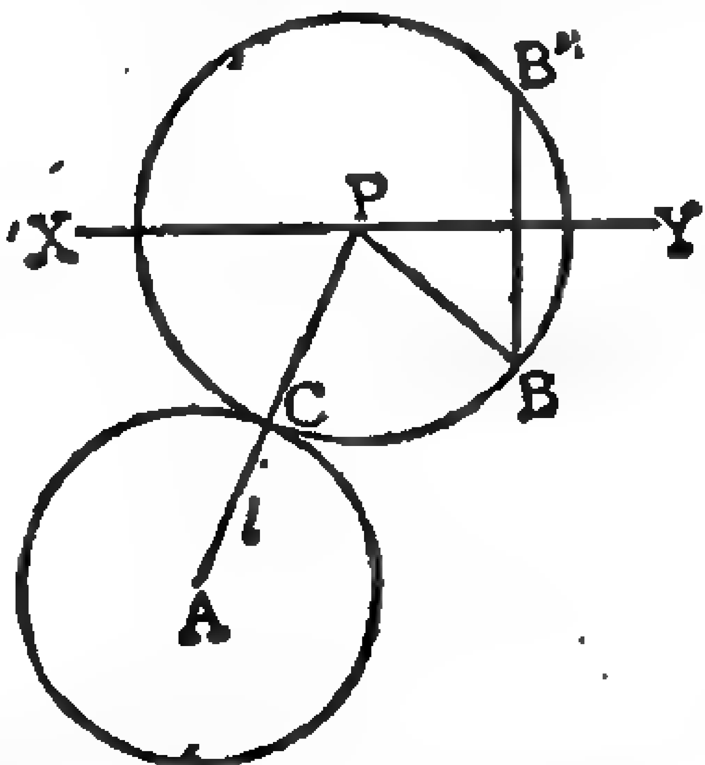
圆 $AA'C$ 与圆 B 内切，两圆心在直线 BC 上，而点 A、A' 关于 MN 对称，则圆 $AA'C$ 的圆心在直线 MN 上。所以直线 BC、MN 的交点 P 为圆 $AA'C$ 的圆心。

因此 $BP+PA=BP+PC=BC=l$。

［讨论］ 连结 BA'，使 A、B 与 MN 上的一点的距离之和最小。本题成立的必要条件是：$l>BA'$。当 $l>BA'$ 时，过 A、A' 且与圆 B 相切的圆有两个，故有两解。当 $l=BA'$ 时，过 A、A' 点且与圆 B 相切的圆有一个，故有一解。

注 过两定点 A、A' 且与已知圆 B 相切的圆的作图可参照问题 **2637**。

1981. 在定直线 XY 的同侧有两个定点 A、B，在 XY 上求一点 P，使 $PA-PB=l$（l 为已知线段的长）。



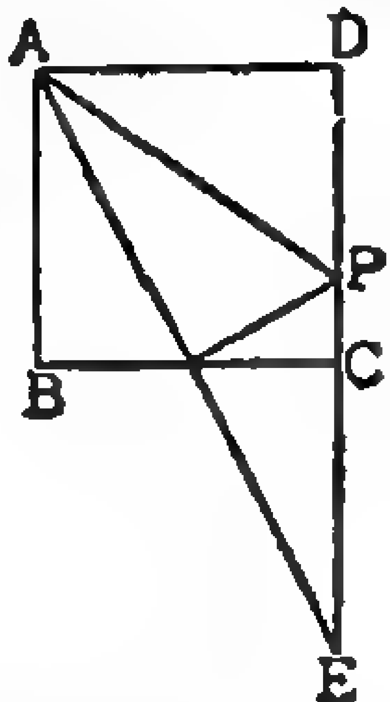
解 以 A 为圆心、l 长为半径作圆，作点 B 关于 XY 的对称点 B'，再作过两点 B、B' 且与圆 A 相切的圆，则其圆心 P 即为所求的点。其理由是：因圆 P 过 B、B'，所以圆心在 BB' 的垂直平分线 XY 上。设圆 P 与圆 A 的切点为 C，则

$$PA-PB=PA-PC=AC=l,$$

故 P 为适合条件的点。

［作图］ 过定点 B、B' 作与以 A 为圆心，l 为半径的圆相切的圆（问题 **2637**），因为切点 C 的位置是给定的，所以 P 点的位置也确定了。

1982. 在正方形 $ABCD$ 的边 CD 上求一点 P，使 $AP=BC+CP$。



解 在 DC 的延长线上取点 E，使 $CE=CB$。连结 AE，作 AE 的垂直平分线与 CD 相交于 P，则

$$AP=PE=BC+CP,$$

所以 P 为所求的点。

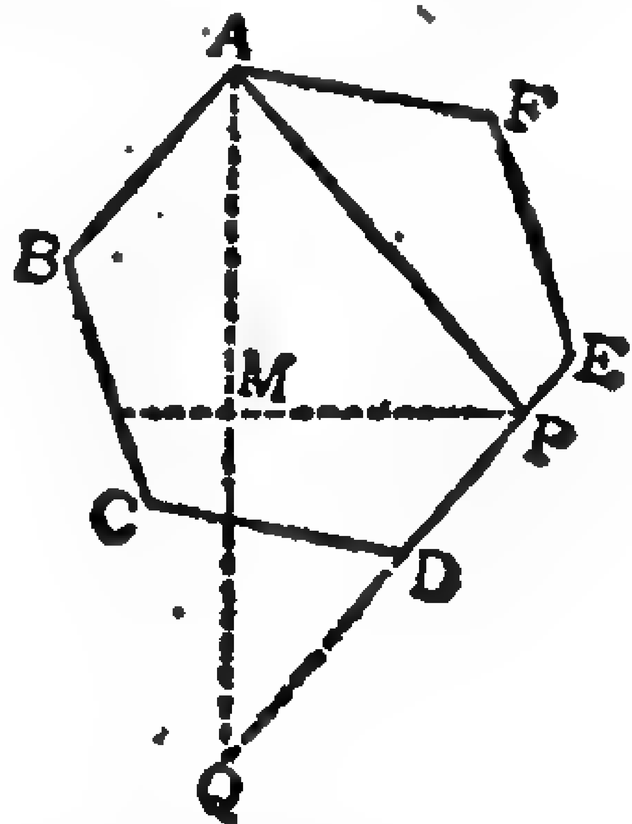
1983. 在平行四边形 $ABCD$ 的一边 CD 上，求一点 X，使 $AX=AB+XD$。

解 在 CD 的延长线上取一点 E，使 $DE=CD$。作 AE 的垂直平分线与 CD 相交于 X，则 X 即为所求的点。这是因为：

$$AX=EX=ED+DX=CD+DX$$
$$=AB+DX.$$

注 如果 $AD\geqq AB$，则满足 $AX=AB+DX$ 的点 X 的作图才有可能。如果 $AD=AB$，则点 X 与 D 重合；如果 $AD<AB$，则本题无解（若允许 X 在 CD 的延长线上，则 $AX=AB-XD$）。

1984. 在正六边形 $ABCDEF$ 的一边 DE 上求一点 P，使 $AP-PD$ 等于这个正六边形的边长。



解 ［分析］ 设点 P 已经作出。在 PD 的延长线上取点 Q，使 $DQ=DE$，则 $AP=PQ$。所以 Q 为定点，$\triangle PAQ$ 为等腰三角形。故可作图如下。

［作图］ 在 ED 的延长线上取点 Q，使 $DQ=DC$；再作 AQ 的垂直平分线 MP，与

DE 相交于 P，则 P 点即为所求的点。

[证明]　由作图知 $AP=PQ$，所以

$$AP-PD=PQ-PD=DQ=DC,$$
$$AP-DP=DC.$$

[讨论]　本题总有一解。

5．求已知三角形（或已知多边形）内的点

1985． 在 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 上分别有已知线段 LL'、MM'、NN'。在三角形内求一点 O，使

$$S_{\triangle OLL'}=S_{\triangle OMM'}=S_{\triangle ONN'}.$$

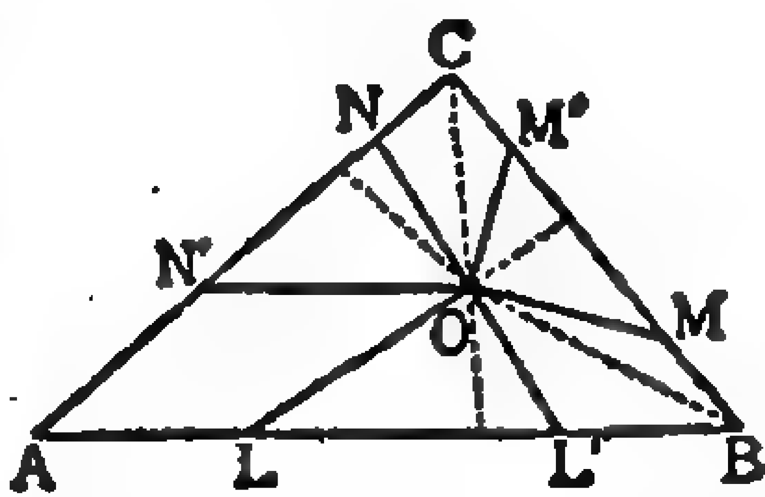
解　[分析]　设 $LL'=l$，$MM'=m$，$NN'=n$。由 O 向 AB、BC、CA 作垂线，设垂线长分别为 h_1、h_2、h_3，则由

$$S_{\triangle OLL'}=S_{\triangle OMM'}=S_{\triangle ONN'},$$

可知 $$lh_1=mh_2=nh_3,$$

即 $$\frac{h_1}{h_2}=\frac{m}{l},\quad \frac{h_2}{h_3}=\frac{n}{m}.$$

所以 O 到 AB、BC 的距离的比为 $m:l$；O 到 BC、CA 的距离的比为 $n:m$。故可作图如下。



[作图]　在三角形的各边同侧分别作与 AB 平行且与 AB 的距离为 m 的直线 (α)；与 BC 平行且与 BC 距离为 l 的直线 (β)；与 BC 平行且与 BC 距离为 m 的直线 (γ)，与 CA 平行且与 CA 距离为 m 的直线 (δ)。设 α 与 β 的交点为 P，γ 与 δ 的交点为 Q，则 BP 与 CQ 的交点 O 即为所求的点。

[证明]　O 是 BP 上的点，则 $h_1:h_2=m:l$。

$$\therefore\ lh_1=mh_2,$$

从而 $$S_{\triangle OLL'}=S_{\triangle OMM'}.$$

又 O 是 CQ 上的点，则

$$h_2:h_3=n:m.$$

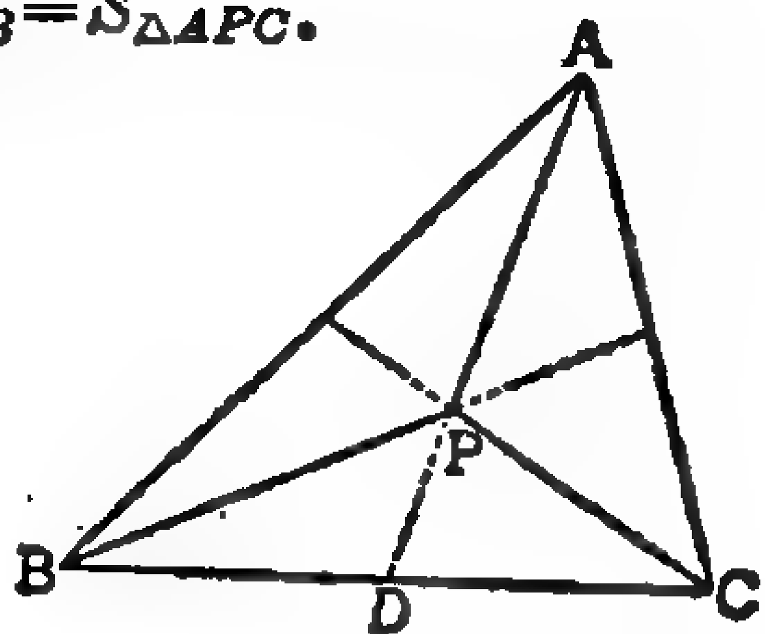
$\therefore\ mh_2=nh_3$，$\therefore\ S_{\triangle OMM'}=S_{\triangle ONN'}$。

因此 $S_{\triangle OLL'}=S_{\triangle OMM'}=S_{\triangle ONN'}$。

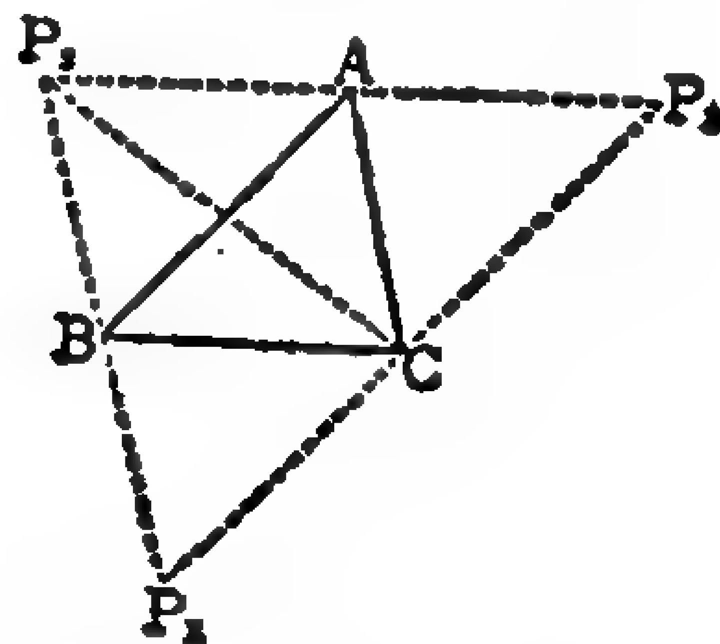
[讨论]　本题有一解。

1986． 在已知三角形 ABC 内求一点 P，使 $$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCA}.$$

解　由 $S_{\triangle APB}=S_{\triangle APC}=S_{\triangle BPC}$，知 $$S_{\triangle APB}=S_{\triangle APC}.$$



延长 AP 与 BC 相交于 D，则 $BD=DC$。同样，BP、CP 的延长线分别交于 AC、AB 的中点，故 P 点为 $\triangle ABC$ 的重心。

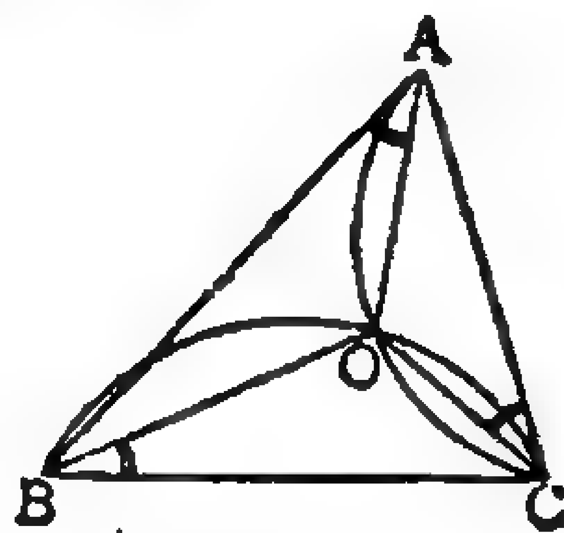


注　如果 P 在三角形外，过 A、B、C 分别作与对边平行的直线，则它们的三个交点 P_1、P_2、P_3 均为所求的点 P。

1987． 在 $\triangle ABC$ 内求一点 O，使

$$\angle OBC=\angle OCA=\angle OAB.$$

解　过 B、C 作与 AC 相切的圆；过 C，A 作与 AB 相切的圆，则这两个圆的交点 O 即为所求的点．其理由是：



AC 是圆 BOC 的切线，

$$\angle ACO=\angle CBO.$$

同理，

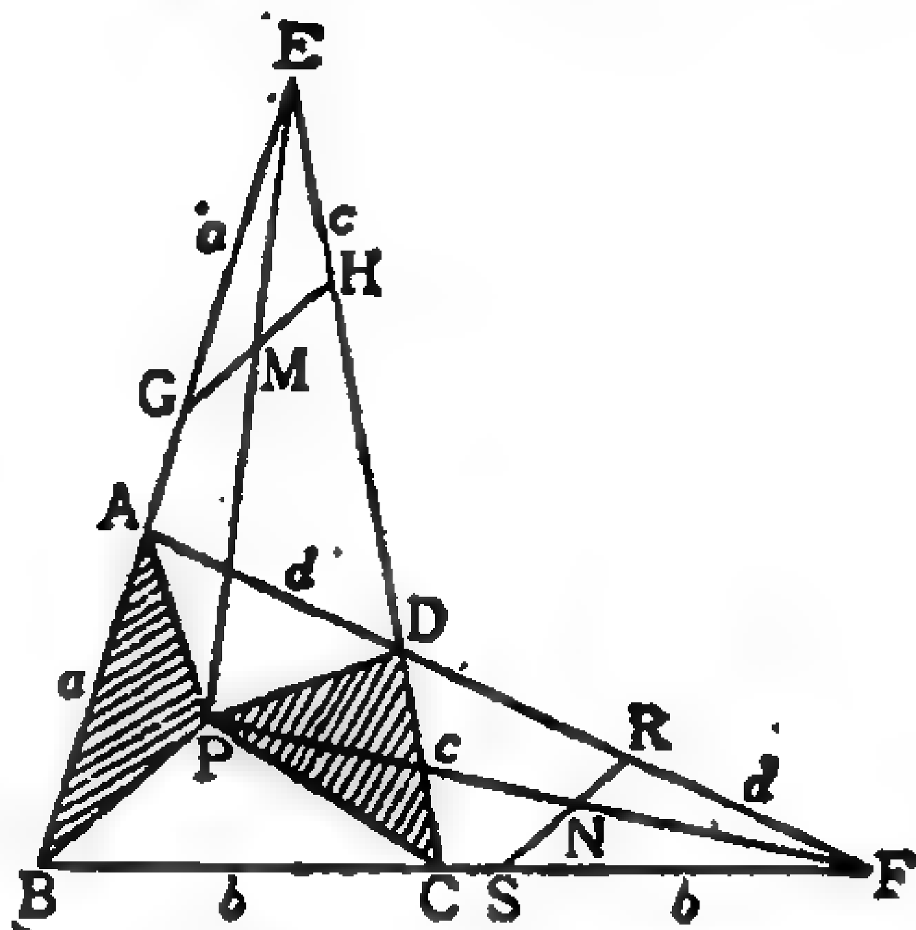
$$\angle BAO=\angle ACO,$$

所以 $$\angle CBO=\angle ACO=\angle BAO.$$

1988． 在凸四边形 $ABCD$ 内求一点 P，使 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$，$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PDA}$。

解　延长 BA、CD 相交于 E。在 EA、ED 上分别截

$$EG=AB,$$
$$EH=CD.$$



设 GH 的中点为 M，过 EM 的直线上的任意点为 P，则 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$。其理由是：

从 M 到 EG、EH 的距离的比与从 P 到 AB、CD 的距离的比相等。

$$\therefore\ S_{\triangle PAB}:S_{\triangle PCD}=S_{\triangle MGE}:S_{\triangle MHE}.$$

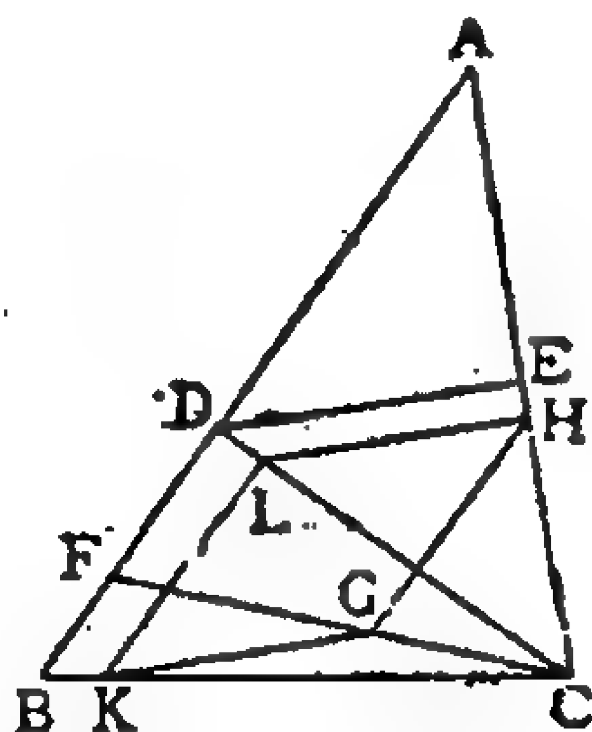
因为 M 是 GH 的中点，$S_{\triangle MGE}=S_{\triangle MHE}$，

$$\therefore\ S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}.$$

同理，延长AD、BC相交于F。取$FR=AD$，$FS=BC$。连结RS的中点N和F，设FN上的任意点为P'，则$S_{\triangle P'AD}=S_{\triangle P'BC}$。因此$EM$和$FN$的交点即为所求的点。

1989. 在$\triangle ABC$的边AB上求一点D，在边AC上求一点E，使$BD=DE=EC$。

解 设$AB>AC$，在AB上取$AF=AC$，从CF上的任意点G作BA的平行线与CA相交于H。以G为圆心、GH为半径作圆，与BC相交于K。设以GH、GK为两边的菱形的第四顶点为L，连结LC，LC与AB相交于D。过D作LH的平行线，与AC相交于E。则D、E即为所求的点。其理由是：



$\because$ $BD\parallel LK$，

$DE\parallel LH$，

$LK=LH$。

$\therefore$ $BD=DE$。

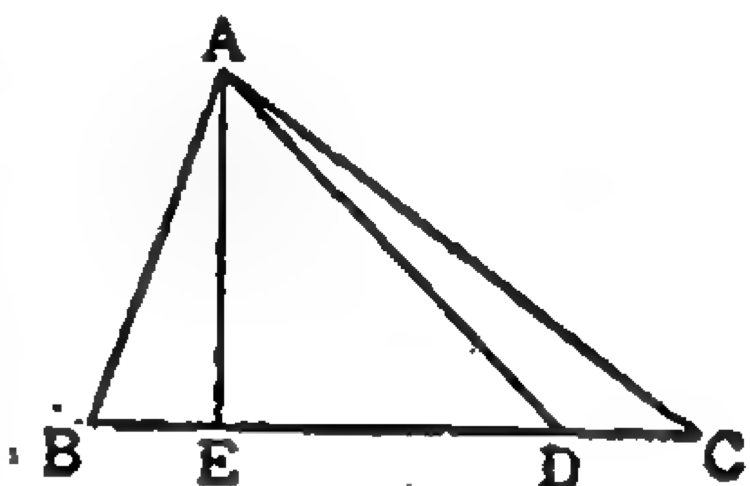
又 $DE\parallel LH$，$LH=HG=HC$。

$\therefore$ $DE=EC$。

故 $BD=DE=EC$。

1990. 在$\triangle ABC$的边BC或其延长线上求一点D，使$AB^2+BD^2=AC^2+CD^2$。

解 由A作BC的垂线AE，其垂足为E。在BC上取点D，使$CD=BE$，则D为所求的点。其理由是：



$\because$ $AE\perp BC$，

$\therefore$ $AB^2\sim AC^2=BE^2\sim CE^2$。 ①

根据作图 $CD=BE$，

$\therefore$ $BD=CE$。

代入①的右边，得

$AB^2\sim AC^2=CD^2\sim BD^2$。

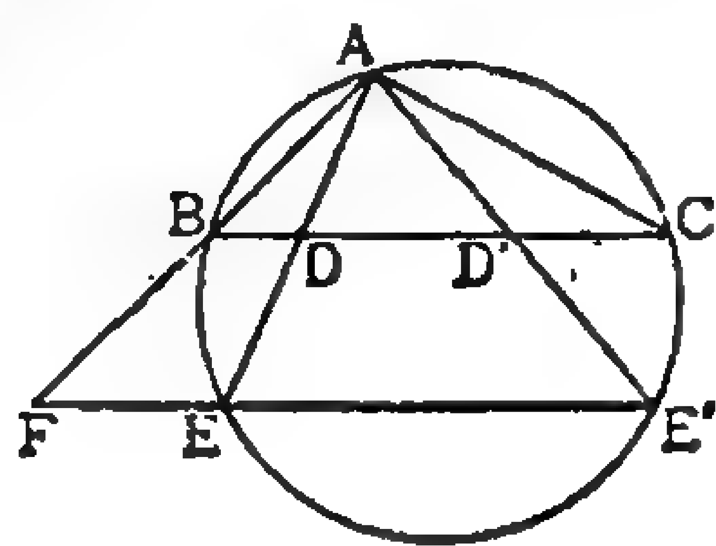
$\therefore$ $AB^2+BD^2=AC^2+CD^2$。

1991. 在$\triangle ABC$的底边BC上求一点D，使$AD^2=BD\cdot DC$。

解 ［作图］ 延长AB至F，使$BF=AB$。由F作BC的平行线，与$\triangle ABC$的外接圆相交于E（或E'）。AE与边BC相交于D（或D'），则D（或D'）即为所求的点。

［证明］ 根据作图$AB=BF$，$BD\parallel FE$，

$\therefore$ D为AE的中点，



$DA=DE$。 ①

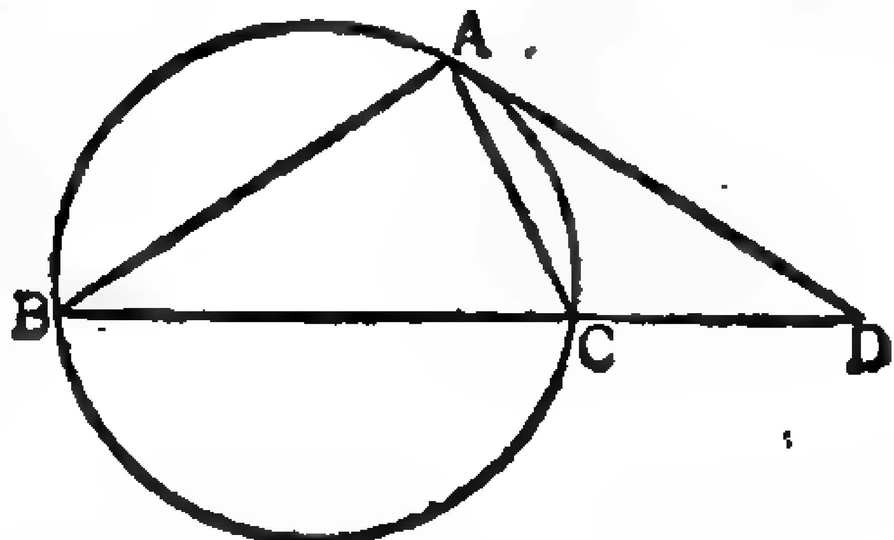
且

$DB\cdot DC=AD\cdot DE$。 ②

由①、②， $DB\cdot DC=AD^2$。

因此D为所求的点。

［讨论］ 直线FE与圆必须有交点，此题才有解。一般FE与$\triangle ABC$的外接圆有两个交点。因此，此题一般有两解。如果FE与此圆相切，则只有一解。FE与圆不相交，此题无解。



注 如果在BC的延长线上求点D，则它就是圆ABC在点A处的切线与BC的延长线的交点。

1992. 在$\triangle ABC$的底边CB的延长线上求一点E，使$AC^2-AB^2=BC\cdot BE$。

解 假定适合条件的点E已求出，则

$$AC^2-AB^2=BC\cdot BE。 \quad ①$$

从A作BC的垂线AD，则

$$\begin{aligned}AC^2-AB^2&=CD^2-BD^2\\&=(CD+BD)\cdot(CD-BD)\\&=BC\cdot(CD-BD)。\end{aligned} \quad ②$$

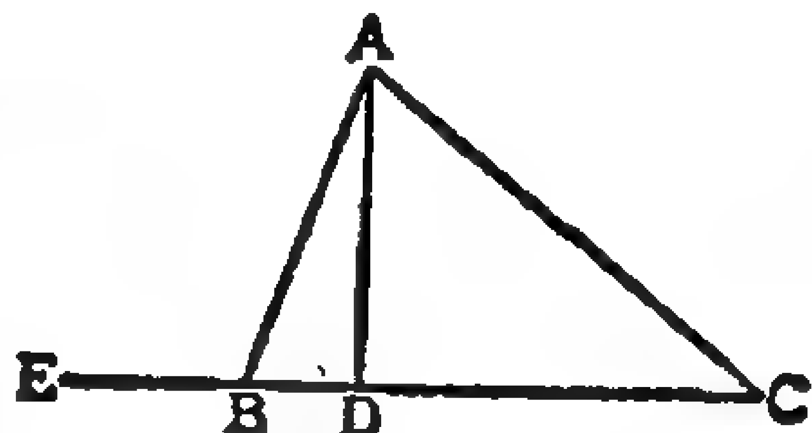
由①、②， $BC\cdot BE=BC\cdot(CD-BD)$，

$\therefore$ $BE=CD-BD$。

从而 $BE+BD=CD$，

即 $ED=DC$。

因此，由$\triangle ABC$的顶点A向对边作垂线AD，再在CB的延长线上求点E，使$CD=DE$，则E为适合条件的点。



1993. 在一个平面上有两个全等三角形ABC和$A'B'C'$，无论把其中哪一个绕这个平面上的某一点旋转时，都可能与另一个重合。因此在此平面上求点P，使$\triangle ABC$在此平面上绕P点旋转，与$\triangle A'B'C'$重合。

解 AA'、BB'的垂直平分线的交点P即

为所求的点。其理由是：

因为 P 为 AA'、BB' 的垂直平分线的交点，

$\therefore\quad PA=PA'$,

$PB=PB'$.

根据假定，

$AB=A'B'$,

$\therefore\quad \triangle PAB\cong\triangle PA'B'$.

因此，以 P 为中心旋转 $\triangle PAB$，使 PA 到 PA' 的位置，则 PB 就到 PB' 的位置，所以 B 与 B' 重合。同样，$\triangle PBC\cong\triangle PB'C'$，$C$ 与 C' 重合。因此，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 重合。

1994. 在 $\triangle ABC$ 内求一点 P，使

$$S_{\triangle PAB}:S_{\triangle PAC}:S_{\triangle PBC}=1:2:3.$$

解　[分析]　假定符合条件的点 P 已求出，

$$S_{\triangle PAB}:S_{\triangle PAC}:S_{\triangle PBC}=1:2:3.$$

延长 AP 与 BC 相交于 D，则

$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PAC}}=\frac{BD}{DC},$$

且 $$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PAC}}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}.$$

因此，D 为定点。同样，延长 BP 与 AC 相交于 E，则

$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{AE}{EC}=\frac{1}{3}.$$

因此，E 为定点。故可作图如下。

[作图]　在边 BC、CA 上分别取 D、E 两点，使

$$\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2},\quad \frac{AE}{EC}=\frac{1}{3}.$$

连结 AD、BE，相交于 P，则 P 为所求的点。

[证明]　$\triangle PAB$ 与 $\triangle PAC$ 有一公共边 AP，

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PAC}}=\frac{BD}{DC}.$$

根据作图 $$\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PAC}}=\frac{1}{2}.$$

同理， $$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{AE}{EC}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore\quad S_{\triangle PAB}:S_{\triangle PAC}:S_{\triangle PBC}=1:2:3.$$

即 P 为符合条件的点。

[讨论]　使 $BD:DC=1:2$，$AE:EC=1:3$ 的点 D、E，通常只有一个，又 AD、DE 的交点也只有一个，所以此题只有一解。

1995. 在顶角为锐角的等腰三角形 ABC 的腰 AB 上求一点 P，由 P 作底边 BC 的垂线 PX 与 BC 相交于 X，使

$$PX^2+AX^2=AB^2.$$

解　[分析]　设 P 为符合条件的点，则

$$PX^2+AX^2=AB^2. \qquad ①$$

由 A 作 BC 的垂线 AH，则

$$AB^2-AX^2=BH^2-XH^2.$$

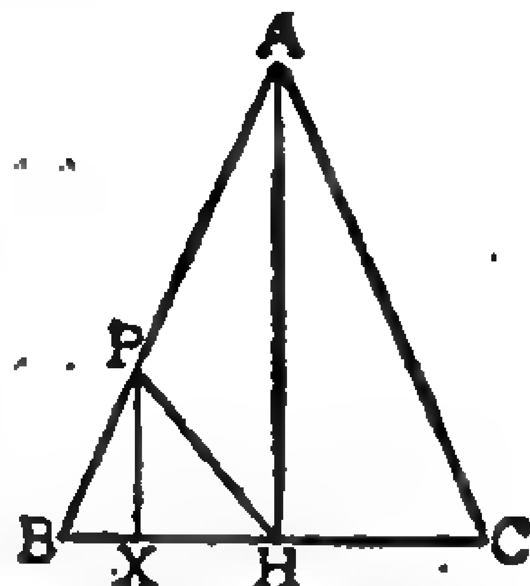
因 $$AB^2-AX^2=PX^2.$$

$$\therefore\quad PX^2=BH^2-XH^2,$$

$$BH^2=PX^2+XH^2=PH^2,$$

即 $$BH=PH.$$

因此作图如下。



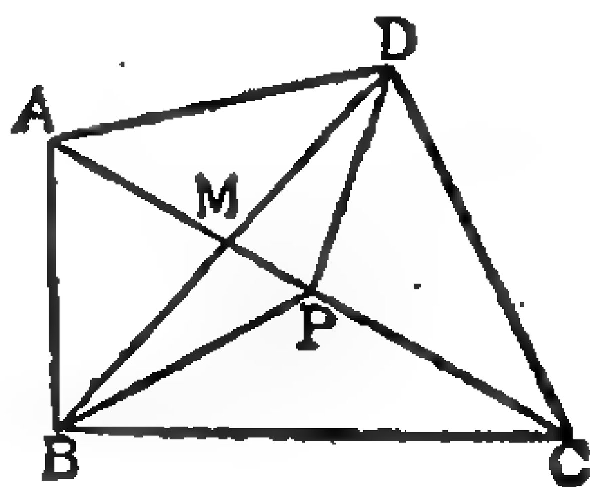
[作图]　从 A 作 BC 的垂线 AH，在 AB 上取点 P，使 $BH=PH$，则 P 为所求的点。

[证明]　从分析中可以明确，证明从略。

注　本题对任意三角形也成立。

1996. 在任意四边形 $ABCD$ 内求一点 P，连结 P 与四边形各顶点 A、B、C、D 所成的四个三角形的面积相等。

解　设四边形内的一点为 P，且 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAD}$，则连结 AP 的线段或其延长线必通过 BD 的中点 M。设 $S_{\triangle BPC}=S_{\triangle PDC}$，则 CP 或其延长线必通过 BD 的中点 M。所以，



可使 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAD}$ 且 $S_{\triangle PBC}=S_{\triangle DPC}$ 的点 P 在对角线 AC 上。且 AC 通过对角线 BD 的中点 M。因此使 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PDC}$ 的点 P 应在 AC 的中点。

同样，当 BD 通过 AC 的中点时，如果 P 为 BD 的中点，则

$$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PDC}.$$

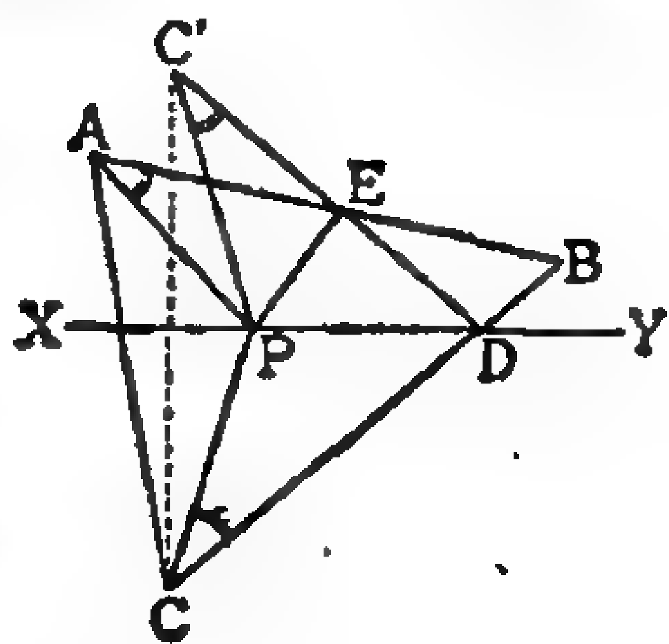
除此以外，不能找到符合条件的点，因此，只

有当四边形的对角线互相平分时，本题才有解。

1997. 已知 $\triangle ABC$ 和与它相交的直线 XY。在 XY 上求一点 P，使

$$\angle PAB=\angle PCB.$$

解 [作图] 设 BC 与 XY 的交点为 D，点 C 关于 XY 的对称点为 C'，$C'D$ 与 AB 的交点为 E。过 A、C'、E 三点作圆，与已知直线 XY 相交于 P，则 P 为所求的点。



[证明] 根据作图，A、C'、E、P 四点共圆。

$$\therefore \quad \angle PAE=\angle PC'E. \qquad ①$$

又 C 和 C' 关于 XY 对称，

$$\therefore \quad PC=PC',\ DC=DC'.$$

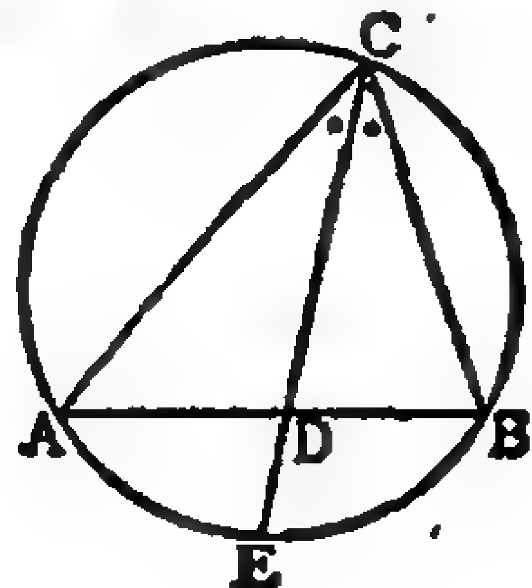
$$\therefore \quad \angle PCD=\angle PC'D. \qquad ②$$

根据①、②， $\angle PAB=\angle PCB$.

6. 求已知圆或已知圆弧上的点

1998. 将以 AB 为弦的圆弧在点 C 分成两段，使 (弦 AC)：(弦 BC) $=m:n$ ($m:n$ 为已知比)。

解 [分析] 假定此题已解出，C 为所求的点。设 $\angle C$ 的平分线与 AB 相交于 D，并与弧 ACB 的共轭弧相交于 E。则 E 是弧 AEB 的中点，所以



$$AD:DB=AC:CB=m:n,$$

从而 D 为定点。故可作图如下。

[作图] 将 AB 在点 D 内分为 $m:n$，设弧 ACB 的共轭弧的中点为 E，ED 的延长线与弧 ACB 相交于 C，则 C 为所求的点。

[证明] $\because \quad \widehat{AE}=\widehat{BE}$，

$$\therefore \quad \angle ACE=\angle BCE.$$

由此知 CD 平分 $\angle ACB$.

$$\therefore \quad CA:CB=AD:BD.$$

已知 $\quad AD:BD=m:n$，

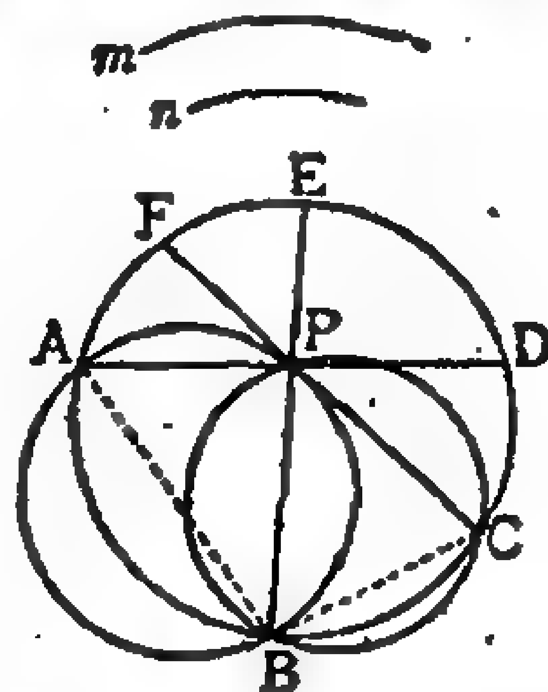
$$\therefore \quad CA:CB=m:n.$$

因此 C 为所求的点。

[讨论] 此题有而且只有一个解。

1999. 已知圆上三点 A、B、C，在圆内求一点 P，延长 AP、BP、CP，分别与圆周相交于 D、E、F，使弧 DE、弧 EF 等于两条已知弧。

解 假定点 P 为符合条件的点，则 $\angle APB$ 与在弧 AB 和在弧 DE 上的圆周角之和相等(问题 325)。但 A、B 为已知点，$\widehat{DE}$ 为已知弧，所以 $\widehat{AB}+\widehat{DE}$ 一定，从而 $\angle APB$ 的大小一定。同样，$\angle BPC$ 与 $\widehat{BC}+\widehat{EF}$ 上的圆周角相等，也是一定的。故以 AB、BC 为弦各作与 $\widehat{AB}+\widehat{DE}$，$\widehat{BC}+\widehat{EF}$ 上的圆周角相等的角为圆周角的两条弧时，它们的交点 P 即为所求的点。



2000. 已知圆上两点 A、B，在此圆上求一点 P，设 $\angle APB$ 的平分线与弦 AB、圆分别交于 C、D，使 $DC:DP=1:3$.

解 [分析] 设圆心为 O，直线 PD 平分 $\angle APB$，则 D 为弧 ADB 的中点。如果在 OD 上取一点 M，使

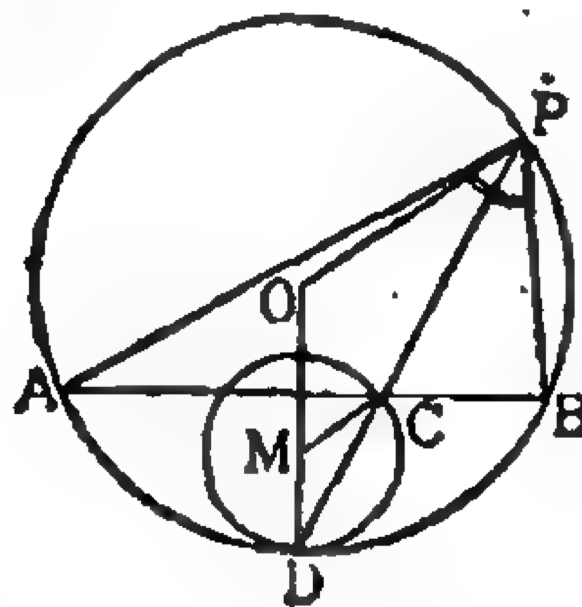
$$DM:DO=1:3.$$

则 $MD:MO=DC:CP$，

$$\therefore \quad MC \parallel OP.$$

$$\because \quad OP=OD,$$

$$\therefore \quad MC=MD.$$



因此，C 是以 M 为圆心、MD 为半径的圆与弦 AB 相交的点。故可作图如下。

[作图] 连结弧 AB 的中点 D 和圆心 O，在半径 OD 上取一点 M，使 $DM:DO=1:3$，以 M 为圆心，MD 为半径作圆，此圆与弦 AB 相交于 C，直线 DC 与弧 ADB 的共轭弧相交于 P，则 P 为所求的点(一般有两个交点)。

[证明] $\because \quad OD=OP,\ MD=MC.$

$$\therefore \quad \angle OPD=\angle ODP=\angle MCD,$$

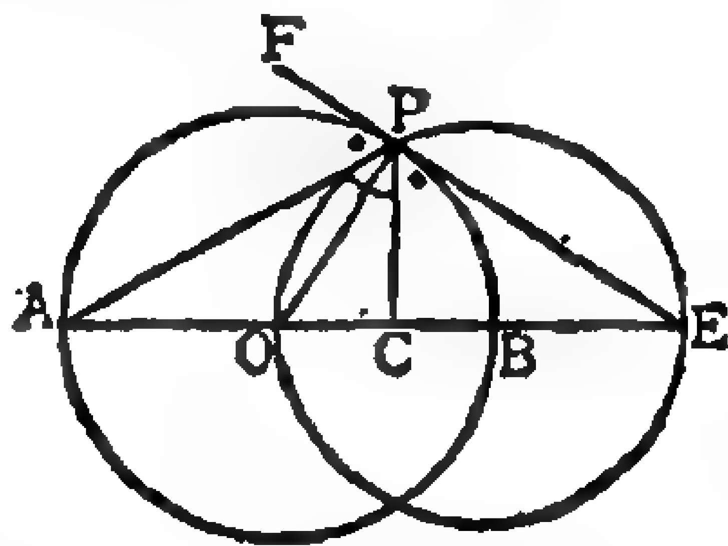
$$\therefore \quad MC \parallel OP,$$

$$\therefore \quad DC:DP=DM:DO=1:3.$$

因此，P 为符合条件的点。

2001. 已知圆的直径 AB 上有定点 C，在圆周上求点 P，使 AP、CP 与过点 P 的切线构成等角。

解 假定符合条件的点 P 已求出。设通过 P 点的圆的切线 FPE 与 AB 的延长线相交于 E。设 O 为已知圆心，则



$\angle APF=\angle CPE$,

$\angle OPF=\angle E$

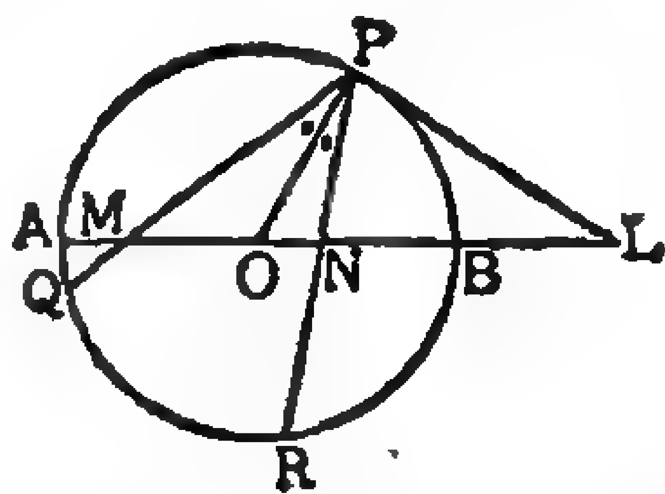
$=\angle OPE$.

$\therefore\ \angle APO=\angle CPO$.

因 PE 是圆的切线，$PE\perp PO$，所以 PE 平分 $\angle APC$ 的外角。根据问题 **1058**，A、O、C、E 构成调和点列，但 A、O、C 三点为定点，所以点 O 关于 AC 的调和共轭点 E 也为定点。因此先求出 E 点，作以 OE 为直径的圆，则该圆与圆 O 的交点 P 即为所求的点。

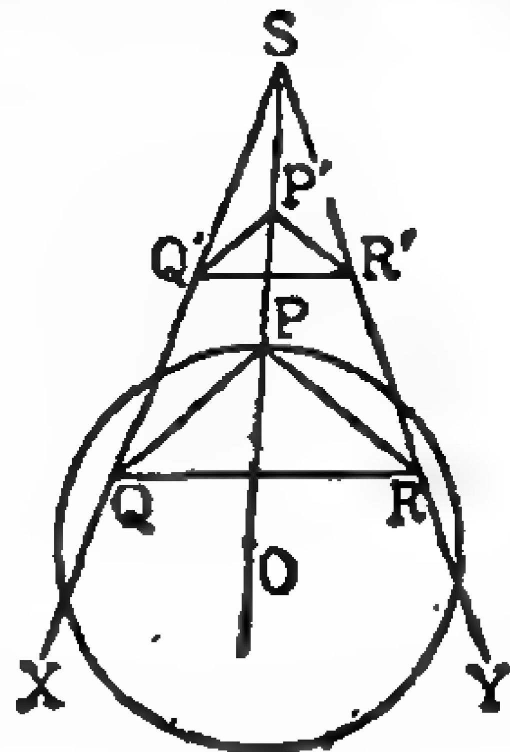
2002. 已知圆 O 的直径 AB，M、N 分别是 OA、OB 上的点，在圆上求一点 P，使过 P 和 M 的弦 PQ 和过 P 与 N 的弦 PR 相等。

解 如果 $PQ=PR$，则此两弦与圆心 O 的距离相等，所以 PO 平分 $\angle MPN$。因此可与上题一样，在 MN 的延长线上求点 L，使点 M、O、N、L 成为调和点列。作以 OL 为直径的圆，则它与圆 O 的交点 P，即为所求的点。



2003. 已知圆 O 和直线 SX、SY，在此圆上求一点 P，由 P 向已知两个方向作直线，分别与 SX、SY 相交于 Q、R，使线段 PQ 和 PR 之比等于已知比。

解 设此题已解出，PQ、PR 为所求的直线。PQ、PR 的方向已知，所以 $\angle QPR$ 一定。又因 $PQ:PR$ 也是一定的，所以 $\triangle PQR$ 的形状一定，QR 的方向一定。因此，以 S 为相似中心，在相似的位置作任意 $\triangle P'Q'R'$ 与 $\triangle PQR$ 相似。再过 S、P' 作直线，与圆 O 相交于 P（一般有两个交点，因此有两个解）。由 P 作 $P'Q'$、$P'R'$ 的平行线，分别与 SX、SY 相交于 Q、R，则 PQ、PR 为所求的直线。



2004. C、D 是以 AB 为弦的已知弓形弧上的两个定点。在其共轭弧上求一点 P，设 PC、PD 与 AB 的交点分别为 E、F，使 $EF=m$（m 为已知线段长）。

解 ［作图］ 由 C 作与 AB 平行的弦 CQ，在 CQ 上取点 F'，使 $CF'=m$。作过 D、Q、F' 三点的圆，与 AB 相交于 F（一般有两个交点）。设 DF 的延长线与圆相交于 P，则 P 为所求的点。

［证明］ $\angle DQC=\angle DPC$，且 F、F'、D、Q 四点共圆。

$\therefore\quad \angle Q=\angle DFF'$,

$\angle P=\angle DFF'$.

因而　$FF'\parallel PC$.

又　$CF'\parallel EF$,

$\therefore\quad EF=CF'=m$.

因此 P 为符合条件的点。

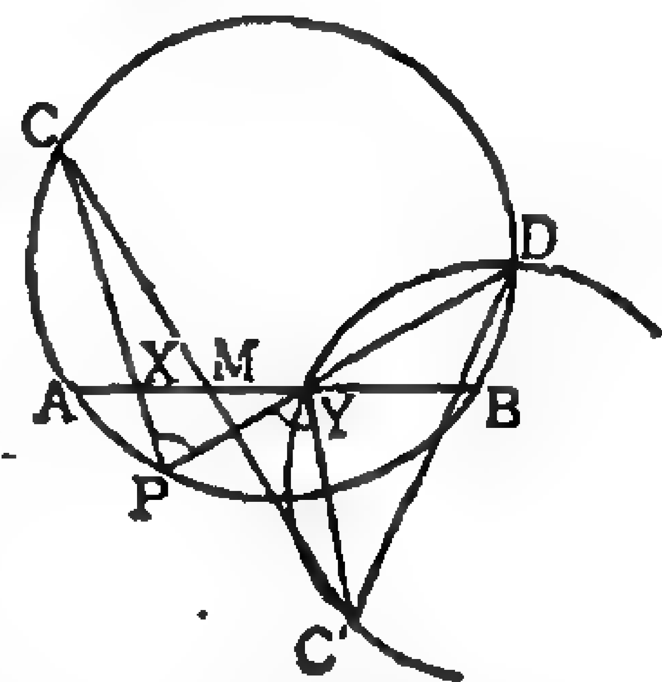
［讨论］ 过 D、Q、F' 的圆一般与 AB 有两个交点，故所求的点一般有两个。如果此圆与 AB 相切，则所求的点只有一个。又如果圆与 AB 没有公共点，则此题无解。

2005. 已知圆的定弦 AB 上有定点 M，C、D 为在 AB 同侧的圆上的两个定点。在其共轭弧上求一点 P，设直线 PC、PD 与 AB 相交于 X、Y，使 $MX=MY$。

解 假定所求点 P 已作出，延长 CM，截取 $MC'=CM$，则 $CX\parallel C'Y$,

$\therefore\ \angle PYC'=\angle P$.

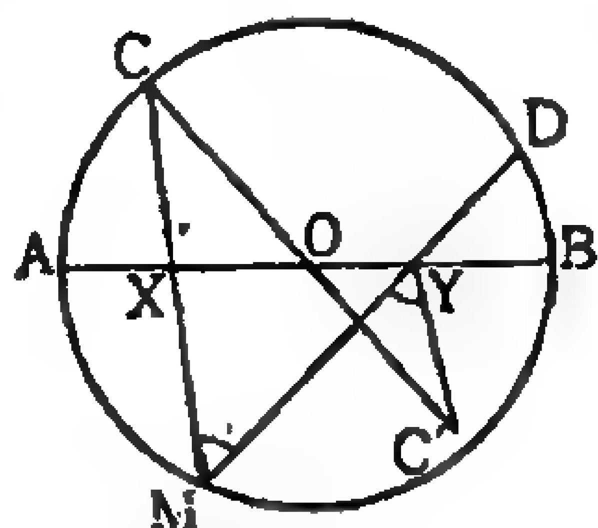
因为 C、D 为已知点，$\angle CPD$ 的大小一定，所以 $\angle PYC'$ 的大小一定，它的补角 DYC' 的大小也一定。因此，以 DC' 为弦，作含 $\angle P$ 的补角的弓形弧，与 AB 相交于 Y。根据以上分析即可求出点 P。



2006. 已知直径为 AB 的半圆上的两个定点 C、D，在这个半圆的共轭弧上求一点 M，过 C、M 作直线与 AB 相交于 X，过 D、M 作直线与 AB 相交 Y，使 X、Y 到圆心 O

的距离的比等于已知比 $m:n$。

解 [分析] 设 M 为所求的点，由 Y 作 CX 的平行线，与 CO 的延长线相交于 C'，则



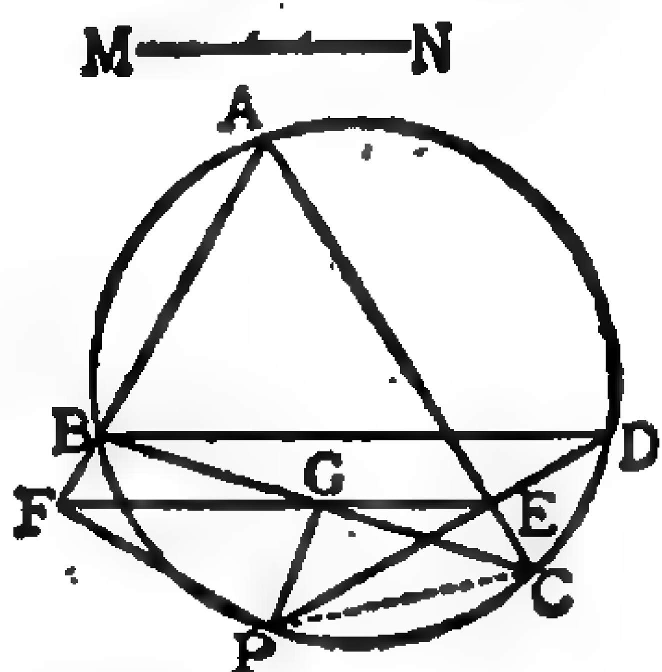
$$\triangle CXO \backsim \triangle C'YO,$$

$$\therefore \quad CO:OC' = OX:OY = m:n.$$

因为已知 OC' 的长度，且 $\angle MYC' = \angle M$（$\angle M$ 一定），所以 $\angle DYC'$ 也一定。又因为 D、C' 是已知点，所以可确定点 Y 的位置，从而点 M 也可确定。

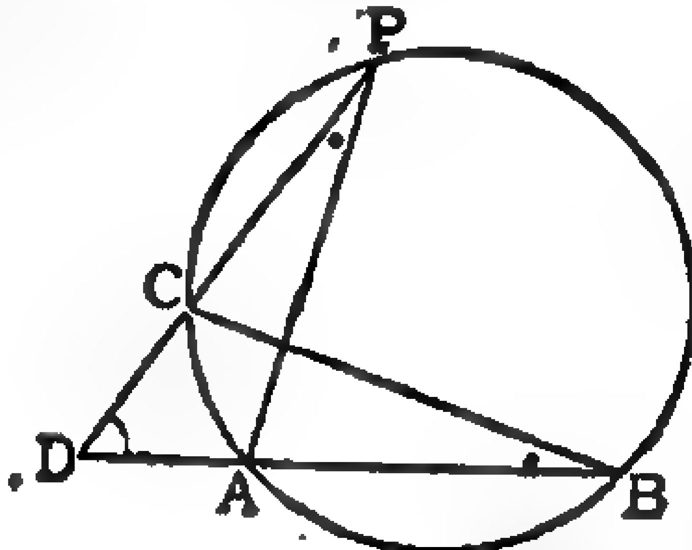
2007. 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上求一点 P，使关于点 P 的三角形 ABC 的西摩松线与已知直线 MN 平行。

解 由 B 作 MN 的平行线，与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于 D，由 D 作边 AC 的垂线 DE，与圆相交于 P，关于 P 的西摩松线 EGF 与 MN 平行。其理由是：



根据问题 **669**，关于点 P 的西摩松线 EGF 与 BD 平行。根据作图 BD 与 MN 平行，所以 EGF 与 MN 平行。

2008. 已知圆上的一点 P 和弦 AB。在该圆上求一点 C，作弦 PC 并延长与 BA 的延长线相交于 D，使 $CD:CB = a:b$（$a:b$ 为已知比）。



解 在 $\triangle CDB$ 和 $\triangle ADP$ 中，$\angle B = \angle P$，$\angle D$ 为公共角，

$$\therefore \quad \triangle CDB \backsim \triangle ADP.$$

$$\therefore \quad \frac{CD}{CB} = \frac{AD}{AP}.$$

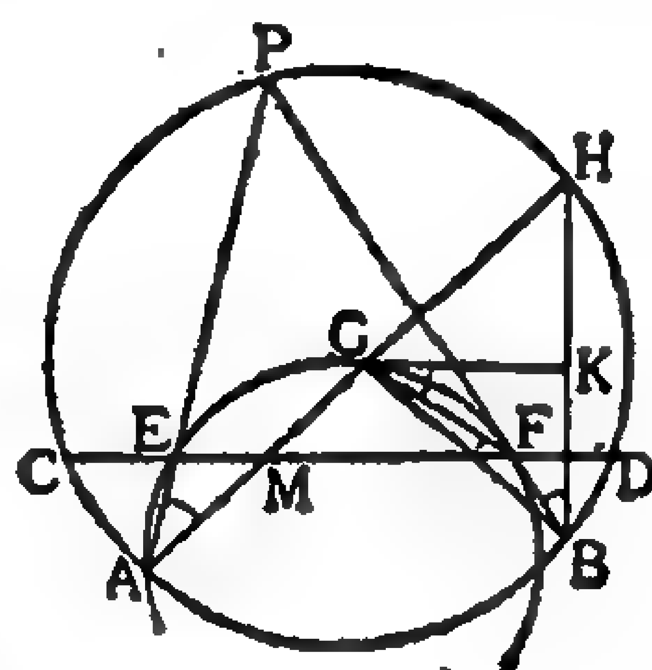
已知
$$\frac{CD}{CB} = \frac{a}{b},$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{AD}{AP}. \qquad ①$$

由于 AP 的长一定，且 A 为已知点，所以 AD 为定长，从而 D 为定点。由 ① 求得 AD，则 PD 与已知圆的交点 C 即为所求的点。

2009. 在已知圆上定弦 CD 的同侧有两定点 A、B，CD 上的定点 M。在弧 CAD 的共轭弧上求一点 P，设 AP、BP 与 CD 相交的点分别为 E、F，使 $ME \cdot MF = m^2$。

解 [分析] 假定点 P 已求出。设延长 AM 与圆相交于 H，过 A、E、F 三点的圆与 AH 相交于 G，则



$$MA \cdot MG = ME \cdot MF = m^2. \qquad ①$$

所以 MG 为定长，G 为定点。

再由 G 作 CD 的平行线，与 HB 相交于点 K，则 G、B、K 都可确定。且

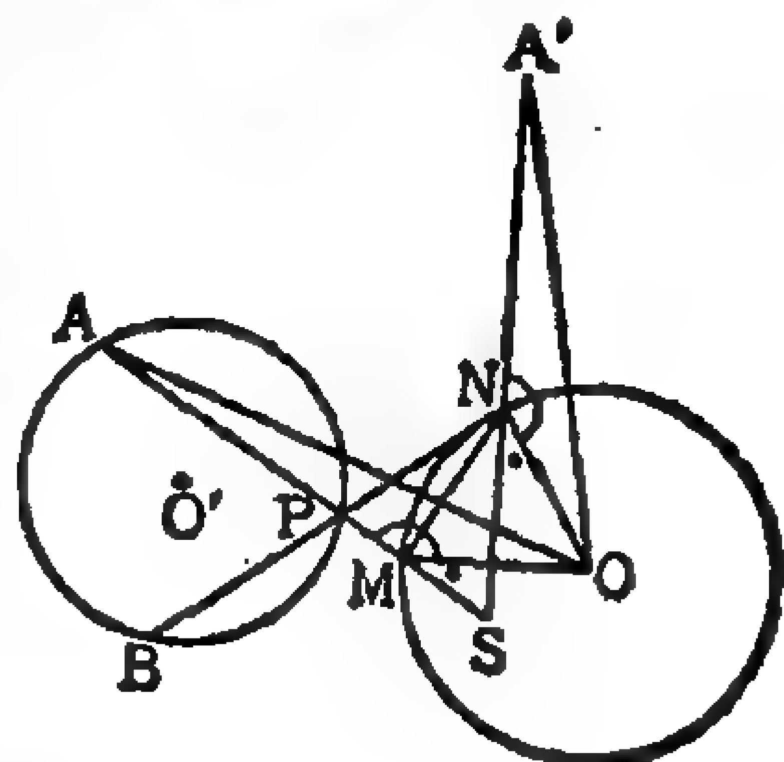
$$\angle KGF = \angle GFE = \angle PAH = \angle PBH.$$

所以在三角形 KGB 中，且在直线 CD 上求点 F，使 $\angle KGF = \angle FBK$，则 F 即为符合条件的点（参照问题 **1997**）。

[作图] 在 AM 的延长线上取点 G，使 $AM \cdot MG = m^2$。作弦 AGH，过 G 作 CD 的平行线，与 BH 相交于 K。在 CD 上求点 F，使 $\angle KGF = \angle FBK$，则 BF 的延长线与圆的交点 P，即为所求的点。

2010. 已知圆 O' 上两个定点 A、B，在该圆上求一点 P，延长 AP、BP 和另一个已知圆 O 相交于 M、N，使 MN 等于已知长 l。

解 [分析] 设此题已解出，P 为所求的点，则因为 MN 为已知长，所以 $\angle MON$ 的大小一定。以 O 为中心旋转 $\triangle OMA$，设当 OM 转到 ON 的位置时，A 的位置为 A'，则



$$\angle AOA' = \angle MON \ （一定），$$

又 $OA = OA'$，所以 A' 的位置一定。

$$\because \quad \triangle OMA \cong \triangle ONA',$$

$$\therefore \quad \angle AMO = \angle A'NO.$$

设 $A'N$ 与 AM 的交点为 S，则

$$S_{\triangle ONS} = S_{\triangle OMS},$$

所以 N、O、S、M 四点共圆。从而 $\angle S = \angle MON$（一定），

$$\angle S + \angle NPS = \angle BNA'. \qquad ①$$

因为 A、B 为已知点，所以 $\angle APB$ 的大小一定，$\angle NPS$ 也一定。由 ①，$\angle BNA'$ 的大小

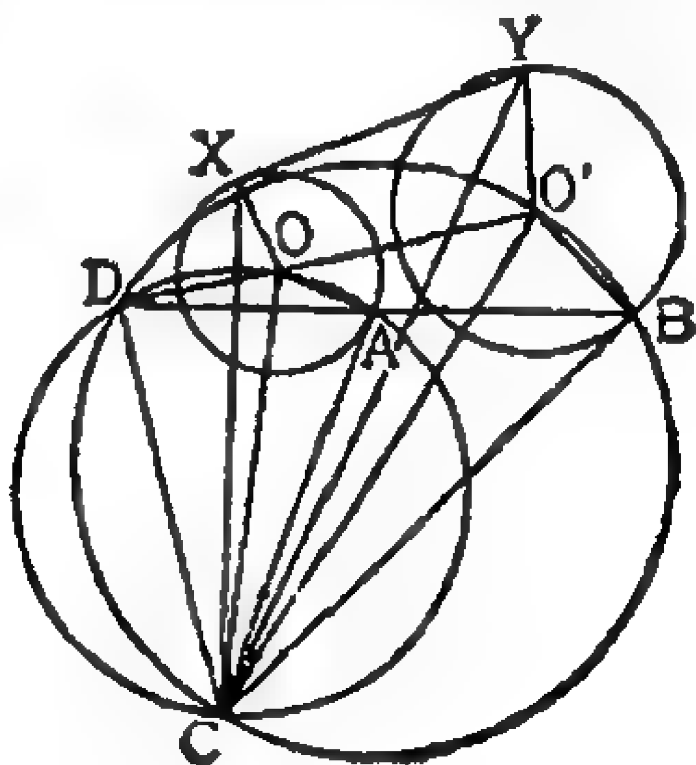
一定。故可作图如下。

［作图］ 求圆O中长度为l的弦所对的圆心角，设它为α。如图，作$\angle AOA'$，使$\angle O=\alpha$，$OA=OA'$，设圆O'中弧AB上的圆周角为β，以$A'B$为弦，作含$\alpha+\beta$的弓形弧，与圆O相交于N。过N、B作直线与圆O'相交于P，则P为所求的点。

［证明］ 分析中已指明，故证明省略。

注．有时$A'N$和AM的交点S可能在P和M之间，这时仍有$\angle BNA'=\alpha+\beta$，作图方法不变。

2011． 已知A、B分别为两定圆O和O'上的定点，分别在两圆上各求一点X和Y，使$\angle XOA=\angle YO'B$，且$XY=l$(l为已知长)。



解 ［分析］ 假定XY已求出。设$O'O$与BA相交于D。作$\triangle ADO$和$\triangle BDO'$的外接圆，设第二个交点为C，则C为定点。又

$$\angle ACO=\angle ADO,$$
$$\angle BCO'=\angle BDO'.$$
$$\therefore\quad \angle ACO=\angle BCO'.$$

又 $\angle COA=\angle CDA=\angle CO'B$，

$$\therefore\quad \triangle COA\backsim\triangle CO'B,$$

$$\therefore\quad CO:CO'=OA:O'B=OX:O'Y,\qquad ①$$

且 $\angle COA=\angle CO'B$.

但 $\angle XOA=\angle YO'B$,

$$\therefore\quad \angle COX=\angle CO'Y.\qquad ②$$

由①、②， $\triangle COX\backsim\triangle CO'Y$.

$$\therefore\quad \angle XCO=\angle YCO',$$

$$\therefore\quad \angle XCY=\angle OCO'(\text{一定}).\qquad ③$$

又 $CX:CY=OX:OY$(一定)． ④

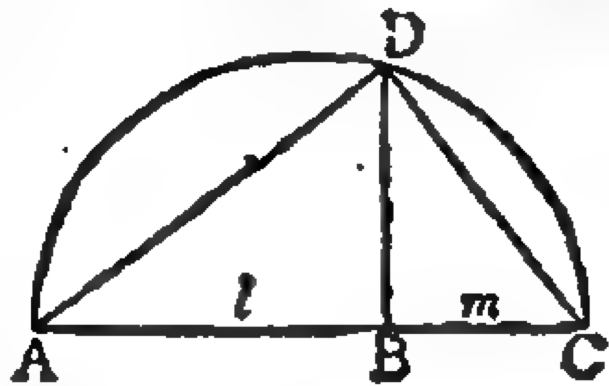
由③、④，知$\angle XCY$及$CX:CY$一定，又XY的长已知，所以$\triangle XCY$也一定。从而CX和CY为定长，C为定点。所以可确定X、Y的位置。

第二章 直线的作图

1．作符合已知条件的线段

2012． 求作等于已知线段l、m的比例中项的线段。

解 ［作图］ 作线段$AB=l$，在其延长线上截取$BC=m$。作以AC为直径的半圆，由点B作AC的垂线，与半圆相交于D，则BD为所求的线段。

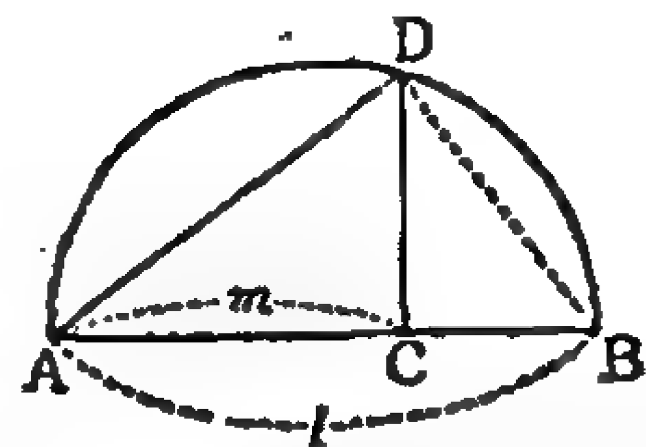


［证明］ $\because\ \angle ADC=\angle R$，$DB\perp AC$.

$$\therefore\quad DB^2=AB\cdot BC=l\cdot m,$$

即DB为l和m的比例中项。

别解 ［作图］ 作线段$AB=l$，在AB(或其延长线)上截取$AC=m$。作以AB(或AC)为直径的半圆，再由点C(或B)作AC的垂线与半圆相交于D，连结AD，则AD为所求的线段。

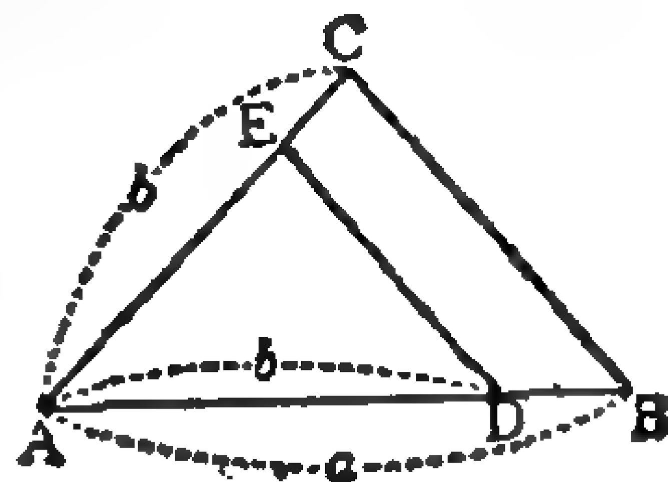


［证明］ $\because\ \angle ADB=\angle R$，$DC\perp AB$.

$$\therefore\quad AD^2=AB\cdot AC=l\cdot m.$$

2013． 作两条已知线段a、b的第三比例项。

解 ［作图］ 作线段$AB=a$。由A向任意方向作$AC=b$，在AB上截取$AD=b$，连结BC，由D作BC的平行线与AC交于点E，则AE为a、b的第三比例项。



［证明］ $\because\ BC\parallel DE$,

$$\therefore\quad AB:AC=AD:AE,$$

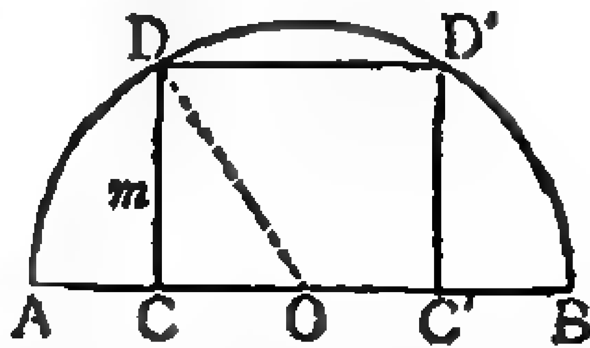
即 $a:b=b:AE$.

因此AE为a、b的第三比例项。

2014． 求已知线段a、b、c的第四比例项。

解 ［作图］ 作$\angle XAY$，在AX上各取$AB=a$，$AC=b$；在AY上取$AD=c$。连结BD，再从C作BD的平行线与AY相交于

E，则 AE 即为所求线段。



［证明］ $BD \parallel CE$，

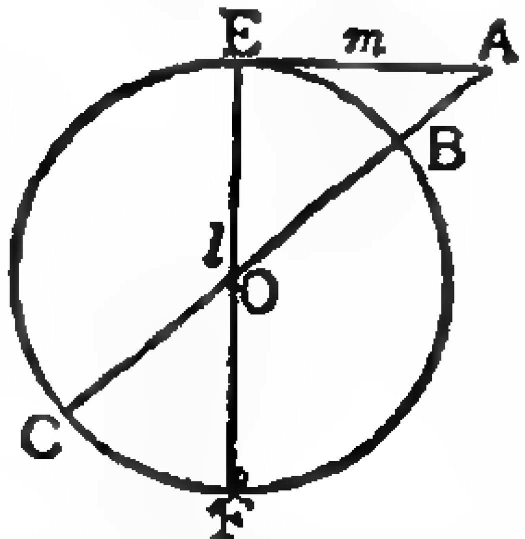
所以

$AB:AC=AD:AE$，

即 $a:b=c:AE$。

因此 AE 为所求的第四比例项。

2015. 已知两线段的和为 l，积为 m^2，求这两条线段。



解 ［作图］ 作 $AB=l$，以 AB 为直径作半圆，与半圆的同侧、离 AB 的距离为 m 处作 AB 的平行线，设它与半圆的交点中的一个为 D，由 D 作 AB 的垂线 DC，垂线足 C 把 AB 所分成的两部分 AC、BC 即为所求的两线段。

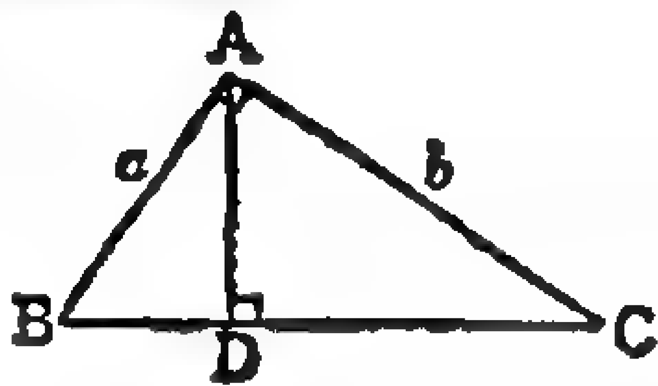
［证明］ $AC+BC=AB=l$，

$AC\cdot BC=CD^2=m^2$。

［讨论］ 当 $m\leq\frac{1}{2}l$ 时，有一个解；

当 $m>\frac{1}{2}l$ 时，此题无解。

2016. 已知两线段之差为 l，积为 m^2，求这两条线段。

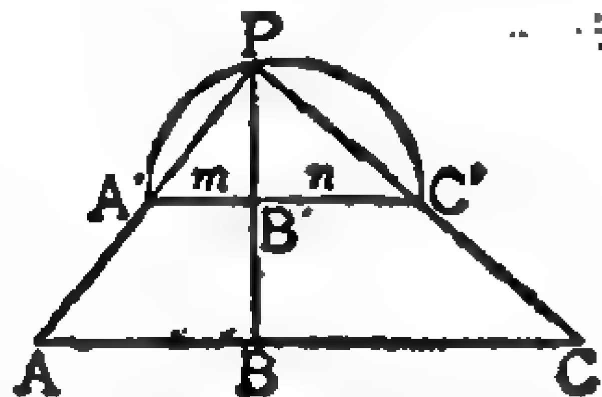


解 作线段 $EF=l$，以 EF 为直径作圆 O，由 E 作此圆的切线 EA，取 $EA=m$。设连结 A、O 的直线与圆 O 的交点分别为 B、C，则 AC 和 AB 即为所求线段。理由是：据作图 $AC-AB=BC=EF=l$，

$AC\cdot AB=AE^2=m^2$。

因此 AC、AB 为所求的两条线段。

2017. 设两个正方形的面积分别为 P 和 Q，求作比值为 $P:Q$ 的两条线段。



解 ［作图］ 设正方形 P 的一边为 a，正方形 Q 的一边为 b。作三角形 ABC，使 $AB=a$，$AC=b$，并且 $\angle BAC=\angle R$。由 A 作 BC 的垂线 AD，垂足为 D，则 BD 和 DC 为所求的两条线段。

［证明］ $P:Q=a^2:b^2=AB^2:AC^2$。

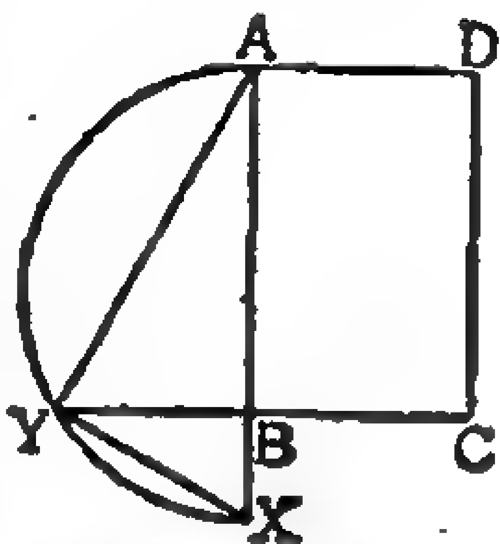
$\because$ $\angle BAC=\angle R$，$AD\perp BC$，

$\therefore$ 根据问题 1136， $AB^2:AC^2=BD:DC$。

$\therefore$ $P:Q=BD:DC$。

因此 BD 和 DC 为所求的两线段。

2018. 已知两线段的比为 $m:n$，它们的积为 k^2，求这两线段。



解 作线段 $A'B'C'$，使 $A'B'=m$，$B'C'=n$。作以 $A'C'$ 为直径的半圆，由 B' 作 $A'C'$ 的垂线 $B'P$，与半圆相交于 P。在 PB' 或其延长线上截取 $PB=k$，再由 B 作 $A'C'$ 的平行线，与 PA'、PC' 或它们的延长线分别相交于 A、C，则 AB、BC 即为所求的两线段。理由是：

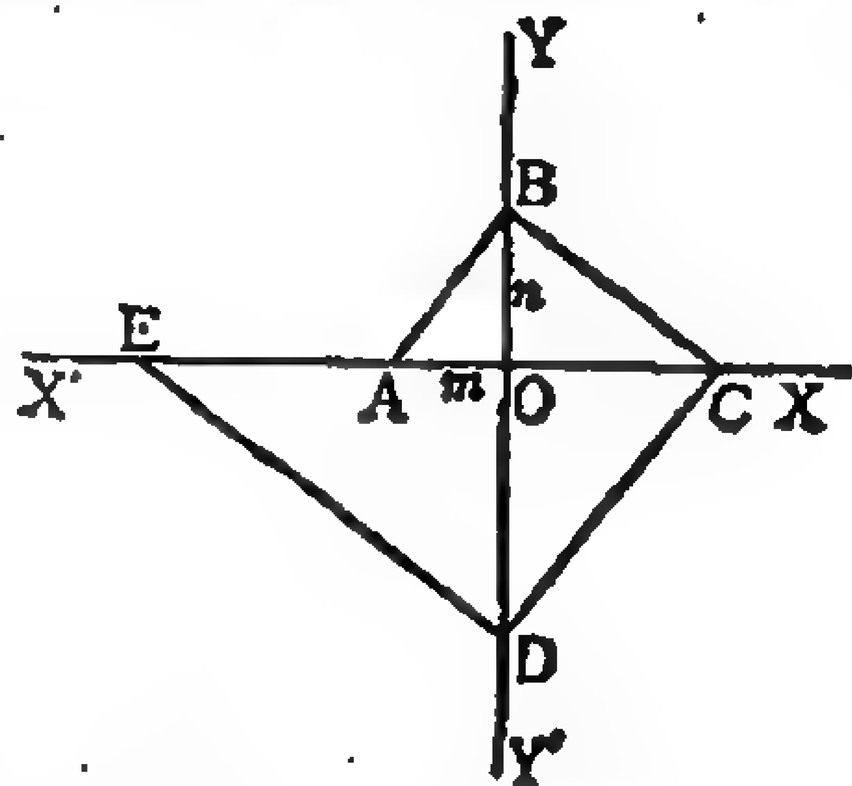
$AB:BC=A'B':B'C'=m:n$，

又 $\angle APC=\angle R$，$PB\perp AC$。

$\therefore$ $AB\cdot BC=PB^2=k^2$。

因此 AB，BC 为符合条件的两线段。

2019. 已知两线段的积以及分别以这两线段为边所作正方形的差，求此两线段。



解 ［作图］ 设 AB^2 为两个已知正方形的差，矩形 $ABCD$ 为两线段之积，延长 AB 至 X，使 $AX\cdot BX=BC^2$，在 AX 上作半圆，与 CB 的延长线相交于 Y，则 AY、BY 即为所求的两线段。

［证明］ $\because$ $XY^2=AX\cdot BX$，

$\therefore$ $XY=BC$。

又 $AY:AB=XY:BY$，

$\therefore$ $AY\cdot BY=AB\cdot XY=AB\cdot BC$，

且 $AY^2-BY^2=AB^2$。

因此 AY，BY 为所求的两线段。

2020. 作两条线段，使它们的比等于两条已知线段的比的二次方(三次方，四次方，……)。

解 ［作图］

(i) 二次方的比。作垂直相交的两条直线 XOX'、YOY'，在 OX'、OY 上分别取 A、B 两点，使 $OA=m$，$OB=n$。过 B 作 AB 的垂线，与 XOX' 相交于 C，则 OA、OC 即为所

求的两线段。

(ii) 三次方的比。过点 C 作 BC 的垂线，与 YOY' 相交于 D，则 OA、OD 即为所求的两线段。

(iii) 四次方的比。又过 D 作 CD 的垂线，与 XOX' 相交于 E，则 OA、OE 即为所求的两线段。

(iv) 以同样方法，可求出等于两已知线段的五次方的比、六次方的比的两条线段。

［证明］ $\because$ $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $BO\perp AC$。

所以 $$\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OC}=\frac{m}{n}.$$

同理 $$\frac{OB}{OC}=\frac{OC}{OD}=\frac{OD}{OE}=\cdots\cdots=\frac{m}{n}.$$

因此，(i) $$\frac{OA}{OC}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}=\frac{m^2}{n^2},$$

(ii) $$\frac{OA}{OD}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}\cdot\frac{OC}{OD}=\frac{m^3}{n^3},$$

(iii) $$\frac{OA}{OE}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}\cdot\frac{OC}{OD}\cdot\frac{OD}{OE}=\frac{m^4}{n^4},$$

(iv) 以下同样可证。

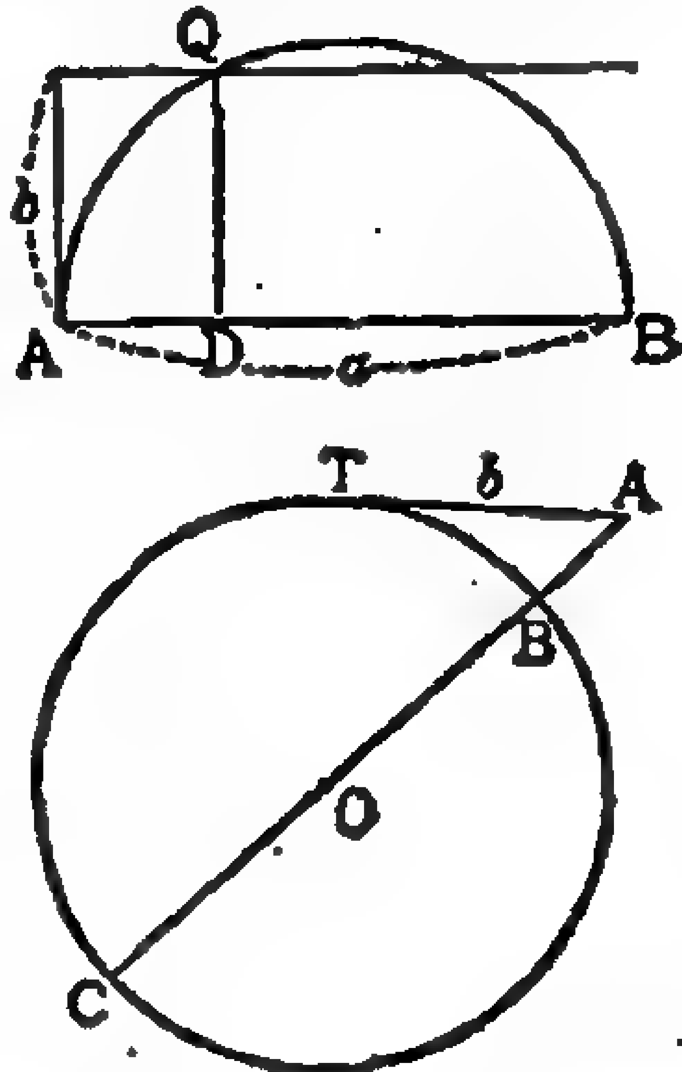
2. 代数计算的作图题

2021. 已知线段 a、b 的长，求作线段 x、y。

(1) $\begin{cases}x+y=a,\\ xy=b^2;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x-y=a,\\ xy=b^2\end{cases}$

$$\left(其中\ \frac{a}{2}\geqq b\right).$$

解 (1) 作线段 $AB=a$，以 AB 为直径作半圆，在与 AB 的距离为 b 处作 AB 的平行线，与半圆相交于 Q。由 Q 作 AB 的垂线，设垂足为 D，则 $AD\cdot DB=DQ^2=b^2$。又 $AD+DB=a$，所以 $AD=x$，$DB=y$ 符合题给的条件。



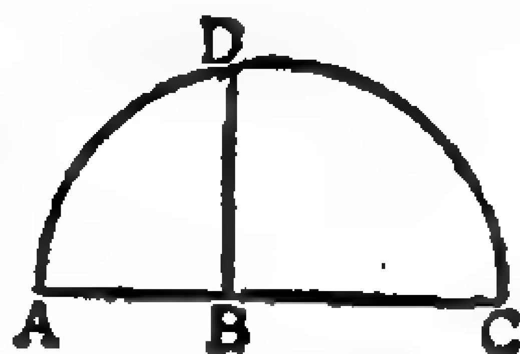
(2) 作直径为 a 的圆，由圆上任意一点 T 作此圆的切线 TA，使 $AT=b$。过 A 和圆心 O 作直线，与圆的交点为 B、C，则
$$AB\cdot AC=AT^2=b^2.$$
$$\because\ AC-AB=BC=a,$$
$$\therefore\ AC=x,\ AB=y\ 符合条件。$$

2022. 已知长度为 a 的线段，试求长度为 $\sqrt{2}a$、$\sqrt{3}a$、…、$\sqrt{n}a$ 的线段，并叙述其理由。

解 作线段 ABC，使 $AB=a$，$BC=na$。以 AC 为直径作半圆，过 B 作 $BD\perp AC$ 交半圆于 D，则
$$\angle ADC=\angle R,$$
所以
$$BD^2=AB\cdot BC.$$
即 $$BD^2=a\cdot na=na^2,$$
$$\therefore\ BD=\sqrt{n}a.$$
因此，设 $n=2,\ 3,\ \cdots,\ n$，则可得出线段 $\sqrt{2}a$，$\sqrt{3}a$，……，$\sqrt{n}a$。

2023. 求作表示 $\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$、$\sqrt{a}$ 的线段。

解 (i) 设 $x=\sqrt{6}$，则 $x^2=6$。
$$\therefore\ x^2=2\times 3.$$



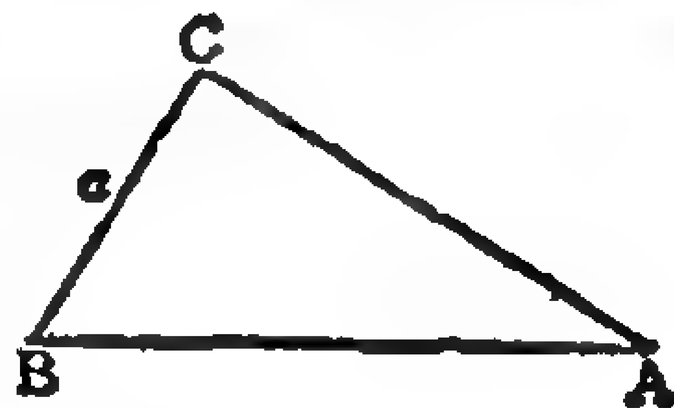
因此，在图中，取 $AB=2$，$BC=3$，根据问题 **2012**，求出 AB 和 BC 的比例中项 BD，设 BD 为 x，则
$$AB\cdot BC=BD^2.$$
$$\therefore\ 2\times 3=x^2,\ x=\sqrt{6}.$$

(ii) $x=\sqrt{7}$，即 $x^2=1\times 7$，因此，只须求 1 和 7 的比例中项。

(iii) $x=\sqrt{a}$，即 $x^2=1\times a$。设单位线段为 1，只须求出它与 a 的比例中项即可。

2024. 以已知线段 a 为单位，作出长度为 $\sqrt[4]{3}a$ 的线段。

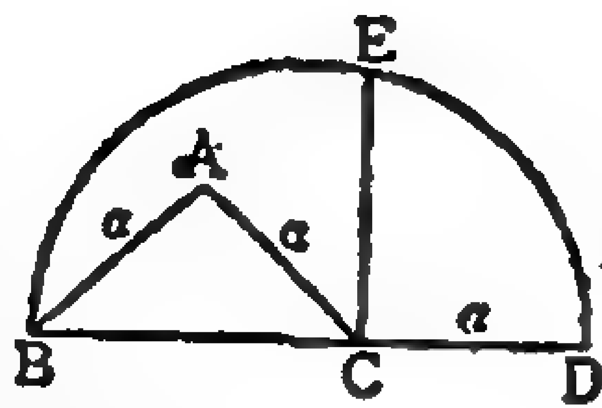
解 以长度为 a 的线段 BC 为直角边，作直角三角形 ABC，并使 $\angle B=60°$，则



$$BC:AC=1:\sqrt{3}.$$
若设 $BC=a$，则 $AC=\sqrt{3}a$。
再求出 BC、AC 的比例中项并设为 x，则
$$x^2=BC\cdot CA=a\cdot\sqrt{3}a.$$
$$\therefore\ x^2=\sqrt{3}a^2,\ x=\sqrt[4]{3}a.$$

2025. 已知线段 a，求作线段 $\sqrt[4]{2}a$。

解 ［作图］ 以 A 点为直角顶点作等腰直角三角形 ABC，使 $AB=AC=a$。在斜边 BC 的延长线上取点 D，使 $CD=a$。过 C 作 BC 的垂线，与以 BD 为直径的圆相交于 E，则 CE 即为所求的线段。



［证明］ $\because$ $CE^2=BC\cdot CD=BC\cdot a$，

又 $BC^2=2AB^2=2a^2$。

$\therefore$ $BC=\sqrt{2}a$，

$\therefore$ $CE^2=\sqrt{2}a\cdot a=\sqrt{2}a^2$，

$CE=\sqrt[4]{2}a$。

2026. (1) 已知线段 a、b，求作线段 x，使 $x=\sqrt{ab}$。

(2) 已知线段 a、b，求作线段 x，使

$$x=\frac{b^2}{a}.$$

(3) 已知线段 a、b、c，求作线段 x，使

$$x=\frac{bc}{a}.$$

解 (1) $x^2=a\cdot b$，同问题 **2012**。

(2) $a:b=b:x$，同问题 **2013**。

(3) $a:b=c:x$，同问题 **2014**。

2027. 设 a、b、c 为已知三线段，求作线段 x，使 $x=a\sqrt{\frac{b}{c}}$。

解 ［分析］ 设 $x=a\sqrt{\frac{b}{c}}$。

两边平方，则 $x^2=a^2\cdot\frac{b}{c}$。

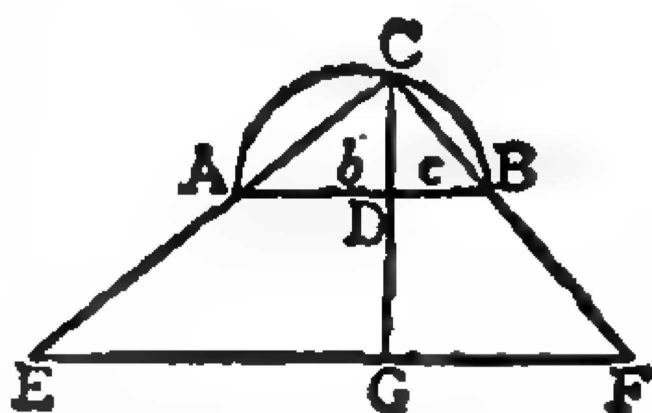
$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}=\frac{b}{c}. \qquad ①$$

为作出符合①的图形，可作直角三角形 ECF，由直角顶点 C 向 EF 作垂线 CG，则

$$\frac{CE^2}{CF^2}=\frac{EG}{GF}.$$

因此可作图如下。

［作图］ 在任意直线上取 $AD=b$，$DB=c$，作线段 ADB，以 AB 为直径作半圆，由 D 作 AB 的垂线，设与圆周相交于 C，在 CB 上截取 $CF=a$，由 F 作 $EF\parallel AB$，设与 CA 相交于 E，则 CE 即为所求的线段。



［证明］ 设 EF 与 CD 相交于 G，$\because$ $\triangle CEF$ 为直角三角形，且 $CG\perp EF$，

$\therefore$ $CE^2:CF^2=EG:GF=AD:DB$，

$x^2:a^2=b:c$。

因此 $x=a\sqrt{\frac{b}{c}}$。

2028. 已知线段 a、b，求作线段 $\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{a^2-b^2}$。

解 ［作图］ 作线段 $AB=a$，过 A 作 AB 的垂线 AC，并取 $AC=b$，连结 BC，则

$$BC=\sqrt{a^2+b^2}.$$

又以 AB 为直径作半圆，取弦 $AD=b$，则

$$BD=\sqrt{a^2-b^2}.$$

［证明］ $\because$ $\angle BAC=\angle R$，

$\therefore$ $BC^2=AB^2+AC^2=a^2+b^2$。

因而 $BC=\sqrt{a^2+b^2}$。

又 $\angle D=\angle R$，

$\therefore$ $BD^2=AB^2-AD^2=a^2-b^2$，

所以 $BD=\sqrt{a^2-b^2}$。

2029. 已知线段为 a、b、c，求作线段 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

解 ［作图］ 作直角三角形 ABC，使 $\angle B=\angle R$，$AB=a$，$BC=b$，再由 C 作 AC 的垂线 CD，使 $CD=c$，则 AD 即为所求线段。

［证明］ $\because$ $AC^2=a^2+b^2$。

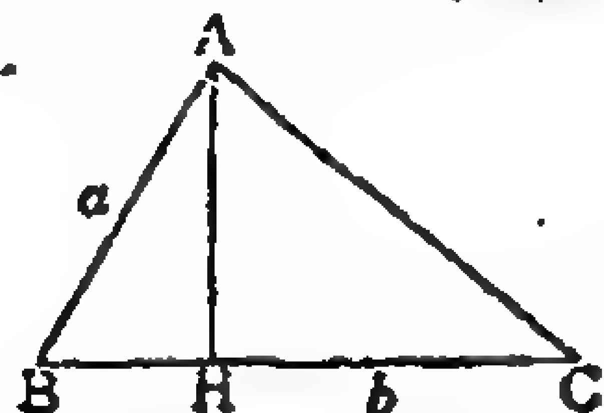
$\therefore$ $AD^2=AC^2+CD^2=a^2+b^2+c^2$，

$\therefore$ $AD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

2030. 求作 $x=\sqrt{a^2+b^2-ab}$。

解 在本题中，所求作的线段 x，是两边分别为 a 和 b 且夹角为 60° 的 $\triangle ABC$ 的第三边 AC。理由是：

由 A 作 BC 的垂线 AH，则根据问题 **902**



$$AC^2=AB^2+BC^2-2BC\cdot BH=a^2+b^2-2b\cdot BH. \qquad ①$$

$\because$ $\angle B=60°$，

$\therefore$ $AB:BH=2:1$，

$$\therefore\quad BH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a.$$

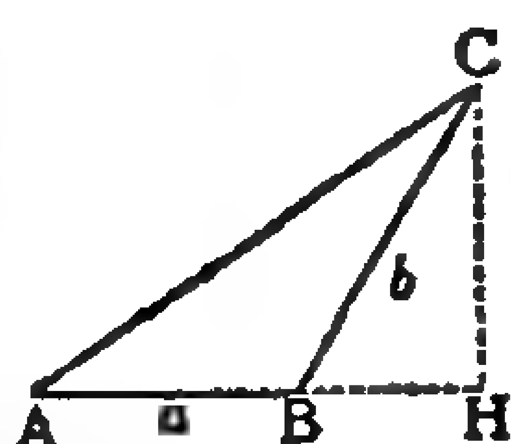
因此，由①

$$AC^2=a^2+b^2-2b\cdot\frac{1}{2}a=a^2+b^2-ab,$$

$$\therefore\quad AC=\sqrt{a^2+b^2-ab}.$$

2031. 求作 $x=\sqrt{a^2+b^2+ab}$。

解　同上题，x 是两边分别为 a、b 且夹角为 120° 的三角形的第三边。这是因为：在 $\triangle ABC$ 中，由 C 作 AB 的垂线 CH，则



$$AC^2=AB^2+BC^2+2AB\cdot BH.\qquad ①$$

$$\because\quad \angle ABC=120°,$$

$$\therefore\quad \angle CBH=60°.$$

从而　$BH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}b.$

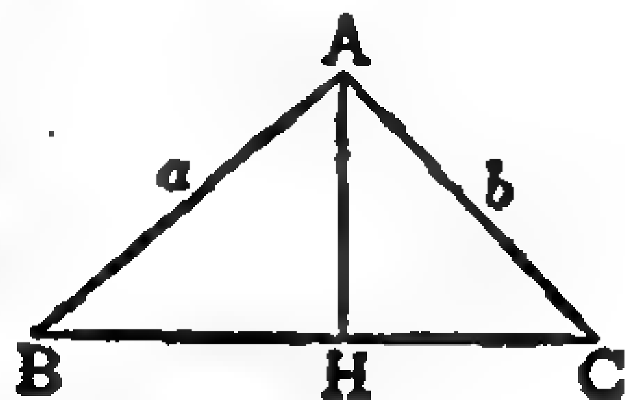
由①，

$$AC^2=a^2+b^2+2a\cdot\frac{1}{2}b=a^2+b^2+ab,$$

$$\therefore\quad AC=\sqrt{a^2+b^2+ab}.$$

2032. 求作 $x=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

解　作直角三角形 ABC，使 $AB=a$，$AC=b$，$\angle BAC=\angle R$. 由 A 作 BC 的垂线 AH，则 AH 为所求线段。理由是：



$$\angle BAC=\angle R,\ AH\perp BC.$$

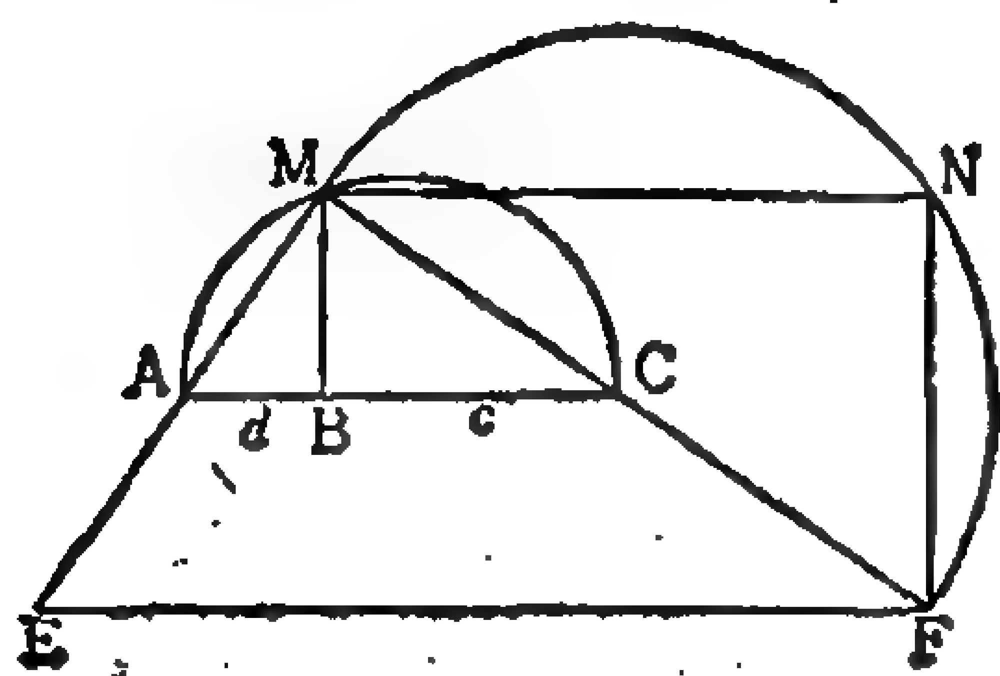
$$\therefore\quad AB\cdot AC=BC\cdot AH,$$

且　$BC=\sqrt{a^2+b^2}.$

$$\therefore\quad ab=\sqrt{a^2+b^2}\cdot AH,$$

$$x=AH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

2033. 已知五条线段 a、b、c、d、e，求作线段 $\sqrt{\dfrac{abc}{d}-e^2}$.



解　[作图]　在任意直线上依次取三点 A、B、C，使 $AB=d$，$BC=c$. 过 B 作 AB 的垂线，与以 AC 为直径的半圆相交于 M，在 MA 或者它的延长线上取点 E，使 ME 等于 a 和 b 的比例中项，过 E 作 AC 的平行线与 MC 或其延长线相交于 F. 以 F 为圆心、e 为半径作圆和以 MF 为直径的半圆，相交于 N，则 MN 即为所求的线段。

[证明]　$AB:BC=MA^2:MC^2$

$$=ME^2:MF^2,$$

$$\therefore\quad d:c=ab:MF^2,$$

$$d\cdot MF^2=abc.$$

又　$MN^2+NF^2=MF^2,$

即　$MN^2+e^2=MF^2.$

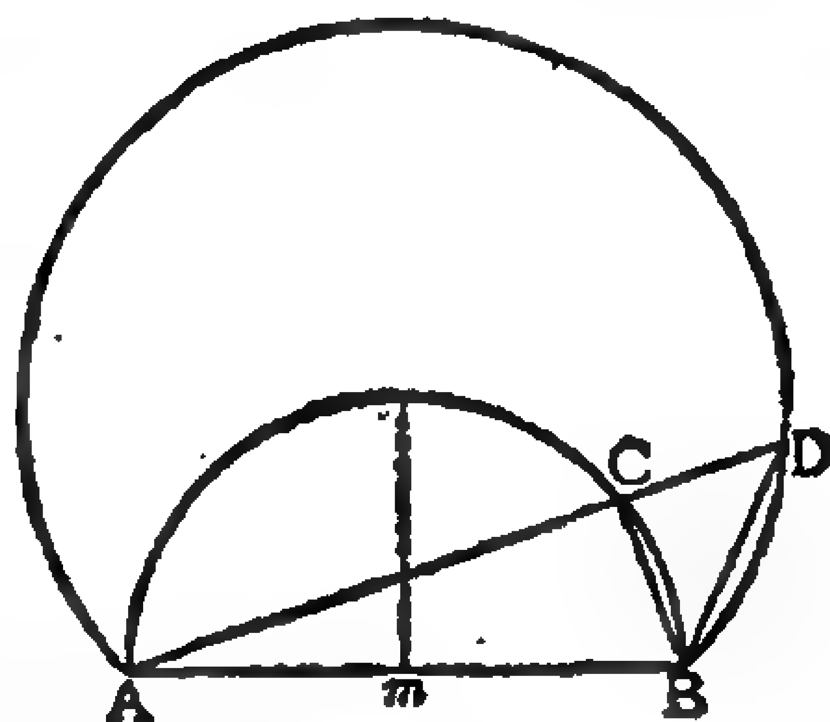
$$\therefore\quad d(MN^2+e^2)=abc,$$

$$MN^2+e^2=\frac{abc}{d}.$$

因此　$MN=\sqrt{\dfrac{abc}{d}-e^2}.$

2034. 求作方程组 $x^2+y^2=m^2$，$x+y=a$ 的解的线段。

解　[作图]　设 $AB=m$，以 AB 为直径作半圆，又在 AB 上作含 45° 的弓形弧。以 A 为圆心、a 为半径作圆，设此圆与弓形弧的交点之一为 D，AD 与半圆的交点为 C，则 AC 和 CB 即为所求的线段 x 和 y.



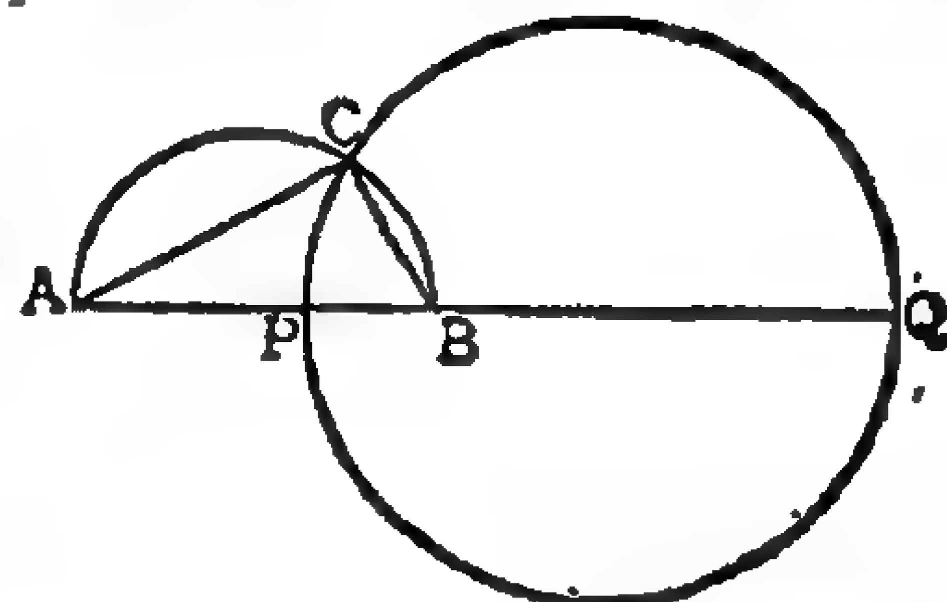
[证明]　$\angle DCB=\angle R$，$\angle CDB=45°$.

$$\therefore\quad CD=CB,\quad 因而\quad AC+CB=a,$$

且　$AC^2+BC^2=m^2.$

2035. 求作适合条件 $x:y=m:n$，$x^2+y^2=l^2$ 的两条线段 x、y. 其中 l、m、n 均为已知线段。

解　[作图]　设 $AB=l$，作线段 AB 的内分点 P 和外分点 Q，使 $AP:PB=AQ:BQ=m:n$. 作与 A、B 的距离之比为 $m:n$ 的点的轨迹，即以 PQ 为直径作圆，



设它与以 AB 为直径的半圆相交于 C, 则

$$AC=x,\ CB=y.$$

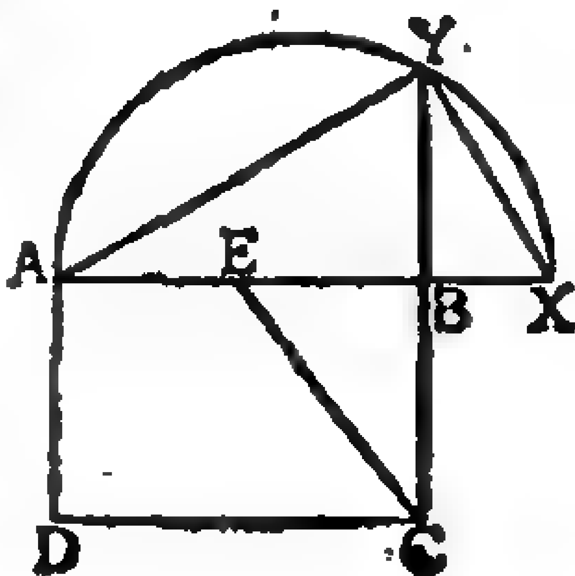
[证明] 因为 AB 为直径, 所以 $AC^2+BC^2=AB^2$, 即 $x^2+y^2=l^2$。又 C 为与 A、B 的距离之比为 $m:n$ 的点。

$$\therefore\ AC:CB=m:n,$$

即 $$x:y=m:n.$$

2036. 已知线段 a、b, 求作适合下列方程组的线段: $xy=a^2$, $x^2-y^2=b^2$.

解 作矩形 $ABCD$, 使 $AB=b$, $AB\cdot BC=a^2$, 连结 AB 的中点 E 和点 C。在 AB 的延长线上取点 X, 使 $EX=EC$. 再以 AX 为直径作半圆, 与 CB 的延长线相交于 Y, 则 $AY=x$, $BY=y$。理由是:



根据作图 $\angle ABY=\angle R$,

$$\therefore\ AY^2-BY^2=AB^2,$$

即 $$x^2-y^2=b^2. \quad ①$$

连结 X、Y, 则 $\angle AYX=\angle R$, $YB\perp AX$.

$$\therefore\ XY^2=XA\cdot XB. \quad ②$$

但 $XE=EC$, 且 E 为 AB 的中点,

$$\therefore\ XA=XE+AE=EC+EB,$$
$$XB=XE-EB=EC-EB.$$

根据 ②

$$XY^2=(EC+EB)\cdot(EC-EB)$$
$$=EC^2-EB^2=BC^2.$$
$$\therefore\ XY=BC.$$

又 $$\triangle ABY\backsim\triangle YBX,$$

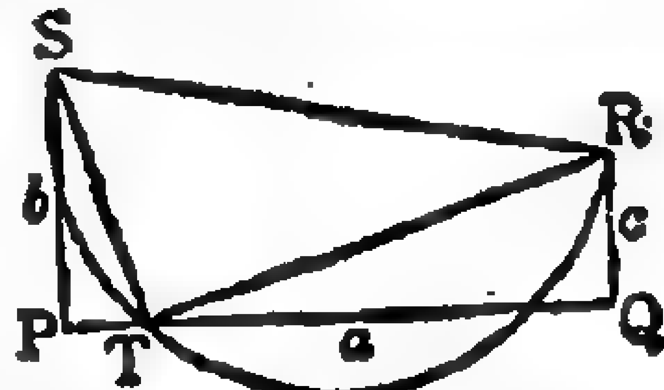
$$\therefore\ \frac{AY}{AB}=\frac{XY}{BY}=\frac{BC}{BY},$$

因而 $$AY\cdot BY=AB\cdot BC=a^2,$$
$$xy=a^2. \quad ③$$

由 ①、③ 可知, x、y 为符合条件的线段。

2037. 已知线段 a、b、c, 作图求方程 $x^2-ax+bc=0$ 的根。

解 [作图] 作 $PQ=a$, 在它的两端向同一侧作垂线 PS、QR, 使 $PS=b$, $QR=c$, 以 SR 为直径作圆, 与 PQ 的交点之一为 T, 则 PT、QT 的长度即为此方程的两个根。



[证明] $\angle SPT=\angle TQR=90°$, 且 $\angle STR=90°$.

$$\therefore\ \triangle SPT\backsim\triangle TQR.$$

因而 $$PS:PT=QT:QR,$$
$$PT\cdot QT=PS\cdot QR=bc,$$

且 $$PT+QT=PQ=a.$$

因此, 线段 PT、QT 的长是 $x^2-ax+bc=0$ 的两个根。

注 求方程 $x^2-px+q=0$ 的根时可取 $PQ=p$, $PS=1$, $QR=q$ 用与本题同样的作图方法求得。

2038. 证明: 周长和面积都是已知矩形的周长和面积的 n (正整数) 倍的矩形, 总可以用直尺和圆规作出。并指出在什么情况下所求矩形可以成为正方形?

解 如果两条线段的和为 a, 它们的积为 b^2, 则这两条线段就是方程式 $x^2-ax+b^2=0$ 的根, 而且这两个根可用直尺和圆规作出。

若要这方程的两个根能够作出, a、b 必须满足 $b\leqq\frac{a}{2}$. 因为它表明上面的二次方程的判别式为 $a^2-4b^2\geqq0$.

因此, 当已知矩形的两边是 a、b 时, 周长为 $n(a+b)$、面积为 nab 的矩形能否作出, 就看满足和为 $n(a+b)$、积为 nab 的两个根是否为正数。

列二次方程:

$$t^2-n(a+b)t+nab=0.$$

它的判别式为

$$n^2(a+b)^2-4nab=n[n(a+b)^2-4ab]$$
$$=n[(n-1)(a+b)^2+(a-b)^2]\geqq0.$$

所以此方程有实根。又因两根之和 $n(a+b)>0$, 两根之积 $nab>0$, 所以两个根都为正数。因此周长为 $n(a+b)$, 面积为 nab 的矩形总可以作出(见上题)。

如果要求两根相等, 则有

$$n[(n-1)(a+b)^2+(a-b)^2]=0.$$
$$\therefore\ n=1,\ a=b.$$

即当已知矩形为正方形, 且 $n=1$ 时, 所求矩形成为正方形。

2039. 已知线段的长为 a、b, 试求满足下列方程的线段 x 的作图法 $(a>b)$.

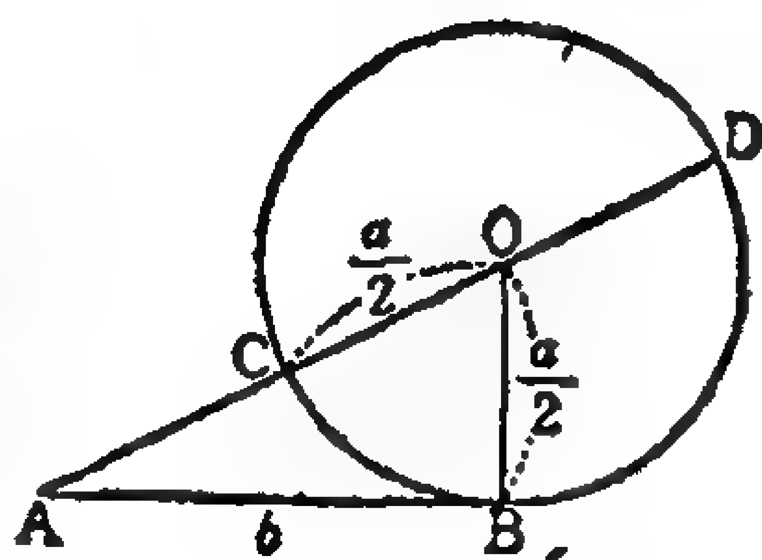
(1) $x^2+ax-b^2=0$, (2) $x^2-ax-b^2=0$,

(3) $x^2-ax+b^2=0$, (4) $x^2-ab=0$.

解 (1) $x^2+ax-b^2=0$,

即　$x(x+a)=b^2$.

这就是说，已知 $(x+a)$ 和 x 的差为 a，积为 b^2，根据问题 2016，就可作出线段 x.



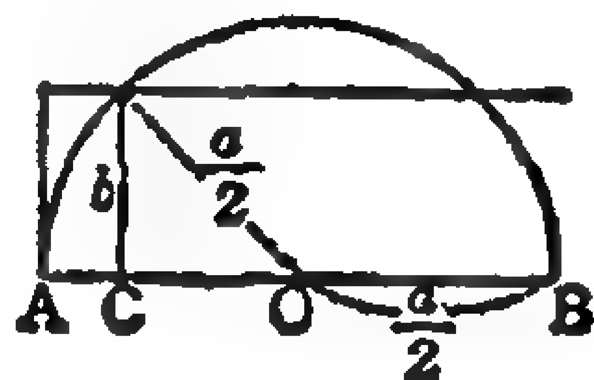
(2) $x^2-ax-b^2=0$,　　$\therefore$　$x(x-a)=b^2$,

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}\ \text{（只考虑}x>0\text{）}.$$

因此，在 (1) 的作图中，AD 即为表示 x 的线段。

(3) $x^2-ax+b^2=0$,　　$\therefore$　$x(a-x)=b^2$,

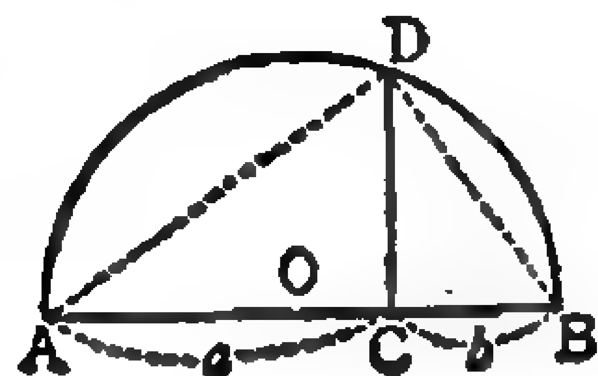
$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}.$$



因此，若作出如右图，AC 或 BC 就是表示 x 的线段。当 $\frac{a}{2}>b$ 时有两解。当 $\frac{a}{2}=b$ 时有一解，当 $\frac{a}{2}<b$ 时无解。

(4) $x^2-ab=0$,

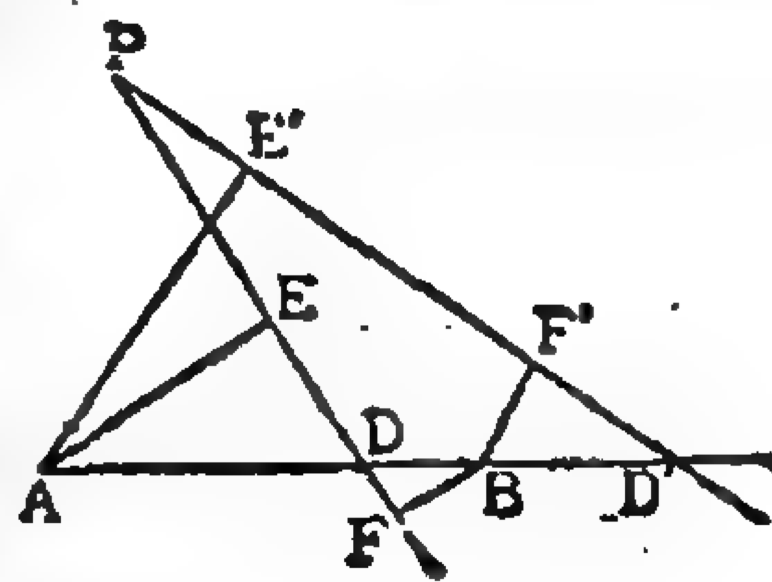
$$x=\sqrt{ab}.$$



因此，作出如右图，CD 是表示 x 的线段。

3. 作与已知各点的距离相等(或为已知比)的直线

2040. 过已知点 P 作直线，使它与另两个已知点 A、B 的距离的比为 $m:n$.



解 ［分析］ 设所求直线已作出，由 A、B 向这条直线作垂线 AE 和 BF. 设这条直线与 AB 的交点为 D，则

$$\triangle AED\backsim\triangle BFD.$$

$$\therefore\quad AD:BD=AE:BF=m:n.$$

如果直线与 AB 的延长线的交点为 D'，同上，

$$AD':BD'=m:n.$$

因此，可作图如下.

［作图］ 把线段 AB 分别在 D、D' 点内分和外分，使 $AD:BD=m:n$, $AD':BD'=m:n$. 作直线 PD 和 PD'，即为所求直线。

2041. 有三个已知点 A、B、C，过 A 作一条直线，使从 B、C 分别向这条直线所作垂线的垂足与 A 点的距离的比等于已知比 $m:n$.

解 假定所求直线 $AB'C'$ 已作出。设由 B 和 C 向这条直线所作垂线足分别为 B'、C'，且 BB' 或其延长线与 AC 相交于 D，则

$$AD:AC=AB':AC'=m:n.$$

因此，点 D 将 AC 分为 $AD:AC=m:n$，连结 BD，再由 A 作 BD 的垂线 $AB'C'$，即为所求直线。

2042. 作一直线，使从已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 到这条直线的距离的比为 $l:m:n$.

解 ［作图］ 把边 AB 在 P 点外分为 $l:m$，再把 AC 在 Q 点外分为 $l:n$. 则过 P、Q 的直线 XY 即为与 A、B、C 的距离之比为 $l:m:n$ 的直线。

［证明］ 由 A、B、C 向 XY 作垂线 AL、BM、CN，则 $AL\parallel BM$,

$$\therefore\quad AL:BM=AP:PB=l:m.$$

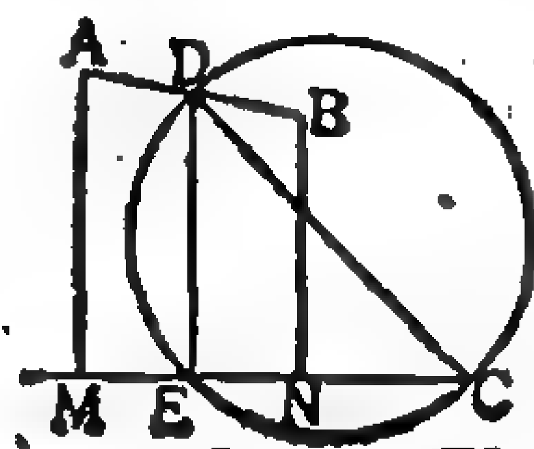
又　　$AL\parallel CN$,

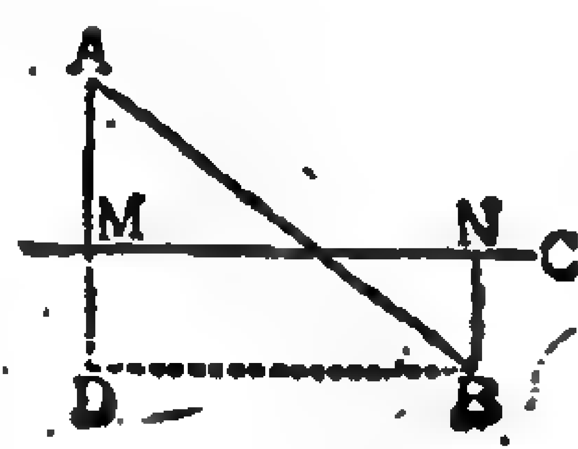
$$\therefore\quad AL:CN=AQ:CQ=l:n,$$

$$AL:BM:CN=l:m:n.$$

［讨论］ 设点 P' 内分 AB 为 $l:m$，点 Q 内分 AC 为 $l:n$，可以证明 $P'Q'$、PQ'、$P'Q$ 都符合所给条件，因此，当 $l\neq m\neq n$ 时，所求直线有四条。

2043. 作过已知点 C 的直线，使从另两个已知点 A、B，向它所作垂线 AM、BN 之和等于已知长 l.



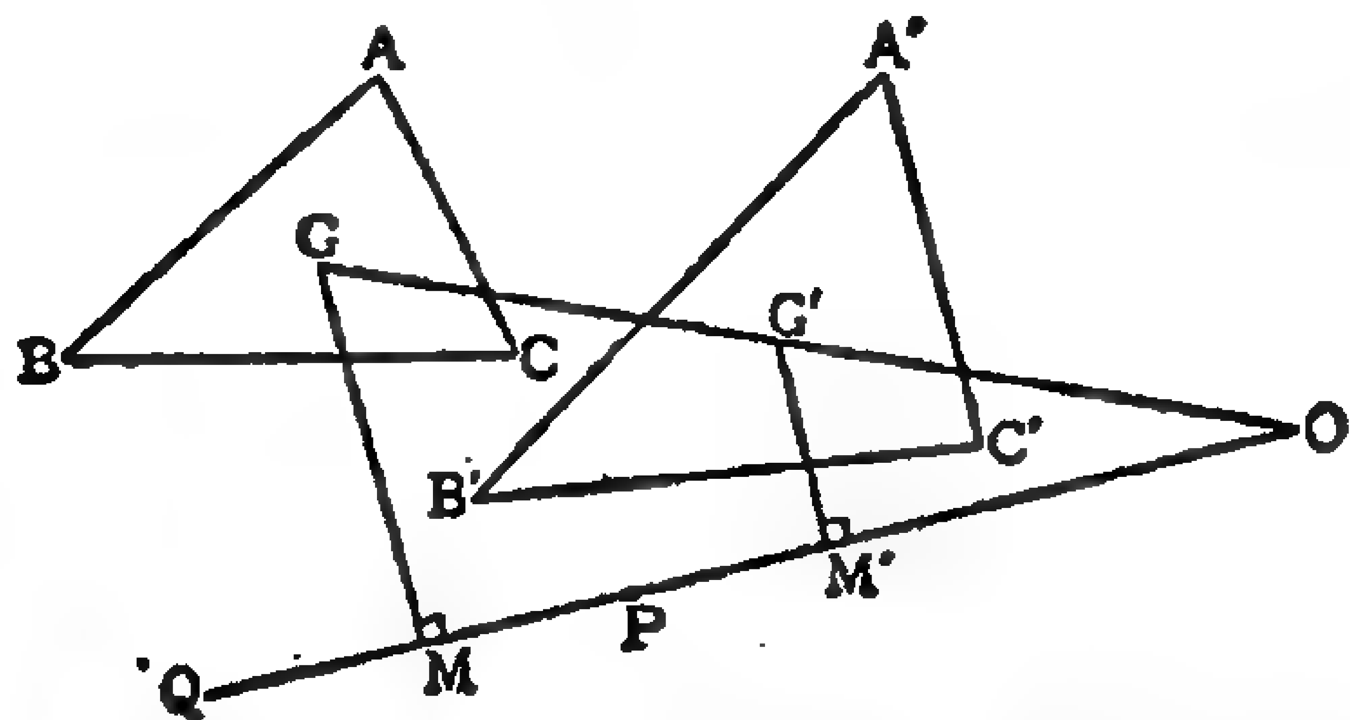


解　[分析]　如果A、B在直线CM的同侧．设AB的中点为D，由D作CM的垂线DE，则$2DE=AM+BN=l$，且$\angle DEC=\angle B$．

如果A、B在线段CNM的异侧，延长AM，在AM上截取$MD=BN$，则$AD=AM+BN=l$，$\angle ADB=\angle B$．因此得到如下作图方法．

[作图]　设AB的中点为D，连结DC，以线段DC为直径作圆，再作弦$DE=\frac{1}{2}l$，则所求的直线过C和E．其次以AB为直径作圆，作弦$AD=l$，由C作DB的平行线，与线段AB相交，则这条直线也是所求直线．

2044．　已知两个三角形ABC、$A'B'C'$和点P，过点P作一直线，使以A、B、C到PQ的距离之和与从A'、B'、C'到PQ的距离之和的比为$m:n$．



解　假定直线PQ已作出．设$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的重心分别为G、G'，由G、G'分别向PQ作垂线GM、$G'M'$．又设GG'与PQ的交点为O，则由A、B、C向PQ所作垂线之和等于$3GM$（参照问题**107**），由A'、B'、C'所作垂线之和为$3G'M'$．因此，

$$3GM:3G'M'=GM:G'M'=m:n.$$

又$\triangle GMO\backsim\triangle G'M'O$，

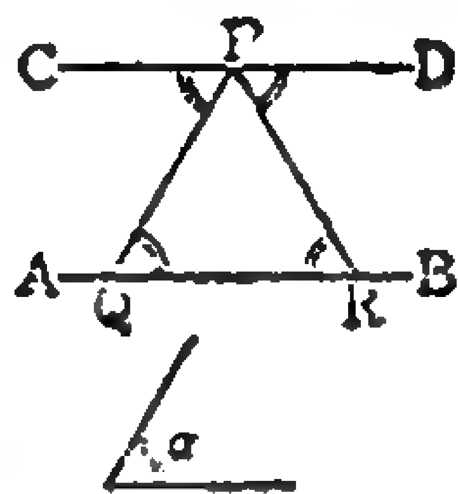
$$\therefore\quad GM:G'M'=m:n.$$

因此，求出G、G'，O、O'将GG'分别内分和外分成$m:n$，则PO、PO'即为所求直线．

4．作角平分线、垂线、平行线

2045．　过已知直线AB外的已知点P作一直线，使这条直线与AB的夹角等于已知角α．

解　[作图]　过已知点P作AB的平行线CD，再过点P作与CD的夹角为α的直线PQ和PR，分别与AB相交于Q、R．则PQ、PR为所求直线．



[证明]　由$CD\parallel AB$，

$$\therefore\quad \angle CPQ=\angle PQR=\alpha.$$

$$\angle DPR=\angle PRQ=\alpha.$$

2046．　平分已知角BAC．

解　[作图]　以已知角的顶点A为圆心，以任意半径作圆弧与角的两边AB、AC相交于D、E．分别以D、E为圆心，以同样的半径作两条圆弧，设两弧的一个交点为F，则AF平分$\angle BAC$．

[证明]　连结DF，EF，则

$$\triangle DAF\cong\triangle EAF,$$

$$\therefore\quad \angle DAF=\angle EAF.$$

注　反复使用上述方法，可把已知角分成4等分，8等分，16等分；一般可分为2^n等分．

2047．　三等分一个直角．

解　[作图]　设$\angle AOB$为直角．以O为圆心、任意半径作圆，与OA、OB相交于C、D．再以D为圆心、OD为半径作圆弧，与CD弧相交于E．以C为圆心、OC为半径作圆弧，与CD弧相交于F，则OE、OF三等分$\angle AOB$．

[证明]　连结ED，则$OE=OD=DE$．因此$\triangle OED$为正三角形．

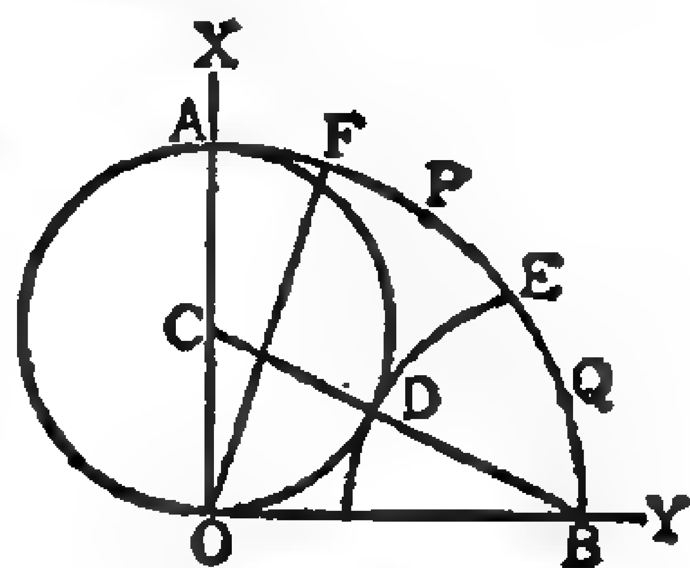
$$\therefore\quad \angle EOD=60^\circ,\ \angle COE=30^\circ.$$

同样　$\angle FOD=30^\circ$，$\therefore$　$\angle EOF=30^\circ$．

因此OE、OF三等分直角．

2048．　五等分一个直角．

解　设直角XOY的两边OX、OY，与以O为圆心、以r为半径的圆相交于A、B；以OA的中点C为圆心、CA为半径的圆与BC相交于D．以B为圆心、BD为



半径的圆与 $\widehat{AB}$ 相交于 E。在 $\widehat{AE}$ 上取 $\widehat{EF}=\widehat{BE}$，设 $\widehat{EF}$ 的中点为 P，$\widehat{BE}$ 的中点为 Q，则 OF、OP、OE、OQ 将直角 AOB 五等分。理由是：

$$BE=BD=BC-CD=\sqrt{OB^2+OC^2}-CD$$
$$=\sqrt{r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}-\frac{r}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r.$$

因此，弦 BE 是半径为 r 的圆的内接正十边形的一边。$\angle BOE=360°\div10=36°$，

$$\therefore\quad \angle AOF=90°-36°\times2=18°$$
$$(=90°\div5).$$

注　设 $x=AB$ 是以 r 为半径的圆的内接正十边形的一边，而 $OA=OB=r$。设点 C 使

$$\angle AOC=\angle OAC=\angle CAB=36°.$$

因为 BA 与圆 OAC 相切，所以

$$AB^2=BO\cdot BC.$$

因而
$$x^2=r(r-x),$$
$$x^2+rx-r^2=0.$$
$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r.$$

2049.　三等分正五边形的外角。

解　设 $\angle AOB$ 为正五边形的外角，以 O 为圆心、OA 为半径作圆弧 AB，则

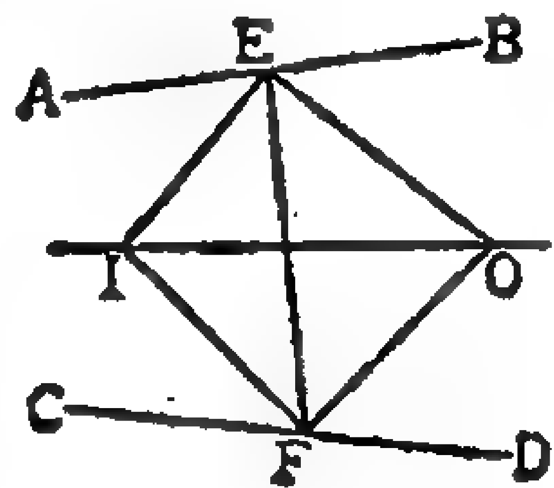
$$\angle AOB=\frac{360°}{5}=72°.$$

因此，设三等分 $\angle AOB$ 的一条直线为 OD，则

$$\angle DOB=72°\div3=24°.$$

所以 BD 为圆 O 的内接正 15 边形的一边。根据问题 **2595**，取 BD、DC 和 CA 等于圆 O 的内接正 15 边形的一边即可解。

2050.　已知两条不相交的线段 AB、CD，不利用它们的交点，作等分它们的夹角的直线。

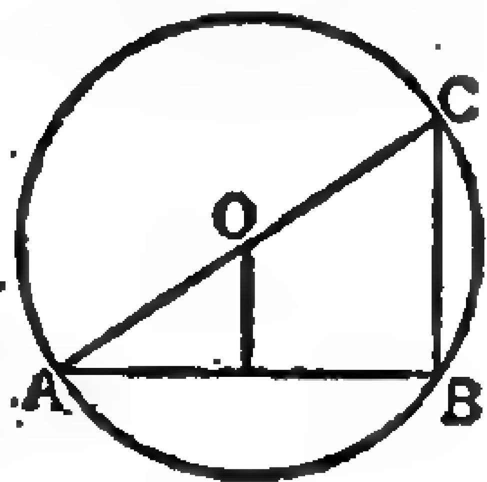


解　［作图］　作与 AB、CD 相交的任意直线 EF，设 $\angle AEF$、$\angle EFC$ 的平分线的交点为 I，$\angle BEF$、$\angle EFD$ 的平分线的交点为 O，则连结 OI 的直线就是平分 AB、CD 的夹角的直线。

［证明］　延长 BA、DC，设交点为 P。因为 I、O 分别为 $\triangle EPF$ 的内心和旁心，所以 OI 等分 $\angle P$。

2051.　不延长已知线段 AB，过端点 B 作它的垂线。

解　［作图］　以 AB 的垂直平分线上的任意一点 O 为圆心，以 OB 为半径作圆，设过 A 的直径的另一端为 C，则 CB 为所求直线。

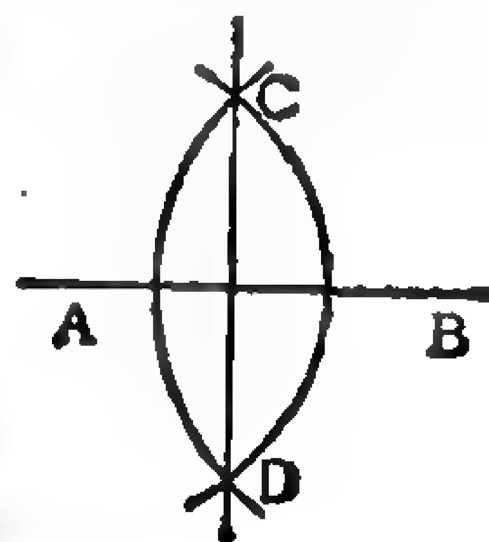


［证明］　因为 AC 是直径，

$$\angle ABC=\angle R,\quad\therefore\quad AB\perp BC.$$

2052.　从已知直线 AB 外的一点 C 作它的垂线。

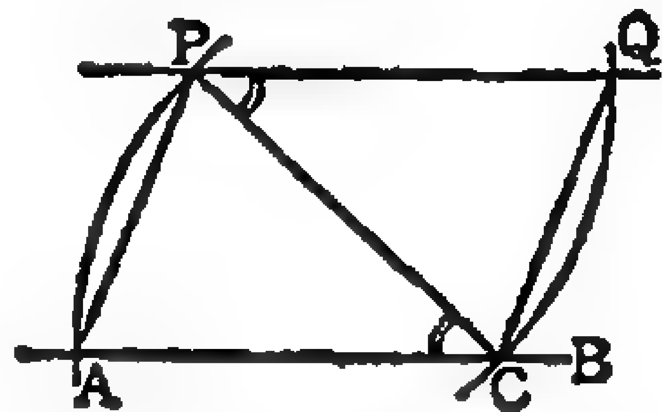
解　［作图］　在已知直线上任取两点 A、B，以这两点为圆心、分别以 AC、BC 为半径作两个圆，设它们的另一交点为 D，则 CD 即为所求直线。



［证明］　CD 为两个圆的公共弦，它与连心线 AB 垂直。因此 CD 为所求垂线。

2053.　过已知点 P，作已知直线 AB 的平行线。

解　［作图］　在 AB 上任取一点 C，连结 CP。以 C、P 为圆心，分别作以 PC 为半径的两个圆。设以 C 为圆心的圆弧与 AB 相交于 A。在以 P 为圆心的圆弧上取弦 $CQ=PA$，连结 PQ，则 PQ 为所求直线。



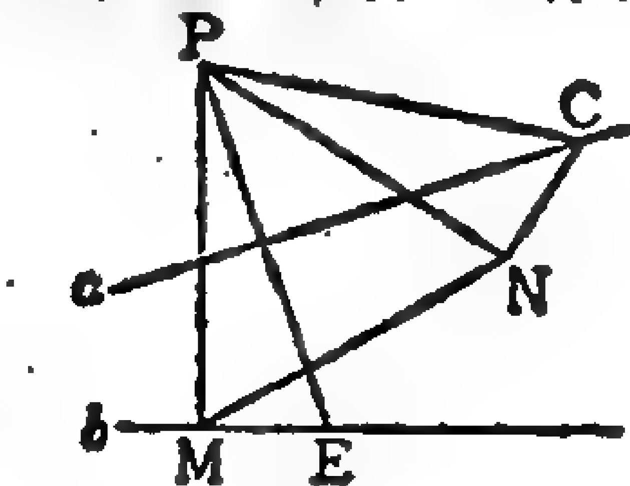
［证明］　根据作图，在两个等圆中，$\widehat{PA}=\widehat{QC}$，它们所对的圆周角相等。

$$\therefore\quad \angle PCA=\angle CPQ,\ PQ\parallel AB.$$

2054.　由已知点 P，向两条已知直线 a、b 作相等的线段 PC、PE，使所形成的角 $\angle CPE$ 等于已知角 α。

解　［分析］　设此题已解出。PC、PE 为

所求的两条线段，则 $\triangle PEC$ 为 $\angle EPC$ 等于已知角 α 的等腰三角形，所以它的形状一定。点 P 的位置已知，点 E 在已知直线 b 上，根据问题 1862，点 C 的轨迹是一条直线。因此这个轨迹和 a 的交点 C 的位置可定。可作图如下：



［作图］ 由点 P 向已知直线 b 作垂线 PM，以 PM 为一边，作顶角 P 等于已知角 α 的等腰三角形 PMN。过 N 作垂直于 PN 的直线，它与直线 a 的交点为 C。对于 PN 而言，在 PM 的同侧，过 P 作与 PC 的夹角为 α 的直线，与 b 交于点 E，则 PC、PE 为所求线段。

［证明］ 参考问题 1862。

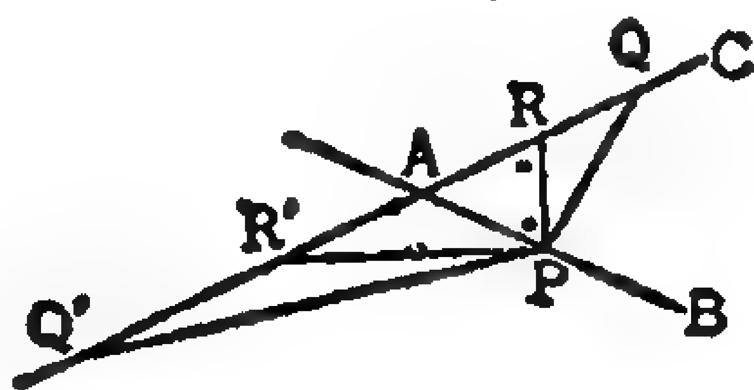
2055. 由已知角 BAC 的一边 AB 上的点 P，向 AC 作直线 PQ，使 $\angle APQ$ 等于 $\angle AQP$ 的三倍。

解 ［分析］ 设所求直线 PQ 已求得，在 AQ 上取点 R，使 $RP=RQ$，则

$$\angle PRA=2\angle PQA=\angle APR,$$

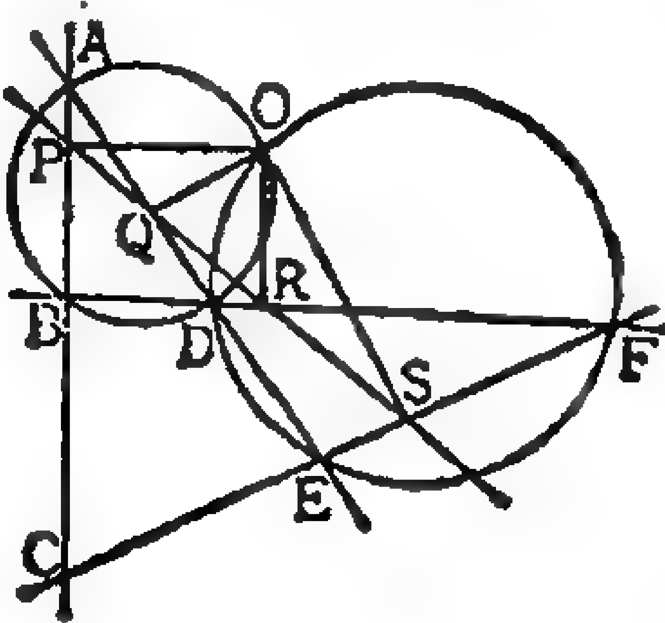
$$\therefore\ AP=AR.$$

因此可作图如下。



［作图］ 在 AC 上点 A 的两侧取点 R、R'，使 $AR=AP=AR'$，在 AR、AR' 的延长线上各截取 $RQ=PR$，$R'Q'=PR'$。连结 PQ、PQ'，则 PQ 和 PQ' 为所求直线。

2056. 有四条已知直线，其中任何三条不过同一点，任何两条都不平行。从一点作这四条直线的垂线，使垂足都在一条直线上。

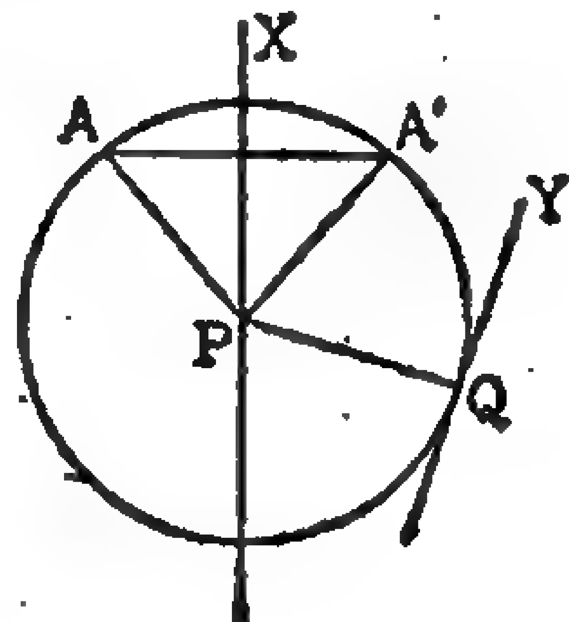


解 ［作图］ 设已知直线的交点为 A、B、C、D、E、F，则在这六个点中的任意三点所构成的两个三角形 ABD、DEF 的外接圆相交于 O，则 O 为所求点。

［证明］ 设由 O 向直线 AB、AD、DF、EF 所作垂线的垂足分别为 P、Q、R、S，根据西摩松定理 P、Q、R 在一直线上，同样 Q、R、S 也在同一直线上。因此 P、Q、R、S 四点共线。

2057. 在两条已知直线 X、Y 之外有一点 A，由 X 上的一点 P 作 Y 的垂线 PQ，使 $PQ=PA$。

解 设点 A 关于 X 的对称点为 A'，作过 A、A' 且与直线 Y 相切的圆（见问题 2618），设圆心为 P。由 P 向直线 Y 作垂线 PQ，则

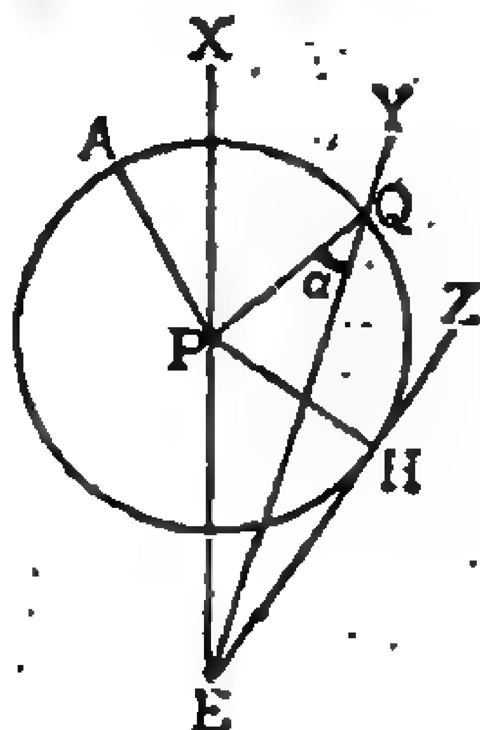


$$PQ=PA=PA'.$$

由于 A、A' 关于已知直线 X 对称，因此 P 在 X 上，故 PQ、PA 为所求直线。

2058. 两条已知直线 X、Y 外有一已知点 A，由 X 上的一点 P 作直线 PQ，使它与直线 Y 的夹角为 α，且 $PQ=PA$。

解 ［分析］ 假定此题已解出。设 PQ、PA 为所求直线。设直线 X 与 Y 的交点为 E，以 P 为圆心、PQ 为半径作圆，过 E 作圆的切线 EH，H 为切点。则在 $\triangle PEQ$ 中



$\angle Q=\alpha$（已知），

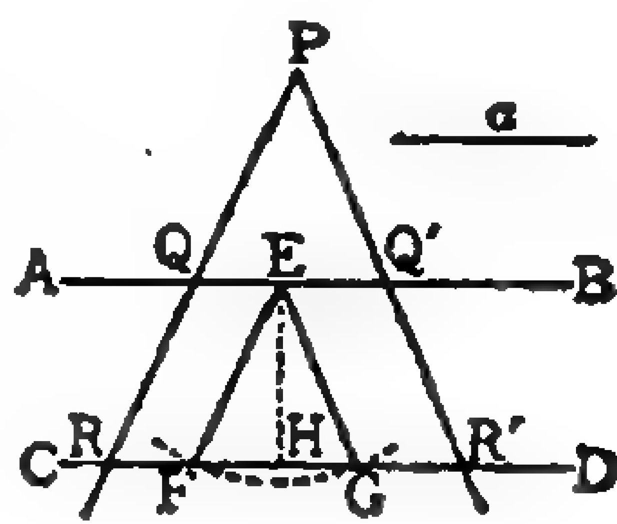
$\angle PEQ=\angle XEY$（已知）。

因此 $\triangle PEQ$ 的形状一定，所以 $PE:PQ$ 为定值。因 $PQ=PH$，所以 $PE:PH$ 也是定值。且 $\angle PHE=90°$。直角三角形 PEH 的形状一定，$\angle PEH$ 的大小一定。因此 EH 也为已知直线。将 EH 叫做 EZ，则本题便成从 X 上的一点 P 作已知直线 EZ 的垂线 PH，使 $PH=PA$，所以本题归结于上题。

5. 作与已知平行线相交的直线

2059. 过已知点 P，作一直线与两条已知平行线 AB、CD 相交，使它在 AB、CD 之间部分的长为已知长 a。

解 ［作图］ 在 AB 上任取一点 E，以 E 为圆心、a 为半径作圆弧，与 CD 相交于 F、G。连结 EF，EG，由 P 作它们的平行线



PR、PR'，即为所求直线(问题 2053)。

［证明］　因为 $QE \parallel RF$，$QR \parallel EF$，所以 $QRFE$ 为平行四边形，$QR=EF=a$。

同样　　　$Q'R'=EG=a$。

［讨论］　由 E 向 CD 作垂线 EH，

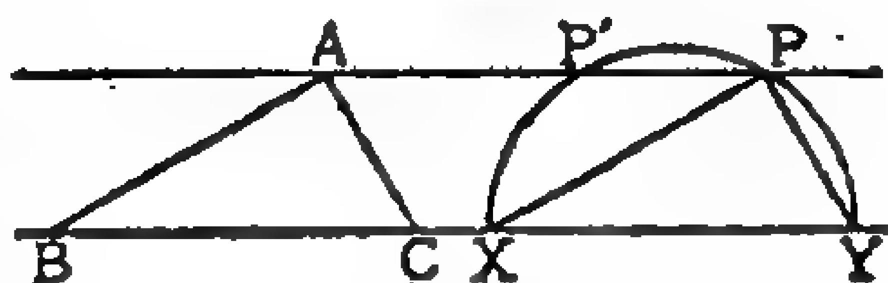
当 $a>EH$ 时，有两解；

当 $a=EH$ 时，有一解；

当 $a<EH$ 时，无解。

2060． 过已知点 A 作两条互相垂直的直线，使它们在另一已知直线上截取的线段 $BC=a$(a 为已知线段长)。

解　［作图］　在已知直线上截 $XY=a$，以 XY 为直径，作半圆 PXY。过 A 作 XY 的平行线，设与半圆相交于点 P。由 A 分别作 PX、PY 的平行线，与直线 XY 相交于 B、C，则 AB、AC 即为所求直线。



［证明］　$\triangle ABC \cong \triangle PXY$，

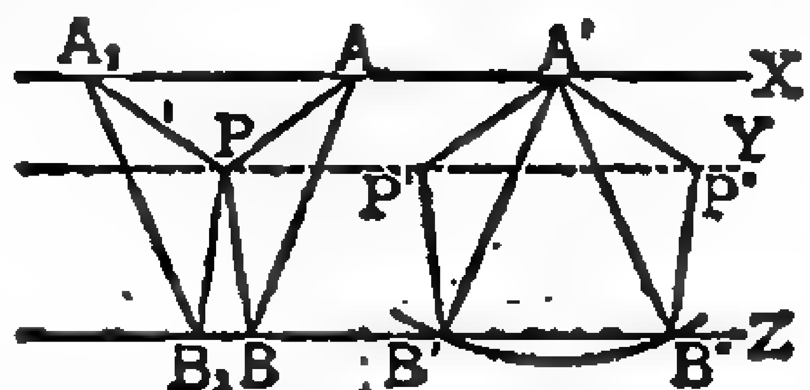
$\therefore\ BC=XY=a$。

又　　　$\angle BAC=\angle R$。

［讨论］　根据点 A 到 BC 的距离是小于、等于、还是大于已知线段的一半，决定从 A 所作 XY 的平行线与半圆是相交、相切、还是不相交，因而有两解、一解、无解。

2061． 已知平行线 X、Z 和一个点 P，作两端在 X、Z 上、长度为已知长 a 的线段 AB，且使 $PA=PB$。

解　［作图］　过 P 作 X 的平行线 PY，在 X 上取 A' 点，以 A' 为圆心、a 为半径作圆弧，与 Z 交于点 B'、B''。



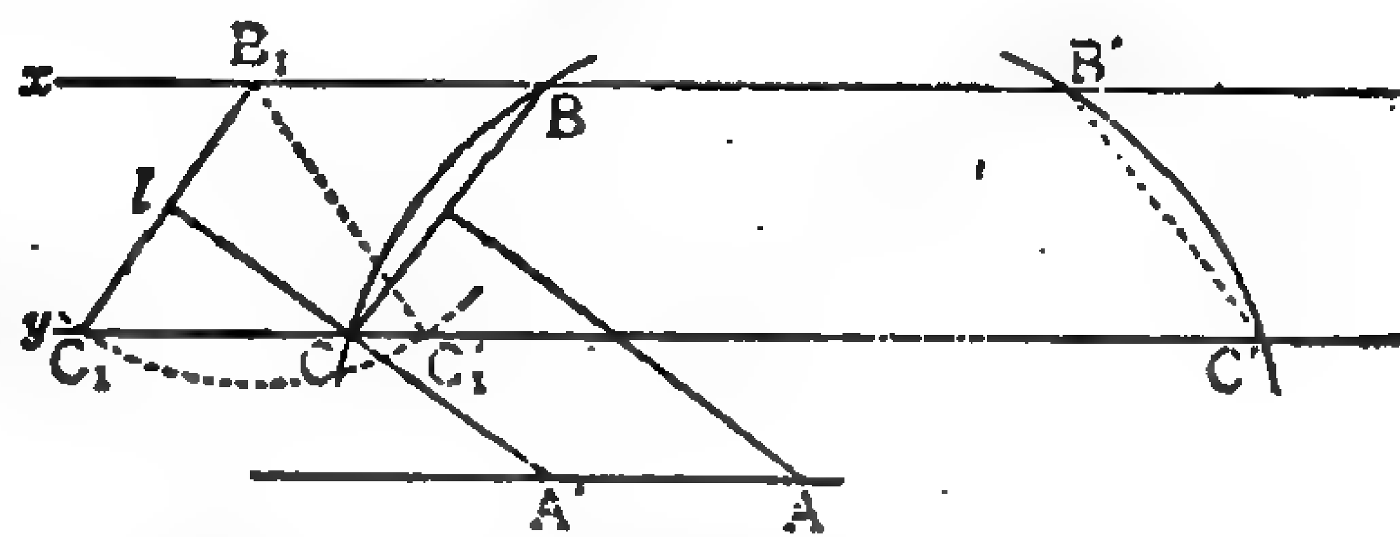
$A'B'$ 的垂直平分线($A'B''$ 的垂直平分线)与 PY 交于点 $P'(P'')$，则 $\triangle P'A'B'(\triangle P''A'B'')$ 为等腰三角形，$A'B'(A'B'')=a$。由 P 作 $P'A'(P''A')$ 的平行线，与 X 交于 $A(A_1)$，由 P 作 $(P'B')(P''B'')$ 的平行线，与 Z 相交于 $B(B_1)$，则 $AB(A_1B_1)$ 即为所求直线。

［证明］　省略。

［讨论］　当 X 和 Z 的距离 $d<a$ 时，有两解。当 $d=a$ 时，若 P 与 X、Z 等距离，则有一解，否则无解。当 $d>a$ 时，无解。

2062． 已知平行线 X 和 Y，A 为 X、Y 之间的一点。过 A 作互相垂直相交的两条射线 AB、AC，与 X、Y 分别交于点 B、C，使线段 BC 的长等于已知线段 m。

解　［作图］　在 X、Y 之间任意位置上作线段 $B'C'=m$(可向两个方向截取)，作以 $B'C'$ 为直径的圆，与过 A 所作 X、Y 的平行线相交于 A'。由 A 作 $A'B'$，$A'C'$ 的平行线，设与 X、Y 的交点分别为 B、C，则 AB、AC 即为所求射线。



［证明］　略。

［讨论］　当 XY 的距离 $d<m$ 时，有四解；当 $d=m$ 时，有两解；当 $d>m$ 时，无解。

2063． 以已知点 A 为圆心作圆，与已知两平行线 x、y 分别相交于 B、C，使 $BC=l$(l 为已知长)。

解　［分析］　假定符合条件的线段 BC 已作出，将图形按与 x 平行的方向平移任意距离，设 A 移至 A' 处，BC 移至 B_1C_1 处，则 $B_1C_1=l$，B_1C_1 是以 A' 为圆心的圆的弦，$AA' \parallel x$。因此，作图如下。

［作图］　以 x 上任意点 B_1 为圆心，l 为半径作圆，与 y 相交于 C_1。B_1C_1 的垂直平分线和过 A 与 x 平行的直线相交于 A'。以 A 为圆心、$A'B_1$ 为半径作圆，与 x、y 分别相交于 B、C，则 B、C 是所求点。

［证明］　以 A' 为圆心，$A'B_1$ 为半径的圆过 C_1 并与 x、y 相交于 B_1、C_1，$B_1C_1=l$。以 A 为圆心、$A'B_1$ 为半径的圆，是把圆 A' 沿与 X 平行的方向平移距离为 $A'A$，因此，与 x、y 相交所截得的弦 $BC(=B_1C_1)=l$。

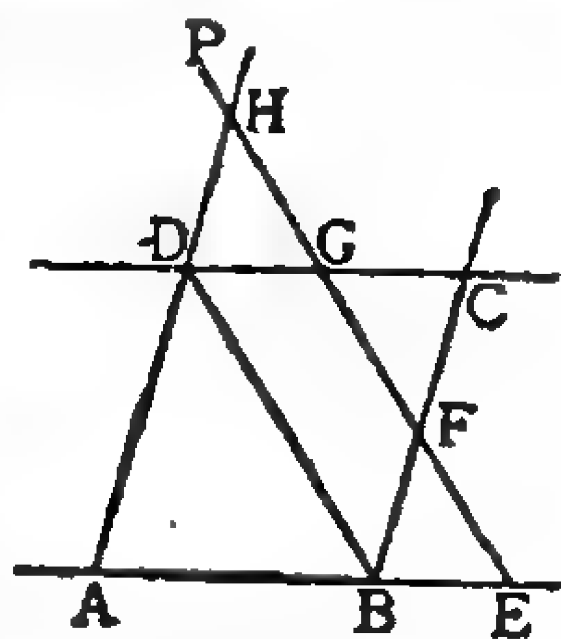
［讨论］　圆 A 截 x、y 得弦 BC 和 $B'C'$，所

以有两解。因为以 B_1 为圆心、l 为半径的圆与 y 虽有两个交点 C_1 和 C_1'，但用 B_1C_1' 作图所得结果与用 B_1C_1 作图的结果一致。

当 l 等于 x、y 之间的距离，A 在 x、y 的正中间，此题有无数个解。当 l 小于 x、y 之间的距离，或 l 与 x、y 之间距离相等，但 A 不在 x、y 的正中间，不可能作图。其他情况下有两解。

2064. 有甲、乙两组平行线，它们的交点依次为 A、B、C、D，由已知点 P 作一直线，使它在甲、乙两组平行线之间的两部分相等。

解　[分析]　假定所求直线已作出，它在甲、乙两组平行线之间的部分 $HF=EG$，则 $HG=EF$(或 $HE=FG$)；$\triangle HGD$ 与 $\triangle FEB$（或 $\triangle HEA$ 与 $\triangle FGC$）的三个角分别相等，所以这两个三角形全等。因此，连结顶点 B、D（或 C、A）的直线与 PE 平行。故可作图如下。



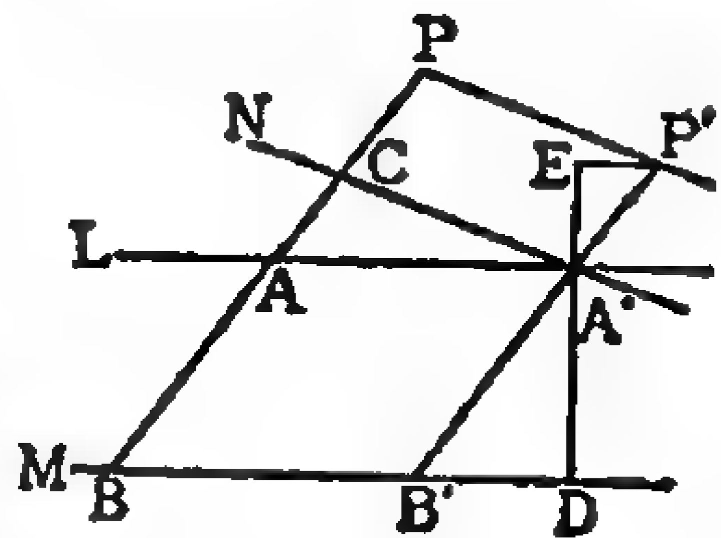
[作图]　过 P 作两条直线分别与 BD、AC 平行，则这两条直线即为所求的直线。

[证明]　略。

2065. 已知两平行线 L、M 和另一条直线 N，过已知点 P 作直线使与 L、M、N 分别交于 A、B、C，且 $AB:CP=m:n$ ($m:n$ 为已知比)。

解　设 L 和 N 相交于 A'，过 A' 作 PC 的平行线，设它与过 P 与 N 平行的直线相交于 P'，与 M 相交于 B'，则 $A'B':P'A'=AB:PC=m:n$。因此可作图如下。

[作图]　过 A' 作 M 的垂线 $A'D$，在 DA' 的延长线上取点 E，使 $A'D:A'E=m:n$。过 E 作 $EP'\parallel L$，和过 P 且与 N 平行的直线相交于 P'，则过 P 且与 $P'A'$ 平行的直线 $PCAB$ 即为所求直线。



[证明]　$\triangle A'DB'\backsim\triangle A'EP'$，

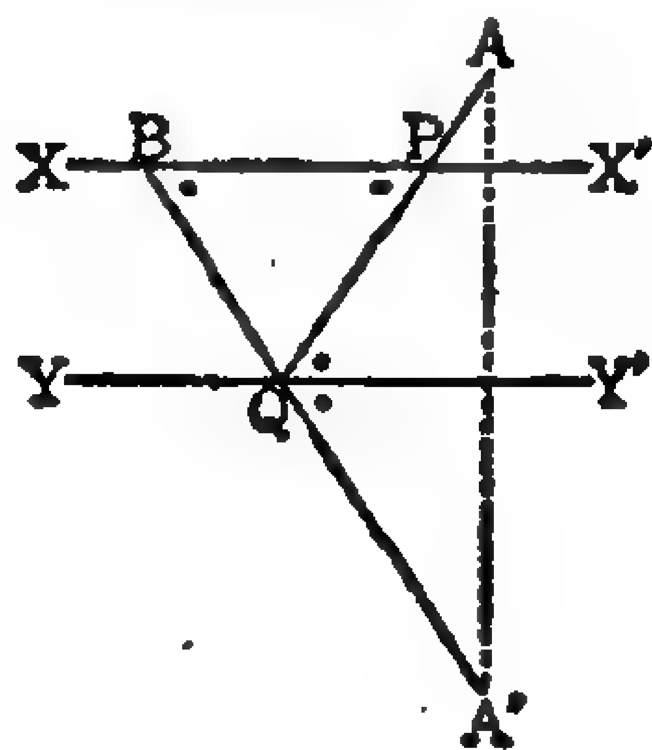
因此　$A'D:A'E=A'B':A'P'$。

但　$A'P'=CP$，$A'B'=AB$，

$$\therefore\quad AB:CP=A'B':A'P'$$
$$=A'D:A'E=m:n.$$

2066. 设 XX'、YY' 为互相平行的两条直线，B 为 XX' 上的一个已知点。关于 XX' 在 YY' 的异侧有一已知点 A。过 A 作一直线，使它与 XX'、YY' 分别交于 P、Q，且 $PQ=QB$。

解　求 A 关于 YY' 的对称点 A'，设 BA' 与 YY' 相交于点 Q，AQ 与 XX' 交于点 P，则直线 APQ 为所求直线。理由是：A 和 A' 关于 YY' 对称，所以



$$\angle A'QY'=\angle AQY',$$

且　$$XX'\parallel YY'.$$

$$\therefore\quad \angle A'QY'=\angle B,\ \angle AQY'=\angle BPQ.$$

因此　$$\angle PBQ=\angle BPQ,$$

$$\therefore\quad PQ=QB.$$

2067. 已知 XX'、YY' 为两条平行直线，B 为 YY' 上的一点，点 A 和点 B 在 XX' 的异侧。过 A 作直线分别与 XX'、YY' 相交于 C、D，使 $BD=CD$。

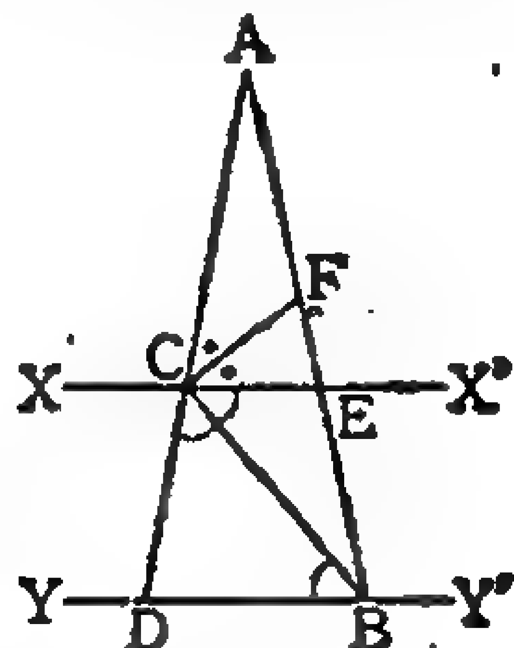
解　假定此题已解出，ACD 为所求直线，则

$$BD=CD,\quad\therefore\quad \angle DCB=\angle DBC.$$
$$\because\quad XX'\parallel YY',$$
$$\therefore\quad \angle DBC=\angle BCX'.$$

设 AB 和 XX' 的交点为 E，$\angle ACE$ 的平分线 CF 与 AE 的交点为 F，则 A、F、E、B 成调和点列。A、E、B 为已知点，所以 F 也为定点。因

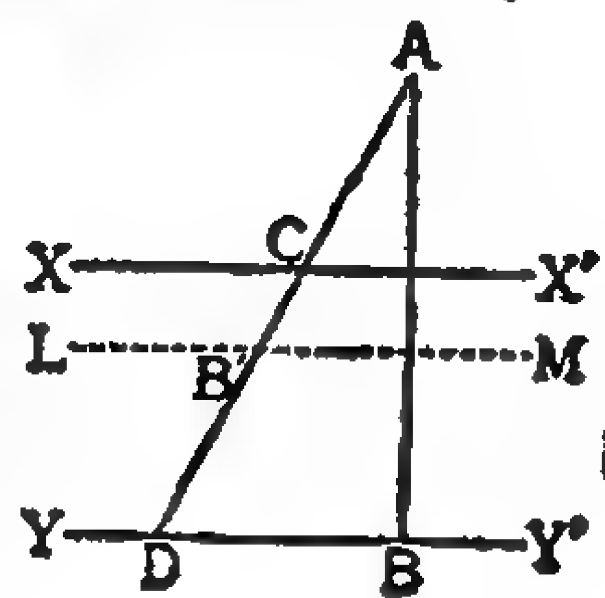
$$\angle FCB=\angle R,$$

设以 FB 为直径的圆，与 XX' 相交于 C。AC 与 YY' 交于点 D，则 ACD 为所求直线。



2068. 在上题中，使 $DC:DB=m:n$。

解　假定此题已解出，$DC:DB=m:n$。在 DC 或其延长线上截取 $DB'=DB$，则 $DC:DB'=DC:DB=m:n$。但 XX'、YY' 已知，且互

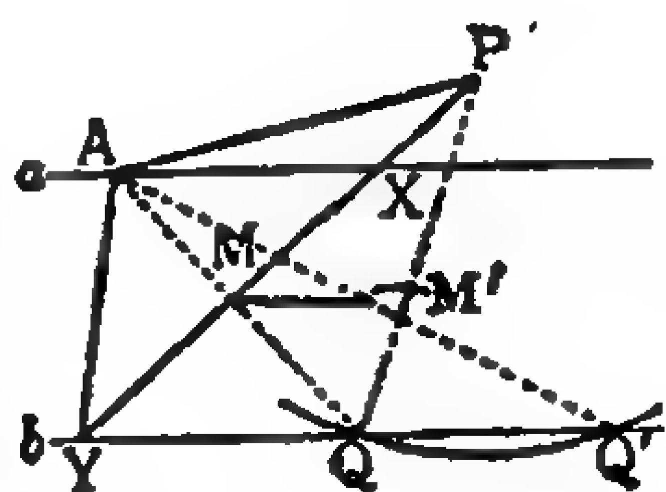


相平行，所以使

$DC:DB'=m:n$ 的点 B' 的轨迹为定直线 LM。因此不用 XX'，以 LM 和 YY'，与上题一样，求点 B' 使 $DB=DB'$ 即可。

2069. 已知 a、b 为两条平行线，a 上有一定点 A，过平行线外的已知点 P 作直线与 a、b 分别相交于 X、Y，使 $AX=AY$。

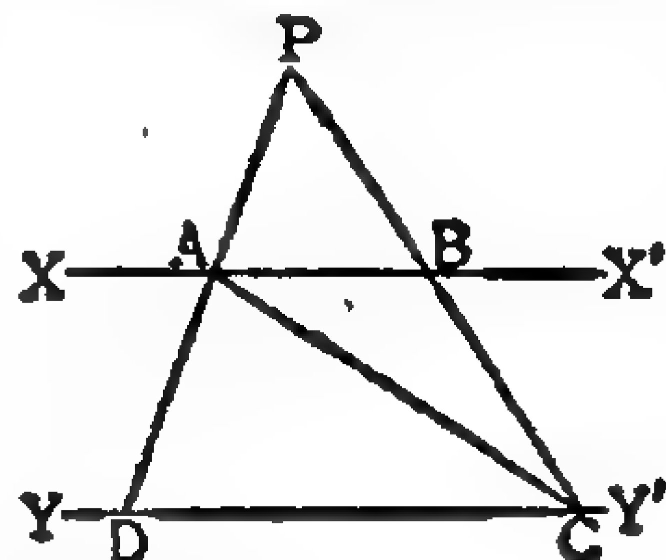
解 [分析] 假定所求直线 PXY 已作出，$AX=AY$。设过 XY 的中点 M 和点 A 的直线与 b 相交于 Q，则 $AQ\perp PY$，显然 M 为 AQ 的中点。因此 $\triangle PAQ$ 是等腰三角形，$PA=PQ$。因此可作图如下。



[作图] 以 P 为圆心，以 PA 为半径作圆，设此圆与直线 b 相交于 Q、Q'，则连结 AQ、AQ' 的中点 M、M' 与点 P 的直线 PXY、$PX'Y'$ 即为所求直线。

2070. 已知平行线 XX' 和 YY' 外的一点 P，点 A 在 XX' 上。过 P 作一直线与 XX'、YY' 分别相交于 B、C，使 $AB:AC=m:n$。

解 假定此题已解出，设 PBC 为所求直线，PA 的延长线与 YY' 交于点 D。因为 $XX'\parallel YY'$，P 为已知点，所以 $AB:DC=PA:PD$(一定)。



设 $PA:PD=p:q$，则 $AB:DC=p:q$，$AB:AC=m:n$。

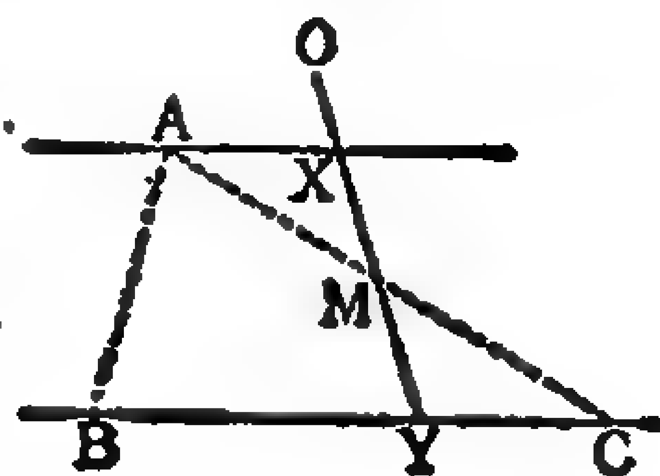
$$\therefore\quad DC=\frac{q}{p}AB,\quad AC=\frac{n}{m}AB.$$

因而 $$DC:AC=\frac{mq}{np}\quad(一定).$$

且 A、D 为定点。因 $DC:AC$ 一定，所以点 C 的轨迹是阿波罗尼斯圆。即以连结将 AD 内分和外分成 $mq:np$ 的两点的线段为直径作圆，与 YY' 相交于 C(一般有两个交点)。则 PC 为所求直线。

2071. 在两条平行线上各有一个定点 A 和 B。过已知点 O 作直线，与两条平行线相交于 X、Y，使 AX、BY 的和等于已知长 m。

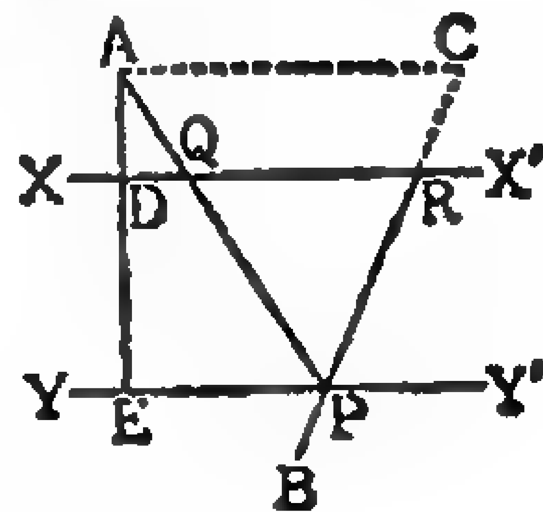
解 [分析] 设所求直线为 OXY，在 BY 的延长线上取点 C，使 $BY+CY=m$。连结 CA，则 AC、XY 的交点 M 为 AC、XY 的中点，所以 M 点为所求的点。



[作图] 取 C 点使 $BC=m$，连结 AC 的中点 M 和已知点 O，MO 与两条平行线相交于 X、Y，则直线 OXY 为所求直线。又，可以在点 B 的另一侧取点 C，再用同样的方法求得直线 $OX'Y'$。因此本题一般有两解。但须注意，根据 A、B 的位置，有时和变成差。

2072. 已知 XX'，YY' 是两条平行线，A，B 为 XX'、YY' 之外的两个定点。在 YY' 上求点 P，设 AP、BP 或它们的延长线与 XX' 的交点分别为 Q、R，使 $\triangle PQR$ 的面积等于 K^2。

解 [分析] 假定此题已解出，P 为所求点。由 A 向 XX' 作垂线 AD，它的延长线与 YY' 相交于点 E。XX'、YY' 是已知平行线，A 为已知点，所以 DE 的长度一定。但



$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}QR\cdot DE;$$

且 DE 为定长，$\triangle PQR$ 为一定，所以 QR 为定长。设它的长为 m，由 A 作 XX' 的平行线，与 BP 的延长线相交于 C，因为 $AC\parallel QR$，所以 $QR:AC=DE:AE$。由于 QR 为定长，$DE:AE$ 一定，所以 AC 的长度一定。

[作图] 由 A 作 XX' 的垂线 AD，延长 AD 与 YY' 的交点于 E。因为定面积是 K^2，所以求 $\frac{1}{2}DE$ 和 K 的第三比例项 m。再求 DE、AE、m 的第四比例项 n。由 A 作 XX' 的平行线，在其上面截取 $AC=n$，连结 BC，BC 与 YY'、XX' 相交于 P、R。又连结 AP，AP 与 XX' 相交于 Q，则 $\triangle PQR$ 为所求的三角形。

[证明] $$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}QR\cdot DE,$$

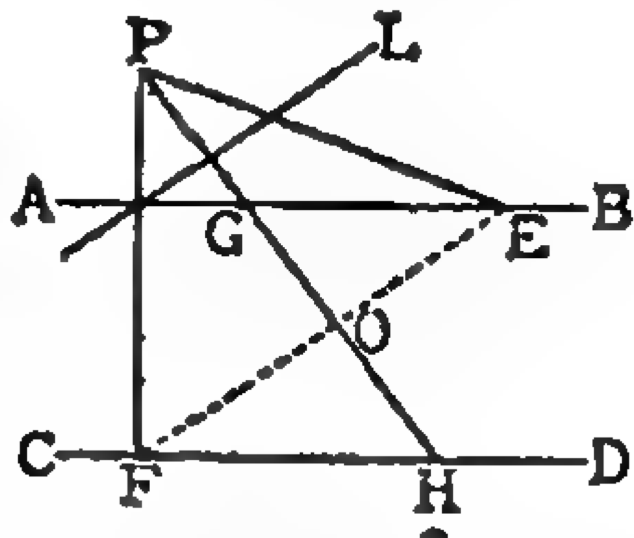
但 $$\frac{QR}{AC}=\frac{DE}{AE}=\frac{m}{n},\quad\therefore\quad QR=m.$$

又 $\frac{1}{2}DE\cdot m=K^2$,

$\therefore\quad S_{\triangle PQR}=K^2$.

[讨论] 在过 A 与 XX' 平行的直线上取点 C 时，因方向不同有两个解。

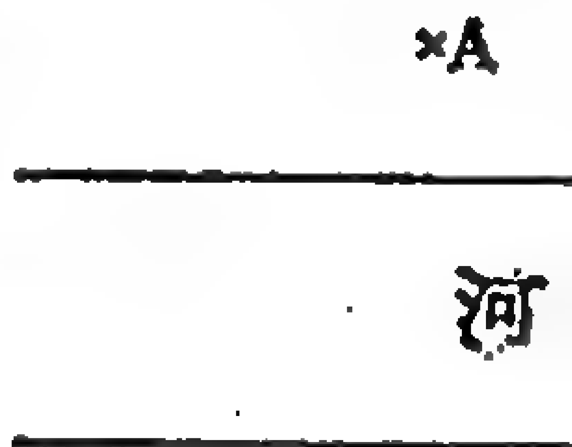
2073. 已知 AB 和 CD 为两条平行线，P 为此两直线外的定点。在 AB、CD 上分别求点 E、F，使 $PE=PF$，且 $EF\parallel L$ (L 为已知直线)。



解 [分析] 假定点 E、F 已求出，连结 EF，由 P 作 EF 的垂线 PO，PO 或它的延长线与 AB、CD 相交于 G、H。因 $PE=PF$，所以 $EO=FO$，$GO=HO$。又因 $EF\parallel L$，所以 $PO\perp L$。故可作图如下。

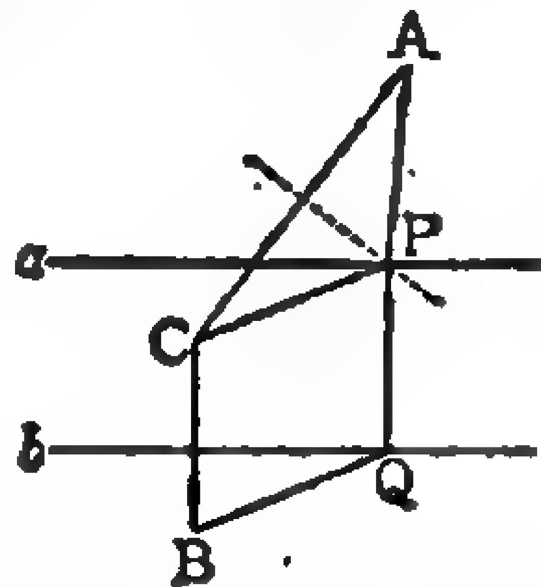
[作图] 过 P 作与 L 垂直的直线 PGH，与 AB、CD 交于点 G、H，求 GH 的中点 O，过 O 作 $EF\parallel L$，EF 与 AB、CD 相交于 E、F，则 E、F 为所求点。

2074. 如图，在河的两岸有 A、B 两栋房子。要在这条河上架一座桥，使桥的两端与 A、B 两栋房子的距离相等。求桥的位置。设河的两岸平行，且桥与河岸垂直。



解 设河岸为 a，b。

[作图] 过 B 作 b 的垂线，在垂线上取 C 点，使 BC 与河的宽度相等，AC 的垂直平分线和 a 的交点为 P，由 P 向 b 作垂线，其垂足为 Q，则 P、Q 即为所求桥的两端的位置。

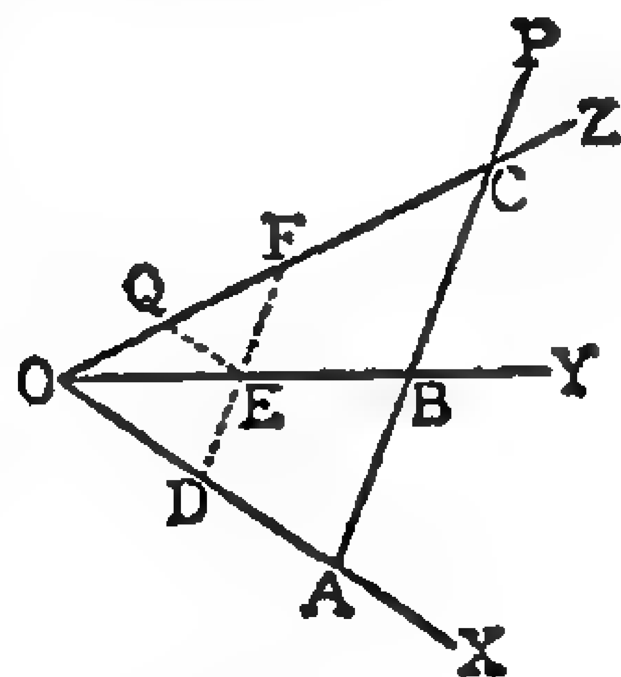


[证明] 因为 $BC\parallel QP$，$BC=QP$；所以四边形 $BCPQ$ 为平行四边形。因此 $BQ=CP$，但 P 在 AC 的垂直平分线上，所以 $CP=AP$，因此 $AP=BQ$。

6. 作与已知角相交的直线

2075. 过已知点 P 作直线与已知的三条直线 OX、OY、OZ 相交的点分别为 A、B、C，使 $AB=BC$。

解 [作图] 在 OZ 上取两点 Q、F，使 $OQ=QF$。过 Q 作 $QE\parallel OX$，与 OY 相交于 E。过 P 作 $PA\parallel FE$，则 PA 为所求直线。



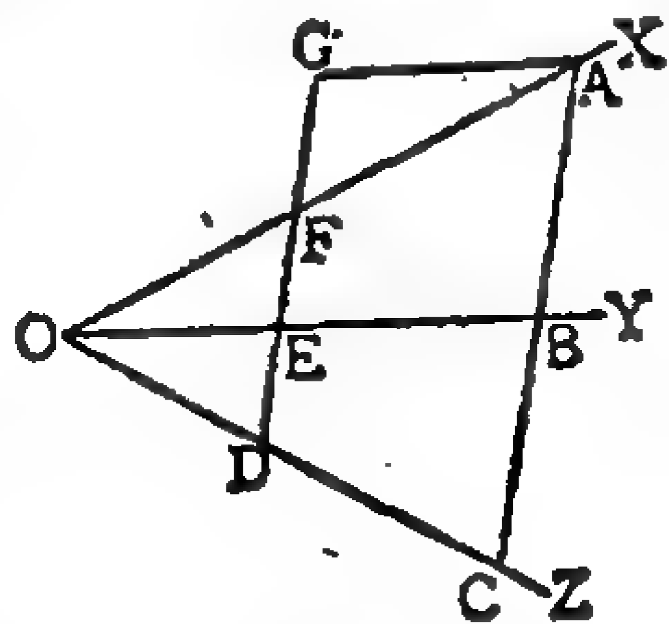
[证明] 若 FE 的延长线与 OX 相交于 D，则根据作图，$FE=ED$，且 $FD\parallel PA$。

$$\therefore\quad \frac{DE}{AB}=\frac{OE}{OB}=\frac{FE}{BC},$$

$$\therefore\quad AB=BC.$$

2076. 作一直线与三条已知直线 OX、OY、OZ 相交于点 A、B、C，使 $AC=l$ (定长)，且 $AB=BC$。

解 根据上题作图，在 OY 上任取一点 E，过 E 作直线分别与 OX、OZ 相交于 F、D，使 $EF=ED$。在 EF 或它的延长线上取 $EG=\frac{1}{2}l$，过 G 作 OY 的平行线，与 OX 相交于 A。由 A 作 FED 的平行线，与 OY、OZ 分别相交于 B、C，则 $AB:BC=FE:ED$。但 $EF=ED$，所以 $AB=BC$。因

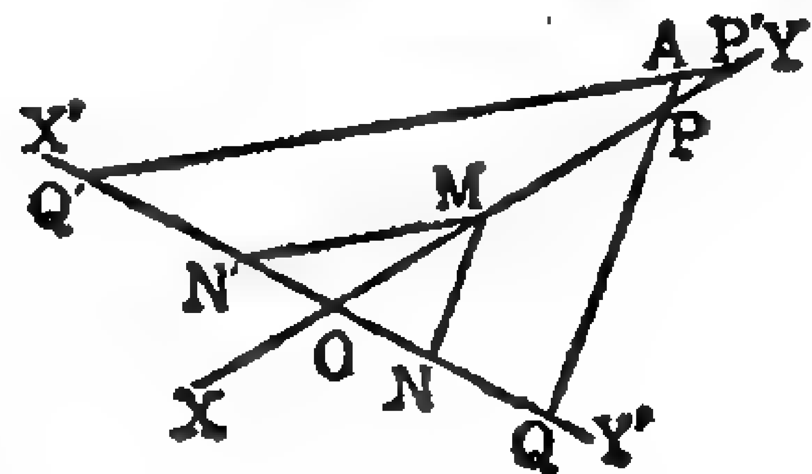


$$AB=EG=\frac{1}{2}l,$$

所以 $AC=l$。因此，A、B、C 是符合条件的点。

2077. 已知两条直线 XY、$X'Y'$ 相交于 O，过已知点 A 作直线 APQ，与 XY、$X'Y'$ 相交于 P、Q，使 $OP:OQ=m:n$ (定比)。

解 [作图] 在 OY、OY' 上各截取 $OM=m$，$ON=n$，过 A 作 MN 的平行线即可。



[证明] 因为 $MN\parallel PQ$，所以

$$OM:ON=OP:OQ.$$

因 $OM:ON=m:n$，所以 $OP:OQ=m:n$。又在 NO 的另一侧截取 $ON'=n$，若过 A 作 MN' 的平行线，则 $OP':OQ'=m:n$。

2078. P 为已知角 $\angle XAY$ 内的一点。

过 P 作直线 BPC 与 AX、AY 相交于 B、C，使 $PB:PC=m:n$。

解 ［作图］ 过 P 作 AY 的平行线，与 AX 相交于 D，在 DX 上取点 B，使 $BD:DA=m:n$。延长 BP 与 AY 相交于点 C，则 BPC 即为符合条件的直线。

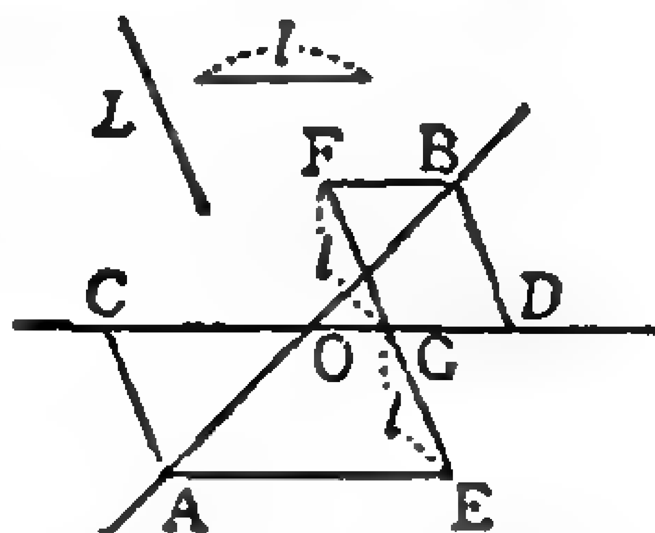
［证明］ 根据作图 $AC\parallel PD$。

$$\therefore\quad BP:PC=BD:DA=m:n.$$

因此 BPC 为符合条件的直线。

注 在本题中，要使 $PB=PC$，只要使 $DA=DB$ 即可。

2079. 作端点分别在已知的两相交直线上、等于定长 l 的两条线段，且与另一条已知直线平行。



解 设相交的两直线为 AB、CD，另一已知直线为 L。过 CD 上的任意点 G 作平行于 L 的直线，在它上面截取 GE 和 GF，都等于 l。过 E、F 作平行于 CD 的直线，分别与 AB 相交于 A、B。再过 A、B 作平行于 L 的直线与 CD 分别交于点 C、D，则 AC、BD 为所求直线。其理由是：根据作图 $ACGE$ 和 $BDGF$ 都是平行四边形，所以 $AC=GE=l$，$BD=GF=l$，而且 $EF\parallel L$，因此 AC、BD 为所求线段。

2080. P 为已知点，AB、CD 为已知直线。不求 AB、CD 的交点，作过点 P 和此交点的直线。

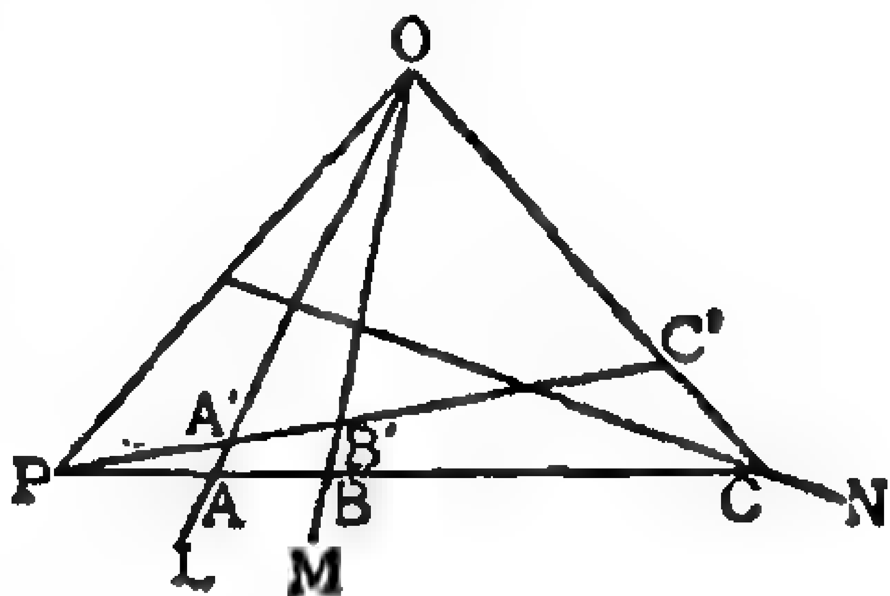
解 ［分析］ 设两直线的交点为 O，PO 和 BD 的交点为 Q，过 P 作 BD 的平行线，与 AB、CD 相交于 E、F。则

$$PE:PF=QB:QD,$$

且 $PE:PF$ 为已知比。因此可作图如下。

［作图］ 连结 BD，过点 P 作 BD 的平行线，与 AB、CD 分别相交于 E、F，则点 Q 将 BD 内分为 $QB:QD=PE:PF$。连结 P、Q，故直线 PQ 为通过 AB、CD 的交点 O 的直线。

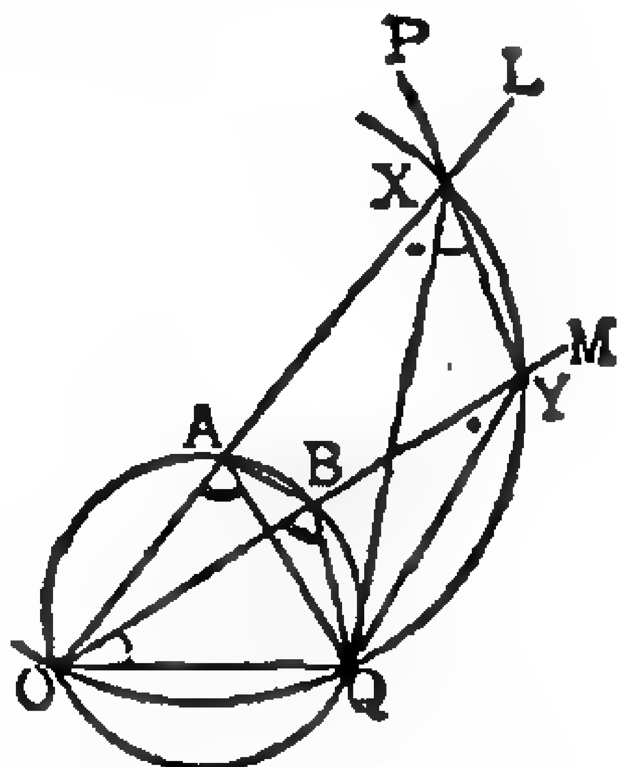
2081. 过已知点 P 作一直线 $PA'B'$，与已知直线 L、M、N 相交，使这三个交点与已知点 P 成调和点列。



解 过点 P 作任意一直线 $PA'B'$，与 L、M 相交于 A'、B'，再求与 P、A'、B' 成调和点列的点 C'，连结 L 和 M 的交点 O 与 C'。OC' 与第三条直线 N 相交于 C，连结 PC 的直线与 L、M 相交于 A、B，则 $PABC$ 即为所求直线。理由是：四条直线 OP、OA'、OB'、OC' 与一条横截线 PC' 的交点成调和点列。从而与另一横截线 PC 的交点 P、A、B、C 也成调和点列（根据问题 **1482**）。

注 当 L、M 平行时，作 OC' 与 L、M 平行即可。

2082. 已知直线 L、M 上各有一定点 A、B。过另一定点 P 作直线，与已知两直线相交于 X、Y，使 AX 与 BY 的比等于已知比 $m:n$。



解 ［分析］ 若所求直线 PXY 已作出。设 L、M 的交点为 O，圆 ABO、XYO 的第二交点为 Q。则

$$\angle OAQ=\angle OBQ.$$

$$\therefore\quad \angle XAQ=\angle YBQ,$$

又 $$\angle OXQ=\angle OYQ.$$

$$\therefore\quad \triangle QAX\backsim\triangle QBY,$$

$$QA:QB=AX:BY=m:n.$$

因 $\triangle OAB$ 的外接圆已定，A、B 为已知点，$QA:QB$ 一定，所以 Q 点可求出（问题 **1856**）。因 $\angle QXY=\angle QOY$（一定），所以

$$\angle QXP=2\angle R-\angle QAB\text{（一定）}.$$

因此可作图如下。

［作图］ 设直线 L 和 M 的交点为 O，作 $\triangle OAB$ 的外接圆，此圆与 A、B 的距离之比为 $m:n$ 的点的轨迹（阿波罗尼斯圆）相交于 Q。再以 PQ 为弦，在 AQ 与 $\triangle AQB$ 的同侧，作含有角 $2\angle R-\angle QAB$ 的弓形弧，它与 L 相交于 X，则直线 PX 即为所求直线。

〔证明〕 略。

2083. 在角 XOY 的两边 OX、OY 上分别有定点 A、B. 作与已知直线 MN 平行，与 OX、OY 分别相交于 C、D 的直线 CD，使 $AC=BD$。

解 〔分析〕 设所求直线 CD 已作出. 作以 CA、CD 为两邻边的平行四边形 $ACDE$，则 $DE=AC=BD$，且 $\angle BDE=\angle XOY$ (一定)．或 $\angle BDE$ 等于 $\angle XOY$ 的补角，设 $\angle O$ 的平分线为 OF，则 BE 或与 OF 垂直，或与 OF 平行。因此可作图如下。

〔作图〕 过 B 作 $\angle XOY$ 的平分线 OF 的垂线或者平行线，与过 A 所作 MN 的平行线相交于 E；过 E 作 OX 的平行线，与 OY 相交于 D；过 D 作 MN 的平行线，与 OX 相交于 C，则 CD 即为所求直线。

〔证明〕 略。

〔讨论〕 若 MN 与 OX 或 OY 平行时，无解；若 MN 与 OF 平行或者垂直，则有一解；其他情况下有两解。

2084. 过已知点 P 作另一端分别在 OX、OY 上的两条相等线段，使它们的夹角为直角。

解 〔作图〕 过 P 作 OX 的垂线，垂足为 A. 再过 P 作与 PA 相等，且与 PA 垂直的线段 PB；过 B 作 PB 的垂线，与 OY 相交于 N；连结 PN，过 P 作 PN 的垂线，与 OX 相交于 M. 则 PM、PN 为所求两线段。

〔证明〕 $\angle MPN=\angle APB=\angle R$.

$$\therefore\ \angle MPA=\angle NPB,$$
$$\angle PAM=\angle PBN=\angle R,$$
$$PA=PB.$$

因而 $\triangle PAM\cong\triangle PBN$,
$$PM=PN.$$

因此 PM、PN 符合题意。

〔讨论〕 因此，垂直且等于线段 PA 的线段 PB，可以在 P 的两侧作两条，所以一般有两解。

如果 $\angle XOY$ 是直角，P 与 OX、OY 不是等距离时，则无解。如果 $\angle XOY$ 为直角，P 与 OX、OY 等距离时，则有无穷多个解。

2085. 过已知角 XOY 内的一个已知点 A，作两条直线 AP、AQ，与 OX、OY 分别相交于 P、Q，使 $\angle APO=\angle AQO$，且 $AP+AQ=l$。

解 〔分析〕 设符合条件的直线 AP、AQ 已作出，过 A 作与 OX、OY 构成两个等角的直线，分别与 OX、OY 相交于 B、C. 过 B 作 AQ 的平行线，与 OY 相交于 D. 若作以 BA、BD 为两邻边的平行四边形 $ABDE$，则在 $\triangle QED$ 和 $\triangle PAB$ 中，

$$ED=AB,$$
$$\angle QED=\angle QAC=\angle PAB,$$
$$\angle QDE=\angle QCA=\angle PBA.$$
$$\therefore\ \triangle QED\cong\triangle PAB,$$
$$EQ=AP,$$
$$BD=EA=EQ+QA=AP+AQ=l.$$

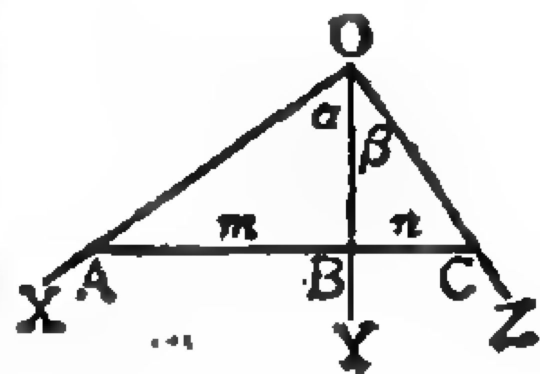
因此可作图如下。

〔作图〕 过 A 作直线与 OX、OY 构成等角，这条直线与 OX 相交于 B，与 OY 相交于 C．然后以 B 为圆心、l 为半径作圆，与 OY 相交于 D. 从 A 作 BD 的平行线与 OY 相交于 Q，作直线 AP，使 $\angle BAP=\angle CAQ$，设 AP 与 OX 相交于 P，则 AP、AQ 为所求直线。

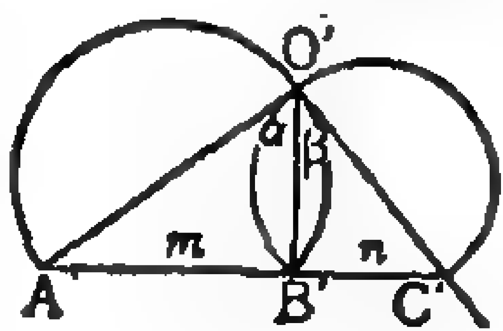
〔证明〕 略。

〔讨论〕 根据以 B 为圆心、l 为半径的圆与 OY 相交、相切，或者无公共点(设由 B 到 OY 的距离为 h，则 $l>h$，$l=h$ 或 $l<h$) 本题有两解，一解或无解。

2086. 已知过同一点 O 的三条射线 OX、OY、OZ，试作一直线与这三条直线相交，使截得的两部分 AB、BC 分别与两已知线段 m、n 相等。



解 设$\angle XOY=\alpha$，$\angle YOZ=\beta$。另外，在一条直线上取$A'B'=m$，$B'C'=n$，以$A'B'$、$B'C'$为弦分别作含有$\angle\alpha$、$\angle\beta$的弓形弧，设它们的交点为O'，在$\triangle O'A'C'$中，因为$\angle A'O'B'=\angle XOY$，$\angle C'O'B'=\angle ZOY$，$A'B'=m$，$B'C'=n$。所以把$\triangle O'A'C'$移到$\angle XOZ$即可。即在OX、OZ上各取$OA=O'A'$，$OC=O'C'$。设AC与OY的交点为B，则ABC为所求直线。



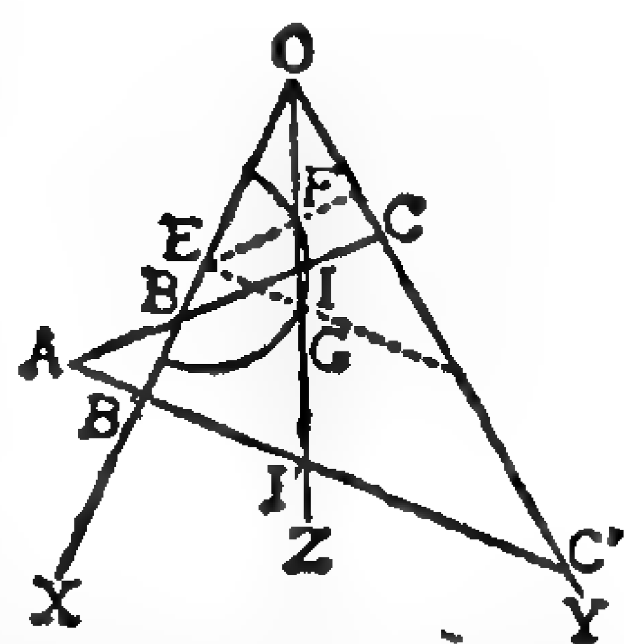
2087. 过已知点A作直线与已知角XOY的两边OX、OY相交于B、C，使$OB+OC=2BC$。

解 ［分析］ 假定此题已解出。设$\angle XOY$的平分线OZ与BC的交点为I，则

$$\frac{OB}{IB}=\frac{OC}{IC}=\frac{OB+OC}{IB+IC}=\frac{OB+OC}{BC}=\frac{2}{1}.$$

$$\therefore\quad OB:IB=2:1,$$

因而$\triangle OBI$可定。故可作图如下。

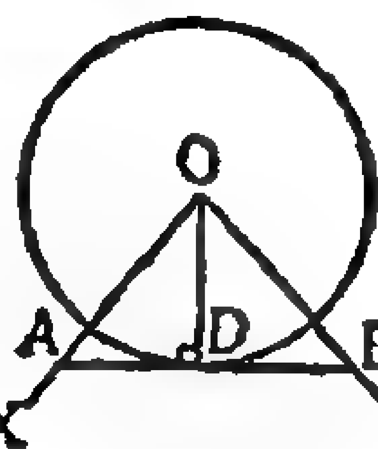


［作图］ 在OX上任取一点E。以E为圆心、$\frac{1}{2}OE$为半径作圆，与OZ相交于F、G，过A作EF或EG的平行线，与OX、OY相交于B、C（或B'、C'），则ABC（或$A'B'C'$）为所求直线。

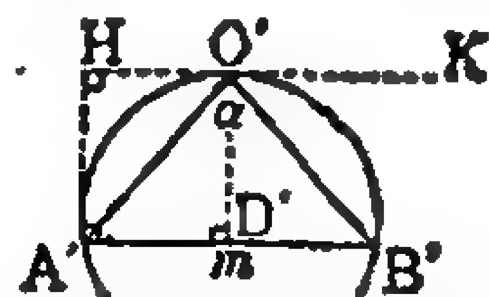
［证明］ 略。

［讨论］ 为使本题成立，直线OZ与圆E需有交点。设过E作OZ的垂线的长为h。当$h<\frac{1}{2}OE$时，圆E与OZ有两个交点，从而此题有两解。当$h=\frac{1}{2}OE$时，圆E与OZ相切，只有一解。当$h>\frac{1}{2}OE$时，本题无解。

2088. 已知圆O和两条直线OX、OY，求作圆O的切线AB与OX、OY分别交于A、B，使$AB=m$。



解 ［分析］ 设圆O的半径为r，$\angle XOY$为$\angle\alpha$（已知角）。AB为所求切线，D为切点，则在$\triangle OAB$中，$AB=m$，高$OD=r$，$\angle AOB=\angle\alpha$，因此可作与它全等的三角形。故可作图如下。



［作图］ 作线段$A'B'=m$，由A'作$A'B'$的垂线，在垂线上取点H使$A'H=r$，过H作$HK\parallel A'B'$。以$A'B'$为弦，在HK一侧作含$\angle\alpha$的弓形弧，设与HK的交点为O'。在OX上截取$OA=O'A'$，在OY上截取$OB=O'B'$，连结AB，则AB即为所求直线。

［证明］ $\triangle OAB$和$\triangle O'A'B'$，因为两边与夹角分别相等，所以它们全等。因此

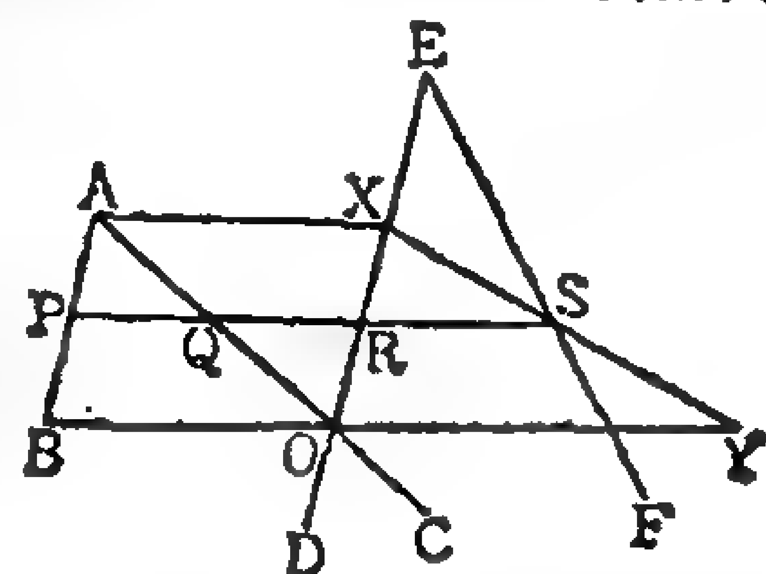
$$AB=A'B'=m.$$

设在$\triangle OAB$中，过O的高为OD；在$\triangle O'A'B'$中，过O'的高为$O'D'$。则$OD=O'D'$，$O'D'=HA'=r$，所以$OD=r$。因此AB为圆O的切线，它的长为m。所以符合题意。

［讨论］ 与$A'B'$距离为r的直线HK与以$A'B'$为弦、含$\angle\alpha$的弓形弧相交时，有两解；相切时有一解；无公共点时无解。

2089. 已知两个角$\angle BAC$和$\angle DEF$，向已知方向作一直线，使它被两角的两边所截的两部分之比为已知比$m:n$。

解 ［作图］ 设两边AC、ED的交点为O，过O向已知方向作直线BOY，与边AB相交于B。在直线BOY上取点Y，使$BO:OY$等于已知比$m:n$。过A作$AX\parallel BOY$，设AX与边ED交于X，XY和EF相交于S。过S作直线$PQRS\parallel BOY$，则$PQRS$为所求直线。



［证明］ $PQ:BO=AP:AB$，

$RS:OY=XS:XY$。

因AX、PS、BY互相平行，所以

$$AP:AB=XS:XY.$$

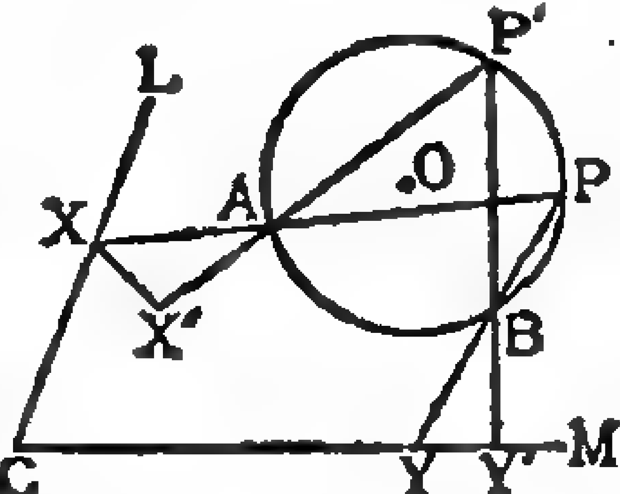
因此 $PQ:BO=RS:OY$，

即 $PQ:RS=BO:OY=m:n$。

因此$PQRS$为所求直线。

［讨论］ 如果X与E重合，Y不在EF上时，则无解；若X与E重合，Y在EF上，则有无数个解。其他情况下有一解。

2090. 已知角 LCM 和已知圆 O 上的两个定点 A、B. 在圆上求一点 P，连结 PA，PB，其延长线与 CL、CM 交于点 X、Y，使 $AX=BY$.



解 [作图] 由 B 作 CM 的垂线 BY'，延长 $Y'B$ 与圆 O 相交于 P'，在 $P'A$ 的延长线上取点 X'，使 $AX'=BY'$，若令过 X' 作 AX' 的垂线，与 CL 相交于 X，XA 的延长线与圆 O 相交于 P，PB 和 CM 相交于 Y，则 PX、PY 为所求直线.

[证明] 在 $\triangle AXX'$、$\triangle BYY'$ 中，

$\angle X'=\angle Y'=\angle R$，$\angle XAX'=\angle YBY'$

($\because$ $\angle P'AP=\angle P'BP$)，$AX'=BY'$.

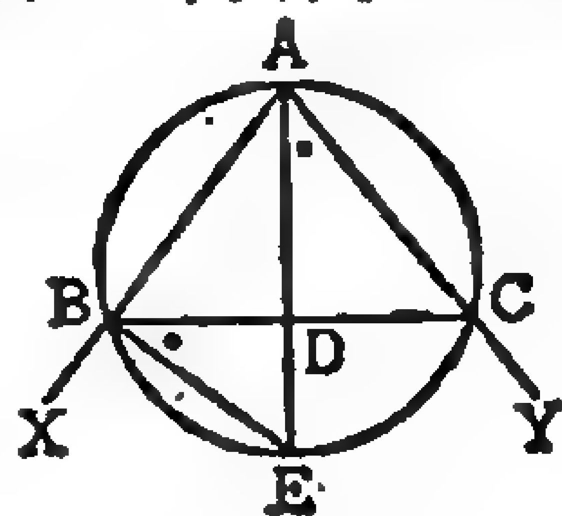
$\therefore$ $\triangle AXX'\cong\triangle BYY'$，

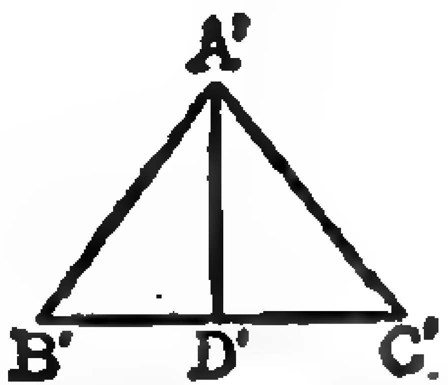
$AX=BY$.

[讨论] 若由 X' 向 AX' 作垂线与 LC 平行，无解；若与 LC 重合，有无数个解；其他情形恒有一解.

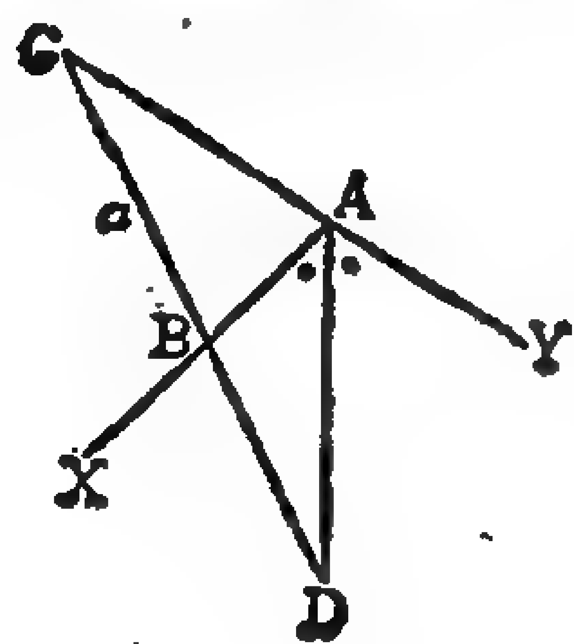
2091. 过已知角 XAY 的平分线上的已知点 D 作一直线，使它被角的两边所截得的部分 BC 的长等于已知长 a.

解 假定此题已解出，设 BC 为所求直线，则在 $\triangle ABC$ 中，BC 为定长，$\angle BAC$ 的大小一定，且 $\angle A$ 的平分线 AD 为定长，所以 $\triangle ABC$ (根据问题 **2307**) 可作出. 因此，作一个底边为 a，顶角等于 $\angle XAY$，顶角的平分线等于 AD 的三角形 $A'B'C'$. 在已知角的一边 AX 上取 $AB=A'B'$，设 BD 的延长线与 AY 的交点为 C，则 BDC 为所求直线.





2092. 过已知角 XAY 平分线上的已知点 D，求作一直线，与 AX 相交于 B，与 YA 的延长线相交于 C，且 $BC=a$.



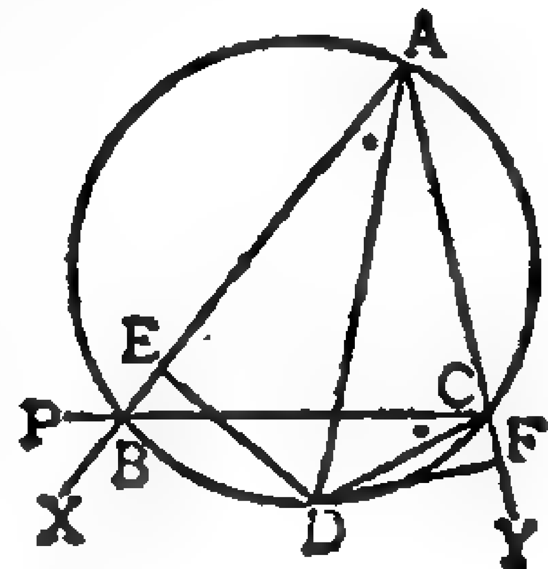
解 假定此题已解出，DBC 为所求直线，则在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$\angle BAC$ 与 $\angle XAY$ 的补角相等，因过 A 外角的平分线 AD 为定长，根据问题 **2303**，求得底边、顶角及其外角的平分线的长度，作 $\triangle A'B'C'$，象上题一样倒过来作图即可.

2093. 已知 OX、OY 为互相垂直的直线，P 为 $\angle XOY$ 的平分线上的点. 求作点 X 使线段 XPY 等于已知长 l.

解 假定此题已解出，则在 $\triangle OXY$ 中，$\angle XOY=\angle R$，$XY=l$，$\angle O$ 的平分线为定长，所以此题归结于问题 **2091**.

注 此题叫做帕普斯问题.

2094. 已知角 $\angle XAY$ 和一点 P. 过 P 作直线，与 AX、AY 相交于 B、C，使 $AB+AC=m$.



解 [分析] 设 PBC 为所求直线，作 $\triangle ABC$ 的外接圆，设 $\angle A$ 的平分线与圆相交于 D，由 D 作 AX、AY 的垂线 DE、DF，则

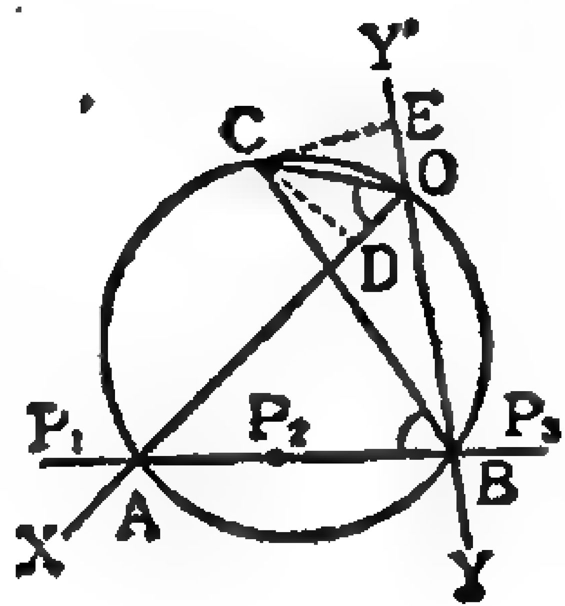
$$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC)=\frac{1}{2}m$$

(根据问题 **536**).

因此 E、F 的位置可定，D 的位置也可定，且 $\angle BCD=\angle BAD=\frac{1}{2}\angle A$. 所以可作图如下.

[作图] 在 AX、AY 上各取 AE、AF 等于 $\frac{1}{2}m$，过 E、F 分别作 AX、AY 的垂线，两垂线相交于 D. 以 PD 为弦作含有 $\frac{1}{2}\angle A$ 的弓形弧，设它与 AY 相交于 C，则 PC 为所求直线.

2095. 过已知点 P 作与已知角 $\angle XOY$ 的两边 OX、OY 相交于 A、B 的直线，使 $OA\sim OB=l$.



解 [分析] 设 $OA-OB=l$，PAB 为所求直线. (Y' 为 YO 的延长线上的一点) $\triangle OAB$ 的外接圆与 O 点上的外角 XOY' 的平分线相交

于C，从C向OX、OY'所作垂线为CD、CE，则

$$OD=OE=\frac{1}{2}(OA-OB)=\frac{1}{2}l,$$

点C的位置可定。且C、O、B、A四点共圆，所以$\angle CBA=\angle COA$，$\angle COA$一定。若令$\angle COA=\alpha$(即$\angle XOY'=2\alpha$)，当P在P_1的位置($\angle XOY'$的内部)时，或在P_2的位置($\angle XOY$的内部)时，则$\angle CBP=\angle CBA=\alpha$。又当$P$在$P_3$的位置($\angle X'OY$的内部)时，则$\angle CBP=180°-\angle CBA=180°-\alpha$，故无论在哪种情况下$\angle CBP$一定。因此可作图如下。

[作图] (i) 当$OA-OB=l$时。设YO延长线上的点为Y'，在OY'上取$OE=\frac{1}{2}l$，由E作OE的垂线与$\angle XOY'$的平分线相交于C。若P在P_1或P_2的位置时，则以PC为弦作含α($\angle XOY'$的一半)的弓形弧，若P在P_3的位置时，则以PC为弦作含$180°-\alpha$的弓形弧。这样作出的弧与边OY的交点为B，则连结P、B的直线PB即为所求直线。

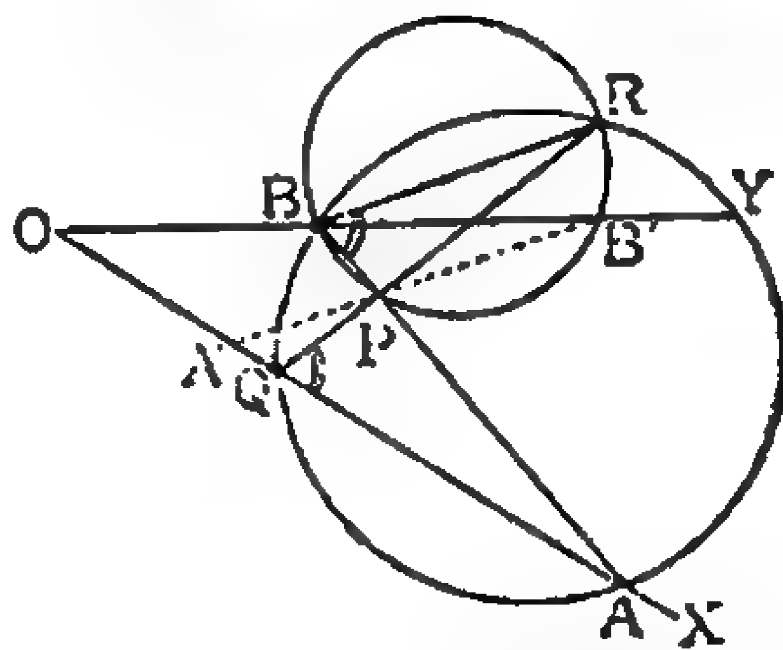
(ii) 当$OB-OA=l$时。设C关于点O的对称点为C'，若P在P_1的位置上，则以PC'为弦，作含$180°-\alpha$的弓形弧；若P在P_2或P_3的位置时，则以PC'为弦，作含α的弓形弧。这样作出的弧与OX相交于A，则直线PA即为所求直线。

[证明] 根据分析已很明显，故省略。

[讨论] 以PC为弦作含有α或$180°-\alpha$的弓形弧时，不与$\angle XOY$的边OY相交时，则在$OA-OB=l$的情形下，无解。以PC'为弦，含有$180°-\alpha$或α的弓形弧不与OX相交时，则在$OB-OA=l$的情形下，无解。一般在$OA-OB=l$和$OB-OA=l$的情形下，有两个解。但有时其中一个无解，有时两个都无解。

2096. 过已知角XOY内的已知点P，作一直线，与角的两边相交于A、B，使$PA\cdot PB$等于已知正方形m^2。

解 假定此题已解出，直线APB为符合条件的线段。过A、B作任意圆，与OX相交于Q，延长QP与此圆相交于R，则$PA\cdot PB=PQ\cdot PR$，且$PA\cdot PB=m^2$，所以$PQ\cdot PR=m^2$。因此作图如下。



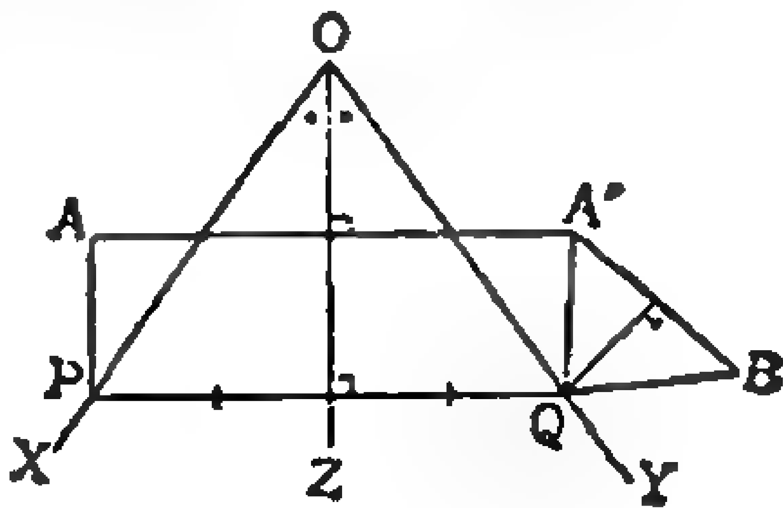
在OX上任取一点Q，在QP的延长线上取点R使$PQ\cdot PR=m^2$。以PR为弦作含$\angle PQA$($\angle PQA'$)的弓形弧与OY相交于$B(B')$，$BP(B'P)$的延长线与OX相交于$A(A')$，则

$$PA\cdot PB(PA'\cdot PB')=PQ\cdot PR=m^2.$$

如图，本题有AB、$A'B'$两解。

2097. 已知角$\angle XOY$和两个已知点A、B。作一直线PQ与OX、OY分别相交于P、Q，使$OP=OQ$，且$AP=BQ$。

解 [分析] 假定符合条件的直线PQ已作出。设点A关于$\angle XOY$的平分线OZ的对称点为A'，则P、Q也关于OZ对称，所以$A'Q=AP=BQ$，可以作图如下。



[作图] 作点A关于OZ的对称点A'，设线段$A'B$的垂直平分线与OY的交点为Q，过Q作OZ的垂线，与OX相交于P，则PQ为所求直线。

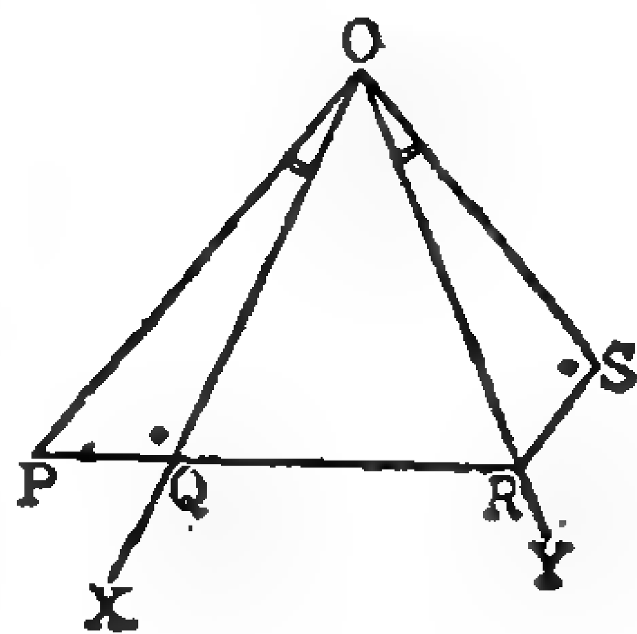
[证明] 分析中已很明确，故省略。

2098. 在已知角XOY外有已知点P，过P作一直线与OX、OY相交于点Q、R，使$OQ\cdot OR=m^2$。

解 [分析] 假设问题已解出，PQR为所求的直线。在OR上作与$\triangle OPQ$相似的三角形ORS，OR与OP为对应边，那么

$$OP:OQ=OP:OS,$$

$$\therefore\ OP\cdot OS=OQ\cdot OR=m^2.$$



由OP、m^2为一定，因此OS也一定。由

$$\angle ROS=\angle POQ\text{(定角)},$$

知 S 为定点，$\angle S=\angle OQP$，因而四边形 $OSRQ$ 为圆内接四边形.

$$\therefore\quad \angle SRQ+\angle SOQ=2\angle R.$$

由线段 PS 和 $\angle SRP$ 就可以确定 R 的位置. 故可作图如下.

［作图］ 在 $\angle XOY$ 的外侧作 $\angle YOS$ 等于 $\angle POX$，确定 S 点，使 $OP\cdot OS=m^2$. 以 PS 为弦，作含角等于 $\angle XOS$ 的补角的弓形弧，设弧与 OY 的交点为 R，则 PR 即为所求作的直线.

［证明］ 由作图知 $OSRQ$ 为圆内接四边形，所以 $\angle OSR=\angle OQP$. 再由作图，

$$\angle POQ=\angle SOR.$$

$$\therefore\quad \triangle POQ\backsim\triangle ROS,$$

$$OP:OQ=OR:OS,$$

$$OQ\cdot OR=OP\cdot OS=m^2.$$

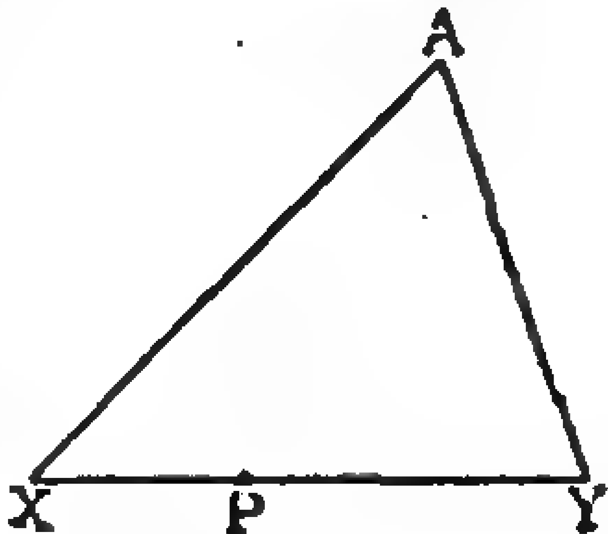
所以 PR 为所求的直线.

注1　若 P 在 $\angle XOY$ 内，则上面解中的点 S 就在 $\angle XOY$ 内，解法同上.

2 本题的应用，可见第13节.

2099. 过已知点 P 作直线，使与两直线 AX、AY 所成三角形 AXY 的面积等于已知面积.

解 由于 $\triangle AXY$ 的面积一定，$\angle XAY$ 又为定角，故 $AX\cdot AY$ 为定值，因此本题可归结为上题. 因为



$$\triangle AXY=\frac{1}{2}AX\cdot AY\sin\theta$$

$$(\text{设 }\angle XAY=\theta).$$

而
$$\triangle AXY=m^2\ (\text{一定}),$$

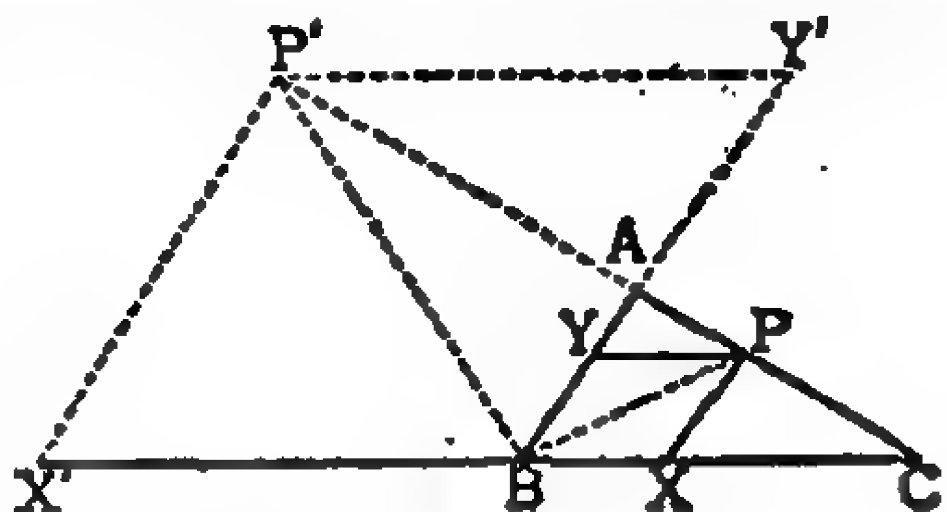
$$\sin\theta=a\ (\text{一定}).$$

因此，$AX\cdot AY$ 为定值，本题与问题 **2098** 类同.

7. 作与已知三角形的两边相交的直线

2100. 在已知三角形 ABC 的一边 AC 上求一点 P，过 P 作 AB、BC 的平行线与 BC、AB 分别相交于 X、Y，使 $PX=PY$.

解 若点 P 已求出，连结 PB，则 $PXBY$ 为菱形. 所以 BP 为 $\angle B$ 的平分线. 因此 $\angle B$ 或它的外角平分线与 AC 或其延长线的交点为 P 或 P'，即为所求的点. 其理由是: BP 为 $\angle B$ 的平分线，



由于 $PY=BY$，$BY=PX$，

$$\therefore\quad PX=PY.$$

点 P' 亦可同样证明.

2101. 求作 $\triangle ABC$ 的边 BC 的平行线 DE，使它与 AB、AC 相交于 D、E，且 $\triangle ADE$ 与 $\triangle EBC$ 的面积相等.

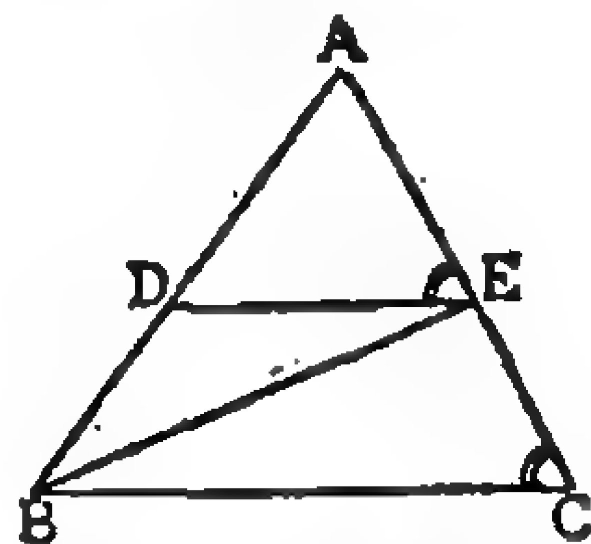
解 ［分析］ 假定直线 DE 已求得，则 $\angle AED=\angle C$，$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle EBC}$，因此

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle EBC}}=\frac{AE\cdot DE}{EC\cdot BC}=1\quad(\text{问题 }\mathbf{1456}),$$

但 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$，所以

$$\frac{AE^2}{EC\cdot AC}=1.$$

即　$AE^2=EC\cdot AC$.



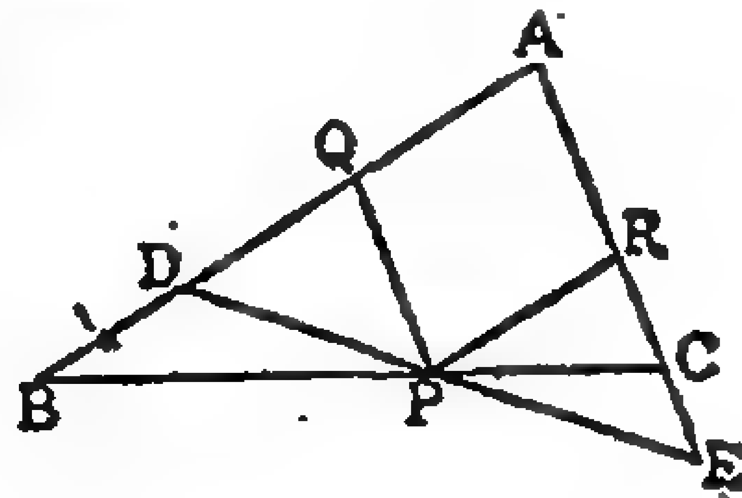
故可作图如下.

［作图］ 在 AC 上求点 E，使 $AE^2=EC\cdot AC$（问题 **1934**），过 E 作 BC 的平行线，交 AB 于点 D，则 DE 即为所求的直线.

2102. 在 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上求一点 P，使过该点所作另外两边的平行线所成的平行四边形的周长等于定长 l.

解 假定 P 点已求得，过 P 作 AC、AB 的平行线 PQ、PR，与 AB、AC 分别相交于 Q、R. 则

$$PQ+PR=\frac{1}{2}l.$$

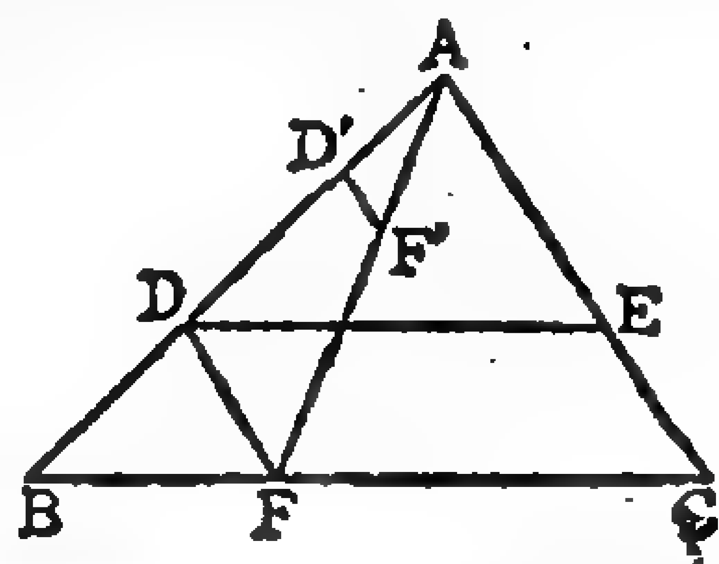


由此可作图如下.

［作图］ 在 AB、AC 或其延长线上分别取等于 $\frac{1}{2}l$ 的线段 AD、AE，则 DE 与 BC 的交点 P 即为所求.

2103. 作与已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 平行的直线，与 AB、AC 分别相交于 D、E，使 $AD=2EC$.

解　[分析]　假定此题已解得，作 $DF \parallel EC$，则 $DFCE$ 为平行四边形。



$$DF=EC,$$

$\therefore\quad AD=2DF.$

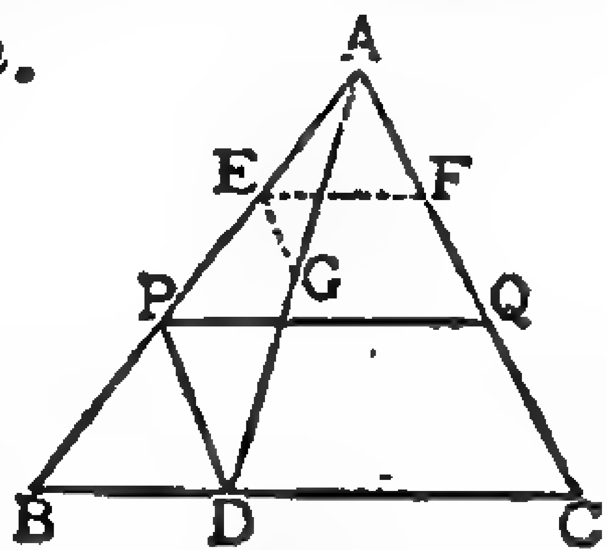
且 $\angle ADF=2\angle R-\angle A.$

所以 $\triangle ADF$ 的形状是确定的，因而点 F 的位置也可确定。

[作图]　在 AB 上任取一点 D'，作 $D'F' \parallel AC$，且 $D'F'=\frac{1}{2}AD'$。连结 AF'，延长 AF' 与 BC 相交于 F，过 F 作 AC 的平行线与 AB 相交于 D，作 $DE \parallel BC$ 与 AC 相交于 E，则 DE 即为所求直线。

[证明]　略。

2104.　已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 上有一点 D．求作边 BC 的平行线与 AB、AC 相交于 P、Q，使 $PQ:PD=m:n$。



解　[作图]　过 AB 上的任意一点 E 作 BC 的平行线与 AC 相交于 F。以 E 为圆心，以 $\frac{n}{m}\cdot EF$ 长为半径作圆弧与 AD 相交于 G。作 $DP \parallel GE$，与 AB 相交于 P，由 P 作 BC 的平行线，与 AC 相交于 Q，则 PQ 即为所求直线。

[证明]　$EG \parallel PD$, $EF \parallel PQ$.

$$\therefore\quad \frac{EG}{PD}=\frac{AE}{AP}=\frac{EF}{PQ},$$

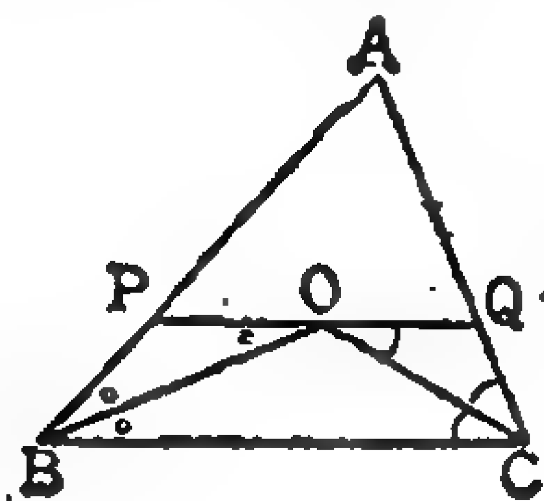
$$\therefore\quad \frac{PQ}{PD}=\frac{EF}{EG}=\frac{m}{n}.$$

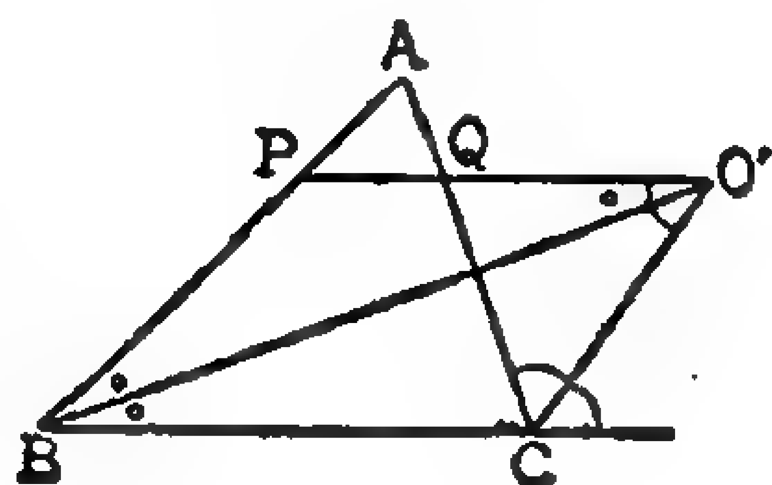
因此 PQ 为所求直线。

2105.　在 $\triangle ABC$ 中作直线 $PQ \parallel BC$，与边 AB、AC 分别相交于 P、Q．使

(1) $PQ=PB+CQ$,　(2) $PQ=PB-CQ$.

解　(1) 若 PQ 通过 $\triangle ABC$ 的内心，则有 $PB+CQ=PQ$.



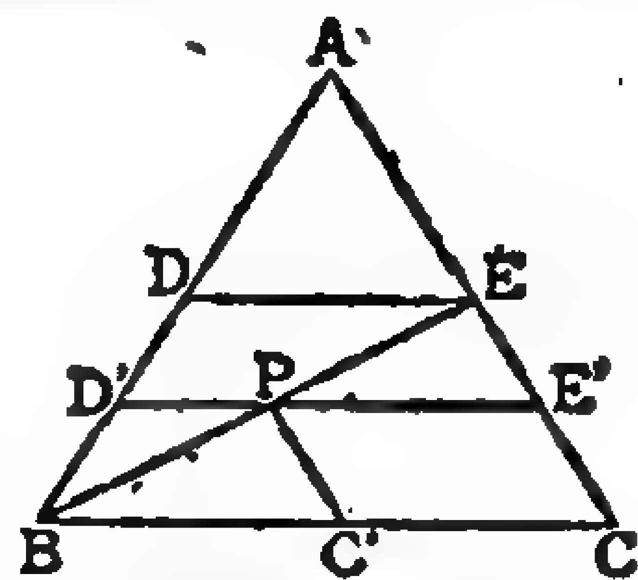


(2) 过 $\angle B$ 所含的 $\triangle ABC$ 的旁心 O' 作 BC 的平行线，与 AB、AC 相交于 P、Q，则 $PB=PO'$, $QC=QO'$，因此

$$PB-QC=PO'-QO'=PQ'.$$

2106.　作 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的平行线，与 AB、AC 分别相交于 D、E，使 DE 成为 DB 和 EC 的比例中项。

解　[作图]　作任意直线 $D'E' \parallel BC$，与 AB、AC 相交于 D'、E'，在 $D'E'$ 上取点 P，使



$$D'P^2=BD'\cdot E'C.$$

延长 BP 与 AC 相交于 E，过 E 作 BC 的平行线，与 AB 相交于 D，则 DE 即为所求直线。

[证明]　过 P 作 AC 的平行线，与 BC 相交于 C'，则 $PC'=E'C$。根据作图，$D'P^2=BD'\cdot E'C$。所以 $D'P^2=D'B\cdot PC'$。又四边形 $BDEC$ 与四边形 $BD'PC'$ 相似，

$$\frac{BD}{BD'}=\frac{DE}{D'P}=\frac{EC}{PC'},$$

$$\therefore\quad DE^2=DB\cdot EC.$$

注　这种作图法叫做相似法。

2107.　作已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 的平行线，与 AB、AC 分别相交于 D、E，使

(i) $DE=2DB+3EC$,

(ii) $DE=m\cdot DB-n\cdot EC$,

(iii) $DE^2=DB^2+EC^2$.

解　同上题，先作任意直线 $D'E'$ 平行 BC，在 $D'E'$ 上取符合条件的点 P 即可。即根据上题的图，取点 P，使

(i) $D'P=2D'B+3E'C$,

(ii) $D'P=m\cdot D'B-n\cdot E'C$,

(iii) $D'P^2=D'B^2+E'C^2$.

连结 BP，延长 BP 与 AC 相交于 E，过 E 作 BC 的平行线，与 AB 相交于 D 即可。

[证明]　同上题。

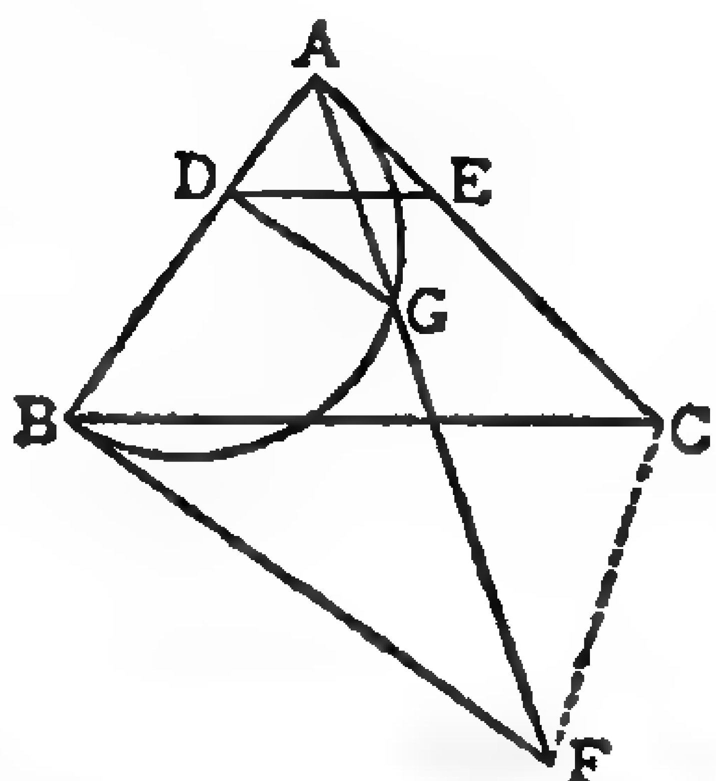
2108.　作 $\triangle ABC$ 的边 BC 的平行线，与 AB、AC 交于点 D、E，使 $DE^2=AD\cdot BD$.

解　[分析]　假定所求直线 DE 已作出，以 AB 为直径的半圆与过点 D 且垂直于 AB 的直线相交于 G，则

$$DG^2=AD\cdot DB,$$

又 $DE^2=AD\cdot DB$,

$\therefore\quad DG=DE$。



过点 B 所作 AB 的垂线，与 AG 的延长线的交点为 F，则

$$\frac{DG}{BF}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC},$$

$\therefore\quad BC=BF$。

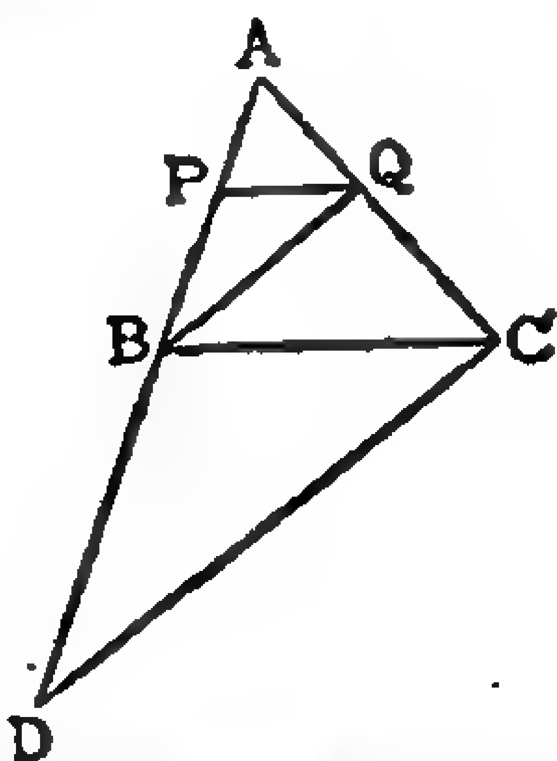
因此可作图如下。

[作图] 过 B 作 AB 的垂线，在垂线上截取 $BF=BC$，以 AB 为直径作半圆，与 AF 相交于 G，过 G 作 AB 的垂线 GD，过 D 作 BC 的平行线，与 AC 相交于 E，则 DE 即为所求直线。

[证明] 略。

2109. 作 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的平行线与 AB、AC 分别相交于 P、Q，使

$AP^2+PQ^2=PB^2$。



解 [作图] 求线段 m，使 $AB^2+BC^2=m^2$. 延长 AB 至 D，使 $BD=m$，连结 CD，过 B 作 $BQ\parallel DC$，BQ 与 AC 相交于 Q，作 $QP\parallel CB$，则 PQ 为所求直线。

[证明] 根据作图，

$$AB^2+BC^2=BD^2。\qquad ①$$

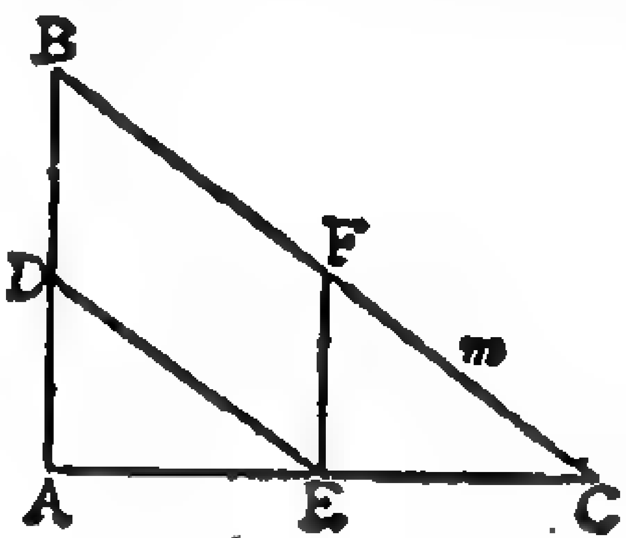
因为 $\triangle APQ\backsim\triangle ABC$，$\triangle PBQ\backsim\triangle BDC$。所以

$$\frac{AB}{AP}=\frac{BC}{PQ}=\frac{BD}{PB}。\qquad ②$$

根据①、②，$AP^2+PQ^2=PB^2$。

2110. 作直角三角形 ABC 的斜边 BC 的平行线 DE，与 AB、AC 或其延长线相交于 D、E，使 BD^2+CE^2 等于已知正方形 m^2。

解 [分析] 设 BC 的平行线与 AB、AC 或其延长线分别相交于 D、E。过 E 作 AC 的垂线与 BC 相交于 F，则



$EF^2+EC^2=FC^2$,

且 $EF=BD$。

因此

$BD^2+EC^2=FC^2$。

故可作图如下。

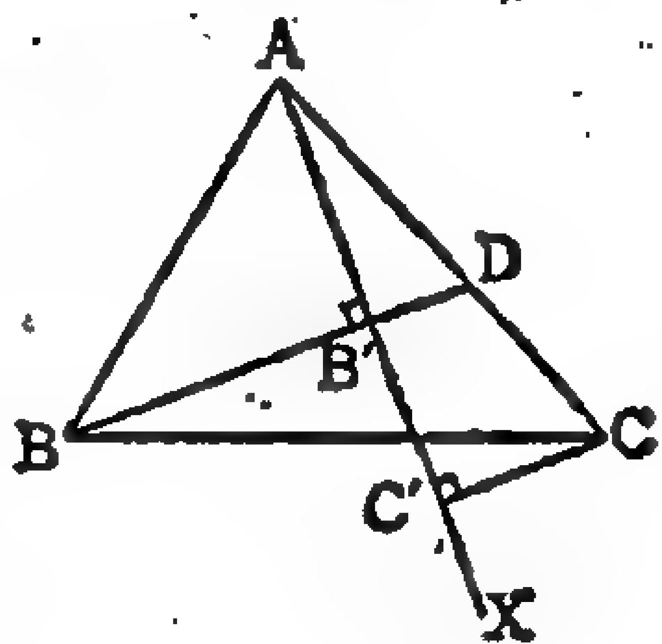
[作图] 在 BC 或其延长线上取点 F，使 $CF=m$，过 F 作 AC 或其延长线的垂线，其垂足为 E。过 E 作 BC 的平行线，与 AB 或其延长线相交于 D，则 DE 即为所求直线。

[证明] $BC\parallel DE$，DB、EF 都与 AC 垂直，所以 $DB\parallel EF$. 因而 $DB=EF$.

$\therefore\quad DB^2+CE^2=EF^2+CE^2=CF^2=m^2$。

2111. 过已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线，再过 B、C 作此直线的垂线，垂足分别为 B'、C'，使 $AB':AC'=m:n$。

解 [分析] 设所求直线 AX 已作出，过点 B 和 C 作 AX 的垂线的足为 B'、C'，则 $BB'\parallel CC'$. 设 BB' 的延长线与 AC 相交于 D，则



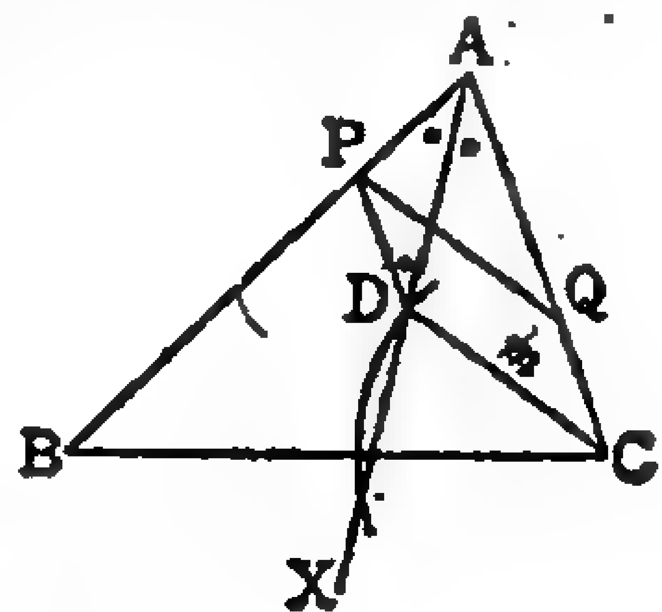
$AD:AC=AB':AC'$
$=m:n$。

因 AC 为定长，所以 D 为定点。故可作图如下。

[作图] 在 AC 上求点 D，使 $AD:AC=m:n$。作直线 AX 垂直于 BD，则 AX 即为所求直线。

[证明] 略。

2112. 作一直线与 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 分别交于 P、Q，使 $PQ=m$，且 $AP=CQ$。



解 [分析] 假定符合条件的直线 PQ 已作出。将 PQ 平移到 CD，则 $PD=CQ=AP$。

$\therefore\quad \angle PAD=\angle PDA$,

又 $PD\parallel AC$，所以 $\angle PDA=\angle DAC$。因此 AD 为 $\angle A$ 的平分线。又 $CD=PQ=m$，因而 CD 为定长。由这两个条件可作图如下。

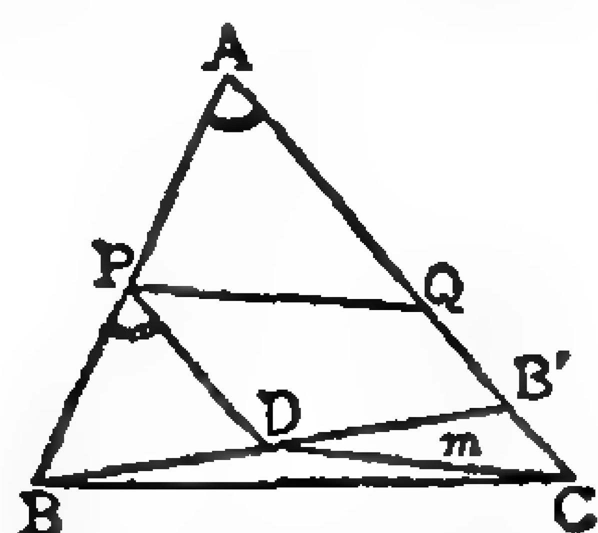
[作图] 作 $\angle A$ 的平分线。以 C 为圆心、m 为半径作圆，与 $\angle A$ 的平分线相交于 D，过 D 作 AC 的平行线与 AB 相交于 P，过 P 作 DC 的平行线与 AC 相交于 Q，则 PQ 即为所求直线。

[证明] 分析中已很清楚，故省略。

2113. 作一直线与已知 $\triangle ABC$ 的两边

AB、AC 相交于 P、Q，使 $PQ=m$，$BP=CQ$.

解 ［分析］ 假定 PQ 为所求直线。过 C 作等于 PQ 且与它平行的线段 CD，连结 PD，则 $CD=PQ=m$，$PD=QC=PB$，且 $\angle BPD=\angle A$（一定）. 设 BD 的延长线与 AC 相交于 B'，则 $AB=AB'$.故可作图如下.



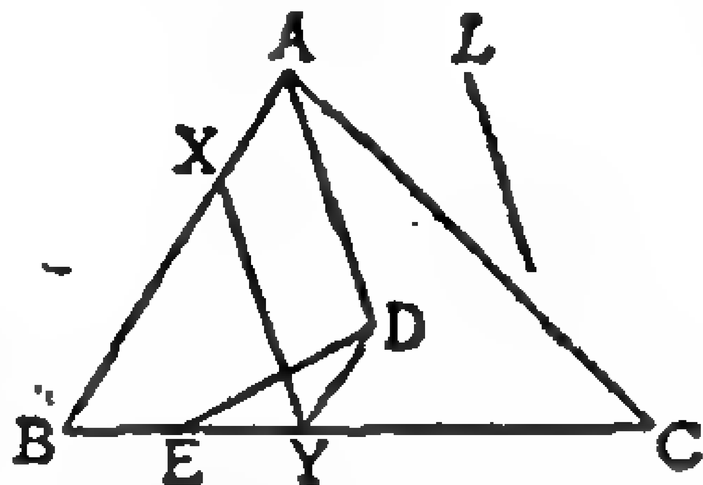
［作图］ 在 AC 或其延长线上取 $AB'=AB$，再以 C 为圆心、m 为半径作圆弧，与 BB' 相交于 D. 过 D 作 AC 的平行线与 AB 相交于 P；过 P 作 DC 的平行线与 AC 相交于 Q，则 PQ 即为所求直线.

［证明］ 根据分析已很明确，故省略.

注 若 $AB:AB'=m:n$，则可变成 $BP:CQ=m:n$ 的作图.

2114. 作一条与定直线 L 平行的直线与已知 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC，相交于 X、Y，并使 $AX+YC$ 等于定长 l.

解 ［分析］ 假定所求直线 XY 已作出，过 A 作与 XY 平行且相等的直线 AD，连结 DY. 则 $AX=DY$. 然后在 BY 上截取 $EY=DY$，连结 ED，则



$$AX+YC=DY+YC=EY+YC=EC.$$

因此 $EC=l$，E 为定点. 又 $\triangle YED$ 为等腰三角形，所以

$$\angle DEC=\frac{1}{2}\angle DYC=\frac{1}{2}\angle B.$$

可作图如下.

［作图］ 过 A 向已知方向作 AD，在 BC 上截取 $CE=l$，过 E 作直线 ED，使

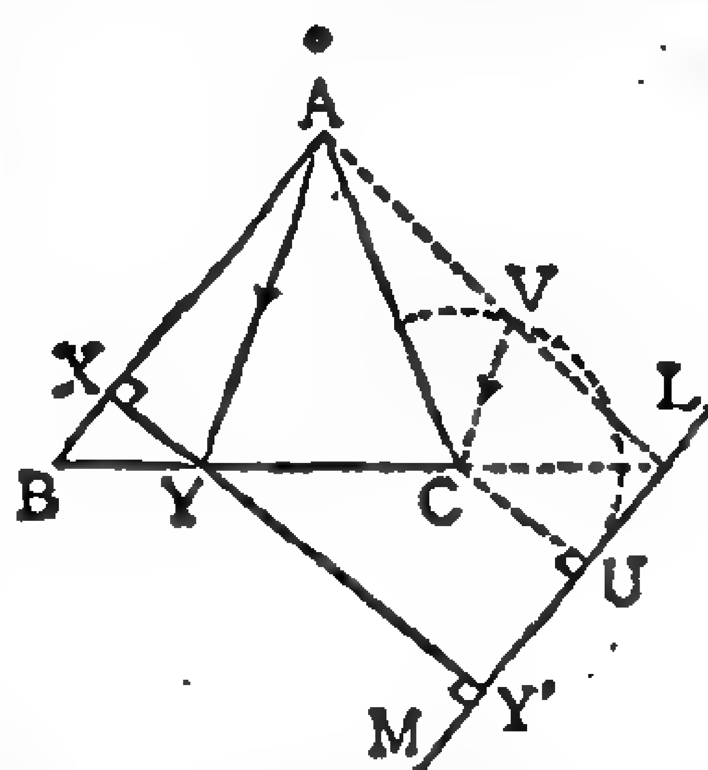
$$\angle DEC=\frac{1}{2}\angle B.$$

ED 与 AD 相交于 D. 过 D 作 $DY\parallel AB$，与 BC 相交于 Y. 作 $YX\parallel AD$ 与 AB 相交于 X，则 XY 为所求直线.

［证明］ 分析中已很明确，故省略.

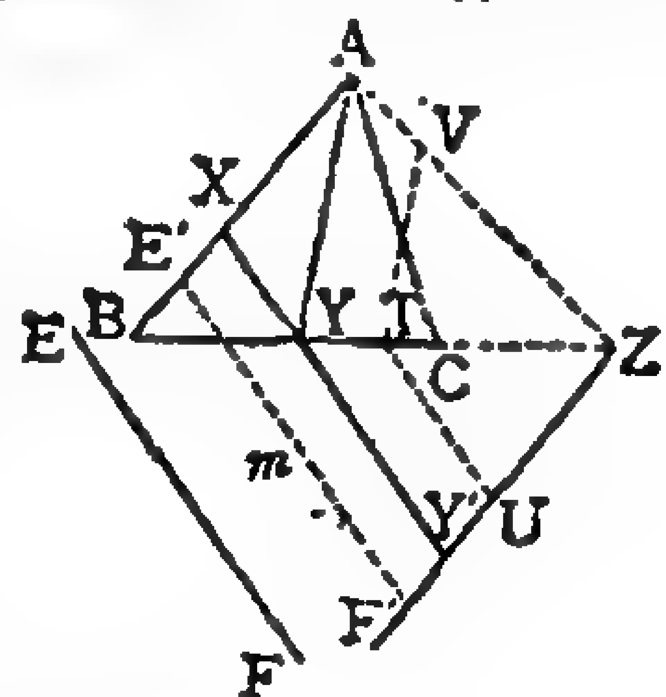
2115. 过三角形 ABC 的边 BC 上的一点 Y 作 AB 的垂线，设垂线足为 X，使 $XY+YA=m$.

解 设此题已解出，YA、YX 为所求直线. 在 XY 的延长线上取点 Y'，使 $YY'=YA$. 过 Y' 作 $LM\parallel AB$，则 $XY'=m$，又 $XY'\perp LM$，因此 LM 为已知直线. 本题变为在 BC 上求点 Y，过 Y 作已知直线 LM 的垂线 YY'，使 $YY'=YA$ 的作图题. 因此可根据问题 **2104** 和 **2057** 解法（图中虚线部分表示根据问题 **2104** 的解法）.



2116. 在 $\triangle ABC$ 中作一直线与已知直线 EF 平行，与 AB 相交于 X，与 BC 相交于 Y，使 XY 与 YA 之和等于已知长 m.

解 ［分析］ 设所求直线 XY 已作出，在 XY 的延长线上取点 Y'，使 $YY'=YA$，过 Y' 作 AB 的平行线 ZF'. 过 AB 上的任意一点 E' 作 EF 的平行线，与 ZF' 相交于 F'. 则



$$XY+YA=XY+YY'=E'F'=m.$$

因此可作图如下.

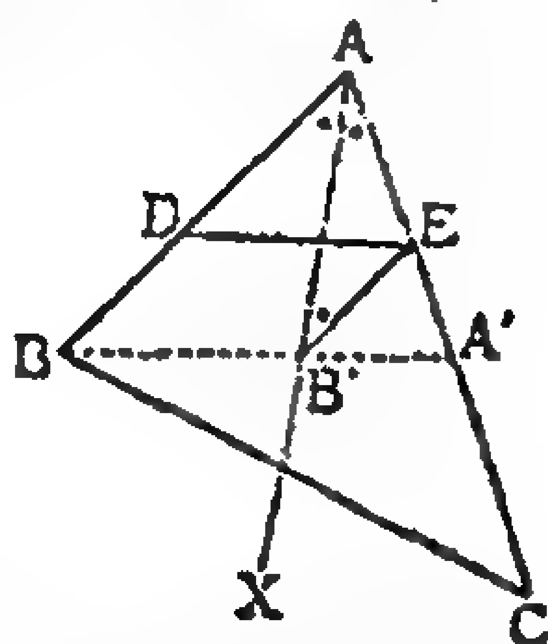
［作图］ 过 AB 上的任意一点 E'，作 EF 的平行线 $E'F'$，使 $E'F'=m$. 过 F' 点作 AB 的平行线，与 BC 或其延长线相交于 Z. 过 BC 上的任意一点 T，作 $E'F'$ 的平行线，与 $F'Z$ 相交于 U. 在 AZ 上取点 V，使 $TV=TU$. 过 A 作 TV 的平行线与 BC 相交于 Y，过 Y 作 $E'F'$ 的平行线与 AB 相交于 X，则 XY 为所求直线.

［证明］ 略.

2117. 作一直线与 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 分别相交于 D、E，使

$$AD=DE,\ AE=BD.$$

解 ［分析］ 如图，假定 DE 为所求直线. 将 BD 平移到 $B'E$，则



$$AE=BD=EB',$$

且 $AB\parallel EB'$. 所以 AB' 是 $\angle BAC$ 的平分

线．又设 BB' 的延长线与 AC 相交于 A'，因 $AD=DE$，所以 $AB=BA'$．因此可作图如下．

［作图］ 作 $\angle A$ 的平分线 AX，在 AC 上取点 A'，使 $AB=BA'$，设 AX 与 BA' 的交点为 B'．过 B' 作 AB 的平行线，与 AC 相交于 E，过 E 作 BA' 的平行线与 AB 相交于 D，则 DE 即为所求直线．

［证明］ 见分析．

［讨论］ 略．

2118． 在已知三角形 ABC 的边 AB 上求点 X，在 AC 上求点 Y，使 $AX=CY$，且 XY 与 BC 构成的角等于已知角 α．

解 ［分析］ 设此题已解出，XY 与 BC 的延长线相交于 F．作以 XY、YC 为两边的平行四边形 $XYCD$，则 $\angle BCD=\alpha$，且 $XD=YC=AX$，

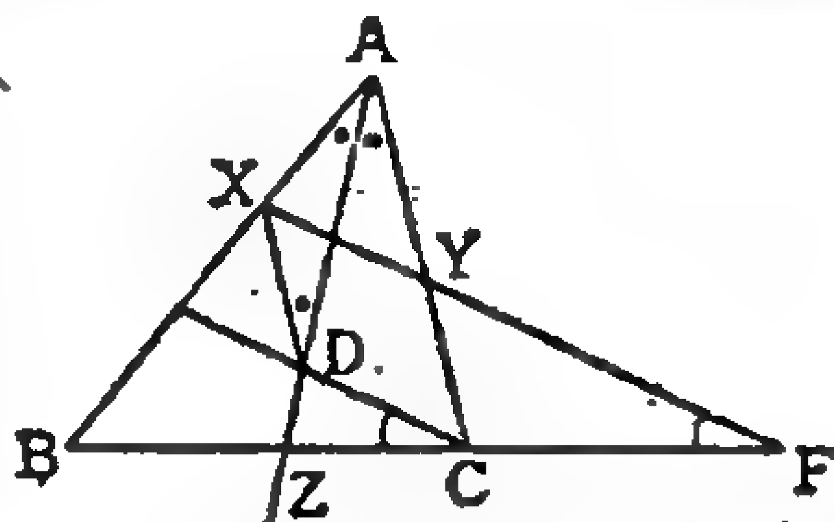
$$\therefore\quad \angle XAD=\angle XDA.$$

但 $$XD\parallel AC,$$

$$\therefore\quad \angle XDA=\angle DAY.$$

因此，AD 为 $\angle BAC$ 的平分线．故可作图如下．

［作图］ 作 $\angle A$ 的平分线 AZ．作直线 CD，使 $\angle BCD=\alpha$，CD 与 AZ 相交于 D．过 D 作 AC 的平行线 DX，与 AB 相交于 X，过 X 作 CD 的平行线，与 AC 及 BC 的延长线分别相交于 Y、F，则 XYF 为所求直线．



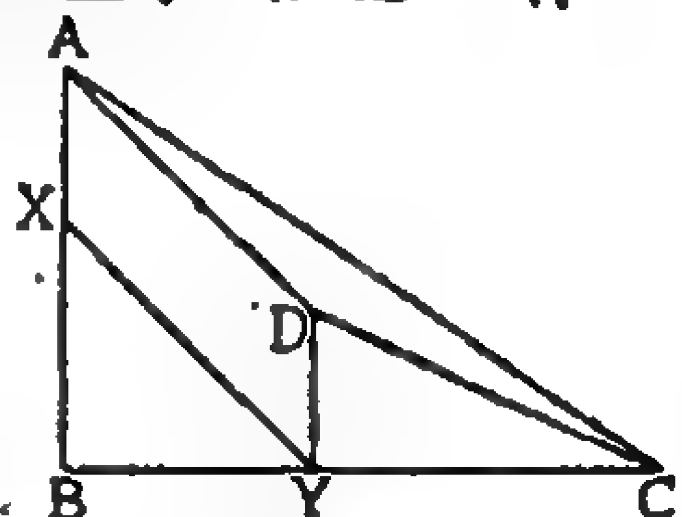
［证明］ 见分析．

［讨论］ 略．

2119． 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 为直角．作一线段 XY，使它的两端在 $\triangle ABC$ 的两边 AB、BC 上，且等于已知长 l，并使 $AX^2+XY^2+YC^2$ 等于已知正方形 m^2．

解 ［分析］ 设 XY 已求出，过 A 作 $AD\parallel XY$，且 $AD=XY$，连结 DY，则 $AX=DY$，$DY\perp BC$，所以

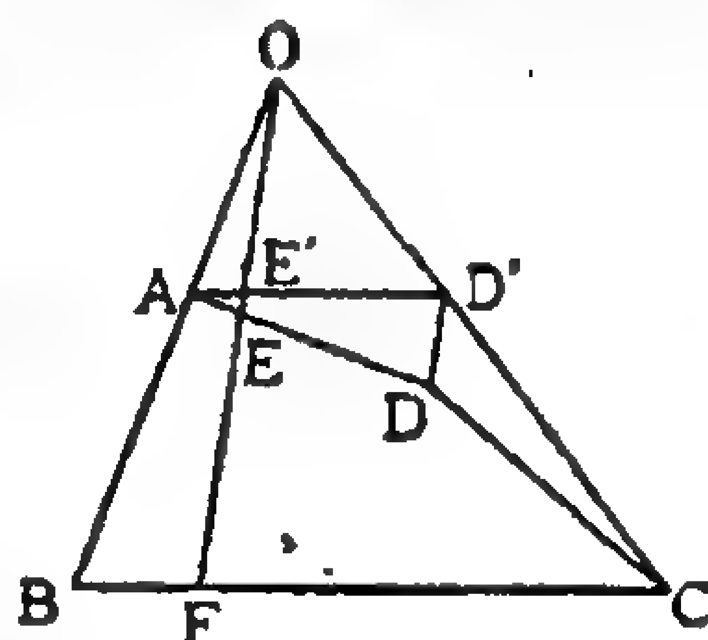
$$AX^2+XY^2+YC^2$$
$$=DY^2+AD^2+YC^2$$
$$=DC^2+AD^2=m^2,$$ 即 $DC^2=m^2-l^2$，



于是 DC 是以 m 为斜边、一边为 l 的直角三角形的另一边．因此 AD、DC 已知，D 点可定．故可作图如下．

［作图］ 在 $\triangle ABC$ 内求一点 D，使它与点 A 的距离为 l，与 C 的距离为 $\sqrt{m^2-l^2}$．过 D 作 BC 的垂线 DY，过 Y 作 DA 的平行线，与 AB 相交于 X，则 XY 即为所求直线．

2120． 作直线 EF 与已知直线平行，且把四边形 $ABCD$ 的对边 AD、BC 分成相同的比．



解 ［分析］ 假定 EF 已求出．过 D 作 DD' 与 EF 平行，过 A 作 BC 的平行线，分别与 FE、DD' 相交于 E'、D'，则

$$AE:ED=AE':E'D'.$$

因为 $$AE:ED=BF:FC,$$

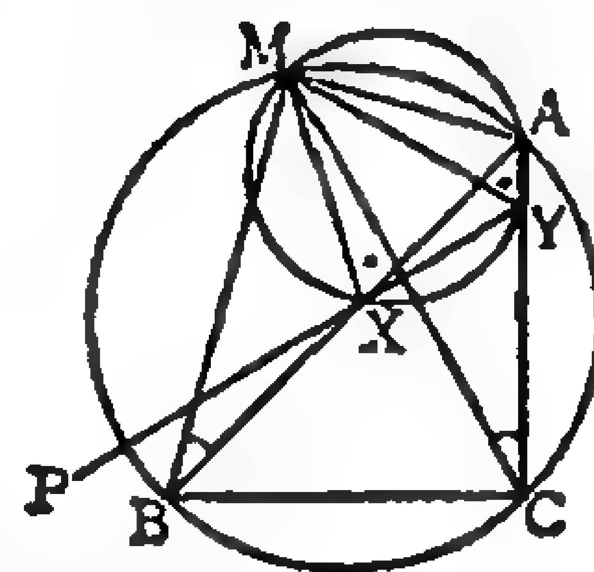
所以 $$AE':E'D'=BF:FC.$$

因此 BA、FE、CD' 共点，或互相平行．故作图如下．

［作图］ 过 A 作 $AD'\parallel BC$，与过 D 且和已知直线平行的直线 DD' 相交于 D'．设 BA 与 CD' 的交点为 O，过 O 作已知直线的平行线 OEF，则 OEF 即为所求直线．

［证明］ 略．

2121． 已知三角形 ABC 及该三角形外的一点 P．过 P 作一直线，与 AB、AC 分别相交于 X、Y，使 $BX=CY$．



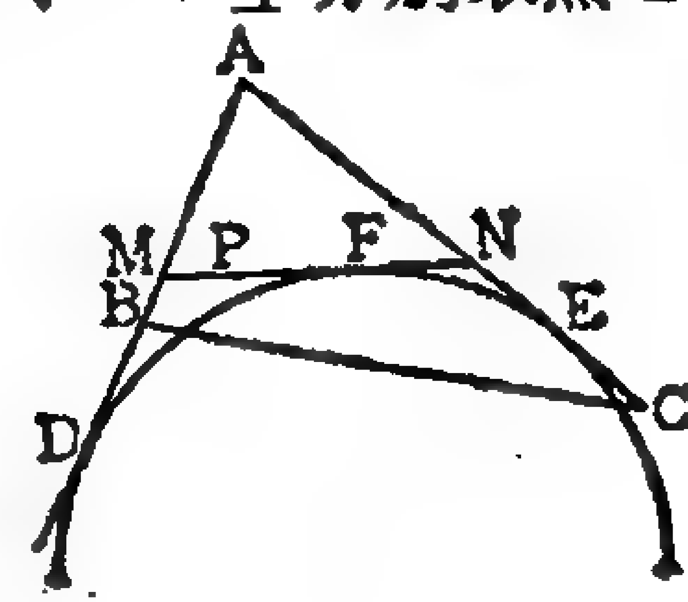
解 在问题 **2082** 中取 $m=n$，即可求得此题的解．

2122． 过 $\triangle ABC$ 内的一点 P，作一直线与 AB、AC 分别相交于 M、N，使 $BM+CN=MN$．

解 ［作图］ 在 AB、AC 上分别取点 D、E，使

$$AD=AE=\frac{1}{2}(AB+AC).$$

作与 AB、AC 分别相切于 D、E 的圆，再过



点 P 作此圆的切线，与 AB、AC 相交于 M、N，则 MPN 即为所求直线。

［证明］ $AB+AC=AD+AE$，所以 $BD=CE$，因此

$BM+CN=DM+EN=MF+NF=MN$。

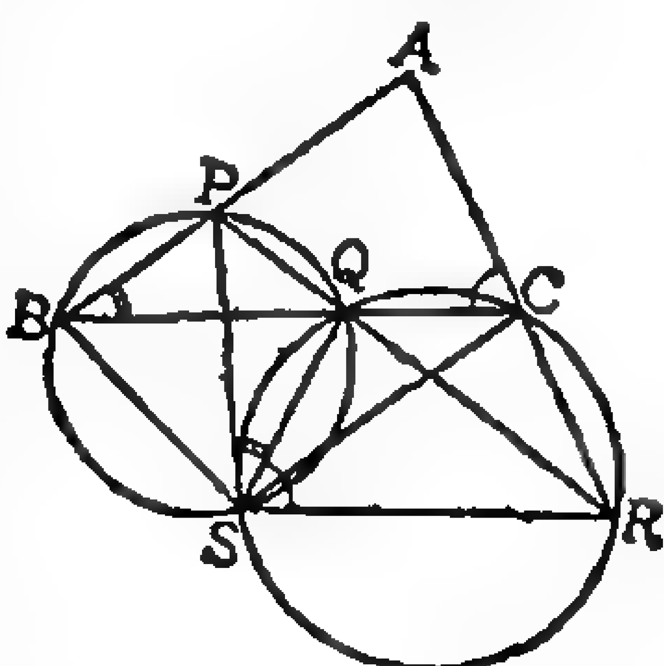
［讨论］ 若点 P 在圆 DFE 内，则无解。过点 P 的其他切线也是所求直线。

2123. 作已知三角形 ABC 的截线 PQR，与 AB、BC、AC 或其延长线分别相交于 P、Q、R，使 PQ、QR 各为已知长。

解 作此三角形的边及其截线所成的四个三角形的外接圆，则它们共点（参照问题631）。设此点为 S，连结 SB, SP, SQ, SC, SR。则

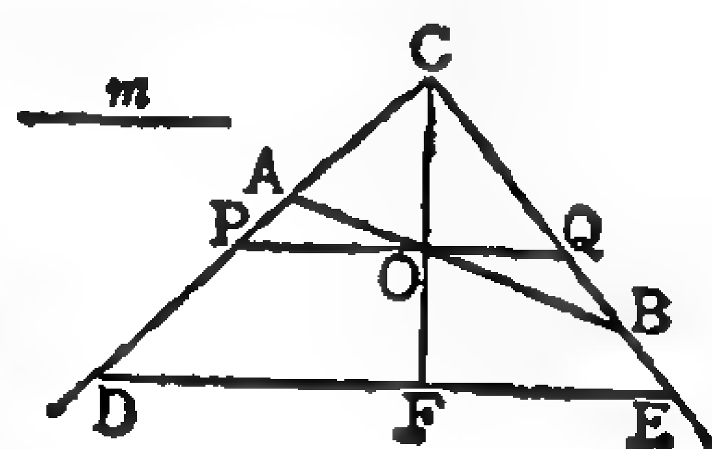
$$\angle PSQ=\angle PBQ, \angle RSQ=\angle ACB.$$

且 PQ 和 QR 为定长，所以 $\triangle SPR$ 可作出。因此底角 $\angle SPR$ 与 $\angle SRP$ 可知。因为 $\angle CBS$、$\angle BCS$ 分别等于上述两角，所以点 S 可定。又 SP、SR 的长度已知，故 P 和 R 的位置可定。



2124. 在已知直角三角形 ABC 的两直角边 AC、BC 或其延长线上分别求点 P 和 Q，使 PQ 的中点恰好在斜边 AB 上，且与另一已知直线 m 平行。

解 ［作图］ 作任意直线 $DE \parallel m$，与三角形的两边 CA、CB 或其延长线相交于 D、E。连结 DE 的中点 F 和 C，与 AB 相交于 O。过 O 作 $PQ \parallel DE$，分别与 CA、CB 或延长线相交于 P、Q，则直线 PQ 即为所求直线。



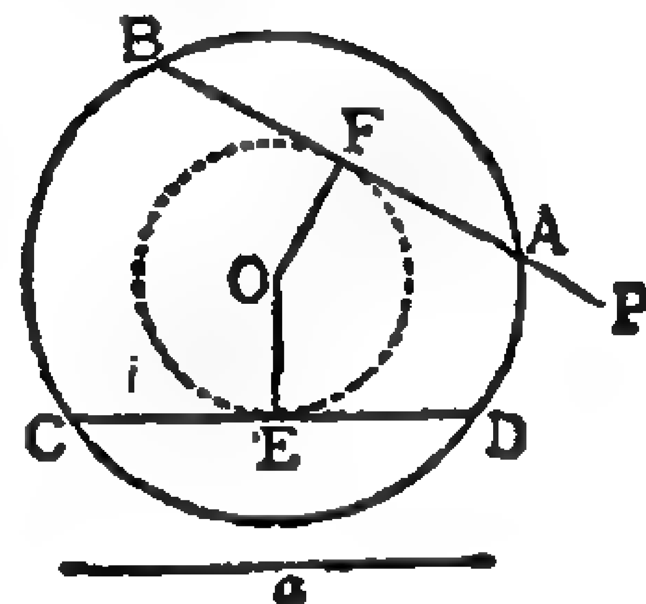
［证明］ $\because$ $PQ \parallel DE$, $DE \parallel m$，所以 $PQ \parallel m$，又 F 为直角三角形 DCE 的斜边上的中点，所以 O 为 PQ 的中点。

8. 作弦

2125. 过已知点 P，作已知圆的弦等于已知长 a。

解 ［作图］ 在圆心为 O 的已知圆上的任意一点 C 作弦 $CD=a$，过 O 作 CD 的垂线 OE，以 O 为圆心、OE 为半径作圆。过 P 作此圆的切线，与圆 O 相交于 A、B，则 AB 为所求直线。

［证明］ 设切点为 F，连结 FO，则 $OF \perp AB$，所以 OE、OF 为圆心 O 到弦 CD、AB 的距离，且 $OE=OF$。



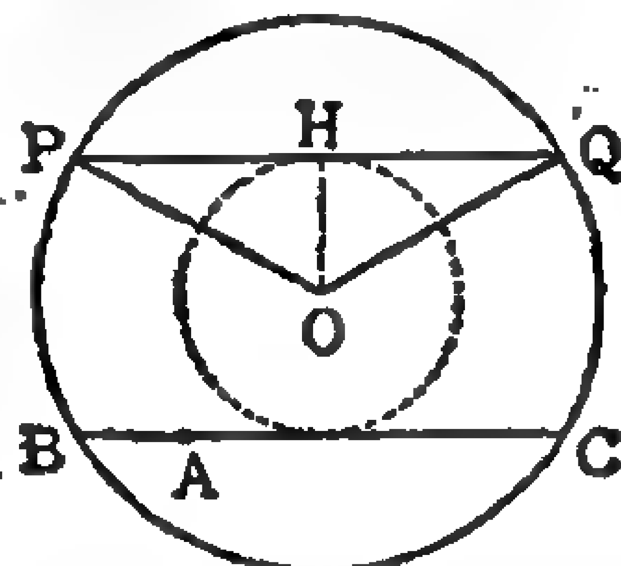
$$\therefore \quad AB=CD=a.$$

［讨论］ 若点 P 在以 OE 为半径的圆之外，则可作两条切线，所以有两解。若点 P 在圆上，则有一解。若 P 在圆内，则无解。

2126. 过已知圆 O 内的已知点 A 作弦 BC，将圆分成两部分，使两部分弧长的比为 2:1。若圆的半径为 r，求该弦的长。

解 ［作图］ 作圆心角为 120° 的弧 PQ，由圆心 O 作 PQ 的垂线 OH，以 O 为圆心，OH 为半径作圆。过 A 作此圆的切线与已知圆 O 相交于 B、C，则弦 BC 将圆周分成 2:1。

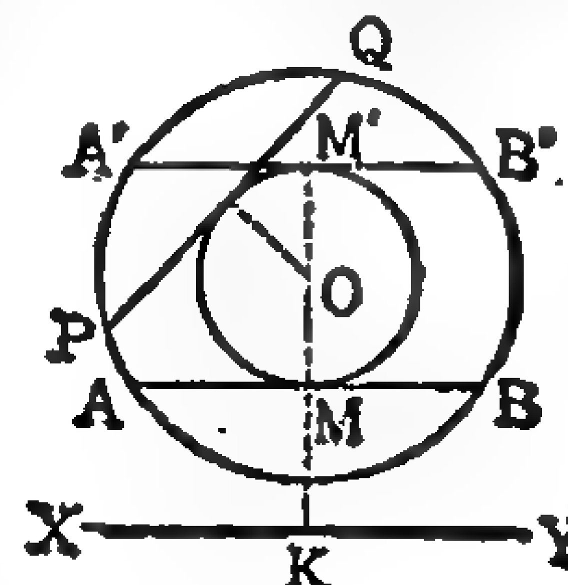
［证明］ 因为 $BC=PQ$，所以 BC 所对的圆心角为 120°，即 BC 将圆周分成 2:1。



［讨论］ 如果点 A 在圆心为 O、半径为 OH 的圆的内部，则无解；A 在圆上，则可作一条弦，有一解；A 在圆的外部，则可作两条弦，所以有两解。

2127. 在已知圆中作一弦，使它与已知直线 XY 平行，并等于已知长 l。

解 ［作图］ 在已知圆 O 内作长为 l 的弦 PQ，以 O 为圆心，作与 PQ 相切的同心圆。过 O 作已知直线 XY 的垂线 OK，与 PQ 相切的同心圆相交于 M、M'，过 M、M' 作圆 O 与 XY 平行的弦 AB、$A'B'$，则这两条弦都是所求的弦。

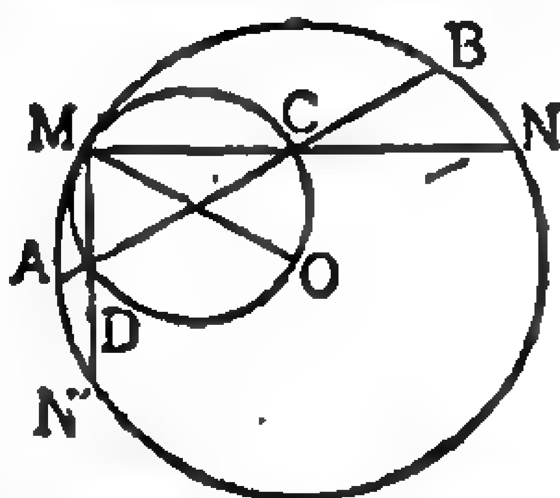


［证明］ 略。

2128. 过已知圆上的已知点 M 作弦 MN，使被已知弦平分。

解 设 C 为所求弦的中点，O 为圆心，则

$MC=CN$，所以 $OC\perp MN$。因此以 MO 为直径的圆与已知弦 AB 相交于 C、D，设 MC、MD 的延长线与圆 O 相交于 N、N'，显然 MN、MN' 即为所求的弦。



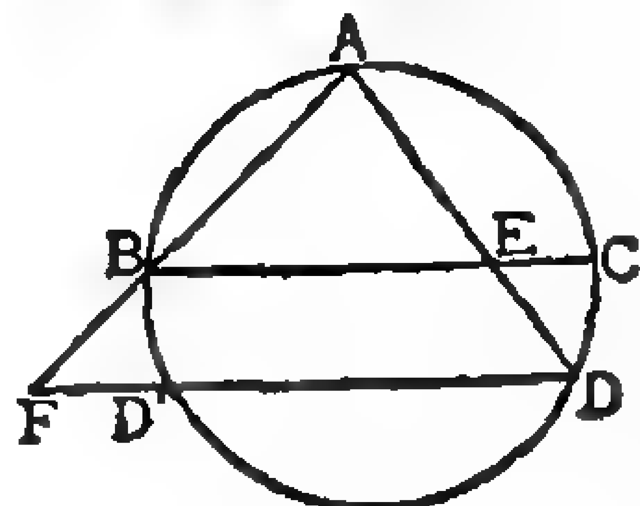
当以 MO 为直径的圆与 AB 相交时，有两解；相切时有一解；与 AB 不相交时无解。

2129. 已知圆上一点 A 及弦 BC，过 A 作弦 AD，与 BC 相交于 E，使 $DE=\frac{1}{3}AD$.

解 [作图] 延长 AB 至 F，使

$$BF=\frac{1}{2}AB,$$

过 F 作 BC 的平行线，与已知圆相交于 D、D'，则 AD、AD' 为所求弦。



[证明] 设 AD、BC 的交点为 E，因为 $BE\parallel FD$，所以

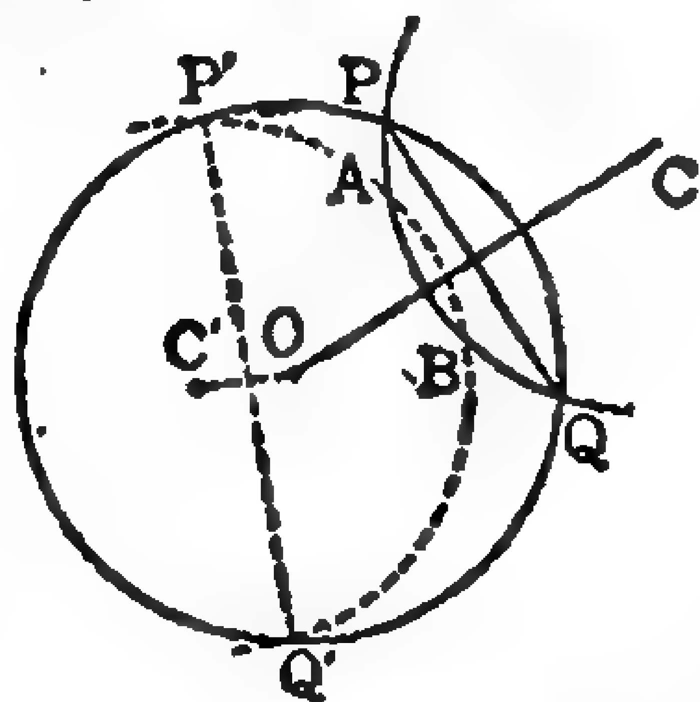
$$DE:AD=FB:AF=1:3.$$

$$\therefore\ DE=\frac{1}{3}AD.$$

[讨论] 要使本题有解，必须使过 F 所作 BC 的平行线与已知圆相交。因此，若有两个交点，则有两个解；有一个交点，则有一解；不相交，则无解。

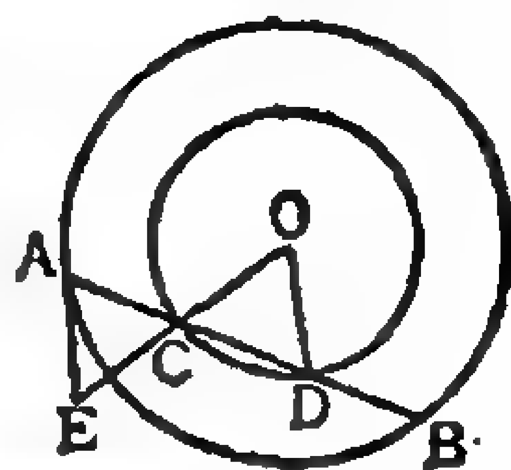
2130. 已知圆 O 内两点 A、B，若将此圆折迭，使折过来的弧过 A、B 两点，则应怎样确定折线？

解 设折线为 PQ，弧 $PABQ$ 的圆心为 C，则圆 C 和圆 O 相等，它们关于 PQ 对称。因此，以 A、B 为圆心、以圆 O 的半径 r 为半径作两个圆弧，设它们的交点为 C（在 AB 的两侧各有一个），则 OC 的垂直平分线 PQ 即为所求的折线。由于点 C 有两个，所以此题有两解。



2131. 作已知圆 O 的直径，使已知弦 AB 在这条直径上的射影等于已知长 l。

解 [作图] 设已知圆心为 O，已知弦为 AB，以 B 为圆心，以 l 为半径作圆，与以 AB 为直径的圆相交于 C。过 O 作与 BC 平行的直径 PQ，与 AC 的延长线相交于 M。设 B 在 PQ 上的射影为 N，则 MN 为 AB 的射影，且等于 l.



[证明] AB 为圆 ACB 的直径，所以

$$\angle ACB=\angle R,$$

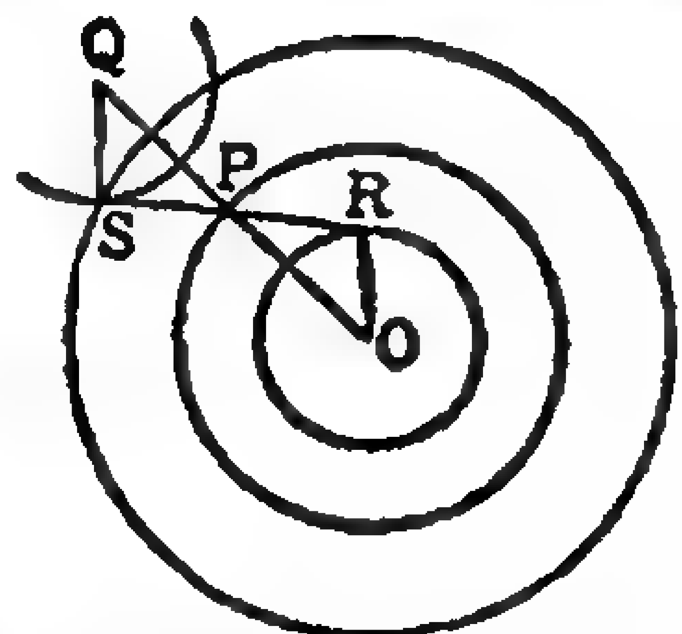
又 $$AM\perp MN,\ BN\perp MN,$$

$$\therefore\ MN=BC=l.$$

因此，MN 为 AB 的射影，且等于已知长 l.

2132. 已知两个同心圆，作外圆的弦，使被内圆所截的三部分相等。

解 [分析] 假定符合条件的弦 AB 已求出。设 AB 与内圆相交于 C、D，$AC=CD=DB$. 延长 OC 至 E，使 $OC=CE$，则 $AC=CD$，$OC=CE$，所以 $OAED$ 为平行四边形，$AE=OD=OC$. 因此，可作图如下。



[作图] 在内圆上任取一点 C，在 OC 的延长线上截取 $CE=OC$. 以 E 为圆心、EC 为半径作圆，与外圆相交于 A，延长 AC 与内圆相交于 D，与外圆相交于 B，则 AB 即为所求的弦。

[证明] 略。

[讨论] 如果以 E 为圆心，EC 为半径所作的圆和外圆相交，则有两个解；相切有一解；不相交时无解。

2133. 有三个同心圆。作一线段，使它的两端在内外两圆周上，而中间的圆将它截成两等分。

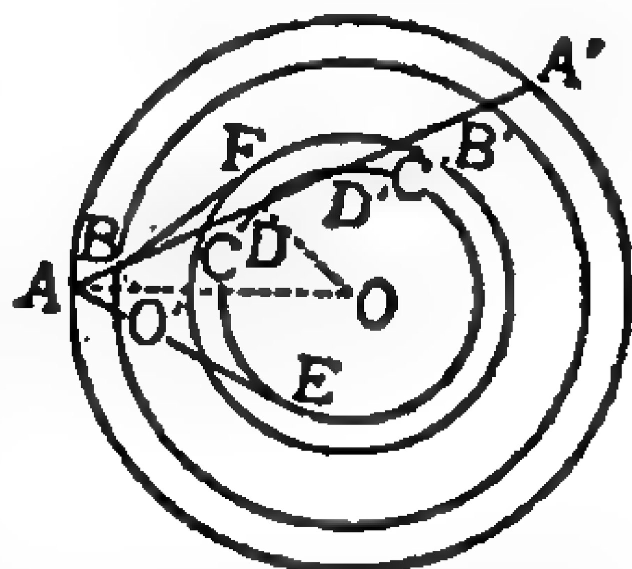
解 [作图] 过公共圆心 O 作任意直线 OQ，与中间的圆相交于 P，且 $OP=PQ$. 以 Q 为圆心作与内圆相等的圆与外圆相交于 S，连结 QS，作内圆的半径 OR 与 QS 平行。连结 SR，则 SR 即为所求直线。

[证明] 根据作图 $OR\parallel SQ$，$OR=SQ$，即 $QSOR$ 为平行四边形，且对角线 OQ 的中点 P

在中间的圆上，所以另一对角线 SR 过 P，且在 P 点被分为两等分。

2134. 已知四个同心圆，求作一直线，依次与四个圆交于 A、B、C、D，使 $AB=CD$.

解 ［分析］ 假定所求直线为 $ABCD$. 延长这条直线，设它与四个圆又相交于点 D'、C'、B'、A'. 过 A 作圆 D 的切线 AE，



过 B 作圆 C 的切线 BF（将同心圆由外向里依次称为圆 A，圆 B，…），则

$$AE^2=AD\cdot AD',\ BF^2=BC\cdot BC',$$

$$\because\quad AB=CD=D'C',$$

$$\therefore\quad AD'=BC'.$$

因此 $\qquad AE^2:BF^2=AD:BC.$

因为已知四个圆为同心圆，所以 AE、BF 的长度一定，所以 $AD:BC$ 一定，设它们之比为 $m:n$，则 $AD:(AD-BC)=m:(m-n)$.

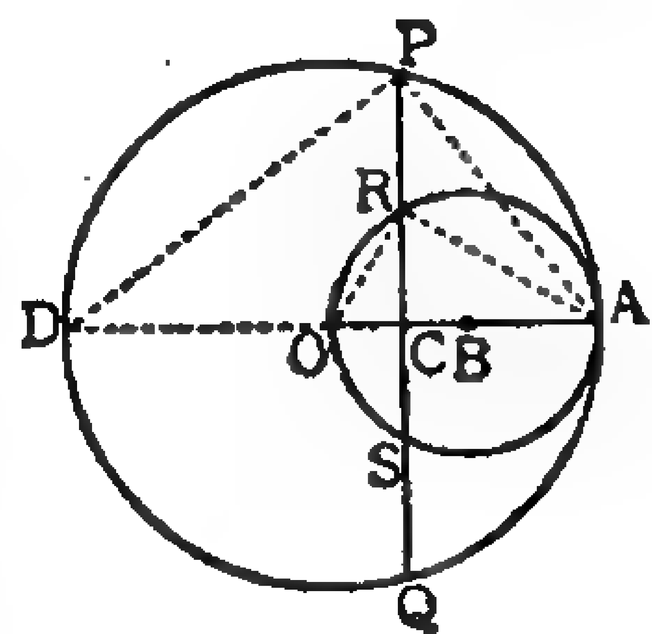
即 $\qquad AD:2AB=m:(m-n)$.

在 AO 上求点 O'，使 $O'B\parallel OD$，$AO:2AO'=m:(m-n)$. 因此可作图如下.

［作图］ 连结圆 A 上的一点 A 和圆心 O，在 AO 上求点 O'，使 $AO:2AO'=m:(m-n)$. 作 $O'B$ 使 $OD:O'B=m:(m-n)$，以 O' 为圆心，$O'B$ 为半径作圆，与圆 B 的交点之一为 B，连结 AB，则 AB 即为所求直线.

2135. 已知两圆内切于 A 点，内圆 B 的直径 OA 为外圆的半径，作弦 PQ 垂直于 OA，且被内圆截为三等分.

解 ［分析］ 假定所求弦 PQ 已作出，与 OA 相交于 C，与内圆相交于 R、S，则 $RC^2=OC\cdot AC$. 又 AO 的延长线与外圆相交于 D，则 $PC^2=DC\cdot AC$.



$$\therefore\quad \frac{RC^2}{PC^2}=\frac{OC\cdot AC}{DC\cdot AC}=\frac{OC}{OA+OC}.$$

$$\because\quad PR=RS=SQ,$$

$$\therefore\quad \frac{RC^2}{PC^2}=\frac{1}{9}.$$

$$\therefore\quad \frac{OC}{OA+OC}=\frac{1}{9},$$

$$OC=\frac{1}{8}OA.$$

故可作图如下.

［作图］ 在 OA 上取 $OC=\frac{1}{8}OA$，过 C 作与 OA 垂直的外圆的弦 PQ，则 PQ 即为所求的弦.

［证明］ 略.

2136. 求作已知圆的弦，使它的长等于已知长，而且它的延长线与另一已知圆相切.

解 ［作图］ 设已知圆的圆心为 O，另一圆的圆心为 O'，已知长为 l. 先作圆 O 的弦 $AB=l$，由 O 作 AB 的垂线 OC，再作以 OO' 为直径的第三个圆. 以 O' 为圆心，以圆 O' 的半径与 OC 的差为半径作圆与第三个圆相交于 D，延长 $O'D$ 与圆 O' 相交于 E. 连接 OD，过 E 作直线 $EF\parallel OD$，与圆 O 相交于 F、G，则直线 EFG 即为所求直线.

［证明］ 根据作图 $\angle ODO'=\angle R$，$EFG\parallel OD$，

$$\therefore\quad \angle O'EF=\angle R.$$

即直线 EFG 为圆 O' 的切线. 作 FG 的垂线 OH，根据作图，

$$O'E-OC=O'D,$$

$$\therefore\quad DE=OC.$$

因为四边形 $ODEH$ 是矩形，所以

$$OH=DE,$$

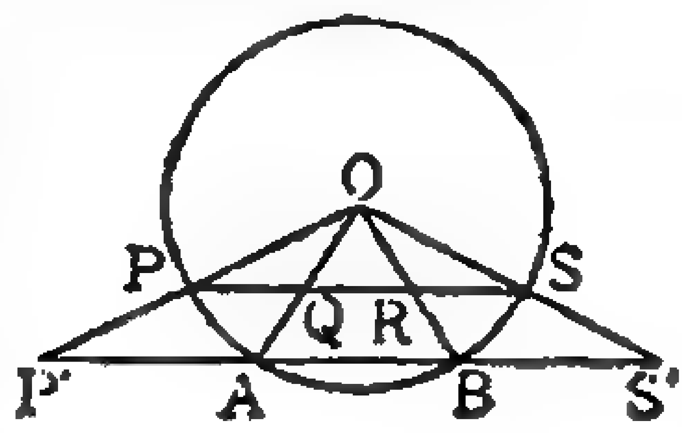
因而 $\qquad OC=OH,$

$$FG=AB=l.$$

因此直线 EFG 即为所求直线.

2137. 作圆 O 的弦，被已知两半径 OA、OB 三等分.

解 ［分析］ 假定所求弦 PS 已作出，设它与 OA、OB 相交于 Q、R，则 $PQ=QR=RS$. 这时 $OP=OS$，所以 $\triangle OPS$ 为等腰三角形，$\angle OPS=\angle OSP$.



$\therefore\quad \triangle OPQ\cong\triangle OSR$（两边及夹角相等）.

所以 $OQ=OR$，$\triangle OQR$ 也是等腰三角形，$QR\parallel AB$. 连结 AB 的直线与 OP、OS 的延

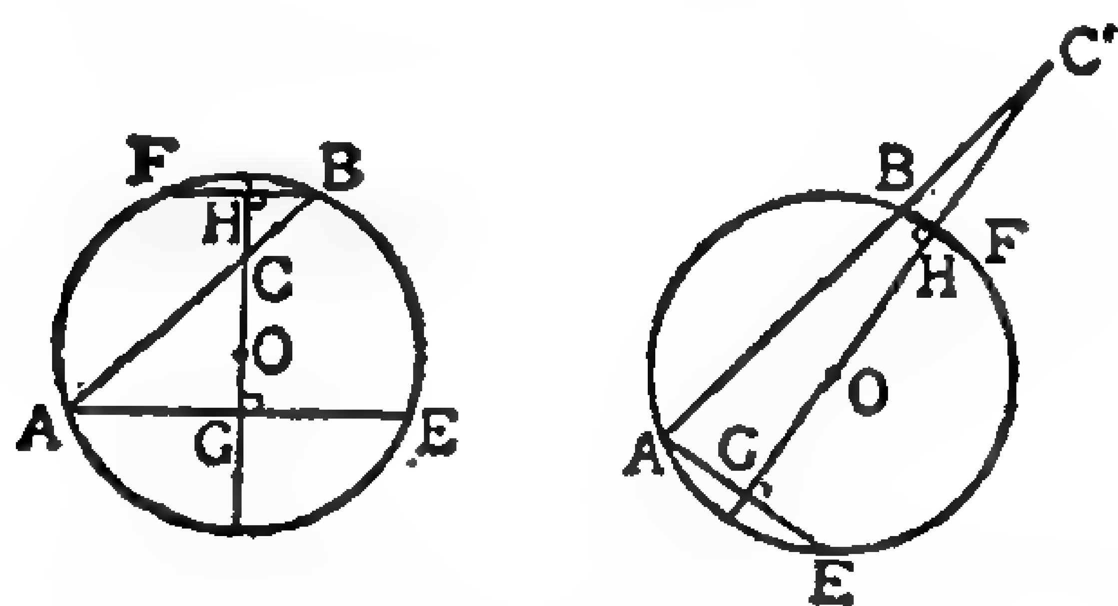
长线分别相交于 P'、S'，则 $P'S' \parallel PS$，所以 $P'A=AB=BS'$。因此，可作图如下。

［作图］ 连结 AB，将弦 AB 向两边延长，取 P'、S' 两点，使 $P'A=AB=BS'$，OP'、OS' 与圆弧的交点为 P、S，弦 PS 与半径 OA、OB 相交于 Q、R，则 $PQ=QR=RS$。

［证明］ 由于 $PS \parallel P'S'$，所以结论是显然的。

2138. 过已知圆上的两点 A、B，分别作互相平行的弦 AE、BF，使 $AE:BF$ 等于已知比 $m:n$。

解 ［作图］ 连结 AB，点 C、C' 把 AB 内分和外分成 $m:n$。过 C 作直径，再过 A、B 分别作与该直径垂直的弦 AE、BF。



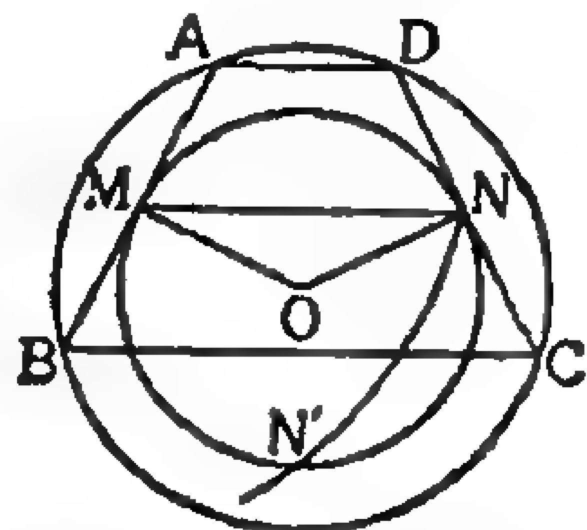
或过 C' 作直径，过 A、B 作与直径垂直的弦 AE、BF 亦可。无论哪种作法，AE、BF 都是所求的弦。

［证明］ 在第一种情况下，设 AE、BF 与过 C 的直径相交于 G、H，则 G、H 分别为各弦的中点，$AE \parallel BF$，所以

$$\frac{AE}{BF}=\frac{AG}{BH}=\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}.$$

当 AE、BF 与过外分点 C' 的直径垂直时，也可同样证明。

2139. 过已知圆上的两点 A、B 分别作互相平行的弦 AD、BC，使这两弦之和等于已知长 m。



解 ［分析］ 因为 $AD \parallel BC$，所以

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DC}.$$

因此从圆心到弦 AB、CD 的距离相等。设 AB、CD 的中点为 M、N，则 $OM=ON$。因为 $AD \parallel BC$，所以

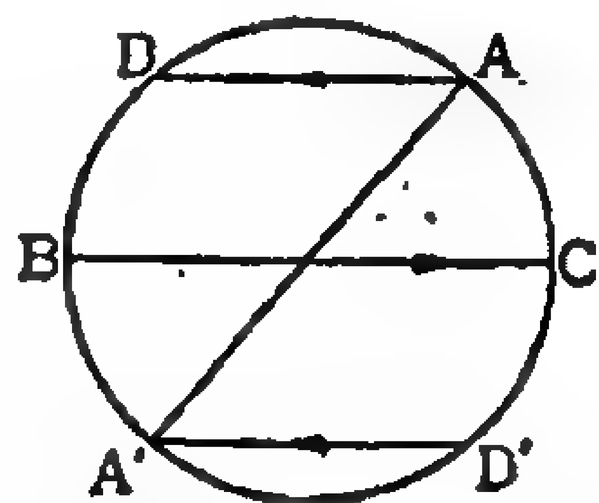
$$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{1}{2}m.$$

因此可作图如下。

［作图］ 连结 AB，设 AB 的中点为 M，以 O 为圆心、OM 为半径作圆。作此圆的弦 MN（或 MN'）等于 $\frac{1}{2}m$，过 A、B 分别作弦 AD、BC 平行于 MN，则 AD、BC 即为所求的弦。

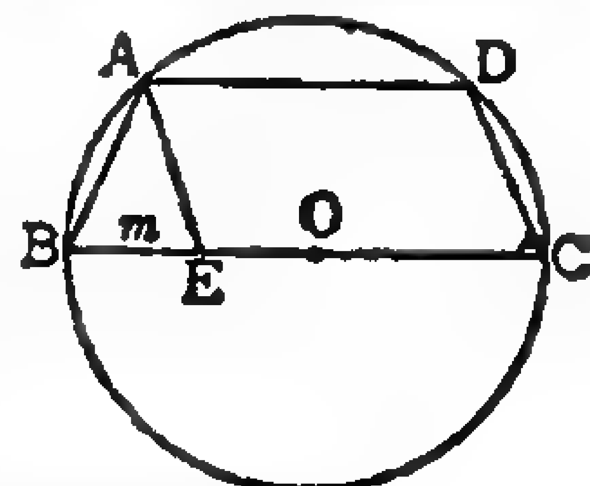
［证明］、［讨论］ 略。

注 上面是 AD 与 BC 方向相同时的解法。若如右图 AD 和 BC 方向相反，则可以从过 A 的直径的另一端 A' 作与 AD 平行的弦 $A'D'$，则 $AD=A'D'$，因此象上面一样作法，可以用点 A' 和 B，先求出 $A'D'$、BC，然后决定 AD、BC 即可。



2140. 过已知圆 O 上的两点 A、B 分别作相互平行的弦 AD、BC，使它们的差等于已知长 m。

解 ［作图］ 在圆 O 内求一点 E，使 $AE=AB$，$BE=m$。作过 B、E 的弦 BC，过 A 作弦 $AD \parallel BC$，则 AD、BC 即为所求的弦。



［证明］ $\because$ $AD \parallel BC$，

且 $DC=AB=AE$，

$\therefore$ $\angle ABE=\angle AEB$。

因为 $AB=DC$，所以

$\angle ABE=\angle DCE$，

$\therefore$ $\angle AEB=\angle DCE$。

因此 $AE \parallel DC$，$AECD$ 为平行四边形。

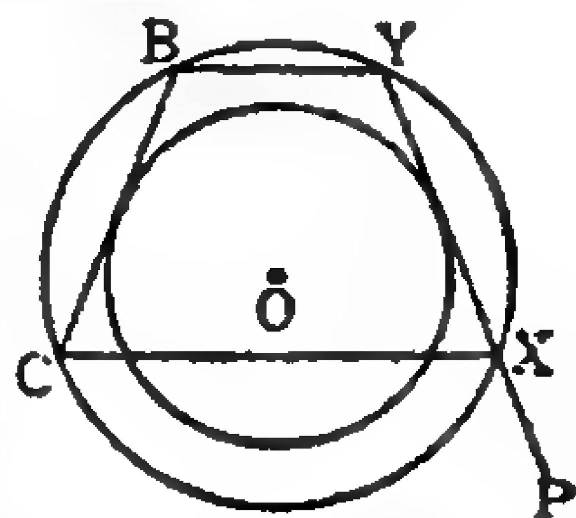
$\therefore$ $AD=EC$，

$$BC-AD=BC-EC=BE=m.$$

因此 BC、AD 为符合条件的平行弦。

2141. B、C 是已知圆 O 上的两定点，过 B、C 作平行弦 BY、CX，使直线 YX 过已知点 P。

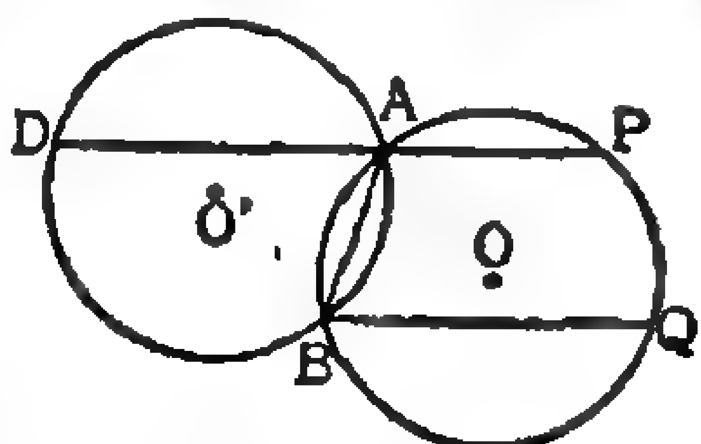
解 ［分析］ 设 $BY \parallel CX$，则 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{XY}$，即弦 $XY=BC$。因此以 O 为圆心，与 BC 相切的圆与 XY 也相切。



［作图］ 以 O 为圆心，作圆与 BC 相切，过 P 作此圆的切线与已知圆 O 相交于 X、Y，则 BY、CX 即为所求的弦。

2142. 过已知圆 O 上的两定点 A、B 作平行弦 AP、BQ，使 $AP\cdot BQ=K^2$。

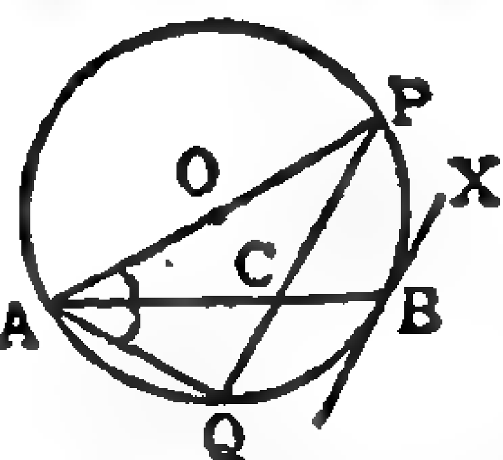
解 作圆 O 关于 AB 对称的圆 O'，过两圆的交点 A 作倍弦 DAP，使 $AD\cdot AP=K^2$（参照问题 **2195**）。过 B 作弦 $BQ\parallel AP$，则因为圆 O 和圆 O' 关于 AB 对称，所以 $BQ=AD$。



$$\therefore\quad AP\cdot BQ=AP\cdot AD=K^2.$$

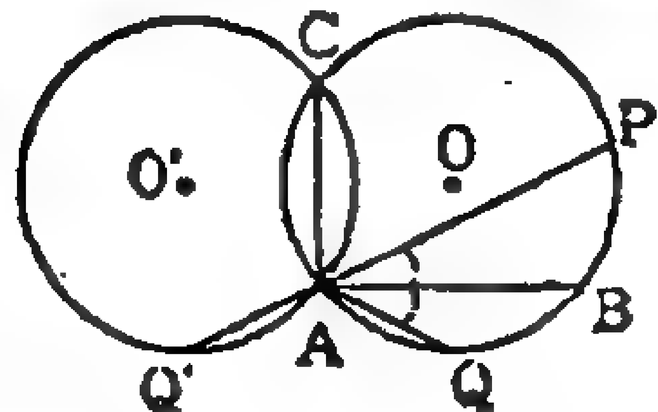
2143. 过圆 O 上的已知弦 AB 的一端 A，作与 AB 构成等角的两条弦 AP、AQ，使 $AP\cdot AQ=K^2$。

解 ［分析］ 假定 AP、AQ 已作出，设 PQ、AB 的交点为 C，则 $AC\cdot AB=AP\cdot AQ$（问题 **1074**），且 $AP\cdot AQ=K^2$，故 $AC\cdot AB=K^2$，因此 AC 可知。设过 B 的切线为 BX，则 $\widehat{PB}=\widehat{QB}$，所以 $PQ\parallel BX$。因此可作图如下。



［作图］ 在 AB 上作 AC，使 AC 为 AB 和 K 的第三比例项。由 C 作过 B 的切线 BX 的平行线，与圆相交于 P、Q，则 AP、AQ 即为所求的弦。

别解 设 $AC\perp AB$，作圆 O 关于 AC 对称的圆 O'，过 A 作两圆的割线 PAQ'（问题 **2195**），使 $AP\cdot AQ'=K^2$，则可得点 P。又由



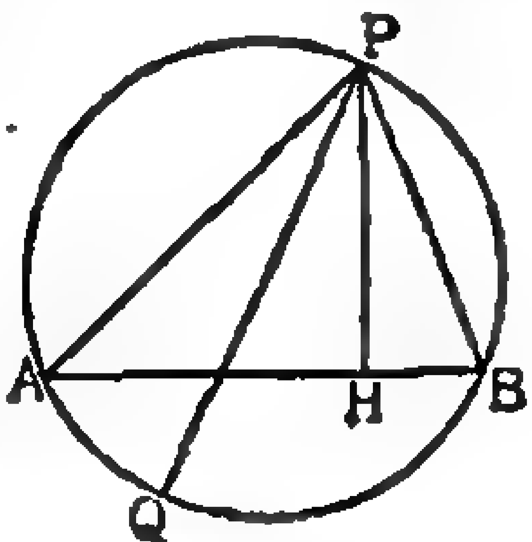
$$\widehat{BP}=\widehat{BQ},$$

可得点 Q。

2144. 在以 AB 为弦的已知圆的弧上求点 P，使 PA 和 PB 之积为 m^2。

解 假定此题已解出 $PA\cdot PB=m^2$。设 $\triangle PAB$ 的外接圆的直径为 PQ，过 P 作 AB 的垂线 PH，则根据（问题 **1318**），

$$PA\cdot PB=PQ\cdot PH.\quad ①$$



又因为此外接圆为已知圆，所以直径 PQ 为定长。设此直径为 $2R$，则根据①，

$$m^2=2R\cdot PH,$$

$$\therefore\quad PH=\frac{m^2}{2R},$$

因此 PH 为定长。作与 AB 的距离为 $\frac{m^2}{2R}$ 的平行线，与圆相交于 P，则 P 为符合条件的点。

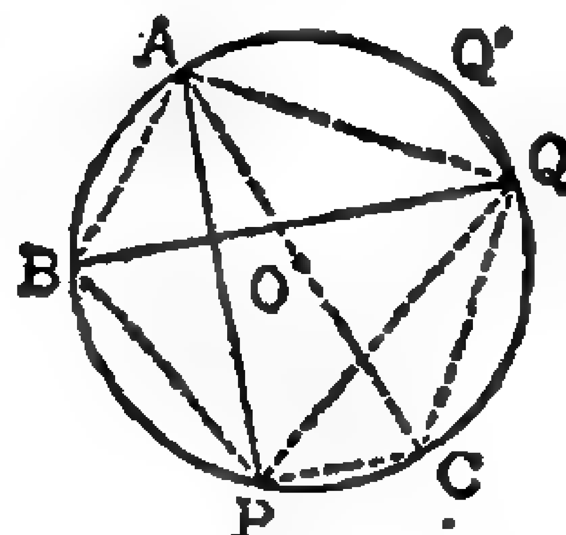
2145. 过已知圆 O 上的两点 A、B，作相互垂直的两弦 AP、BQ，使 $AP\cdot BQ=k^2$。

解 ［分析］ 假定 AP、BQ 已作出，则 $k^2=AP\cdot BQ=AB\cdot PQ+AQ\cdot BP$（问题 **1500**），又 AB 为定长，

$$AP\perp BQ,\quad\therefore\quad \widehat{AB}+\widehat{PQ}=\frac{1}{2}\times(\text{圆周}),$$

因此 PQ 为定长。$AB\cdot PQ$ 为定积，$AQ\cdot BP$ 亦为定积。设积为 l^2，则可作图如下。

［作图］ 作直径 AC，在点 B 关于 AC 另一侧的半圆弧上求点 Q，使 $AQ\cdot CQ=l^2$（问题 **2144**）。作弦 BQ，过 A 作弦 $AP\perp BQ$，则 AP、BQ 为所求弦。



［证明］ $PC\parallel BQ$，$\therefore\quad BP=CQ$。

从而 $\quad AQ\cdot BP=AQ\cdot CQ=l^2$。

因此 $\quad AP\cdot BQ=AB\cdot PQ+AQ\cdot BP=k^2$。

［讨论］ 除 Q 外还可求点 Q'。为求点 Q 所作 AC 的平行线若与半圆的弦不相交，则无解。

2146. 过已知圆 O 内的已知点 A 作弦 BAC，使 $AC\cdot BC=K^2$。

解 假定符合条件的弦 BAC 已作出，$AC\cdot BC=K^2$。则

$$K^2=AC\cdot BC=AC\cdot(AC+AB)$$
$$=AC^2+AC\cdot AB.\quad ①$$

点 A 为定点，可设此圆的半径为 R，$AO=d$，（根据问题 **1246**）

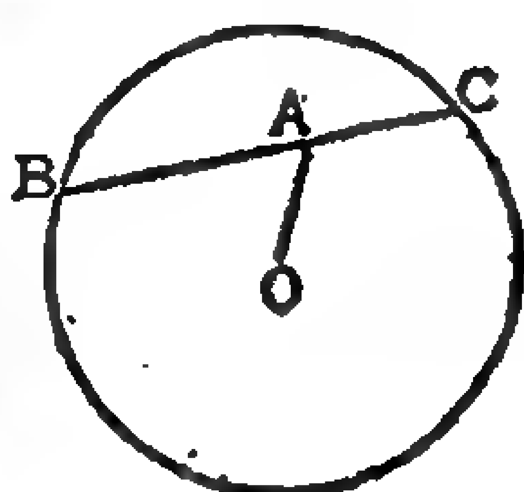
$AC\cdot AB=R^2-d^2$（一定）。

根据①，

$$K^2=AC^2+(R^2-d^2).$$

$$\therefore\quad AC=\sqrt{K^2+d^2-R^2}$$

（一定）。

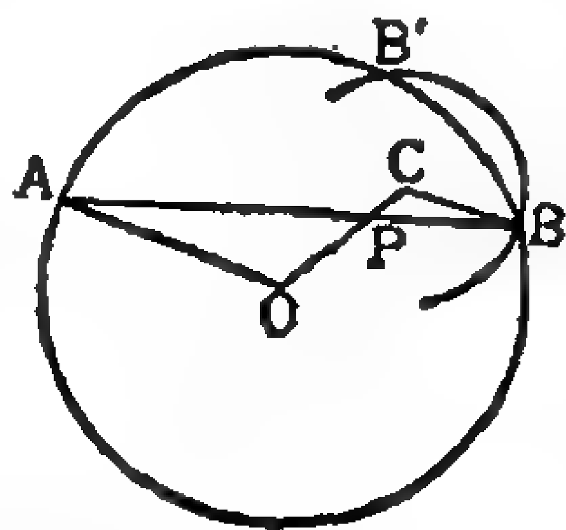


因此，以 A 为圆心，$\sqrt{K^2+d^2-R^2}$ 为半径作圆，与已知圆相交于 C，则过 A 和 C 的弦 BAC 为所求的弦。

2147. 过圆 O 内的已知点 P 作弦 AB，使 $AP=2PB$.

解 [作图] 延长 OP，截取 PC，使 $OP=2PC$，以 C 为圆心，$\frac{1}{2}r$（r 为圆 O 的半径）为半径作圆，与圆 O 相交于 B（一般有两个交点），则过 B、P 的弦 AB 即为所求的弦.

[证明] 在 $\triangle AOP$、$\triangle BCP$ 中，根据作图 $OP:PC=AO:BC=2:1$，且 $AO>PO$，$BC>PC$，$\angle APO=\angle BPC$. 所以



$$\triangle AOP\backsim\triangle BCP,$$

因此 $\quad PA:PB=PO:PC=2:1.$

[讨论] 圆 C 与圆 O 一般相交于两个点，所以适合于条件的弦有两条；如果两圆相切，有一解；如果两圆没有交点，无解.

注 如果使 $PA:PB=m:n$，则作图同上.

2148. 已知圆上的定点 A 和定弦 BC. 过 A 作弦 AD，与 BC 相交于 E，使 DE 与 DC 之比等于已知比 $m:n$.

解 [分析] 假定 AD 弦已作出，则 $\triangle DCE$ 和 $\triangle BAE$ 有三个角相等而相似.

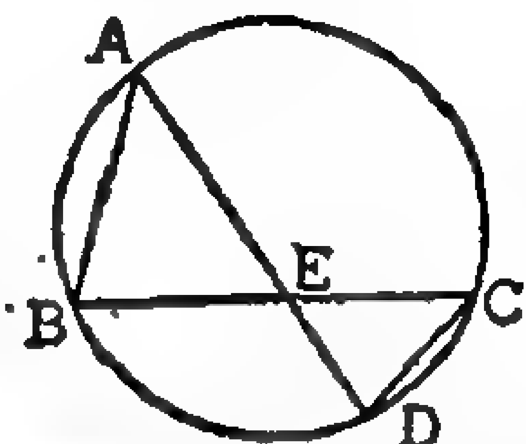
$$BE:BA=DE:DC=m:n.$$

因此可作图如下.

[作图] 在 BC 上截取 BE，使

$BE:BA=m:n$，

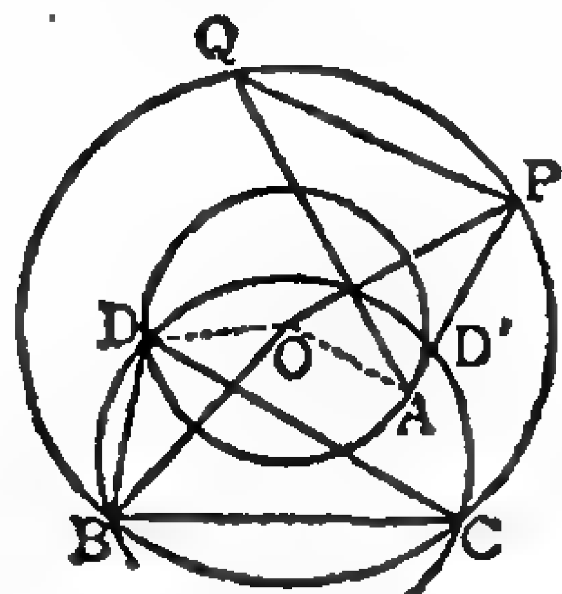
连结 AE，延长 AE 与已知圆相交于 D，则 AD 为所求弦.



[证明] 略.

2149. 在已知圆 O 内作等于定长 l 的弦 PQ，使过定点 A 所作的与此弦相对的角 $PAQ=\alpha$.

解 [作图] 作一弦 $BC=l$，以 BC 为弦作含 $\angle\alpha$ 的弧，与以 O 为圆心、OA 为半径的圆相交于 D. 以 A 为圆心、DB 为半径的圆，和以 A 为圆心、以 DC 为半径的圆分别与已知圆相交于 P、Q，则 PQ 即为所求的弦.



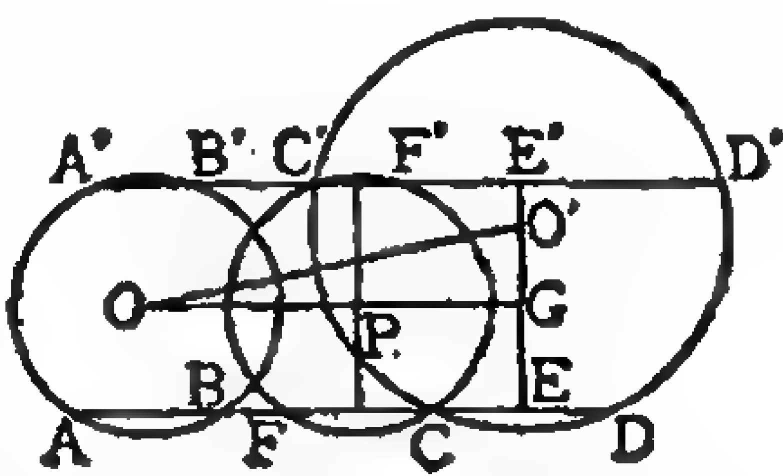
[证明] $\triangle APQ$ 可看成是把 $\triangle DBC$ 以 O 为中心旋转了 $\angle AOD$ 而得到的，

$$\therefore\ \angle PAQ=\angle BDC=\alpha,$$
$$PQ=BC=l.$$

[讨论] 除 D 之外还可取点 D'. 两圆相离时此题无解.

2150. 已知两圆和一直线，求作一直线与已知直线平行并与两圆相交，使被两圆截取的两弦相等.

解 [作图] 设已知两圆为 A、B，已知直线为 XY. 连结 AB，由 A、B 分别作 XY 的垂线 AD、BE. 过 A 作 DE 的平行线，与 BE 相交于 F. 以 F 为圆心，作与圆 A 相等的圆，与圆 B 相交于 L、N，连结 NL，延长 NL，可得所求直线 $MKLN$.



[证明] $BL=BN$，$FL=FN$.

$$\therefore\ LN\perp BE,\ LN\parallel XY.$$

又 $\qquad LN\parallel AF,$

$$\therefore\ MN\parallel AF.$$

因圆 A 和圆 F 为等圆，所以

$$GA=FH,\quad 且\quad GA\parallel FH.$$
$$\therefore\ MK=LN.$$

注 圆 F 与圆 B 相离时无解.

2151. 在已知方向上作直线，与两个已知圆 O、O' 相交，使所得两弦之和或差等于已知长 l.

解 [作图] 过 O 向已知方向作直线 OG，过 O' 向 OG 作垂线 $O'G$，在 OG 上截取 $GP=\frac{1}{2}l$. 以 P 为圆心，作与圆 O 半径相等的圆，此圆与圆 O' 相交于 C、C'，分别过 C、C' 向已知方向作直线，这两条直线即为所求.

[证明] 设所作的直线与两个圆分别相交于 A、B、C、D；A'、B'、C'、D'，与圆 P 的交点为 F、F'，则

$$CF+CD=FD=2PG=l,$$

$$C'D'-C'F'=F'D'=2PG=l.$$

并且　　$AB=CF,\ A'B'=C'F',$

$\therefore\quad AB+CD=l,\ C'D'-A'B'=l.$

因此这两条直线 $ABCD$ 及 $A'B'C'D'$ 即为所求直线。

2152. 过已知点 P 作直线，使它被两个已知圆 A、B 所截得的弦相等。

解　设所求直线已作出，与圆 A、圆 B 的交点分别为 C、D，E、F. 过 A 作 $AA' \parallel PF$，过 B 作 AA' 的垂线 BA'，则 $CD=EF$，所以 $A'E=AC$，因此，以 A' 为圆心，作与圆 A 相等的圆，则此圆通过 E、F 点。因此过 P 所作圆 B、圆 A' 的切线相等。过 P 作圆 A' 的切线 PG，则在直角三角形 PGA' 中，PG、$A'G$ 已知，所以 PA' 的长度可求。设以 AB 为直径的圆和以 P 为圆心，PA' 为半径的圆的交点为 A'，则过 P 所作割线平行于 AA' 的割线即为所求直线。

2153. 在定圆 O 外有两定点 A、B，作此圆的弦 CD 与已知直线 XY 平行，使连结 AC，BD 的直线的交点 P 在圆 O 上。

解　假定此题已解出，CD 为所求弦，P 为符合条件的点。过 C 作 $CP' \parallel AB$，与圆 O 相交于 P'，则 $CD \parallel XY$，$CP' \parallel AB$. XY、AB 为已知直线，所以 $\angle DCP'$ 的大小一定，设此角为 α，则角 α 所对的弧 DP' 的长一定，DP' 为定长。然后延长 $P'D$ 与 AB 相交于 Q，则

$$\angle DQB=\angle P'=\angle P.$$

因此 P、A、Q、D 四点共圆。

$\therefore\quad BA\cdot BQ=BD\cdot BP.$

但圆 O 为已知圆，B 为已知点，所以 $BD\cdot BP$ 一定(问题 **1246**)。由此知 $BA\cdot BQ$ 一定，Q 为定点。所以本题可归结为过已知点 Q 作割线 QDP'，使弦 DP' 等于定长的问题(问题 **2125**)。

9. 作与弧、圆相交的直线

2154. 已知直线 X、点 P 和圆 O，过 P 作直线与 X 相交于 A，与圆 O 相交于 B，使 $PA:PB=m:n$.

解　[作图]　过 P 作 X 的垂线 PC，延长至 D，使 $PC:PD=m:n$。过 D 作 X 的平行线 Y，与圆 O 相交于 B（一般有两个交点）。则 PB 即为所求直线。

[证明]　根据作图 $CA \parallel DB$，所以 $PA:PB=PC:PD$. 又 $PC:PD=m:n$,

$\therefore\quad PA:PB=m:n.$

对于 $PA'B'$ 也一样。

[讨论]　若 Y 与圆 O 相交，则有两解；相切则有一解；若无交点则无解。

2155. 过已知点 P 作一直线，与已知圆 A 和 B 分别相交于 Q、R，使 $PQ:PR=m:n$.

解　[作图]　连结 AP，在 AP 的延长线上取点 O，使

$$AP:PO=m:n,$$

以 O 为圆心，以与圆 A 的半径之比为 $m:n$ 的长为半径作圆，与圆 B 相交于 R（若不相交则无解），连结 RP 并延长与过 A 所作 OR 的平行线相交于 Q，则 QPR 为所求直线。

[证明]　$\triangle PAQ \backsim \triangle POR$,

$$\therefore\quad AQ:OR=AP:PO=m:n.$$

根据作图 $r:OR=m:n$（r 为圆 A 的半径），

$$\therefore\quad AQ=r.$$

因此 Q 在圆 A 上。又 $QP:PR=m:n$，因此 QPR 为所求直线。

2156. 已知两圆 A、B，在两圆中各作一条半径 AX、BY，使它们互相平行，且从已知点 P 所张的角相等。

解　[分析]　假定所求半径 AX，BY 已求得. 过 AX 作 $AC \parallel BP$，$XC \parallel YP$，设它们相交于 C，则

$$\triangle PBY \backsim \triangle CAX,$$

$$\therefore\quad PB:CA=BY:AX.$$

从而 AC 为定长，且其方向与 BP 平行，故点

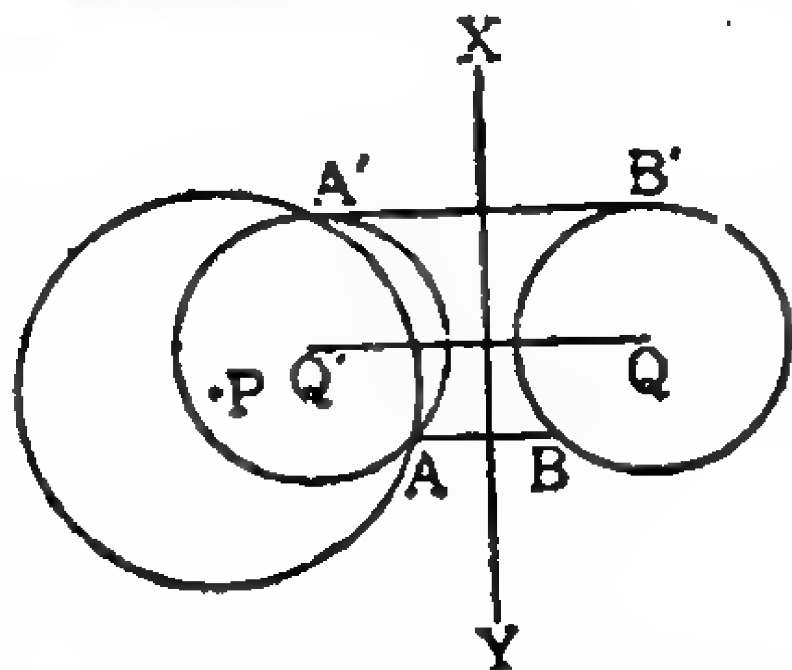
C 可定．又 $\angle APX=\angle BPY=\angle ACX$．因此 C 在 $\triangle APX$ 的外接圆上．因为 A、P、C 三点为定点，所以此外接圆与圆 A 的交点 X 可求出．故可作图如下．

［作图］ 过 A 作 BP 的平行线，在其上取点 C，使 $AC:BP=a:b$（a，b 分别为圆 A，圆 B 的半径）；过 P、A、C 三点作圆与圆 A 相交于 X，作半径 AX，及与 AX 平行的半径 BY，则 BY 为所求半径．一般有两解．

［证明］ 略．

2157． 作已知直线 XY 的垂线，与在直线 XY 两侧的已知两圆分别相交于 A、B，使 AB 被 XY 平分．

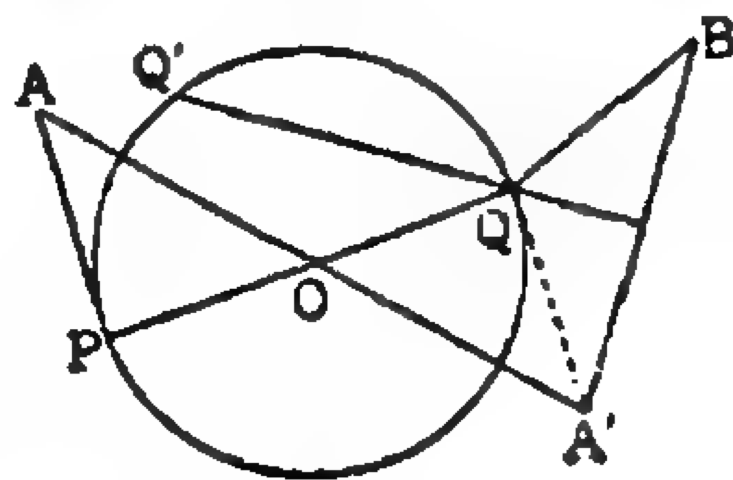
解 ［作图］ 设已知两圆的圆心分别为 P、Q，点 Q 关于 XY 的对称点为 Q'．以 Q' 为圆心作和圆 Q 相等的圆 Q'，与圆 A 交于 A、A'，则过 A、A' 分别作 XY 的垂线就是所求的直线．



［证明］ 因为圆 Q 和圆 Q' 关于 XY 对称，设 A、A' 关于 XY 的对称点分别为 B、B'，则 B、B' 在圆 Q 上，且 AB、$A'B'$ 都被 XY 垂直平分．

2158． 已知圆 O 和两点 A、B，求作圆 O 的直径 PQ，使 $AP=BQ$．

解 ［分析］ 设所求直径 PQ 已作出，则 $PA=QB$，$OP=OQ$．设 A 关于 O 的对称点为 A'，则



$$\triangle APO\cong\triangle A'QO.$$

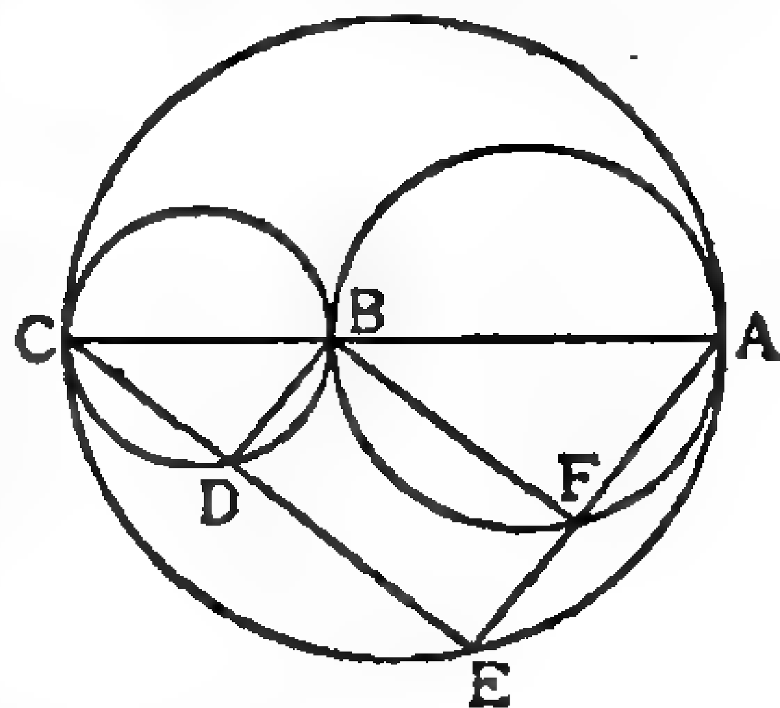
从而 $QA'=PA$，故可作图如下．

［作图］ 连结 AO，在 AO 的延长线上截取 $OA'=AO$．作 $A'B$ 的垂直平分线，与圆 O 相交于 Q（一般有两个交点）；再作直径 PQ，即为所求的直径．

［证明］ 略．

［讨论］ $A'B$ 的垂直平分线一般都与圆 O 有两个交点，则有两解；如 $A'B$ 的垂直平分线与圆 O 相切，则有一解；如无公共点，则无解．

2159． 已知两圆切于点 A，过 A 作直线使它在两圆之间的部分等于已知线段 m．其中 m 不大于两圆半径之差．



解 ［作图］ 过 A 作两圆的直径 ABC，与内圆相交于 B，与外圆相交于 C．以 B 为圆心、m 为半径作圆，与以 BC 为直径的圆相交于 D．延长 CD 与外圆相交于 E，则连结 AE 就是所要求作的线段．

［证明］ 设 AE 与内圆相交于 F，连结 BF，则

$$\angle D=\angle E=\angle F=\angle R.$$

因此 $DBFE$ 为矩形，从而

$$EF=BD=m.$$

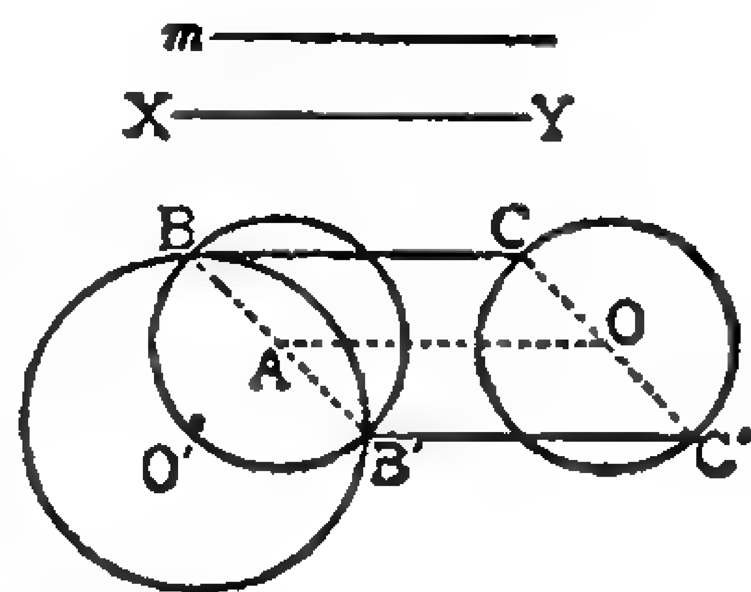
故直线 AFE 为所求的直线．

［讨论］ 当 $BC>m$ 时有两解；当 $BC=m$ 时有一解．

注 如以 B 为圆心、以 m 为半径的圆与以 BC 为直径的圆有两个交点 D、D'，则本题有两解．

2160． 求作与直线 XY 平行，且两端分别在两个已知圆上的线段，使它等于已知长 m．

解 ［作图］ 设两圆的圆心分别为 O、O'．先过圆心 O 作直线 $OA\parallel XY$，且 $OA=m$，再以 A 为圆心，作与圆 O 相等的圆，与圆 O' 相交于 B、B'．连结 AB，过 O 作半径 OC 平行于 AB，则连结 BC 就是所求的线段．



［证明］ 根据作图，

$$AB\parallel OC,\ AB=OC.$$

因此四边形 $ABCO$ 为平行四边形．

$$\because\ AO\parallel BC,\ AO=BC.$$

又 $$AO\parallel XY,\ AO=m.$$

$$\therefore\ BC\parallel XY,\ BC=m.$$

同样，连结 AB'，过 O 作半径 $OC'\parallel AB'$，则连结 $B'C'$ 也是所求的线段．

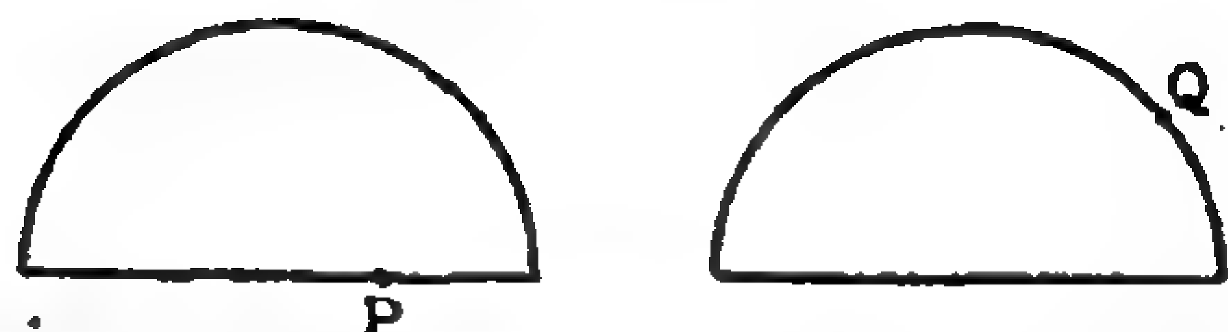
2161． 将图中的半圆弧以它的弦为折痕

折迭，

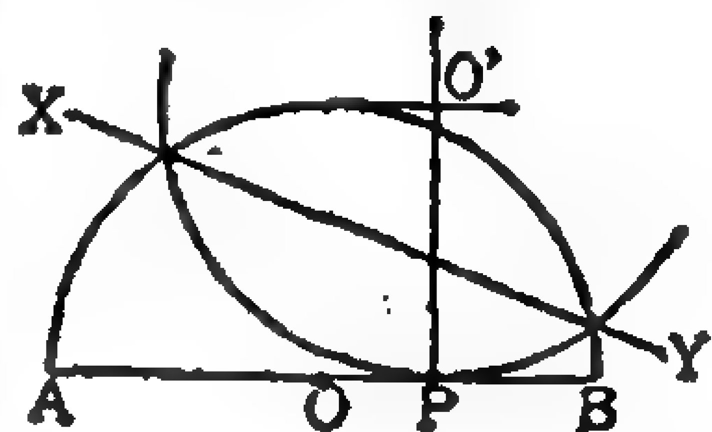
(i) 使所折的圆弧和直径相切于该直径上的已知点 P；

(ii) 使所折的圆弧和直径相切于该圆弧上的已知点 Q；

求作两种情况折痕的弦。



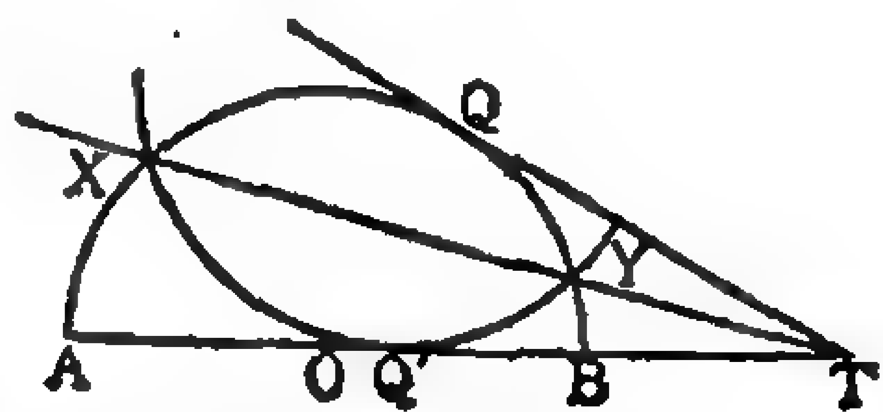
解　(i) 设半圆的直径为 AB，AB 上的定点为 P。XY 为折痕，所折半圆弧在点 P 处与 AB 相切。再设弧 XPY 的圆心为 O'，则圆 O' 的半径与已知圆 O 的半径相等，且 $O'P\perp AB$。因此可作折痕如下。



过点 P，在半圆的同侧作 AB 的垂线 PO'，使 $PO'=OA$。以 O' 为圆心、$O'P$ 为半径作圆，与半圆相交于 X、Y，则 XY 就是所求的折痕。

［证明］　圆 O、O' 关于 XY 对称，以 XY 为折痕折迭，则半圆上的弧 XY 与圆 O' 上的弧 XY 重合。又 $O'P\perp AB$，所以圆 O' 在点 P 与 AB 相切。

(ii) 设过点 Q 且与半圆 OAB 相切的直线与该半圆的直径 AB 的延长线相交于 T，则 T 在作为折痕的弦 XY 的延长线上。因此可作折痕如下。



过点 Q 作半圆 ABO 的切线与 AB 的延长线相交于 T；作 $\angle ATQ$ 的平分线与该半圆弧交于 X、Y，则弦 XY 就是所求的折痕。

［证明］　设点 Q 关于 XY 的对称点为 Q'，则 Q' 在 AB 上，且折迭的弧在点 Q' 与 AB 相切。

2162.　在已知线段 AB 为直径的半圆上求一点 D，使过 D 所作 AB 的垂线 DC 满足 $DB=AC$。

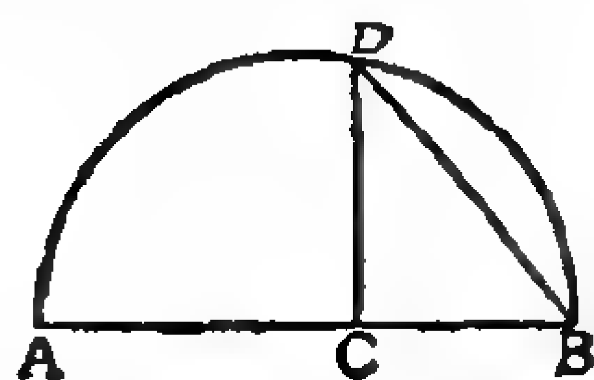
解　［分析］　设所求的点 D 已作出，则

$$BD^2=BC\cdot AB.$$

又　$BD=AC$，

$\therefore$　$AC^2=BC\cdot AB$。

因此点 C 将 AB 分为中外比。



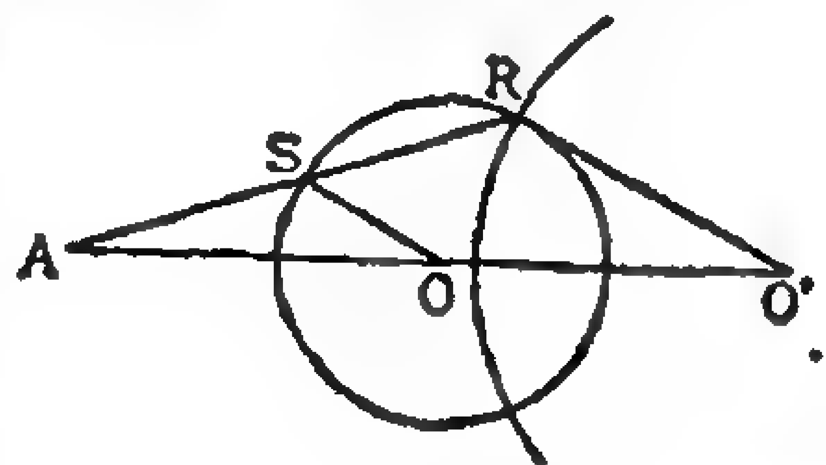
［作图］　将 AB 内分为中外比（问题 1924），设分点为 C，过 C 作 AB 的垂线和半圆相交于 D，则 D 为所求的点。

［证明］　略。

10. 作割线

2163.　过已知点 A 作一直线与已知圆 O 相交于 S、R，使 $AS:AR$ 等于已知比 $m:n$。

解　［分析］　设所求的直线 ASR 已作出。连结已知圆的圆心 O 和点 S，过 R 作 SO 的平行线与 AO 的延长线相交于 O'，则



$$AO:AO'=AS:AR=m:n.$$

因 A、O 为已知点，根据上式，点 O' 可以确定。又

$$SO:RO'=AS:AR.$$

设 $SO=r$，则由上式得

$$r:RO'=m:n.$$

$$\therefore\quad RO'=\frac{nr}{m}.$$

故可作图如下。

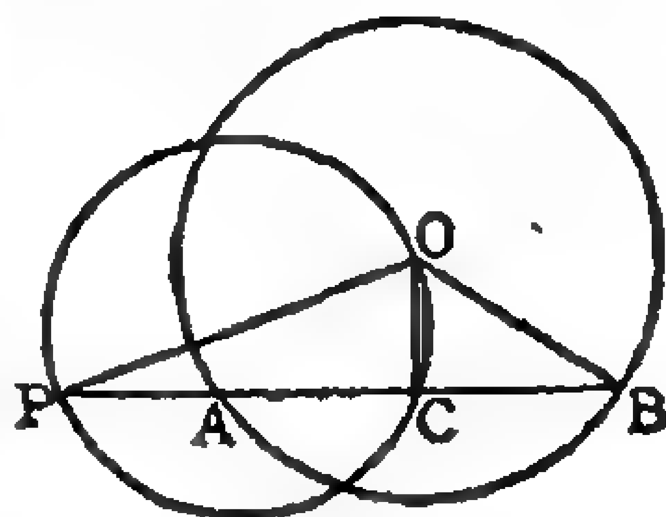
［作图］　在 AO 的延长线上取点 O'，使

$$AO:AO'=m:n.$$

再以 O' 为圆心、以 AO、r、AO' 的第四比例项，即 $\frac{nr}{m}$ 为半径作圆，与圆 O 相交于 R，则 AR 为所求的直线。

2164.　过已知圆 O 外的定点 P 作割线 PAB，使 $PA+PB$ 等于已知长 l。

解　［作图］　连结 P 和圆心 O，以 PO 为直径作圆，再以 P 为圆心，$\frac{1}{2}l$ 为半径作圆，这两个圆相交于 C。连结 PC，与圆 O 相交于 A、B，则 PAB 即为所求的割线。



［证明］　连结 OC，则 $\angle PCO=\angle R$，所以

C 为 AB 的中点，

$$\therefore\quad PA+PB=2PC.$$

$$\because\ PC=\frac{1}{2}l,\quad \therefore\quad PA+PB=l.$$

2165. 过已知圆 O 外的定点 P 作圆 O 的割线 PAB，使

$$AB^2=PA\cdot PB.$$

解 ［分析］ 设所求的割线 PAB 已作出. 过点 P 作圆 O 的切线 PD，则

$$AB^2=PA\cdot PB=PD^2,$$

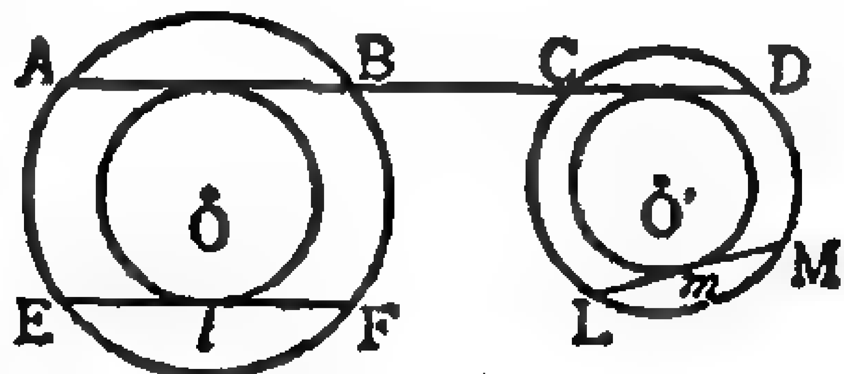
$$\therefore\quad AB=PD.$$

［作图］ 过 P 作圆 O 的切线 PD，过 D 作弦 $DE=PD$；过圆心 O 作 DE 的垂线 OF，并以 O 为圆心、OF 为半径作圆．再从 P 向第二个圆作切线，与圆 O 相交于 A、B，则 PAB 即为所求的割线．

［证明］ 略．

2166. 求作两已知圆 O、O' 的公共割线，使两圆所截得的弦分别等于已知长 l、m．

解 ［作图］ 作圆 O 的弦 EF，使 $EF=l$，以 O 为圆心作与 EF 相切的同心圆．在圆 O' 中作弦 LM，使 $LM=m$，以 O' 为圆心作与 LM 相切的同心圆．再作上述两圆的公切线，与圆 O 及 O' 分别交于 A、B、C、D，则 $ABCD$ 即为所求的割线．



［证明］ 根据作图，弦 AB 与 EF 都和以 O 为圆心的同一个圆相切，所以这两条弦的弦心距相等，从而

$$AB=EF=l.$$

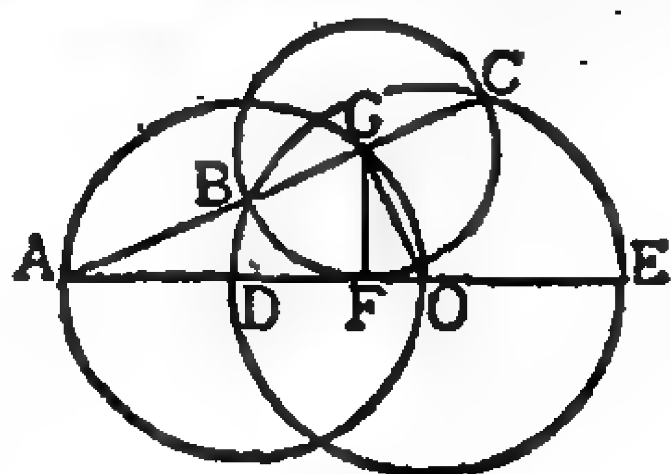
同理 $$CD=LM=m,$$

因此割线 $ABCD$ 符合条件．

［讨论］ 两个圆的公切线一般有四条，因此本题一般有四解．当所作的两圆外切时，其公切线有三条；内切时，其公切线有一条；相交时，其公切线有两条．在上述情况下本题解的个数和公切线数一致．当两圆内离时，没有公切线，所以无解．

2167. 过圆 O 外的定点 A 作割线 ABC，使以弦 BC 为直径的圆和 AO 相切．

解 ［分析］ 设所求的割线 ABC 已经作出，以 BC 为直径的圆和 AO 相切于 F，则



$$AF^2=AB\cdot AC\quad(\text{一定}).$$

设 BC 的中点为 G，则

$$GF\perp OD,\ \angle OGA=\angle R$$

（D，E 为 AO 与圆 O 的交点）．故可作图如下．

［作图］ 设 AO 与圆 O 的交点为 D、E，在 AO 上取点 F，使 $AF^2=AD\cdot AE$．过 F 作 AO 的垂线，与以 AO 为直径的圆相交于 G．连结 AG 所得割线 ABC 即为所求的割线．

［证明］ 因为 $OG\perp BC$，所以 G 为 BC 的中点，从而

$$GF^2=AG^2-AF^2=AG^2-AB\cdot AC$$
$$=AG^2-(AG^2-BG^2)=BG^2$$

$$[\text{因 } AB\cdot AC=(AG+GC)(AG-GC)],$$

$$\therefore\quad GF=BG.$$

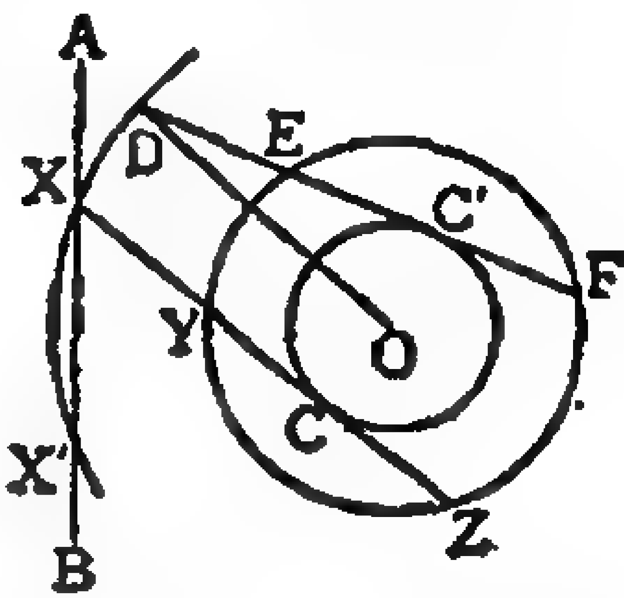
因此以 BC 为直径的圆和 AO 相切于 F．

2168. 作一直线与已知直线 AB 相交于 X，与已知圆相交于 Y、Z，且 XY、XZ 各等于已知长 l、m．

解 ［分析］ 设所求直线 XYZ 已作出，则 YZ 为定长，所以与圆 O 的同心圆相切，设切点为 C，从而

$$YC=\frac{1}{2}m,\quad XC=l+\frac{1}{2}m\ (\text{一定}).$$

故可作图如下．

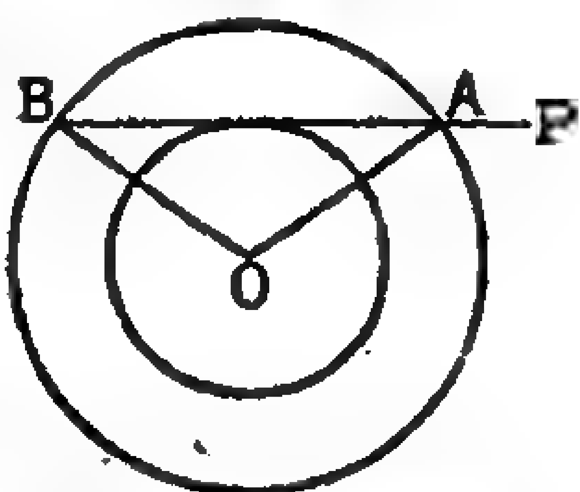


［作图］ 在圆 O 中作弦 $EF=m$，作与 EF 相切的同心圆，切点为 C'．在 EF 的延长线上，从 C' 截取 $C'D=l+\frac{1}{2}m$．设以 O 为圆心、以 OD 为半径的圆与 AB 相交于 X，过 X 作此小圆的切线即圆 O 的割线 XYZ，则 XYZ 为所求的直线．一般地，过 X 的切线有两条，X 表示的点有两个，所以本题最多有四解．

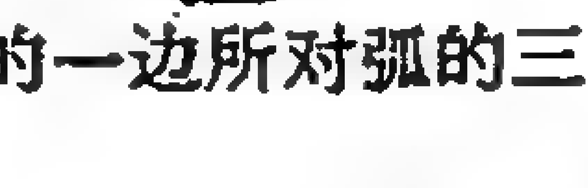
2169. 过已知点 P 作直线把已知圆分成两部分，使它们的比等于 3:7．

解 ［分析］ 设所求直线 PAB 已作出，

它与已知圆 O 相交于 A、B，连结 AO、BO，则弧 AB 和它的共轭弧的比等于 3:7，所以



$$\angle AOB=4\angle R\times\frac{3}{10}.$$



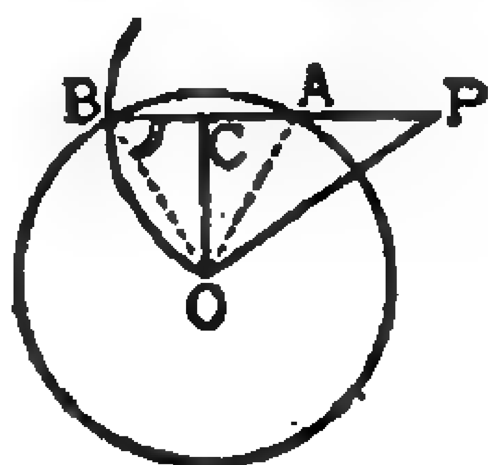
因此可知弧 AB 的长等于已知圆的内接正十边形的一边所对弧的三倍．故得如下作法．

［作图］ 作圆 O 的内接正十边形(问题 1514)并作它的一边所对弧的三倍所对的弦；再作与这条弦相切的同心圆，然后从 P 作这个圆的切线和圆 O 相交于 A、B，则 PAB 就是所求的割线．

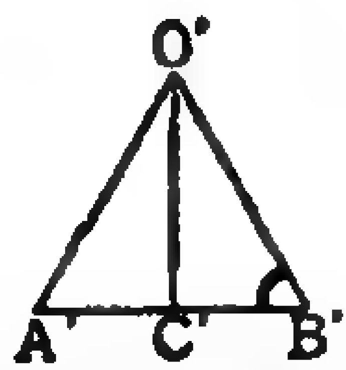
若 P 在与圆 O 同心的小圆之外，则有两解；P 在小圆上有一解；P 在小圆内无解．

［证明］ 略．

2170． 过已知点 P 作与已知圆 O 相交于 A、B 的割线 PAB，使从圆心 O 到 PB 的距离 OC 等于弦 AB．



解 ［分析］ 设所求的割线 PAB 已作出，则 $\triangle AOB$ 为底边 AB 与高 OC 相等的三角形，所以 AB 的大小一定．故可作图如下．



［作图］ 以任意线段 $A'B'$ 为底边，以 $O'C'=A'B'$ 为高作等腰三角形 $O'A'B'$．再以 OP 为弦，作含有 $\angle B'$ 的弓形弧，与已知圆 O 相交于 B，则连结 PB 所得的割线 PAB 即为所求(一般有两解)．

［证明］ 略．

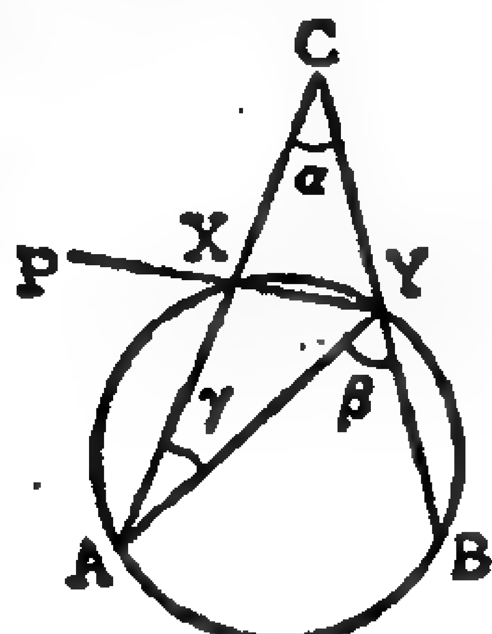
2171． 在已知圆 O 上有两定点 A、B．过已知点 P 作直线与圆 O 相交于 X、Y，使 AX 和 BY 所成的角即 $\angle ACB$ 等于已知角 α．

解 ［分析］ 设此直线已作出，则 $\angle ACB=\alpha$ (一定)．设弧 AB 所对的圆周角为 β，弧 XY 所对的圆周角为 γ，则有如下各种情况：

$\alpha=\beta-\gamma$ (图 1)，

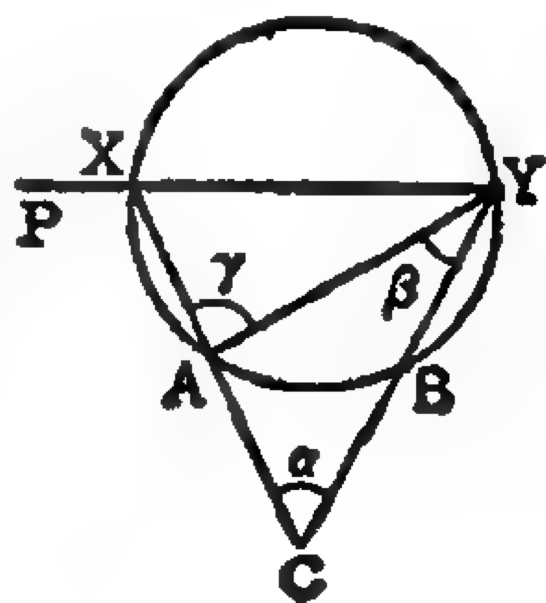
$\alpha=\gamma-\beta$ (图 2)，

$\alpha=\beta+\gamma$ (图 3)．



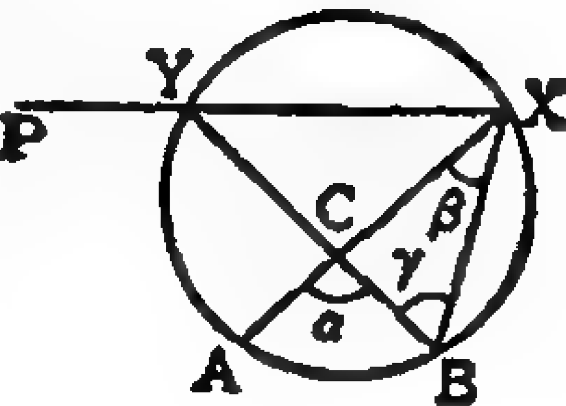
(1)

在以上各情况中，由于 α、β 一定，所以 γ 也一定，从而知弧 XY 的长度也一定．因此本题可归结为，从已知点 P，求作已知圆的割线，使所截的弦长等于已知长的作图问题(问题 2125)．



(2)

2172． 已知两圆相交于 A、B．分别过两定点 P、R 作两圆的割线 PMN、$RN'M'$，使连结弦 MN，$M'N'$ 两端的直线 MM'、NN' 都过点 A．



(3)

解 假定符合条件的割线 PMN、$RN'M'$ 已经作出，则

$$\angle MBN=\angle MAN=\angle M'AN'=\angle M'BN',$$

$$\angle BMN=\angle BAN=\angle BM'N'.$$

$$\therefore\ \triangle MBN\backsim\triangle M'BN',$$

$$BM:BM'=BN:BN'$$

$$=NM:N'M'=r:r'$$

(r，r' 为已知两圆的半径)．再连结 BP，过 P 作直线 BP'，使与 BM' 所成的角与 $\angle MBP$ 相等，且 BP' 与 BP 在 BM' 的异侧．设 BP' 与 $N'M'$ 相交于 P'，则

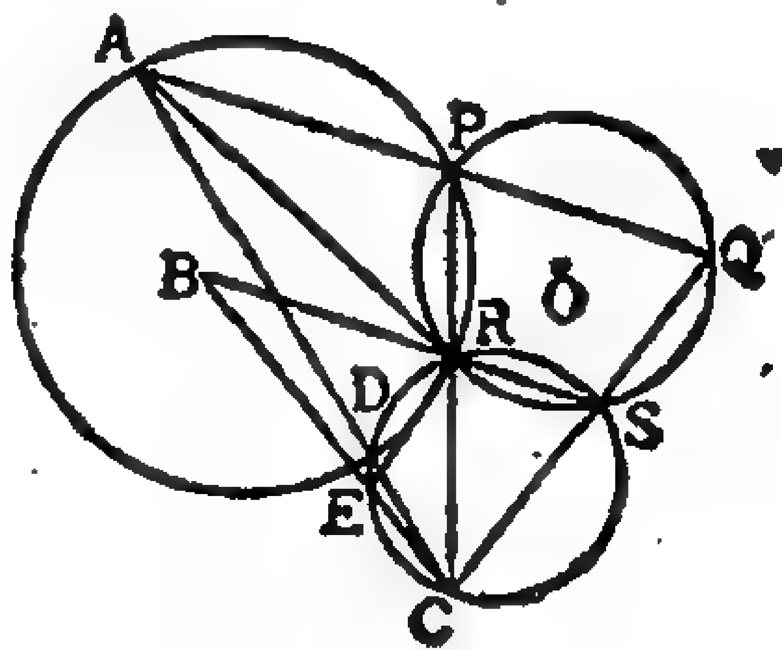
$$\angle BMP=\angle BM'P'.$$

$$\therefore\ \triangle BMP\backsim\triangle BM'P',$$

$$BP:BP'=BM:BM'=r:r'\ \text{(定比)}.$$

又 $\angle PBP'=\angle MBM'$，且 $\angle AMB$ 和 $AM'B$ 都一定，所以 $\angle MBM'$ 也一定．因此点 P' 的位置可确定，从而割线 $RN'M'$ 可作，割线 PMN 也可作．

2173． 过已知两定点 A、B，分别作已知圆 O 的两条割线 APQ、BRS，使 PR 和 QS 通过另一定点 C．



解 设符合条件的割线 APQ 及 BRS 已作出．作 $\triangle APR$ 及 $\triangle CRS$ 的外接圆．设 AC，BC 分别与圆 APR、

CRS 相交于 D、E，则

$$\angle CER=\angle RSQ=\angle RPA=\angle RDC.$$

因此 D 在圆 CRS 上。

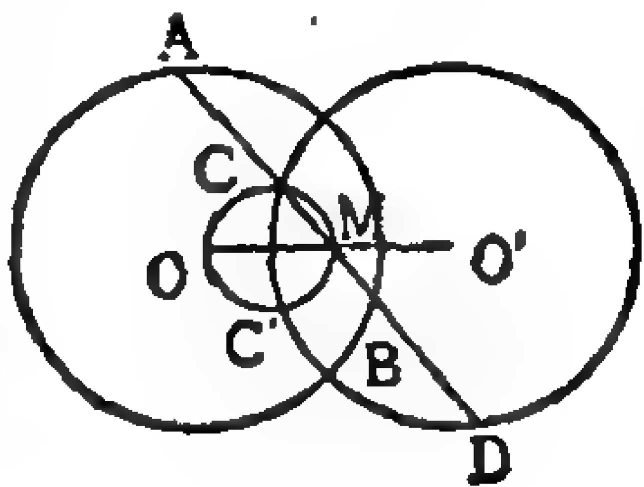
由圆幂定理，$CA\cdot CD=CP\cdot CR$，对于圆 O 来说，C 为圆 O 外的定点，$CP\cdot CR$ 为定值．由于 A、C 为定点，所以点 D 也就确定了．同理，　$BC\cdot BE=BR\cdot BS$（一定），

E 也是定点．由 C、E、D 三点可以确定圆 CRS．先确定两点 D、E．设圆 CED 与圆 O 的交点为 R、S，CR、CS 与圆 O 的交点为 P、Q．则 APQ，BRS 即为所求的割线。

［证明］ 略。

2174． 作与两个相交的等圆 O，O' 的割线 $ACBD$，与圆 O 相交于 A、B，与圆 O' 相交于 C、D，使 $AC=CB=BD$。

解 ［作图］ 设 OO' 的中点为 M，以 OM 为直径的圆与圆 O' 相交于 C'．设过 C、M 的直线与两圆依次相交于 A、B、C、D．则 $ACBD$ 即为所求的割线。



［证明］ $\angle OCM=\angle R$，

$$\therefore\quad AC=BC.$$

又 AC、BD 关于 M 对称，所以

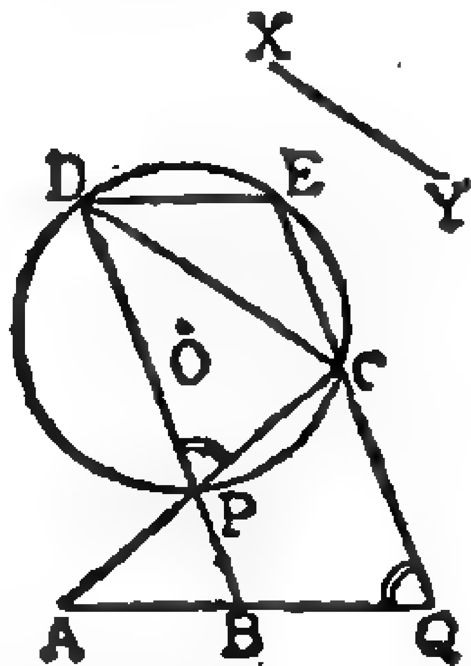
$$AC=BD,\quad 因而\quad AC=BC=BD.$$

［讨论］ 除 C 外，利用 C'（OM 为直径的圆与圆 O' 相交于另一点）也可以得到符合条件的割线，一般有两个解．但圆心 O、O' 在另一圆上时有一解．圆心 O、O' 在两圆的公共部分内时，无解。

2175． 过已知点 A、B，求作已知圆 O 的割线 APC 和 BPD，使两割线相交于圆上的点 P，且弦 DC 与已知直线 XY 平行。

解 设此图已作出，$DC\parallel XY$．作弦 DE，使 $DE\parallel AB$．设 EC 的延长线与 AB 或其延长线相交于 Q，则

$$\angle Q+\angle DEQ=2\angle R. \qquad ①$$



又 D、E、C、P 四点共圆，所以

$$\angle DPC+\angle DEC=2\angle R. \qquad ②$$

根据①、②，$\angle DPC=\angle Q$，因此 B、P、C、Q 四点共圆。

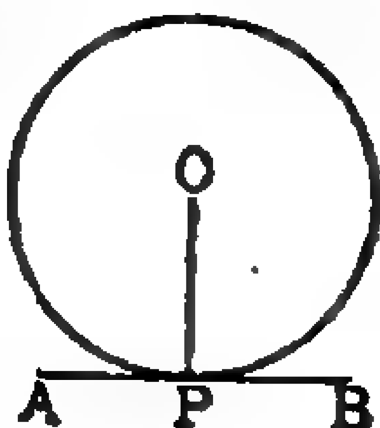
$$\therefore\quad AB\cdot AQ=AP\cdot AC.$$

因 A 为已知点，所以 $AP\cdot AC$ 一定，$AB\cdot AQ$ 也就一定．又 AB 为已知线段，所以 Q 为定点．且 $DE\parallel AB$，$DC\parallel XY$，那么 $\angle EDC$ 的大小一定，$\overset{\frown}{EC}$ 的大小亦可定．因此本题变为过已知点 Q，作已知圆 O 的割线 QCE，使弦 EC 为定长的问题（参照问题 **2125**）．可由此作割线 QCE。

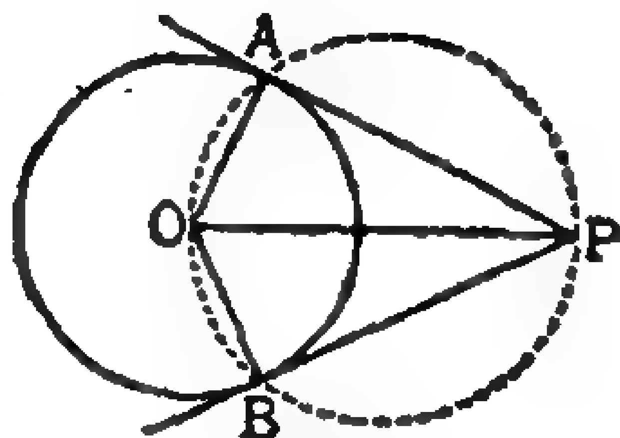
11．作切线

2176． 过已知点 P 作已知圆 O 的切线。

解 ［作图］ (i) P 在圆上时：连结 OP，过 P 作 OP 的垂线 AB，则 AB 为所求的切线。



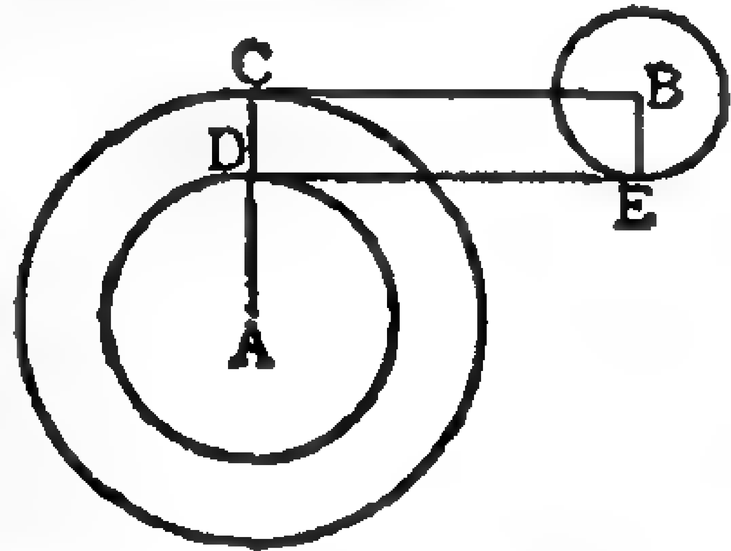
(ii) P 在圆外时：作以 PO 为直径的圆，与已知圆相交于 A、B，则 PA、PB 为所求切线。

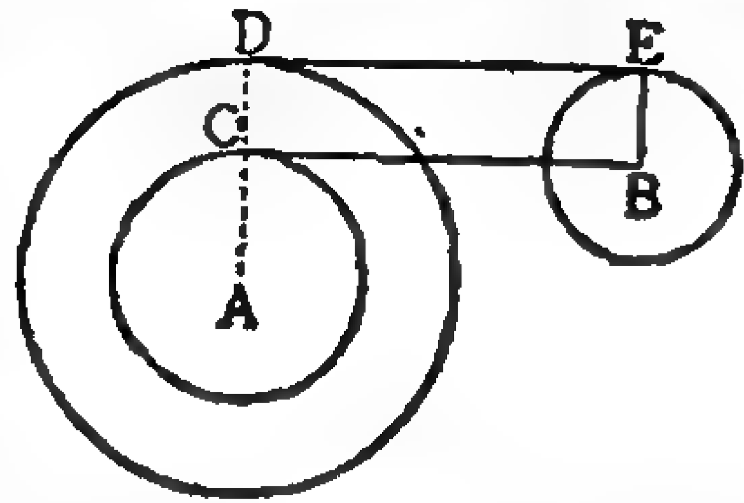


［证明］ $\overset{\frown}{OAP}$，$\overset{\frown}{OBP}$ 都是半圆，所以 $\angle OAP$、$\angle OBP$ 都是直角．故 PA，PB 与已知圆相切。

2177． 作两个已知圆的公切线。

解 ［作图］ 设两个已知圆的圆心为 A、B，圆 A 大于圆 B．以 A 为圆心，以两个已知圆的半径之和为半径作圆，或者以两个已知圆的半径之差为半径作圆．过点 B 作此圆的切线 BC，设切点为 C．连结 AC，设 AC 或其延长线与圆 A 相交于 D．过点 B 作 $BE\parallel CD$，设与 D 在 BC 同侧的 BE 与圆 B 交于点 E，连结 DE．则 DE 为已知两圆的公切线。





［证明］ BC 是过点 C 的圆 A 的切线．所以 $\angle ACB$ 为直角，且 AC 为 AD 和 BE 之和（或差）．所以 $BE=CD$．且因为 $BE\parallel CD$，故 $BCDE$

为平行四边形. 又其中角 BCD 为直角，所以 $\angle CDE$ 和 $\angle BED$ 也是直角. 因此 DE 与已知两圆 A、B 相切.

[讨论] 如果两个已知圆既不相交，也不相切，则 AB 大于两圆半径之和，且 B 在作图所用过的两圆之外，所以可作四条公切线.

如果两个已知圆外切，则 AB 等于两圆半径之和，点 B 在作图所用两圆中的一个圆上，所以可作三条公切线.

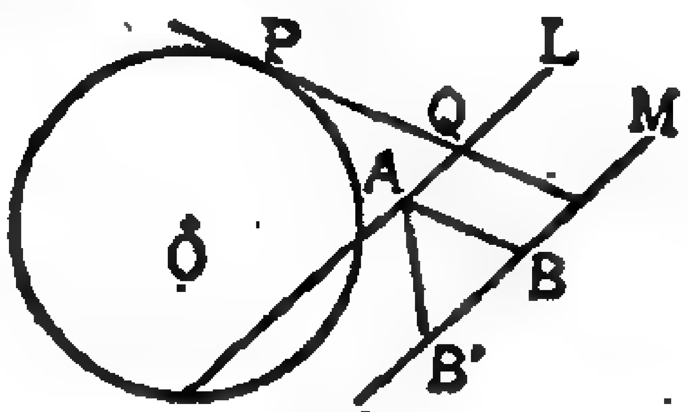
如果已知两圆相交，则 AB 小于两圆半径之和，且点 B 在作图所用两圆中一圆之内，而在另一圆之外，所以可作两条公切线.

如果两已知圆内切，则 AB 等于两圆半径之差，则 B 在作图所用两圆中的一圆之内，且在另一圆上，因此可作一条公切线.

如果两已知圆中有一个在另一个之内，且无公共点，则 AB 小于两圆半径之差，点 B 在作图所用两圆之内，所以不可能作公切线.

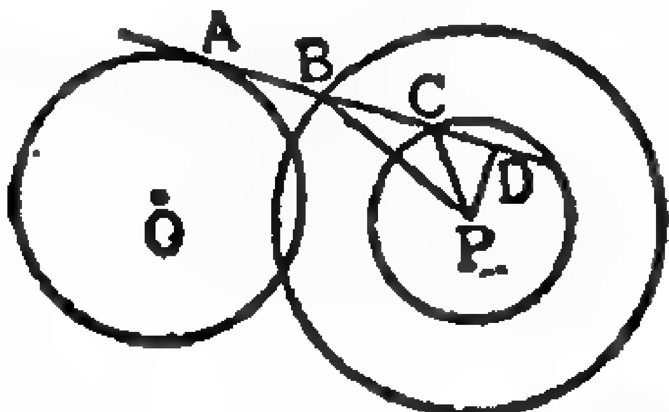
2178. 作已知圆 O 的切线，使它被两条已知平行线或两个同心圆所截的部分等于已知线段 l.

解 (i) 设已知平行线为 L、M. 在直线 L 上任取一点 A，以 A 为圆心、l 为半径作圆，与直线 M 相交于 B、B'，则与 AB 或 AB' 平行的圆 O 的切线都是所求切线.



[讨论] 设 L、M 的距离为 d，当 $l>d$ 时有四解，$l=d$ 时有两解，$l<d$ 时无解.

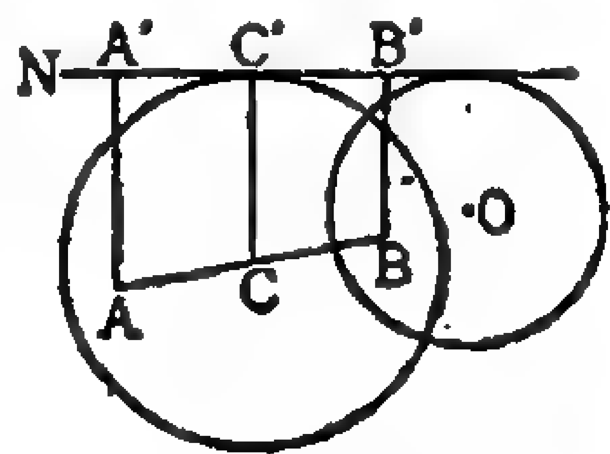
(ii) 设两个已知同心圆的圆心为 P，它们的半径为 R、r ($R>r$). 设所求切线 ABC 已作出，则 $BC=l$，所以在 $\triangle PBC$ 中，$PB=R$，$PC=r$，$BC=l$，即三边已知. 所以由 P 所作 BC 的垂线 PD 也一定. 由此，以 P 为圆心、PD 为半径的圆与圆 O 的公切线即为所求的切线.



2179. 作已知圆 O 的切线，使它与两个已知点 A、B 的距离之和等于已知长 l.

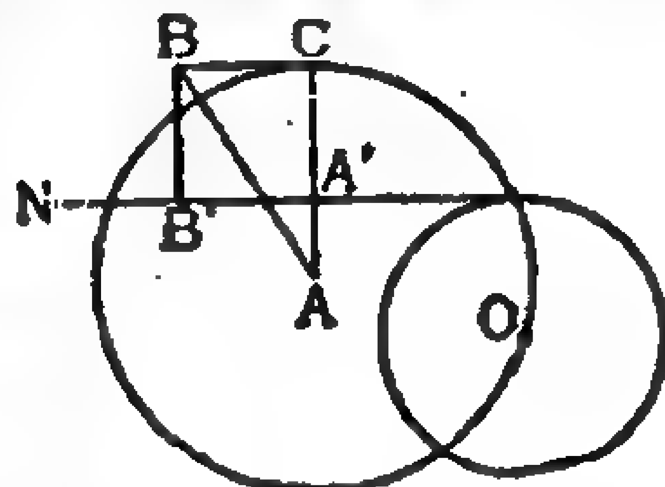
解 (i) 设所求切线 N 已作出，且 A、B 在 N 的同侧. 过 A、B 和 AB 的中点 C 分别作 N 的垂线 AA'、BB'、CC'，则 $AA'+BB'=l$ (假定)，

$AA'+BB'=2CC'$.



因此 $CC'=\frac{1}{2}l$ (一定). 所以 C' 在以 C 为圆心、$\frac{1}{2}l$ 为半径的圆上. 且 $CC'\perp N$，所以 N 为圆 C 和圆 O 的公切线. 因此本题可根据问题 **2177** 作图.

(ii) 设 A、B 在切线 N 的异侧. 在 AA' 的延长线上取点 C，使 $AC=l$，则 $BC\parallel N$，并且 BC 与以 A 为圆心、l 为半径的圆相切. 在这种情况下，就以 A 为圆心、l 为半径作圆. 过 B 作该圆的切线 BC，再作与 AB 相交，与 BC 平行的圆 O 的切线 N 即可.

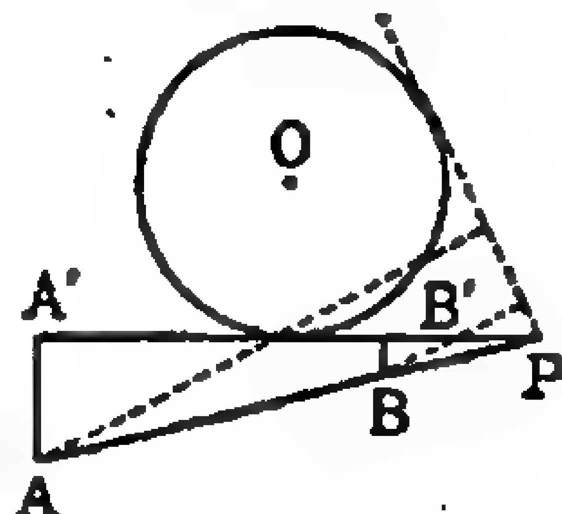


2180. 作已知圆 O 的切线，使它与两个已知点 A、B 的距离之比等于已知比 $m:n$.

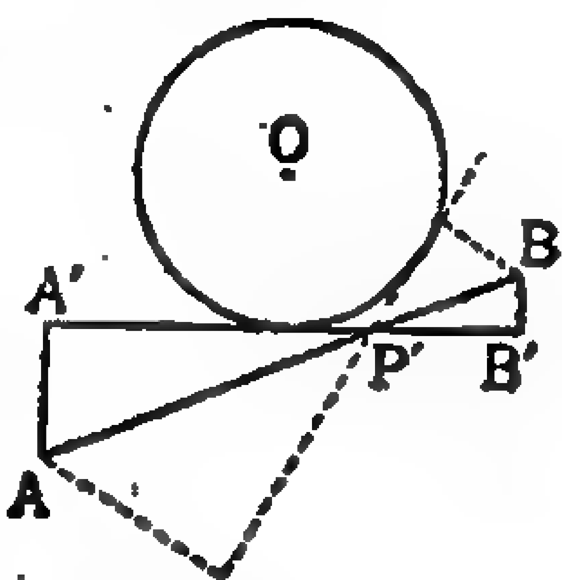
解 [分析] 设符合条件的切线已作出. 过 A、B 所作此切线的垂足为 A'、B'. 设两直线 AB、$A'B'$ 的交点为 P，则 $AA'\parallel BB'$，且 $AA':BB'=m:n$. 所以

$$PA:PB=m:n.$$

因此可求得 P，可作图如下.



[作图] 求点 P (或 P') 把 AB 外分 (或内分) 为 $m:n$，过点 P (或 P') 作圆 O 的切线，即为所求作的切线.



[证明] 略.

[讨论] 若将 AB 外分为 $m:n$ 的点 P 在圆 O 外，则过 P 可作圆 O 的两条切线. 若点 P 在圆 O 上，则可作一条. 若点 P 在圆 O 内部，则无解.

若将 AB 内分为 $m:n$ 的点 P' 在圆 O 外，则有两解；P' 在圆 O 上，则有一解；P' 在圆 O 内，则无解. 因此，如果 P、P' 都在圆 O 外，则有四解；一点在圆 O 外，一点在圆 O 上，则有三解；一点在圆 O 外，一点在圆 O 内，或者两点都在圆上，则有两解；一点在圆 O 上，一

点在圆 O 内，则有一解；若两点都在圆 O 内，则无解。

2181. 设已知圆的圆心为 O，在圆外求一点 A，过 A 作圆 O 的切线 AD，AO 的延长线与圆 O 相交于 C，使 $AC=2AD$。

解 设符合条件的点 A 已求出，则

$$AD^2=AB\cdot AC.$$

根据假定，

$$AD=\frac{1}{2}AC.$$

代入上式，

$$\frac{1}{4}AC^2=AB\cdot AC,$$

$$\therefore\ \frac{1}{4}AC=AB.$$

因此

$$AB=\frac{1}{3}BC.$$

延长直径 CB，取 $BA=\frac{1}{3}BC$，过 A 作圆的切线 AD 即可。

2182. 在已知三角形 ABC 的底边 BC 上取两点 D、E，过 B 和 C 作 $\triangle ADE$ 外接圆的切线 BP 和 CQ，使 $BP=CQ$，且使 $DE=l$（l 为已知长）。

解 ［分析］ 设符合条件的点 D、E 已求得。作 $\triangle ADE$ 的外接圆。过 B、C 作此圆的切线 BP、CQ，则

$$BP^2=BD\cdot BE,$$

$$CQ^2=CD\cdot CE.$$

要使 $BP=CQ$，则须使 $BD=CE$。因为 BC 为已知线段，DE 为定长 l，设 $BC=a$，则

$$BD=CE=\frac{1}{2}(BC-DE)$$

$$=\frac{1}{2}(a-l).$$

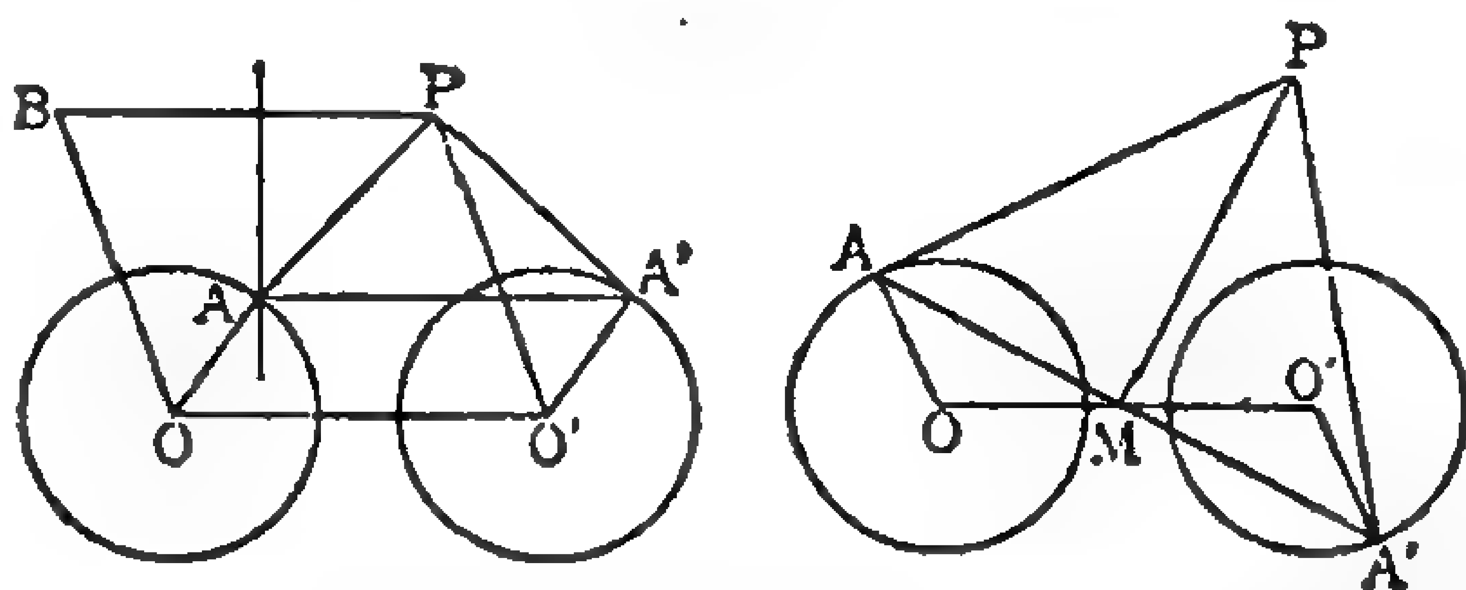
因此，BD 和 CE 均为定长，由此可确定 D、E 的位置。

2183. 已知两圆 A 和 B，求作一点 P，使由点 P 向两圆所作切线的夹角等于已知角 α，并使一条切线的长等于已知长 l。

解 设两圆 A、B 的半径分别为 R、r。假定所求切线 PC，PD 已作出，则五边形 $PCABD$ 的四条边 PC、CA、AB、BD 和三个角 C、P、D 都为已知，因此五边形可定。即从圆 A 上的任意点 C' 作切线 $C'P'$，使 $C'P'=l$，过 P' 作直线 $P'D'$ 使 $P'D'$ 与 $P'C'$ 的夹角等于已知角 α。过 $C'P'$ 上的点 E 作 $EB'\parallel P'D'$，使 EB' 与 $P'D'$ 的距离为 r。以 A 为圆心，AB 为半径作圆与 EB' 相交于 B'。过 B' 作 $P'D'$ 的垂线 $B'D'$，则五边形 $P'C'AB'D'$ 与五边形 $PCABD$ 完全相等。因此作五边形 $P'C'AB'D'$ 如上。过 A 作半径 AC，使 AC 与 AB 的夹角等于 $\angle B'AC'$。过 B，关于 AB 在 AC 的同侧作半径 BD，使 BD 与 AB 的夹角等于 $\angle AB'D'$。作过 C、D 的切线 CP、DP，即为所求的两条切线。

［讨论］ 与 $P'D'$ 的距离为 r 的直线有两条，且过 P' 与 $P'C'$ 的夹角为 α 的直线一般有两条，关于 AC 对称和 P' 同样的点有两个，所以和 EB' 同样的直线一般有八条。因此以 A 为圆心、过 B 的圆与上述直线相交，类似点 B' 的点有 16 个。因此本题一般有 16 个解。如果 PD 的长为已知长 l，也同样有 16 个解。

2184. 在外离的两等圆 O、O' 之外有已知点 P，作平行的两条半径 OA、$O'A'$，使 $PA=PA'$。



解 ［作图］ (i) 作平行四边形 $OO'PB$，再作 PB 的垂直平分线与圆 O 相交于点 A；再作与 OA 平行且同向的半径 $O'A'$ 即可。

(ii) 设 OO' 的中点为 M，过 M 所作 MP 的垂线与圆 O 的交点即为 A；再作点 A 关于 M 的对称点，即为 A'。

［证明］ (i) 因为 $OO'PB$、$OO'A'A$ 为平行四边形，所以 $PBAA'$ 也为平行四边形，因此 $PA'=BA=PA$。

(ii) MP 为 AA' 的垂直平分线，所以 $PA=PA'$，又 OO'、AA' 互相平分，则 $O'A'=OA$，因此点 A' 在圆 O' 上.

2185. 在已知直线 XY 上求一点 P，使点 P 到已知点 A 的距离 PA 和过 P 的圆 O 的切线 PT 相等.

解 设 P 为符合条件的点，则

$$PT^2=PO^2-OT^2.$$

$$\because\quad PT=PA,$$

$$\therefore\quad PA^2=PO^2-OT^2,$$

$$PO^2-PA^2=r^2\ (r\ \text{为圆}\ O\ \text{的半径}).$$

过 P 作 OA 的垂线 PH，则

$$PO^2-PA^2=OH^2-HA^2.$$

$$\therefore\quad OH^2-HA^2=r^2.$$

根据问题 **1929** 可求得点 H. 过点 H 作 OA 的垂线，与 XY 相交于 P，则 P 即为所求的点.

2186. 在已知直线 XY 上求一点 P，使过 P 所作两已知圆的切线 PA、PB 相等.

解 根据问题 **963**，先作两已知圆的根轴，它与 XY 的交点 P 即为适合条件的点.

2187. 已知圆 O 外有定点 A，在线段 OA 上求一点 P，过 P 作此圆的切线 PE，使 PA 为 PE 的两倍.

解 [作图] 过 A 作 OA 的垂线 AB，使 AB 等于圆 O 半径的两倍. 过 B 作圆 O 的切线 BE，BE 与 AO 相交于 P，则 P 为所求的点.

[证明] $\angle APB=\angle EPO$，

$$\angle A=\angle E=\angle R,$$

$$\therefore\quad \triangle APB\backsim\triangle EPO.$$

$$\because\quad AB=2EO,\quad \therefore\quad PA=2PE.$$

2188. 已知两圆 O 和 O'. 在圆 O 上求一点 P，过 P 作圆 O' 的切线 PA、PB，设切点为 A、B. PA、PB 与圆 O 相交于 C、D，使 $AB=CD$.

解 [分析] 设 P 为所求的点，$PAO'B$ 为圆内接四边形，$O'P$ 为圆 O 的直径. 因为 $AB=CD$，$\angle APB$ 与 $\angle CPD$ 相等或互为补角，所以 $\triangle PDC$ 和 $\triangle APB$ 的外接圆相等. 因此圆 $PAO'B$ 的直径 $O'P$ 与圆 O 的直径相等. 由此可作图如下.

[作图] 以 O' 为圆心、圆 O 的直径长为半径作圆，与圆 O 相交于 P(一般有两个交点)，过 P 作圆 O' 的切线 PA、PB，则 P 为所求的点.

2189. 已知圆 O 和 O'. 分别作两圆的切线 AB、CD，且 $AB\parallel CD$，使定点 P 到 AB、CD 的距离 PA 和 PC 之比等于已知比 $m:n$.

解 [作图] 设圆 O、圆 O' 的半径分别为 r, r'. 在 OP 的延长线上取点 E，使

$$\frac{OP}{PE}=\frac{m}{n}.$$

以 O' 为圆心、$r'-r\times\frac{n}{m}$ 为半径作圆，过 E 作此圆的切线 EF；作各圆的切线 AB、CD，使它们与 FE 平行，则 AB、CD 为所求切线.

[证明] 设 AC 与 EF 的交点为 G，因 $OH\perp AC$，则

$$\frac{PH}{PG}=\frac{OP}{PE}=\frac{m}{n}.$$

又 $$O'FD\parallel CG,$$

$$\therefore\quad CG=DF=O'D-O'F$$

$$=r'-\left(r'-r\times\frac{n}{m}\right)=\frac{n\cdot r}{m},$$

$$\therefore\quad \frac{HA}{CG}=\frac{r}{r\times\frac{n}{m}}=\frac{m}{n}.$$

因此 $$\frac{PA}{PC}=\frac{m}{n},$$

AB、CD 为所求的切线.

2190. 作两个已知圆 A、B 的切线，使它们的夹角等于已知角 α，且连结两切点的直线过已知点 P.

解　假定此题已解出．EG、FG为两条切线，EA、FB的延长线的交点为C，则

$$\angle ECF=2\angle R-\angle EGF=2\angle R-\alpha.$$

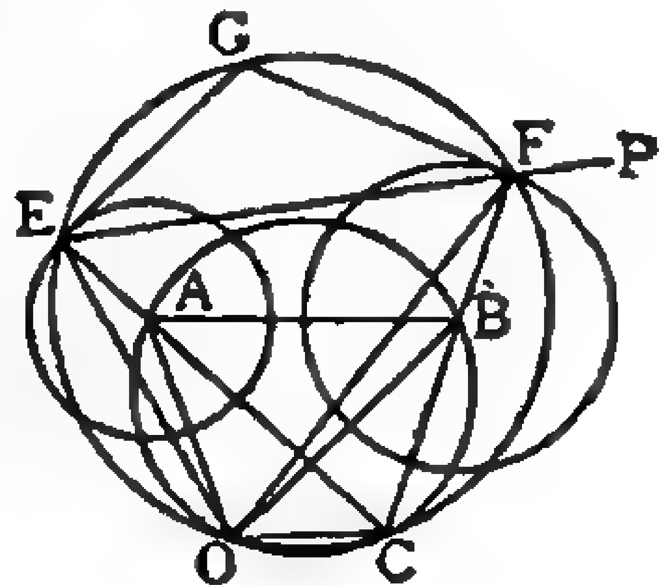
又设圆ABC和圆EFC的第二个交点为O，则$\angle OEA=\angle OFB$．

又　　$\angle EOF=\angle ACB=\angle AOB$，

因此　　$\angle AOE=\angle BOF$．

$$\therefore\quad \triangle AOE\backsim\triangle BOF,$$

$$OA:OB=AE:BF=a:b$$



（a、b为圆A、B的半径）．

由于$\angle ACB$及$\angle AOB$一定，由圆ABO就可以确定点O．又

$$\begin{aligned}\angle OFP&=2\angle R-\angle OFE\\&=2\angle R-\angle CCE\\&=2\angle R-\angle OBA\ （一定），\end{aligned}$$

所以点F也可确定．

12．作倍弦*

2191． 已知圆O和圆O'相交于A，过A作直线与圆O、圆O'相交于B、C，使$AB+AC=m$（m为已知长）．

解　［分析］　(i) 设B、C在点A的异侧，所求直线BAC已作出．过O、O'作BC的垂线OE、$O'F$，则E、F各为AB、AC的中点．所以

$$EF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}m.$$

又过O作$O'F$的垂线OM，则

$$OM=EF=\frac{1}{2}m.$$

因此可作图如下．

［作图］　以OO'为斜边作直角三角形OMO'，使$OM=\frac{1}{2}m$．过A作OM的平行线与两圆相交于B、C，则直线BAC为所求的直线．

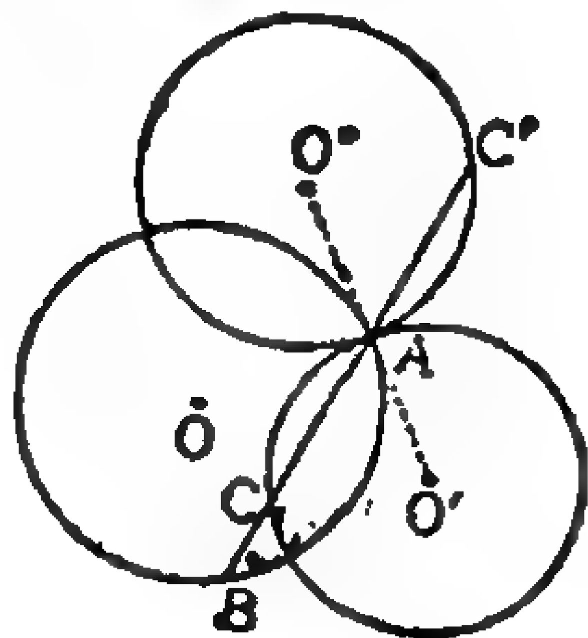
［证明］　过O、O'作BC的垂线、OE、$O'F$，其垂足为E、F，则$EFMO$为矩形．因

$$EF=OM=\frac{1}{2}m,$$

且E、F为AB、AC的中点，所以

$$EF=\frac{1}{2}BC,\ BC=2EF=m.$$

［讨论］　要使本题成立，必须OO'不小于OM，即$OO'\geqq\frac{1}{2}m$．因此$OO'>\frac{1}{2}m$时，一般有两解；$OO'=\frac{1}{2}m$时，有一解．$OO'<\frac{1}{2}m$时，无解．



(ii) B、C在A的同侧时，用回转法作图．延长$O'A$，取$AO''=O'A$，以O''为圆心、$O''A$为半径作圆，对于圆O和圆O''作倍弦BAC'，使$AB+AC'=m$．延长$C'A$与圆O'相交于C，则ACB为所求直线．因为圆O'和圆O''是相交于A的等圆，所以$AC=AC'$，

$$AB+AC=AB+AC'=m.$$

2192． 在上题中，使AB和AC的差等于已知长．

解　［分析］　(i) 若B、C在点A同侧，设符合条件的线段ABC已作出．过O、O'作AC的垂线OF、$O'E$，则

$$AE=\frac{1}{2}AC,$$

$$AF=\frac{1}{2}AB.$$

$$\therefore\quad EF=\frac{1}{2}(AB-AC)=\frac{1}{2}m.$$

过O'作OF的延长线的垂线$O'G$，则

$$OG=EF=\frac{1}{2}m.$$

因此直角三角形$OO'G$可定．

［作图］　以OO'为斜边作直角三角形$OO'G$，使$O'G=\frac{1}{2}m\left(或\ OG=\frac{1}{2}m\right)$．过$A$作$O'G$的平行线与圆$O$、$O'$相交于$B$、$C$，则$ABC$即为所求作的直线．

［证明］　［讨论］　略．

* 过两圆交点的直线被两圆截得的部分叫做倍弦．——译者注

(ii) 若 B、C 在 A 的异侧，先作圆 O' 关于点 A 的对称圆 O''，然后以两圆 O、O'' 代替两圆 O、O'，按上题作图，倍弦即可确定.

别解 设 $AC-AB=m$，过 OO' 的中点 E 作 BC 的垂线 EF，设 AB、AC 的中点分别为 P、Q，则

$$AQ=\frac{1}{2}AC,$$

$$AP=\frac{1}{2}AB.$$

$$AQ-AP=\frac{1}{2}(AC-AB)=\frac{1}{2}m.$$

又 E 为 OO' 的中点，F 为 PQ 的中点，

$$\therefore\quad AF=\frac{1}{2}(AQ-AP)=\frac{1}{4}m.$$

因此可作图如下.

[作图] 设 OO' 的中点为 E，以 AE 为直径作半圆，在半圆上求点 F，使 $AF=\frac{1}{4}m$，则割线 $BAFC$ 即为所求直线.

2193. 已知圆 O 和圆 O' 相切于点 B，过 B 作直线与两圆相交于 E、F，使 EF 等于已知长 l.

解 [作图] 设两圆连心线 OO' 的延长线与两圆相交于 A、C，以 C 为圆心、l 为半径作圆. 过 A 作圆的切线 AD. 过两圆的切点 B 作 $EF\parallel CD$，与两圆相交于 E、F，则直线 EF 为所求直线.

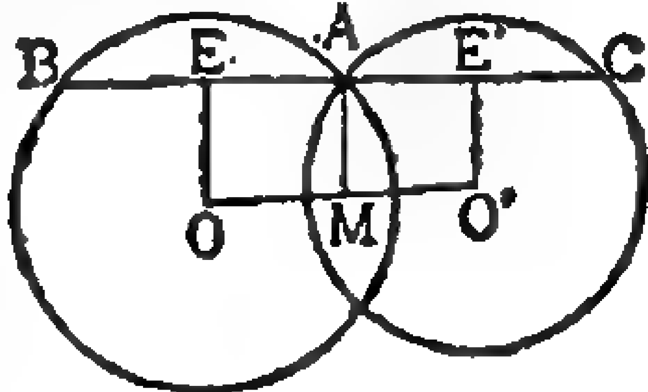
[证明] $\angle AEB$ 和 $\angle BFC$ 都是半圆周角，所以都是直角. 因此 $EFCD$ 为矩形，$EF=CD=l$，EF 即为所求的直线.

2194. 过两已知圆 O 和 O' 的一个交点作直线，与两圆相交于 B、C，使

(1) $AB=AC$；

(2) $AB:AC$ 等于已知比 $m:n$.

解 [分析] (1) 假定此题已解出. 设 BA、AC 的中点分别为 E 和 E'，连心线 OO' 的中点为 M，则因 $OE\parallel MA\parallel O'E'$，且 $AB\perp OE$，所以



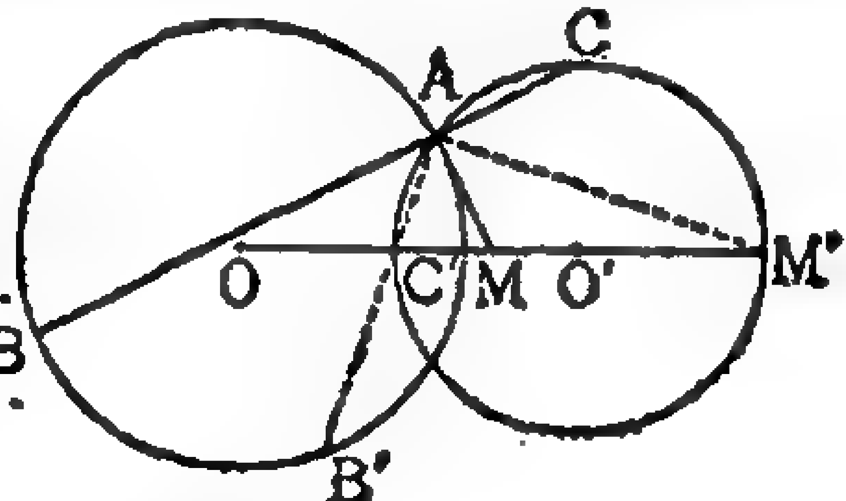
$$MA\perp BC.$$

因此，可作图如下.

[作图] 求 OO' 的中点 M，连结 AM，过 A 作与 AM 垂直的直线与圆 O 和圆 O' 相交于 B、C，则 BAC 为所求直线.

[证明] 略.

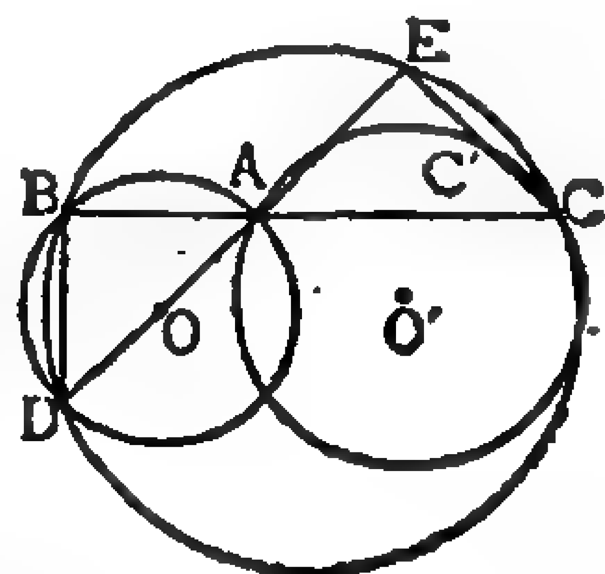
(2) [作图] 点 M、M' 把 OO' 内分和外分为 $m:n$. 过 A 作 MA、$M'A$ 的垂线，和圆 O、圆 O' 相交于 B、C、B'、C'. 则 BAC 和 $AC'B'$ 均为所求直线.



[证明] 略.

2195. 过两已知圆 O、O' 的一个交点 A 作割线，与两圆相交于 B、C，使 AB 与 AC 的积等于 m^2（m 表示已知线段长）.

解 [分析] 假设此题已解得，BAC 为所求直线. 过 A 作圆 O 的直径 AD，作过 B、D、C 的圆. 设圆与 DA 的延长线相交于 E，则



$$AD\cdot AE=AB\cdot AC=m^2.$$

因 AD 为已知圆的直径，且 $AD\cdot AE=m^2$，所以 E 为定点. 又 $\angle CED=\angle ABD=\angle R$. 因此 EC 为定直线. 故可作图如下.

[作图] 作圆 O 的直径 AD，在 DA 的延长线上求一点 E，使 $AD\cdot AE=m^2$. 过 E 作 DE 的垂线 EC，与圆 O' 相交于 C（一般有两个交点），倍弦 CAB 所在的直线即为所求.

[证明] 略.

[讨论] EC 与圆 O' 一般有两个交点，所以所求弦为两条.

若 EC 与圆 O' 相切，所求弦为一条；EC 与圆 O' 无公共点时无解.

注 用同上面的思考方法可解下面的问题. 过两圆的一个交点 A 作一直线，与两圆分别相交于 B、C，使 AB、AC 的积最大.

在上面的解法中，$AB\cdot AC=AD\cdot AE$，因此，要使 $AB\cdot AC$ 最大，必须 $AD\cdot AE$ 最大. 为此，必须 AE 最大，如以上讨论所述，取 EC 与圆 O' 相切的情况，过其切点 C 和 A 作

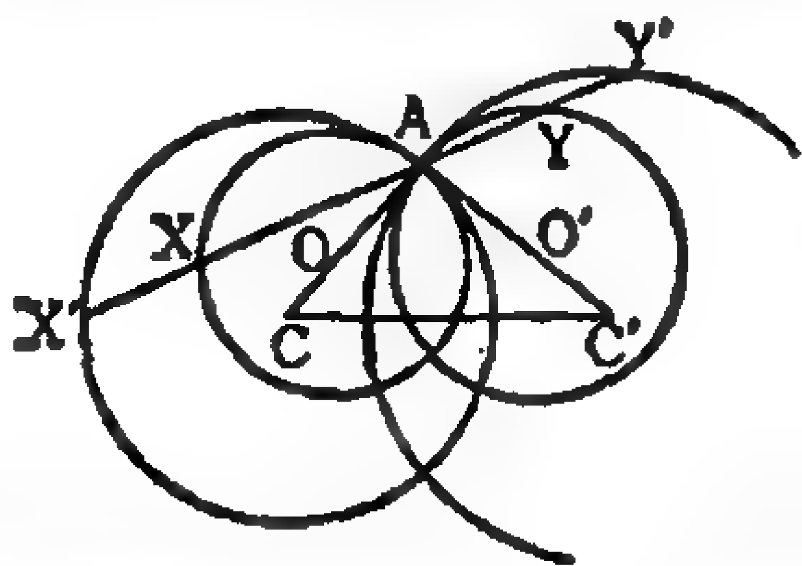
直线即可。

2196. 过两已知圆 O、O' 的一个交点 A 作倍弦 XAY，使 $aAX+bAY=c^2$（a、b、c 为已知长）。

解 在 AO、AO' 的延长线上取 C、C'，使

$$AC=\frac{a}{c}\cdot AO,$$

$$AC'=\frac{b}{c}\cdot AO'.$$



以 C、C' 为圆心、CA 与 $C'A$ 为半径作两个圆．作这两圆的倍弦 $X'AY'$ 与圆相交于 X'、Y'，而与圆 O、O' 分别相交于 X、Y，则

$$AX':AX=AC:AO=a:c,$$

$$\therefore\quad AX'=\frac{a}{c}\cdot AX.$$

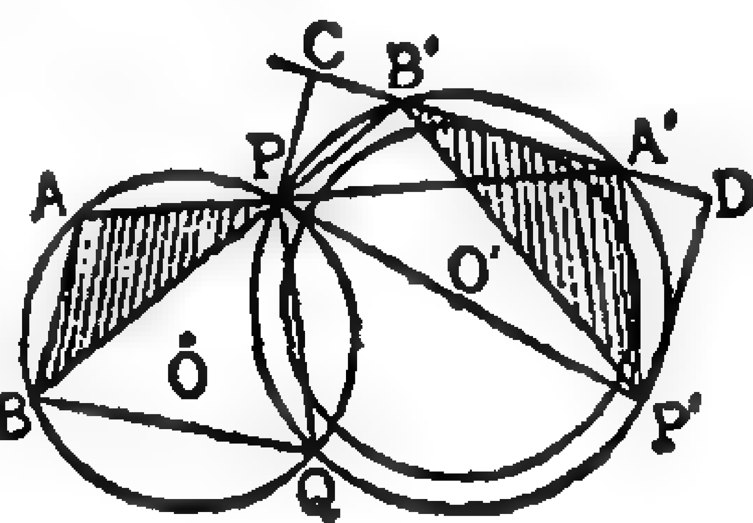
同样，
$$AY'=\frac{b}{c}\cdot AY.$$

所以
$$X'Y'=\frac{a}{c}\cdot AX+\frac{b}{c}\cdot AY,$$

$$\therefore\quad X'Y'=c.$$

因此本题可化为对以 C、C' 为圆心的圆，作等于长为 c 的倍弦问题，可根据问题 **2191** 作图．

2197. 过两个已知圆 O、O' 的一个交点 P 作两条倍弦 APA'、BPB'（A、B 在一个圆上，A'、B' 在另一圆上）．使它们的夹角等于已知角 α，且使两个三角形 APB 和 $A'PB'$ 的面积相等．



解 设圆 O 和 O' 的半径分别为 R、r，所求直线 APA'、BPB' 已作出，且两圆的另一交点为 Q．过 P 作圆 O 的切线 PP'，与圆 O' 相交于 P'．则

$$\angle QPP'=\angle QBP,$$

$$\angle QPA'=\angle QBA.$$

所以 $\angle P'PA'=\angle P'B'A'=\angle PBA$,

又 $\angle APB=\angle A'PB'=\angle A'P'B'$.

因此 $\triangle PAB\backsim\triangle P'A'B'$,

$$\therefore\quad \triangle PAB:\triangle P'A'B'=AB^2:A'B'^2$$
$$=R^2:r^2\ (\text{定比}).$$

但 $\triangle PAB=\triangle PA'B'$,

所以 $\triangle PA'B':\triangle P'A'B'=R^2:r^2$.

过 P、P' 作 $A'B'$ 的垂线 PC、$P'D$，则

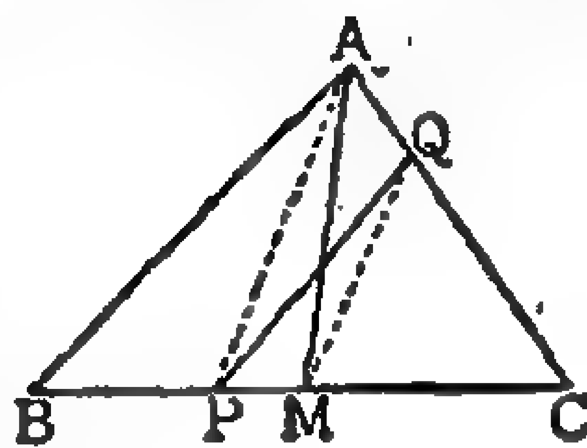
$$\triangle PA'B':\triangle P'A'B'=PC:P'D.$$

$$\therefore\quad PC:P'D=R^2:r^2.$$

在圆 O' 中作含 α 的弓形弦 $A''B''$，作与此弦相切的同心圆 O'；再作此圆的一条切线 $A'B'$，使它到两定点 P、P' 的距离比为 $R^2:r^2$（问题 **2180**）．故可求得 A'、B'，即可求出倍弦 APA' 和 BPB'．

13. 作按一定条件分割面积的直线

2198. 过已知 $\triangle ABC$ 一边 BC 上的已知点 P，求作一直线平分此三角形的面积．



解 ［作图］ 作中线 AM，连结 AP，过 M 作 AP 的平行线 MQ，与 AC 相交于 Q，则 PQ 即为所求直线．

［证明］ $MQ\parallel AP$,

$$\therefore\quad S_{\triangle PMQ}=S_{\triangle AMQ}.$$

等式两边同加上 $\triangle QMC$,

$$S_{\triangle PQC}=S_{\triangle AMC}.$$

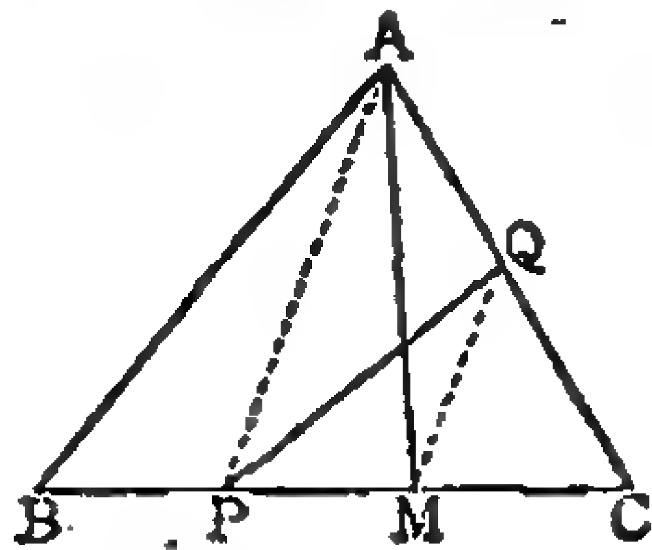
因 M 为边 BC 的中点，所以

$$S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore\quad S_{\triangle PQC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

因此 PQ 即为所求直线．

2199. 过已知三角形 ABC 一边 BC 上的一点 P 作直线，将此三角形的面积分成已知比 $m:n$．



解 ［作图］ 在 BC 上求一点 M，使 $BM:MC=m:n$，连结 AP．过 M 作 $MQ\parallel AP$，MQ 与 AC 相交于 Q，则 PQ 即为所求直线．

［证明］ $\because$ $MQ\parallel AP$,

$$\therefore\quad S_{\triangle PMQ}=S_{\triangle AMQ}.$$

上式两边加上 $\triangle QMC$,

$$S_{\triangle PQC}=S_{\triangle AMC},$$

且 $BM:MC=m:n$.

所以 $S_{\triangle AMB}:S_{\triangle AMC}=m:n$.

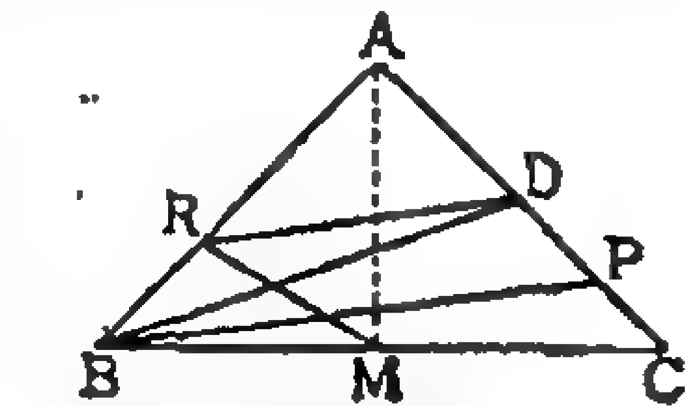
因此

四边形 $ABPQ$ 面积: $\triangle PQC$ 面积 $=m:n$.

2200. 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle A$ 为直角, AC 边上有一已知点 P.

(1) 在 AB 或其延长线上求点 R, 使 $AP\cdot AR=S_{\triangle ABC}$.

(2) 设 BC 的中点 M, 证明 $\angle PMR$ 一定, 与点 P 的位置无关.



解 (1) 设 AC 的中点为 D, 过 D 作 BP 的平行线, 与 AB 相交于 R, 则 R 即为所求的点. 理由是:

$$\because\ DR\parallel BP,$$

$$\therefore\ S_{\triangle ARP}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

且 $\angle A=\angle R$, 所以

$$S_{\triangle ARP}=\frac{1}{2}AR\cdot AP.$$

因而 $AR\cdot AP=S_{\triangle ABC}$.

(2) $\triangle ABM$ 是等腰直角三角形.

所以 $AM^2=\frac{1}{2}AB^2=AP\cdot AR$,

$$AP:AM=AM:AR.$$

又 $\angle PAM=\angle RAM$,

$$\therefore\ \triangle APM\backsim\triangle AMR,$$

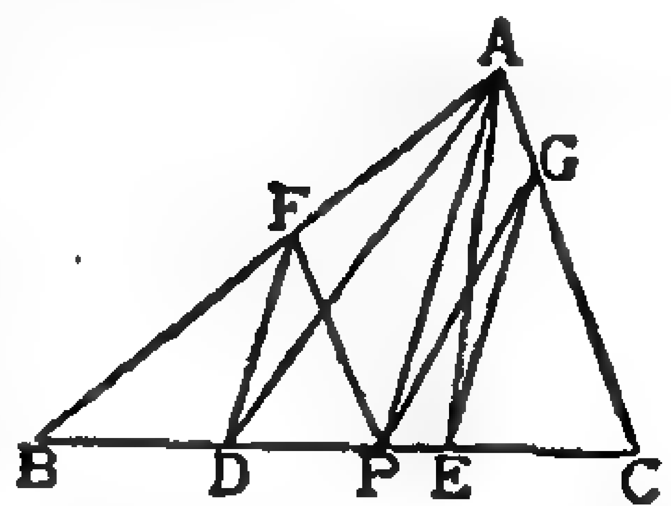
$$\angle AMR=\angle APM.$$

因此 $\angle PMR=\angle AMP+\angle APM$

$$=180^\circ-\angle MAP$$

$$=135^\circ\ (一定).$$

2201. 过 $\triangle ABC$ 边 BC 上的已知点 P 作两条直线, 使它们将此三角形的面积三等分.



解 [作图] 在 BC 上求点 D、E, 使 $BD=DE=EC$. 连结 AP, 作 DF 和 EG 都平行于 AP, 与边 AB、AC 分别相交于 F、G, 连结 PF、PG, 则 PF、PG 即为所求直线.

[证明] 根据作图 $DF\parallel AP$,

$$\therefore\ S_{\triangle PDF}=S_{\triangle ADF}.$$

又 $AP\parallel GE$,

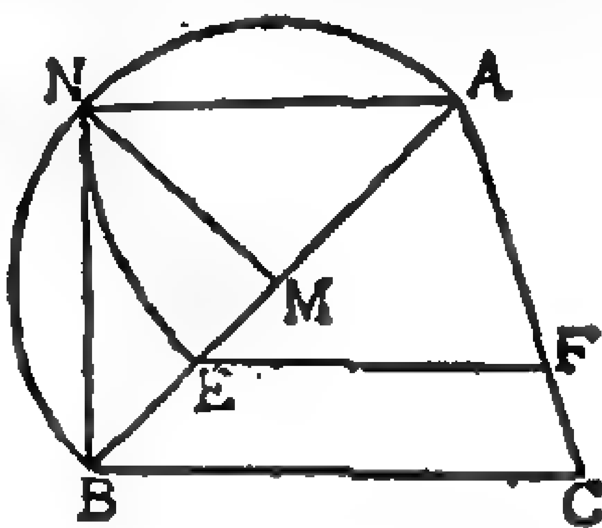
$$\therefore\ S_{\triangle PEG}=S_{\triangle AEG},$$

$$S_{\triangle BPF}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

同样有 $S_{\triangle CPG}=S_{\triangle AEC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

因此 四边形 $AFPG$ 面积 $=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

2202. 作与已知三角形 ABC 的底边 BC 平行的直线, 使它平分三角形 ABC 的面积.



解 [作图] 在三角形外, 以 AB 为直径作半圆, 过 AB 的中点 M 作 AB 的垂线, 与圆相交于 N. 在 AB 上取 $AE=AN$, 过 E 作 BC 的平行线 EF, 与 AC 相交于 F, 则 EF 即为所求的直线.

[证明] 连结 NB, 在 $\triangle ANB$ 中 $MN\perp AB$, $\angle ANB=\angle R$.

$$\therefore\ AN^2=AB\cdot AM\ (问题\ 1134).$$

又根据作图 $EF\parallel BC$,

因此 $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$.

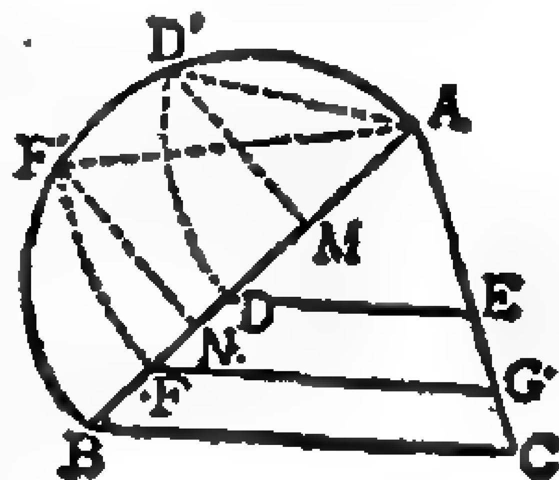
所以 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AE^2}{AB^2}$,

$$AE^2=AN^2=AB\cdot AM.$$

因而 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AB\cdot AM}{AB^2}=\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}$.

$$\therefore\ S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

2203. 作与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 平行的两条直线, 三等分此三角形面积.



解 [作图] 点 M、N 将 AB 三等分, 过 M、N 作 AB 的垂线, 与以 AB 为直径的半圆相交于点 D'、F', 在 AB 上取线段 $AD=AD'$, $AF=AF'$. 过 D、F 作 BC 的平行线, 与 AC 相交于 E、G, 则 DE、FG 即为所求的直线.

[证明] D' 为以 AB 为直径的半圆上的一点, 且 $D'M\perp AB$, 所以 $AD'^2=AM\cdot AB$ (问题 1134),

$$\therefore\ \frac{AD'^2}{AB^2}=\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}. \quad ①$$

同样 $\frac{AF'^2}{AB^2}=\frac{AN}{AB}=\frac{2}{3}$. ②

根据作图， $DE \parallel FG \parallel BC$，
且 $AD=AD'$，$AF=AF'$，所以

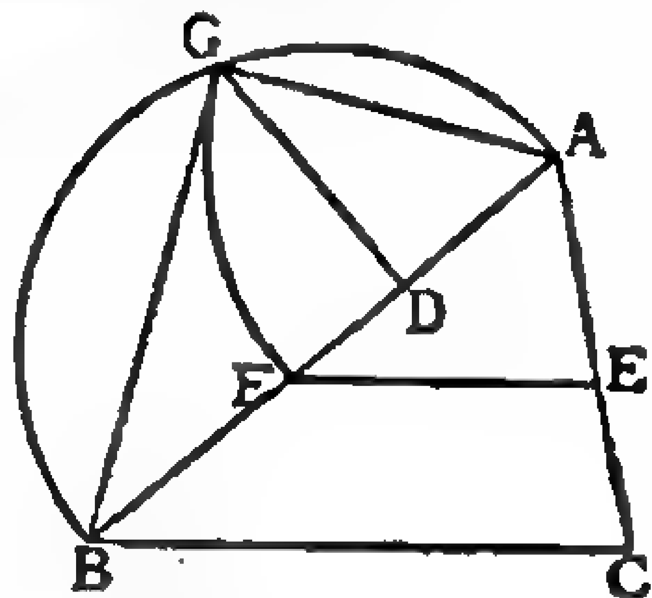
$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD^2}{AB^2}=\frac{AD'^2}{AB^2}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{S_{\triangle AFG}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AF^2}{AB^2}=\frac{AF'^2}{AB^2}=\frac{2}{3}.$$

于是 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle AFG}:S_{\triangle ABC}=1:2:3$。
因此 DE，FG 即为所求作的直线。

2204. 作与已知三角形 ABC 的底边 BC 平行的直线，使三角形分成已知比 $m:n$。

解 [作图] 点 D 将 AB 分成 $DB:AD=m:n$. 过 D 作 AB 的垂线，与以 AB 为直径的圆相交于 G，在 AB 上取 $AF=AG$，过 F 作 BC 的平行线，与边 AC 相交于 E，则 EF 即为所求的直线。



[证明] ∵ $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle AFE}=AB^2:AF^2$
$=AB^2:AG^2$，

且 $\angle AGB=\angle B$，$GD\perp AB$.

$$\therefore\ AG^2=AB\cdot AD,$$

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle AFE}=AB^2:AB\cdot AD=AB:AD.$$

$$\therefore\ (S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AFE}):S_{\triangle AFE}=(AB-AD):AD,$$

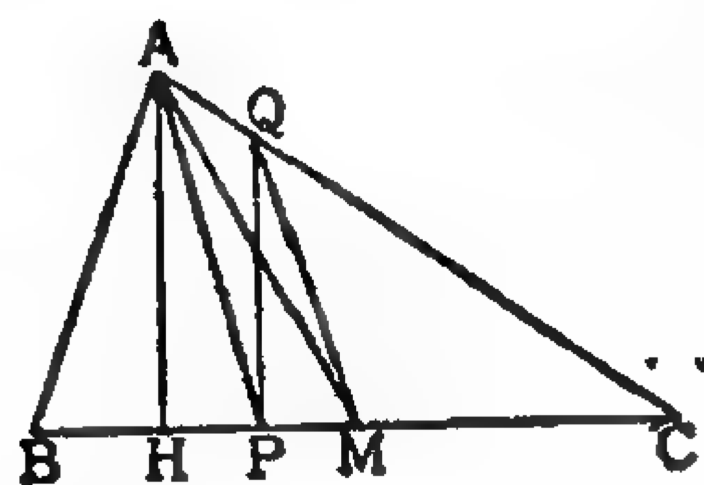
即梯形 $FBCE:\triangle AFE=DB:AD$.
根据作图， $DB:AD=m:n$，

$\therefore$ 梯形 $FBCE:\triangle AFE=m:n$.

2205. 作与已知三角形 ABC 底边 BC 垂直的直线，将已知三角形面积二等分或 n 等分。

解 [分析] 如图，设 PQ 为所求直线，M 为 BC 的中点，则

$S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}{}_{\triangle ABC}$.



$$\therefore\ S_{\triangle AMC}=S_{\triangle PQC},\ AP\parallel QM.$$

$$\therefore\ CQ:CA=CM:CP. \qquad ①$$

过 A 作 BC 的垂线 AH，则 $AH\parallel PQ$，所以

$$CP:CH=CQ:CA. \qquad ②$$

根据①、②，$CM:CP=CP:CH$. 即 CP 为 CM、CH 的比例中项，是定长，所以 P 为定点。

[作图] 过 A 作 BC 的垂线 AH，设 BC 的中点为 M，在 CB 上求点 P，使 $CP^2=CM\cdot CH$，过 P 作直线垂直于 BC，与 AC 相交于 Q，则 PQ 即为所求的直线。

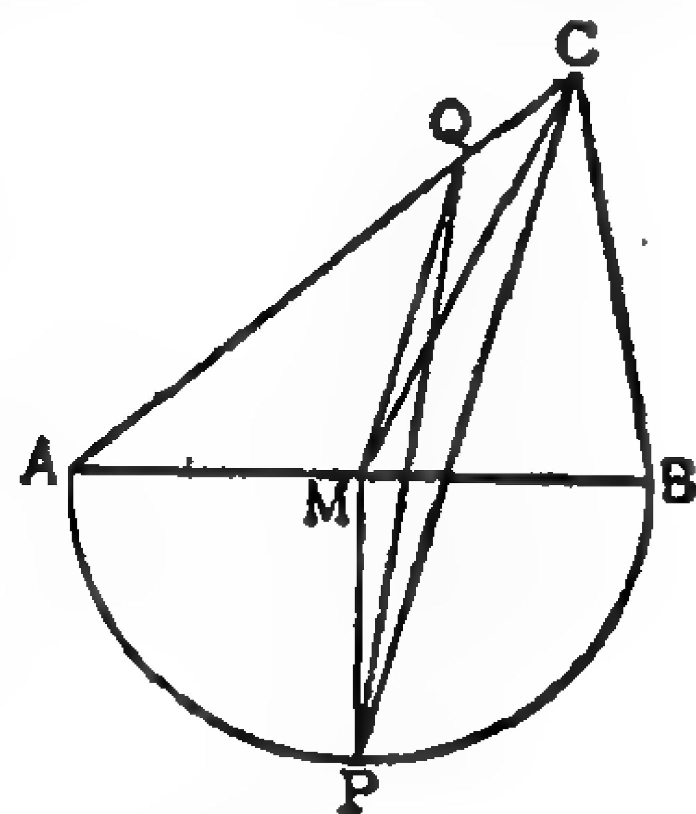
[证明] [讨论] 略。

注 1 在解中，设 $AC>AB$. 若 $AB>AC$，只要求点 P 使 $BP^2=BH\cdot BM$ 即可。

2 在上面的作图中，以 M 为 BC 的中点. 若在 BC 上取 $CM=\frac{1}{n}\times BC$，象上面那样作图，则 $S_{\triangle PQC}=\frac{1}{n}S_{\triangle ABC}$. 证明同上。

2206. 以 $\triangle ABC$ 的边 AB 为直径，在三角形外作半圆. 过半圆弧的中点 P 求作一直线，使它平分由半圆弧与边 BC、CA 所围成的图形的面积。

解 过 AB 的中点 M 作 CP 的平行线，与 CA 交于 Q，则 PQ 即为所求的直线. 理由是：



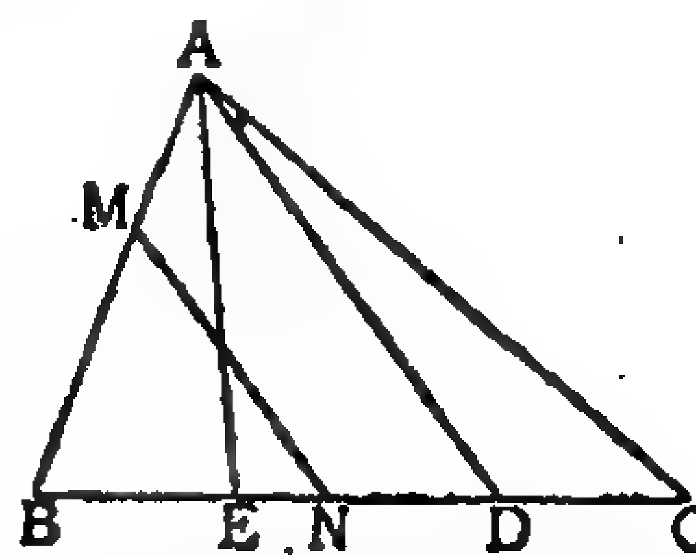
$PC\parallel MQ$，所以 $S_{\triangle PMQ}=S_{\triangle CMQ}$.
因此直线 PQ、QA 与弧 AP 所围成的面积等于 $\frac{1}{4}$ 圆 MAP 和 $\triangle AMC$ 的面积之和，即等于 $\triangle ABC$ 与半圆面积之和的一半。

2207. 已知 $\triangle ABC$ 和边 BC 上的一点 D. 求作平行于定直线 AD 的直线 MN，使它将 $\triangle ABC$ 的面积分割成 $m:n$.

解 [作图] 在 BC 上求点 E，使

$$\frac{BE}{CE}=\frac{m}{n}.$$

若 E 在 B 和 D 之间，取 BN 等于 BE、BD 的比例中项，过 N 作 AD 的平行线，与 AB 交于 M，则 MN 即为所求的直线。



[证明] $\triangle ABE$ 与 $\triangle MBN$ 有公共角 B，所以

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle MBN}}=\frac{AB\cdot BE}{BM\cdot BN}. \qquad ①$$

又 $MN\parallel AD$，所以

$$\frac{BD}{BN}=\frac{BA}{BM}. \qquad ②$$

根据作图，$\frac{BD}{BN}=\frac{BN}{BE}$。再根据②，

$$\frac{BN}{BE}=\frac{BA}{BM}.$$

$$\therefore\ AB\cdot BE=BM\cdot BN.$$

由①，　$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle MBN}$.

因　$BE:EC=m:n$,

所以　$S_{\triangle ABE}=\frac{m}{m+n}S_{\triangle ABC}$,

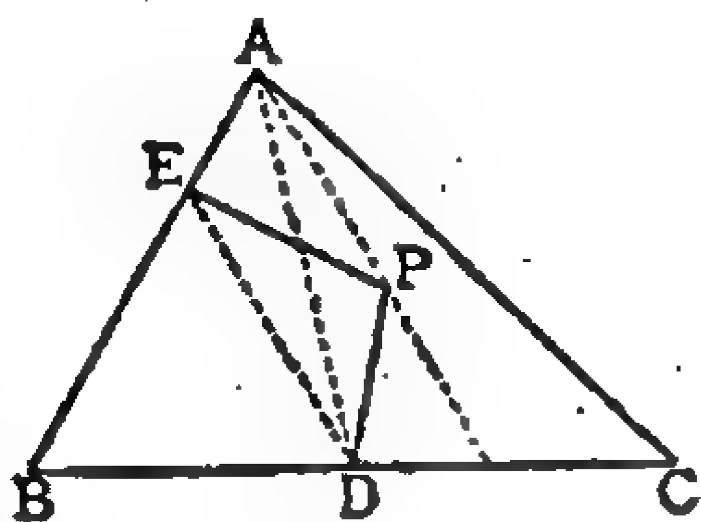
$$\therefore\ S_{\triangle MBN}=\frac{m}{m+n}S_{\triangle ABC}.$$

四边形 $AMNC$ 面积 $=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle MBN}$

$$=\frac{m}{m+n}S_{\triangle ABC},$$

$\therefore\ S_{\triangle MBN}$:四边形 $AMNC$ 面积 $=m:n$。

2208. 过已知 $\triangle ABC$ 内的一点 P 作两条直线，使它们平分 $\triangle ABC$ 的面积。



解 [作图] 连结 AP，过 BC 的中点 D 作 AP 的平行线，与边 AB 或 AC 相交于 E。连结 PD, PE，则 PD、PE 即为所求的两直线。

[证明] $\because\ AP\parallel ED$,

$$\therefore\ S_{\triangle PED}=S_{\triangle AED}.$$

上式两边同加上 $\triangle BDE$，则

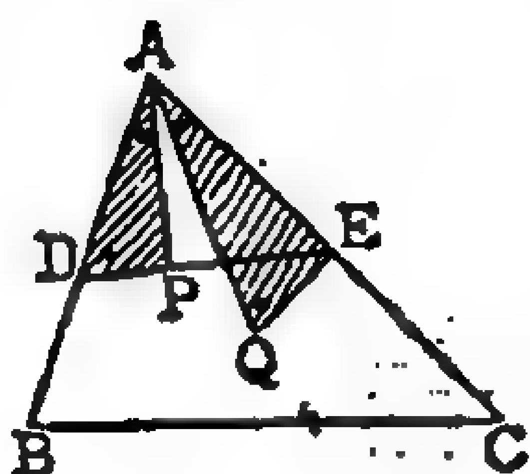
四边形 $PEBD$ 面积 $=S_{\triangle ABD}$

$$=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

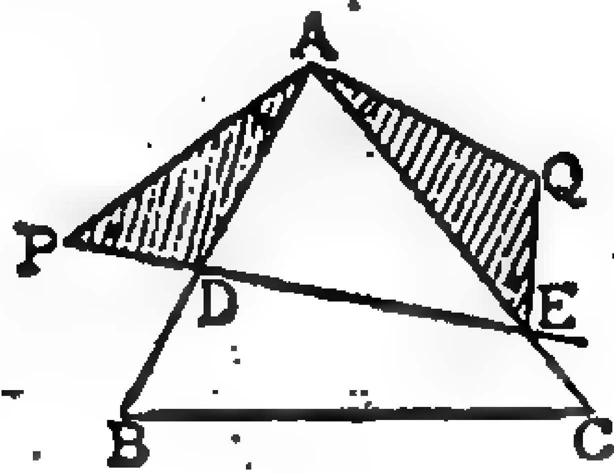
2209. 过已知点 P 作直线，将已知 $\triangle ABC$ 的面积二等分。

解 设 DPE 为所求直线，$\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 有公共角 A，所以

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}=\frac{1}{2}.$$



(P 在 $\triangle ABC$ 内)



(P 在 $\triangle ABC$ 外)

$$\therefore\ AD\cdot AE=\frac{1}{2}AB\cdot AC=m^2\ (一定).$$

根据问题 **2098** 可作图。

2210. 过 $\triangle ABC$ 边 AB 上的一个已知点 P 作直线，与边 AC 或其延长线相交于 Q，与边 BC 或其延长线相交于 M，使 $\triangle APM$ 和 $\triangle AQM$ 的比为已知比 $m:n$。

解 [分析] 设符合条件的直线 PMQ 已作出，则

$$S_{\triangle APM}:S_{\triangle AMQ}=PM:MQ.$$

但　$S_{\triangle APM}:S_{\triangle AMQ}=m:n$,

过 M 作 AC 的平行线 MN 与 AB 相交于 N，则

$PN:NA=PM:MQ$

$=m:n$。

故可作图如下。

[作图] 将 AP 在点 N 内分(或外分)成 $PN:NA=m:n$。过 N 作 AC 的平行线，与 BC 交于 M，PM 的延长线与 AC 交于 Q，则 PMQ 为所求直线。

[证明] 分析中已很明确，故略。

注 在上图中，N 内分 AP，若设 N 为外分 AP 为定比的点，可同样作图。

2211. 在 $\triangle ABC$ 内求作直线 PQ，与 AB、BC 相交于 P、Q，使

$$BP+BQ=\frac{1}{2}(AB+BC+CA),$$

且　$S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

解 [分析] 假设直线 PQ 已作出，与 AC 相切的旁切圆与 BC 相切于 E，则

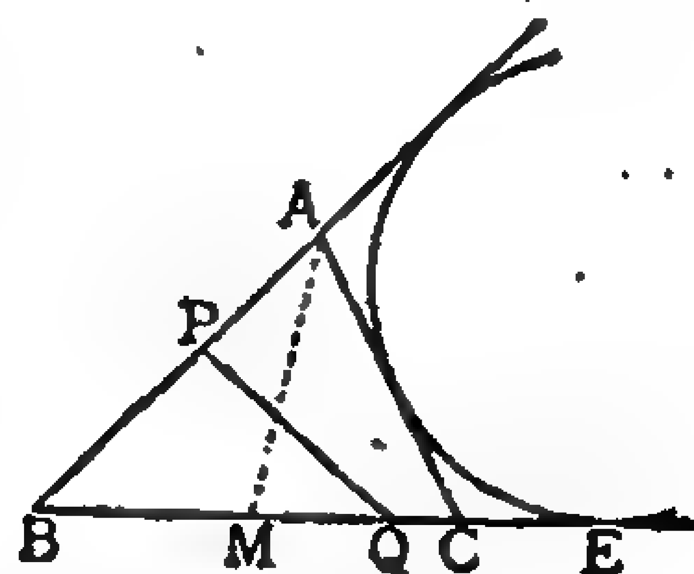
$$BE=\frac{1}{2}(AB+BC+CA).$$

$\therefore\ BP+BQ=BE.$

又设 BC 的中点为 M，则

$S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

$=S_{\triangle ABM}.$



$$\therefore\ BP\cdot BQ=AB\cdot BM.$$

因 $AB\cdot BM$ 已知，设它为 K^2，即得如下作图。

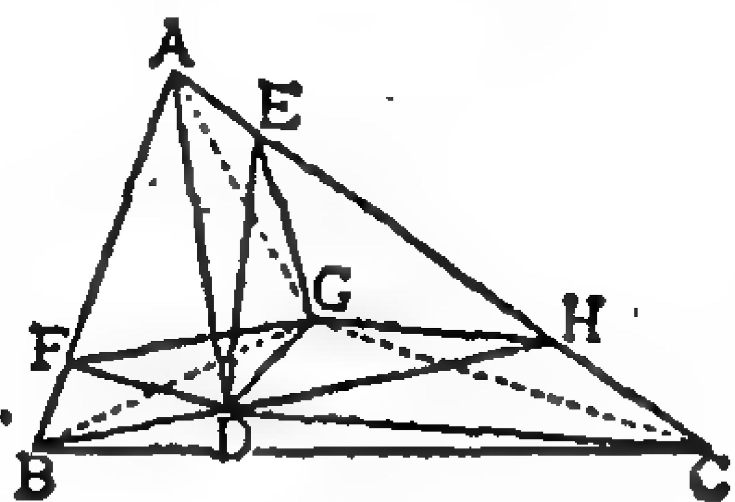
[作图] 设与 AC 相切的旁切圆与 BC 的

切点为 E，在 BE 上求 Q 点，使 $BQ\cdot QE=K^2$；在 AB 上求点 P，使 $BP=QE$，则 PQ 即为所求的直线。

[证明] 分析中已很明确，故略。

2212. 过 $\triangle ABC$ 内的已知点 D 求作三条直线，三等分已知三角形 ABC。

解 [作图] 设 $\triangle ABC$ 的重心 G，过 G 分别作 DA、DB、DC 的平行线，与 $\triangle ABC$ 的边分别相交于 E、F、H，则 DE、DF、DH 三等分 $\triangle ABC$。



[证明] 设 E、F、H 分别在 CA、AB、CA 上。

$$S_{\triangle GBD}=S_{\triangle FBD},$$
$$S_{\triangle GDC}=S_{\triangle HDC}.$$

$\therefore$ 五边形 $DFBCH$ 的面积 $=S_{\triangle GBC}$

$$=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

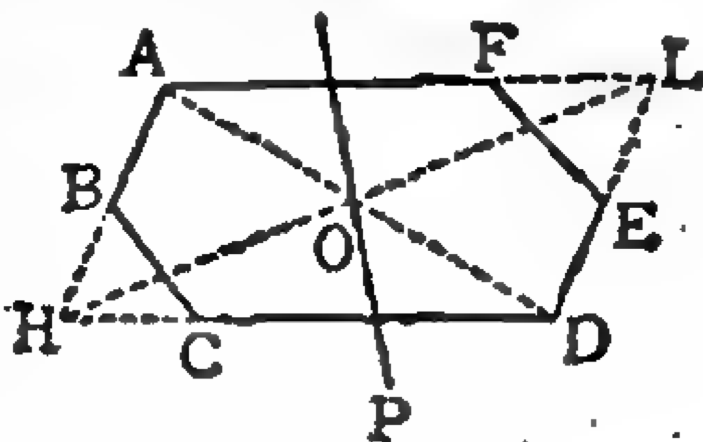
又 $S_{\triangle DEG}=S_{\triangle AEG}$，$S_{\triangle DHG}=S_{\triangle CHG}$，

$$\therefore\quad S_{\triangle DHE}=S_{\triangle GCA}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

因此 四边形 $DEAF$ 的面积 $=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

2213. 已知六边形 $ABCDEF$ 的三组对边分别平行且相等，过已知点 P 作直线平分此六边形。

解 [作图] 设 AB、DC 的延长线的交点为 H，AF、DE 的延长线的交点为 L. 设 AD、HL 的交点为 O，连结 PO，则 PO 为所求直线。



[证明] 因为 $AB\parallel DE$，$AF\parallel CD$，所以 $AHDL$ 为平行四边形。因此过它的对角线的交点 O 的直线 PO 平分平行四边形 $AHDL$ 的面积。

因为 $BC \perp\!\!\!= FE$，所以

$$\triangle HBC\cong\triangle LEF.$$

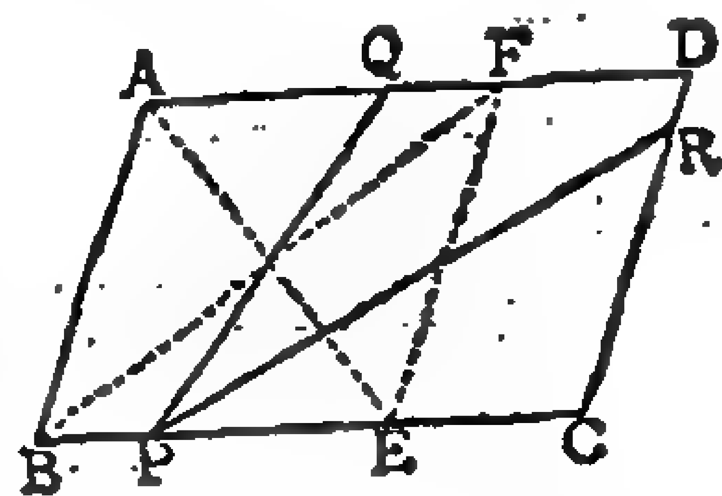
故 PO 平分六边形 $ABCDEF$。

2214. 过已知平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 上的已知点 P 求作两条直线，三等分四边形 $ABCD$。

解 在边 BC、AD 上取点 E、F，使

$$EC=\frac{1}{3}BC,\quad FD=\frac{1}{3}AD.$$

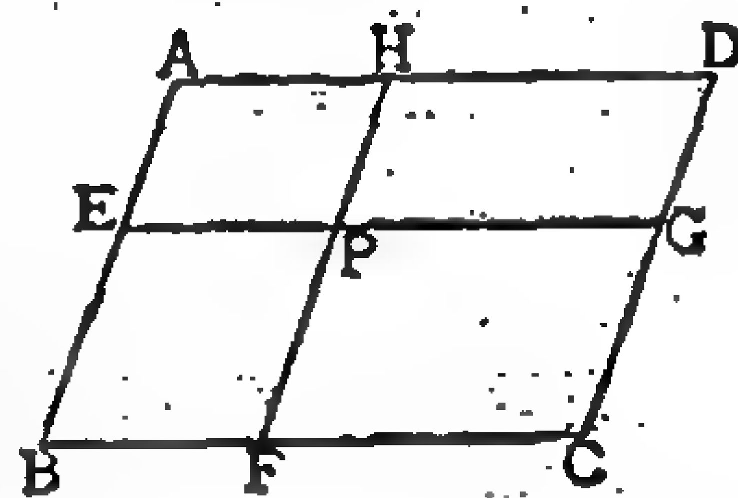
连结 EF，则 $ABEF$ 为平行四边形，且等于四边形 $ABCD$ 的 $\frac{2}{3}$. 过 P 作平分平行四边形 $ABEF$ 的直线 PQ，及平分四边形 $PCDQ$ 的直线 PR（问题 2216）。则 PQ、PR 即为所求作的直线。



2215. 已知平行四边形 $ABCD$ 内的一点 P，过 P 作各边的平行线，使

$$\square AEPH:\square PFCG=5:9,$$
$$\square EBFP:\square HPGD=5:4.$$

解 设过 P 所作各边的平行线与 AB、BC、CD、DA 相交于 E、F、G、H，因为 $\square AEPH$ 和 $\square PFCG$ 都含顶角 P，大小相等。所以这两个平行四边形的面积与 $\angle P$ 的两边的积成比例。



$$\therefore\quad \frac{\square AEPH\text{ 的面积}}{\square PFCG\text{ 的面积}}=\frac{PE\cdot PH}{PG\cdot PF}=\frac{PE}{PG}\cdot\frac{PH}{PF}=\frac{5}{9}. \quad ①$$

同理 $$\frac{\square EBFP\text{ 的面积}}{\square HPGD\text{ 的面积}}=\frac{PE\cdot PF}{PG\cdot PH}=\frac{PE}{PG}\cdot\frac{PF}{PH}=\frac{5}{4}. \quad ②$$

将①、②两边相乘，

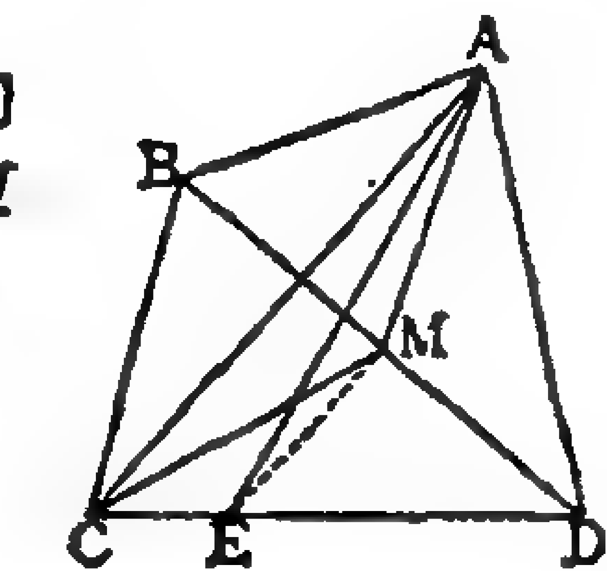
$$\left(\frac{PE}{PG}\right)^2=\frac{25}{36},\quad\therefore\quad\frac{PE}{PG}=\frac{5}{6}. \quad ③$$

把③代入①式， $\frac{PH}{PF}=\frac{2}{3}$.

因此，作把 AB 分为 2:3 的内分点 E，把 AD 分为 5:6 的内分点 H；过 E 和 H 分别作 AD、AB 的平行线，则两平行线的交点 P 即为所求的点。这个交点很容易被证明为符合条件的点。

2216. 过四边形 $ABCD$ 的一个顶点 A 求作一直线，平分此四边形。

解　[作图]　设 BD 的中点为 M，过 M 作 $ME \parallel AC$，与 DC 或 BC 相交于 E，则 AE 即为所求的直线。



[证明]　M 为 BD 的中点，所以四边形 $ABCM$ 为四边形 $ABCD$ 的一半，且 $ME \parallel AC$。所以

$S_{\triangle ACM}=S_{\triangle ACE}$，

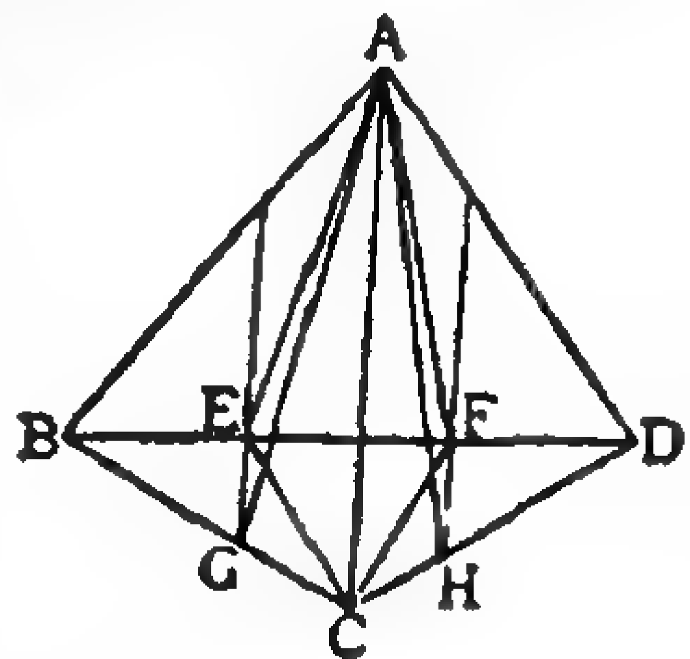
因此，

四边形 $ABCE$ 面积＝四边形 $ABCM$ 面积

$=\frac{1}{2}$(四边形 $ABCD$ 面积)。

2217.　过已知四边形 $ABCD$ 的顶点 A，作两条直线三等分此四边形。

解　[作图]　作对角线 BD 的三等分点 E、F，过 E 和 F 点分别作 AC 的平行线与 BC、CD 相交于 G、H，则 AG、AH 为所求直线。



[证明]　根据作图，$BE=EF=FD$。

$\therefore$　$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEF}=S_{\triangle AFD}$，

$S_{\triangle CBE}=S_{\triangle CEF}=S_{\triangle CFD}$。

$\therefore$　四边形 $ABCE$ 面积

$=\frac{1}{3}$ 四边形 $ABCD$ 面积。

因为 $EG \parallel AC$，所以 $S_{\triangle AEG}=S_{\triangle CEG}$。

$\therefore$　$S_{\triangle ABG}=$四边形 $ABCE$ 面积

$=\frac{1}{3}$ 四边形 $ABCD$ 面积。

同理　$S_{\triangle ADH}=$四边形 $ADCF$ 面积

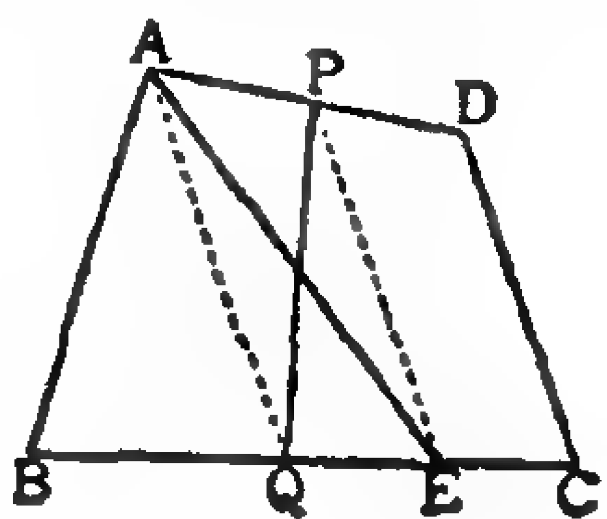
$=\frac{1}{3}$ 四边形 $ABCD$ 面积。

因此　四边形 $AGCH$ 面积

$=\frac{1}{3}$ 四边形 $ABCD$ 面积。

2218.　过四边形 $ABCD$ 一边 AD 上的已知点 P 作直线，平分四边形的面积。

解　根据问题**2216**的作法，过顶点 A 作平分四边形面积的直线 AE，与 BC 相交于 E，连结 PE，过 A 作 PE 的平行线 AQ，与 BC 交于 Q，则 PQ 为求所直线。理由是：



$\because$　$PE \parallel AQ$，

$\therefore$　$S_{\triangle QPE}=S_{\triangle APE}$。

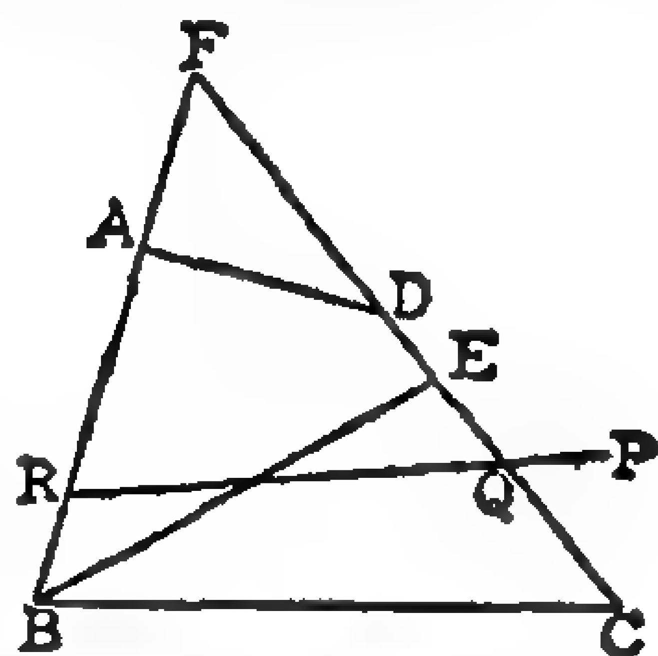
$\therefore$　四边形 $PQCD$ 面积

＝四边形 $AECD$ 面积

$=\frac{1}{2}$ 四边形 $ABCD$ 面积。

2219.　过一已知点 P 作一直线，平分已知四边形 $ABCD$。

解　过顶点 B 作直线 BE 平分四边形 $ABCD$（问题**2216**）。设 BA、CD 的交点为 F，过 P 作直线 PQR，使 $S_{\triangle FQR}=S_{\triangle FBE}$（问题**2098**），则 PQR 为所求直线。理由是：BE 平分 $ABCD$，所以 $\triangle BEC$ 是已知四边形的一半。又根据作图 $S_{\triangle FBE}=S_{\triangle FRQ}$，所以



四边形 $RBCQ$ 面积 $=S_{\triangle BEC}$。

因此直线 PQR 平分四边形 $ABCD$。

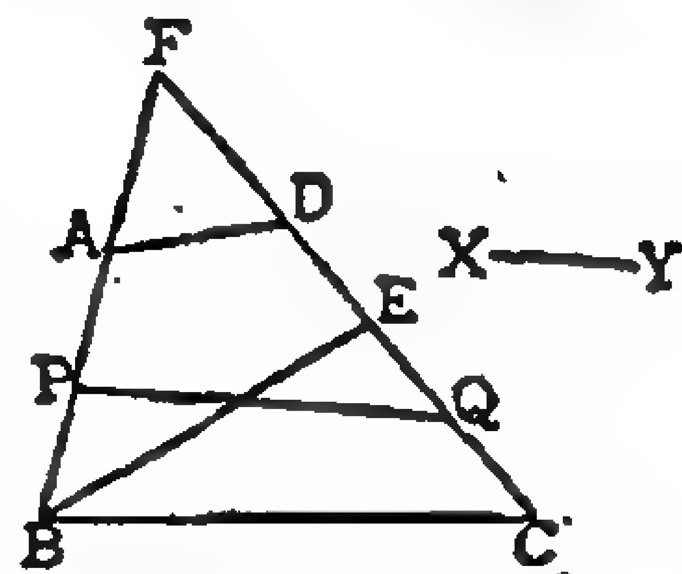
注　在上述作图中，若 Q 或 R 在已知四边形的边的延长线上，则可过 B 以外的顶点作平分四边形的直线。

2220.　求作直线 PQ 平行于已知直线 XY，并平分已知四边形 $ABCD$。

解　根据问题**2216**，过 B 作平分四边形的直线 BE。设 BA、CD 的延长线相交于 F，根据问题**2207**，作 $PQ \parallel XY$，使

$S_{\triangle FPQ}=S_{\triangle FBE}$

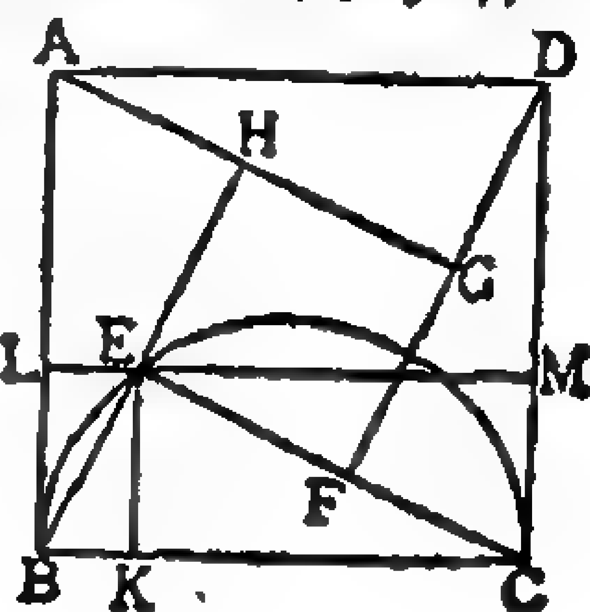
即可。



在这种情况下，若 P 或 Q 在边的延长线上，则可过其他顶点作平分四边形的直线，同样作图即可。

2221.　在已知正方形 $ABCD$ 内求作一个正方形及四个全等的直角三角形，将正方形五等分。

解　[分析]　设所求图形已作出，$EFGH$ 为正方形，则



$$S_{\triangle EBC}=\frac{1}{5}\square ABCD\text{面积。}$$

设 $EK\perp BC$，则

$$EK\cdot BC=\frac{2}{5}BC^2,$$

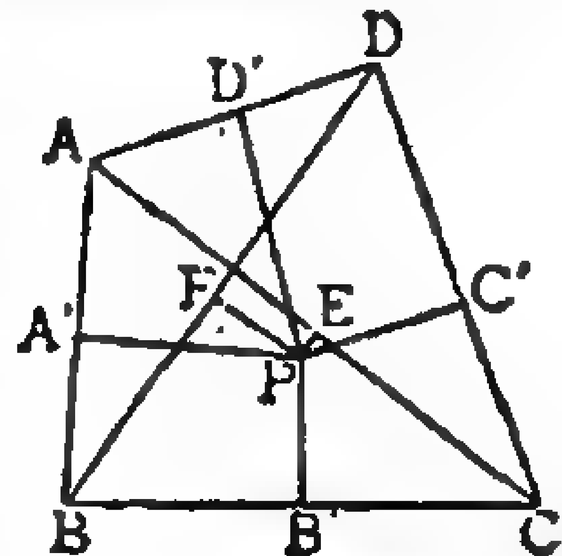
即 $$EK=\frac{2}{5}BC.$$

因此可作图如下。

［作图］　在 BA 上取 $BL=\frac{2}{5}AB$，过 L 作 BC 的平行线，与以 BC 为直径的圆相交于 E。连结 CE、BE，分别过 A 和 D 作 CE、BE 的平行线，则所得 $EFGH$ 为所求正方形。

［证明］　略。

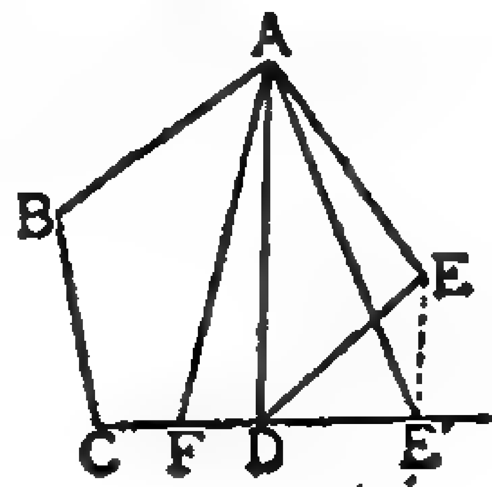
2222.　在已知四边形 $ABCD$ 内求一点 P，使连结 P 与各边中点的线段四等分此四边形。



解　［作图］　分别过对角线 AC、BD 的中点 E、F 作 BD、AC 的平行线，设它们的交点为 P，各边的中点为 A'、B'、C'、D'，则 PA'、PB'、PC'、PD' 四等分此四边形。

［证明］　（参照问题 839）。

2223.　在已知四边形内求一点，使连结这一点和四边形各顶点的线段四等分此四边形。



解　若已知四边形为平行四边形，则对角线的交点即为所求的点。

若四边形的一条对角线 AC 过 BD 的中点 O，把 AC 的中点 M 与各顶点连结，则

$$S_{\triangle ABM}=S_{\triangle BMC},\ S_{\triangle AMD}=S_{\triangle MDC}.$$

又 AC 过 BD 的中点 O，所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}$。因此四个三角形面积相等。除此以外，在一般的四边形中，不存在符合条件的点。

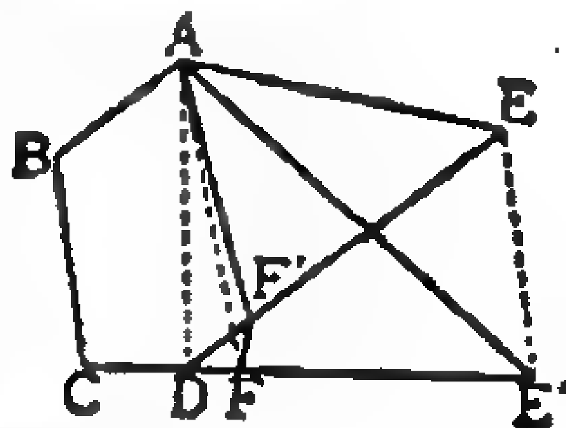
2224.　过已知五边形 $ABCDE$ 的顶点 A 作直线，平分此五边形。

解　过 E 作 AD 的平行线 EE'，与 CD 的延长线相交于 E'，再过 A 作直线 AF 平分四边形 $ABCE'$（参照问题 2216）。则 AF 为所求直线。理由是：五边形 $ABCDE$ 面积＝四边形 $ABCE'$ 面积。

$\therefore$　四边形 $ABCF$ 的面积

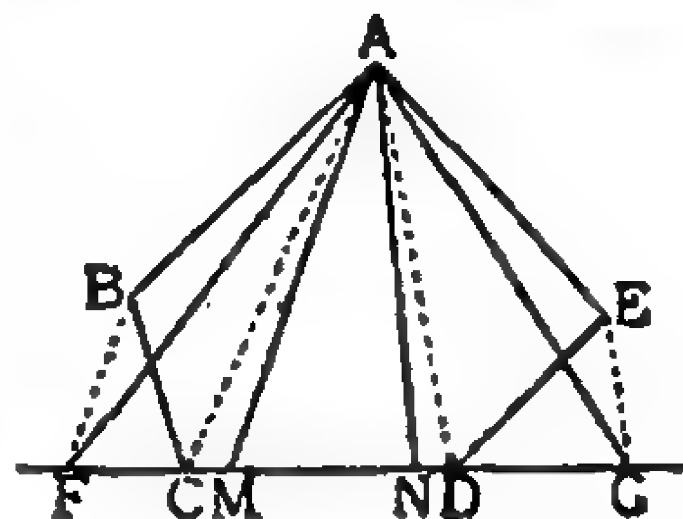
$$=\frac{1}{2}\text{四边形}ABCE'\text{的面积}$$

$$=\frac{1}{2}ABCDE\text{的面积。}$$

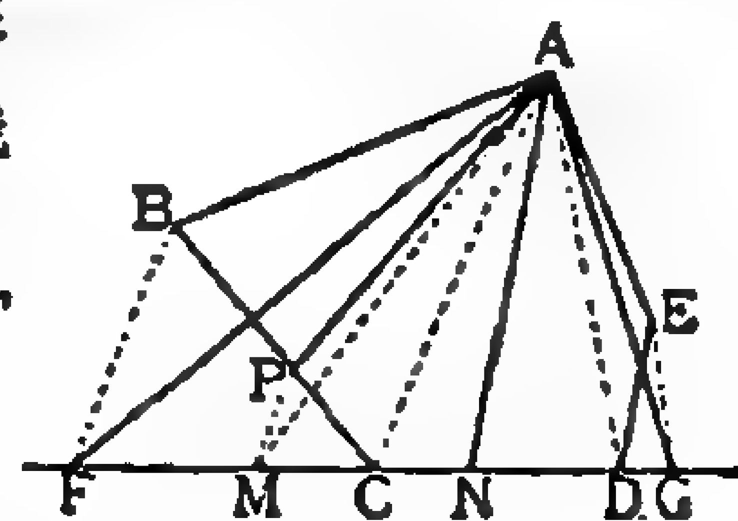


注　若 AF 与 CD 的延长线相交，可过 F 作 $FF'\parallel AD$，与 DE 相交于 F'，则 AF' 为所求直线。容易证明此作图正确。

2225.　过五边形 $ABCDE$ 的一个顶点 A 作两条直线三等分此五边形。



解　［作图］　连结 AC、AD。作 $BF\parallel AC$，$EG\parallel AD$，分别与 CD 的延长线相交于 F、G。连结 AF、AG，则 $S_{\triangle AFG}$ 与五边形 $ABCDE$ 的面积相等。点 M、N 把 FG 三等分，则五边形 $ABCDE$ 即被直线 AM、AN 三等分。



［证明］　$\because$　$BF\parallel AC$，

$\therefore$　$S_{\triangle BAC}=S_{\triangle FAC}$。

两边都加上 $\triangle AMC$，则

四边形 $ABCM$ 的面积

$=\triangle AFM$ 的面积

$$=\frac{1}{3}ABCDE\text{的面积。}$$

同理，四边形 $AEDN$ 的面积 $=S_{\triangle ANG}$

$$=\frac{1}{3}ABCDE\text{的面积。}$$

因此 AM、AN 三等分五边形。若 M 在 F 和 C 之间，可作 $MP\parallel CA$，与 BC 相交于 P，连结 AP　则 AP 使 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{3}ABCDE$ 的面积。若 N 在 D 和 G 之间，亦可同样考虑。

2226.　求作已知梯形底边的平行线，平分此梯形。

解　［分析］　假定此题已解得，EF 为所

求直线. 延长 BA、CD 相交于 G. 则

$$\frac{S_{\triangle GBC}-S_{\triangle GAD}}{S_{\triangle GEF}-S_{\triangle GAD}}=\frac{\text{梯形 }ABCD\text{ 的面积}}{\text{梯形 }AEFD\text{ 的面积}}$$

$$=\frac{2}{1},\qquad ①$$

且　　$AD\parallel EF\parallel BC$.

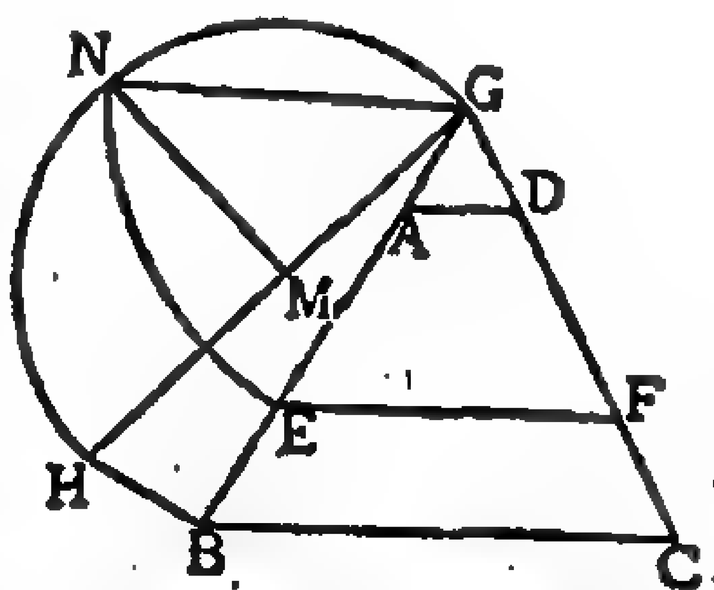
$\therefore\ \triangle GBC\backsim\triangle GEF\backsim\triangle GAD$,

$S_{\triangle GBC}:S_{\triangle GEF}:S_{\triangle GAD}=GB^2:GE^2:GA^2$.

又根据 ①　$\frac{GB^2-GA^2}{GE^2-GA^2}=\frac{2}{1}$,

$\therefore\ GE^2=\frac{1}{2}(GB^2+GA^2)$.

因此可作图如下.

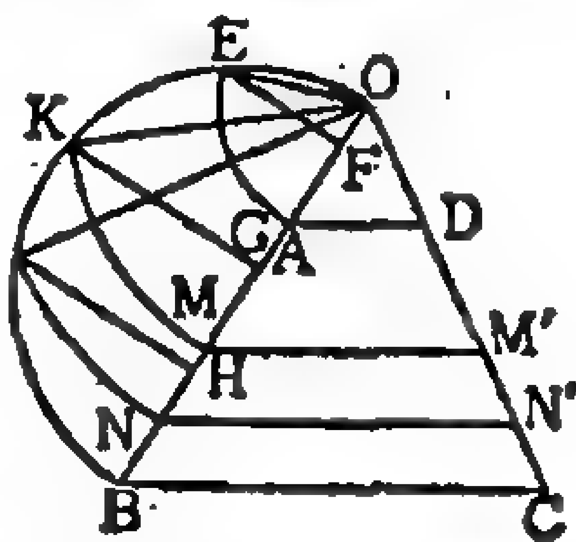


[作图]　过 B 作 GB 的垂线 BH, 使 $HB=GA$. 作以 GH 为直径的半圆, 与 GH 的垂直平分线 MN 相交于 N. 再以 G 为圆心, GN 为半径作圆, 与 GB 相交于 E. 过 E 作 BC 的平行线 EF, 与 GC 相交于 F, 则 EF 即为所求的直线.

[证明]　[讨论]　略.

2227.　作梯形 $ABCD$ 底边 BC 的平行线, 三等分此梯形.

解　[作图]　设 BA、CD 的交点为 O, 以 O 为圆心, OA 为半径作圆与以 OB 为直径的圆相交于 E; 过 E 作 OB 的垂线 EF, 在 G、H 两点将 FB 三等分. 过点 G、H 作 OB 的垂线 GK, HL, 与以 OB 为直径的圆相交于 K、L; 在 OB 上取 $OM=OK$, $ON=OL$, 过 M、N 作 BC 的平行线 MM'、NN', 则这两条平行线即为所求的直线.



[证明]　$\because$　$\triangle OBC\backsim\triangle ONN'\backsim\triangle OMM'\backsim\triangle OAD$,

所以它们的面积与对应边的平方成比例.

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle OBC}}{OB^2}=\frac{S_{\triangle ONN'}}{ON^2}=\frac{S_{\triangle OMM'}}{OM^2}=\frac{S_{\triangle OAD}}{OA^2}.$$

因为 $ON=OL$, $OM=OK$, $OA=OE$,

所以　$$\frac{S_{\triangle OBC}}{OB^2}=\frac{S_{\triangle ONN'}}{OL^2}=\frac{S_{\triangle OMM'}}{OK^2}=\frac{S_{\triangle OAD}}{OE^2},$$

又　$OL^2=OB\cdot OH$, $OK^2=OB\cdot OG$, $OE^2=OB\cdot OF$. 所以

$$\frac{S_{\triangle OBC}}{OB^2}=\frac{S_{\triangle ONN'}}{OB\cdot OH}=\frac{S_{\triangle OMM'}}{OB\cdot OG}=\frac{S_{\triangle OAD}}{OB\cdot OF}.$$

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle OBC}-S_{\triangle ONN'}}{OB^2-OB\cdot OH}=\frac{S_{\triangle ONN'}-S_{\triangle OMM'}}{OB\cdot OH-OB\cdot OG}=\frac{S_{\triangle OMM'}-S_{\triangle OAD}}{OB\cdot OG-OB\cdot OF},$$

即　$$\frac{\text{梯形 }NBCN'\text{ 面积}}{OB\cdot BH}=\frac{\text{梯形 }MNN'M'\text{ 面积}}{OB\cdot HG}=\frac{\text{梯形 }AMM'D\text{ 面积}}{OB\cdot GF}.$$

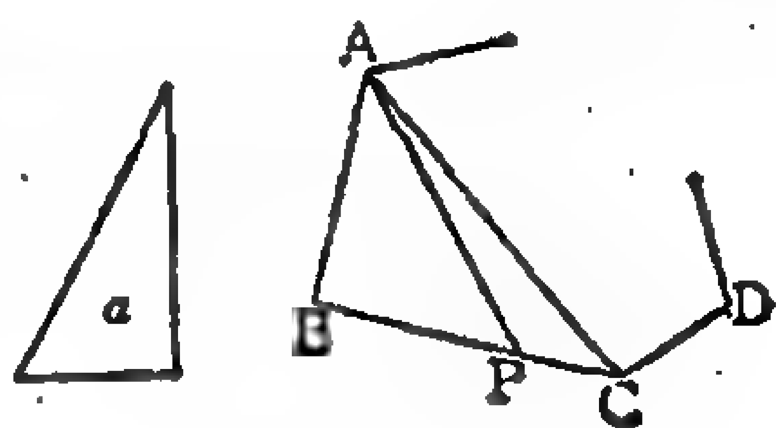
根据作图,　$BH=HG=GF$,

$\therefore\ OB\cdot BH=OB\cdot HG=OB\cdot GF$.

因此梯形 $NBCN'$ 面积$=$梯形 $MNN'M'$ 面积$=$梯形 $AMM'D$ 面积.

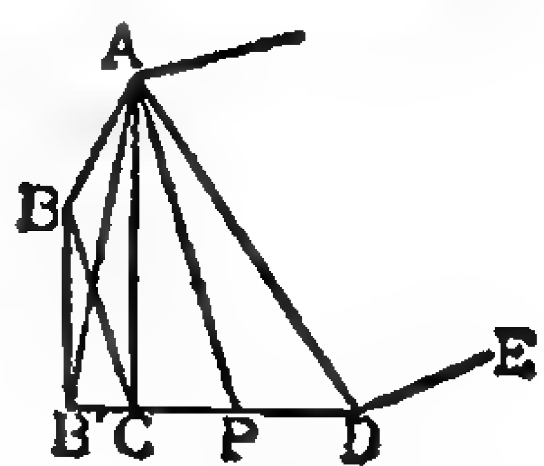
2228.　过凸 n 边形 $ABCDE\cdots$ 的一个顶点 A, 作 $(n-1)$ 条直线, 将 n 边形的面积分成 n 等分.

解　根据问题 2438, 可将已知多边形 $ABCDE\cdots$ 改为等积的三角形 AXY, 过 A 作 $(n-1)$ 条直线, 将 $\triangle AXY$ 的面积 n 等分 (即将对边 XY 分成 n 等分, 将顶点 A 与各分点连结即可). 且将此面积用 a 表示. 连结已知多边形的两个顶点 A、C, 若 $\triangle ABC$ 面积$>a$,



(1)

过 A 作一直线 AP 与 BC 相交于 P, 使 $\triangle ABP$ 的面积$=a$. 若 $\triangle ABC$ 面积$<a$, 如图(2). 过 B 作对角线 AC 的平行线与 DC 的延长线相交于 B'. 若 $\triangle AB'D$ 面积$>a$ 则同上, 过 A 作直



(2)

线AP与$B'D$相交于P。若使$\triangle AB'P$的面积$=a$，则四边形$ABCP$的面积$=S_{\triangle AB'P}=a$。若$\triangle AB'D$面积$<a$，过顶点B'作对角线AD的平行线与第四边ED的延长线相交于B''，比较$\triangle AB''E$面积与a的大小。

若$\triangle AB''E$面积$>a$，则在$B''E$上求点P，使$\triangle AB''P$的面积$=a$。若$\triangle AB''E$面积$<a$，则可反复用以上方法。过顶点A作一直线AP，可得与a相等的面积。

对于余下的多边形可完全同上法，作另一条直线AQ，再得到与a相等的面积。

这样依次可得AR、AS、… 等$(n-1)$条直线，将此多边形$ABCDE$…分成面积相等的n个部分。

注 1　利用上法时，在问题 **2224** 中过已知五边形的一个顶点A作直线，将此五边形二等分，以及问题 **2225** 中，过五边形的一个顶点A作两条直线三等分此五边形的一般方法。

2　用本题的方法，可将已知多边形改成与它等积的三角形，以及与它等面积的等边三角形，或与它等面积的正方形。例如已知五边形$ABCDE$，在问题 **2225** 中，三角形AEG与五边形$ABCDE$等面积，因此根据问题 **2250**，作等边三角形与$\triangle AFG$等积。则此等边三角形与已知五边形等积。又用问题 **2509** 作与它等积的正方形。在问题 **2225** 中，因为$\triangle ADG$和$\triangle ADE$等积，可知五边形$ABCDE$与四边形$ABCG$相等，四边形$ABCG$与三角形AFG相等。重复运用这方法，就可将一切凸多边形依次减少一条边，逐渐把原多边形变成与它面积相等的三角形。因此下列各种问题，均可利用此法解之。

1．作与已知多边形面积相等且边数少一的多边形。

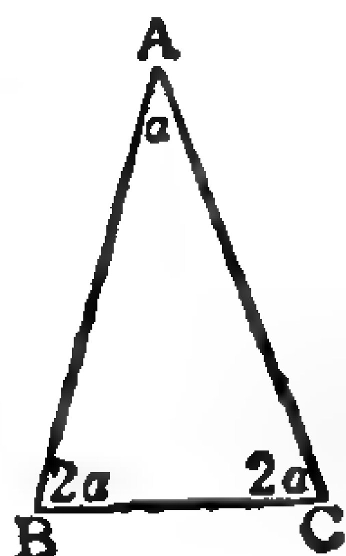
2．作与已知多边形面积相等的三角形。

3．作与已知多边形面积相等的正方形。

第三章　三角形的作图

1．作等腰三角形

2229． 已知$AB=AC=l$，$\angle B=2\angle A$，作等腰三角形ABC。



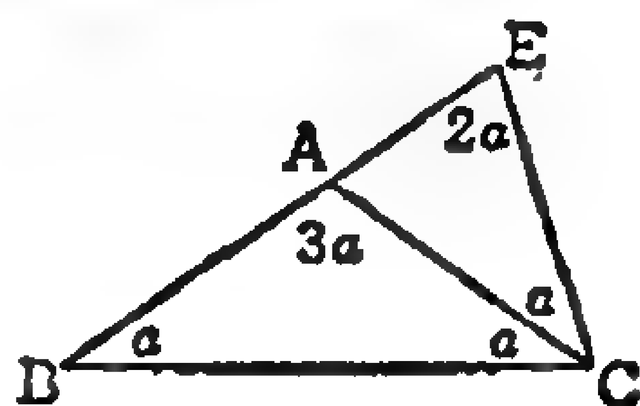
解　设$\triangle ABC$为符合条件的三角形。$\angle A=\alpha$，根据条件$\angle B=\angle C=2\alpha$而$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$，所以

$$\alpha+2\alpha+2\alpha=180°,$$

$$5\alpha=180°,\ \alpha=36°.$$

因此BC的长等于以A为圆心、l为半径的圆内接正十边形一边的长。所以本题可归结为 **1513** 题。

2230． 已知底边BC的长为l，顶角A等于两底角的三倍，求作等腰三角形ABC。



解　根据上题，作等腰三角形BCE，使

$BC=BE=l$，

$\angle BCE=\angle BEC=2\alpha$。

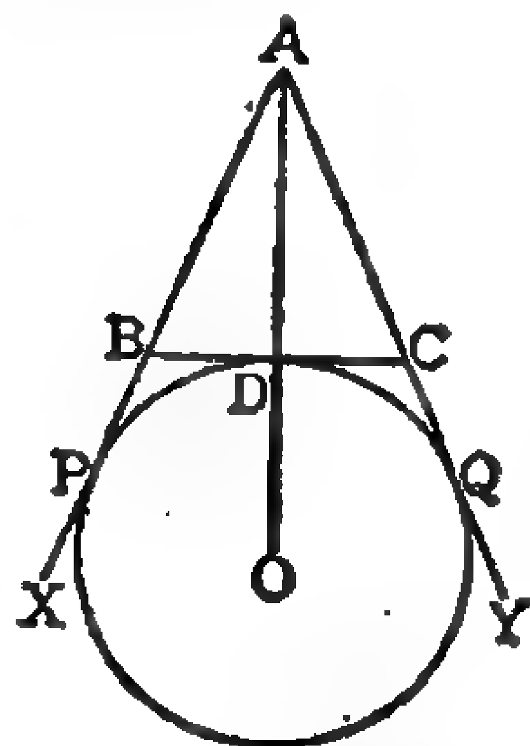
作$\angle BCE$的平分线CA与边BE相交于A。ABC即为所求的三角形。理由是：

$$\angle BAC=\angle E+\angle ACE=2\alpha+\alpha=3\alpha,$$

$$\angle B=\angle ACB=\alpha,\ BC=l.$$

因此$\triangle ABC$为符合条件的三角形。

2231． 已知顶角$A=\alpha$，周长为$2S$，作等腰三角形ABC。



解　［作图］　作$\angle XAY=\alpha$，在它的边AX、AY上分别取P、Q点，使$AP=AQ=S$。过点P、Q作与AX、AY相切的圆O，设连结AO的线段与圆O相交于D。过D作圆O的切线，与AX、AY相交于B、C，则$\triangle ABC$即为所求。

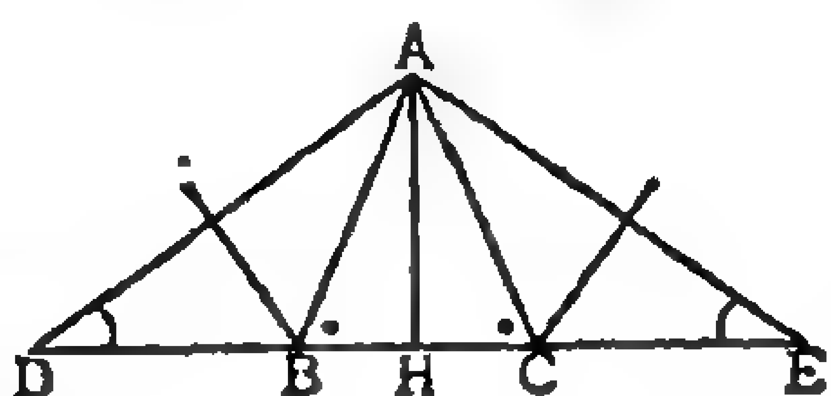
［证明］　略。

2232． 已知高h和周长$2S$，作等腰三角形。

解　［作图］　作线段$DE=2S$，过DE的中点H作DE的垂线，在垂线上取点A，使$AH=h$。作AD、AE的垂直平分线，与DE

相交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

［证明］ 根据作图，高 $AH=h$，又 AH 为线段 DE 的垂直平分线，所以 $AD=AE$，$\angle D=\angle E$。又根据作图，$\triangle ABD$、$\triangle ACE$ 为底角及底边相等的等腰三角形。所以



$$\triangle ABD\cong\triangle ACE,$$
$$\angle ABC=\angle ACB.$$

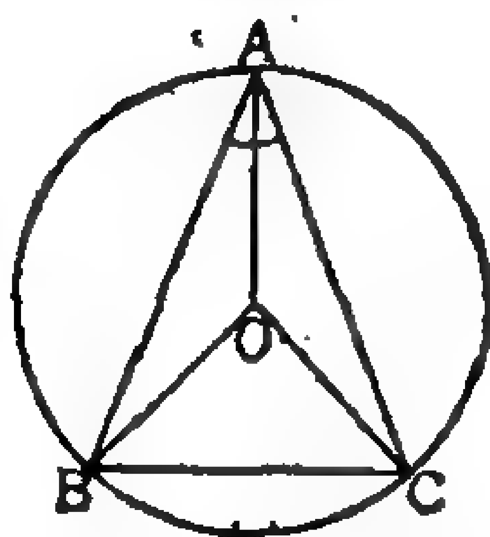
即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形。

又　　$AB=BD=AC=CE$，

$\therefore\quad AB+BC+CA=DE=2S$。

2233. 已知顶角 $A(=\alpha)$，外接圆的半径为 r，求作等腰三角形 ABC。

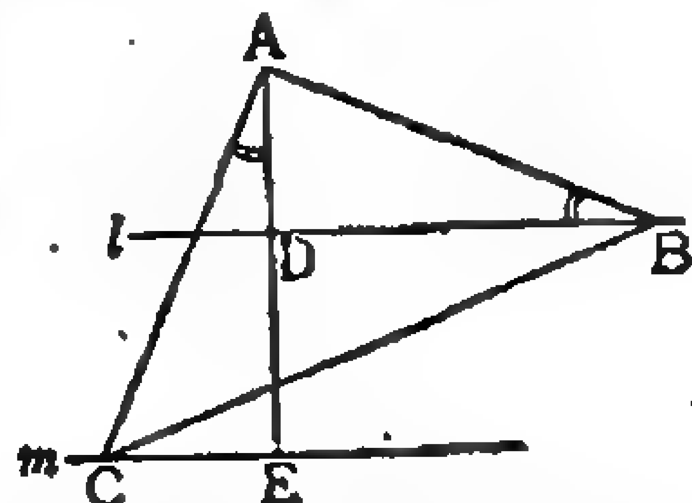
解 以任意点 O 为圆心，r 为半径作圆，在圆上任取一点 A，在半径 AO 的两侧作与 AO 的夹角为 $\frac{\alpha}{2}$ 的直线，与圆相交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



2234. 以已知点 A 为直角顶点，作等腰直角三角形 ABC，使它的另两个顶点 B、C 各在已知的两条平行直线 l、m 上。

解 ［分析］ 设等腰直角三角形 ABC 已作出。过 A 作两条平行线的公垂线 ADE，分别与 l、m 相交于 D、E，则

$$\angle CAE=\angle ABD,$$
$$AC=AB,$$



所以两个直角三角形 ACE、BAD 全等，$CE=AD$，$AE=BD$。因此可作图如下。

［作图］ 过 A 作两条平行线 l、m 的公垂线 ADE，在直线 l 上取点 B，使 $DB=AE$；再在直线 m 上，而在 DB 的另一侧取点 C，使 $EC=AD$，则 $\triangle ABC$ 为所求的等腰直角三角形。

［证明］ 根据作图，$AD\perp l$，$AE=BD$，$CE=AD$，所以 $\triangle ACE\cong\triangle BAD$，

因而　　$AC=AB$。

又　　$\angle CAE=\angle ABD$，$AD\perp l$。

所以　　$\angle CAB=\angle R$。

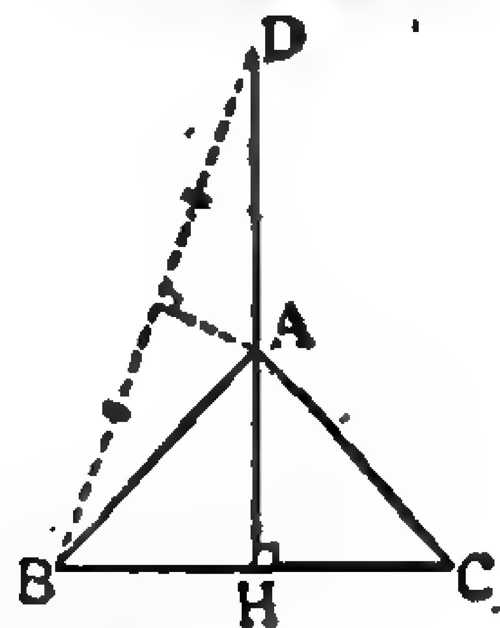
［讨论］ B 可以在 D 的两侧求得，因此有两解。

2235. 已知底边 $BC(=l)$，边 AB 与顶点 A 到底边的垂线 AH 的和为 m，求作等腰三角形 ABC。

解 ［作图］ 设 BC 的中点为 H，作 BC 的垂直平分线 HD，取 $DH=m$。连结 BD，作 BD 的垂直平分线与 HD 相交于 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求的等腰三角形。

［证明］ 根据作图，A 为 BC 的垂直平分线上的点，所以 $AB=AC$。又 A 为 BD 的垂直平分线上的点，所以 $AD=AB$。

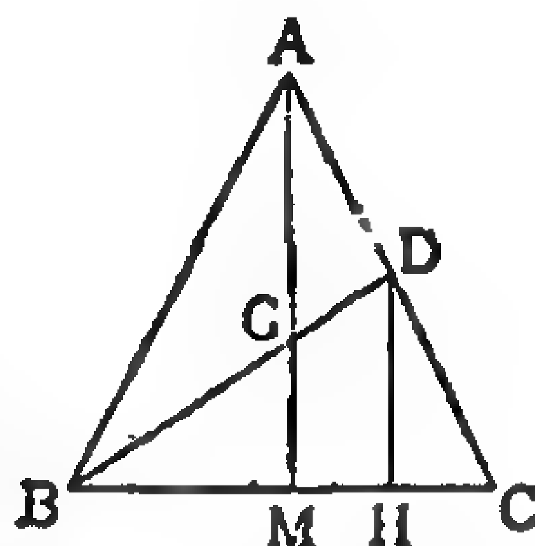
故　$AB+AH$
$=AD+AH$
$=DH=m$。



［讨论］ 若 m 不大于 $\frac{l}{2}$，则无解。

2236. 已知底边 $BC=l$，边 AC 上的中线 $BD=m$，求作此等腰三角形。

解 ［作图］ 作线段 $BC=l$，设它的中点为 M。以 B 为圆心，m 为半径作圆，与 CM 的垂直平分线相交于 D。设 BC 的垂直平分线与 CD 的交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求的等腰三角形。

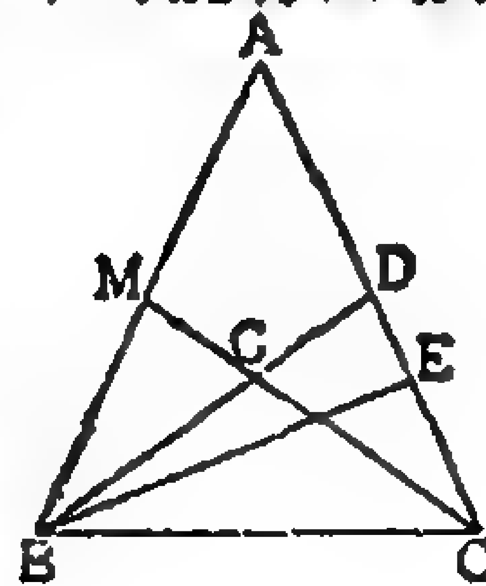


［证明］ AM 是 BC 的垂直平分线，所以 $AB=AC$。又因为 D 也是 CM 的垂直平分线上的点，所以在直角三角形 ACM 中，D 为 AC 的中点。即 BD 为中线，且等于 m。

［讨论］ $m\leq\frac{3}{4}l$ 时无解，$m>\frac{3}{4}l$ 时，可在 BC 两侧作 D 点，但因作出的三角形和 $\triangle ABC$ 关于 BC 对称，所以不可能有两解。

2237. 已知一腰 AC 上的中线 $BD=l$，腰上的高 $BE=h$，求作等腰三角形 ABC（设 $l>h$）。

解 ［作图］ 作线段 $BE=h$，过 E 作 BE 的垂



线 EX。以 B 为圆心，l 为半径作圆弧，与 EX 相交于 D. 在 BD 上取 G 点,使

$$BG=\frac{2}{3}BD.$$

以 G 为圆心、GB 为半径的圆弧与 DE 的延长线交点 C，在 CD 的延长线取点 A,使 $DA=DC$。连结 AB, 则 $\triangle ABC$ 为所求三角形.

[证明] 因为 BD 为中线, $BD=l$(作图). 又高 $BE=h$(作图),

且 $$BG:GD=2:1,$$

所以 G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 设 CG 的延长线与 AB 的交点为 M，则 CM 为中线. 因为 $GC=GB$,所以 $CM=BD$, $\triangle BCM\cong\triangle CBD$, $MB=DC$, $AB=AC$。因此 $\triangle ABC$ 为符合条件的三角形.

[讨论] C 可在 D 的两侧求得，所以常有两解.

注 当 $l=h$ 时，D 和 E 重合，$\triangle ABC$ 为等边三角形，同时作图所得的两个三角形全等. 所以通常有一解. 当 $l<h$ 时,很明显不能作图.

2238. 已知顶角 $A(=\alpha)$，底边 BC 与高 AH 之和为 m，求作等腰三角形 ABC.

解 [分析] 设 $\triangle ABC$ 已作出. 延长高 AH，取 $AD=m$。连结 BD，过 A 作 AH 的垂线与 BD 相交于 E，则

$$\triangle DAE\backsim\triangle DHB.$$

所以

$$AD:AE=HD:HB.$$

因为 $HD=BC=2HB$, 因此 $AD=2AE$。所以可作图如下.

[作图] 作直线 AX、AY，使 $\angle XAY=\alpha$。在 $\angle XAY$ 的平分线上取点 D, 使 $AD=m$。作 $AE\perp AD$，使 $AE=\frac{m}{2}$. 连结 DE, DE 与 AX 交于点 B. 过 B 作 AD 的垂线交 AY 于 C，则 $\triangle ABC$ 即为所求的三角形.

[证明] 由作图, $\angle BAD=\angle CAD$, AD 为角 A 的平分线，由此 $BC\perp AD$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 又设 BC、AD 的交点为 H，则 H 为 BC 中点. 根据作图,

$$HB:HD=1:2,$$

$$\therefore\quad HD=BC.$$

因此 $AH+BC=AD=m$.

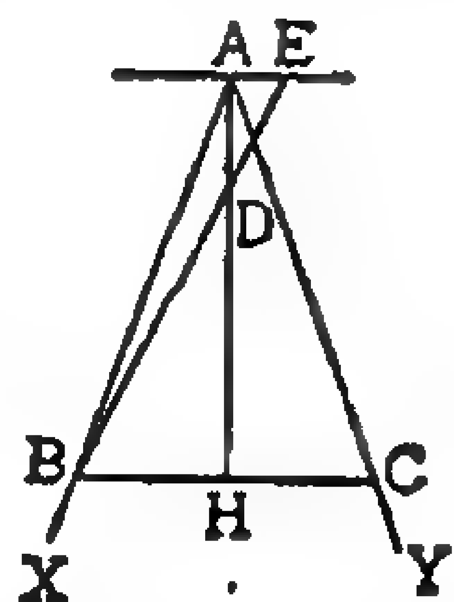
2239. 已知顶角 $A(=\alpha)$，底边 BC 与高 AH 之差为 m，求作等腰三角形 ABC.

解 [分析] 设 $\triangle ABC$ 已作出. 在 AH 上取点 D，使 $DH=BC$，连结 BD. 过 A 作垂直于 AH 的直线与 BD 相交于 E，则 $\triangle ADE\backsim\triangle HDB$,

$$BH=\frac{1}{2}DH,\quad AE=\frac{1}{2}AD.$$

因此可作图如下.

[作图] 作 AX、AY,使 $\angle XAY=\alpha$，在 $\angle XAY$ 的平分线上截取 $AD=m$. 过 A 作 AD 的垂线，在垂线上取点 E，使 $AE=\frac{1}{2}AD$, ED 与 AX 相交于 B，过 B 作 AD 的垂线，与 AY 相交于 C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形.



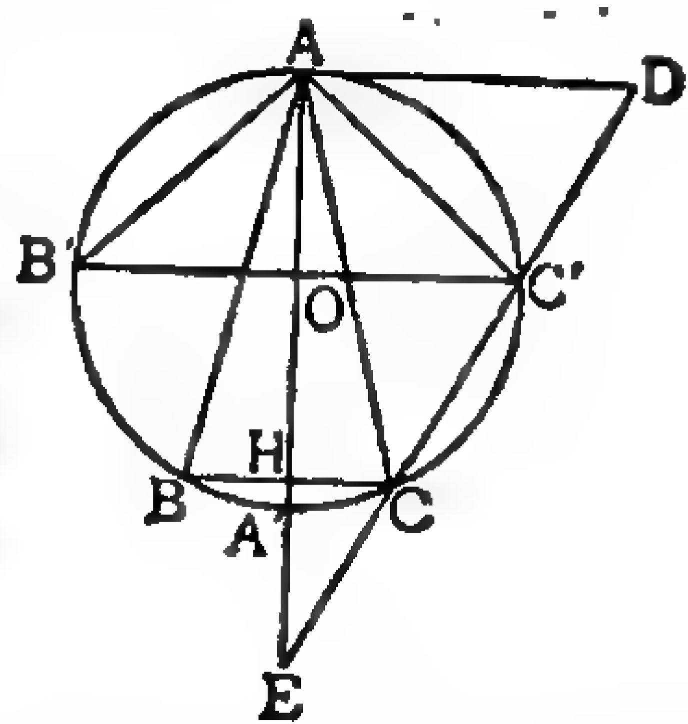
[证明] 根据作图 $\angle BAC=\alpha$，又 AD 为 $\angle A$ 的平分线，$AD\perp BC$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 根据作图 $2BH=BC=DH$，因此

$$AH\sim BC=AD=m.$$

[讨论] 若 DE 与 AX 平行,无解.若 DE 与 AX 相交,有一解.

2240. 已知高 AH 和底边 BC 的和为 m，求作内接于已知圆的等腰三角形 ABC.

解 [作图] 过圆 O 的直径 AA' 的一端 A，作直线 $AD\perp AA'$ 且 $AD=\frac{1}{2}m$. 在 AA' 的延长线上取 E，使 $AE=m$. 连结 DE 的线段与已知圆相交于 C. 过 C 作与 AA' 垂直的弦 CB，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形.



[证明] 根据作图,

$$AD:HC=AE:HE,$$

且 $AE=2AD$, 所以

$$HE=2HC=BC.$$

故 $$AH+BC=AE=m,$$

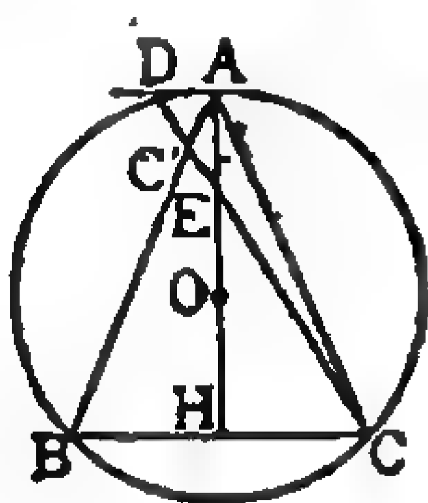
因为 $$AH\perp BC,\ AB=AC,$$

因此 $\triangle ABC$ 为所求作的三角形.

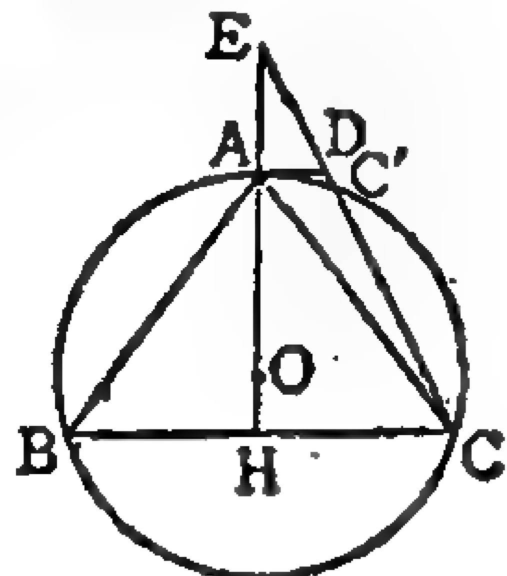
［讨论］ 若 DE 与已知圆相交于两点 C、C'，有两解；若 DE 与已知圆相切，有一解；没有交点，无解。

2241. 已知底边 BC 与高的差为 l，求作内接于已知圆 O 的等腰三角形。

解 ［作图］ 在半径 AO（图1）或其延长线上（图2）取 $AE=l$，使 $AD\perp AE$，且 $AD=\frac{1}{2}l$。设 DE 与圆相交于 C，作弦 BC，使 $CHB\perp AE$ 即可（参照问题 **2239**）。



(1)



(2)

［证明］ $\frac{CH}{EH}=\frac{AD}{AE}=\frac{1}{2}$，

且　　$CH=BH$，　∴　$BC=EH$。

因此　　　$BC\sim AH=AE=l$。

又 $AO\perp BC$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形。

［讨论］ 若 DE 与圆相交于 C、C' 两点，有两解。若 DE 与圆相切，有一解。DE 与圆无公共点，无解。

2242. 作与已知 $\triangle ABC$ 等积的等腰三角形 $AB'C'$，使它的顶角等于已知三角形的一个角。

解 设 $\triangle ABC$ 与等腰 $\triangle AB'C'$ 有公共角 A，则

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB'C'}}=\frac{AB\cdot AC}{AB'\cdot AC'}\text{ （问题 1456）。}$$

要使

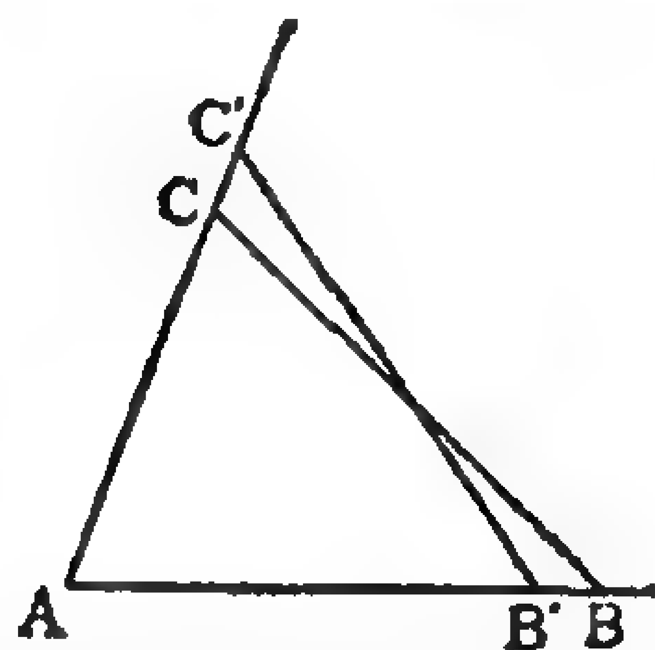
$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB'C'}$，

只需

$AB\cdot AC=AB'\cdot AC'$。

因为 $\triangle AB'C'$ 为等腰三角形，$AB'=AC'$。

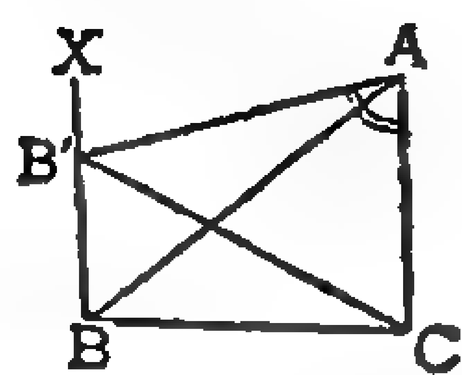
∴　$AB\cdot AC=AB'^2$。

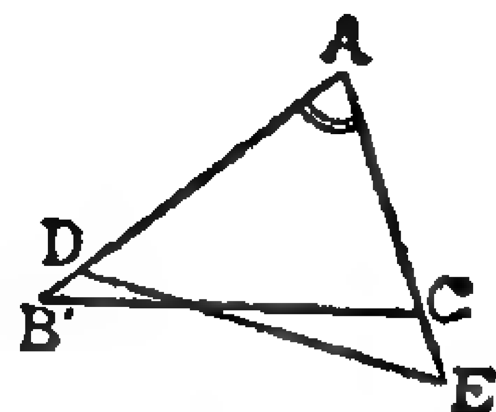


即 AB' 为 AB、AC 的比例中项。因此求 AB、AC 的比例中项，作两边等于这个比例中项的等腰三角形即可。

2243. 作顶角等于 α 的等腰三角形 ADE，使它的面积与已知三角形 ABC 相等。

解 过 B 作 AC 的平行线 BX，过 A 作直线 AB' 与 AC 的夹角为 α。设 AB' 与 BX 相交于 B'，则 $BB'\parallel AC$，所以 $S_{\triangle AB'C}=S_{\triangle AB'C}$，且 $\angle B'AC=\alpha$。

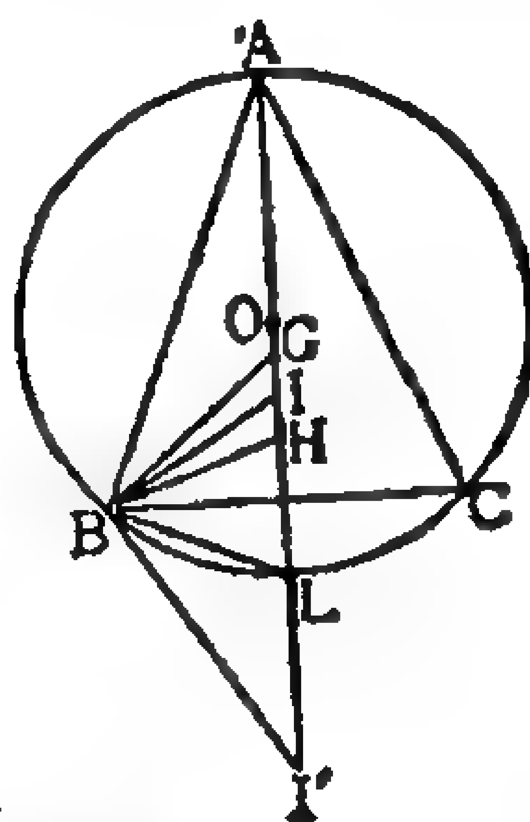




因此先作线段 m，使它等于 AB'、AC 的比例中项；再在 AB'、AC 上取 AD、AE 等于 m。同上题，则 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle AB'C}$，故 $\triangle ADE$ 为所求三角形。

2244. 已知重心 G，外心 O 和内心 I 的位置，作等腰三角形 ABC。

解 假定此题已解出，$\triangle ABC$ 为所求三角形，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形。所以 G、O、I 均在 $\angle A$ 的平分线上。设这个三角形的垂心为 H，则 $GH=2OG$（问题 **501**）。且 O、G 的位置一定。因此 GH 为定长，H 为定点。① 因为 I 是内心，所以 BI 平分 $\angle B$，BI 平分 $\angle OBH$（问题 **529**）。由此在 AI 的延长线上取旁心 I'，则 $\angle IBI'=\angle R$。因此 O、I、H、I' 成调和点列。因为 O、I、H 均为定点，所以 I' 的位置可定。②



设 II' 的中点为 L，则 $\triangle ABC$ 的外接圆过 L，且

$$LB=LI=LI'\text{ （问题 461）。}$$

又 O 为外心，所以 $OB=OL=OA$。因此可作图如下。

［作图］ 根据①、②，求垂心 H，旁心 I' 的位置。以线段 II' 的中点 L 为圆心，II' 为直径作圆，再以 O 为圆心，OL 为半径作圆，两圆相交于 B、C，在 LO 的延长线上取点 A，使 $OA=OB$，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

2. 作等边三角形

2245. 已知直线 XY 与直线外的两个已知点 P、Q，在 XY 的同侧，作等边三角形 ABC，使一边 BC 在 XY 上，边 AB、AC 分别过两个已知点 P、Q。

解 [作图] 在 XY 上取任意两点 B'、C'，作 $B'C'$ 为一边的等边三角形 $A'B'C'$。过 P 和 Q 分别作 $A'B'$ 和 $A'C'$ 的平行线相交于 A，又与 XY 分别相交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

[证明] 根据作图 $AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，且 BC、$B'C'$ 在 XY 上，

$$\therefore\quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$

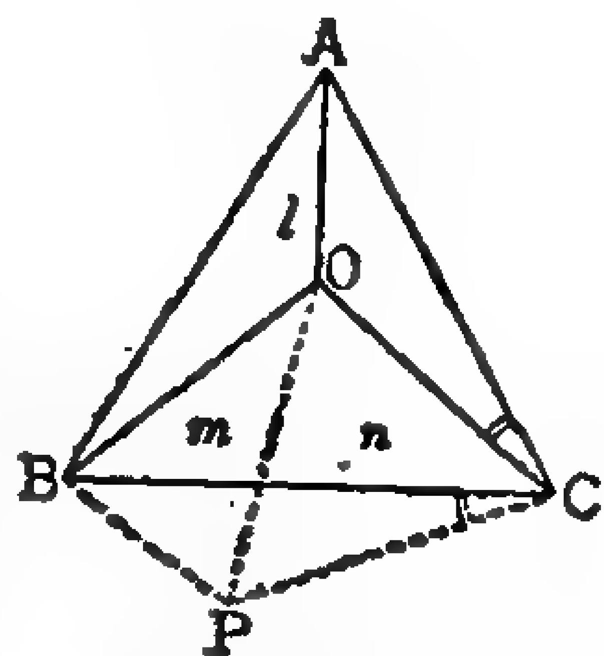
因此 $\triangle ABC$ 为所求作的等边三角形。

2246. 作等边三角形 ABC，使它的各顶点与已知点 O 的距离分别为 l、m、n。

解 设等边三角形 ABC 已作出。在 OC 上作等边三角形 COP，连结 BP，则 $OC = PC$，$AC = BC$，$\angle ACO = \angle ACB - \angle BCO = \angle PCO - \angle BCO = \angle PCB$.

$$\therefore\quad \triangle AOC \cong \triangle BPC,$$

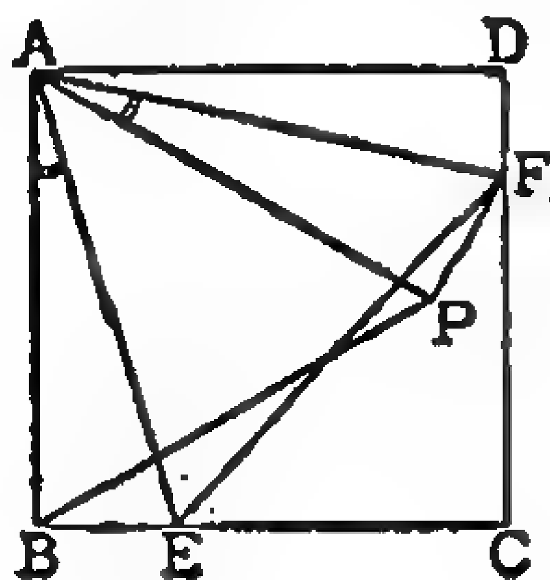
故 $BP = AO = l$.



因此 $\triangle OBP$ 的三边已知。故先作以 l、m、n 为三边的三角形 PBO，然后在 OP 上作等边三角形 OPC，连结 BC，在 BC 上作等边三角形 ABC，则 $\triangle ABC$ 即为所求三角形。

2247. 在已知正方形 $ABCD$ 内，作有公共顶点 A，另两个顶点 E、F 在正方形两边上的等边三角形 AEF。

解 [作图] 在正方形内作过 A 的直线 AP，使 $\triangle ABP$ 为等边三角形。过 P 作 AP 的垂线与 DC 相交于 F。在 BC 上取 E 点，使 $PF = BE$，则 $\triangle AEF$ 为所求的等边三角形。



[证明] 根据作图，

$$BE = PF,\ AB = AP,$$

$$\angle B = \angle R = \angle APF,$$

因此 $\triangle ABE \cong \triangle APF$.

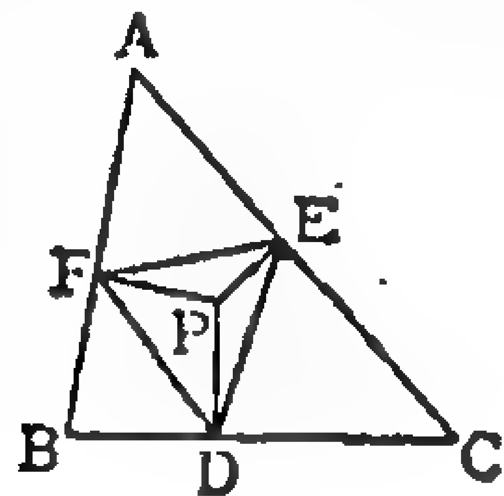
$$\therefore\quad \angle BAE = \angle PAF, \qquad ①$$

$$AE = AF. \qquad ②$$

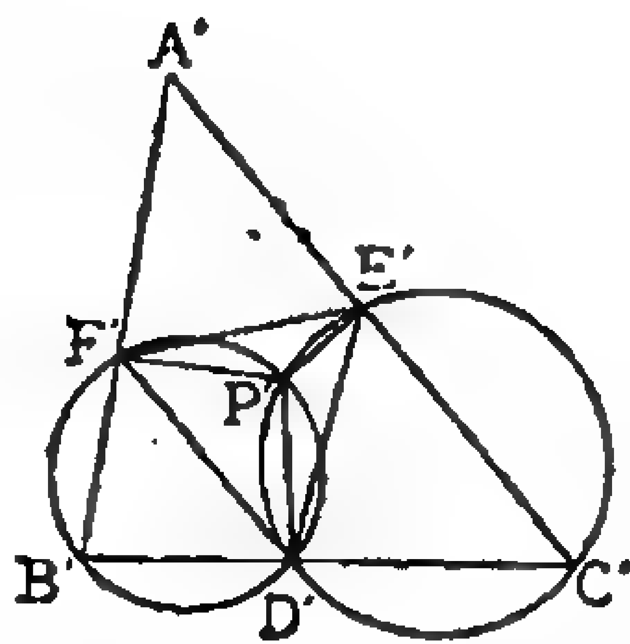
从而 $\angle EAF = \angle BAP = 60°$. ③

根据②、③，$\triangle AEF$ 为等边三角形。

2248. 在已知三角形 ABC 内求一点 P，过 P 作各边的垂线 PD、PE、PF，使 $\triangle DEF$ 成等边三角形。



解 另作等边三角形 $D'E'F'$，在 $D'F'$ 上作含 $\angle B$ 的弓形弧，在 $D'E'$ 上作含 $\angle C$ 的弓形弧。设这两弧的共轭弧的交点为 P'，过 D' 作倍弦 $B'C'$，使 $B'C' \perp P'D'$。延长 $B'F'$、$C'E'$ 相交于 A'，则 $P'D' \perp B'C'$。因此 $P'E' \perp C'A'$，$P'F' \perp A'B'$，又 $\triangle D'E'F'$ 为等边三角形，P' 为 $\triangle A'B'C'$ 内符合条件的点。$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$。所以在 $\triangle ABC$ 内求与 $\triangle A'B'C'$ 内点 P' 对应的点，即为所求的点 P。

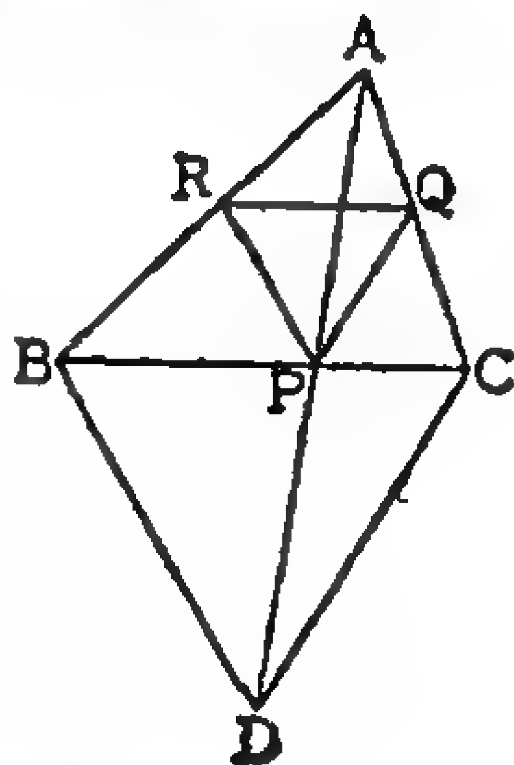


即
$$\frac{BD}{CD} = \frac{B'D'}{C'D'},\quad \frac{CE}{AE} = \frac{C'E'}{A'E'}.$$

过 D、E 分别作 BC，CA 的垂线，它们的交点即为所求的点 P。

2249. 作等边三角形，使它的顶点分别在已知三角形 ABC 的三边上，一边与 BC 平行。

解 [作图] 在 $\triangle ABC$ 相反一侧作以 BC 为一边的等边三角形 DBC。过 AD 和 BC 的交点 P，作 CD、BD 的平行线，与 AC、AB 分别相交于 Q、R，则 $\triangle PQR$ 为所求三角形。



[证明] 根据作图，

$$AR:RB = AP:PD = AQ:QC,$$

$$\therefore\quad QR \parallel BC.$$

又 $RP:BD = AP:AD = QP:CD$,

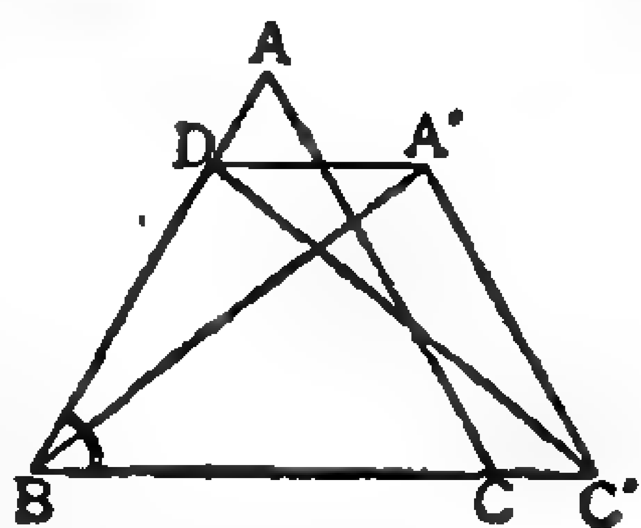
由 $BD = CD$，$RP = QP$,

又 $\angle RPQ = \angle BDC = 60°$.

因此 $\triangle PQR$ 为正三角形，且 $QR \parallel BC$，即 $\triangle PQR$ 为所求三角形。

2250. 作与已知三角形面积相等的等边三角形。

解 〔作图〕 设已知三角形为 $A'BC'$，作射线 BD，使 $\angle DBC'=60°$，过 A' 作 BC 的平行线，与 BD 相交于 D。求 BD 和 BC' 的比例中项（问题 2012），在 BC'、BD 上分别取线段 BC、BA 等于这个比例中项。则 $\triangle ABC$ 为所求等边三角形。



〔证明〕 根据作图，$A'D \parallel BC'$

$$\therefore\quad S_{\triangle A'BC'}=S_{\triangle DBC'}.$$

又 BA、BC 为 BD、BC' 的比例中项，因此

$$BD\cdot BC'=BA\cdot BC,$$

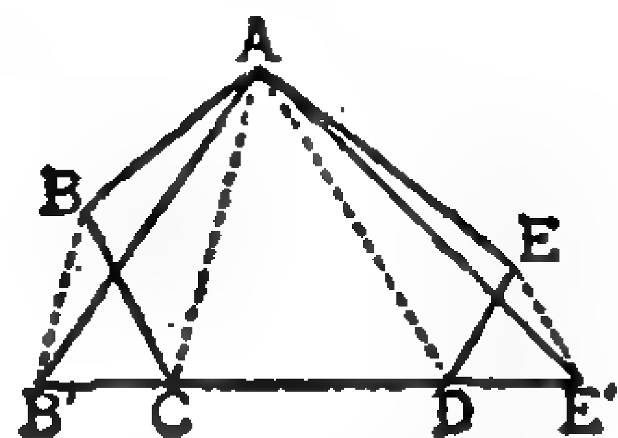
$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC'}=S_{\triangle A'BC'}.$$

且 $\angle ABC=60°$，$AB=BC$。

所以 $\triangle ABC$ 为所求的正三角形。

2251. 作等边三角形，使它与已知凸五边形面积相等。

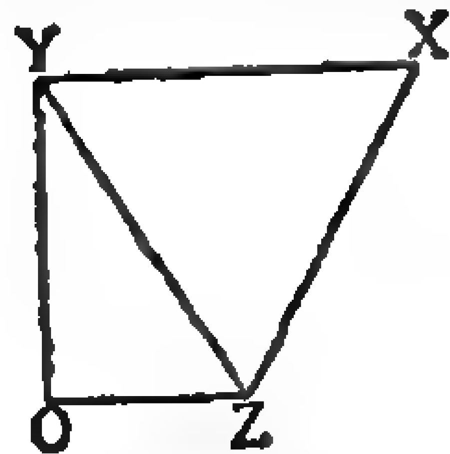
解 设 $ABCDE$ 为已知凸五边形，过 B、E 点分别作 AC、AD 的平行线，与 CD 的延长线的交点分别为 B'、E'，则五边形 $ABCDE$ 的面积 $=S_{\triangle AB'E'}$。理由是：



因 $BB' \parallel AC$，所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB'C}$，又 $EE' \parallel AD$，所以 $S_{\triangle AED}=S_{\triangle AE'D}$。根据上题作等边三角形与 $\triangle AB'E'$ 面积相等即可。

2252. 求作等边三角形，使它的面积等于已知两等边三角形 ABC 和 DEF 的面积之和。

解 作线段 OY、OZ，使它们等于已知两等边三角形的边 AB 和 DE，且 $\angle YOZ=\angle R$，连结 YZ。作以 YZ 为一边的等边三角形，则此三角形 XYZ 为所求三角形。理由是：



$\triangle ABC$，$\triangle DEF$，$\triangle XYZ$ 都是等边三角形。所以

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle XYZ}}=\frac{AB^2}{YZ^2},$$

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle XYZ}}=\frac{DE^2}{YZ^2}.$$

因而

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle XYZ}}+\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle XYZ}}=\frac{S_{\triangle ABC}+S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle XYZ}}=\frac{AB^2+DE^2}{YZ^2}$$

$$=\frac{OY^2+OZ^2}{YZ^2}=\frac{YZ^2}{YZ^2}=1.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}+S_{\triangle DEF}=S_{\triangle XYZ}.$$

2253. 作等边三角形，使它的顶点各在三条互相平行的已知直线上。

解 〔分析〕 设 $\triangle ABC$ 为所求的等边三角形，作 $\triangle ABC$ 的外接圆，与直线 X 相交于 D，则

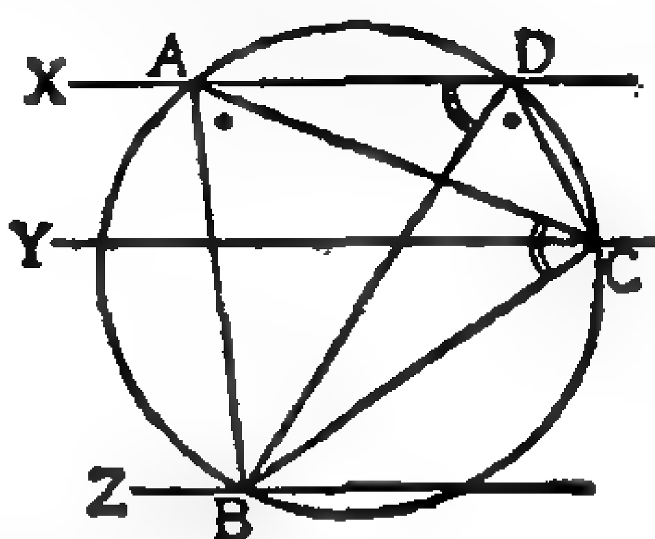
$$\angle BDC=\angle BAC=60°,$$
$$\angle ADB=\angle ACB=60°.$$

因此可作图如下。

〔作图〕 在 X 上任取一点 D，作使

$$\angle XDB=60°,$$
$$\angle BDC=60°$$

的直线 DB、DC，与已知两直线 Y、Z 分别相交于 C，B，作 $\triangle DBC$ 的外接圆，与直线 X 相交于 A，则 $\triangle ABC$ 为所求等边三角形。



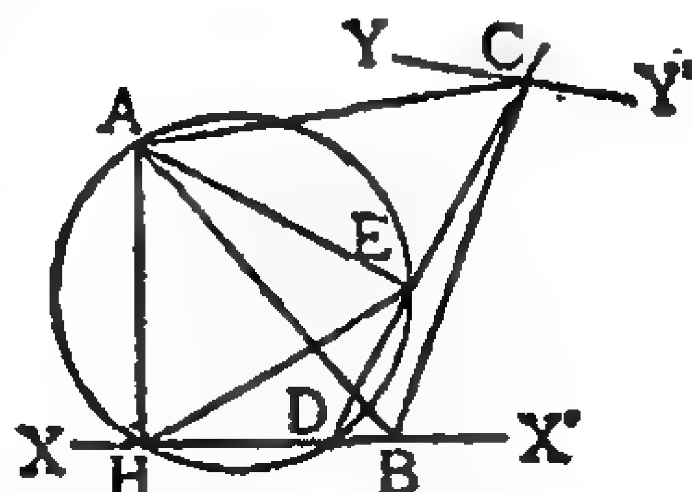
〔证明〕 根据作图，A、B、C 分别在 X、Y、Z 上，且 $\angle ADB=\angle BDC=60°$，

$$\therefore\quad \angle BAC=\angle BDC=60°,$$
$$\angle ACB=\angle ADB=60°.$$

因此 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

2254. 作等边三角形 ABC，使它的顶点 B、C 在互不平行的已知直线 XX' 和 YY' 上，但顶点 A 不在这两条直线上。

解 〔作图〕 过 A 作 XX' 的垂线 AH，以 AH 为一边作等边三角形 AHE。$\triangle AHE$ 的外接圆与直线 XX' 相交于 D，连结 DE 的直线与 YY' 相交于 C。过 A、D、C 三点的圆与 XX' 的交点为 B，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



〔证明〕 因为 A、D、B、C 四点共圆，A、H、D、E 四点也共圆。所以

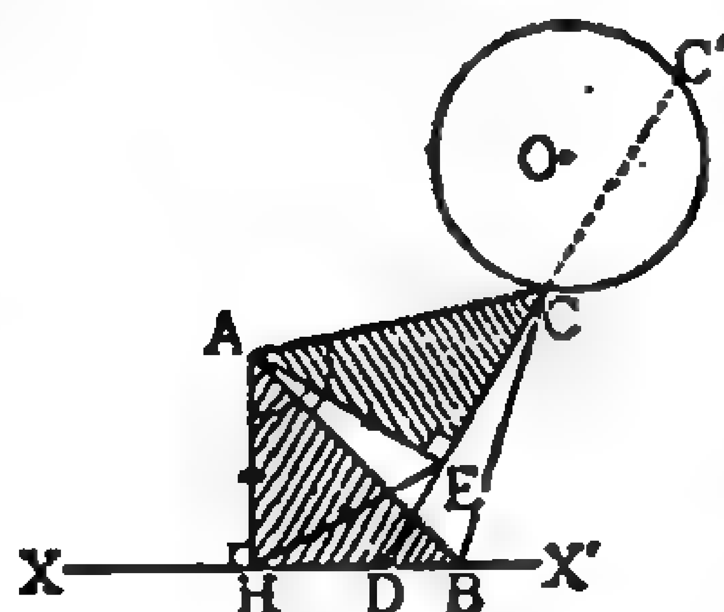
$$\angle ABC=\angle ADC=\angle AHE=60°,$$
$$\angle ACB=\angle ADH=\angle AEH=60°.$$

因此 $\triangle ABC$ 为等边三角形，且 B 在 XX' 上，C 在 YY' 上，即 $\triangle ABC$ 为符合条件的三角

形.

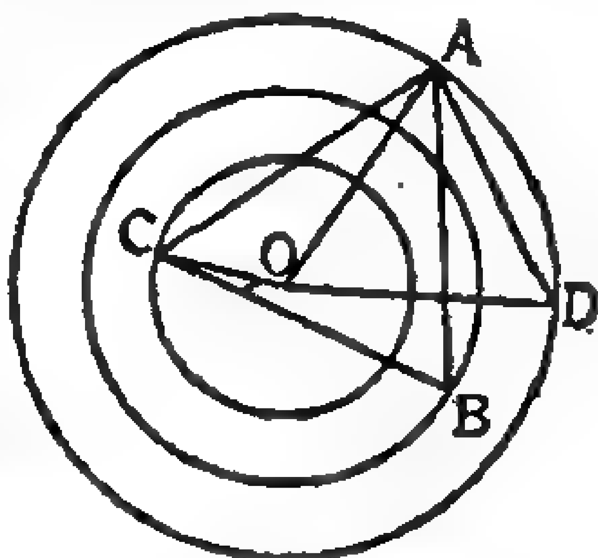
［讨论］ 因为$\triangle AHE$, AHE'可作在AH的两侧,所以一般有两解. 若DE或$D'E'$与YY'平行($\triangle AHE'$的外接圆与XX'相交于D'),则无解.

2255. 以已知点A为一顶点作等边三角形ABC,使它的另两个顶点分别在一已知圆和一已知直线XX'上.



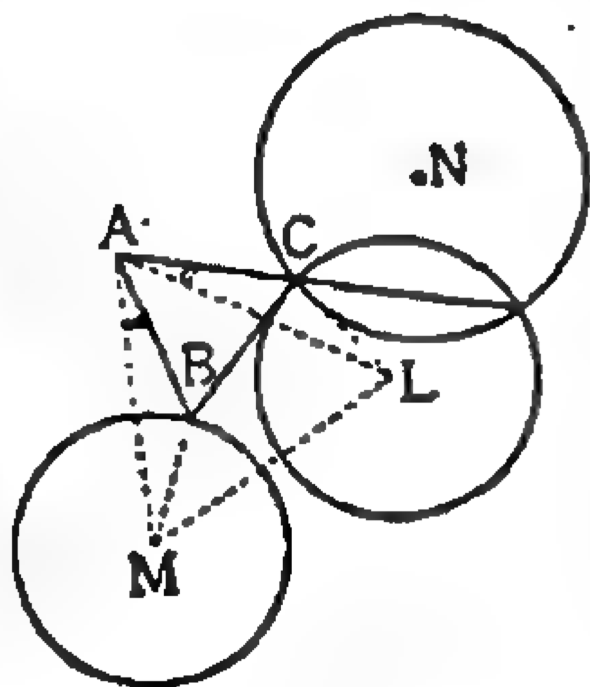
解 将上题中的直线YY'换成圆O,设DE与圆O的交点为C和C',过A、D、C或C'作圆与XX'的交点为B或B',即化为同上题一样的问题.

2256. 作等边三角形,使它的顶点分别在三个同心圆上.



解 本题与问题**2246**相同,只是说法不同而已,因此解法也相同.

2257. 以一已知点为顶点作一等边三角形,使它的另两个顶点分别在两个已知圆周上.



解 ［作图］ 设已知点为A, M、N为两个已知圆的圆心. 以AM为一边作等边三角形AML,以L为圆心,以圆M的半径为半径作圆,与圆N相交于点C. 以AC为一边在与M同侧作等边三角形ABC,即为所求作的等边三角形.

［证明］ 在$\triangle ABM$和$\triangle ACL$中,根据作图,$\triangle AML$为等边三角形. 所以

$$AM=AL,\ AB=AC.$$

又 $$\angle MAL=60°=\angle BAC,$$

因此 $$\angle MAB=\angle LAC,$$

$$\therefore\ \triangle ABM\cong\triangle ACL,$$

故 $$BM=CL=(\text{圆}\ M\ \text{的半径}),$$

即点B在圆M上.

［讨论］ 等边三角形AML可在AM的两侧作出,因此本题可能有四解,可能有三解,两解,一解或无解.

2258. 作与已知三角形$A'B'C'$全等的三角形ABC,使它外接于已知等边三角形LMN.

解 ［作图］ 在$\triangle LMN$的外侧以LN为弦作含角A'的弓形弧,以LM为弦作含角B'的弓形弧. 设两弧所在圆的圆心分别为O_1、O_2. 过L作两圆的割线AB,且满足$AB=A'B'$. 设直线BM与AN的交点为C,则$\triangle ABC$即为所求作的三角形.

［证明］ 根据作图,

$$\angle A=\angle A',$$
$$\angle B=\angle B',$$

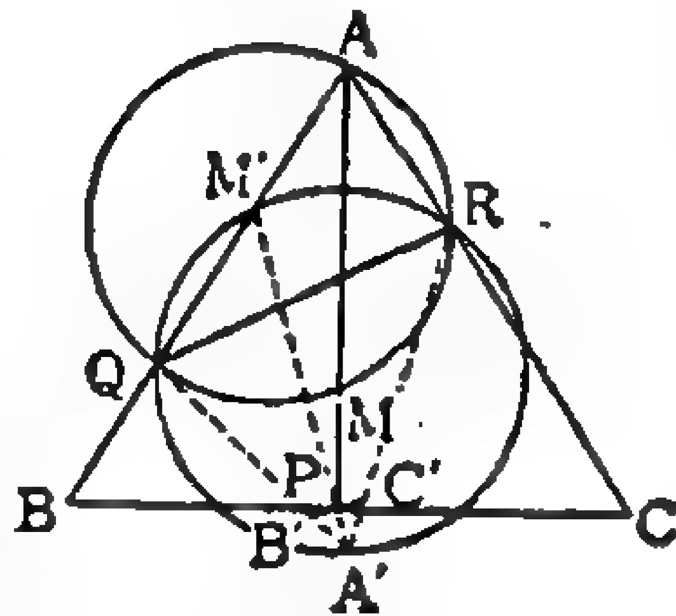
又 $$AB=A'B'.$$

$$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$

注 过L作割线AB等于$A'B'$的方法可参见问题**2191**.

［讨论］ $A'B'>2O_1O_2$时无解. $A'B'=2O_1O_2$时有一解. $A'B'<2O_1O_2$时有两解.

2259. 在平面上,分别过已知点P、Q、R作三条直线组成等边三角形,且使P为一边的中点.



解 以QR为弦,作含$60°$角的弓形弧. 设这个弧的共轭弧的中点为M,连结MP, MP与弓形弧相交于A. 连结AQ、AR,与过P所作AP的垂线分别相交于B、C,则$\triangle ABC$为所求等边三角形. 以QR为弦作含$60°$角的弓形在QR的两侧,所以还有一个符合条件的$\triangle A'B'C'$.

3. 作直角三角形

2260. 已知斜边AC和一边BC之差为l,另一边$AB=m$,作直角三角形ABC.

解 ［作图］ 作$AB=m$,过B作AB的垂线,在垂线上取D点,使$BD=l$. 设AD的垂直平分线与直线DB的交点为C,则

$\triangle ABC$ 即为所求直角三角形。

[证明] 根据作图，$\angle ABC=\angle R$。又 C 为 AD 的垂直平分线上的点，所以

$AC=DC$，

$\therefore\ AC-BC$

$=DC-BC$

$=BD=l$。

2261. 已知斜边 $BC(=l)$，以及 AB、AC 的和 m，求作直角三角形 ABC。

解 [作图] 取 $DB=m$，作直线 DC，使 $\angle CDB=\frac{1}{2}\times\angle R$。作以 B 为圆心，l 为半径的圆，与 DC 相交于 C。设过 C 所作 DB 的垂线足为 A，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

[证明] $BC=l$，$\angle CDA=\frac{1}{2}\angle R$，

$\angle CAD=\angle R$，

$\therefore\ \angle DCA=\frac{1}{2}\angle R$。

$DA=CA$，

$CA+AB=DA+AB$

$=DB=m$，

故 $\triangle ABC$ 为符合条件的三角形。

2262. 已知斜边 $AC(=l)$，两直角边 AB、BC 的差为 m，求作直角三角形 ABC。

解 [作图] 取 AD 等于 m，过端点 D 作直线 DC，使 $\angle ADC=\frac{1}{2}\angle R$。以 A 为圆心，l 为半径作圆，交 DC 于 C。过 C 作 DA 的垂线 CB，其垂足为 B，则 $\triangle ABC$ 即为所求三角形。

[证明] 在直角三角形 CBD 中，

$$\angle D=\frac{1}{2}\angle R,$$

$$\therefore\ \angle BCD=\frac{1}{2}\angle R.$$

所以 $BC=BD$，

$BC-AB=BD-AB=AD=m$，

$AC=l$，所以 $\triangle ABC$ 为所求作的三角形。

2263. 作以已知点 A 为直角顶点，其他顶点分别在已知的两平行直线 XX' 和 YY' 上，且斜边等于已知长 a 的直角三角形 ABC。

解 [作图] 在 XX'、YY' 上任取两点 M、N，使 $MN=a$，再以 MN 为直径作圆，过 A 作 $AE\parallel XX'$，与圆相交于 E；连结 EM 和 EN，过 A 分别作 $AB\parallel EM$，$AC\parallel EN$，与 XX'、YY' 分别相交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求直角三角形。

[证明] 因为 $AEMB$ 是平行四边形，所以 $AB=EM$，$AC=EN$，

$\angle BAC=\angle MEN=\angle R$，

$\therefore\ \triangle EMN\cong\triangle ABC$，

$MN=BC=a$。

[讨论] 若过 A 作 XX' 的平行线与以 MN 为直径的圆相交，有两解；相切，有一解；无公共点，无解。

2264. 以已知 $\angle XOY$ 内的一定点 A 为顶点作直角三角形，使它的另两个顶点 B、C 分别在 OX、OY 上，且边 BC 平行于定直线 l。

解 [作图] 在 OX 上取点 B'，OY 上取点 C'，使线段 $B'C'$ 与定直线 l 平行。以 $B'C'$ 为直径作圆，与 OA 相交于 A'（一般有两个交点），过 A 作 $A'B'$ 的平行线 AB，作 $A'C'$ 的平行线 AC，与 OX、OY 分别相交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求直角三角形。

[证明] 根据作图

$\angle BAC=\angle B'A'C'$

$=\angle R$，

$AB:A'B'=OA:OA'=AC:A'C'$，

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$。

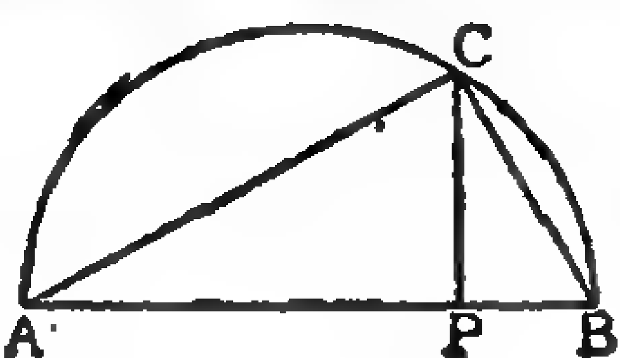
又 O 为这两个三角形的相似中心，因此 $BC\parallel B'C'$。因为 $BC\parallel l$，所以 $\triangle ABC$ 符合条件。

注 因为圆与 OA 一般有两个交点，所以还有一个解。

2265. 已知斜边 AB 等于已知长 l，一直角边 AC 为斜边 AB 和另一直角边的比例中项，求作直角三角形 ABC。

解　[分析]　假定此题已解出，$\triangle ABC$ 为所求直角三角形。过 C 作 AB 的垂线 CP，则

$BC^2=AB\cdot BP$。　①



根据题目条件

$AC^2=AB\cdot BC$。　②

由①、②，

$$\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{BP}{BC},\qquad ③$$

但
$$\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{AB\cdot BP}{AB\cdot AP}=\frac{BP}{AP}.\qquad ④$$

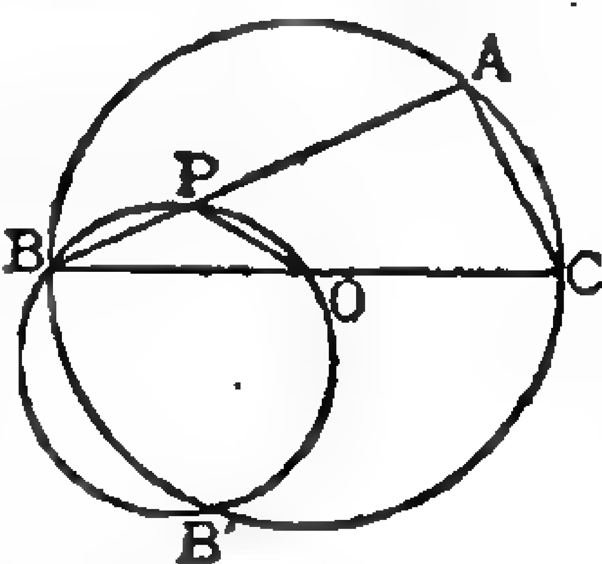
由③、④，　$AP=BC$。　⑤

由①、⑤，　$AP^2=AB\cdot BP$。

因此 P 是将 AB 内分为中外比的点。故可作图如下：

[作图]　将 AB 用 P 点内分成中外比（根据问题 **1510**），过 P 作 AB 的垂线，与以 AB 为直径的圆相交于 C，则 $\triangle ABC$ 为所求直角三角形。

2266.　已知一个锐角 B 等于已知角 α，一边 AB 过已知点 P，求作直角三角形 ABC，使它内接于已知圆 O。



解　[作图]　以 OP 为弦作含角 α 的弓形弧，与已知圆相交于 B，连结 BO、BP。它们的延长线与圆相交于 C、A，则 $\triangle ABC$ 为所求直角三角形。

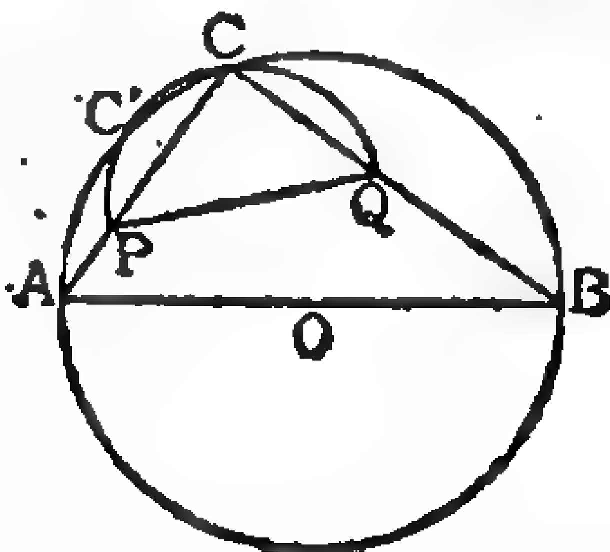
[证明]　根据作图，$\angle ABC=\alpha$，又 BC 为圆 O 的直径，所以

$$\angle BAC=\angle R.$$

因此 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

[讨论]　如果以 OP 为弦，含 α 的弓形弧与已知圆相交，则有两解；相切，则有一解；无公共点，则无解。

2267.　作直角三角形，使它的两条直角边 AC、BC 分别过两已知点 P、Q，且内接于已知圆 O。



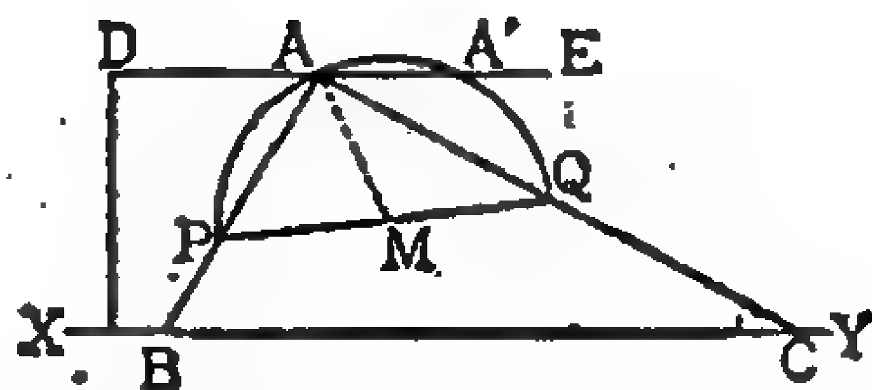
解　[作图]　设以 PQ 为直径的圆与圆 O 的交点为 C，PC、QC 与圆 O 分别相交于 A、B，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

[证明]　根据作图，$\angle ACB=\angle R$，又 AC、BC 分别过 P、Q，且 $\triangle ABC$ 内接于圆 O。

[讨论]　以 PQ 为直径的圆与圆 O 相交，有两解；相切，有一解；无公共点，无解。

2268.　作直角三角形，使它的两条直角边 AB、AC 分别过已知点 P、Q，斜边 BC 在已知直线 XY 上，且过 A 的高为 h。

解　[作图]　在与 XY 的距离为 h 处作它的平行线 DE，设以 PQ 为直径的圆与 DE 相交于 A，AP、AQ 分别与 XY 相交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

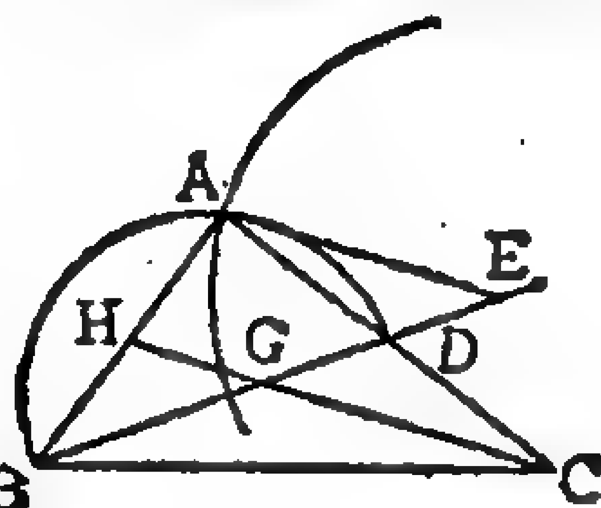


[证明]　根据作图，过 A 的 $\triangle ABC$ 的高为 h，$\angle BAC=\angle R$，斜边 BC 在 XY 上，AB 过 P，AC 过 Q。

[讨论]　以 PQ 为直径的圆与 DE 相交，有两解；相切，有一解；无公共点，无解。

2269.　已知从斜边 BC 的两端所作的中线 m_b、m_c，求作直角三角形 ABC。

解　[作图]　以 $BD=m_b$ 为直径作圆，延长 BD，取点 E，使 $DE=\frac{1}{3}m_b$；以 E 为圆心，$\frac{2}{3}m_c$ 为半径作圆。设两圆相交于 A。



延长 AD，取点 C，使 $CD=AD$，连结 BC，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

[证明]　在 BD 上取点 G，使 $DG=DE$，设 CG 的延长线与 AB 的交点为 H，则 $AD=CD$，$DE=DG$，$\angle D$ 为公共角，所以 $\triangle DAE\cong\triangle DCG$，

$$\therefore\quad CG=AE=\frac{2}{3}m_c.$$

且 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $CH=m_c$。根据作图，$\angle BAC=\angle R$。

[讨论]　略。

2270.　已知斜边 AB 和一锐角 B 的平分线 BD 的长，求作直角三角形 ABC。

解　[分析]　设 ABC 为所求三角形，以 A 为圆心，AB 为半径作圆。延长 BD、AC，分别与圆相交于 E、F，则

$$AE\perp AF,$$

$\therefore\quad \angle AFE=45^\circ=\angle EBF$.

因此$\triangle DBF$的外接圆与EF相切于F.

$\therefore\quad EB\cdot ED=EF^2$ (定值). ①

但是

$EB-ED=BD$ (定值), ②

由①、②，BE、ED可知，因此可作图如下.

[作图] 设$AB=m$, $BD=n$. 以点A为圆心，m为半径作圆. 作两条互相垂直的半径AE、AF(参照问题**2016**). 作两条线段，使它们的差等于n，积等于EF^2;作弦EB等于其中的较大线段，过B作AF的垂线BC，则$\triangle ABC$为所求直角三角形.

2271. 已知直角三角形的周长为$2S$，内切圆半径为r，求作这个三角形.

解 [分析] 设所求三角形ABC已作出，作内切圆O. 设与斜边AC相切的旁切圆O'与BC、BA的切点为D、E，则$BD=DE=S$，所以可作图如下.

[作图] 作两条线段BD、BE，垂直相交于B，使$BD=BE=S$; 作与BD、BE相切，半径为r的圆O，然后作与BD、BE相切于D、E的圆O'，作两圆O、O'的内公切线，与BD、BE分别相交于C、A，则$\triangle ABC$为所求直角三角形.

[证明] 根据作图，$\triangle ABC$的内切圆的半径为r，$\angle ABC$为直角. 又D、E为$\triangle ABC$的旁切圆的切点，且$BD=BE=S$，所以$\triangle ABC$的周长为$2S$.

[讨论] 两圆O、O'相交，无解; 相切，有一解;无公共点时，O、O'的公共切线有两条，但由此而产生的两个三角形

$$\triangle ABC\cong\triangle A'BC',$$

所以只有一解.

2272. 已知周长$2s$，面积为S，作直角三角形ABC，使$\angle A=\angle R$.

解 设内切圆的半径为r，则

$$s\cdot r=S \text{ (问题 976)}.$$

但s和S为已知，所以r为定值. 因此本题和上题一样，是已知周长$2s$和内切圆半径r，作直角三角形的问题.

2273. 已知斜边AC($=l$)，内切圆的半径r，求作直角三角形ABC.

解 [作图] 作线段$AC=l$，以AC为直径作圆，设半圆AC的中点为M. 在M关于AC的相反一侧，离AC为r处作$XY\parallel AC$; 以M为圆心、MA为半径的圆与XY相交于I，连结MI，延长与以AC为直径的圆相交于B，则$\triangle ABC$为所求直角三角形.

[证明] 根据作图，$AC=l$，又因为AC为直径，所以$\angle ABC=\angle R$.

又 $\because\quad \widehat{AM}=\widehat{MC}$,

$\therefore\quad \angle ABI=\angle IBC$.

$\because\quad MI=MA$,

$\therefore\quad \angle AIM=\angle IAM$,

故
$$\begin{aligned}\angle BAI&=\angle AIM-\angle ABI\\&=\angle IAM-\angle IBC\\&=\angle IAM-\angle MAC\\&=\angle IAC.\end{aligned}$$

所以AI为$\angle BAC$的平分线. 因此I为$\triangle ABC$的内心，I到AC的距离为r，所以$\triangle ABC$的内接圆的半径为r.

[讨论] 若以M为圆心，MA为半径的圆与XY相交，则内心有两个，它们关于AC的垂直平分线对称，由此所求得的两个三角形重合，结果只有一解. 以M为圆心、MA为半径的圆与XY相切时也有一解; 无公共点时无解.

注 本题归结于已知底边、顶角、内接圆半径，作三角形的问题(问题**2305**).

2274. 已知斜边$AC=l$，$\angle A$所对旁切圆的半径为r，求作直角三角形ABC.

解 [分析] 设所求三角形ABC已作出. 在$\angle A$、$\angle C$内作所含的两个旁切圆O、O',

与 BC 分别相切于 D、E，设 AC 的延长线与圆 O 相切于 H，则

$$AH=\frac{1}{2}(AB+AC+BC),$$

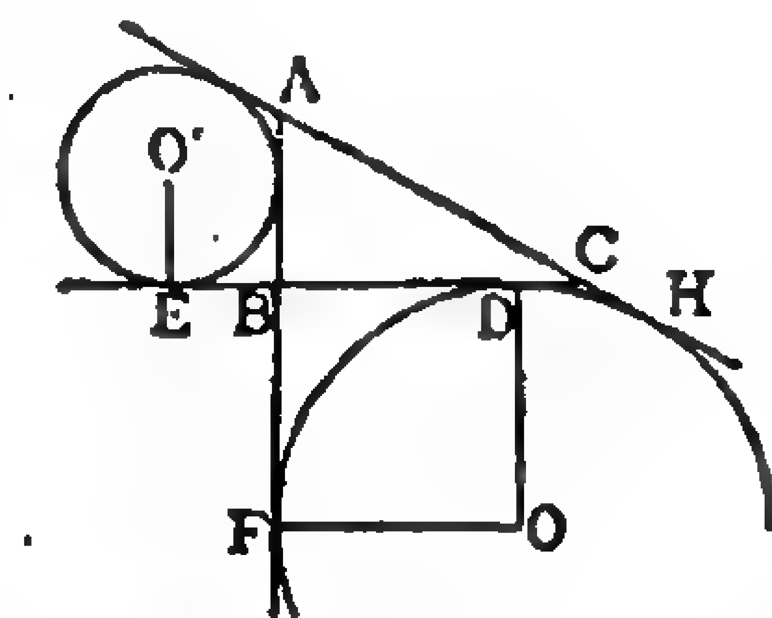
$$CE=\frac{1}{2}(AB+AC+BC),$$

$$\therefore\quad AH=CE.$$

$$\because\quad CH=CD,$$

$$\therefore\quad DE=AC=l.$$

因此可作图如下.



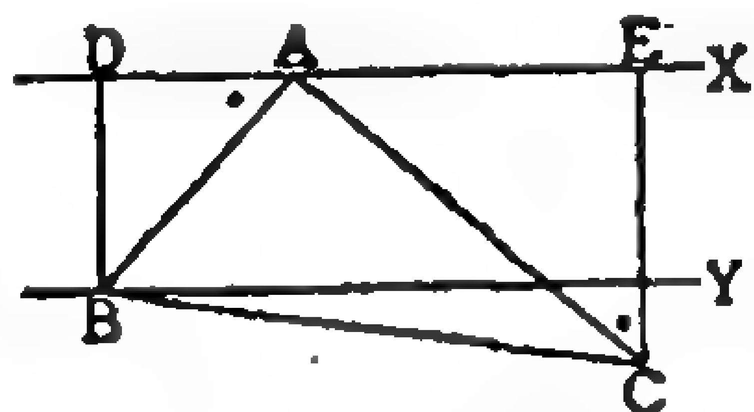
［作图］ 作直线 ABF、EBD 互相垂直相交，使

$BD=BF=r$.

过 D、F 作与 BD、BF 相切的圆 O，在 DB 的延长线上取点 E，使 $DE=l$. 过点 E 作与 BE 相切并且与 AB 相切的圆 O'. 作 O、O' 的外公切线与 BD、FB 的延长线分别相交于 C、A，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形.

［证明］［讨论］ 略.

2275. 已知平行线 X、Y 及点 C，求作直角三角形 ABC，使直角的顶点 A 在 X 上，B 在 Y 上，且 AB、AC 的平方差为定值.



解 设所求三角形 ABC 已作出，过 B 和 C 作直线 X 的垂线 BD、CE，因为

$$\angle BAC=\angle R,$$

所以
$$\angle DAB=\angle ACE,$$

$$\angle D=\angle E=\angle R.$$

$$\therefore\quad \triangle ABD\backsim\triangle CAE,$$

$$\therefore\quad AD:DB=CE:EA,$$

$$AD\cdot EA=DB\cdot CE\ (\text{定值}).\qquad ①$$

又
$$AC^2=AE^2+EC^2,$$

$$AB^2=AD^2+BD^2,$$

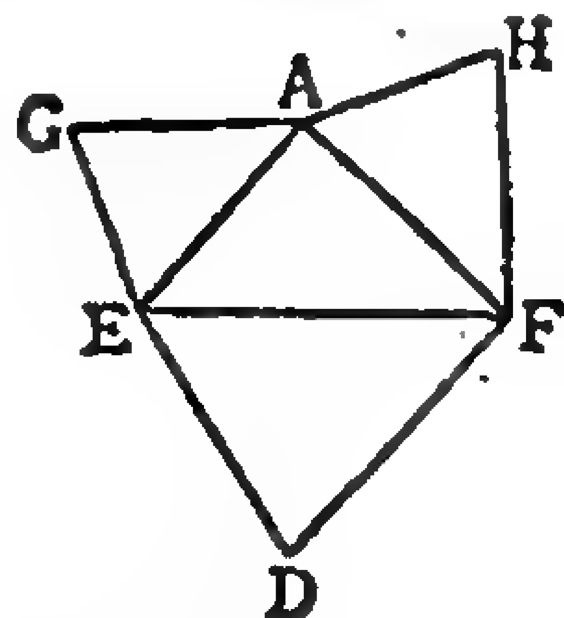
所以
$$AC^2-AB^2=(AE^2-AD^2)+(EC^2-BD^2),$$

$$\therefore\quad AE^2-AD^2=(AC^2-AB^2)-(EC^2-BD^2).$$

但 CE、BD 均为定长，AC^2-AB^2 为定值，因此 AE^2-AD^2 也一定. 再根据 ①，AD、AE 之积及其平方差一定. 根据问题 **2019**，可定 AE、AD 的长，由此可知 A 的位置. 因此作 AC 的垂线 AB，可求得 $\triangle ABC$.

4. 作相似三角形、全等三角形

2276. 已知相似三角形 ABC 和 $A'B'C'$，求作与它们相似的三角形 DEF，使其面积等于已知三角形面积的和.



解 ［作图］ 作

$$\angle EAF=\angle B,$$

$$EA=BC,$$

$$AF=B'C'.$$

取 G、H 点，使

$$\triangle GEA\cong\triangle ABC,$$

$$\triangle HAF\cong A'B'C'.$$

连结 EF，取点 D，使 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似，则 $\triangle DEF$ 为所求三角形.

［证明］
$$\triangle DEF\backsim\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C',$$

$$\triangle GEA\cong\triangle ABC,$$

$$\triangle HAF\cong\triangle A'B'C';$$

$$\therefore\quad \triangle DEF\backsim\triangle GEA\backsim\triangle HAF,$$

$$\frac{S_{\triangle GEA}}{S_{\triangle DEF}}=\frac{EA^2}{EF^2},\quad \frac{S_{\triangle HAF}}{S_{\triangle DEF}}=\frac{AF^2}{EF^2},$$

故
$$\frac{S_{\triangle GEA}+S_{\triangle HAF}}{S_{\triangle DEF}}=\frac{EA^2+AF^2}{EF^2}=\frac{EF^2}{EF^2}=1,$$

$$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle GEA}+S_{\triangle HAF}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}.$$

2277. 求作与已知 $\triangle ABC$ 相似的 $\triangle DEF$，使它内接于已知圆 O.

解 ［作图］ 在已知圆 O 上的一点 D，作切线 GDH. 分别作直线 DF、DE，使

$$\angle HDF=\angle B,$$

$$\angle GDE=\angle C.$$

两直线与圆 O 分别相交于 F 和 E，则 $\triangle DEF$ 为所求三角形.

［证明］ 因为 GDH 是切线，所以

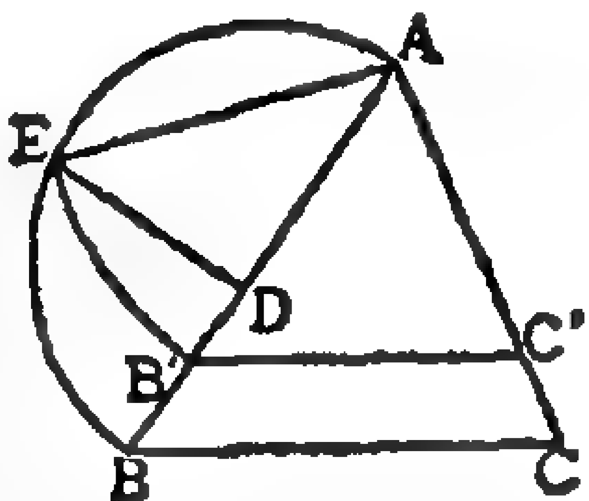
$$\angle HDF=\angle E=\angle B,$$

$$\angle GDE=\angle F=\angle C.$$

因此
$$\angle EDF=\angle A,$$

从而 $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$。

2278. 作$\triangle AB'C'$，使它与已知$\triangle ABC$相似，且它的面积与已知三角形的面积之比为$m:n(m>n)$。



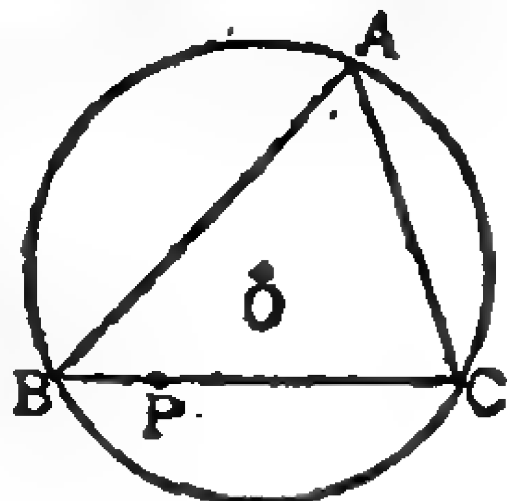
解 ［作图］ 在AB上取点D，使$AB:AD=m:n$。以AB为直径作半圆，过D作AB的垂线DE，与半圆相交于E。在AB上取$AB'=AE$，过B'作BC的平行线与AC相交于C'，则$\triangle AB'C'$为所求三角形。

［证明］ $\triangle ABC:\triangle AB'C'=AB^2:AB'^2$
$=AB^2:AE^2=AB^2:AD\cdot AB$
$=AB:AD=m:n$，

根据作图，$\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$。

2279. 作与已知$\triangle A'B'C'$相似的$\triangle ABC$，使它的底边BC过已知点P，并内接于已知圆O。

解 设$\triangle ABC$为符合条件的三角形，$\angle A$与$\triangle A'B'C'$的$\angle A'$对应，则$\angle A$的大小一定，所以边BC的长也一定。因此就转化为作定长弦（参照问题2125）的问题。过定点P作定长弦BC，过B、C作

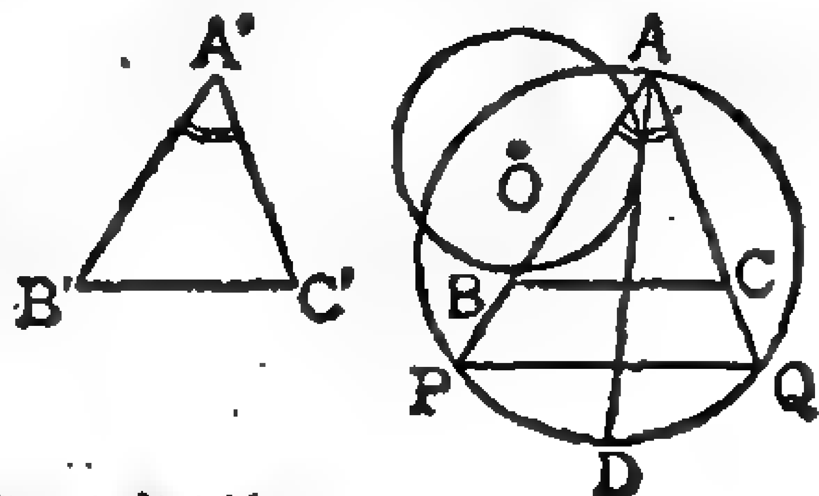


$$\angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',$$

则$\triangle ABC$即可作出。

2280. 作与$\triangle A'B'C'$全等的$\triangle ABC$，使两边AB、AC过两已知点P、Q，$\angle A$的平分线AD与已知圆O相切。

解 ［作图］ 以PQ为弦，作含$\angle A'$的弓形弧，求此弧的共轭弧的中点D，过D作已知圆O的切线与弓形弧相交于A。在AP、AQ上取



$AB=A'B'$，
$AC=A'C'$，

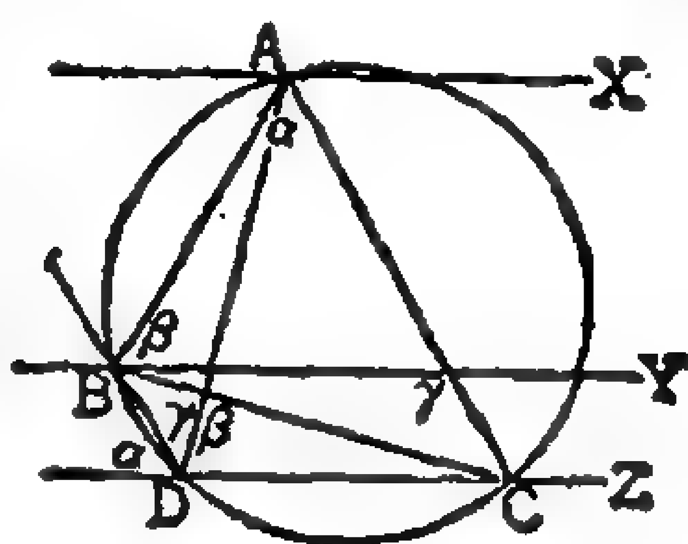
则$\triangle ABC$为所求三角形。

［证明］ 根据作图，

$$\angle A=\angle A',\ AB=A'B',$$
$$AC=A'C',$$

所以$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，而且边$AB$、$AC$分别过已知点$P$、$Q$。$AD$为圆$O$的切线，且$D$为弧$PQ$的中点，因此$AD$平分$\angle A$。

2281. 作$\triangle ABC$，使它的三个顶点分别在已知平行线X、Y、Z上，且三个角分别等于α、β、γ。



解 ［分析］ 设符合条件的$\triangle ABC$已作出。作$\triangle ABC$的外接圆，与直线Z相交于D，则

$$\angle ADC=\angle ABC=\beta,$$
$$\angle ADB=\angle ACB=\gamma,$$

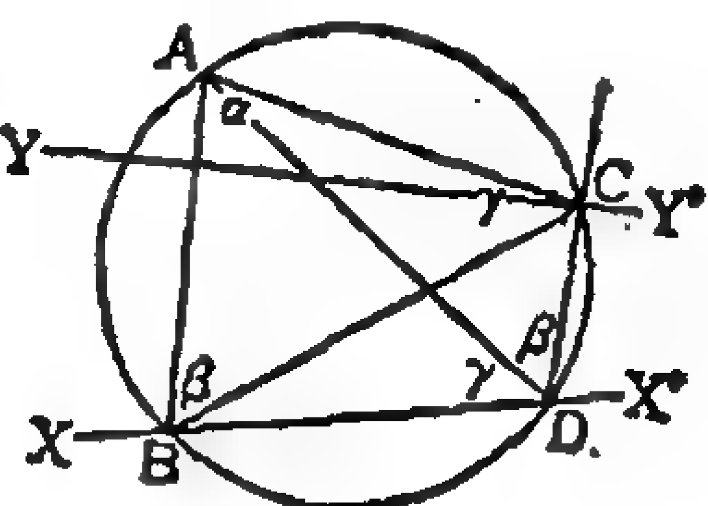
因此可作图如下。

［作图］ 在Z上取D、C两点，作直线DA、DB，使$\angle ADC=\beta$，$\angle ADB=\gamma$（使这两个角在AD的两侧）。DA、DB与X、Y分别相交于A、B，作$\triangle ADB$的外接圆，与Z相交于C，则$\triangle ABC$为所求三角形。

［证明］ 略。

2282. 以已知点A为顶点作$\triangle ABC$，使它的另两个顶点B、C分别在已知直线XX'、YY'上，并使$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$分别等于α、β、γ。

解 ［分析］ 设$\triangle ABC$为符合条件的三角形。它的外接圆与XX'相交的另一交点为D，连结AD、CD，则



$$\angle ADB=\angle ACB=\gamma,$$
$$\angle ADC=\angle ABC=\beta。$$

因此可作图如下。

［作图］ 在XX'上取点D，使$\angle ADX=\gamma$。作直线DC，使$\angle ADC=\beta$，且X和C在AD的异侧，DC与YY'相交于C。作$\triangle ADC$的外接圆，与XX'的另一交点为B，则$\triangle ABC$为所求三角形。

［证明］ 设$\alpha+\beta+\gamma=180°$（否则就不可能作出三角形）。根据作图

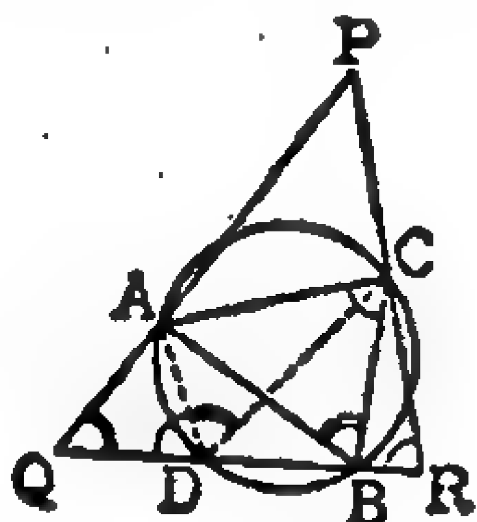
$$\angle ABC=\angle ADC=\beta,$$
$$\angle ACB=\angle ADB=\gamma。$$
$$\angle BAC=2\angle R-(\beta+\gamma)=\alpha,$$

且B在XX'上，C在YY'上，因此$\triangle ABC$为符合条件的三角形。

注意，$\triangle ADC$的外接圆与XX'相交有两

种情况．若 $\triangle ADC$ 的外接圆与 XX' 相切于点 D，将点 D 作为点 B 即可．

2283． 以已知 $\triangle PQR$ 一边 PQ 上的点 A 为顶点，求作 $\triangle ABC \backsim \triangle PQR$，使 $\triangle ABC$ 内接于 $\triangle PQR$．

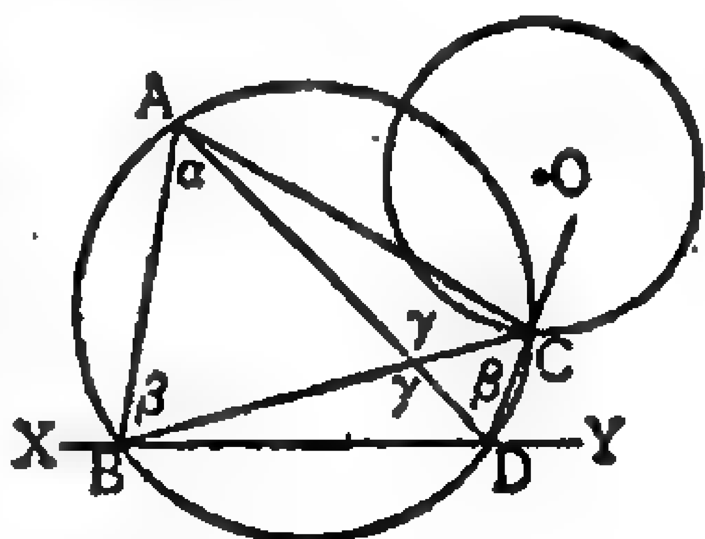


解 在本题中，A 为已知点，B、C 分别在已知直线 QR、RP 上，所以作 $\triangle ABC$ 的方法与上题完全相同．

2284． 过已知点 A 作与已知 $\triangle PQR$ 相似的 $\triangle ABC$，使 B 在已知直线 XY 上，C 在已知圆 O 上．

解 [分析] 假定 $\triangle ABC$ 已作出，则

$$\triangle ABC \backsim \triangle PQR.$$



设 $\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$\angle C=\gamma$．作 $\triangle ABC$ 的外接圆，与 XY 相交的另一点为 D，则

$$\angle ADB=\angle ACB=\gamma,$$

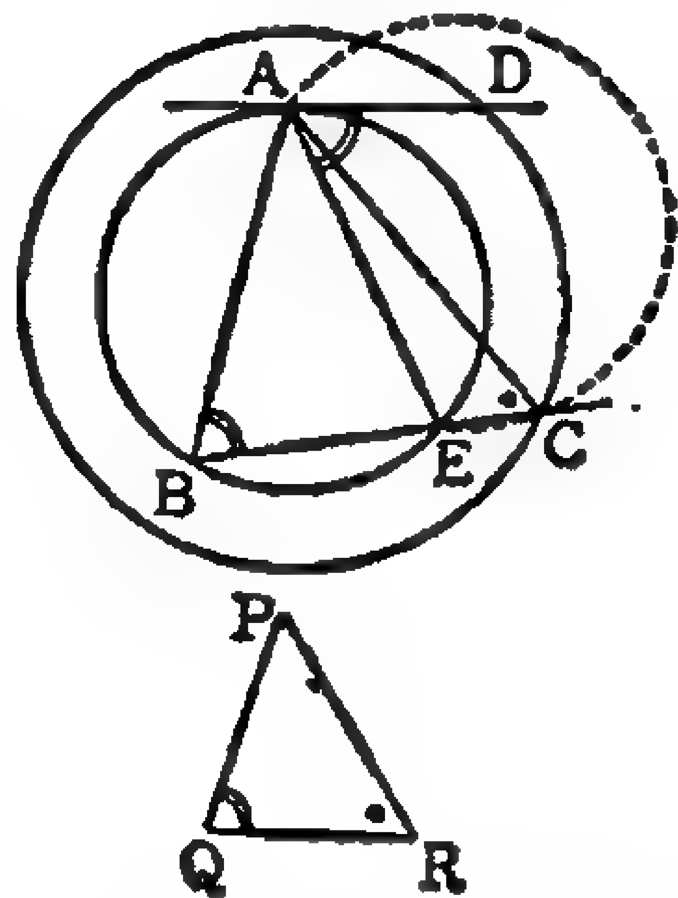
$$\angle ADC=\angle ABC=\beta.$$

因此可作图如下．

[作图] 在 XY 上取点 D，使 $\angle ADX=\gamma$，作直线 DC，使 $\angle ADC=\beta$，且 $\angle ADC$ 和 $\angle ADX$ 在 AD 两侧．设 DC 与圆 O 相交于 C，$\triangle ADC$ 的外接圆与 XY 交于另一点 B，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形．

[证明] 略．

2285． 作 $\triangle ABC$ 与已知三角形 PQR 相似，使 A 和 B 在已知同心圆 O 的内圆上，C 在同心圆 O 的外圆上．



解 [作图] 过内圆上任意一点 A 作切线 AD，过 A 作内圆的弦 AE，使

$$\angle DAE=\angle PQR.$$

以 AE 为弦作含 $\angle PRQ$ 的弓形弧 AC，与外圆相交于 C，连结 CE，与内圆相交于另一点 B，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形．

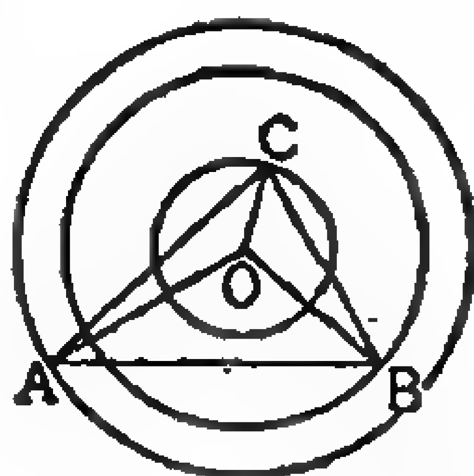
[证明] $\angle B=\angle DAE=\angle PQR$,

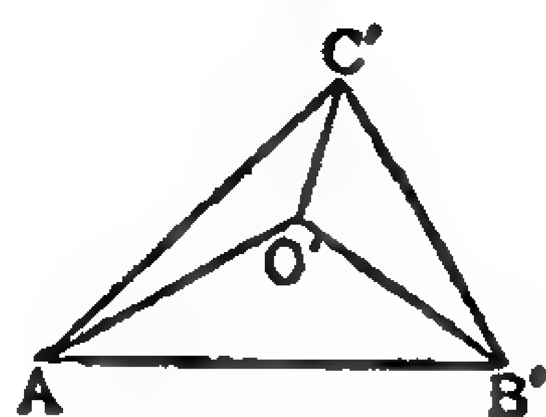
$$\angle C=\angle PRQ.$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle PQR.$$

2286． 作 $\triangle ABC$ 与 $\triangle PQR$ 相似，使它的三个顶点分别在三个已知同心圆上．

解 在别的位置上作与 $\triangle PQR$ 相似的 $\triangle A'B'C'$，在此三角形内求一点 O'，使 $O'A':O'B':O'C'$ 等于三个圆的半径的比(参照问题 **1947**)，连结 $O'A'$，$O'B'$，$O'C'$．过圆 O 的圆心作三条半径 OA，OB，OC(如图)，使





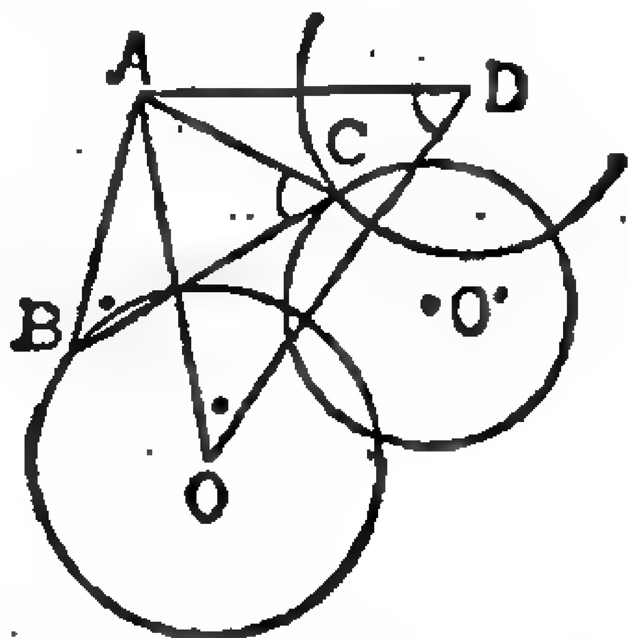
$$\angle AOB=\angle A'O'B', \ \angle BOC=\angle B'O'C',$$

所以 $\triangle ABC$ 为所求三角形．

注 这样的作图叫逆作图法．

2287． 过已知点 A 作与已知 $\triangle PQR$ 相似的 $\triangle ABC$，使 B、C 分别在两个已知圆 O 和 O' 上．

解 假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出．连结 AO，在 AO 上作 $\triangle AOD$ 与 $\triangle ABC$ 相似，使 AO 与 AB 为对应边．根据问题 **1865** 可知，当 $\triangle ABC$ 的顶点 A 固定，B 在已知圆 O 上，且与已知三角形 PQR 相似时，顶点 C 的轨迹是以 D 为圆心、DC 为半径(定长)的圆．因此求以 D 为圆心的圆与圆 O' 的交点，即可决定 C 的位置．然后以 AC 为一边作与 $\triangle ADO$ 相似的 $\triangle ACB$，使 AD 与 AC 对应，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形．



2288． 以已知点 A 为顶点作 $\triangle ABC$，使另两个顶点 B、C 在已知圆 O 上，且与已知 $\triangle PQR$ 相似．

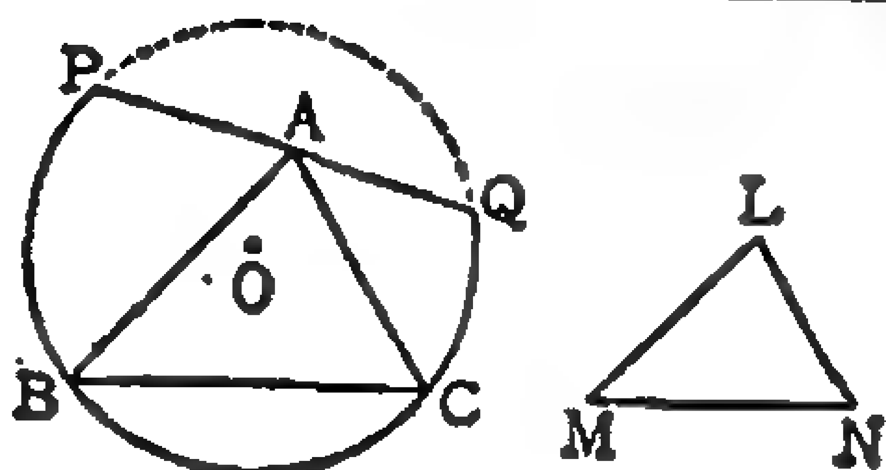
解 本题可把上题中 O、O' 两点看作重合的情况，又 $AO=a$，圆 O 的半径为 r，所以

$$AO:BO:CO=a:r:r.$$

因此可参照问题 **2286** 作图．

2289． 以弦 PQ 上的已知点 A 为顶点作三角形 ABC，使另两个顶点 B、C 在弧 PQ

上，且与已知$\triangle LMN$相似。



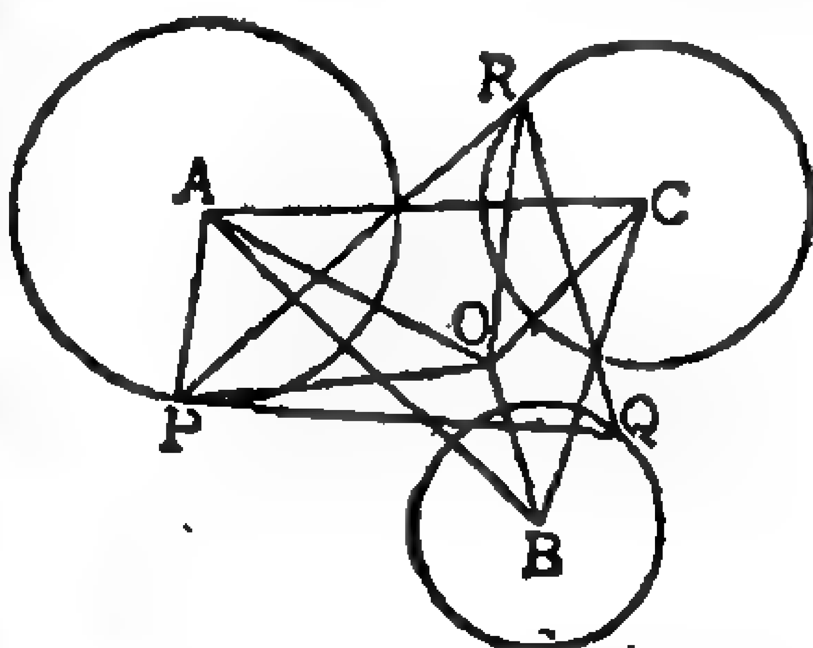
解　如果本题中的弓形为圆，那么点A的位置已知，B、C在已知圆上，

$$\triangle ABC \backsim \triangle LMN,$$

所以与上题完全相同。

2290.　在已知三个圆A、B、C上分别求P、Q、R，使$\triangle PQR$与$\triangle ABC$全等。

解　设圆A、B、C的半径分别为a、b、c。在$\triangle ABC$内求点O，使$OA:OB:OC=a:b:c$（问题**1947**）。再以O为圆心、OA为半径作圆，与圆A相交于P。将$\triangle ABC$以O为中心旋转，设当OA旋转到OP时，OB、OC的位置分别为OQ、OR，则



$\triangle ABC \cong \triangle PQR$。

P、Q、R分别在圆A、B、C上。因为已经将$\triangle ABC$以O为中心旋转到$\triangle PQR$的位置，$\triangle OAP \backsim \triangle OBQ$。

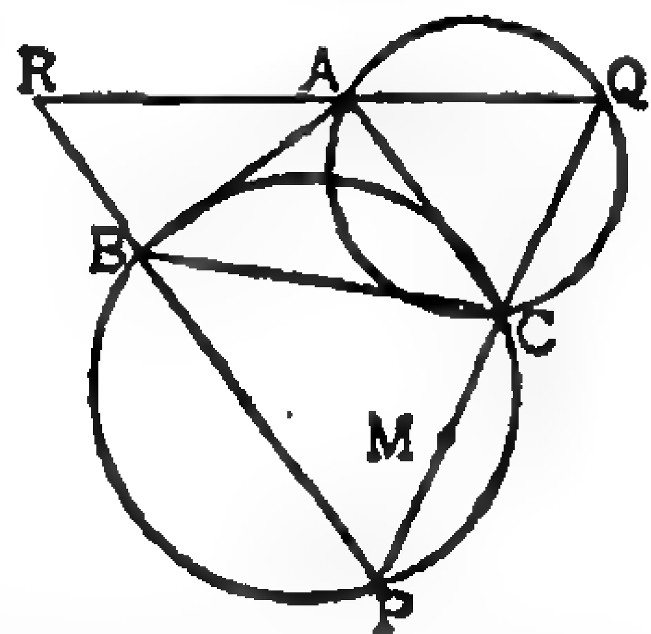
$$\therefore \quad AP:BQ=OA:OB=a:b,$$

又　　$AP=a$，$BQ=b$。

因此Q在圆B上，同样R也在圆C上。

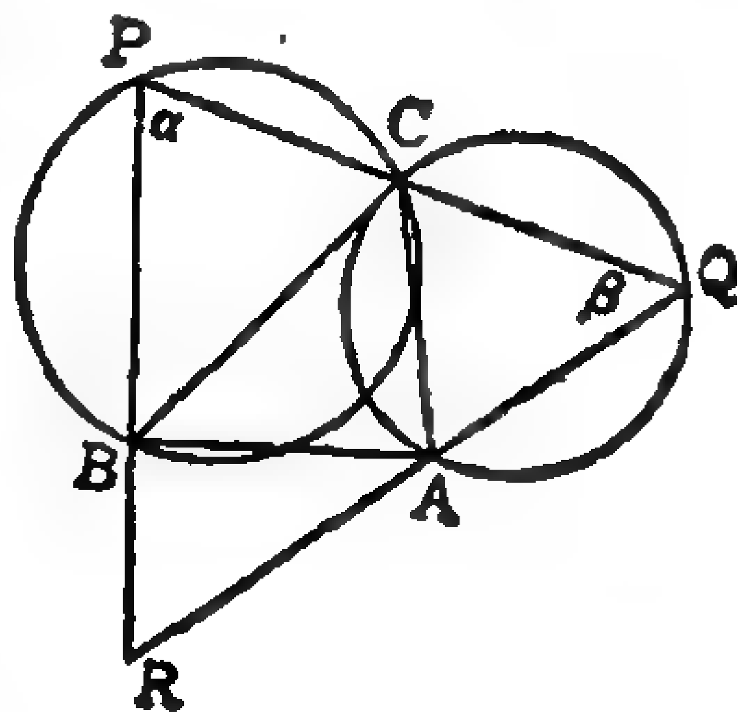
2291.　作外接于已知$\triangle ABC$的$\triangle PQR$，使$\triangle PQR$与另一已知三角形相似，且边PQ过已知点M。

解　$\triangle PQR$与已知三角形相似，所以三个角的大小一定。设$\angle P=\alpha$，$\angle Q=\beta$，以BC、CA为弦分别作含α、β的弓形弧。过MC的直线与这两个圆相交于P、Q，PB、QA的延长线相交于R，则$\triangle PQR$为所求三角形。根据作图，$\angle P=\alpha$，$\angle Q=\beta$，PQ过已知点M，所以$\triangle PQR$为符合条件的三角形。



2292.　作$\triangle PQR$外接于已知$\triangle ABC$，使$\angle P=\alpha$，$\angle Q=\beta$，$PQ=m$。

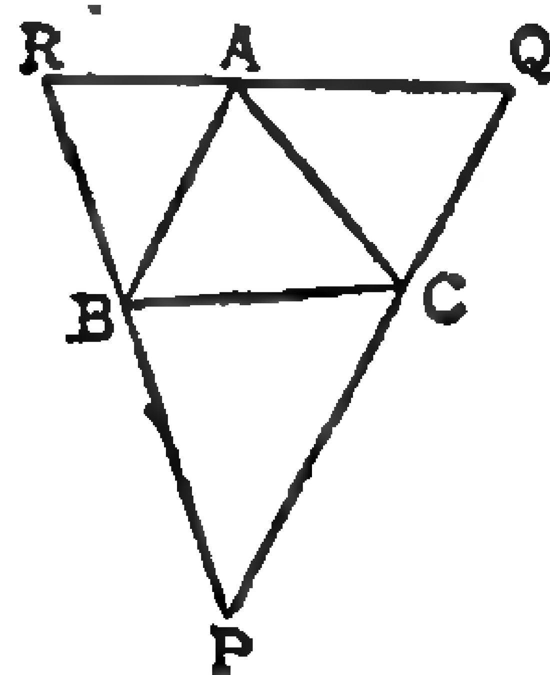
解　［作图］　以BC、CA为弦分别作含α、β的弓形弧。过C作一直线与这两条弓形弧相交于P、Q，且$PQ=m$（问题**2191**）。设PB、QA的延长线相交于R，则$\triangle PQR$为所求三角形。

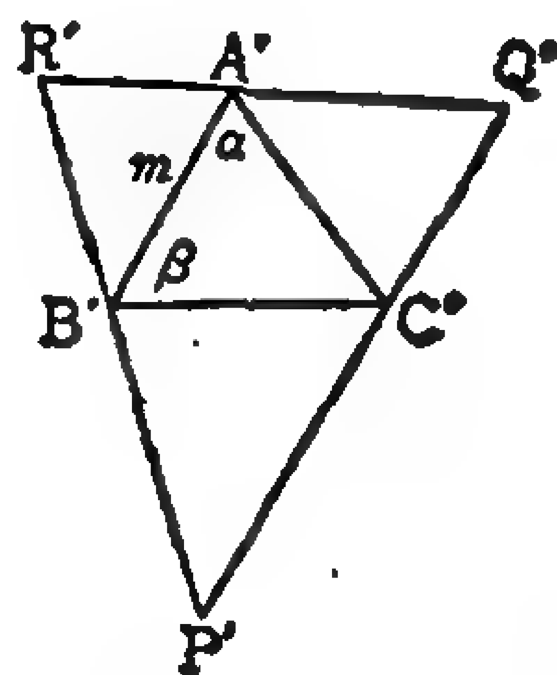


［证明］　略。

2293.　作内接于已知$\triangle PQR$的$\triangle ABC$，使$\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$AB=m$。

解　在任意位置作$\triangle A'B'C'$，使$\angle A'=\alpha$，$\angle B'=\beta$，$A'B'=m$。利用上题的方法作$\triangle P'Q'R'$与$\triangle PQR$全等，并外接于$\triangle A'B'C'$。然后在$\triangle PQR$的边QR、RP、PQ上分别取点A、B、C，使





$$QA=Q'A',\ RB=R'B',\ PC=P'C',$$

则$\triangle ABC$为所求三角形。

2294.　求作$\triangle ABC$，使它的底边BC在已知直线XY上，顶点A在另一已知直线$X'Y'$上，且与已知$\triangle A'B'C'$全等。

解　［作图］　在XY上取$EF=B'C'$。以EF为一边作$\triangle DEF$与$\triangle A'B'C'$全等。过D作XY的平行线，与$X'Y'$相交于A；过A分别作$AB \parallel DE$，$AC \parallel DF$，与XY相交于B、C，则$\triangle ABC$为所求的三角形。

［证明］　略。

［讨论］　EF可以在XY和YX两个方向取得，D也可在XY的两侧求得，所以$\triangle DEF$的作法在$A'B' \neq A'C'$时有四个方向。因此这时$X'Y'$不与XY平行，则有四个解。若$A'B'=A'C'$，则有两解。若$X'Y'$与过D所作XY平行线重合，则有无数解。若$X'Y' \parallel XY$，则无解。

2295.　作$\triangle ABC$外接于已知$\triangle DEF$，

使$\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，且$\triangle ABC$的内心O在边DE上。

解　[分析]　设$\triangle ABC$为所求三角形、它的内心O在边DE上。$\triangle AEF$、$\triangle BDE$的外接圆与AO、BO分别相交于P、Q，P、Q为弧FPE、DQE的中点，均为定点。且

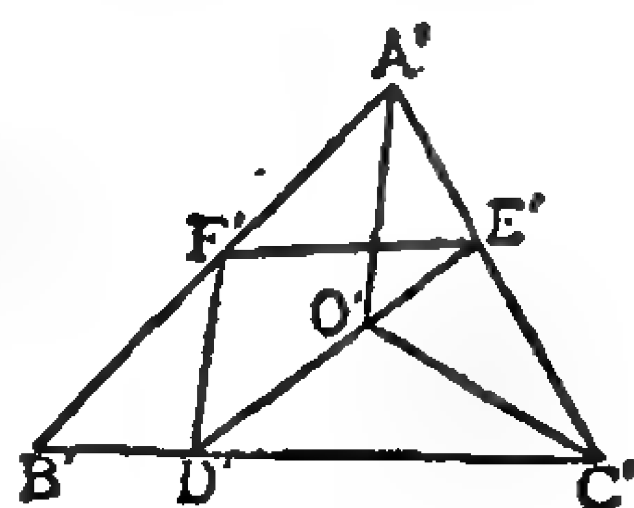
$$\angle POQ=\angle OAB+\angle ABO$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ (一定)。$$

因此可作图如下。

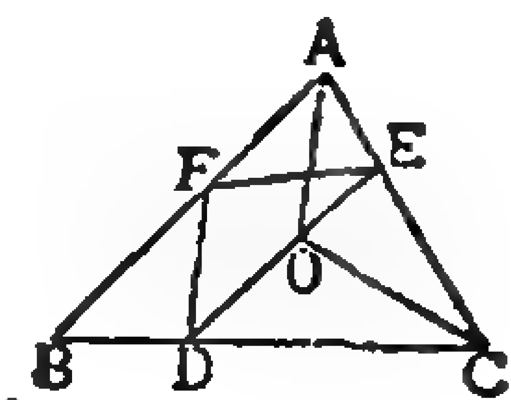
[作图]　以EF、DE为弦，分别作含α、β的弓形弧，求各弓形弧的共轭弧的中点P、Q。以PQ为弦作含$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$的弓形弧与$DE$相交于$O$。$OP$、$QO$的延长线与上述弓形弧分别相交于$A$、$B$，延长$AF$、$BD$相交于$C$，则$\triangle ABC$为所求三角形。

2296.　作$\triangle DEF$内接于已知$\triangle ABC$，且边DE过$\triangle ABC$的内心。

解　作$\triangle D'E'F'\backsim\triangle DEF$，用上题的方法，作$\triangle A'B'C'$外接于$\triangle D'E'F'$，使$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$且$\triangle A'B'C'$的内心$O'$在$D'E'$上(图1)。在已知$\triangle ABC$的边$BC$、$CA$、$AB$上分别取点$D$、$E$、$F$，使



(1)

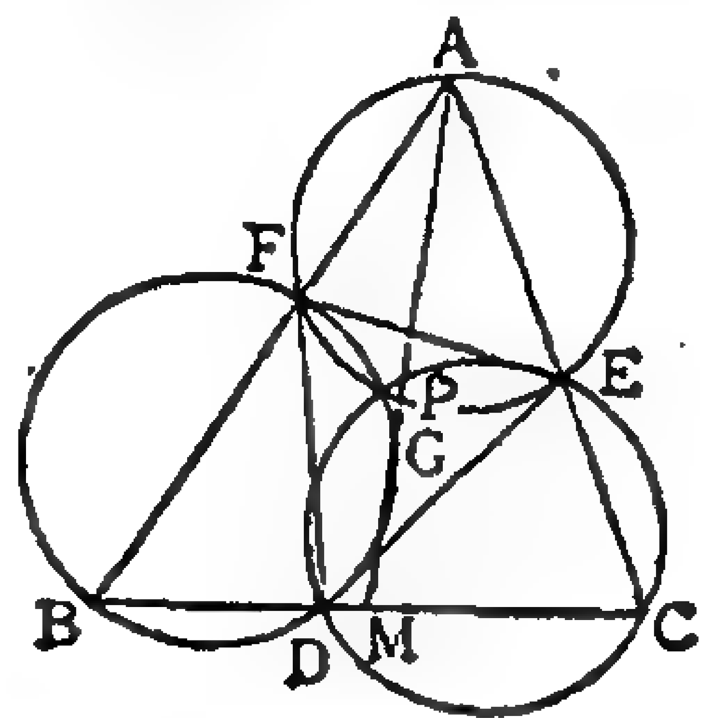


(2)

$BD:DC=B'D':D'C'$，
$CE:EA=C'E':E'A'$，
$$AF:FB=A'F':F'B'\ (图2)。$$
这时，图(1)和(2)的图形相似，因此DE过$\triangle ABC$的内心。

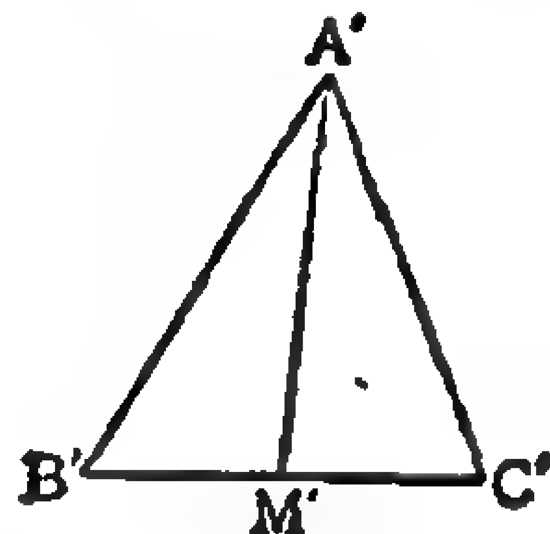
2297.　求作$\triangle ABC$，使它外接于已知$\triangle DEF$，并与已知$\triangle A'B'C'$相似，其中线AM过$\triangle DEF$的重心G。

解　假定符合条件的$\triangle ABC$已作出。设$\angle A'=\alpha$，$\angle B'=\beta$，$\angle C'=\gamma$，则点A、B、C分别在以EF、FD、DE为弦，各含$\angle\alpha$、$\angle\beta$、$\angle\gamma$的弓形弧上。设中线AM与圆AFE相交于P，则P为定点。理由是：$\triangle ABC$形状一定，且M为BC的中点。设$B'C'$的中点为M'，则



$\angle CAM=\angle C'A'M'$

(一定)。因此$\angle EAP$的大小一定，弧EP的大小一定，且$\triangle EFD$的重心一定。延长GP与弧FAE相交于A，则A的位置一定，从而点P的位置一定。因此可作图如下。



[作图]　以EF、FD、DE为弦，分别作含角α、β、γ的弓形弧，在弧FAE的共轭弧上求点P，使$\angle EAP=\angle C'A'M'$。设GP的延长线与圆EPF相交于A，AF和AE与上述两个弓形弧分别相交于B、C，则$\triangle ABC$为所求三角形。

2298.　求作$\triangle DEF$内接于已知$\triangle ABC$且与另一已知$\triangle D'E'F'$相似，并且重心在$\triangle ABC$的中线AM上。

解　[作图]　作$\triangle A'B'C$外接于$\triangle D'E'F'$使$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$，且$\triangle A'B'C'$的中线$A'M'$过$\triangle D'E'F'$的重心$G'$(参照上题)。在$\triangle ABC$的边$BC$、$CA$、$AB$上分别求点$D$、$E$、$F$，使

$BD:DC=B'D':D'C'$，
$ACE:EA=C'E':E'A'$，
$F:FB=A'F':F'B'$。

则$\triangle DEF$为所求三角形。

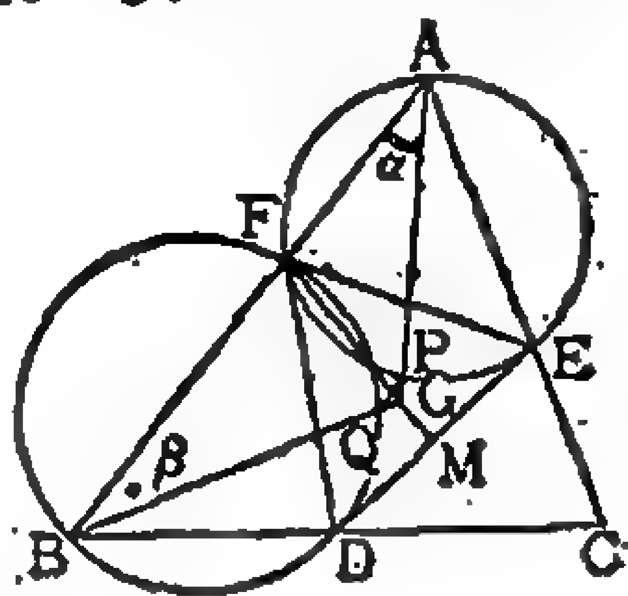
2299.　求作$\triangle ABC$，使它外接于已知$\triangle DEF$，与另一已知$\triangle A'B'C'$相似，且其重心G在$\triangle DEF$的一条中线FM上。

解　[分析]　假设符合条件的$\triangle ABC$已作出。则

$$\angle FAE=\angle A'，$$
$$\angle DBF=\angle B'，$$

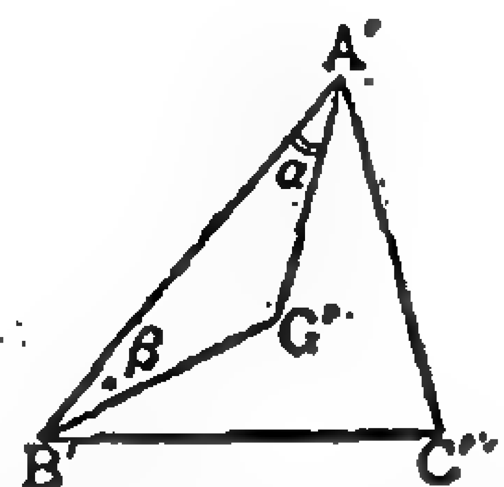
因此A和B分别在以EF、DF为弦，含

$\angle A'$、$\angle B'$的弓形弧上。设$\triangle ABC$的重心为G，G在中线FM上，AG、BG与圆FAE、圆DBF相交于P、Q，则P、Q均为定点。理由是：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$。



若设$\triangle A'B'C'$的重心为G'，则

$\angle BAG=\angle B'A'G'$
$(=\alpha)$，
$\angle ABG=\angle A'B'G'$
$(=\beta)$。



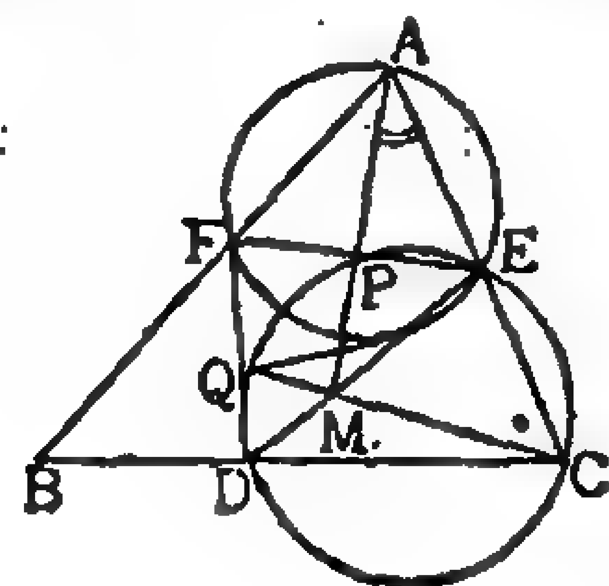
所以$\angle FAP$，$\angle FBQ$的大小一定，弧FP、FQ也一定，故P、Q为定点。又在$\triangle ABG$中，

$$\angle AGB=2\angle R-(\alpha+\beta)\ (一定),$$

因此$\angle PGQ$一定。所以可作图如下。

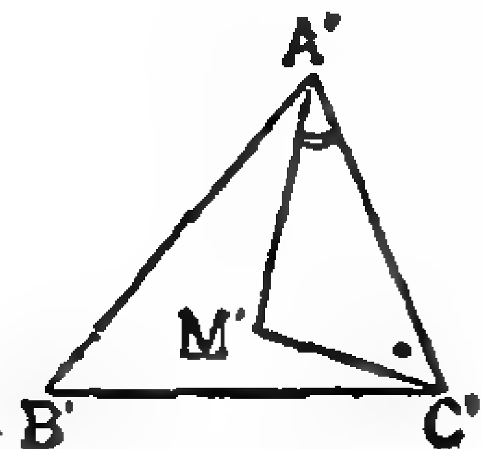
［作图］以EF、FD为弦，分别作含$\angle A'$、$\angle B'$的弓形弧，在它们的共轭弧上分别取点P、Q，使弧FP、FQ所对圆周角分别为α、β。再以PQ为弦，作含$2\angle R-(\alpha+\beta)$的弓形弧，与FM相交于点G，GP、GQ的延长线与前弓形弧交于点A、B。AE、BD的延长线与圆交于点C，则$\triangle ABC$为所求三角形。

2300. 求作$\triangle ABC$，使它与已知$\triangle A'B'C'$相似、外接于已知$\triangle DEF$、且使$\triangle A'B'C'$内的已知点M'所对应的点M在边DE上。



解　假定符合条件的$\triangle ABC$已作出，作$\triangle AEF$、$\triangle DEC$的外接圆。设AM、CM与这两圆分别相交于P、Q。则

$\angle EAP=\angle C'A'M'$，
$\angle ECQ=\angle A'C'M'$。



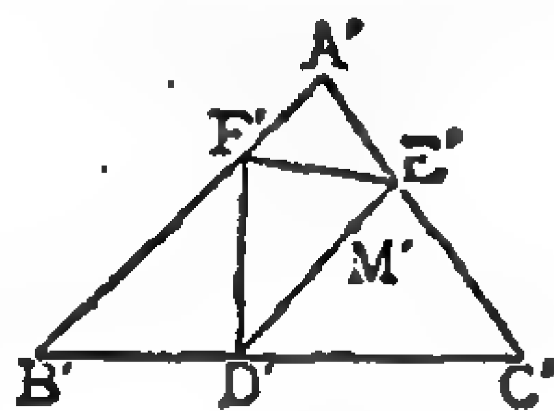
根据问题**2295**和上题，P、Q为定点，$\angle PMQ$也一定。因此根据上题可直接得到本题的解。

2301. 求作$\triangle DEF$，使它与已知$\triangle D'E'F'$相似、内接于已知$\triangle ABC$、其一边DE过已知点M。

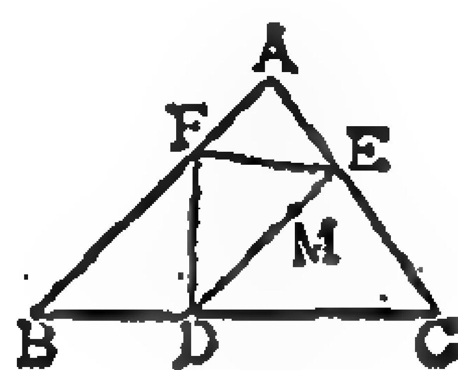
解　利用上题，作$\triangle D'E'F'$的外接$\triangle A'B'C'$，使$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$相似，且使$\triangle ABC$内的已知点M的对应点M'在$D'E'$上(图1)。再在$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上分别求点D、E、F(图2)，使

$$BD:DC=B'D':D'C',$$
$$CE:EA=C'E':E'A',$$
$$AF:FB=A'F':F'B'.$$

则图(1)和(2)的两个图形相似，且DE过点M。因此图(2)符合条件。



(1)



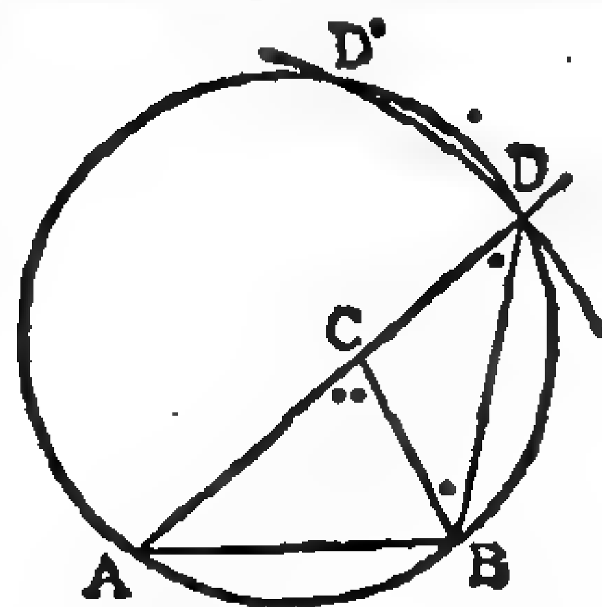
(2)

5. 作一般三角形

(1) 已知底边与顶角

2302. 已知底边$AB=l$，顶角$C=\alpha$，$AC+BC=m$，求作$\triangle ABC$。

解　［作图］作$AB=l$，在AB上作含$\frac{\alpha}{2}$的角的弓形弧，与以A为圆心、m为半径的圆相交于D。过B作直线BC，使$\angle ADB=\angle CBD$。设BC与AD相交于C，则$\triangle ABC$为所求三角形。



［证明］$\angle ADB=\angle DBC$，

$$\therefore\ CD=CB,$$
$$AC+CB=AC+CD=AD=m.$$

又　$$\angle ACB=\angle ADB+\angle DBC$$
$$=\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\alpha,$$

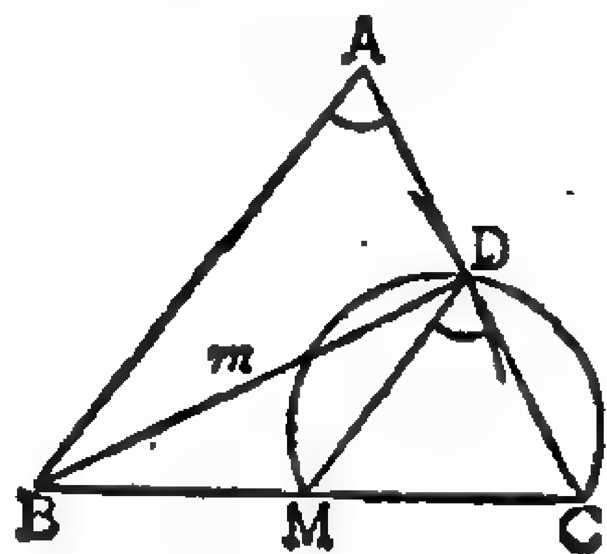
根据作图$AB=l$，所以$\triangle ABC$为符合条件的三角形。

2303. 已知底边$BC=a$，$\angle A=\alpha$，中线$BD=m$，求作三角形ABC。

解　［分析］设BC的中点为M，连结MD，则$MD\parallel AB$，从而$\angle CDM=\angle A=\alpha$，

因此可作图如下。

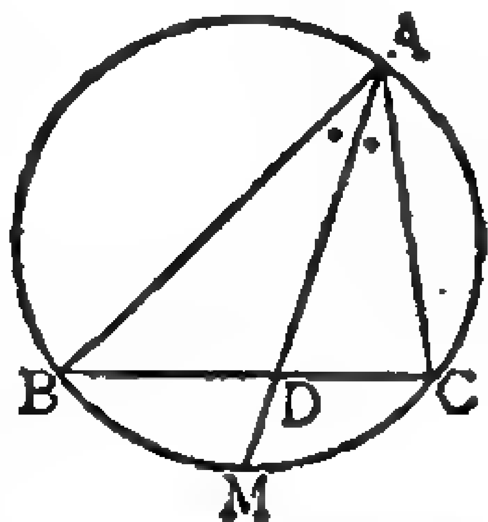
［作图］　作线段 $BC=a$，求其中点 M。以 MC 为弦，作含 α 的弓形弧。以 B 为圆心，以 m 为半径作弧，与弓形弧相交于点 D。过点 B 作平行于 MD 的直线与 CD 的延长线相交于 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。



［证明］　略。

2304.　已知底边 BC 和顶角 A，求作三角形 ABC，并使 $\angle A$ 的平分线过 BC 上的已知点 D。

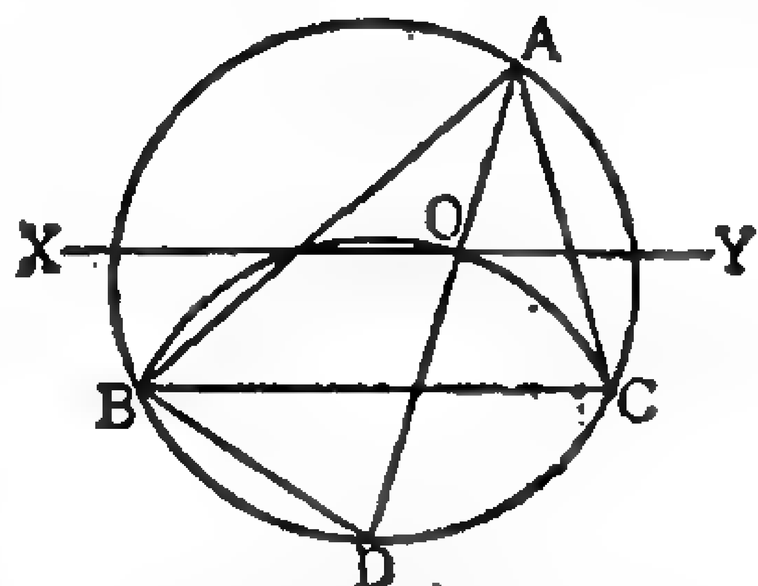
解　［作图］　以 BC 为弦，作含 $\angle A$ 的弓形弧，求它的共轭弧的中点 M。因为 D 为定点，所以延长 MD，与弓形的弧相交于 A，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



［证明］　M 为弧 BC 的中点，所以 AM 平分 $\angle BAC$。又根据作图，BC 和 $\angle A$ 都符合条件。

2305.　已知底边 $BC=a$，顶角 $A=\alpha$，以及内切圆的半径 r，求作 $\triangle ABC$。

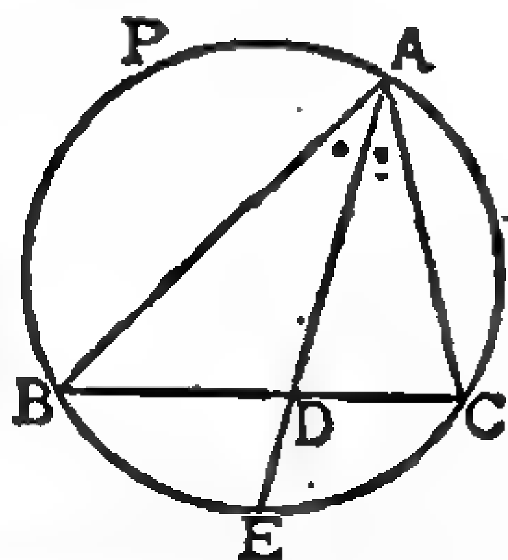
解　［作图］　作 $BC=a$，以 BC 为弦作含 α 的弓形弧，求其共轭弧的中点 D。以 D 为圆心，DB 为半径作弧 BOC。在关于 BC 与 D 相反一侧作直线 XY，使它与 BC 的距离为 r。设弧 BOC 与 XY 相交于 O，连结 DO 的直线与以 BC 为弦含 α 的弓形弧相交于 A，连结 AB，AC，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



［证明］　$\triangle ABC$ 的内心 O 的轨迹是以 D 为圆心、DB 为半径的圆弧 BOC，XY 与 BC 的距离为 r，则以 O 为圆心、内切圆的半径为 r。又 $BC=a$，$\angle A=\alpha$，所以 $\triangle ABC$ 为符合条件的三角形。

2306.　求作 $\triangle ABC$，使底边 $BC=a$，顶角 $A=\alpha$，边 AB、AC 之比为 $m:n$。

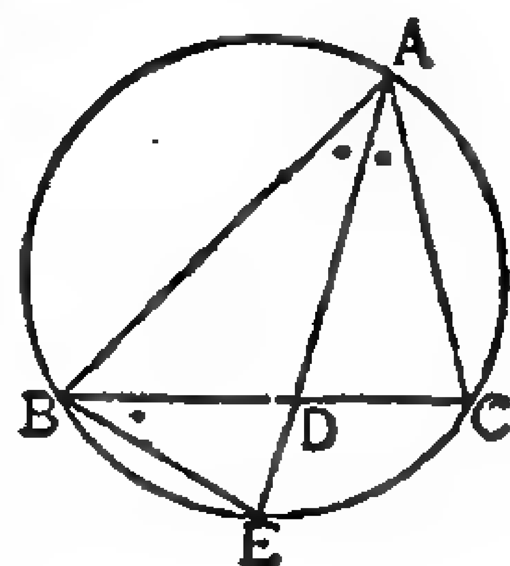
解　［作图］　作线段 $BC=a$，以 BC 为弦作含 α 的弓形弧 BPC。设它的共轭弧的中点为 E，在 BC 上取点 D，使 $BD:DC=m:n$，连结 ED 的直线与弧 BPC 相交于 A，连结 AB，AC，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



［证明］　因为 E 是弧 BPC 的共轭弧的中点，所以 AD 平分 $\angle BAC$，且 $AB:AC=BD:DC=m:n$。根据作图 $BC=a$，$\angle A=\alpha$，因此 $\triangle ABC$ 为符合条件的三角形。

2307.　已知底边 $BC=a$，顶角 $A=\alpha$，$\angle A$ 的平分线 $AD=m$，求作 $\triangle ABC$。

解　［分析］　设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。延长 AD 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于 E，则 E 为弧 BC 的中点。



$$\therefore\quad \angle EBC=\angle EAC$$
$$=\angle BAD,$$

因此 EB 在点 B 与 $\triangle ABD$ 的外接圆相切。

$$\therefore\quad EB^2=ED\cdot EA. \qquad ①$$

但 $BC=a$，$\angle A=\alpha$，所以 $\triangle ABC$ 的外接圆大小一定，E 为定点，EB 为定长。因此 $ED\cdot EA=EB^2$ 为定值。

又 $$EA-ED=AD=m. \qquad ②$$

由①、②，已知 EA、ED 的差与积，用作图可求出。因此可作图如下。

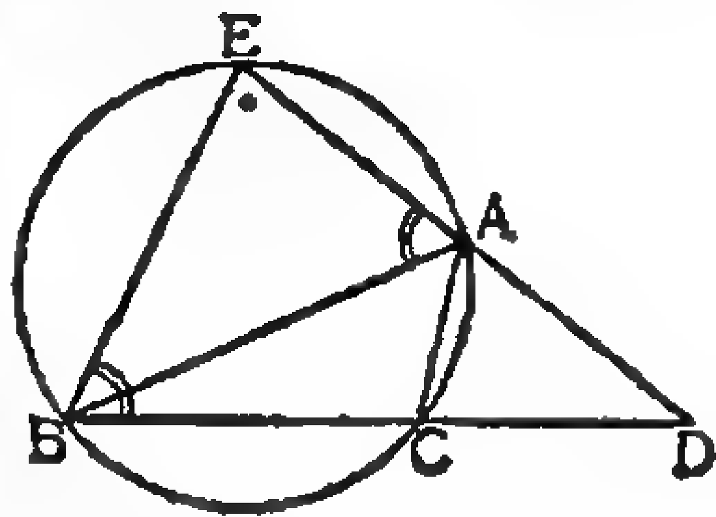
［作图］　以线段 $BC=a$ 为弦，作含 α 的弓形弧，设它的共轭弧的中点为 E。求线段 EA $(=l)$（问题 **2016**），使 $EA-ED=m$，

$$EA\cdot ED=EB^2.$$

过 E 作弦 EA，使 $EA=l$，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

2308.　已知 $BC=a$，$\angle A=\alpha$，与顶点 A 相邻的外角的平分线 $AD=m$，求作 $\triangle ABC$。

解　假定 $\triangle ABC$ 已作出。同上题，作 $\triangle ABC$ 的外接圆，与 DA 的延长线相交于 E，E 为弧 BAC 的中点，因此



$$\angle EBC=\angle EAB.$$

又 $\angle E$ 为 $\triangle EBA$ 和 $\triangle EDB$ 的公共角，所以

$$\triangle EBA\backsim\triangle EDB.$$

$$\therefore\quad EA:EB=EB:ED,$$

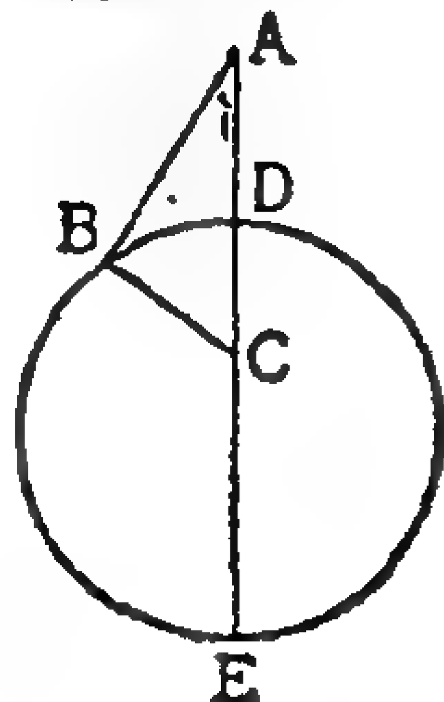
$$EA\cdot ED=EB^2\ (\text{定值}),\qquad ①$$

$$ED-EA=AD=m.\qquad ②$$

与上题一样（ED、EA 的差和积是定值），ED、EA 可根据问题 **2016** 作图。因此与上题一样，可作出 $\triangle ABC$。

2309. 已知 $\angle A=\alpha$，边 $AC=b$，边 AB、BC 之比为 $c:a$，求作 $\triangle ABC$。

解　［作图］　作 $AC=b$。设将 AC 内分和外分为 $c:a$ 的点分别为 D、E，以 DE 为直径作圆．作直线，使 $\angle CAB=\alpha$。设这条直线与以 DE 为直径的圆相交于 B，则 $\triangle ABC$ 为所求作的三角形。



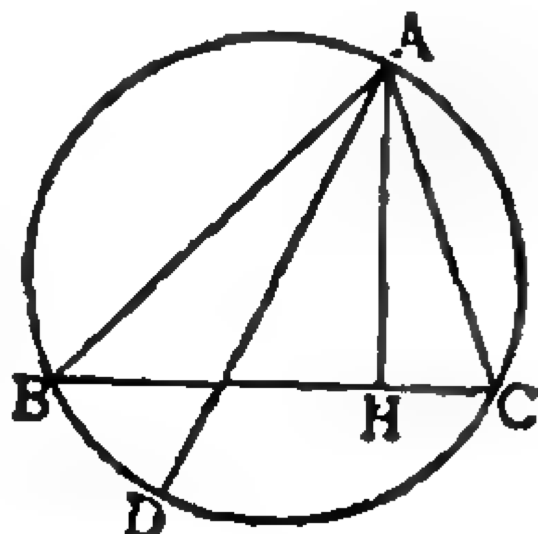
［证明］　根据作图

$$\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a},$$

且　　$AC=b$，$\angle A=\alpha$。

2310. 在已知底边 BC 上，以已知角 α 为顶角作 $\triangle ABC$，使 $AB:BC=BC:AC$。

解　设所求作的三角形为 $\triangle ABC$，作它的外接圆，设圆的直径为 AD。过 A 作 BC 的垂线 AH，则 $AB\cdot AC=AD\cdot AH$（问题 **1318**）。根据题意，



$$AB:BC=BC:AC,$$

即 $AB\cdot AC=BC^2$。所以

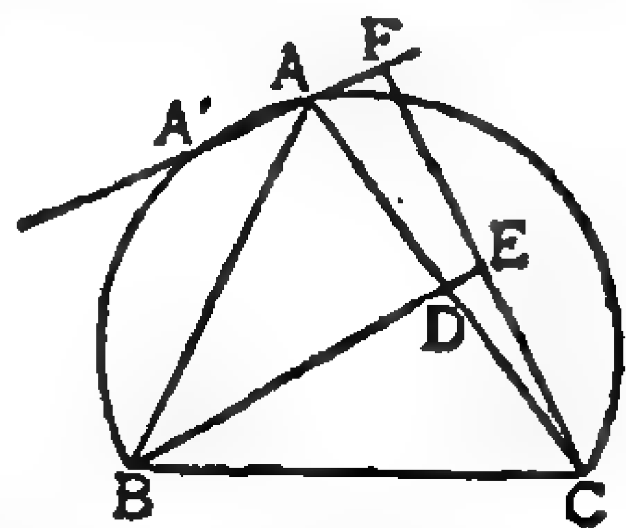
$$AD\cdot AH=BC^2.\qquad ①$$

又因 BC 及 $\angle A$ 的大小一定，所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的大小一定，因此它的直径 AD 可知。又 BC 的长为已知，由 ①，AH 可知．因此本题归结为已知底边 BC，顶角 A，及高 AH，作 $\triangle ABC$ 的问题。

2311. 已知底边 $BC=a$，顶角 $A=\alpha$，以及过 C 所作的 AC 边上中线的垂线长 h，求作 $\triangle ABC$。

解　［分析］　设 $\triangle ABC$ 已作出，过 C 所作的中线 BD 的垂线足为 E，因为 BC、CE 已知，从而 $\triangle EBC$ 可作出。

再在 CE 的延长线上取点 F，使 $EF=CE$，过 F 作 BE 的平行线，因为 $CD=DA$，所以此平行线过点 A。又 $\angle A=\alpha$，以 BC 为弦作含 α 的弓形弧，则 A 在弧上。因此可作图如下。



［作图］　作 $\triangle BEC$，使 $BC=a$，$CE=h$，$\angle E=\angle R$。延长 CE 取点 F，使 $EF=CE$。过 F 作 BE 的平行线，与以 BC 为弦含 α 的弓形弧相交于 A、A'，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'BC$ 为所求的三角形。

2312. 已知底边 $BC=a$，顶角 $A=\alpha$，以及过 C 所作的 BC 边上中线 AD 的垂线的长 h，求作 $\triangle ABC$。

解　［分析］　假定 $\triangle ABC$ 已作出．设过 C 所作 AD 的垂线为 CE，则 $DC=\dfrac{1}{2}a$，$\angle CED=\angle R$，$CE=h$，所以 $\triangle CED$ 可作出。且点 A 在以 BC 为弦含 α 的弓形弧上。又 A 在 DE 的延长线上，因此可作图如下。

［作图］　作 $\triangle EDC$，使 $DC=\dfrac{1}{2}a$，$CE=h$，$\angle E=\angle R$．延长 CD，在延长线上取点 B，使 $BD=DC$。在 BC 上作含 α 的弓形弧，与 DE 的延长线相交于 A，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

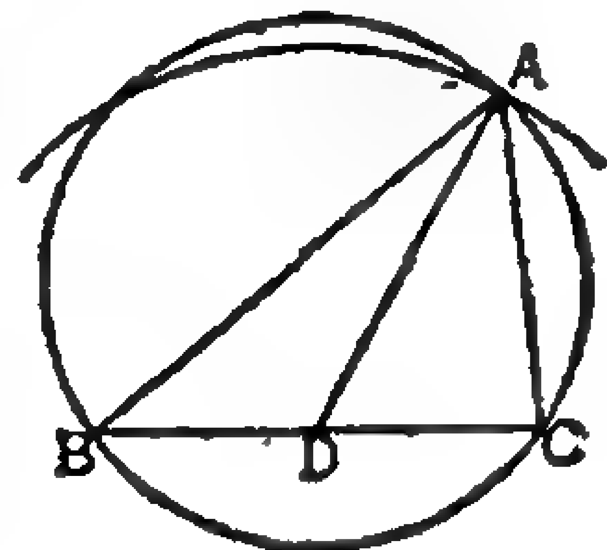
2313. 已知底边 $BC=a$，顶角 $A=\alpha$，以及边 AC、AB 上的正方形的和 b^2+c^2，求作 $\triangle ABC$。

解　［分析］　设 BC 的中点为 D，则

$$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)\ (\text{问题 } \mathbf{874}).$$

$$\therefore\quad AD^2=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2\right).$$

因此可作图如下。



［作图］　作线段 $BC=a$，以 BC 为弦作含角 α 的弓形弧。以 BC 的中点 D 为圆心、$\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(b^2+c^2-\dfrac{1}{2}a^2\right)}$ 为半径作圆，与弓形弧的交点为 A，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

2314. 已知底边 $BC=a$，顶角 $A=\alpha$，以

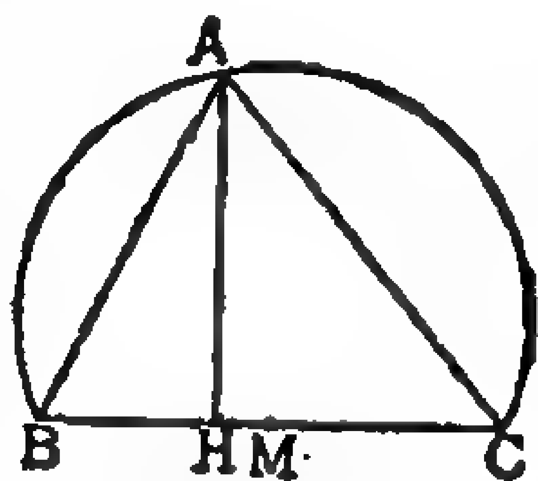
及另两边上的正方形之差 n^2，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 设 $\triangle ABC$ 已作出。设过 A 所作 BC 的垂线足为 H，BC 的中点为 M，则

$$AC^2-AB^2=2a\cdot MH \text{（问题 894）。}$$

所以，
$$MH=\frac{n^2}{2a},$$

故可作图如下。



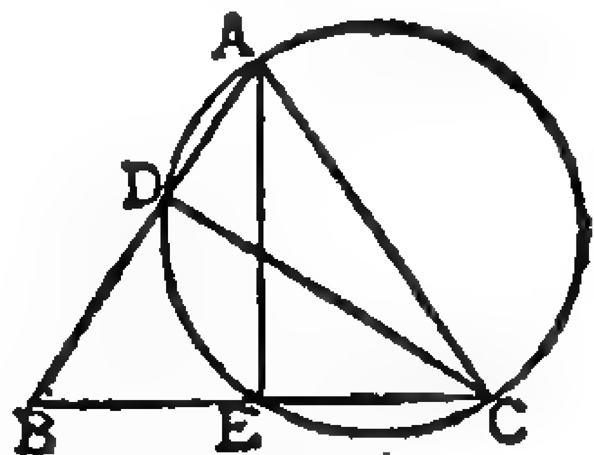
［作图］ 作 $BC=a$，以 BC 为弦作含角 α 的弓形弧，再过 BC 的中点 M 向 B 的方向求点 H，使 $MH=\frac{n^2}{2a}$。过点 H 作 BC 的垂线，与弓形弧相交于 A，则 $\triangle ABC$ 为所求作的三角形。

2315. 已知底边 $BC=a$，顶角 $A=\alpha$，以及 BD、BA 之积 m^2，求作 $\triangle ABC$。其中 D 为过 C 所作 AB 的垂线足。

解 ［分析］ 设 $\triangle ABC$ 已作出. 作 $\triangle ADC$ 的外接圆与 BC 相交于 E，则 $BD\cdot BA=BE\cdot BC$。但 $BC=a$，所以 BE 可定。

又 $\angle AEC=\angle ADC$
$=\angle R$，

所以，可作图如下。

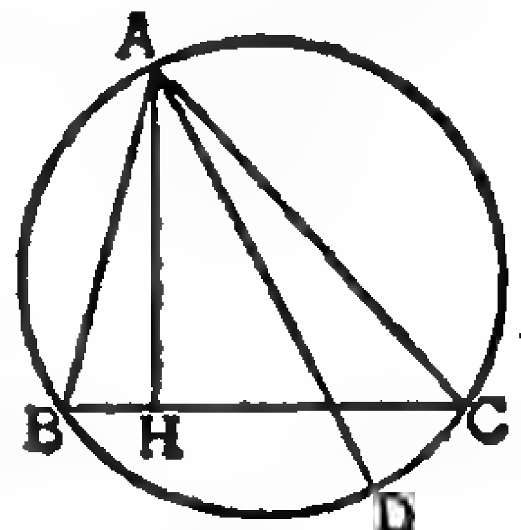


［作图］ 作 $BC=a$，在 BC 上取 BE，使 $BE\cdot BC=m^2$。过点 E 作 BC 的垂线，与以 BC 为弦含角 α 的弓形弧相交于 A，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

2316. 已知底边 $BC=a$，顶角 $A=\alpha$，$AB\cdot AC=m^2$，求作 $\triangle ABC$。

解 设 $\triangle ABC$ 已作出。作 $\triangle ABC$ 的外接圆、直径 AD 以及高 AH。根据问题 1318，

$$AB\cdot AC=AD\cdot AH。\quad ①$$



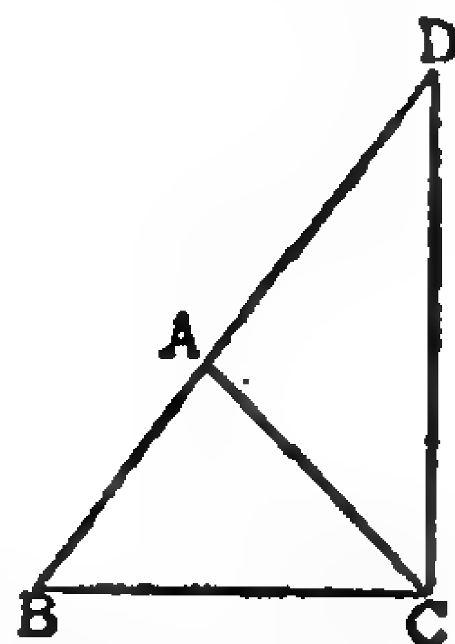
又底边 BC，顶角 A 的大小一定，所以外接圆的直径 AD 已知. 由于 AB、AC 之积已知，所以高 AH 一定，因此本题归结为已知底边，顶角和高，作 $\triangle ABC$ 的问题。

2317. 已知底边 $BC=a$，顶角 $A=\alpha$，以及另一边 AB 与第三边 AC 的 n 倍的和，即 $c+n\cdot b$，求作三角形。若知 $m\cdot c+n\cdot b$，如何作？（m、n 表示已知数，$AB=c$，$AC=b$。）

解 ［分析］ 设 $\triangle ABC$ 已作出，在 BA 的延长线上取点 D，使 $AD=n\cdot AC$，连结 CD. 在 $\triangle CAD$ 中

$$\angle CAD=(\angle A\text{ 的补角})$$
$$=2\angle R-\alpha,$$
$$AC:AD=1:n,$$

因此 $\triangle CAD$ 的形状一定，从而 $\angle ADC$ 的大小一定。故可作图如下。



［作图］ 作与 $\triangle CAD$ 相似的三角形. 作 $BC=a$，以 BC 为弦，作含等于 $\angle ADC$ 的弓形弧。以 B 为圆心、$c+n\cdot b$ 为半径的圆与弓形弧的交点为 D. 设以 BC 为弦含角 α 的弓形弧与 BD 的交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求的三角形。

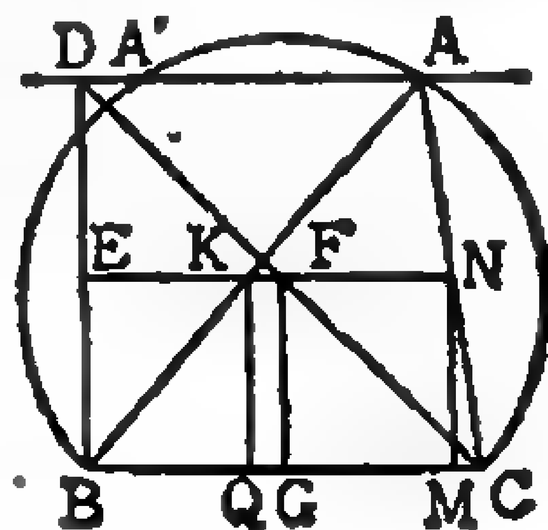
注 将 $c+n\cdot b=l$ 用 $m\cdot c+nb=p$ 代换，由于 $mc+nb=m\left(c+\frac{n}{m}b\right)=p$，所以底边 $B'C'=\frac{a}{m}$、顶角 $A'=\alpha$，

$$A'B'+\frac{n}{m}A'C'=\frac{p}{m}$$

作 $\triangle A'B'C'$，再作与 $\triangle A'B'C'$ 相似的 $\triangle ABC$，使 $B'C'$ 的对应边 BC 等于 a 即可。

2318. 已知底边 $BC=a$，顶角 $A=\alpha$，底边上的正方形的一边为 s，求作 $\triangle ABC$。

解 ［作图］ 作 $BC=a$，以 BC 为弦作含 α 的弓形弧。过 B 作 BC 的垂线，在垂线上取 $BE=s$；以 BE 为一边，在 BC 上作正方形 $BEFG$。设 BE 与 CF 相交于 D，过 D 作 BC 的平行线与弓形弧相交于 A，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



［证明］ 根据作图 $BC=a$，$\angle A=\alpha$，EF 与 AB、AC 的交点分别为 K、N，过 K、N 作 BC 的垂线 KQ、NM，则

$$KQ=MN=BE=s.$$

又 $KN:BC=EF:BC$，所以 $KN=EF$。于是 $KQMN$ 是以边长为 s 的正方形。因此 $\triangle ABC$ 为所求作的三角形。

(2) 已知中线

2319. 已知三角形的三条中线的长分别为l、m、n，求作此三角形。

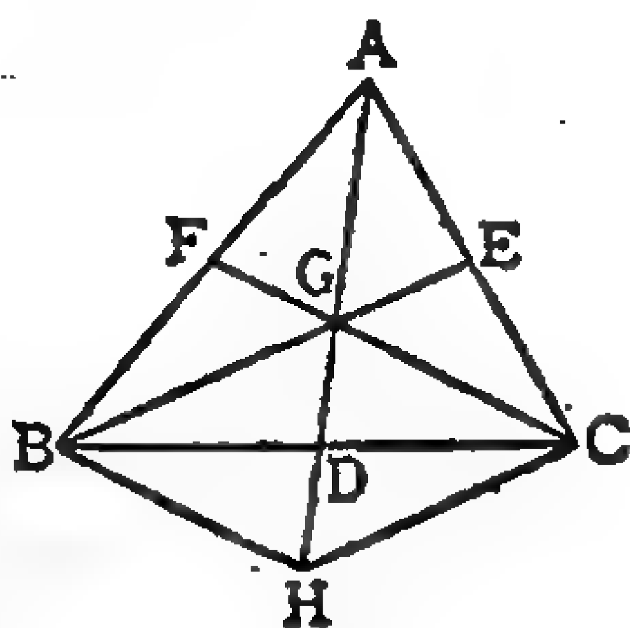
解 [作图] 作$\triangle GBH$，使

$$GH=\frac{2}{3}l,$$



$$GB=\frac{2}{3}m,$$

$$BH=\frac{2}{3}n.$$



设GH的中点为D，连结BD。延长BD并取$DC=BD$，延长HG取$GA=HG$。连结AB，AC，则$\triangle ABC$为所求作的三角形。

[证明] 因为D为BC的中点，AD为$\triangle ABC$的中线，且

$$AG=GH=2GD,$$

$$\therefore\quad AG=\frac{2}{3}AD.$$

因此G为$\triangle ABC$的重心。设BG、CG的延长线与对边相交于E、F，则BE、CF为另两边的中线，且

$$\because\quad AG=\frac{2}{3}AD,\ AG=GH=\frac{2}{3}l,$$

$$\therefore\quad AD=l.$$

又 $\because\quad BG=\frac{2}{3}BE,\ BG=\frac{2}{3}m,$

$$\therefore\quad BE=m.$$

根据作图，$GBHC$为平行四边形，

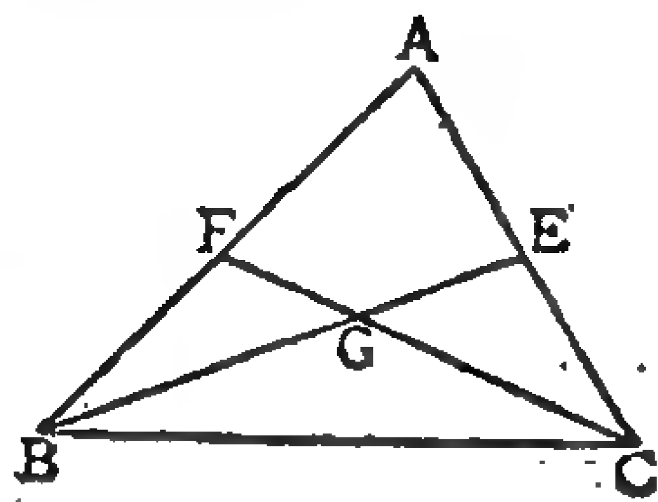
$$\therefore\quad CG=BH=\frac{2}{3}n.$$

且 $CG=\frac{2}{3}CF,\quad \therefore\quad CF=n.$

因此$\triangle ABC$为所求作的三角形。

[讨论] 当l、m、n中任意两个之和大于第三个，则有一解，否则无解。

2320. 求作$\triangle ABC$，使边$BC=l$，中线$BE=m$，中线$CF=n$。



解 [分析] 假定所求$\triangle ABC$已作出。设BE、CF的交点为G，则G为$\triangle ABC$的重心，因此

$$BG=\frac{2}{3}m,\ CG=\frac{2}{3}n,\ BC=l,$$

因此$\triangle GBC$可作。故作图如下。

[作图] 作边为

$$BG=\frac{2}{3}m,\ \ BC=l,\ \ GC=\frac{2}{3}n$$

的$\triangle GBC$。延长BG至E，使$GE=\frac{1}{3}m$。延长CE至A，使$CE=EA$，则$\triangle ABC$为所求三角形。

2321. 求作$\triangle ABC$，使$\angle A=\alpha$，中线$BD=m$，中线$CE=n$。

解 [分析] 假定所求$\triangle ABC$已作出，BD、CE的交点G为$\triangle ABC$的重心，因此

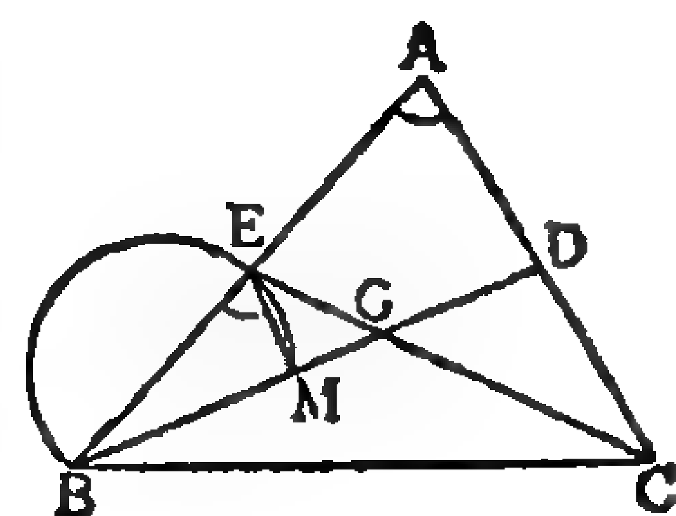
$$BG=\frac{2}{3}m,\ \ GE=\frac{1}{3}n.$$

连结BD的中点M和点E，则

$$EM\parallel AD,$$

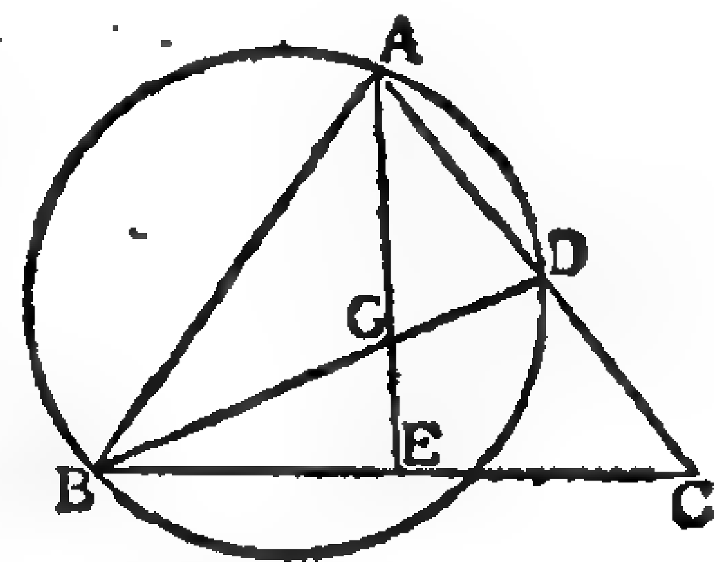
因此 $\angle BEM=\angle A=\alpha.$

于是可得如下作图。



[作图] 作长为m的线段BD，设M为BD的中点。以BM为弦作含角α的弓形弧，在BD上取点G，使$BG=\frac{2}{3}BD$。以G为圆心、$\frac{1}{3}n$为半径作圆，与弓形弧相交于E。在EG的延长线上取点C，使$CE=n$，延长BE和CD相交于A，则$\triangle ABC$为所求作的三角形。

2322. 已知$\angle A=\alpha$，中线$AE=m$，中线$BD=n$，求作$\triangle ABC$。



解 [作图] 作$BD=n$，以BD为弦作含角α的弓形弧。设在BD的三等分点中靠近D的一个为G，以G为圆心、$\frac{2}{3}m$为半径作圆，与弓形弧相交于A。在AD的延长线上求点C，使$AD=DC$，则$\triangle ABC$为所求作的三角形。

[证明] 因为D为AC的中点，所以BD为中线，从而G为重心，故AGE也是中线。

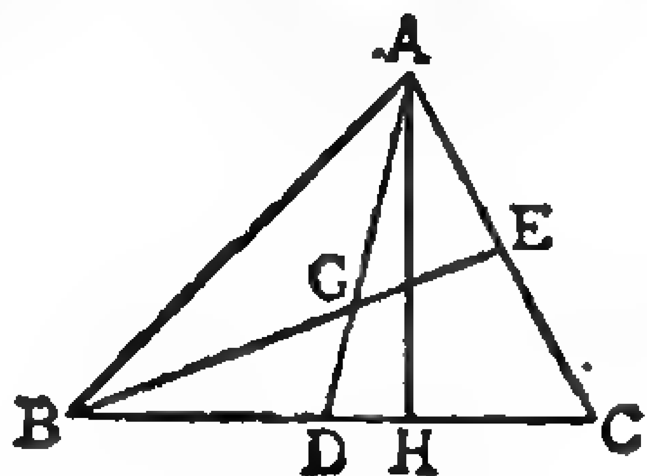
又$GA=\frac{2}{3}m$，因此$AE=m$.

2323. 作$\triangle ABC$，使中线$AD=l$，中线$BE=m$，高$AH=n$.

解 [分析] 假定所求$\triangle ABC$已作出. $AH=n$，$AD=l$，$\angle AHD=\angle R$. 则$\triangle AHD$可作出。设AD、BE的交点为G，因为

$$AG=\frac{2}{3}l,$$

所以G为定点，



$$BG=\frac{2}{3}m.$$

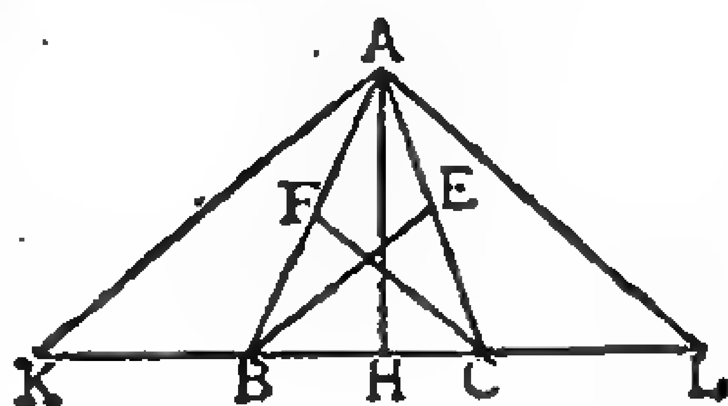
因此可作图如下。

[作图] 作$\triangle AHD$，使$AH=n$，$AD=l$，$\angle H=\angle R$. 在AD上取G，使$AG=\frac{2}{3}l$.以G为圆心、$\frac{2}{3}m$为半径的圆与HD的延长线的交点为B. 延长BD，取点C，使$BD=DC$，则$\triangle ABC$为所作三角形。

注 若知过同一顶点作对边的中线AD和高AH，则直角三角形ADH可定. 注意:利用这部分作图的问题较多.

2324. 作$\triangle ABC$，使中线$BE=l$，中线$CF=m$，高$AH=n$.

解 [分析] 设符合条件的$\triangle ABC$已作出。中线$BE=l$，中线$CF=m$，高$AH=n$. 过A作BE的平行线，与CB的延长线相交于K，则E为AC的中点，$BK=BC$，且



$$AK=2BE=2l.$$

同理，作$AL\parallel FC$，则

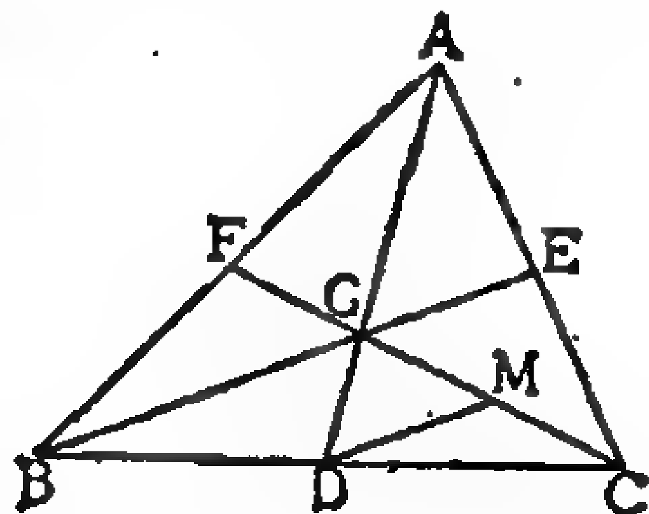
$$BC=CL,\ AL=2CF=2m.$$

故可作图如下。

[作图] 作AH等于n，过H作AH的垂线. 设以A为圆心、$2l$长为半径作的圆与AH的垂线的交点为K. 以A为圆心、$2m$之长为半径的圆与KH的延长线相交于L. 作KL的三等分点B、C，则$\triangle ABC$即为所求的三角形。

2325. 已知两条中线BE、CF的长为m、n，中线AD与底边BC构成的角为α，求作$\triangle ABC$.

解 [分析] 假设符合条件的$\triangle ABC$已作出。设BE与CF的交点为G，GC的中点为M，则



$$DM=\frac{1}{2}BG,$$

$$BG=\frac{2}{3}m,$$

所以$DM=\frac{1}{3}m$. 在$\triangle GDC$中，$CG=\frac{2}{3}n$，$\angle GDC=\alpha$，$DM=\frac{1}{3}m$. 在$\triangle DCG$中，底边CG、顶角$\angle GDC$、底边上的中线DM均可知，所以可作图。在CD的延长线上取点B，使$BD=DC$. 在DG的延长线上取点A，使$AG=2GD$，则$\triangle ABC$即为所求作的三角形.

2326. 已知一条中线AD的长，另两条中线的夹角，以及面积S，求作$\triangle ABC$.

解 [分析] 假定符合条件的$\triangle ABC$已作出。设它的重心为G. 在GD的延长线上取点E，使$DE=GD$. 连结BE、EC，则四边形$BECG$为平行四边形. 且

$$S_{\triangle BGE}=S_{\triangle GBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\ (一定).$$

(因此由B作GE的高一定).

又 $$GE=2GD=\frac{2}{3}AD\ (一定),$$

$$\angle GBE=2\angle R-\angle BGC\ (一定),$$

因此$\triangle BGE$的底边GE，顶角$\angle GBE$，过B所作GE上的高均一定. 这个三角形可作图. 因此可作图如下.

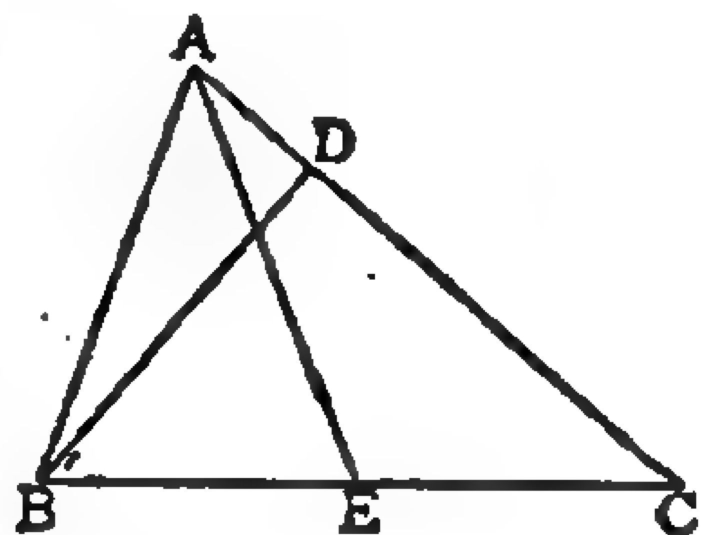
[作图] 先作$\triangle BGE$，设GE的中点为D，连结BD，并在其延长线上取$DC=BD$. 在EG的延长线上取$GA=GE$. 连结AB、AC，则$\triangle ABC$即为所求作的三角形.

2327. 已知底边$BC=a$，高$BD=h$，中线$AE=m$，求作三角形ABC.

解 [作图] 作直角三角形BDC，使$BC=a$，$BD=h$，$\angle BDC=\angle R$. 设BC的中点为E，以E为圆心、m之长为半径作圆交CD的延长线于A，则$\triangle ABC$即为所求作的三

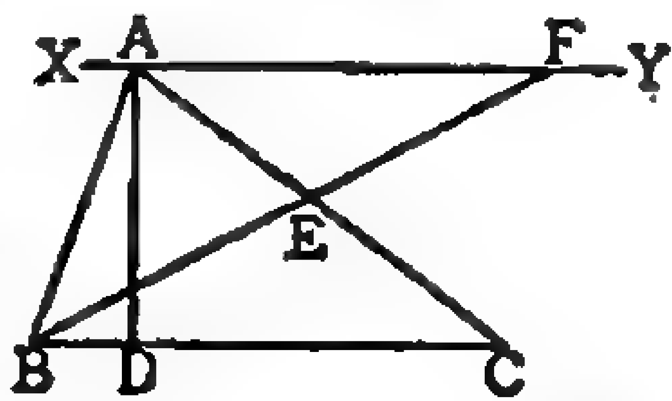
角形。

［证明］ 由作图 $BC=a$, $AC\perp BD$, 则 BD 为高，且 $BD=h$, E 是 BC 的中点，故 AE 是中线，且 $AE=m$。



2328. 已知底边 $BC=a$, 高 $AD=h$, 中线 $BE=m$, 求作 $\triangle ABC$。

解 ［作图］ 作 $BC=a$, 以 B 为圆心、$2m$ 为半径作圆，作 $XY\parallel BC$, 且 XY 与 BC 的距离为 h。设此圆与 XY 相交于 F, BF 的中点为 E, CE 和 XY 的交点为 A, 则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



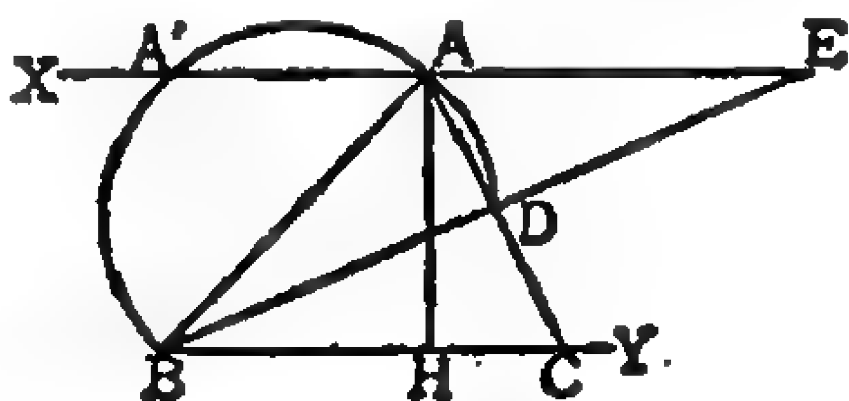
［证明］ 根据作图，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$, 高 $AD=h$, 且 E 为 AC 的中点，则

$$BE=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}\times 2m=m.$$

因此 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

2329. 已知顶角 $A=\alpha$, 高 $AH=h$, 中线 $BD=m$, 求作三角形 ABC。

解 ［作图］ 作相距 h 的两条平行线 X、Y。以 Y 上的一点 B 为圆心、$2m$ 为半径作圆，与 X 的交点为 E, 设 BE 的中点为 D, 以 BD 为弦，作含角 α 的弓形弧，与 X 相交于 A, 延长 AD 与 Y 相交于 C, 则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



［证明］ 根据作图

$$\angle A=\alpha,\ AH=h,\ DB=DE.$$

又 $AE\parallel BC$, 因此

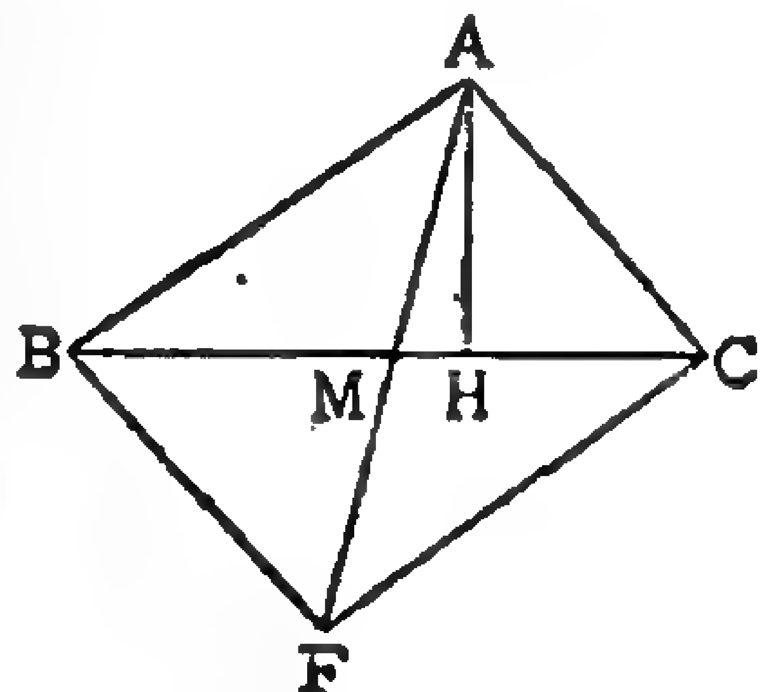
$$\triangle ADE\cong\triangle CDB,$$

$$\therefore\ AD=DC.$$

因此 BD 为中线，且 $BD=m$。

2330. 已知顶角 $A=\alpha$, 高 $BH=h$, 中线 $AD=m$, 求作 $\triangle ABC$。

解 ［作图］ 作 $\angle BAH=\alpha$, $\angle AHB=\angle R$, $BH=h$ 的直角三角形 ABH。过 AB 的中点 M, 在点 H 关于 AB 的同一侧作与 AH 平行的直线，与以 A 为圆心、m 为半径的圆相交于 D。设 BD、AH 的延长线的交点为 C, 则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



［证明］ 因为 M 为 AB 的中点，$MD\parallel AC$, 所以 D 为 BC 的中点。因此 AD 为中线，且

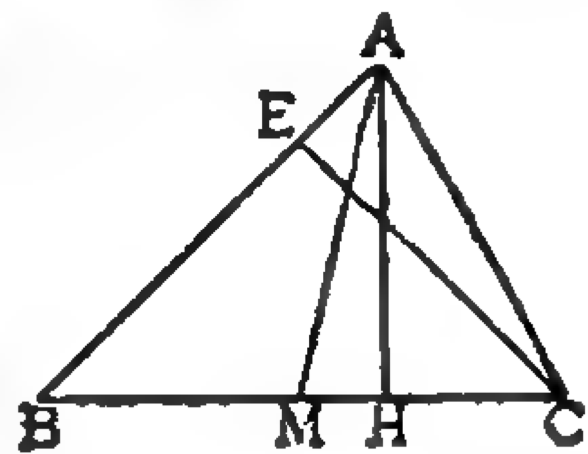
$$AD=m,\ \angle BAC=\alpha,\ BH=h.$$

2331. 已知顶角 $A=\alpha$, 高 $AH=h$, 中线 $AM=m$, 求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。延长 AM, 取 $MF=AM$, 则 $ABFC$ 为平行四边形。

又 $\angle ABF=2\angle R-\angle BAC=2\angle R-\alpha$。

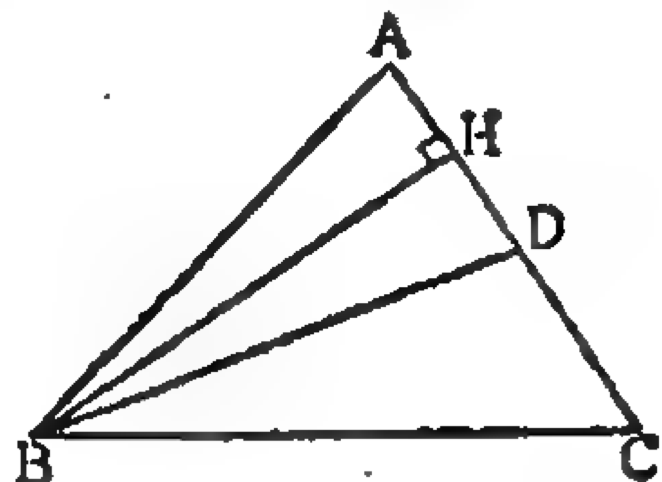
因此，$\triangle AHM$ 为已知边 AM、AH 的直角三角形，可以作出。又 B 在 HM 的延长线上，$\angle ABF$ 一定。所以可求得点 B, 作图如下。



［作图］ 作 $\triangle AHM$, 使 $AM=m$, $AH=h$, $\angle H=\angle R$。延长 AM, 在延长线上取点 F, 使 $AM=MF$。以 AF 为弦，作含角 $2\angle R-\alpha$ 的弓形弧，与 HM 的延长线相交于 B。延长 BM, 取 $MC=BM$, 则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

2332. 已知高 $AH=h$, 中线 $AM=m$, 过 C 所作 AB 的垂线 CE 和边 AC 的比为 $p:q$, 求作 $\triangle ABC$。

解 假定 $\triangle ABC$ 已作出。过 C 作 AB 的垂线 CE, 在 $\triangle AEC$ 中，$CE:CA=p:q$。因此 $\triangle AEC$ 的形状一定。$\angle A$ 的大小也一定。所以本题与上题完全一样。



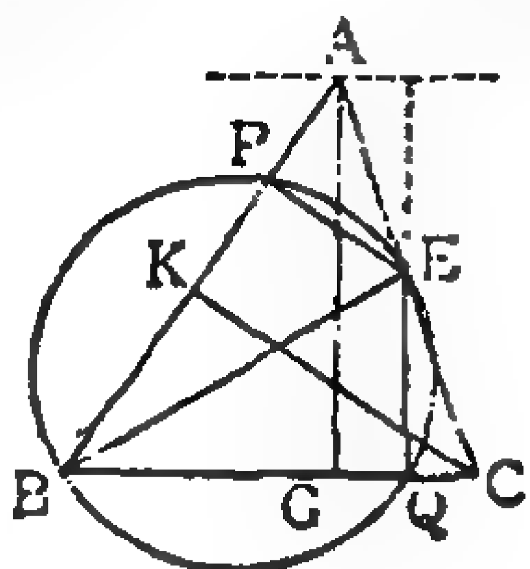
2333. 已知顶角 $A=\alpha$, 高 $BH=h$, 中线 $BD=m$, 求作 $\triangle ABC$。

解 作直角三角形 ABH, 使 $\angle BAH=\alpha$, $\angle AHB=\angle R$, BH

$=h$. 以 B 为圆心、m 为半径作圆，与 AH 相交于 D. 在 AD 的延长线上取点 C，使 $AD=DC$，则 $\triangle ABC$ 为所求作的三角形.

2334. 已知高 $AG=l$，高 $CK=m$，中线 $BE=n$，求作 $\triangle ABC$.

解 [分析] 假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出. 过 E 作 AB、BC 的垂线 EP、EQ，则



$$EP=\frac{1}{2}CK=\frac{m}{2},$$

$$EQ=\frac{1}{2}AG=\frac{1}{2}l.$$

因此，可作图如下.

[作图] 以长为 n 的线段 BE 为直径作圆，在 BE 两侧作 EP、EQ，使

$$EP=\frac{m}{2},\quad EQ=\frac{l}{2}.$$

BQ 关于点 E 的对称直线与 BP 的延长线相交于 A，BQ 的延长线与 AE 的延长线相交于 C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形.

2335. 已知高 $AG=l$，高 $BH=m$，中线 $AD=n$，求作 $\triangle ABC$.

解 [分析] 设 $\triangle ABC$ 为符合条件的三角形，中线 $AD=n$，高 $BH=m$，高 $AG=l$. 因为斜边 AD 与边 AG 已知，所以直角三角形 ADG 可作. 过点 D 作 AC 的垂线 DE，则

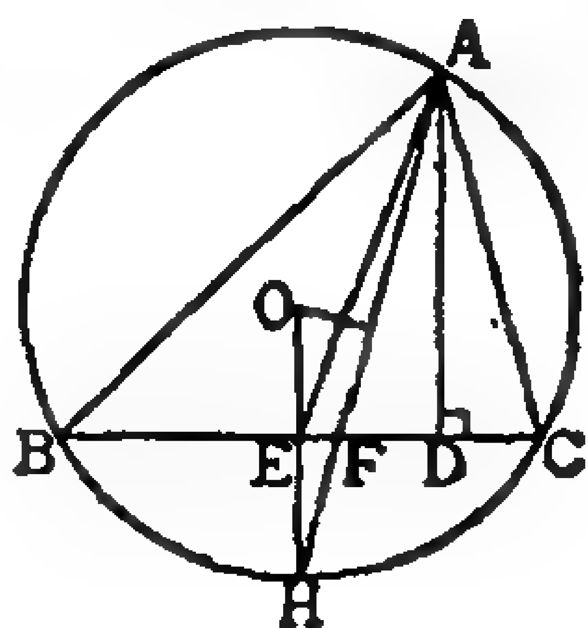
$$DE=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}m.$$

因此可作图如下.

[作图] 作直角三角形 ADG，使 $AD=n$，$AG=l$，$\angle AGD=\angle R$. 以 D 为圆心、$\frac{1}{2}m$ 为半径作圆. 过 A 作此圆的切线 AE，AE 或者它的延长线与 DG 相交于 C. 延长 CD 至 B，使 $BD=DC$，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形.

2336. 已知过顶点 A 所作的高 $AD=h$，中线 $AE=m$，$\angle A$ 的平分线 $AF=w$，求作 $\triangle ABC$.

解 [分析] 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已求出. 作 $\triangle ABC$ 的外接圆 O. 延长 AF 与圆 O 相交于 H，则 H 为弧 BC 的中点. 连结 HE，则 HE 过外心 O. 在 $\triangle ADE$ 中，$AD=h$，$AE=m$，这个三角形可作. 故作图如下.

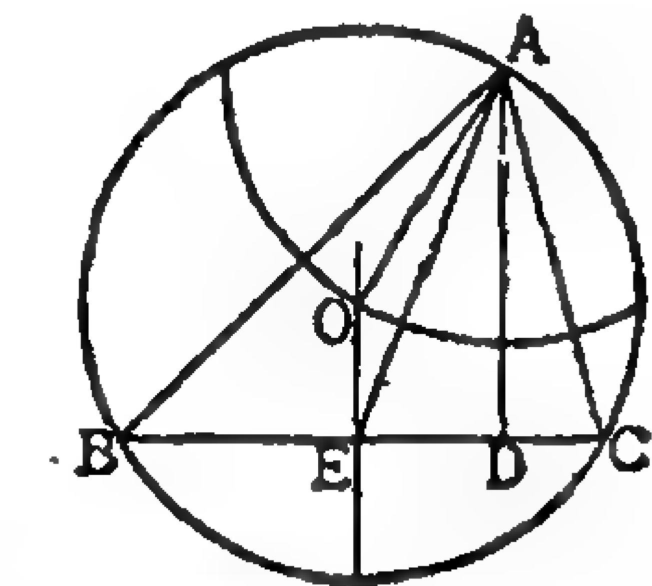


[作图] 作 $\triangle AED$，使 $AE=m$，$AD=h$，$\angle D=\angle R$. 在 ED 上取点 F，使 $AF=w$. 过 E 作 ED 的垂线与 AF 相交于 H，AH 的垂直平分线与 HE 相交于 O. 以 O 为圆心、OH 为半径作圆，将直线 EF 向两端方向延长，与圆 O 相交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形.

[证明] 因为 $OE\perp BC$，所以 AE 为中线. 根据作图，$AE=m$. 又 AF 过弧 BC 的中点，所以 AF 为 $\angle A$ 的平分线，且 $AF=w$. 又 $AD\perp BC$，$AD=h$. 因此 $\triangle ABC$ 为所求三角形.

2337. 已知过顶点 A 所作 BC 的垂线的长为 h、中线的长为 m，外接圆的半径为 r，求作 $\triangle ABC$.

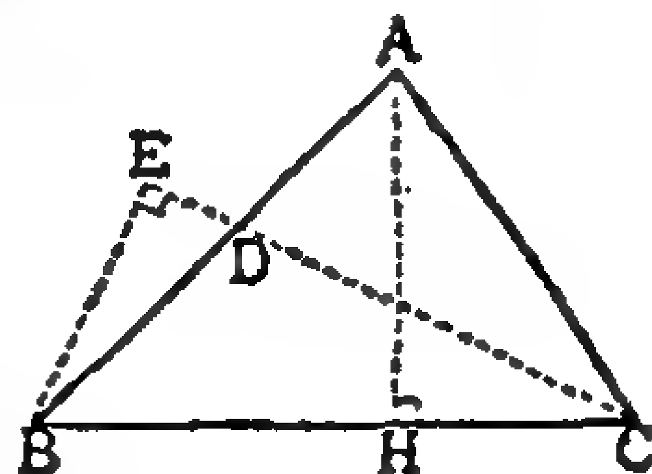
解 [作图] 作 $\triangle ADE$，使 $AD=h$，$AE=m$，$\angle D=\angle R$. 过 E 作 DE 的垂线，与以 A 为圆心、r 为半径的圆相交于 O. 以 O 为圆心、OA 为半径作圆，将 DE 向两端方向延长与圆 O 相交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形.



[证明] 因为 $OB=OC$，$EO\perp BC$，因此 E 为 BC 的中点，即 AE 为中线，根据作图，$AE=m$. 又 $AD\perp BC$，且 $AD=h$. $\triangle ABC$ 的外接圆的半径等于 r.

2338. 已知高 $AH=h$，底角 $B=\beta$，顶点 B 到中线 CD 的距离为 d，求作 $\triangle ABC$.

解 [作图] 作直角三角形 ABH，使 $AH=h$，$\angle B=\beta$，$\angle H=\angle R$. 设 AB 的中点为 D，以 BD 为直径作圆，与以 B 为圆心、d 为半径的圆相交于 E. ED 与 BH

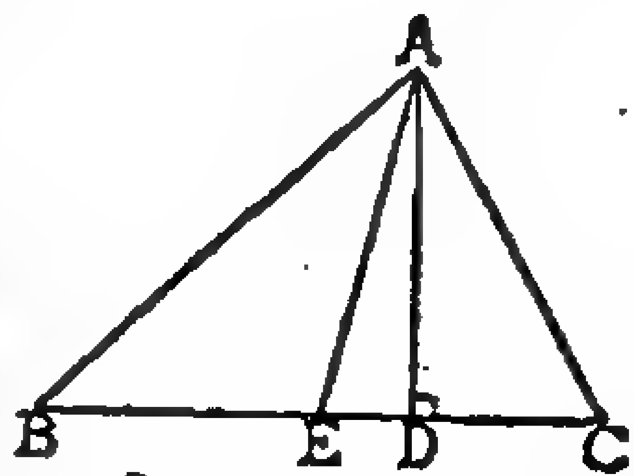


相交于C，则$\triangle ABC$为所求三角形.

[证明] 根据作图，$AH=h$，$AH\perp BC$，$\angle B=\beta$，D为AB的中点，因此CD为中线，而顶点B到CD的距离(即垂线BE的长)等于d.

2339. 已知高$AD=h$，中线$AE=m$，底边BC和另一边CA之比为$a:b$，求作$\triangle ABC$.

解 [分析] 设满足条件的$\triangle ABC$已作出．则$\triangle ADE$为已知斜边和一直角边的直角三角形，可作图求得．因为E为边BC的中点，所以$EC=\frac{1}{2}BC$．因此点C与点E、A的距离的比为$\frac{1}{2}a:b$的点的轨迹上(问题1856)．又C为ED的延长线上的一点．因此可作图如下．

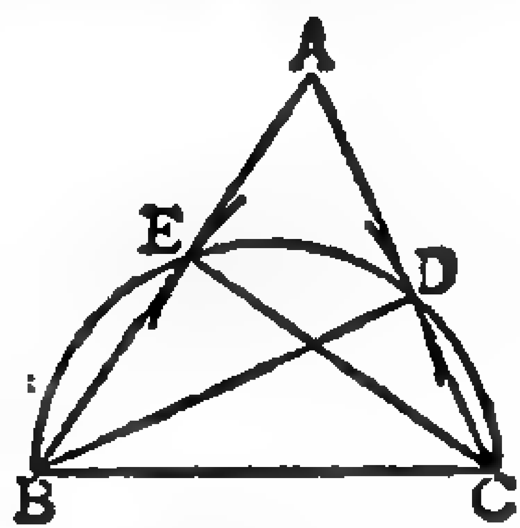


[作图] 以m为斜边，h为一边作直角$\triangle ADE$．求把斜边内分和外分成$\frac{1}{2}a:b$的点M、N．以MN为直径作圆，设ED的延长线与圆相交于C．又在CE的延长线上求点B，使$BE=EC$，则$\triangle ABC$为所求三角形.

(3) 已知高或垂线

2340. 已知一边$BC=l$，两条高$BD=m$，$CE=n$，求作$\triangle ABC$.

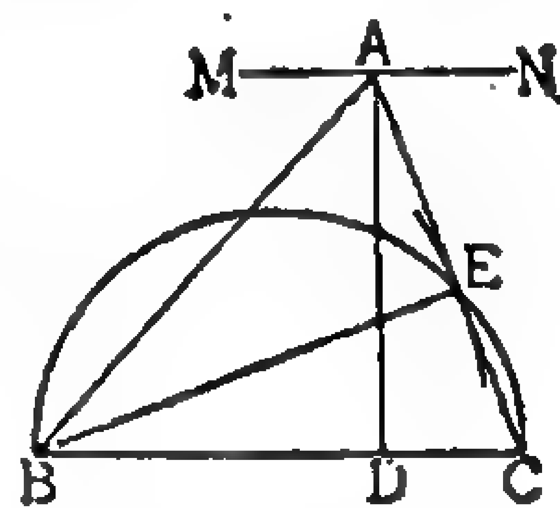
解 [作图] 作$BC=l$，以BC为直径作半圆．以B为圆心、m为半径作圆，与半圆相交于D；以C为圆心、以n为半径作圆，与半圆相交于E．延长BE和CD，相交于A，则$\triangle ABC$为所求三角形.



[证明] $BC=l$，$BD=m$，$CE=n$．又$BEDC$为半圆，所以$\angle BDC=\angle R$，$\angle CEB=\angle R$.

2341. 已知一边$BC=l$，两条高$AD=m$，$BE=n$，求作$\triangle ABC$.

解 [作图] 作$BC=l$，以BC为直径作半圆，与以B为圆心、n为半径的圆相交于E．在BC与半圆BEC的同一侧，与BC的距离为m的平行线MN，与CE相交于A，则$\triangle ABC$为所求三角形.



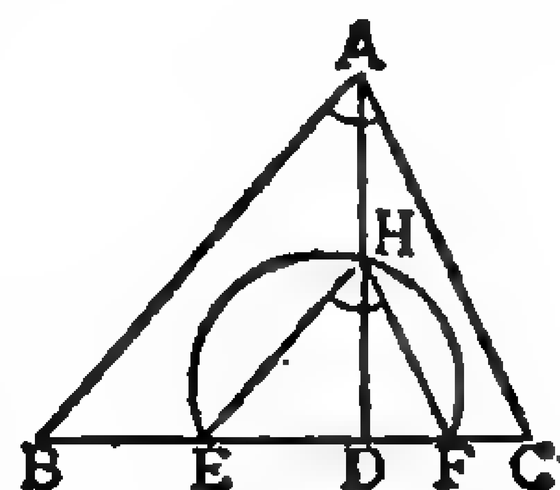
[证明] 因为$BC=l$，$AD=m$，$BE=n$，且BEC为半圆，所以

$\angle BEC=\angle R$.

因此$\triangle ABC$符合条件.

2342. 已知顶角$A=\alpha$，高$AD=h$，及AD将底边分成$m:n$两部分，求作$\triangle ABC$.

解 [作图] 在任意线段FE上取点D，使$ED:DF=m:n$．以EF为弦，作含$\angle\alpha$的弓形弧，与过D的EF的垂线相交于H．在DH或其延长线上取点A，使$DA=h$．过A作$AB\parallel HE$，$AC\parallel HF$，与EF(或其延长线)分别相交于B、C，则$\triangle ABC$为所求三角形.



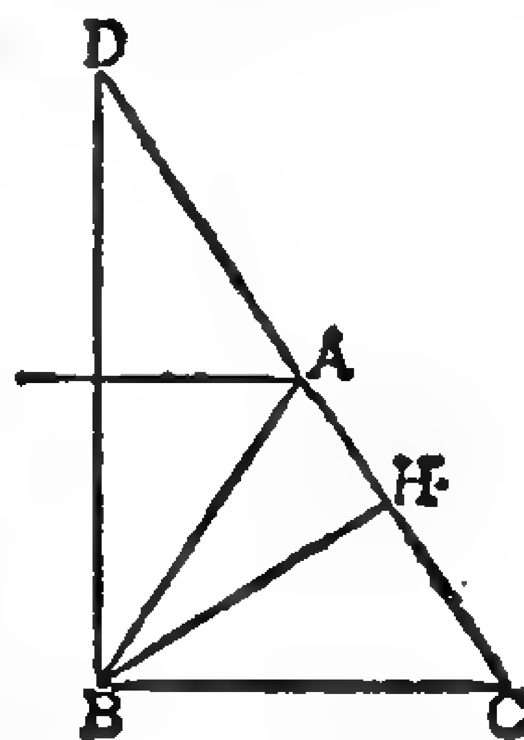
[证明] 根据作图，

$$\angle BAC=\angle EHF=\alpha,\ AD\perp BC,$$

$$AD=h,\ \frac{BD}{DC}=\frac{ED}{DF}=\frac{m}{n}.$$

2343. 已知底边$BC=a$，另两边AB、AC之和为m，过B的高$BH=h$，求作$\triangle ABC$.

解 [作图] 作$BH=h$．过H作BH的垂线DHC，与以B为圆心、a为半径的圆的交点为C，取$DC=m$．连结DB，并作BD的垂直平分线与DC相交于A，则$\triangle ABC$即为所求的三角形.



[证明] 根据作图，$AD=AB$，

$$\therefore\ AB+AC=AD+AC=DC=m,$$

且 $BH\perp AC$，$BH=h$，$BC=a$.

因此$\triangle ABC$符合条件.

2344. (1) 已知底边$BC=a$，高$AH=h$，外接圆半径为r，求作$\triangle ABC$.

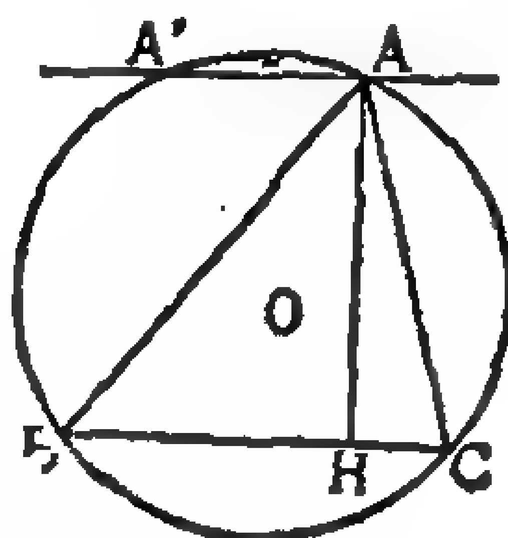
(2) 已知$BC=a$，高$AH=h$，及$AB\cdot AC=m^2$，求作$\triangle ABC$.

解 (1) 在半径为r的圆O中，作弦$BC=a$，在离BC为h处作$AA'\parallel BC$，与圆O相交于A、A'，则$\triangle ABC$(或$\triangle A'BC$)为所求三

角形．理由是：

$BC=a$，高 $AH=h$，$\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 r．

(2) 设外接圆的半径为 r，则



$$AB\cdot AC=2r\cdot h$$

（问题 1318）．

但 $AB\cdot AC=m^2$，所以

$$r=\frac{m^2}{2h}\ (r\text{ 为定长}),$$

故(2)可归结于(1)．

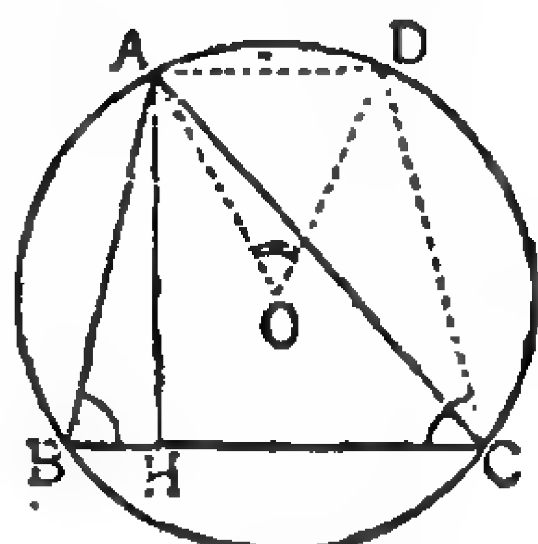
2345． 已知高 $AH=h$，外接圆的半径等于 r，两底角 B、C 之差为 α，求作 $\triangle ABC$．

解 ［分析］ 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出．作与 BC 平行的弦 AD，则

$$\angle B=\angle DCB,$$

$$\therefore\ \angle ACD=\angle B-\angle ACB=\alpha.$$

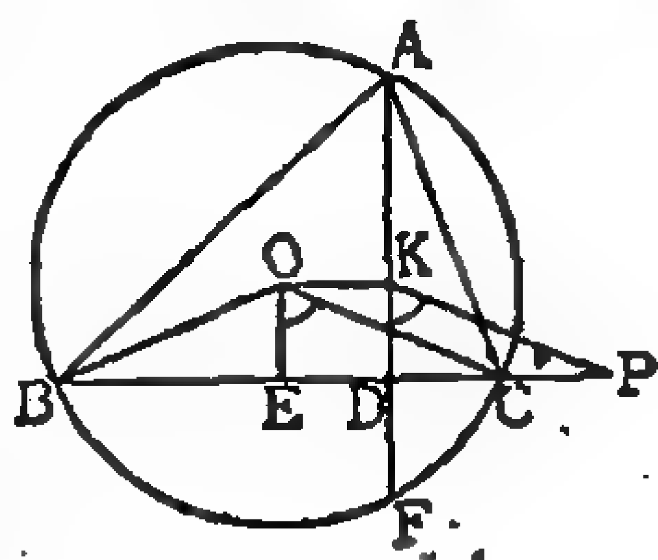
因此，弧 AD 的大小一定．故可作图如下．



［作图］ 在半径为 r 的圆中，作圆心角为 2α 的两条半径 OA、OD，再作弦 $BC\parallel AD$ 且距离为 h，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形．

2346． 已知 $\angle A=\alpha$，高 $AD=h$，且 $BD\cdot CD=m^2$，求作 $\triangle ABC$．

解 ［分析］ 假定 $\triangle ABC$ 为所求三角形．作 ABC 的外接圆，与 AD 的延长线相交于 F，则



$$AD\cdot DF=BD\cdot DC=m^2.$$

但 AD 和 m 分别为已知线段，所以 DF 为定长，由此 AF 也为定长．　①

再过 AF 的中点 K 作 OC 的平行线与 BC 的延长线相交于 P．过 O 作 BC 的垂线 OE，则

$$\triangle KDP\cong\triangle OEC.$$

$$\therefore\ \angle DKP=\angle EOC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle A.\quad ②$$

由①，②可作图如下．

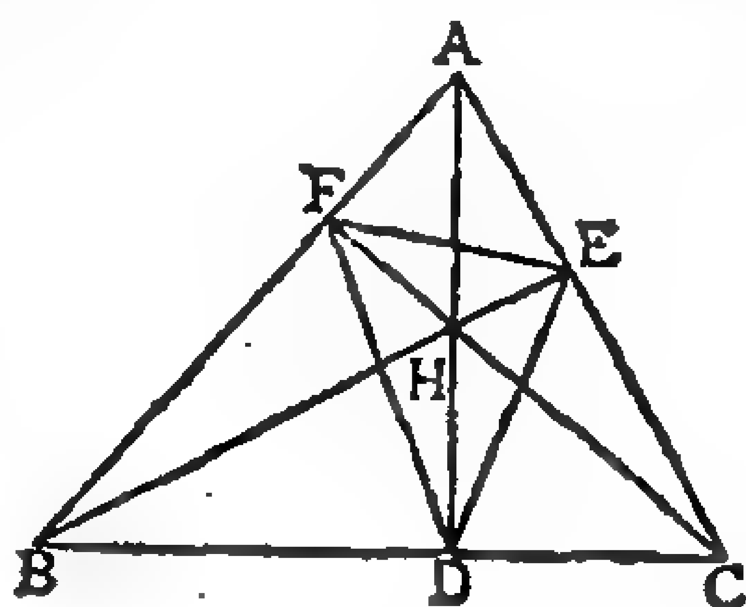
［作图］ 在适合条件①的直线上取线段 AD、DF．过 AF 的中点 K 作射线 KP，使 $\angle DKP=\alpha$，与过 D 所作 AF 的垂线相交于 P；作以 PK 为半径过 A、F 点的圆，与直线 PD 相交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形．

［证明］ 根据作图，$AD\perp BC$，$AD=h$，

$$\angle A=\angle EOC=\angle DKP=\alpha,$$

$$BD\cdot CD=AD\cdot DF=m^2.$$

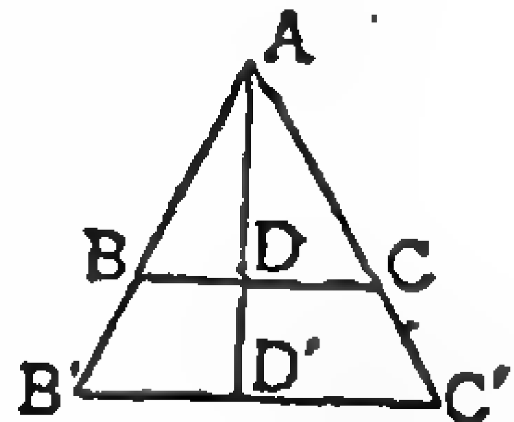
2347． 作三角形，使过它的各顶点向对边所作的垂线足分别为已知点 D、E、F．



解 若 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，垂足三角形为 DEF，则当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，H 为 $\triangle DEF$ 的内心；$\triangle ABC$ 为钝角三角形时，H 为 $\triangle DEF$ 的旁心．设 $\triangle DEF$ 的内心为 H（如图），它的三个旁心为 A、B、C，则 $\triangle ABC$、$\triangle HAB$、$\triangle HBC$、$\triangle HCA$ 的垂足三角形都是 $\triangle DEF$，因此这四个三角形为所求三角形．

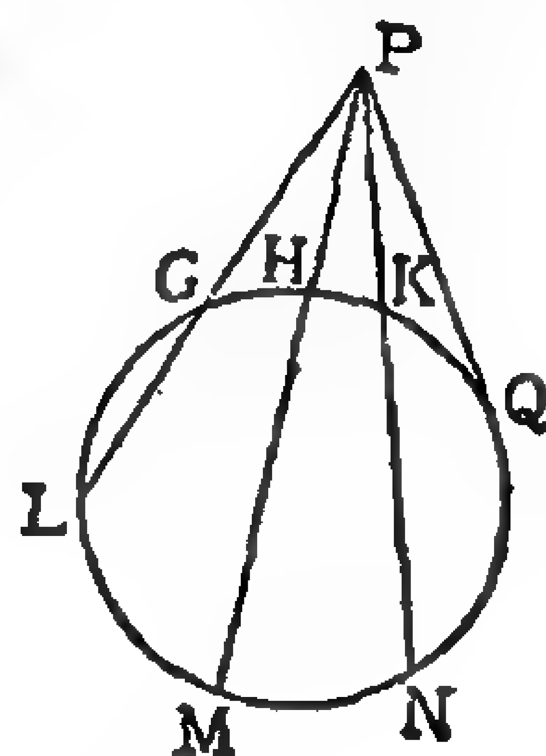
2348． 已知三条高 h、k、l，求作 $\triangle ABC$．

解 设 $\triangle ABC$ 的三条高为 AD、BE、CF，$AD=h$，$BE=k$，$CF=l$．设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，则



$$h\cdot BC=k\cdot CA=l\cdot AB=2S.$$

过圆外一点 P，作此圆的割线 PGL，PHM，PKN 及切线 PQ，则



$$PG\cdot PL=PH\cdot PM=PK\cdot PN=PQ^2.$$

若使 PG、PH、PK 分别等于 h、k、l，则

$$h\cdot PL=k\cdot PM=l\cdot PN=PQ^2.$$

$$\therefore\ \frac{PL}{BC}=\frac{PM}{CA}=\frac{PN}{AB}=\frac{PQ^2}{2S},$$

即 $PL:PM:PN=BC:CA:AB$．以 PL、PM、PN 为边作三角形 $AB'C'$，则它与符合条件的三角形 ABC 相似．且在 $\triangle AB'C'$ 中．设过 A 的高为 AD'，在 AD' 或其延长线上取点 D，使 $AD=h$，过 D 作与 $B'C'$ 平行的直线，与 AB' 或其延长线相交于 B，与 AC' 或其延长线相交于 C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形．

2349. 已知底边 $BC=a$, $AB^2+AC^2=m^2$, 及过 A 所作 BC 的垂线足 H 与 B 的距离,求作 $\triangle ABC$。

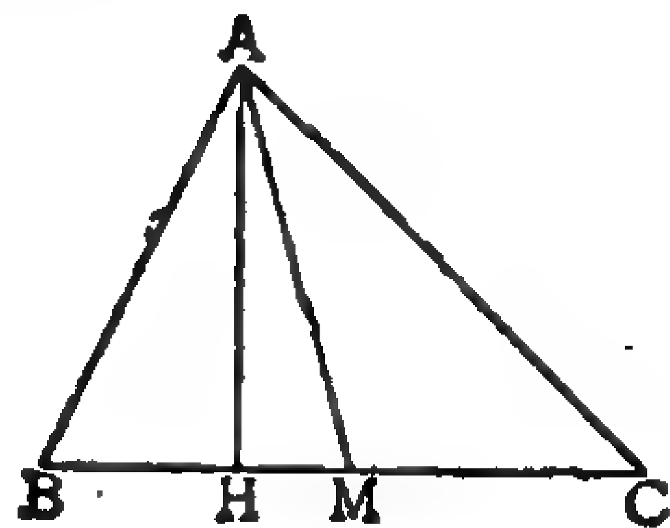
解 [分析] 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。作中线 AM 和高 AH, 则

$$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2$$ (问题 874),

即 $$m^2=2AM^2+\frac{a^2}{2},$$

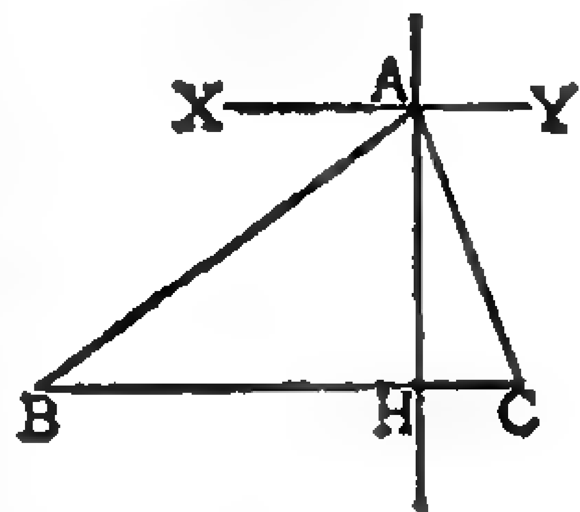
$$\therefore\quad AM=\sqrt{\frac{2m^2-a^2}{2}}.$$

因此可作图如下。



[作图] 作 $BC=a$, 在 BC 上取点 H, 使 BH 等于已知长; 再以 BC 的中点 M 为圆心, $\frac{\sqrt{2m^2-a^2}}{2}$ 为半径作圆; 过 H 作 BC 的垂线, 与圆相交于 A, 则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

2350. 已知底边 $BC=a$, 高 $AH=h$, 和 AB、AC 上的正方形之差为 m^2, 求作 $\triangle ABC$。



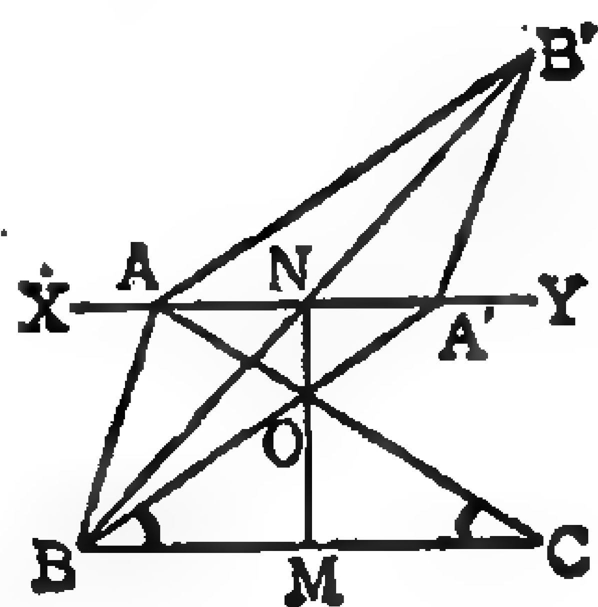
解 作 $BC=a$, 在距离 BC 为 h 处作直线 XY。设与 B 和 C 的距离的平方差等于 m^2 的点的轨迹 (问题 1834) 与 XY 相交于 A, 则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。根据作图,

$$BC=a,\quad \text{高 } AH=h,\quad AB^2\sim AC^2=m^2.$$

2351. 已知底边 $BC=a$, 高 $AH=h$, 两底角 B、C 之差为 α, 求作 $\triangle ABC$。

解 [分析] 假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。过 A 作 $XY\parallel BC$, 使 XY 与 BC 之间的距离为 h,所以 XY 的位置可定。过 BC 的中点 M 作 BC 的垂线与 XY 相交于 N, 与 AC 相交于 O, 则 $\angle ACB=\angle OBC$, 所以

$$\angle ABO=\angle ABC-\angle C=\alpha.$$



再设 BO 与 XY 的交点为 A', 则 $NA=NA'$。因此延长 BN, 在此延长线上取 $NB'=BN$,则 $BAB'A'$ 为平行四边形, $\angle B'AB$ 与 $\angle ABA'$ 的补角相等。因此可作图如下。

[作图] 作线段 $BC=a$, 作 $XY\parallel BC$, 两者距离为 h。设 XY 与 BC 的垂直平分线相交于 N, 延长 BN 至 B', 使 $BN=NB'$; 再以 BB' 为弦, 作含 $(2\angle R-\alpha)$ 的弓形弧, 与 XY 相交于 A, 则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

(4) 已知两边(或两角)

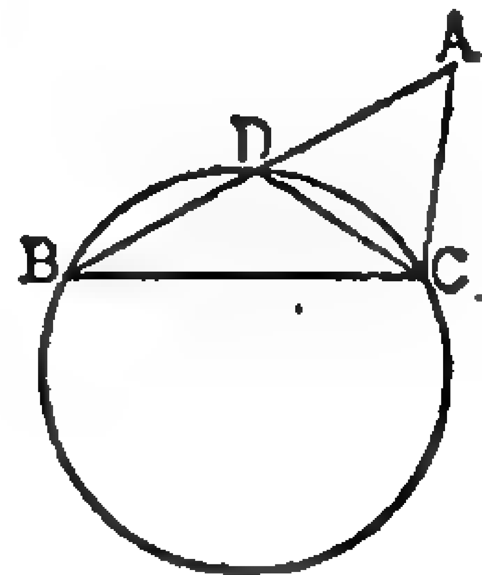
2352. 已知三角形的两边 $AB=l$, $AC=m$ $(l>m)$, 底角 B、C 之差为 θ, 求作 $\triangle ABC$。

解 [分析] 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出, $l>m$。在 AB 上取 $AD=AC$, 连结 CD, 则

$$\angle BCD=\frac{1}{2}(\angle ACB-\angle ABC)=\frac{1}{2}\theta,$$

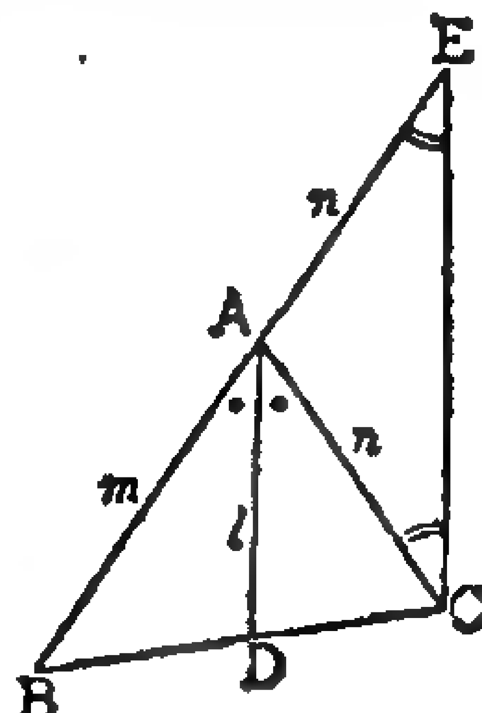
又 $$BD=AB-AC \text{ (一定)}.$$

因此可作图如下。



[作图] 作 $AB=l$, 在 AB 上取 $AD=m$。以 BD 为弦, 作含角 $\frac{\theta}{2}$ 的弓形弧, 与以 A 为圆心、m 为半径的圆, 除 D 外的另一交点为 C, 则 $\triangle ABC$ 为所求的三角形。

2353. 已知 $AB=m$, $AC=n$, $\angle A$ 的平分线 $AD=l$,求作 $\triangle ABC$。



解 [分析] 延长 BA, 使 $AE=AC$,

$$\angle BAC=2\angle E,$$

$$\therefore\quad \angle BAD=\angle E$$

$$(\because\quad \angle BAD=\angle DAC).$$

$$\therefore\quad AD\parallel EC,$$

$$AD:EC=BA:BE,$$

即 $$l:EC=m:m+n,$$

$$\therefore\quad EC=\frac{m+n}{m}l.$$

因此可作图如下。

[作图] 作 $\triangle ACE$, 使底边

$$EC=\frac{m+n}{m}l,\ AC=AE=n.$$

在 EA 的延长线上取 $AB=m$, 则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

2354. 已知三角形两边 CA、CB 的长,

以及将 AB 内分为 $m:n$ 的点 D 到 C 的距离，求作 $\triangle ABC$。

解　[分析]　设 $\triangle ABC$ 为所求三角形．过 D 作边 BC 的平行线与 AC 相交于 E，则

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{m}{m+n},\qquad ①$$

$$\frac{CE}{CA}=\frac{BD}{BA}=\frac{n}{m+n}.\qquad ②$$

$$\therefore\quad DE=\frac{m\cdot BC}{m+n},\qquad ①'$$

$$CE=\frac{n\cdot CA}{m+n}.\qquad ②'$$

因此，DE 和 CE 为定长．又 DC 也为定长．所以 $\triangle DEC$ 可作．由此决定 A, B 的位置，就可作出三角形 ABC。

2355.　已知两边 $AB=l$, $AC=m$，且 $\triangle ABC$ 的面积等于 S，求作 $\triangle ABC$。

解　[作图]　作线段 $AB=l$，求 h，使

$$\frac{1}{2}AB\cdot h=S$$

(问题 **2013**)，在距离 AB 为 h 处作 $CD\parallel AB$．以 A 为圆心、m 为半径作圆，与 CD 相交于 C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

[证明]　根据作图，$AB=l$, $AC=m$。再过 C 作 AB 的垂线 CH，则 $CH=h$。

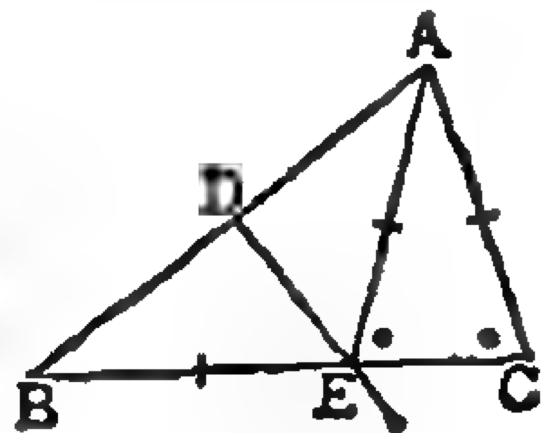
$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{1}{2}AB\cdot h=S,$$

因此 $\triangle ABC$ 符合条件。

[讨论]　$h\leqq m$ 时，本题成立。
　　$h<m$ 时，有两解。
　　$h=m$ 时，有一解。
　　$h>m$ 时，无解。

2356.　在 $\triangle ABC$ 中，$AB=l$, $AC=m$, $2\angle B=\angle C$，求作 $\triangle ABC$。

解　[作图]　作 $AB=l$，求 AB 的中点 D．过 D 作 AB 的垂线 DE，与以 A 为圆心、m 为半径的圆相交于 E．作 BE 的延长线，与圆相交于 C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



[证明]　根据作图，$AB=l$, $AC=m$，又 $AE=BE$，所以 $\triangle AEB$ 为等腰三角形．从而

$$\angle AEC=2\angle B,\ AE=AC,$$

$$\therefore\quad \angle AEC=\angle C,\ 2\angle B=\angle C.$$

2357.　已知两边 BC、AC 之和为 l, $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$，求作 $\triangle ABC$。

解　作 $\triangle ABD$，使 $BD=l$, $\angle B=\alpha$, $\angle D=\frac{1}{2}\beta$．设 AD 的中点为 E，过 E 作 AD 的垂线，与 BD 相交于 C，连结 AC，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形．其理由是：CE 为 AD 的垂直平分线，所以

$$CA=CD,$$

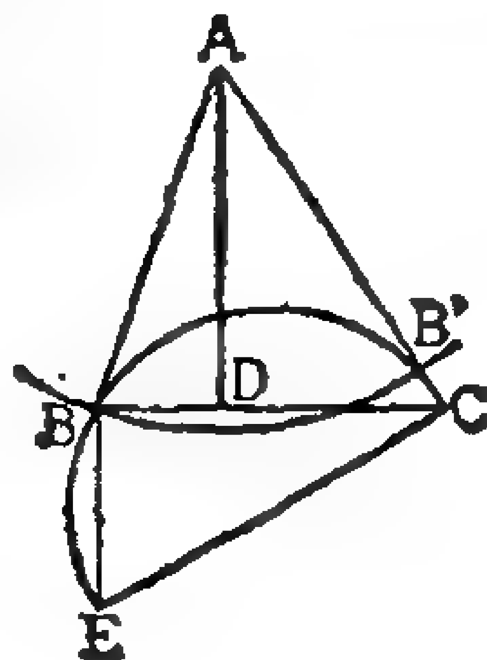
$$\angle ACB=2\angle ADC=\beta,$$

又根据作图，$\angle B=\alpha$。

注　若已知 $BC+AC=l$, $\angle B=\alpha$, $AB=m$（即将已知 $\angle C=\beta$ 改为已知 $AB=m$），也可同样作图。

2358.　已知两边 $AB=l$, $AC=m$，底边 BC 等于高 AD，求作 $\triangle ABC$。

解　设 $\angle C$ 为直角，$AC=CE=m$，作等腰直角三角形 ACE．以 CE 为直径的圆，与以 A 为圆心、l 为半径的圆相交于 B，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



因为根据作图，

$$AB=l,\ AC=m,$$

又过 A 作 BC 的垂线 AD，则

$$AC=CE=m,\ \angle D=\angle CBE=\angle R,$$

又
$$\angle ACD=\angle BEC,$$

$$\therefore\quad \triangle ACD\cong\triangle CEB.$$

$$\therefore\quad AD=BC.$$

因此 $\triangle ABC$ 为符合条件的三角形。

2359.　已知 $\triangle ABC$ 的周长和 $\angle B$、$\angle C$，求作 $\triangle ABC$。

解　设周长$=2s$，两个角分别为 β、γ，求作此三角形。

[分析]　设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出，则三边之和等于 $2s$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$。向两端

方向延长 BC，使

$BB'=AB$，

$CC'=AC$。

则 $B'C'=2s$，$\angle B'=\frac{1}{2}\beta$，$\angle C'=\frac{1}{2}\gamma$。

［作图］ 作 $\triangle AB'C'$，使 $B'C'=2s$，

$$\angle B'=\frac{1}{2}\beta,\ \angle C'=\frac{1}{2}\gamma.$$

设 AB'，AC' 的垂直平分线与 $B'C'$ 相交于 B、C，连结 AB、AC，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

［证明］ 因为 $AB=BB'$，$AC=CC'$，

$$\therefore\ AB+BC+CA=B'B+BC+CC'=2s.$$

又 $$\angle ABC=2\angle B'=\beta,$$
$$\angle ACB=2\angle C'=\gamma.$$

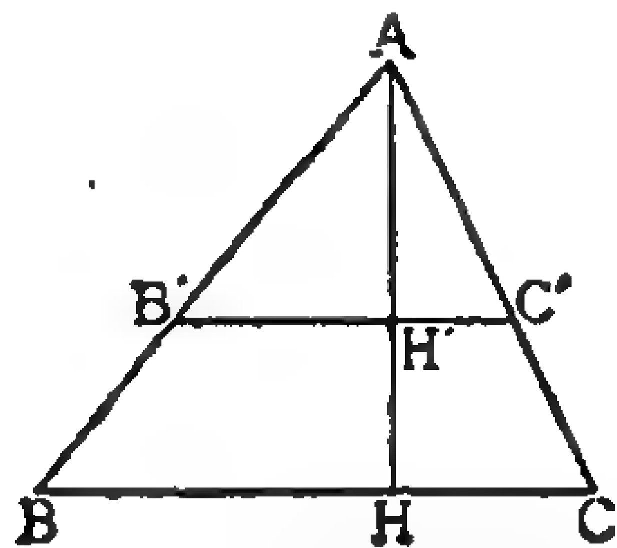
因此 $\triangle ABC$ 为符合条件的三角形。

［讨论］ $\beta+\gamma<2\angle R$，则有一解。

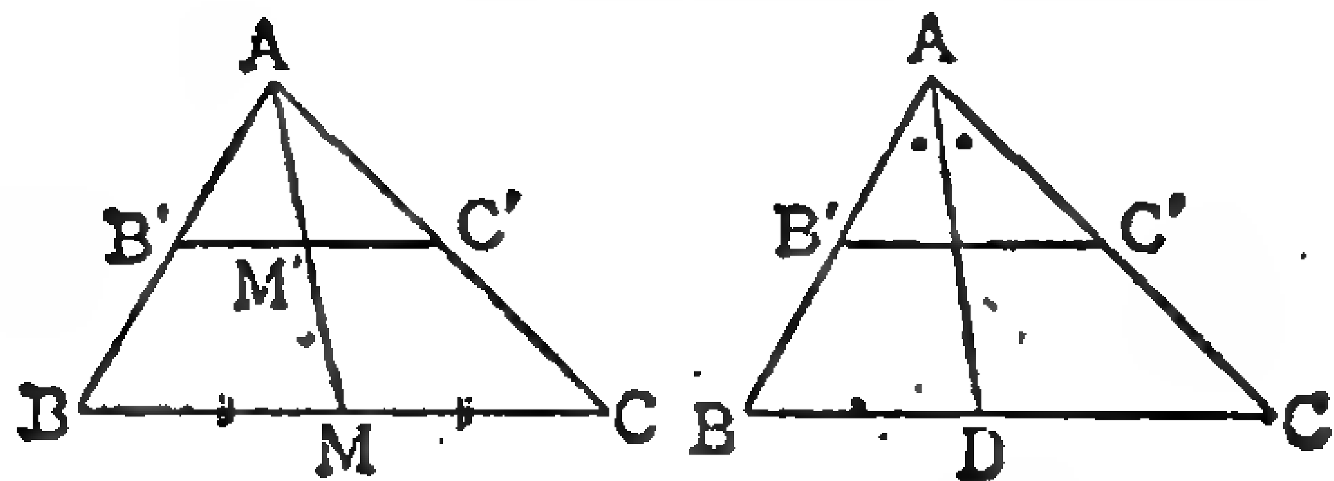
$\beta+\gamma\geqq 2\angle R$，无解。

2360. 已知 $\angle B=\alpha$，$\angle C=\beta$，高 $AH=h$，求作 $\triangle ABC$。

解 作任意大小的 $\triangle AB'C'$，使 $\angle B'=\alpha$，$\angle C'=\beta$。作高 AH'，在 AH' 上取 $AH=h$，过 H 作 $B'C'$ 的平行线，与 AB'、AC' 相交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。



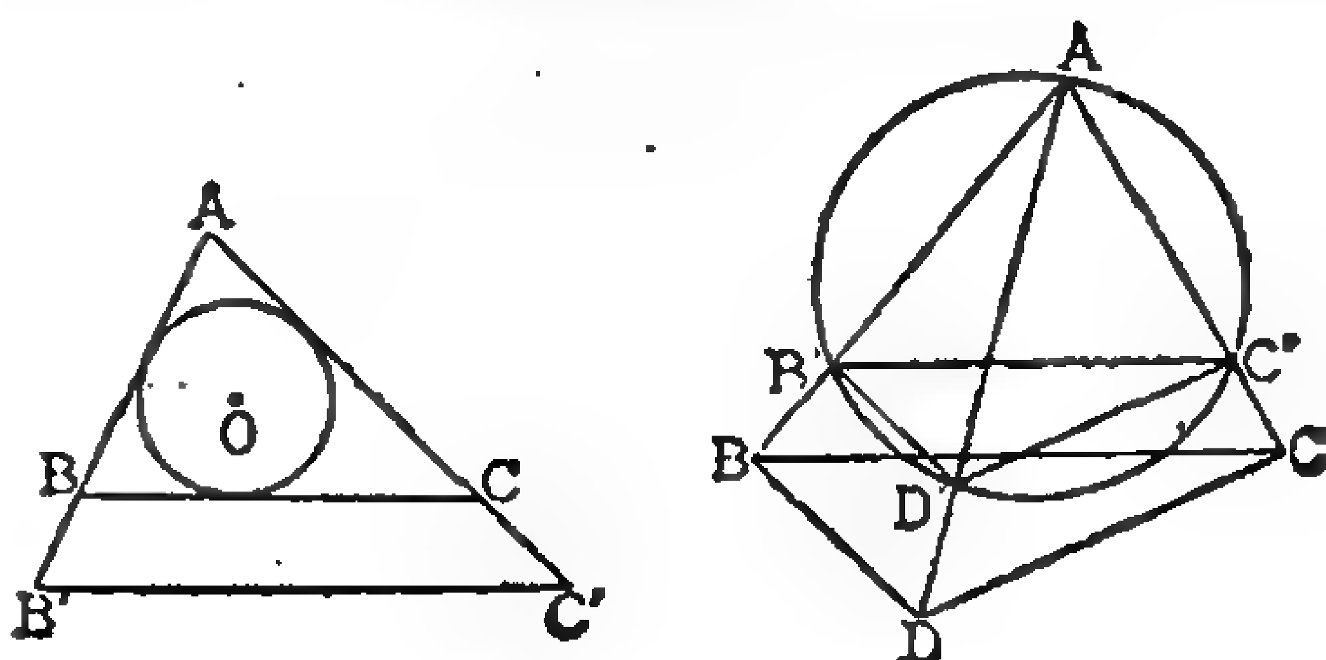
注 如下图，已知 $\angle B$、$\angle C$，中线 AM，或已知 $\angle B$，$\angle C$，角平分线 AD，其作图方法都同上。这种作图法叫相似法。



2361. 已知 $\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，内切圆的半径 r，求作 $\triangle ABC$。

解 作 $\triangle AB'C'$，使 $\angle A=\alpha$，$\angle B'=\beta$。作与 AB'、AC' 相切且半径为 r 的圆 O。再作 $BC\parallel B'C'$，且和圆 O 相切，与 AB'、AC' 相交于点 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形（但与 $B'C'$ 平行的切线有两条。要使圆 O 在 $\triangle ABC$ 内）。

注 已知 $\angle A$，$\angle B$ 与外接圆半径 R，作 $\triangle ABC$ 的方法与此题相同。



（5）已知两条边（或三条边）之和

2362. 已知顶角 $A=\alpha$，外接圆的半径 r，三边之和 $a+b+c$，求作 $\triangle ABC$。

解 设 $\triangle ABC$ 已作出，它的外心为 O，则

$$\angle BOC=2\alpha,$$
$$OB=OC=r,$$

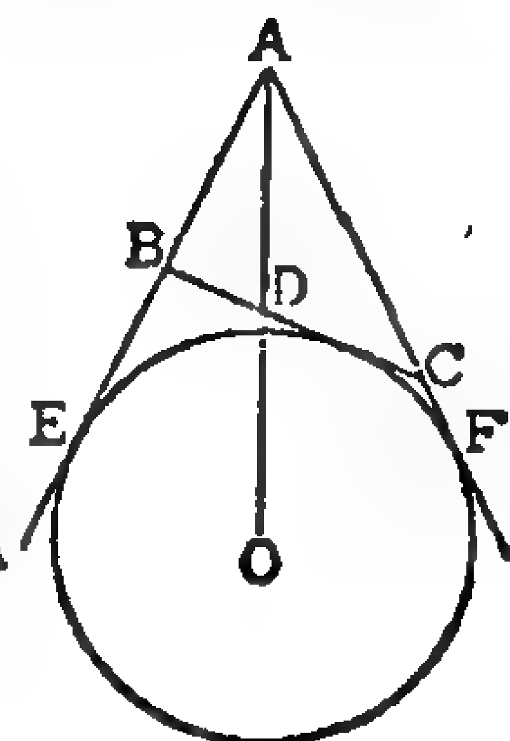
所以 $\triangle OBC$ 可作出，从而可求得 BC。故本题归结为已知顶角 $A=\alpha$，底边 BC，及其他两边之和求作 $\triangle ABC$ 的问题（问题 **2302**）。

2363. 已知 $\angle A=\alpha$，$\angle A$ 的平分线 $AD=m$，周长为 $2s$，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 设 $\triangle ABC$ 为所求三角形，作 $\angle A$ 所含的旁切圆 O，与 AB、AC 的延长线分别相切于 E、F，则

$$AE=AF=s.$$

又因为 $\angle A=\alpha$，所以旁切圆可定。又 AO 平分 $\angle A$，若在 AO 上取 $AD=m$，则点 D 可定。因此可作图如下。



［作图］ 作 $\angle EAF=\alpha$，使 $AE=AF=s$，过 E、F 作与 AE、AF 相切的圆 O。在 AO 上取 $AD=m$，过 D 作圆 O 的切线，与 $\angle EAF$ 的两边分别相交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

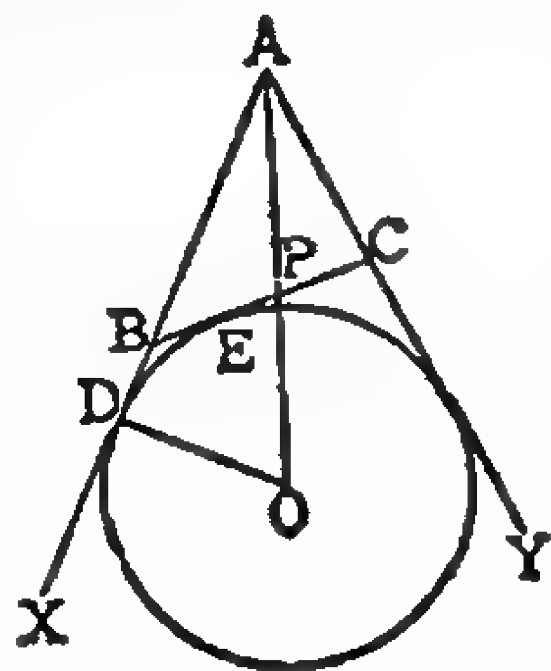
［证明］ 根据作图，$\angle BAC=\alpha$，AD 为 $\angle A$ 的平分线，且 $AD=m$。又 E 为旁切圆的切点，且 $AE=s$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $2s$。

［讨论］ 使本题成立的充分必要条件是，

上面所作的圆要成为符合条件的$\triangle ABC$的旁边圆，即过D要能作此圆的切线。设A到圆周的距离为AD'，则$AD<AD'$时，过D可作圆O的两条切线，因此有两解。$AD=AD'$时，则可得一个三角形(等腰三角形)。$AD>AD'$时，则无解。

2364. 已知顶角的大小和位置，三边之和，以及底边通过的点P，求作$\triangle ABC$。

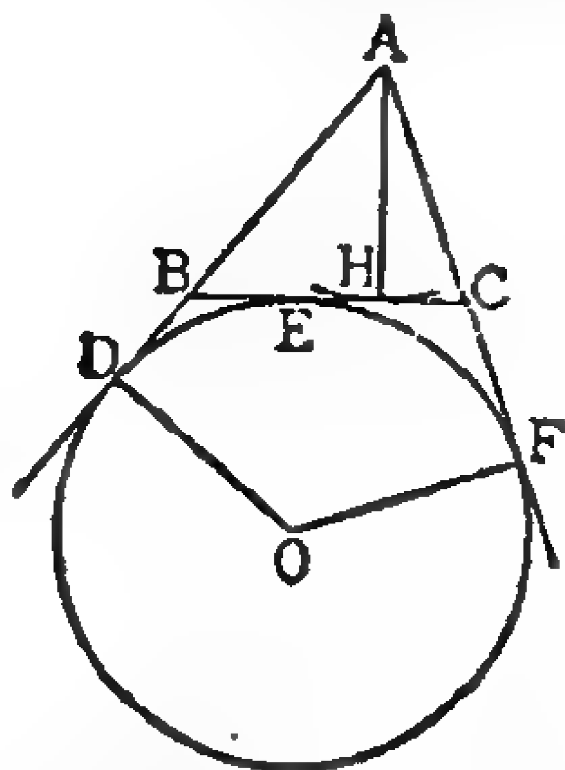
解 ［作图］ 按已知条件作顶角XAY.在边AX上取AD等于已知周长的一半。作$\angle A$的平分线，与过D的AD的垂线相交于O.以O为圆心、OD为半径作圆，过点P作此圆的切线BPC，与AX、AY相交于B、C，则$\triangle ABC$为所求三角形。



［证明］ 因为顶角的大小和位置已知，圆O为旁切圆，所以$\triangle ABC$的周长为$2AD$，即与已知周长相等。底边BC通过点P，所以$\triangle ABC$符合条件。

2365. 已知$\angle A=\alpha$，高$AH=h$，$AB+BC+CA=2s$，求作$\triangle ABC$。

解 ［作图］ 作$\angle DAF=\alpha$，在它的两边取D、F，使$AD=AF=s$，过D、F作与这两边相切的圆。又以A为圆心、h为半径作圆。作两圆的内公切线，与AD、AF相交于B、C，则$\triangle ABC$为所求的三角形。



［证明］ 设圆O与边BC的切点为E，则

$$BD=BE,\ CF=CE,$$

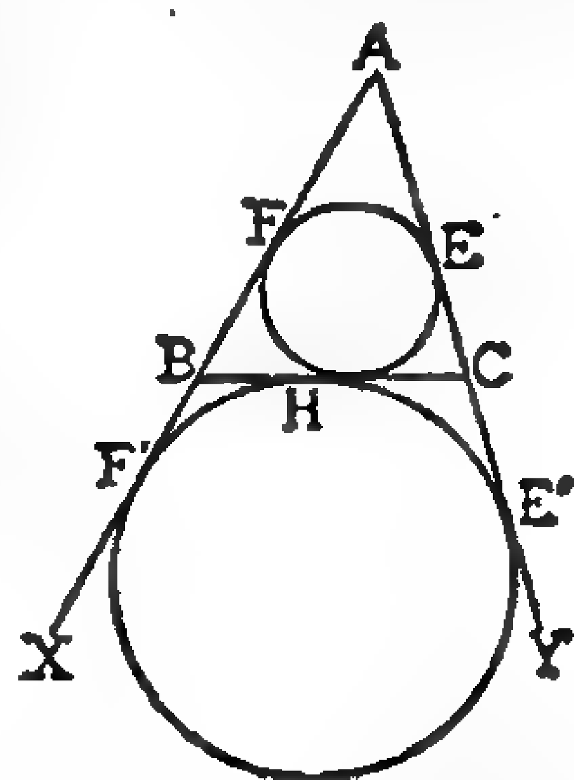
$$\therefore\ AB+BE+AC+CE=AD+AF=2AD=2s.$$

$$\therefore\ AB+BC+CA=2s.$$

又高$AH=h$，$\angle BAC=\alpha$。

2366. 在已知$\angle XAY$的边AX，AY之间作边$BC=a$，且周长为$2s$的三角形ABC。

解 ［作图］ 在$\angle XAY$的一边AX上作$AF'=s$，$AF=s-a$，又在AY上取$AE'=s$，$AE=s-a$。过F'、E'分别作与AX、AY相切的圆，过F、E作与AX、AY相切的圆，再作这两个圆的内公切线BC，与AX、AY分别相交于B、C，则$\triangle ABC$为所求三角形。



［证明］ 设旁切圆与边BC的切点为H，则

$$BH=BF',$$
$$CH=CE',$$

$$\therefore\ AB+AC+BC=AB+AC+BH+HC=AF'+AE'=2s,$$

$$AF=AF'-BC=s-BC.$$

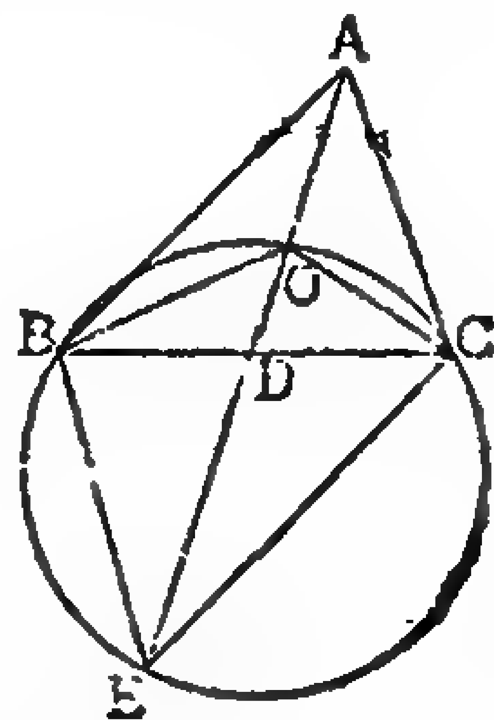
根据作图，$AF=s-a$，

$$\therefore\ BC=a.$$

2367. 已知底边$BC=a$，其他两边AB、AC之和$(=l)$，顶角A的平分线$AD=m$，求作$\triangle ABC$。

解 ［分析］ 设所求$\triangle ABC$已作出，$\angle A$的平分线为AD。设O为内心，则根据问题1067，

$$\frac{AO}{OD}=\frac{AB+AC}{BC}=\frac{l}{a},$$

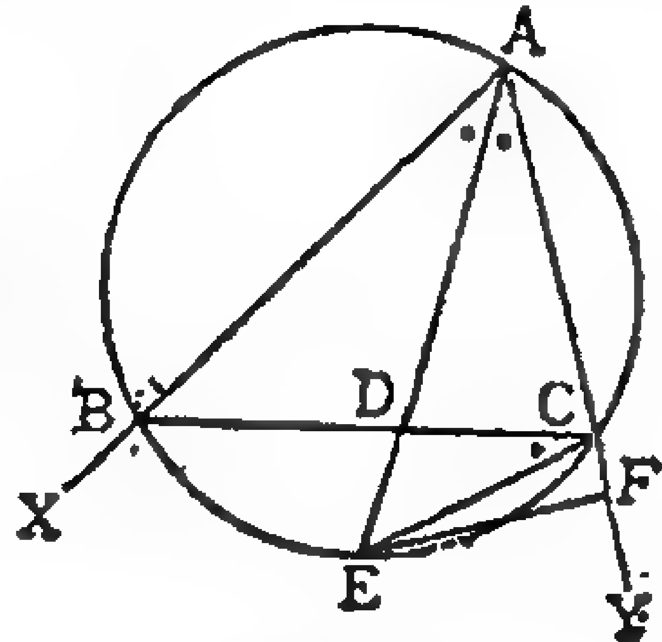


故O为定点。因此可在AD的延长线上取旁心E，则A、O、D、E为调和点列，且A、O、D为定点，因此点E的位置可定。又$\angle OBE=\angle R=\angle OCE$，因此$O$、$B$、$E$、$C$四点共圆，故可作图如下。

［作图］ 作线段$AD=m$，在AD上求点O，使$AO:OD=l:a$。在AD的延长线上求点E，使$EA:ED=l:a$。作以OE为直径的圆，过D作此圆的弦BC，使$BC=a$，连结AB、AC。则$\triangle ABC$为所求三角形。

2368. 已知$AB+AC=l$，$\angle A$的平分线$AD=m$，$\angle A=\alpha$，求作$\triangle ABC$。

解 ［分析］ 假定$\triangle ABC$为所求三角形。作$\triangle ABC$的外接圆，作$\angle A$的平分线并延长与圆相交于E，过E作边AC的垂线EF，则



$AF=\frac{1}{2}(AB+AC)=\frac{1}{2}l$（问题536），

所以F为定点。因此E的位置也可定。又B、A、C、E四点共圆，

$$\angle DCE=\angle BCE=\angle BAE=\frac{1}{2}\alpha.$$

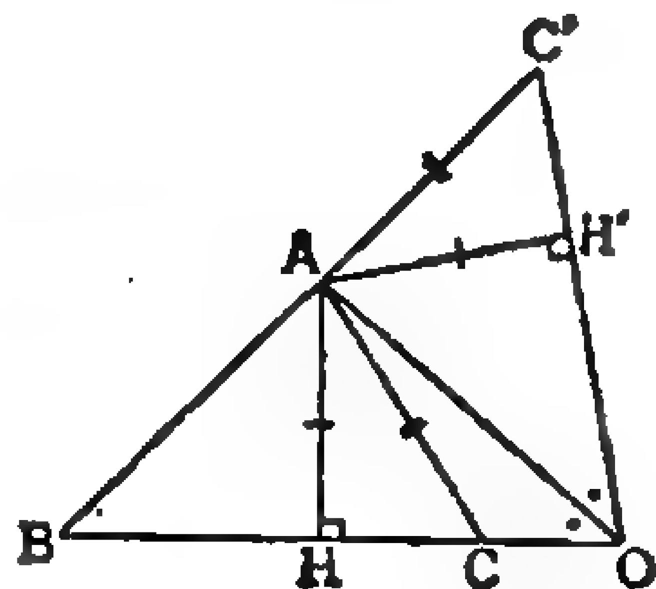
又D、E为定点，$\angle DCE$一定。作图如下。

［作图］ 作$\angle XAY=\alpha$，在AY上取

$$AF=\frac{1}{2}l.$$

过F所作AF的垂线与$\angle A$的平分线相交于E，在AE上取$AD=m$。以DE为弦作含角$\frac{1}{2}\alpha$的弓形弧与AF相交于C，CD与AX相交于B，则$\triangle ABC$为所求三角形。

2369. 已知顶角$A=\alpha$，高$AH=h$，两边AB、AC之和（$=l$），求作$\triangle ABC$。



解 假定$\triangle ABC$为所求三角形。在BA的延长线上取AC'等于AC。过A作BC的垂线AH，再作线段AH'，使$AH'=AH$，

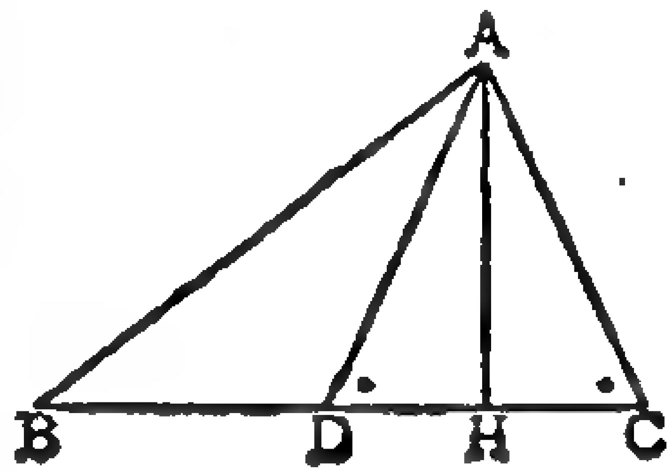
$$\angle HAH'=\angle CAC'.$$

则$\angle CAC'$等于$\angle BAC$的补角，从而$\angle HAH'$一定。又AH为定长，因此AH'也为定长。连结$C'H'$，与HC的延长线相交于O，则

$$\triangle AHC\cong\triangle AH'C',$$
$$\angle AH'O=\angle AHO=\angle R,$$

OA为$\angle HOH'$的平分线，因此本题可先从条件$AH=AH'=h$，$\angle HAH'=180°-\alpha$确定AH、AH'的位置。过H、H'作AH、AH'的垂线，相交于O，则OA平分$\angle HOH'$。因此过$\angle HOH'$的平分线OA上的点A，在角外作线段BC'。使$AB+AC'=l$即可（参照问题2091）。

2370. 已知$AB+AC=l$，$\angle C-\angle B=\alpha$，以及高AH将BC分成的两部分BH、CH之差（为m），求作$\triangle ABC$。



解 假定符合条件的$\triangle ABC$已作出。过A作BC的垂线AH，在HB上取$HD=HC$，则

$$BD=m, \quad ①$$
$$\angle C=\angle ADH,$$
$$\therefore\ \angle BAD=\angle ADC-\angle B$$
$$=\angle C-\angle B=\alpha. \quad ②$$

又 $AB+AD=AB+AC=l$. ③

由①、②、③，底边BD、$\angle BAD$、$AB+AD$可知，因此$\triangle ABD$可作出。先作$\triangle ABD$，在BD的延长线上求点C，使$AD=AC$，则$\triangle ABC$为所求作的三角形。

2371. 已知顶角A为α，两边AB、AC之和为l，高AH分底边的两部分BH、CH之差为m，求作$\triangle ABC(BH>CH)$。

解 ［分析］ 设符合条件的$\triangle ABC$已作出。因为$BH>CH$，所以$AB>AC$。以A为圆心、AC为半径作圆，与BC、AB分别相交于D、E，与BA的延长线相交于F，则

$$\angle EDF=\angle R,$$
$$\angle BDE=\angle CFE=\frac{1}{2}\alpha,$$

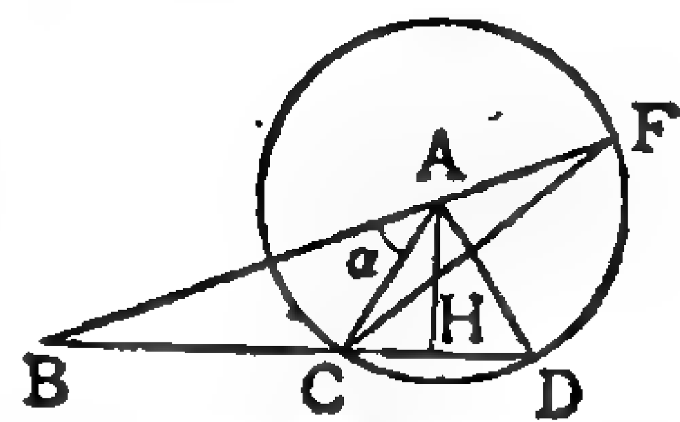
即 $$\angle BDF=\angle R+\frac{1}{2}\alpha.$$

又$BD=m$，$BF=l$，因此$\triangle BDF$可作出，从而点E可求，故可作图如下。

［作图］ 作$\triangle BDF$，使$BF=l$，

$$\angle BDF=\angle R+\frac{\alpha}{2},$$

$BD=m$。过D作DF的垂线与BF相交于E。再作以EF为直径的圆（圆心为A），设BD与圆相交的另一点为C，则$\triangle ABC$为所求三角形。



注 如图，若交换C与D的位置，则BH、CH之差为BC且等于m，BF等于l。$\angle BFC$是$\angle BAC$的一半，先作$\triangle BFC$，然后决定顶点A，则符合条件的$\triangle ABC$可求得。

2372. 已知高$AD=h$，两边AB、AC之和为l，过B、C分别向对边所引垂线BE、

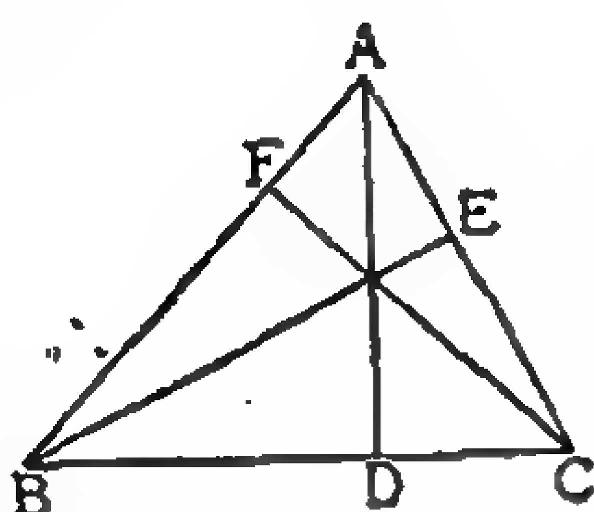
CF 之比为 $m:n$，求作 $\triangle ABC$。

解　［分析］　假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出，则

$$2S_{\triangle ABC}=BE\cdot AC=CF\cdot AB,$$

$$\therefore\quad AB:AC=BE:CF=m:n.$$

因此 AB 与 AC 之比一定。又因为 $AB+AC=l$，所以 AB、AC 可求。故可作图如下。



［作图］　作 $BC'=l$，设将 BC' 内分为 $m:n$ 的点为 A。以 AB 为直径作半圆，以 A 为圆心、h 为半径作圆，两圆相交于 D。以 A 为圆心、AC' 为半径作圆，与 BD 的延长线相交于 C，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

［证明］　根据作图，AD 为高等于 h，且

$$AB+AC=BC'=l.$$

又

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AC'}=\frac{m}{n},$$

由 B、C 向对边作垂线 BE、CF，则

$$\frac{BE}{CF}=\frac{m}{n}.$$

［讨论］　$m>n$ 时，则必须 $AB>h$，$AC\geqq h$，才可能作图。因此，必须 $h\leqq\frac{ml}{m+n}$。

若 $h<\frac{nl}{m+n}$ 时，则有两解；

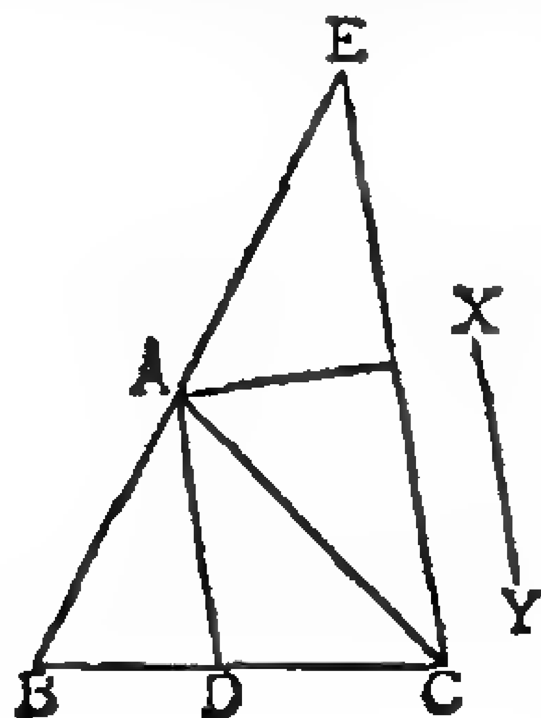
若 $h=\frac{nl}{m+n}$ 时，则只有一解；

若 $h>\frac{nl}{m+n}$ 时，则无解。

当 $m<h$ 时，若 $AC\leqq h$ 则无解；当 $AC>h$ 时，若 $AB>h$，则有两解；若 $AB=h$，则有一解；若 $AB<h$，则无解。

当 $m=n$ 时，若 $AB>h$，则有一解；$AB\leqq h$ 时，则无解。

2373.　已知底边 $BC=a$ 的位置，另两边 AB、AC 之和为 l，顶角 A 的平分线 AD 与已知直线 XY 平行，求作 $\triangle ABC$。



解　设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。在 BA 的延长线上取点 E，使 $AE=AC$，则 $BE=l$。又 $CE\parallel AD$，所以 $CE\parallel XY$，因此可作图如下。

［作图］　作 $BC=a$，且位置已知。过 C 作 $CE\parallel XY$，以 B 为圆心、l 为半径作圆，与 CE 相交于 E。设 CE 的垂直平分线与 BE 相交于 A，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

2374.　已知顶角 A 为 α，另两边 AB、AC 的和为 l，过 B 向对边 AC 所作的垂线足为 D，BD 与 DC 的和为 m，求作 $\triangle ABC$。

解　［分析］　设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出，在 CA 上取 DD'、AA' 分别等于 BD、BA，则

$$\angle BD'D=\frac{1}{2}\angle R,$$

$$\angle BA'A=\frac{1}{2}\alpha.$$

因此 CD'、CA' 一定。故可作图如下。

［作图］　作 $CA'=l$，在 CA' 上取 $CD'=m$，过 A' 作直线 $A'B$，使 $\angle CA'B=\frac{1}{2}\alpha$。又过 D' 在它的同侧作 $\angle CD'B=\frac{1}{2}\angle R$，$A'B$ 与 $D'B$ 相交于 B，$A'B$ 的垂直平分线与 $A'C$ 相交于 A，则 $\triangle ABC$ 为所求三角形。

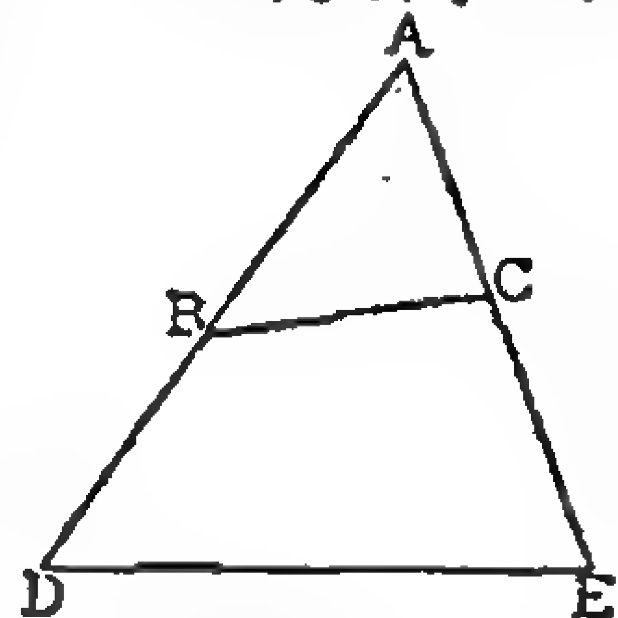
［证明］　根据作图，$AB=AA'$，所以

$$AB+AC=CA'=l.$$

又 $BD\perp CA$，$BD=DD'$，所以 $BD+CD=CD'=m$，且 $\angle A=2\angle A'=\alpha$。

2375.　已知顶角 A 为 α，$AB+BC=l$，$AC+BC=m$，求作 $\triangle ABC$。

解　假定此题已解出，$\triangle ABC$ 为所求三角形。在 AB、AC 的延长线上取 BD、CE 都等于 BC，则



$$AD=AB+BC=l,$$

$$AE=AC+BC=m.$$

因此，先作 $\triangle ADE$，使 $\angle A=\alpha$，$AD=l$，$AE=m$。再在 AD、AE 上分别取点 B、C，使 $DB=BC=CE$，则 $\triangle ABC$ 即为所求三角形。因此，此题可归结为问题 **1989**。

2376.　已知顶角 A 为 α，另两边 AB、AC 之和为 l，底边 BC 和 AB 之和等于 m，求作 $\triangle ABC$。

解 [分析] 假定符合条件的$\triangle ABC$已作出。延长CA,并取$AA'=AB$,则

$$CA'=AB+AC=l,$$

且 $\angle CA'B=\frac{1}{2}\alpha$,

因此可作图如下。

[作图] 作线段$CA'=l$,再作射线$A'X$,使

$$\angle CA'X=\frac{1}{2}\alpha.$$

在$A'X$上求点B,使过B且与$A'C$构成角α的直线BA,与$A'C$相交于A,使$BA+BC=m$(参照问题**2116**)。这时$\triangle ABC$即为所求三角形。

2377. 已知顶角$A=\alpha$,两边BC、AB之差为l,$\angle B$的对边AC上有一点D,且BD、CD之和$=m$,求作三角形ABC,其中$BC>AB$。

解 假定已求得适合条件的$\triangle ABC$,在CD的延长线上取DE等于BD,则

$$CE=DC+DB=m,$$

$$\angle E=\frac{1}{2}\angle B. \quad ①$$

再在BA的延长线上取BF等于BC,则

$$AF=BC-AB=l.$$

过点F作AC的平行线LG,则

$$\angle GFB=\angle CAB=\alpha.$$

所以AF的长度及$\angle AFG$一定,直线LG是定直线。 ②

根据①、②,可作图如下。

[作图] 作$\angle CEX$,使$CE=m$,

$$\angle E=\frac{1}{2}\angle B,$$

可由②作直线LG,根据问题**2104**,在EX线上求点B,作与LG交角为α的线段BF,使$BF=BC$。设BF与CE的交点为A,则$\triangle ABC$即为所求作的三角形。

(6) 已知两条边(或两底角)之差

2378. 求作边$AB=l$,两边之差$AC-BC=m$,$\angle A=\alpha$的三角形ABC。

解 取$AB=l$,作直线AX使$\angle BAX=\alpha$。在直线AX上求点D,使$AD=m$。再作BD的垂直平分线,设与AX的交点为C,则$\triangle ABC$即为所求的三角形。因为C是BD垂直平分线上的点,

$$\therefore\ CD=CB,$$

$$AC-BC=AC-CD=AD=m,$$

并且$AB=l$,$\angle A=\alpha$。

2379. 求作底边$BC=a$,两底角B、C之差为θ,另两边AB、AC之差为b的三角形ABC,其中$AB>AC$。

解 [分析] 设符合条件的$\triangle ABC$已作出,在AB上作AD等于AC,连结CD,则

$$BD=AB-AD=AB-AC=b,$$

$$\therefore\ \angle BCD=\frac{1}{2}(\angle ACB-\angle ABC)$$

$$=\frac{1}{2}\theta$$

(问题**55**),且$BC=a$。因此可作图如下。

[作图] 任作一线段BC,使$BC=a$,再过点C作直线CD,使$\angle DCB=\frac{1}{2}\theta$。又以$B$为圆心、$b$为半径作圆,与直线$CD$交于点$D$。设$DC$的垂直平分线与$BD$的延长线的交点为$A$,则$\triangle ABC$就是所求的三角形。

2380. 已知$\angle A=\alpha$,$\angle A$的平分线$AD=l$,$AB-AC=m$,求作三角形ABC。

解 [分析] 若符合条件的$\triangle ABC$已作出,设角A的外角平分线与外接圆的交点为E。从点E作CA的垂线EF,则

$$FA=\frac{1}{2}(AB-AC)$$

$$=\frac{1}{2}m,$$

且E、A、C、B四点共圆,所以

$$\angle EBC=\angle FAE.$$

故可作图如下。

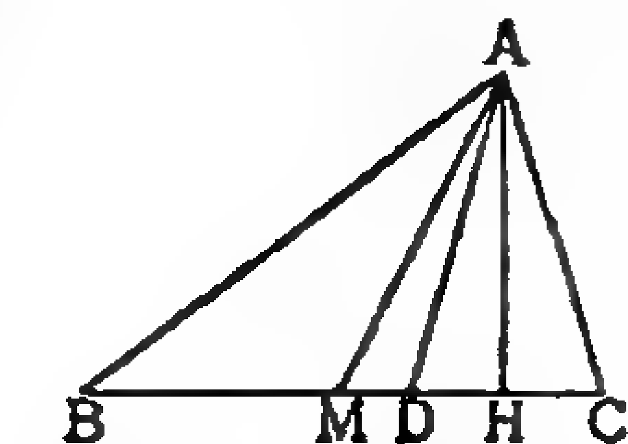
［作图］ 作 $\angle XAY=\alpha$，作 $\angle A$ 的平分线 AD，取 $AD=l$，在 YA 的延长线上取

$$AF=\frac{1}{2}m.$$

设过点 F 作 AF 的垂线与 $\angle FAX$ 的平分线的交点为 E，以 DE 为弦，作含角 $\angle EAF$ 的弓形弧与 AX 相交于 B。延长 BD 与 AY 相交于 C，则 $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形。

2381. 求作 $\triangle ABC$，使高 $AH=h$，中线 $AM=m$，两底角之差为 α。

解 假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出，令其高 $AH=h$，中线 $AM=m$，作 $\angle A$ 的平分线 AD，则

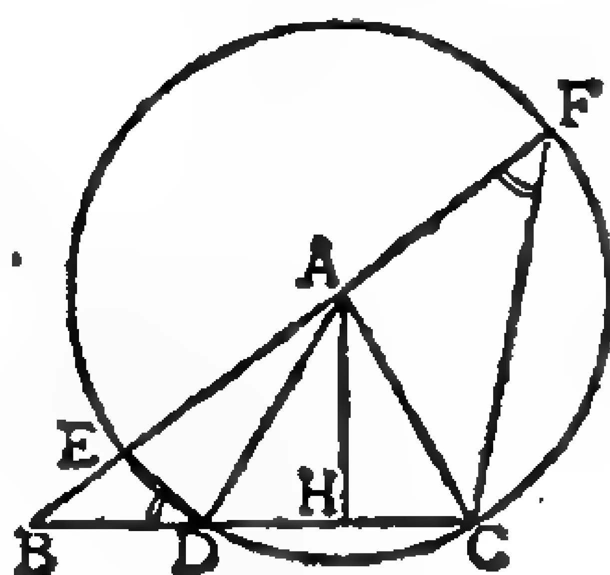


$$\angle DAH=\frac{1}{2}\alpha$$

（问题 56）。因为已知边 AH 及 $\angle DAH$、$\angle DHA$，所以可作出直角三角形 ADH。因此本题可归结为已知高 AH、中线 AM、$\angle A$ 的平分线 AD，求作 $\triangle ABC$（问题 2336）。

2382. 已知顶角 $A=\alpha$，两边 AB、AC 之差为 l，过顶点 A 作 BC 的垂线的垂足为 H，BH、CH 之差为 m，求作 $\triangle ABC$，其中 $AB>AC$。

解 假定 $\triangle ABC$ 已作出．若以 A 为圆心、AC 为半径作圆与 BC、AB 分别交于 D、E，EA 的延长线与圆的交点为 F，则



$$BE=AB-AE=AB-AC=l, \quad ①$$

且 $BD=BH-HD=BH-CH=m$．　②

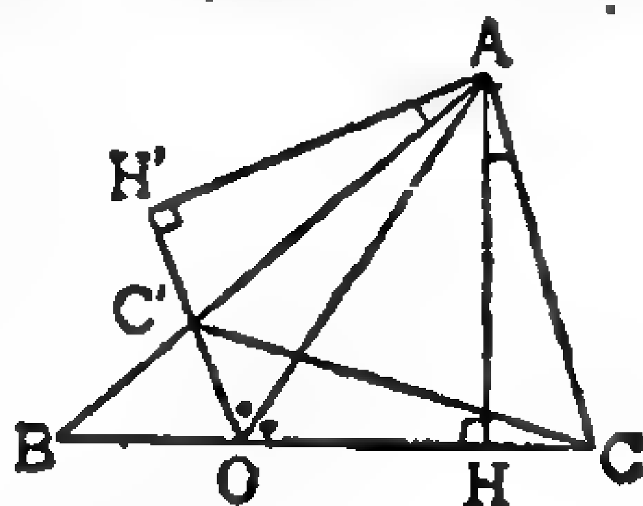
又因 E、D、C、F 四点共圆，所以

$$\angle EDB=\angle F=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\alpha. \quad ③$$

在 $\triangle BDE$ 中，根据 ①、②、③ 可知 BE、BD 和 $\angle EDB$ 的大小。由题设 $AB>AC$，因此 $\angle B$ 是锐角，故可决定 $\triangle BDE$。在 BE 的延长线上求出点 A，使 $AE=AD$。在 BD 的延长线上求点 C，使 $AD=AC$，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2383. 已知顶角 $A=\alpha$，高 $AH=h$，两边之差 $AB-BC=m$，求作 $\triangle ABC$。

解 设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形．在 AB 上取 AC' 等于 AC。如图，过点 A 引直线 AH'，取 $AH'=AH$，$\angle HAH'=\angle CAC'$，则 $\triangle AH'C'\cong\triangle AHC$。



$$\therefore\ \angle H'=\angle AHC=\angle R.$$

设 $H'C'$ 与 BC 的交点为 O，则

$$\triangle AH'O\cong\triangle AHO,$$

$$\therefore\ \angle H'OA=\angle HOA.$$

但

$$AH'=AH=h,$$

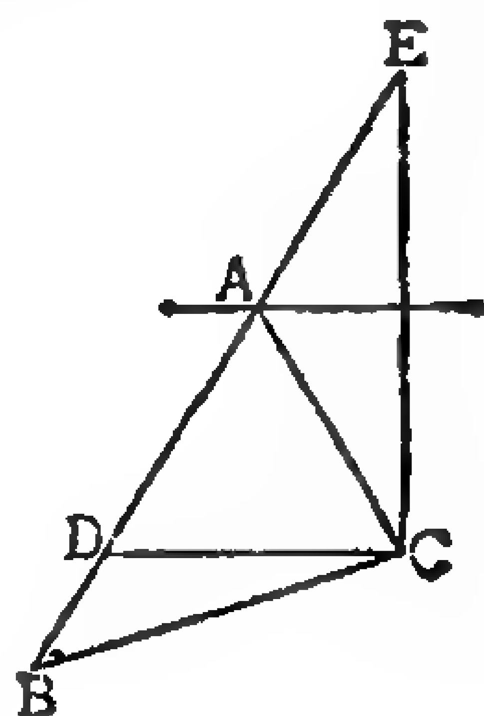
$$\angle HAH'=\angle CAC'=\alpha,$$

$$\angle H=\angle H'=\angle R,$$

所以四边形 $AHOH'$ 可确定。由于 OA 为 $\angle HOH'$ 的平分线，所以本题可归结为：过已知的 $\angle HOH'$ 的平分线 OA 上的定点 A 作直线，与 OH' 交于 C'，与 HO 的延长线交于 B。再作 BC' 为定长 m。这种作图法可根据问题 2092 直接解出。

2384. 已知边 $BC=a$，两边 AB、AC 之和为 m，两底角 C 与 B 之差为 θ，求作 $\triangle ABC$．其中 $\angle C>\angle B$。

解 ［分析］ 假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出．设在 BA 及其延长线上分别求点 D、E，使 $AD=AE=AC$，则 $\angle ECD=\angle R$，



且 $\angle DCB=\frac{1}{2}\theta$

（问题 55）。因此 $\angle ECB=\angle R+\frac{\theta}{2}$。又 $BE=m$，$BC=a$，故可作图如下。

［作图］ 作 $\triangle BEC$，使 $BE=m$，$BC=a$，$\angle BCE=\angle R+\frac{\theta}{2}$．作 CE 的垂直平分线，设与 EB 的交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2385. 已知边 $AB=l$，两个底角 B、C 之差为 θ，$\angle A$ 的平分线 $AD=m$，求作 $\triangle ABC$．其中 $\angle C>\angle B$。

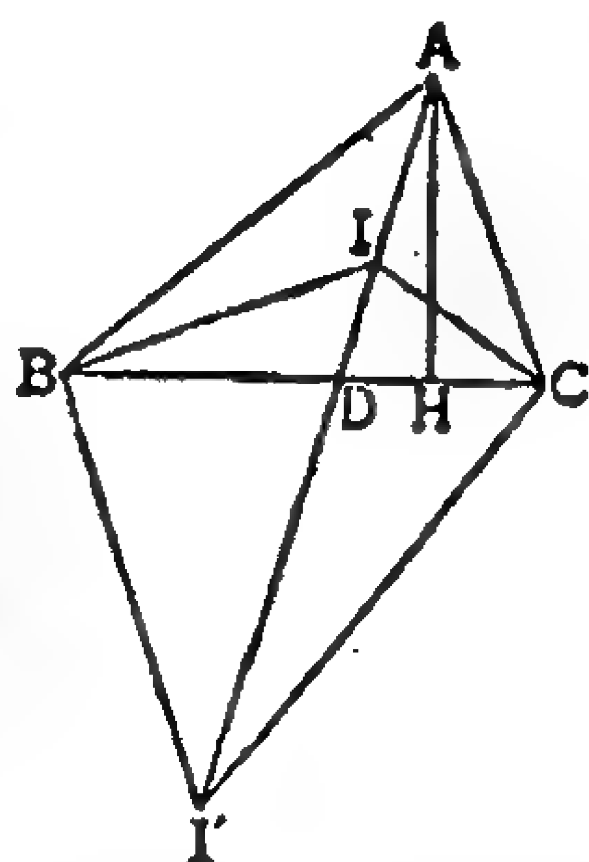
解 ［分析］ 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。在 AB 上取一点 E，使 $AE=AC$，连结 CE，则

$$\angle BCE=\frac{1}{2}\theta\ (\text{问题}\ \mathbf{55}).$$

又 AD 是等腰三角形 ACE 顶角 A 的平分线，所以垂直于底边 CE，从而

$$\angle ADB=\angle R+\angle DCE=\angle R+\frac{1}{2}\theta,$$

因此可作图如下。



［作图］ 取 $AB=l$，以 AB 为弦，作含 $\left(\angle R+\frac{1}{2}\theta\right)$ 的弓形弧。设以 A 为圆心、m 为半径的圆与弧的交点为 D。引直线 AC，使 $\angle CAD=\angle BAD$，AC 与 BD 的延长线交于点 C，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2386. 已知两底角 B、C 之差为 θ，$\angle A$ 的平分线 $AD=l$，两边 AB、AC 之和与底边 BC 之比为 $m:n$，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 设 $\triangle ABC$ 已求出，在 $\angle A$ 的平分线 AD 上求内心 I，旁心 I'，根据问题 **1067** 有

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AB+AC}{BC}=\frac{m}{n}=\frac{AI'}{DI'}.$$

由于 AD 为定长，当它的位置确定时，则 I、I' 的位置也就定了。又 $\angle IBI'=\angle R=\angle ICI'$，所以 I、B、I'、C 四点共圆。由点 A 向 BC 作垂线 AH，则根据问题 **56** 可知 $\angle DAH=\frac{1}{2}\theta$。因此可作图如下。

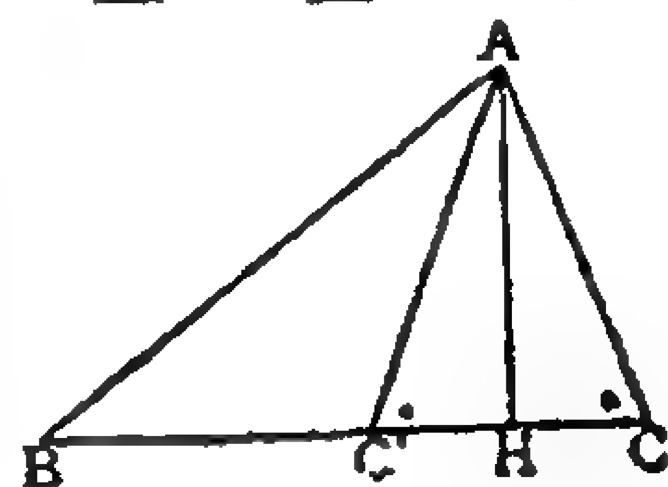
［作图］ 作 $\triangle DAH$，使 $AD=l$，$\angle DAH=\frac{1}{2}\theta$，$\angle AHD=\angle R$。再在 AD 及其延长线上求点 I、I'，设 $AI:ID=AI':DI'=m:n$，以 II' 为直径所作的圆，与 DH 的交点为 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2387. 已知三角形的两底角 B、C 之差为 θ，高 $AH=h$，另两边之和（或差、积、比），求作 $\triangle ABC$。

解 假定已知两边的和、差，设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形。作 AC 关于 AH 的对称线段 AC'，则

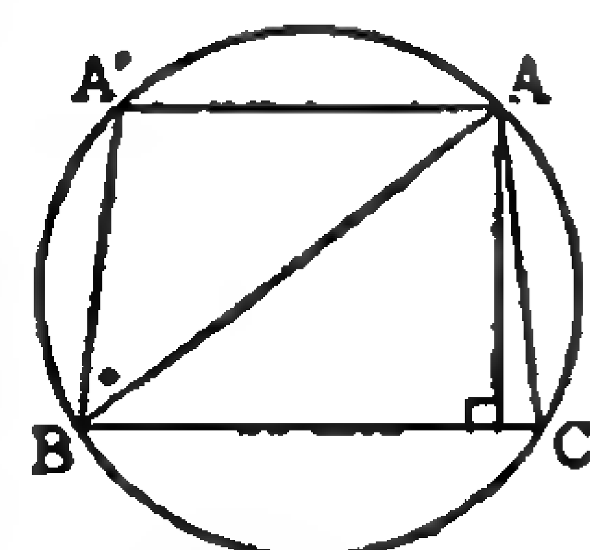
$$\angle C-\angle B=\angle AC'C-\angle B=\angle BAC',$$

$$\therefore\quad \angle BAC'=\theta.$$



(1)

因此本题可归结为已知 AB 与 AC' 之和，或差，$\angle BAC'$ 的大小和高 AH 求作 $\triangle ABC'$，可用问题 **2369**、**2383** 同样的方法去解。



(2)

若已知两边之积 $AB\cdot AC$ 时，则根据问题 **1318**，$\triangle ABC$ 的外接圆半径即为已知。过 A 作 $AA'\parallel BC$，由于 $\angle ABA'=\theta$，所以 AA' 可确定。由 $AH=h$，所以 $\triangle ABC$ 可确定。

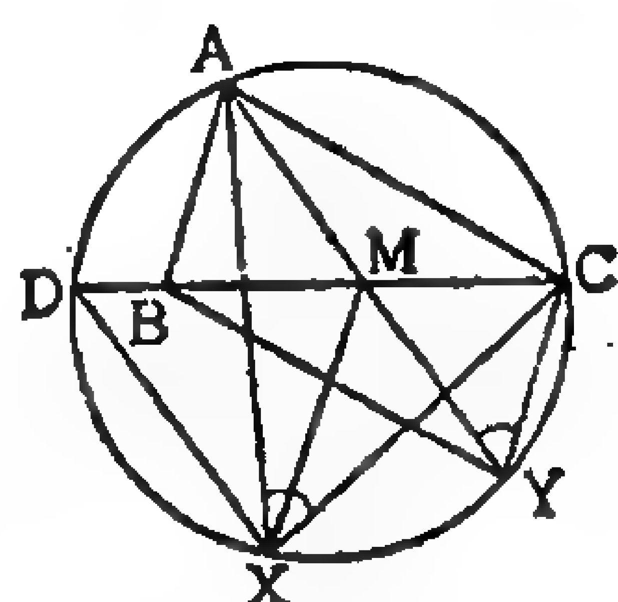
若已知两边的比 $AB:AC=m:n$ 时，由图(1)，在 $\triangle ABC'$ 中，$AB:AC'=m:n$，因为 $\triangle ABC'$ 的形状一定，根据 $AH=h$，可确定 $\triangle ABC'$，从而就可以确定 $\triangle ABC$。

2388. 已知底边 $BC=a$，底角 B、C 之差为 θ，另两边 AB、AC 之积为 k^2。求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。设底边的中点为 M，在 AM 的延长线上取点 Y，使 $MY=AM$，则四边形 $ABYC$ 为平行四边形。作 $\triangle ACY$ 的外接圆与 CB 的延长线的交点为 D，作 DX 平行 AY，与圆交于 X，连结 AX、MX，则 $DX\parallel AY$，有 $\overset{\frown}{ADX}=\overset{\frown}{DXY}$。

$$\therefore\quad \angle ACX=\angle DCY=\angle ABC,$$

$$\angle BCX=\angle ABC-\angle ACB=\theta. \qquad ①$$



又 $\angle AXC=\angle AYC$，

且 $\angle ACX=\angle MCY$，

故 $\triangle ACX\backsim\triangle MCY$。

$\therefore\quad MC:CY=AC:CX$，

即

$$MC\cdot CX=AC\cdot CY=AC\cdot AB=k^2. \qquad ②$$

而 $AM=MY$，$DX\parallel AY$，

$$\therefore\quad \angle AMX=\angle DMY=\angle AMC. \qquad ③$$

又 $DM=MX$，

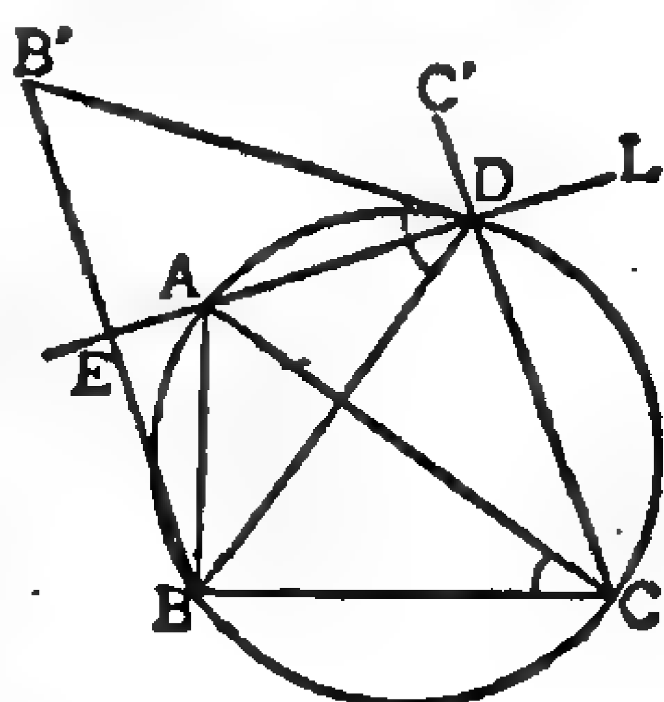
故 $DM\cdot MC=MX\cdot MC=AM^2$， ④

$$\therefore\quad \triangle AMX\backsim\triangle CMA.$$

因此可作图如下。

［作图］ 取线段 BC 等于 a，作其中点 M。过 C 引直线 CX，使 $\angle MCX=\theta$，并取点 X，使 $CM\cdot CX=k^2$。作优角 CMX 的平分线 MA，使③式成立，而取 MA 的长度使④式成立，$MA^2=MX\cdot MC$，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2389. 已知三角形的底边 BC 的长和位置，两底角之差为 θ，顶点在已知直线 L 上，求作 $\triangle ABC$。



解 设所求 $\triangle ABC$ 已作出，作 $\triangle ABC$ 的外接圆，设与已知直线 L 的另一个交点为 D。从 B 向 L 作垂线 BE，在其延长线上取 $EB'=EB$，连结 $B'D$，则

$$\angle B'DE=\angle EDB=\angle ACB.$$

若在 CD 的延长线上取一点 C'，则 $\angle ABC=\angle EDC'$，因此

$$\angle ABC-\angle ACB=\angle EDC'-\angle B'DE$$
$$=\angle B'DC'=\theta,$$

其补角

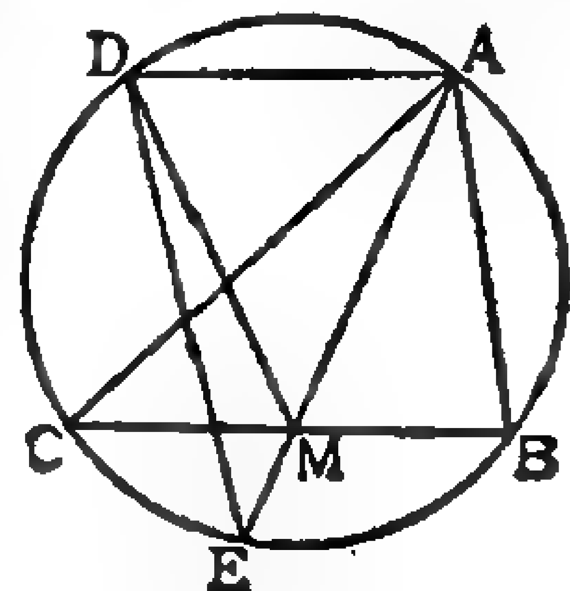
$$\angle B'DC=2R-\angle B'DC'=2\angle R-\theta.$$

因此作图如下。

［作图］ 关于 L 作 B 的对称点 B'，以 $B'C$ 为弦，作含 $(2\angle R-\theta)$ 的弓形弧，设与 L 的交点为 D。令 $\triangle BCD$ 的外接圆再与 L 相交于 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2390. 已知 $BC=a$，$\angle B-\angle C=\alpha$，中线 $AM=m$，求作 $\triangle ABC$。

解 假定此题已解出，设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形。作 $\triangle ABC$ 的外接圆，与 AM 的延长线相交于 E，作平行于 BC 的弦 AD，则因



$$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB},$$

所以，$\angle E=\angle B-\angle C=\alpha$。　①

又　$DM=AM=m$，　②

$$AM\cdot ME=BM\cdot MC=MB^2$$
$$=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$\therefore\quad ME=\frac{MB^2}{AM}=\frac{a^2}{4m}.\qquad ③$$

由①、②和③，$\triangle DME$ 是已知的三角形。由此，首先作 $\triangle DME$，延长 EM 到 A，使 $MA=m$，连结 DA，过 M 引平行于 DA 的直线 CMB，使 $MB=MC=\frac{a}{2}$，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2391. 已知两边 AB、AC 之积为 k^2，两底角 B、C 之差为 α，中线 $AD=m$，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 假定问题已解出，设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形。作它的外接圆 O，设 OD 的延长线与圆交于点 M。由于 M 是弧 BC 的中点，所以 AM 平分 $\angle A$，AM 与 BC 相交于 F，根据问题 **1074** 得

$$AB\cdot AC=AF\cdot AM.\qquad ①$$

作 $\triangle DFM$ 的外接圆，与 AD 的延长线交于 P，所以

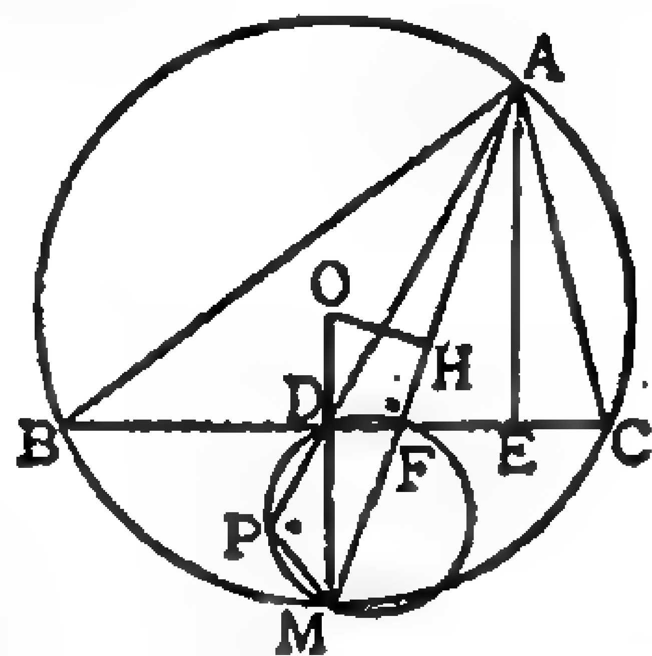
$$AD\cdot AP=AF\cdot AM.\qquad ②$$

由①、②，得

$$AD\cdot AP=AB\cdot AC.\qquad ③$$

因　$AB\cdot AC=k^2$，$AD=m$，

所以 AP 为定长，P 为定点。　④



又 D、P、M、F 四点共圆。设过点 A 作 BC 的垂线，其垂足为 E，则

$$\angle P=\angle AFD$$
$$=\angle AEF$$
$$+\angle EAF.\qquad ⑤$$

因 AF 是 $\angle A$ 的平分线；$AE\perp BC$，由问题 **56** 得

$$\angle EAF=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)=\frac{1}{2}\alpha.$$

由⑤得，　$\angle DPM=\angle R+\frac{1}{2}\alpha$。　⑥

又 $DM\parallel AE$，所以

$$\angle DMF=\angle EAF=\frac{1}{2}\alpha.$$

因此可作图如下。

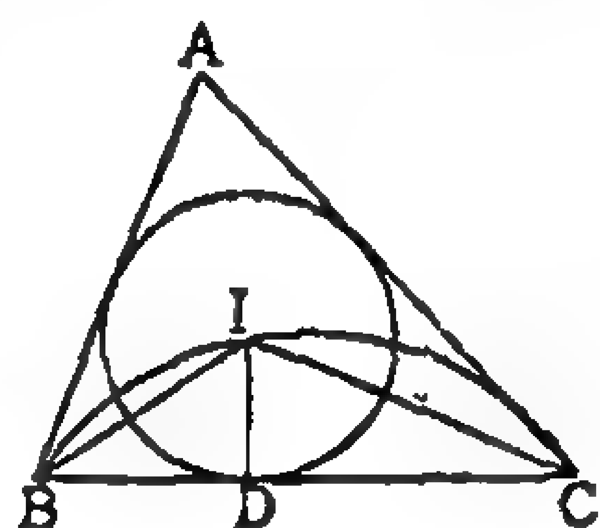
［作图］ 取 $AD=m$，在 AD 上作含角 $\frac{1}{2}\alpha$ 的弓形弧，延长 AD，截取 AP 使 $AD\cdot AP=k^2$。过点 P 作直线 PM，使

$$\angle DPM=\angle R+\frac{1}{2}\alpha;$$

与弓形弧交于点 M。连结 AM、DM，过点 D 向 DM 引垂线 BC，再作 AM 的垂直平分线 HO，与 MD 的延长线交于点 O。以 O 为圆心、OA 为半径作圆，设过点 D 所作 DM 的垂线与圆交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求。如果取直线 PM 与弓形弧相交的第二个点，则还有一解。

(7) 已知内切圆(或旁切圆)的大小

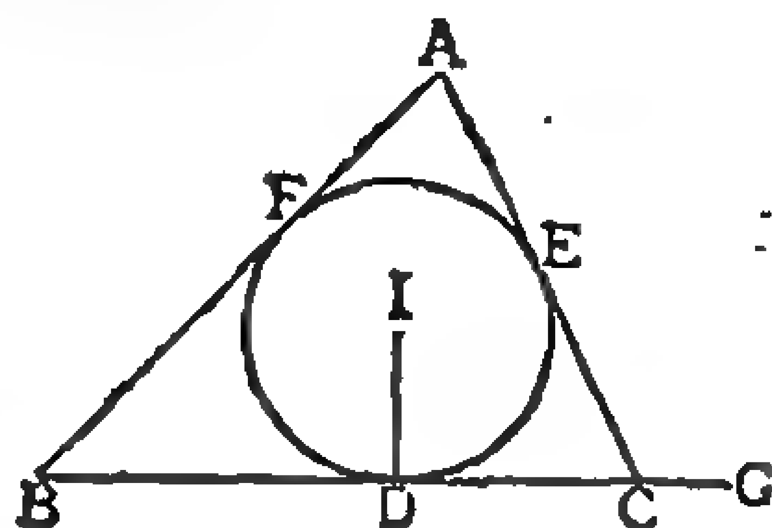
2392. 已知顶角 $A=\alpha$，由内切圆与边 BC 的切点 D 所分的两部分 BD、DC 的长，求作 $\triangle ABC$。



解 [作图] 在任意直线上取点 D，在它的两侧分别取等于两线段的 BD、DC。以 BC 为弦，作含 $\left(\angle R+\frac{1}{2}\alpha\right)$ 的弓形弧，过 D 作 BC 的垂线与弧的交点为 I，以 I 为圆心，ID 为半径作圆，过 B、C 分别引切线 (BC 除外)，设此两切线交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

[证明] 由作图知，BD、DC 等于所给的两条线段，因弧 BIC 是顶角为 α 的三角形内心的轨迹，所以 $\angle BAC=\alpha$ (问题 **1793**)。

2393. 已知 $BC=a$，$AB-AC=m$，内切圆半径为 r，求作 $\triangle ABC$。



解 [分析] 设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形，D、E、F 为内切圆与边 BC、CA、AB 的切点，由问题 **444**，

$$BD=\frac{1}{2}(AB+BC-AC)=\frac{1}{2}(m+a).$$

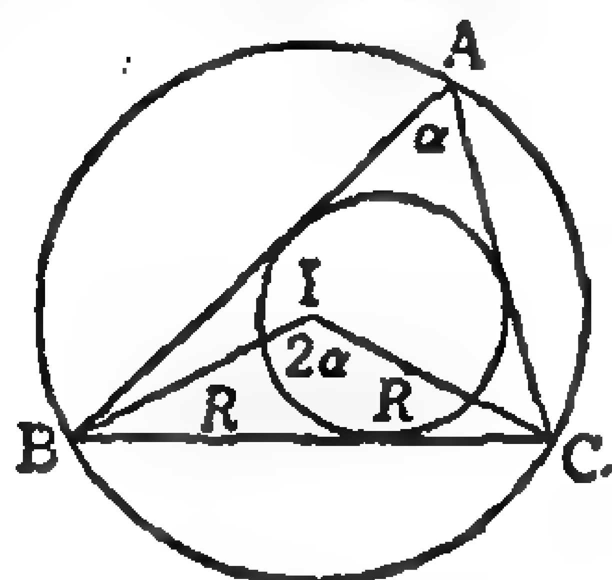
因此可作图如下。

[作图] 在任意直线上顺次取三点 B、C、G，使 $BC=a$，$CG=m$。在过 BG 的中点 D 且垂直于 BG 的直线上取点 I，使 $DI=r$。以 I 为圆心、DI 为半径作圆，过 B 与 C 分别引圆 I 的切线，设其交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

[证明] 略。

[讨论] 如果 $m>a$，则无解。

2394. 已知顶角 $A=\alpha$，内切圆半径 r，外接圆半径 R，求作 $\triangle ABC$。

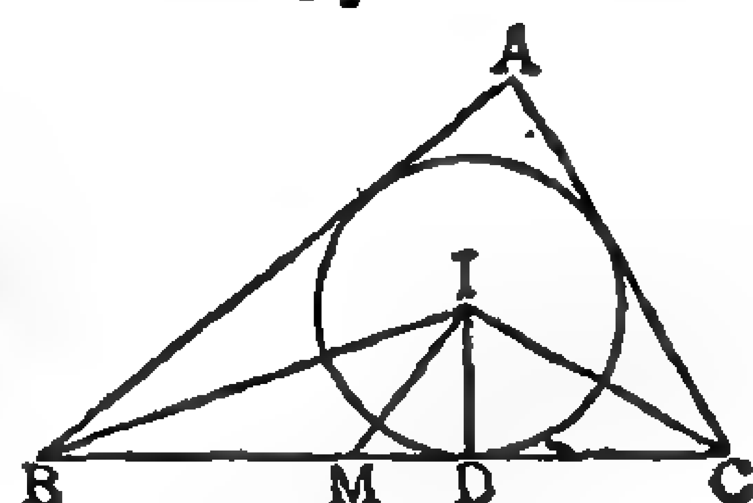


解 因 $\angle A$ 的大小和外接圆的大小都一定，所以 BC 为定长，因此本题可归结为：已知底边 BC，顶角 A，内切圆的半径 r，求作 $\triangle ABC$ (参照问题 **2305**)。

2395. 已知两边 AB、AC 的差为 m，其夹角 $A=\alpha$，内切圆的半径 r，求作 $\triangle ABC$。

解 假定所求 $\triangle ABC$ 已作出。设 BC 的中点为 M，内切圆与 BC 的切点为 D，则

$$AB-AC=BD-DC.$$



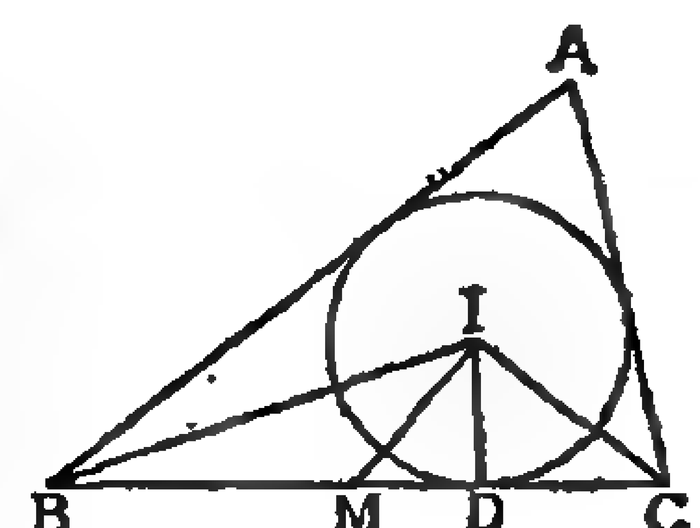
因此 $\quad MD=\frac{1}{2}m.$

又 $ID=r$，所以直角三角形 IMD 可确定。又

$$\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\alpha \text{ (问题 432)},$$

已知 $\triangle IBC$ 的顶角 BIC，中线 IM 和高 ID，所以 $\triangle BIC$ 可作出(问题 **2331**)，因此，首先作出 $\triangle IBC$，以 I 为圆心，ID 为半径作圆，过 B、C 分别向圆引切线 BA、CA，设其交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2396. 已知两边 AB、AC 的差为 m，两底角 B、C 的差为 θ，内切圆半径 r，求作 $\triangle ABC$。其中 $AB>AC$。



解 若符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出，设 BC 的中点为 M，内切圆的圆心为 I，内切圆与边 BC 的切点为 D，则

$$MD=\frac{1}{2}(BD-DC)=\frac{1}{2}(AB-AC)$$
$$=\frac{1}{2}m,$$

$$ID=r,\ \angle IDM=\angle R.$$

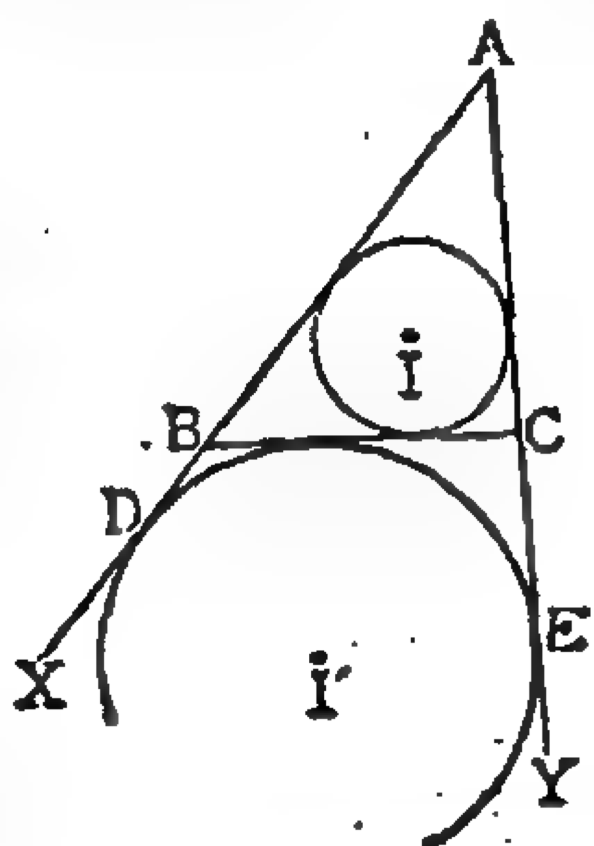
所以 $\triangle IDM$ 可确定，IM 的长度也确定。在 $\triangle IBC$ 中，

$$\angle ICB-\angle IBC=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)=\frac{1}{2}\theta,$$

即已知两底角的差，高 ID，中线 IM，所以可根据问题 **2381** 作出此三角形。先作 $\triangle IBC$，以 I 为圆心、ID 为半径作圆，过 B、C 分别向圆引切线，设其交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2397. 已知顶角 $A=\alpha$，内切圆半径为 r，AB、BC、CA 三边的和为 $2s$，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 假定 $\triangle ABC$ 已作出．因为已知 $\angle A$ 的大小和内切圆的半径 r，所以若 $\angle A$ 的位置确定，则内心 I 的位置也确定。在 $\angle A$ 内作旁切圆，设边 AB、AC 与圆的切点分别为 D、E，则 $AD=AE=s$，所以 D、E 也成为定点。因此可作图如下。



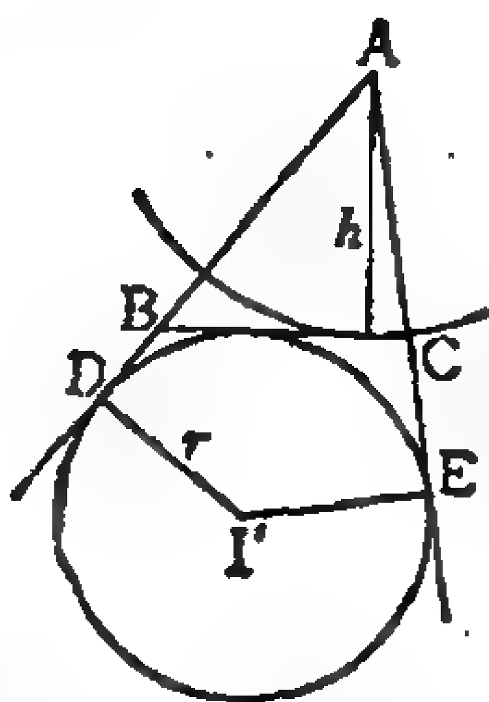
［作图］ 作 $\angle XAY=\alpha$，在 AX、AY 上取 AD、AE 等于 s。过 D、E 作与这两边相切的圆 I'，然后作与 AD、AE 相切且半径为 r 的圆 I。作这两圆的内公切线，设 AD、AE 与该内公切线的交点分别为 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2398. 已知 $\triangle ABC$ 三边之和为 $2s$，$\angle A$ 的旁切圆的半径 r，BC 边上的高 h，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 设 AB 的延长线切于 $\angle A$ 内的旁切圆 I' 的切点为 D，则

$$AD=\frac{1}{2}\times(AB+BC+CA)=s.$$

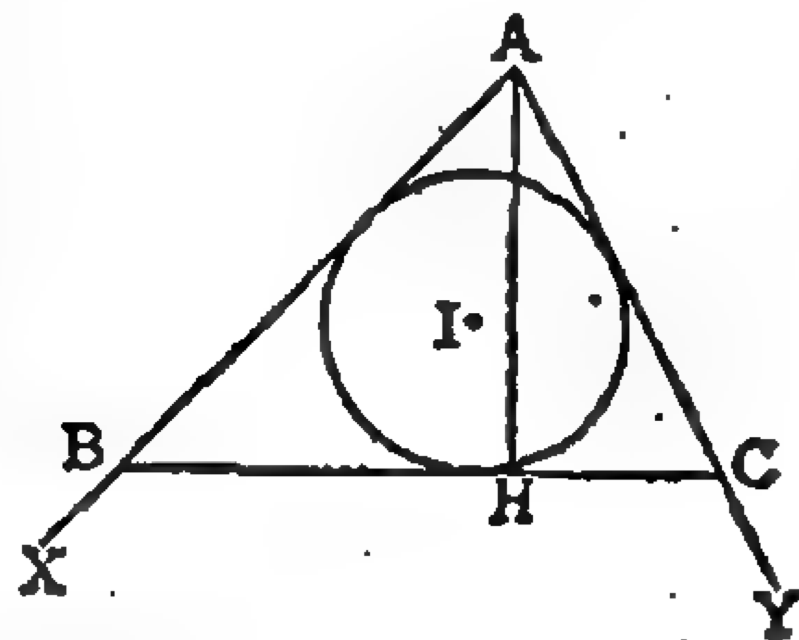
由于已知 AD 和 DI' 的长度，所以可作图如下。



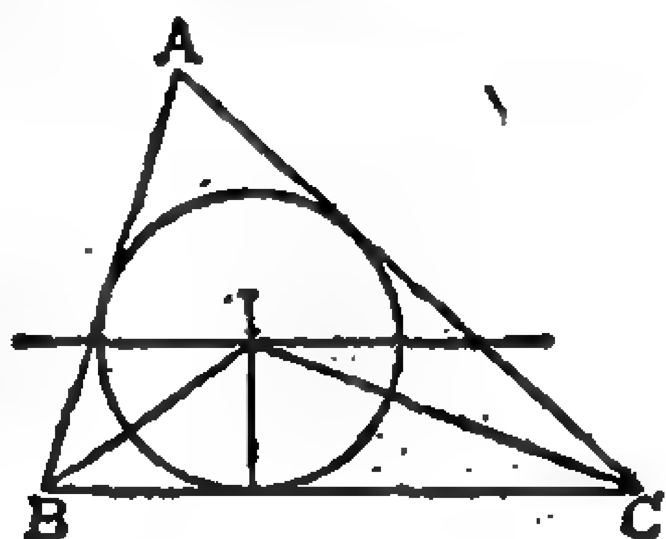
［作图］ 作线段 $AD=s$，过 D 作 AD 的垂线 DI'，取 $DI'=r$。以 I' 为圆心，r 为半径作圆，过 A 引此圆的切线 AE。以 A 为圆心，h 为半径作圆．作此两圆的内公切线，与 AD、AE 的交点分别为 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2399. 已知 $\angle A=\alpha$，高 $AH=h$，内切圆半径 r，求作 $\triangle ABC$。

解 作 $\angle XAY=\alpha$．再作与 AX、AY 相切且半径为 r 的圆 I，又以 A 为圆心、h 为半径作圆．引这两圆的外公切线，设它与 AX、AY 的交点分别为 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求。



2400. 已知底边 $BC=a$，底角 $B=\theta$，内切圆的半径 r，求作 $\triangle ABC$。

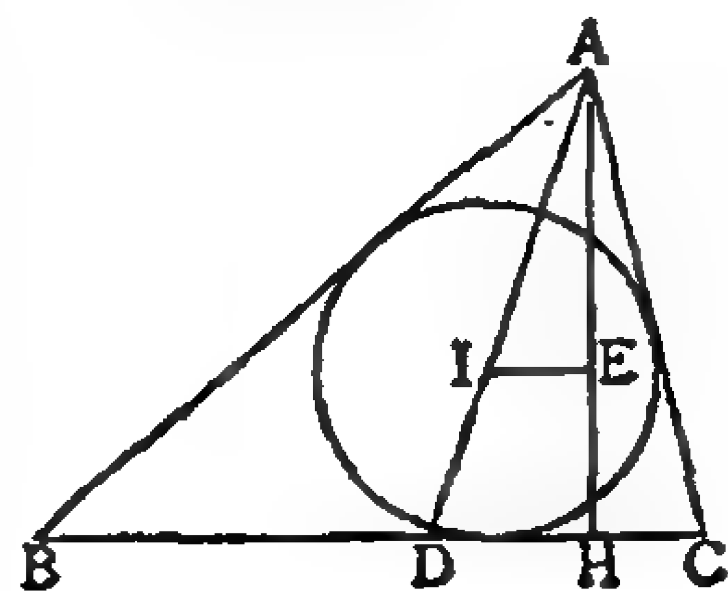


解 ［作图］ 取 $BC=a$，作与 BC 的距离为 r 的 BC 的平行线．再作直线 BI 与平行线的交点为 I，使 $\angle IBC=\frac{1}{2}\theta$．以 I 为圆心，r 为半径作圆。过 B、C 分别引切线 BA，CA，设其交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

［证明］ 由作图知道，圆 I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，它的半径为 r．又因 $\angle IBC=\frac{\theta}{2}$，所以 $\angle ABC=\theta$，且 $BC=a$。

2401. 已知高 $AH=h$，$\angle A$ 的平分线 $AD=m$，内切圆的半径 r，求作 $\triangle ABC$。

解 作 $AH=h$、$AD=m$、$\angle AHD=\angle R$ 的直角三角形 AHD．在 HA 上取 $HE=r$，过 E 引 DH 的平行线 EI，设 AD 与 EI 的交点为 I，以 I 为圆心，r 为半径作圆．过 A 引切线 AB、AC，与 DH 的延长线分别交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求。



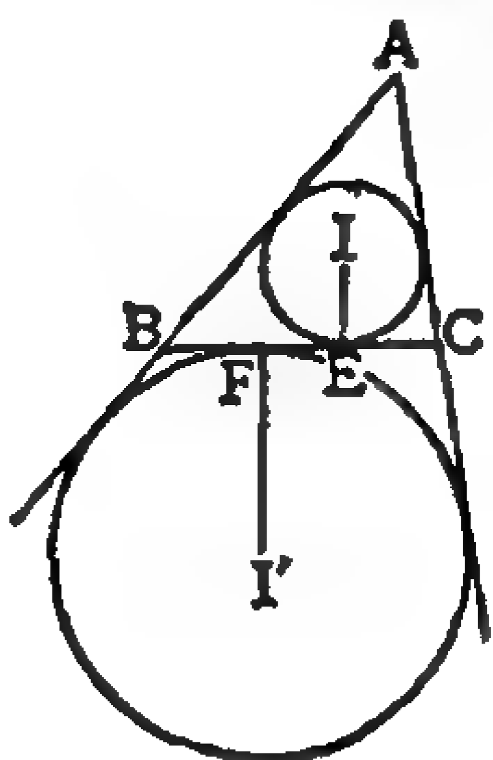
2402. 已知内切圆的半径 r，$\angle A$ 内的旁切圆的半径 r'，$AB\sim AC=m$，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出．设内切圆、旁切圆与 BC 分别相切于 E、F，则

$$EF=AB-AC=m\ (\text{问题 }\mathbf{447}).$$

因此可作图如下.

［作图］ 取 $EF=m$, 过 E、F 在 EF 的两侧作 EF 的垂线 EI、FI', 取 $IE=r$, $I'F=r'$. 分别以 I、I' 为圆心, r、r' 为半径作圆, 引两圆的外公切线 AB、AC, 设与 EF 的延长线分别交于 B、C, 则 $\triangle ABC$ 即为所求.



2403. 已知 $BC=a$, $AB+AC=m$, 内切圆的半径 r, 求作 $\triangle ABC$.

解 ［分析］ 设 $\triangle ABC$ 为符合条件的三角形, 内切圆 I 与 AB 的切点为 E, 在 $\angle A$ 内的旁切圆与 AB 的延长线相切于 G, 则

$$AE=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$$

$$=\frac{1}{2}(m-a) \quad ①$$

(问题 **444**). 因此可作图如下.

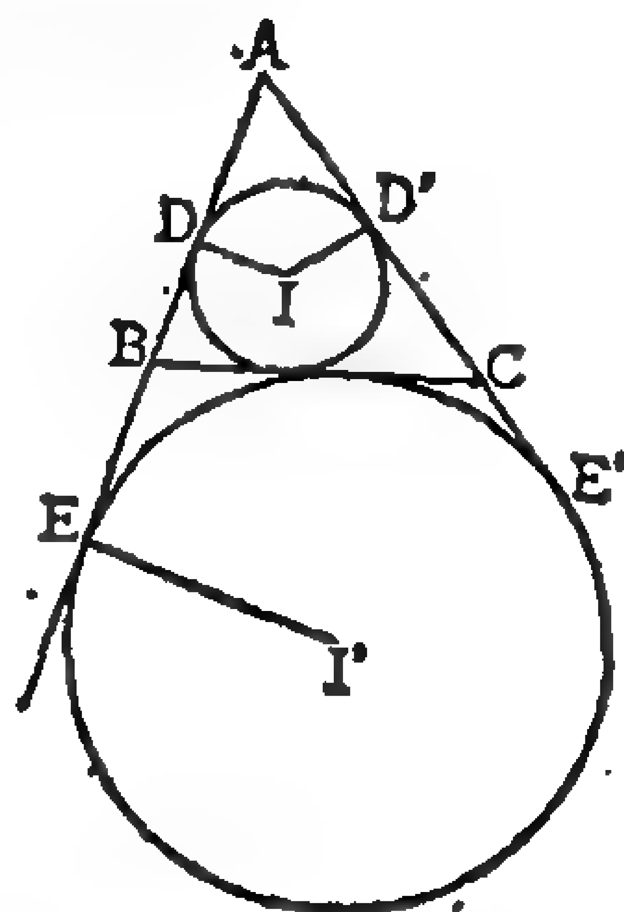
［作图］ 作直角三角形 AEI, 使 $IE=r$, $AE=\frac{1}{2}(m-a)$, $\angle E=\angle R$. 以 I 为圆心, IE 为半径作圆 I. 过 A 引此圆的切线 AF, 在 AE、AF 的延长线上分别取 G、H, 使

$$AG=\frac{1}{2}(m+a)=AH.$$

过 G、H 作相切于 AG、AH 的圆, 引此圆与圆 I 的内公切线, 设它与 AG、AH 的交点分别为 B、C, 则 $\triangle ABC$ 即为所求.

2404. 已知底边 $BC=a$, $AB+AC=m$, 在 $\angle A$ 内的旁切圆的半径 r', 求作 $\triangle ABC$.

解 ［分析］ 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出. 边 AB、AC 与内切圆、旁切圆的切点为 D、E, D'、E'. 则



$$AE=AE'=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

$$=\frac{1}{2}(a+m) \text{ (问题 **446**)},$$

$$DE=D'E'=BC=a \text{ (问题 **447**)}.$$

因此可作图如下.

［作图］ 作半径为 r' 的圆 I'. 过此圆上任意一点 E 引切线, 在切线上取点 A, 使

$$AE=\frac{1}{2}(a+m).$$

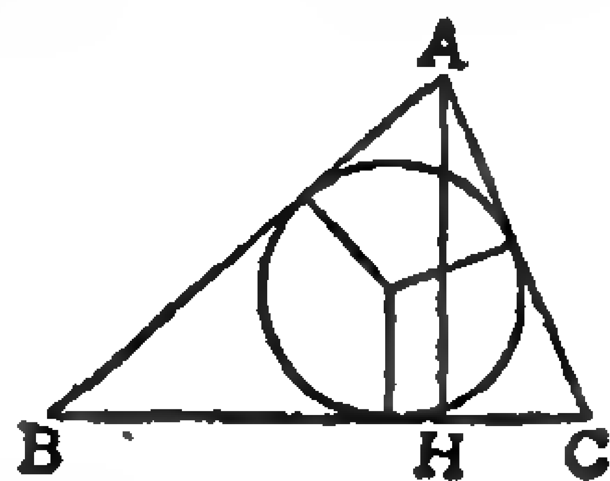
过 A 引圆 I' 的切线 AE', 在 AE、AE' 上取 $DE=D'E'=a$. 过 D、D' 分别作 AE、AE' 的垂线, 它们的交点为 I. 以 I 为圆心、ID 为半径作圆. 引两圆的内公切线, 设与 AE、AE' 的交点分别为 B、C, 则 $\triangle ABC$ 即为所求.

2405. 已知周长为 $2s$, 高 $AH=h$, 内切圆的半径为 r, 求作 $\triangle ABC$.

解 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S, 则 $S=sr$. 过 A 向 BC 作垂线 AH, 由于 $BC=a$, 则

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AH$$

$$=\frac{ah}{2},$$



$$\therefore \quad sr=\frac{ah}{2},$$

即 $$a=\frac{2sr}{h}.$$

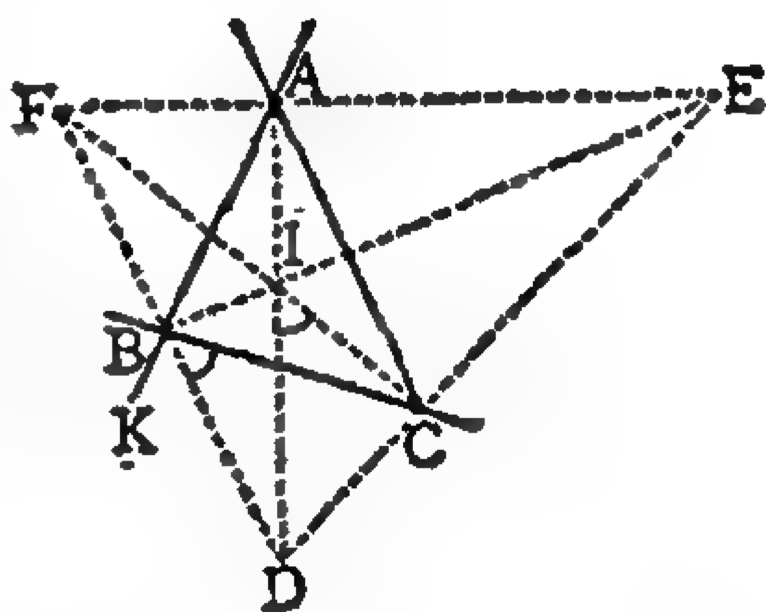
所以 BC 的长度 a 一定, 从而

$$AB+AC=2s-a=2s-\frac{2sr}{h} \text{ (一定)}.$$

因此本题可归结为问题 **2403**.

2406. 已知三个旁切圆的圆心 D、E、F 的位置, 求作 $\triangle ABC$.

解 设 $\triangle DEF$ 的垂足三角形为 $\triangle ABC$, 则 $\triangle ABC$ 就是所求的三角形. 理由是: 设 AD、BE、CF 的交点 ($\triangle DEF$ 的垂心) 为 I, 在 AB 的延长线上任意取一点 K, 则



$$\angle KBD=\angle ABF.$$

根据作图, A、F、B、I 四点共圆. 因此

$$\angle ABF=\angle AIF.$$

又因 $\angle DBC=\angle DIC$ ($\because$ B、D、C、I 四点

共圆)，所以 BD 是 $\angle B$ 的外角平分线．同样，CD 也是 $\angle C$ 的外角平分线，所以 D 是 $\angle A$ 内的旁切圆心．同理，E、F 分别是 $\angle B$、$\angle C$ 内的旁切圆心，所以 $\triangle ABC$ 即为所求．

2407． 已知 AB、AC 两边的和为 l，$\angle B=\theta$，内切圆的半径为 r，求作 $\triangle ABC$．

解 ［分析］ 设满足条件的 $\triangle ABC$ 已作出，内心为 I，过 C 作 AI 的平行线，与 BA 的延长线的交点为 D．则

$$AC=AD,$$

因此 $$BD=AB+AC=l.$$

又 $$\angle DCI=\frac{1}{2}(\angle C+\angle A)$$

$$=\angle R-\frac{1}{2}\angle B$$

$$=\angle R-\frac{1}{2}\theta,$$

因此可作图如下．

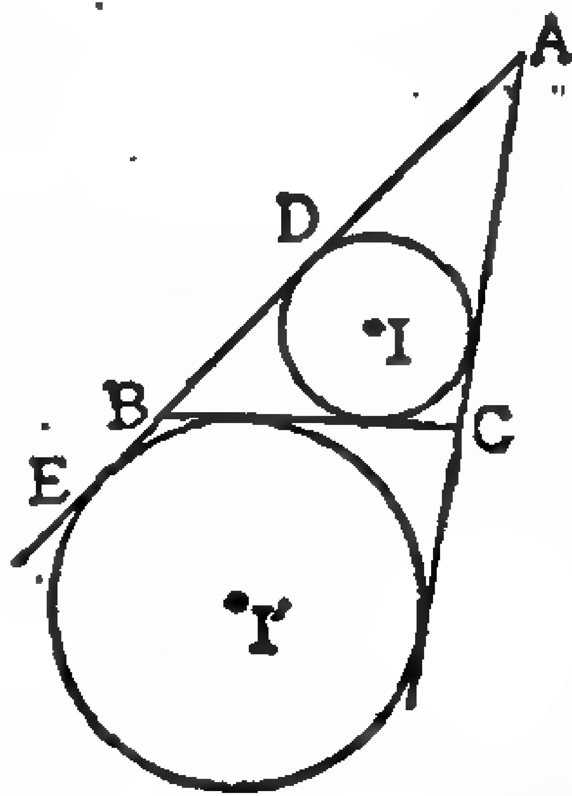
［作图］ 作两直线 BD、BC，使 $\angle DBC=\theta$．设 $BD=l$，作与 BD、BC 相切、半径为 r 的圆 I．设以 DI 为弦，含 $\left(\angle R-\frac{1}{2}\theta\right)$ 的弓形弧与 BC 的交点为 C，过 C 引圆 I 的另一切线与 BD 的交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求．

2408． 已知底边 $BC=a$，内切圆半径 r，$\angle A$ 内的旁切圆的半径 r'，求作 $\triangle ABC$．

解 ［分析］ 设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形．若它的内切圆，旁切圆与 AB 及其延长线的切点分别为 D、E，则

$DE=BC=a$ (问题 **447**)．

因此可作图如下．



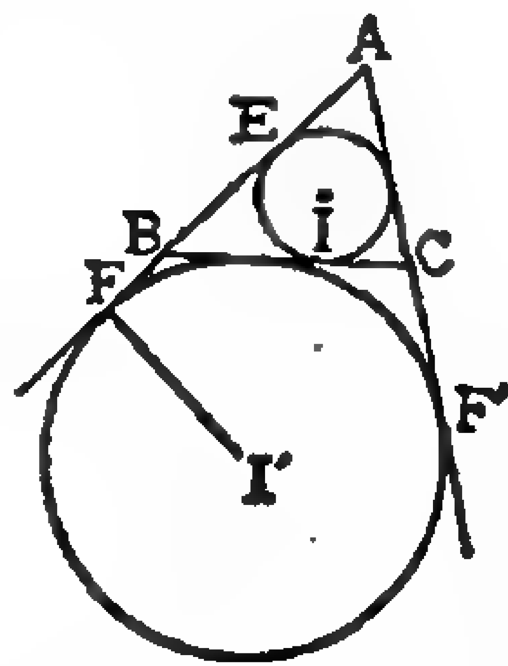
［作图］ 作线段 $DE=a$．以 D、E 两点为切点，分别作切于直线 DE、且在这直线同侧的两个圆 I、I'，设其半径分别为 r、r'．则以此两圆的外公切线作为两边，以内公切线为另一边的 $\triangle ABC$ 即为所求的三角形．

2409． 已知内切圆的半径为 r，一个旁切圆的半径为 r'，面积为 m^2，求作 $\triangle ABC$．

解 ［分析］ 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出．I 为内心，I' 为含在 $\angle A$ 内的旁心．设

$$AB+BC+CA=2s,$$

$\triangle ABC$ 的面积可用 sr 表示，所以



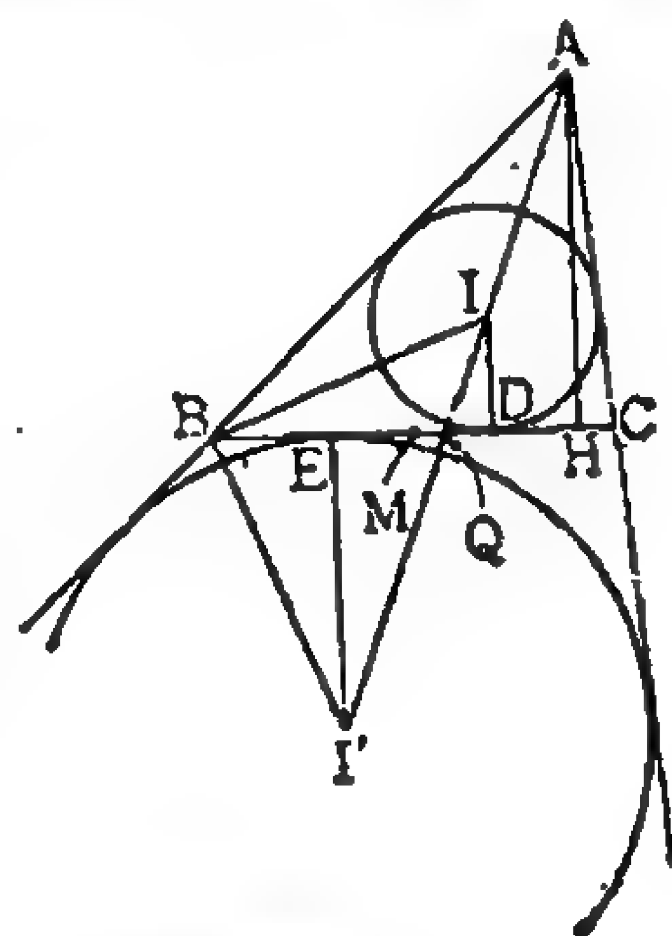
$$m^2=s\cdot r. \quad ①$$

设 AB 及其延长线与圆 I 及圆 I' 的切点分别为 E、F，$AF=s$，由 ① 得 $s=\frac{m^2}{r}$，所以 AF 为定长．故可作图如下．

［作图］ 作半径为 r' 的圆 I'，过圆 I' 上任意点 F 引切线 FA，设 $FA=s$ (设 s 为符合 $m^2=sr$ 的线段)．过 A 再作圆 I' 的切线 AF'．在 $\angle FAF'$ 内，作与 AF、AF' 相切的、半径为 r 的圆 I．引圆 I、I' 的内公切线与 AF、AF' 的交点分别为 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求．

2410． 已知三角形的内心 I，底边 BC 的中点 M，及从 A 向 BC 所作的垂线的垂足 H 三点的位置．求作 $\triangle ABC$．

解 ［分析］ 设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形．内切圆 I 与 BC 的切点为 D，旁切圆 I' 与 BC 的切点为 E．则



$$BE=CD \text{ (问题 448)}.$$

设 BC 的中点为 M，则

$$ME=MD. \quad ①$$

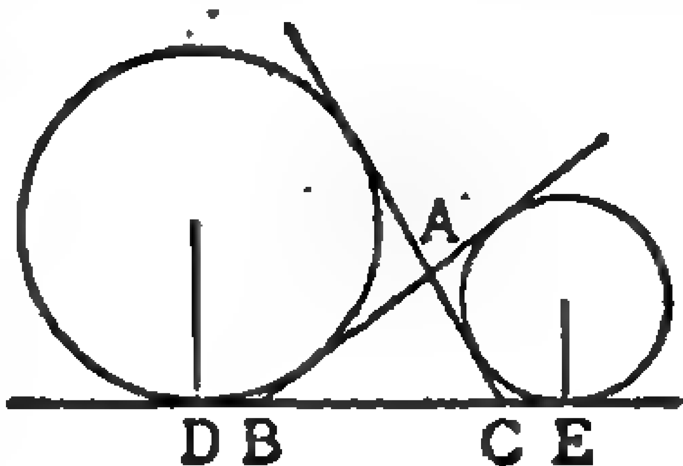
由于 A、I、I' 在一直线上，设 II' 与 BC 的交点为 Q，因为 BI、BI' 分别平分 $\angle ABQ$ 及其外角，所以 A、I、Q、I' 构成调和点列 (问题 **1479**)．从而 A、I、Q、I' 在 BC 上的射影 H、D、Q、E 构成调和点列．故可作图如下．

［作图］ 连结 MH，过 I 向 MH 引垂线 ID，以 I 为圆心，ID 为半径作圆．关于 M 作点 D 的对称点 E，在 DE 上确定点 Q，使 H、D、Q、E 构成调和点列(问题 **2014**)．设

过 H 作 EH 的垂线，与 QI 的延长线的交点为 A，过 A 向圆 I 引两条切线，与 EH 的延长线分别交于 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2411. 已知 $\angle B$、$\angle C$ 内的旁切圆的半径 r_1、r_2，两边 AB、AC 的和 l，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。设 $\angle C$、$\angle B$ 内的旁切圆与边 BC 的延长线的切点分别为 D、E，则



$$BE=\frac{1}{2}(AB+BC+CA),$$

$$CD=\frac{1}{2}(AB+BC+CA).$$

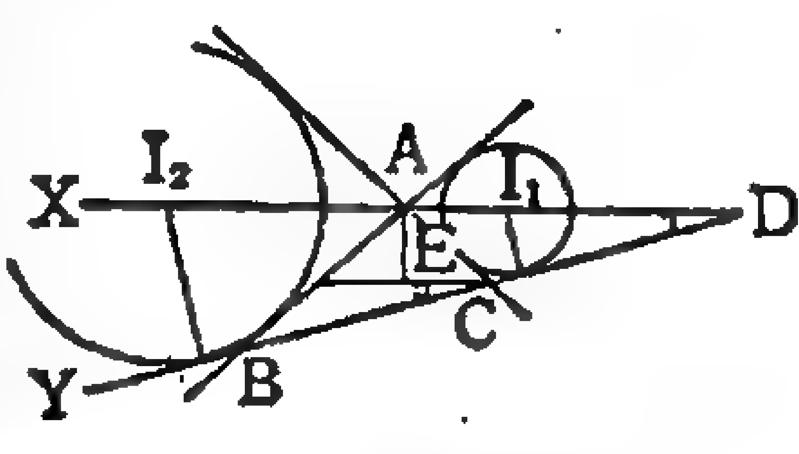
$$\therefore\quad DE=(BE+DC)-BC$$
$$=AB+AC=l.$$

因此可作图如下。

［作图］ 作 $DE=l$。以 D、E 为切点分别作与 DE 相切且半径为 r_2、r_1 的两个圆，引此两圆的内公切线(其交点为 A)，设它们与 DE 的交点分别为 B、C (使在 $\angle B$、$\angle C$ 内分别包含半径为 r_1、r_2 的两个圆)。则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2412. 已知 $\angle B$、$\angle C$ 内的旁切圆的半径 r_1、r_2，两底角 B、C 之差 θ，求作 $\triangle ABC$。其中 $\angle B<\angle C$。

解 ［分析］ 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出，$\angle B$、$\angle C$ 内的旁切圆的圆心分别为 I_1、I_2，连结 I_1I_2，则此连线通过顶点 A、且是 $\angle A$ 的外角平分线。作内角 A 的平分线 AE，过 C 向 AE 引垂线，设其交点为 E，则



$$CE\parallel I_1I_2,\quad \angle BCE=\frac{1}{2}\theta\ (\text{问题 }55).$$

设 I_1I_2 与 BC 的交点为 D，则

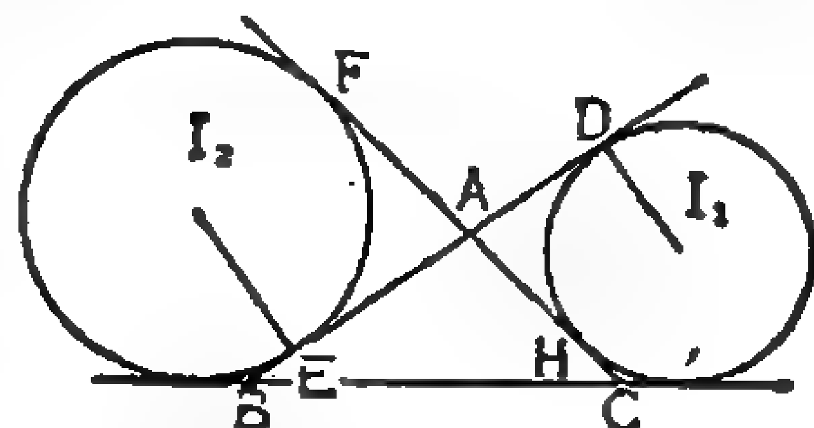
$$\angle D=\frac{1}{2}\theta.$$

所以可作图如下。

［作图］ 作 $\angle XDY=\frac{1}{2}\theta$，在 DX 上求两点 I_1、I_2，使与 DY 的距离分别为 r_1、r_2。然后以 I_1、I_2 为圆心，r_1、r_2 为半径作圆。设此两圆的两条内公切线(其交点为 A)与 DY 的交点分别为 B、C (使在 $\angle B$、$\angle C$ 内分别包含圆 I_1、I_2)，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2413. 已知 $\angle B$、$\angle C$ 内的旁切圆的半径 r_1、r_2，底边 $BC=a$，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。作 $\angle B$、$\angle C$ 内的旁切圆 I_2、I_1，与边 AB、AC 的切点分别为 D、E，H、F。由于 BD、CF 等于 $\triangle ABC$ 的半周长 s，所以



$$AD=s-AB,\quad AF=s-AC,$$

因而 $\quad AD+AF=2s-(AB+AC)=BC,$

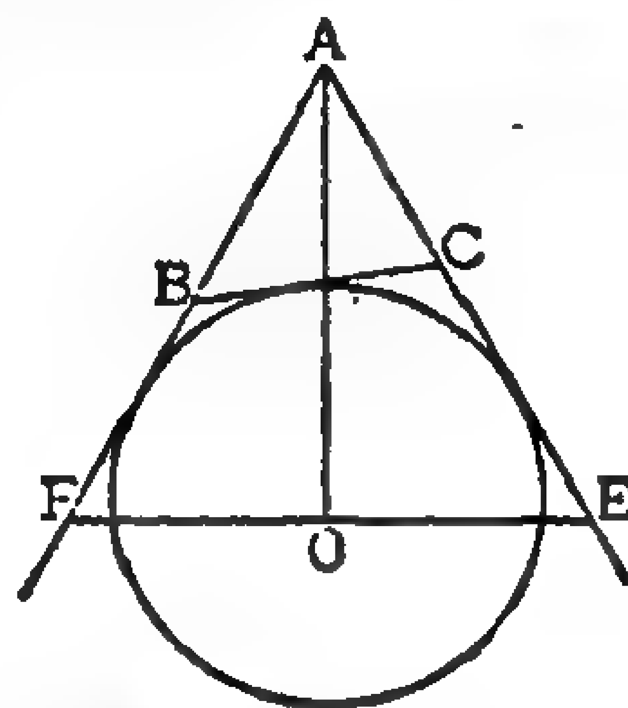
$$DE=AD+AF=BC=a.$$

故可作图如下。

［作图］ 取 $DE=a$。在 DE 的两侧作半径为 r_1、r_2，且分别以 D、E 为切点的圆 I_1、I_2，引其内公切线 FH (设与 DE 的交点为 A)，再作两圆 I_1, I_2 的外公切线，设它与 DE 的延长线、FH 的延长线的交点分别为 B、C (I_1 在 $\angle B$ 内，I_2 在 $\angle C$ 内)，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2414. 已知 $\angle A=\alpha$，含在 $\angle A$ 内的旁切圆的半径为 r，$AB\sim AC=m$，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形。过 $\angle A$ 内的旁心 O，引直线 EF 使与 AB、AC 构成等角。则



$$AE=AF.$$

$\therefore\quad AB+BF$
$\qquad =AC+CE,$

即 $\quad AB-AC$
$\qquad =CE-BF.$

$$CE\cdot BF=OF^2\ (\text{问题 }1169).$$

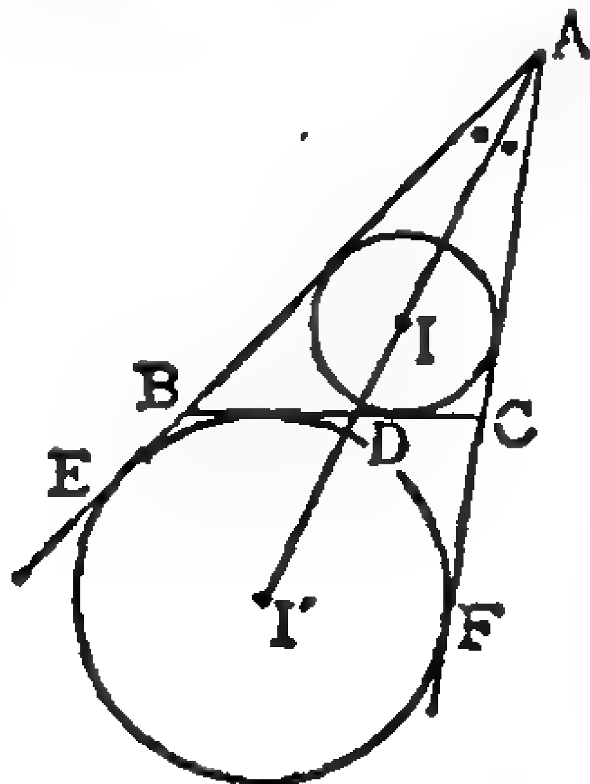
又 $CE-BF=m$，可知 CE、BF 的差与积是已知的，所以 CE、BF 可决定(问题 2016)。

［作图］ 作 $\angle EAF=\alpha$，再作切于这个角的两边而半径为 r 的圆 O。过 O 作垂直于 OA 的直线，设它与 $\angle EAF$ 的两边的交点分别为 E、F。再在 AF、AE 上分别求点 B、C，使

$$CE-BF=m,\quad BF\cdot CE=FO^2.$$

(问题 1169)，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2415. 已知内切圆的半径 r，$\angle A$ 内的旁切圆的半径 r'，$\angle A$ 的平分线 $AD=m$，求作 $\triangle ABC$。



解 设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形。若在 AD 及其延长线上求出内心 I 与旁心 I'，则

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AB+AC}{BC}$$

(问题 1667)，

$$\therefore\ \frac{AD}{ID}=\frac{AI+ID}{ID}=\frac{AB+AC+BC}{BC}. \quad ①$$

设圆 I、I' 的半径分别为 r、r'(问题 976)，则

$$\frac{r'}{r}=\frac{AB+BC+CA}{AB+AC-BC},$$

$$\therefore\ \frac{r'}{r'-r}=\frac{AB+BC+CA}{2BC}. \quad ②$$

由①、②得 $\quad \dfrac{AD}{ID}=\dfrac{2r'}{r'-r}$ (一定)。

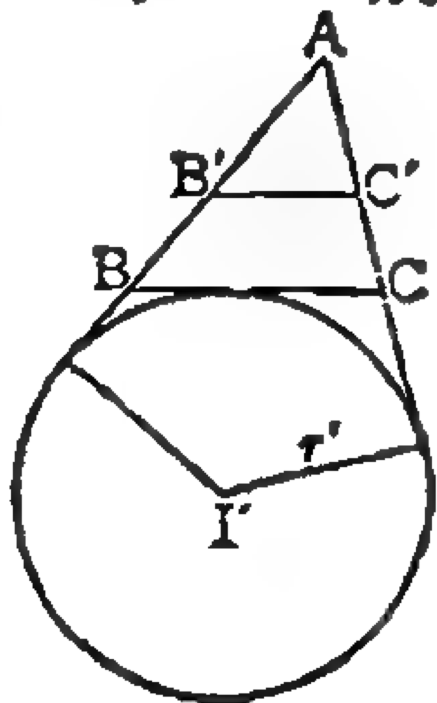
由 $AD=m$，所以

$$ID=\frac{(r'-r)m}{2r'}. \quad ③$$

根据 DI 的长度变化知道 I 是定点。又 A、I、D、I' 构成调和点列，所以 I' 是定点。因此作内切圆 I，旁切圆 I'，再作此两圆的两条外公切线和一条内公切线，即可求出 $\triangle ABC$。

2416. 已知三角形的三个旁切圆的半径 r'、r''、r'''，求作 $\triangle ABC$。

解 设三角形的三边 BC、AC、AB 分别为 a、b、c，设 $a+b+c=2p$，则



$(p-a)r'$，$(p-b)r''$，$(p-c)r'''$ 都表示 $\triangle ABC$ 的面积，其中 r'、r''、r''' 表示分别切于 a、b、c 的旁切圆的半径。

$$\therefore\ (p-a)r'=(p-b)r''=(p-c)r'''.$$

将此式变形为：

$$\frac{p-a}{\frac{1}{r'}}=\frac{p-b}{\frac{1}{r''}}=\frac{p-c}{\frac{1}{r'''}},$$

$$\therefore\ \frac{(p-a)+(p-b)}{\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}}=\frac{(p-b)+(p-c)}{\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}}=\frac{(p-c)+(p-a)}{\frac{1}{r'''}+\frac{1}{r'}},$$

因而

$$\frac{c}{\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}}=\frac{a}{\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}}=\frac{b}{\frac{1}{r'''}+\frac{1}{r'}}.$$

因此三角形的三边 a、b、c 分别与上式中三个分母的数成比例，所以先要求出与

$$\frac{1}{r'''}+\frac{1}{r'},\quad \frac{1}{r'}+\frac{1}{r''},\quad \frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}$$

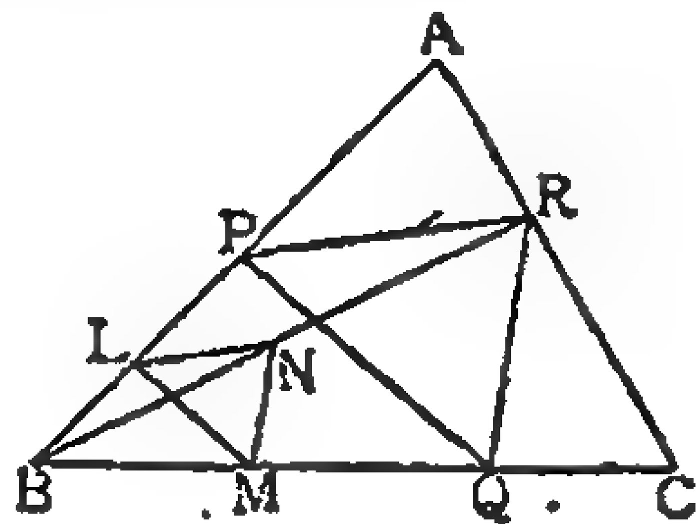
的三个成比例的线段。把上式各项乘以 $r'\cdot r''$，则变成：

$$\left(\frac{r'r''}{r'''}+r''\right),\ (r''+r'),\ \left(r'+\frac{r'r''}{r'''}\right),$$

设 $\dfrac{r'r''}{r'''}=m$，由于 m 是 r'''、r'、r'' 的第四比例项，所以 m 可以求出。因此，先由 $(r''+m)$、$(r''+r')$、$(r'+m)$ 三条线段作 $\triangle AB'C'$，再作切于 AB'，AC' 且半径为 r' 的圆 I'，然后作切于圆 I' 且平行于 $B'C'$ 的直线 BC，使圆 I' 为 $\triangle ABC$ 的旁切圆。则 $\triangle ABC$ 即为所求。

(8) 作三角形内接、外切于定圆(或定多边形)

2417. 作内接于已知 $\triangle ABC$ 的 $\triangle PQR$，使其三边分别平行于三条已知直线 X、Y、Z。



解 [作图] 在 AB 上任意取点 L，过 L 向 X 引平行线与 BC 的交点为 M。过 L、M 分别向 Z、Y 引平行线，其交点为 N。设 BN 与 AC 的交点为 R，过 R 引 LN 的平行线与 AB 的交点为 P。过 P 引 LM 的平行线与 BC 的交点为

Q，则 $\triangle PQR$ 即为所求。

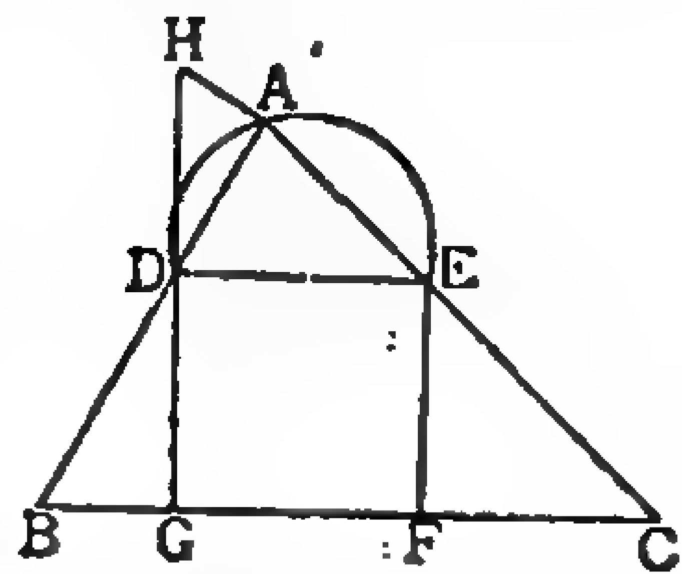
〔证明〕 $LM \parallel PQ$，$NL \parallel RP$。

但 $BN:NR=BL:LP=BM:MQ$，

因此 MN 平行于 QR。

$$\therefore \quad PQ \parallel X,\ QR \parallel Y,\ RP \parallel Z.$$

2418. 作外接于已知正方形 $DEFG$ 的三角形 ABC，使 $\angle A=\alpha$，$AD\cdot BD=m^2$。其中点 D、E 分别在边 AB、AC 上，GF 在 BC 上。



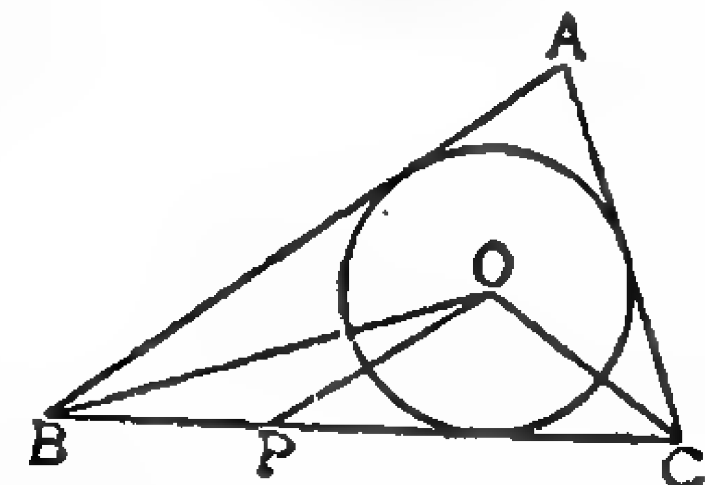
解 〔作图〕 以正方形 $DEFG$ 的边 DE 为弦，在正方形的外侧作含角 α 的弓形弧. 在 GD 的延长线上求点 H，使 $DG\cdot DH=m^2$，以 DH 为直径的圆与弓形弧交于点 A，设 AD、AE 与 GF 延长线的交点分别为 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

〔证明〕 $\angle HGB=\angle R=\angle HAB$，因此，$H$、$A$、$G$、$B$ 四点共圆。

$$\therefore \quad AD\cdot BD=HD\cdot DG=m^2.$$

又 $\angle A=\alpha$，所以 $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形。

2419. 作与已知 $\triangle A'B'C'$ 相似且外切于圆 O 的 $\triangle ABC$，并使边 BC 过定点 P。



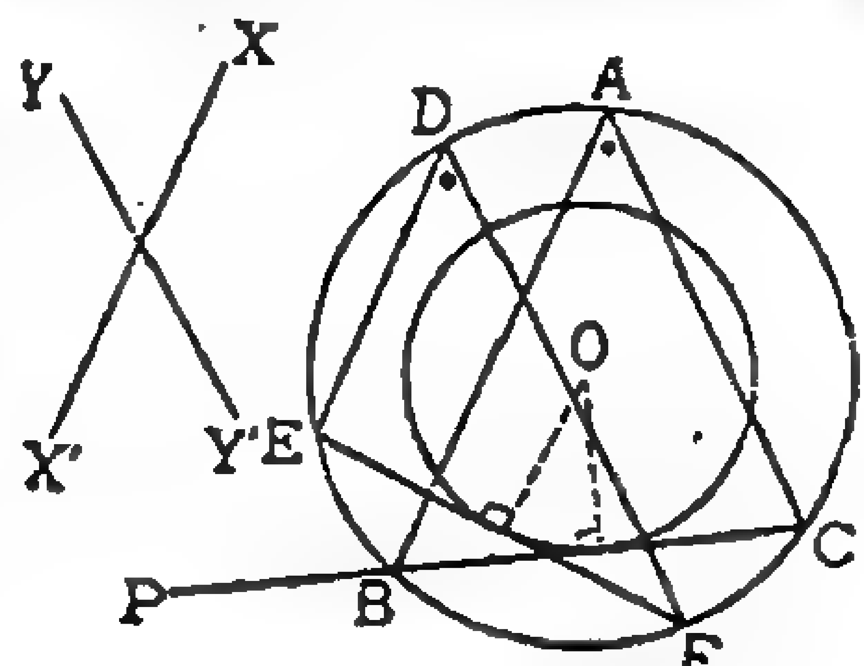
解 过 P 向圆 O 引切线，在切线上求点 B、C，使

$$\angle OBP=\frac{1}{2}\angle B',$$

$$\angle OCP=\frac{1}{2}\angle C'.$$

过 B、C 向圆 O 引切线，两切线交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2420. 作两边分别平行于两条已知直线 XX'、YY'，另一边过已知点 P，且内接于已知圆 O 的三角形。



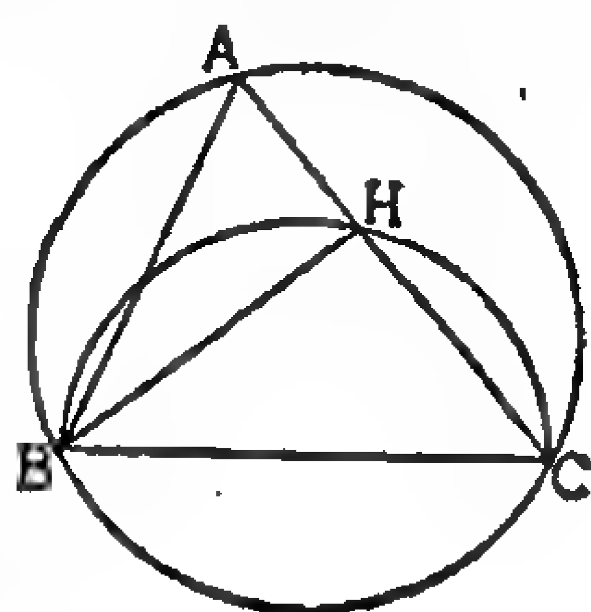
解 〔作图〕 过圆 O 上任意点 D，引弦 DE、DF 分别平行于已知直线 XX'、YY'. 以 O 为圆心，作相切于 EF 的圆，过 P 向此圆引切线 PBC，与外圆 O 的交点为 B、C. 过 B 引 $BA \parallel XX'$ 与外圆 O 的交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

〔证明〕 由于 EF 与 BC 是同一外圆 O 的弦，同是内圆 O 的切线，所以这两条弦相等。因此，$\angle EDF=\angle BAC$。

但 $AB \parallel DE$，$\therefore$ $DF \parallel AC$。

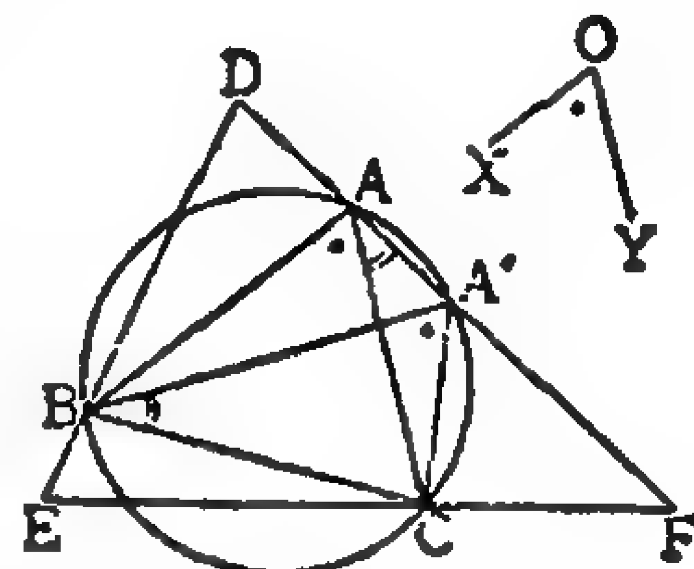
因此 $AB \parallel XX'$，$AC \parallel YY'$，且 BC 通过定点 P，故 $\triangle ABC$ 即为所求。

2421. 作已知底边 $BC=a$，过顶点 B 的高 $BH=h$ 的三角形内接于已知圆 O。



解 在圆 O 内作弦 $BC=a$，以 BC 为直径作半圆，在这个半圆内作弦 $BH=h$. 设 CH 的延长线与圆的交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2422. 求作底边为定长，其它两边 AB、AC 分别平行于已知直线 OX、OY 的三角形，且内接于已知三角形 DEF。



解 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出. 此三角形的外接圆与 DF 的交点为 A'，则

$$\angle BA'C=\angle BAC=\angle XOY.$$

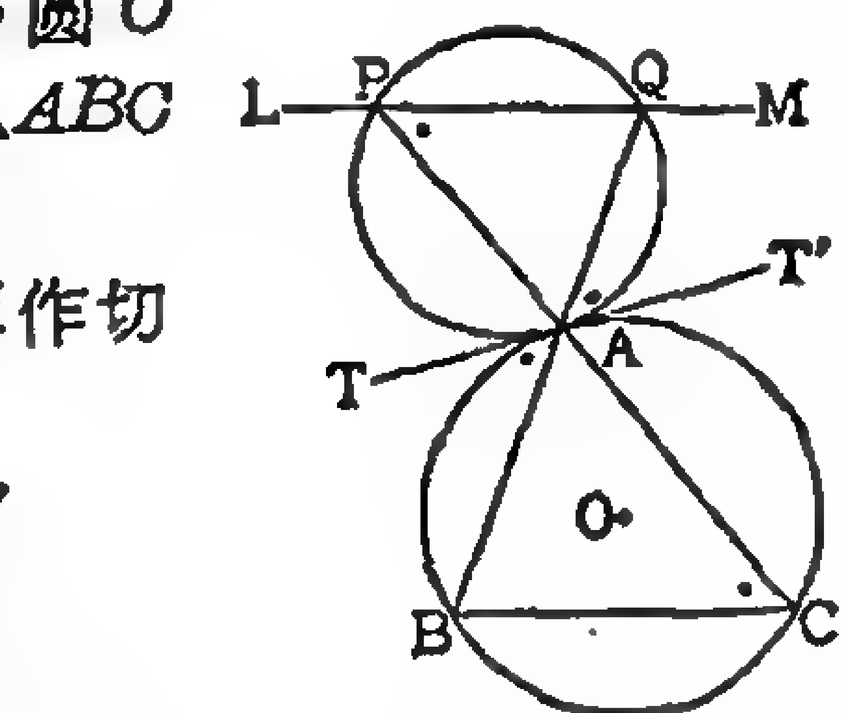
又 $\angle A'BC=\angle A'AC$，

$AC \parallel OY$，$\angle A'BC$（已知），且 $BC=a$，故 $\triangle A'BC$ 的形状和大小一定. 根据问题 **2292** 先在另外的位置作与 $\triangle A'BC$ 全等的三角形，再作外接此三角形与 $\triangle DEF$ 全等的 $\triangle D'E'F'$（参照问题 **2293**），移至 $\triangle EDF$ 得内接三角形 $A'BC$. 然后作 $\triangle A'BC$ 的外接圆与 DF 的交点为 A，则 $\triangle ABC$ 为所求的三角形。

2423. 求作内接于已知圆 O 的三角形，且使其底边 BC 平行于已知直线 LM，其它两边 AC、AB 分别过直线 LM 上的两个已知点 P、Q。

解 〔作图〕 过两点 P、Q，作与圆 O 相切的圆（问题 **2637**），设切点为 A，连结 PA、

QA。其延长线与圆 O 相交于 C、B，则 $\triangle ABC$ 为所求的三角形。



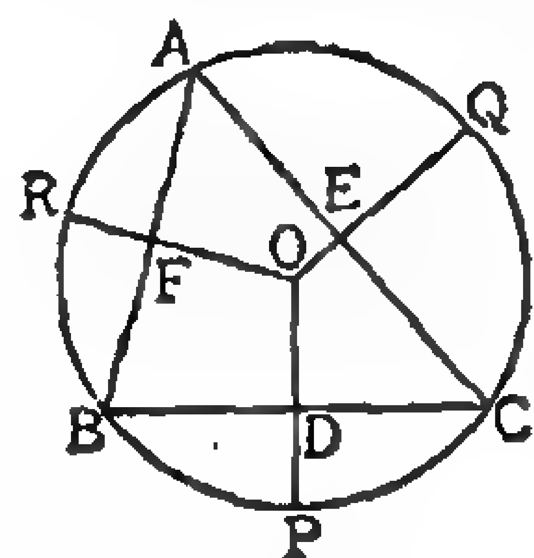
［证明］ 过点 A 作切线 TAT'，则

$$\angle QPA=\angle QAT' =\angle TAB =\angle ACB,$$

$$\therefore\ LM \parallel BC.$$

显然，边 AC、AB 过已知点 P、Q。

2424. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 O，已知弧 BC、CA、AB 的中点 P、Q、R 的位置，求作 $\triangle ABC$。



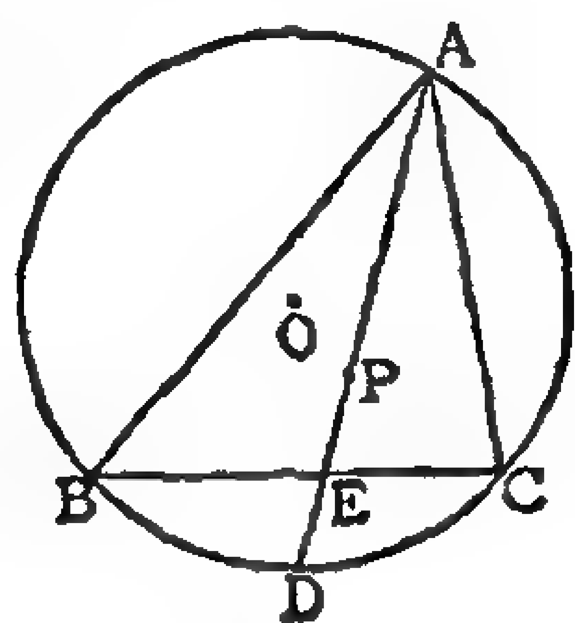
解 设连结 OP、OQ、OR 与 $\triangle ABC$ 的边分别交于点 D、E、F，则 $OD\perp BC$, $OE\perp AC$, $OF\perp AB$. 因此有

$$\angle C=(\angle DOE \text{ 的补角}),$$
$$\angle A=(\angle EOF \text{ 的补角}).$$

因而，三个角 A、B、C 一定。故本题可归结为与问题 **2277** 相同的问题。

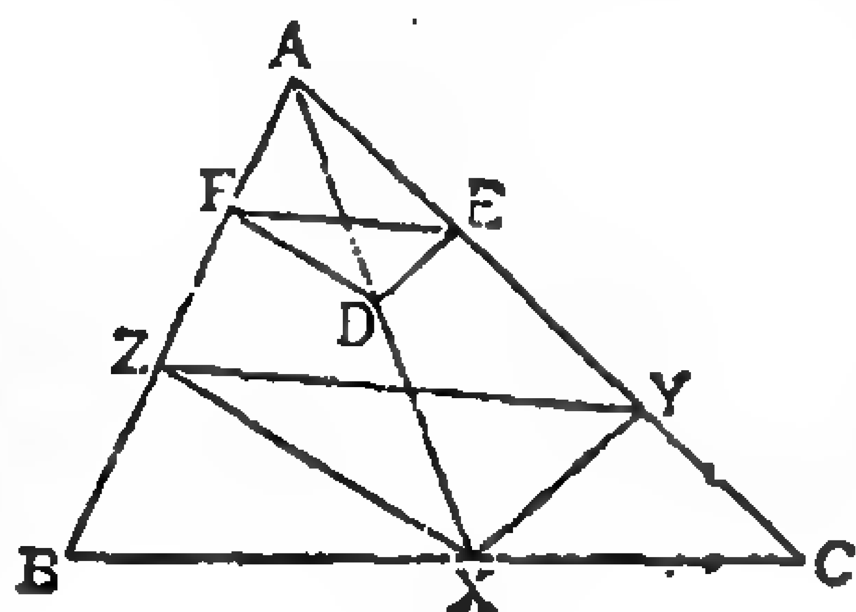
2425. 求作内接于圆 O 的三角形 ABC，并使它的边 BC 平行且等于已知线段 XY，$\angle A$ 的平分线 AE 过已知点 P。

解 ［作图］ 作平行且等于 XY 的弦 BC，求弧 BC 的中点 D，设 PD 与圆 O 的交点为 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求。



［证明］ 由作图知 $BC \mathrel{\underline{\parallel}} XY$，$AD$ 过 P，又由 D 是弧 BC 的中点。所以，AD 是 $\angle A$ 的平分线，并通过定点 P。

2426. 求作内接于已知 $\triangle ABC$ 的三角形 XYZ，其中 X 为边 BC 上的定点，YZ 的方向是已知的，且使 $XY:XZ=m:n$。



解 ［作图］ 过边 AC 上任意点 E，向已知方向引直线，设它与 AB 的交点为 F。以定比 $m:n$ 内分与外分 EF 的两点为直径的两端作圆（阿波罗尼斯圆），设它与 AX 的交点为 D。过 X 分别作 DE、DF 的平行线与 AC、AB 的交点分别为 Y、Z，则 $\triangle XYZ$ 即为所求。

［证明］ 由作图知 EF 方向一定，$DE:DF$ 是定比。又 $XY \parallel DE$, $XZ \parallel DF$，因此

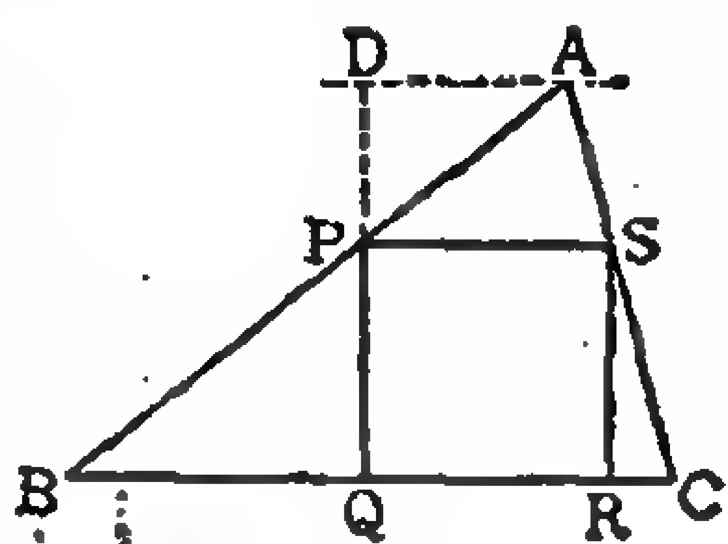
$$\frac{AE}{AY}=\frac{AD}{AX}=\frac{AF}{AZ},$$

$$\therefore\ EF \parallel YZ.$$

又
$$\frac{DE}{XY}=\frac{AD}{AX}=\frac{DF}{XZ},$$

$$\therefore\ \frac{XY}{XZ}=\frac{DE}{DF}=\frac{m}{n}\ (\text{一定}).$$

2427. 求作外接于已知正方形 $PQRS$ 的三角形 ABC，使顶角 $A=\alpha$，P、S 分别在边 AB、AC 上，QR 在边 BC 上，且 $AP:BP=m:n$。其中 m、n 是已知线段。



解 ［分析］ 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出，过 A 引 QR 的平行线与 QP 的延长线交于点 D，则

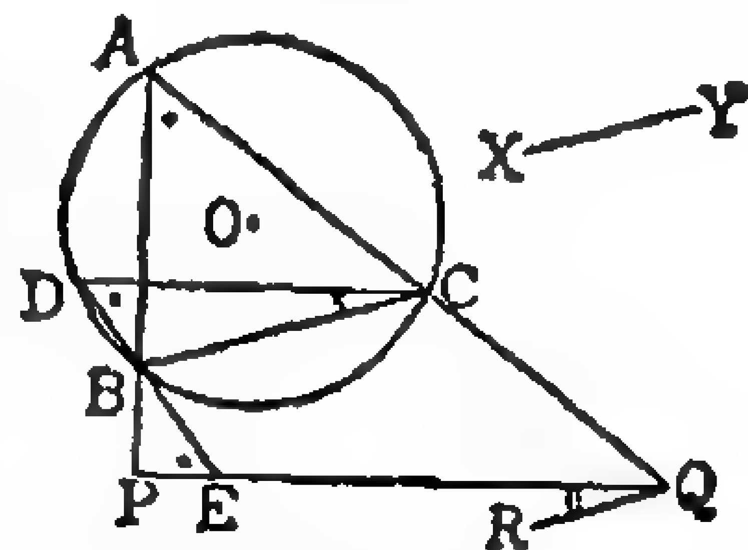
$$DP:PQ=AP:PB=m:n.$$

又 A 在以 PS 为弦含角 α 的弓形弧上，故可作图如下。

［作图］ 延长 QP 到 D，使 $DP:PQ=m:n$。过 D 作 QR 的平行线，与以 PS 为弦、含角 α 的弓形弧交于点 A。设 AP、AS 的延长线与 QR 的延长线的交点分别为 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

2428. 求作内接于定圆 O 的三角形 ABC，使其边 AB、AC 分别通过定点 P、Q，且 BC 平行于定直线 XY。

解 设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形，过 C 作平行于 PQ 的弦 CD。设 DB 的延长线与 PQ 的交点为 E，则 $\angle BEP=\angle D=\angle A$。因而 B、A、Q、E 四点共圆，

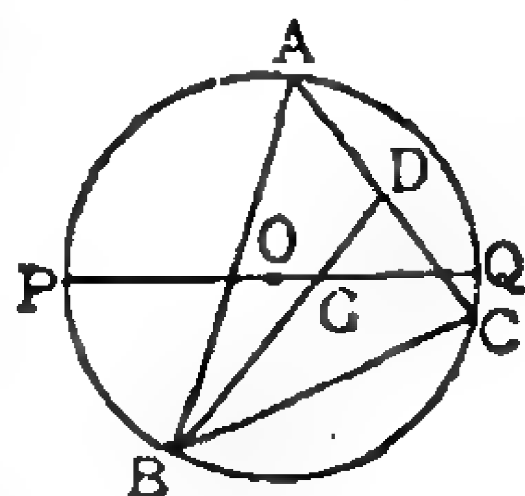


$$\therefore\ PB\cdot PA=PQ\cdot PE.$$

因 P 是定点，所以 $PA\cdot PB$ 一定（设过 P 圆

O 的切线的长为 m，则 $PA\cdot PB=m^2$）。由于 $PQ\cdot PE=m^2$，PQ 与 m 是定值，所以 E 是定点。设 $QR\parallel XY$，$\angle DCB=\angle PQR$（一定），因此，BD 的长一定。故本题可归结为：过定点 E 向定圆 O 引割线 EBD，截取弦 BD 为定长的问题（问题 **2125**）。

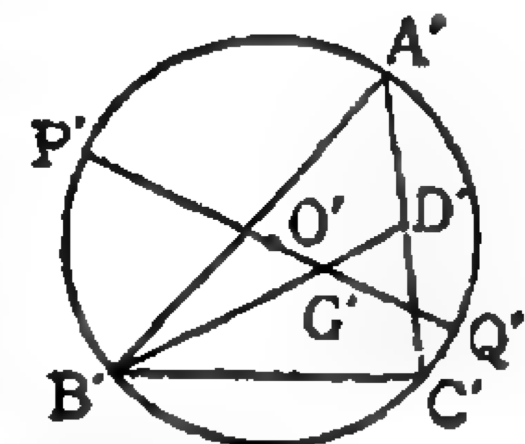
2429. 已知 A、B、C 三点和圆 O，求作圆 O 的内接三角形 DEF，使其各边或其延长线分别过 A、B、C 中的一点。



解 设符合条件的 $\triangle DEF$ 已作出。过 F 引平行于 AC 的弦 FG，连结 GE，GE 的延长线与 AC 相交于 P，则 $\angle APE=\angle PGF=\angle EDF$.

因此 P、C、D、E 四点共圆，从而 $AP\cdot AC=AE\cdot AD$。又 A 是定点，圆 O 是定圆，所以 AD、AE 的积一定。因此 AC、AP 的积也一定，所以 P 是定点。本题便成为作两边 GE、EF 分别过定点 P、B，第三边 GF 平行于定直线 AC 的三角形 GEF 的问题，可归结为问题 **2428**.

2430. 作已知圆 O 的内接 $\triangle ABC$，使其底边 $BC=a$，中线 $BD=m$，且其重心 G 在圆 O 的定直径 PQ 上。

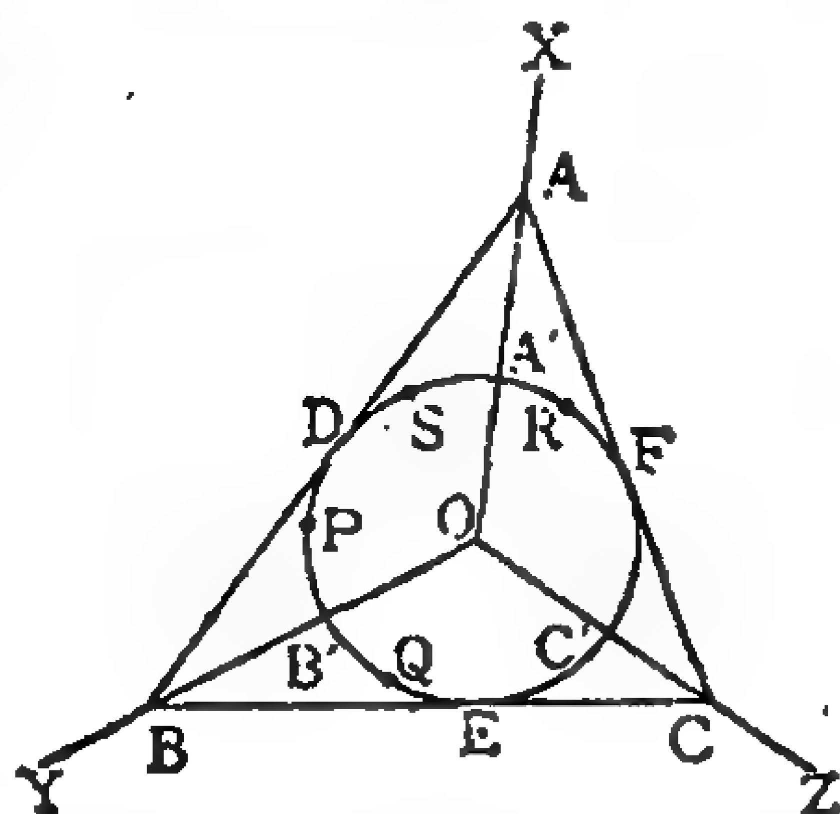


解 ［分析］ 假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。BC 是定长。因为外接圆的大小一定，所以 $\angle A$ 的大小一定。可归结为作已知 BC、$\angle A$、中线 BD 的 $\triangle ABC$ 的问题（问题 **2303**）。

［作图］ 作圆 O' 等于定圆 O，在此圆内作内接三角形 $A'B'C'$，使 $B'C'=a$，中线 $B'D'=m$。设 $\triangle A'B'C'$ 的重心为 G'，作过 G' 的直径 $P'Q'$。在圆 O 上求点 A、B、C，使 $PA=P'A'$，$PB=P'B'$，$QC=Q'C'$，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

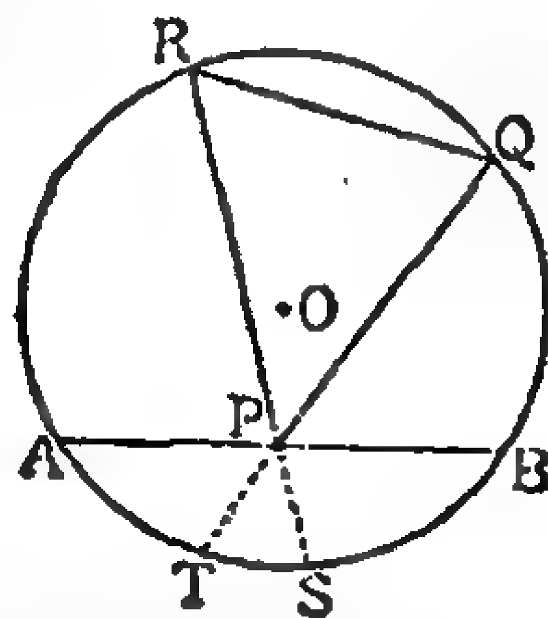
2431. 求作外切于已知圆 O 的 $\triangle ABC$，使其三个顶点 A、B、C 分别在由圆心所引出的三条定直线 OX，OY，OZ 上。

解 ［分析］ 假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。设与圆 O 的切点分别为 D、E、F。OA、OB、OC 与圆的交点分别为 A'，B'，C'。在圆 O 上任意取一点 P，设点 P 关于 OY 的对称点为 Q，则 $\widehat{PB'}=\widehat{B'Q}$，$\widehat{DB'}=\widehat{B'E}$，因此，$\widehat{DP}=\widehat{QE}$。又设 Q 关于 OZ 的对称点为 R，则 $\widehat{QC'}=\widehat{C'R}$，$\widehat{EC'}=\widehat{C'F}$，因此，$\widehat{QE}=\widehat{FR}$。同样，设 R 关于 OX 的对称点为 S，则 $\widehat{FR}=\widehat{SD}$，因此，$\widehat{DP}=\widehat{DS}$，所以 D 为 $\widehat{PS}$ 的中点。可作图如下。



［作图］ 在 $\angle XOY$ 内的圆周上任意取一点 P，按顺序取此点关于三条直线的对称点 Q、R、S。过弧 PS 的中点 D 引切线与 OX、OY 的交点分别为 A、B。过 A，B 分别引切线，设其交点为 C，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

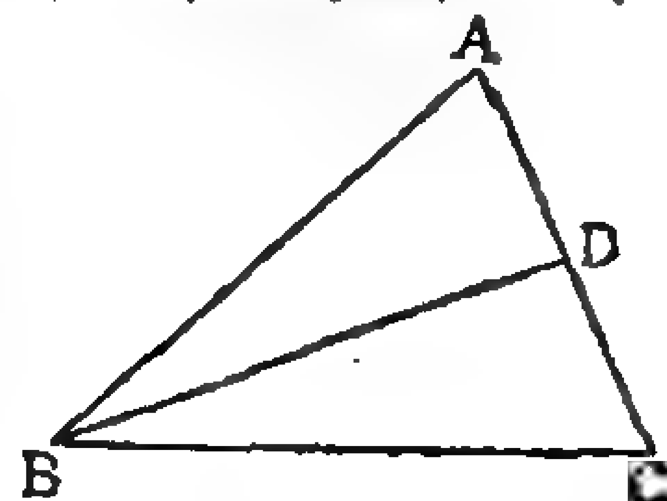
2432. 在以 AB 为弦的已知弓形内，求作与已知三角形全等的内接三角形 PQR。



解 设法作出外接于 $\triangle PQR$ 的与已知弓形全等的弓形就可以了。先作已知弓形为全圆，设其半径为 r，再作与 $\triangle PQR$ 全等的 $\triangle P'Q'R'$，作以 $Q'R'$ 为弦、半径为 r 的圆（使 $\triangle P'Q'R'$ 在此圆内）。过 P' 作弦 $A'B'=AB$，则把这个弓形移到与原来的弓形重合。

（9）已知面积的作图题

2433. 已知顶角 $A(=\alpha)$，中线 $BD(=l)$，面积 $(=m^2)$，求作 $\triangle ABC$。



解 假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。引中线 BD，则

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}m^2.$$

又$\angle A=\alpha$，已知$\triangle ABD$的边BD的长，顶角A和它的面积$\frac{1}{2}m^2$，所以$\triangle ABD$可以作出。因此，先作$\triangle ABD$，在AD的延长线上取DC等于AD，则$\triangle ABC$即为所求。

2434. 已知顶角$A(=\alpha)$，中线$AM(=l)$，面积$(=m^2)$，求作$\triangle ABC$。

解　假定符合条件的$\triangle ABC$已作出，延长中线AM，截取

$MD=AM$，

则

$\triangle AMC\cong\triangle DMB$，

因此

$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}=m^2$。

而$AC\parallel BD$，所以

$$\angle ABD=180^\circ-\angle BAC=180^\circ-\alpha,$$

$$AD=2AM=2l.$$

已知$\triangle ABD$的面积、边AD的长和顶角ABD的大小，所以可作出此三角形。先作$\triangle ABD$，取AD的中点为M，延长BM，取$MC=BM$，则$\triangle ABC$即为所求。

2435. 已知底边$BC(=a)$，其它两边AB、AC的比$(p:q)$，面积$(=m^2)$，求作$\triangle ABC$。

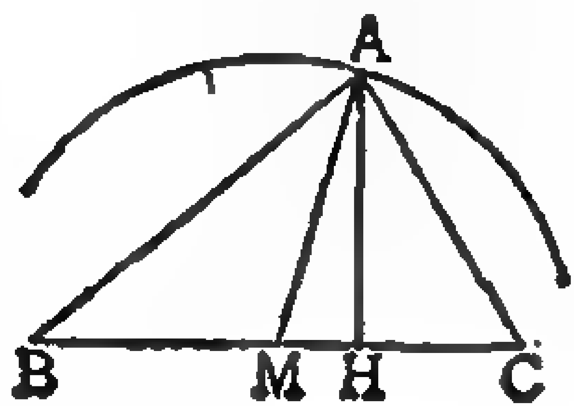
解　假定符合条件的$\triangle ABC$已作出。过A向BC作垂线AH，则

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}BC\cdot AH,$$

$$\therefore\quad m^2=\frac{1}{2}a\cdot AH.$$

因此AH为定长。设其长度为h，则可作图如下：作$BC=a$，按照$p:q$求内分与外分BC的点D、E，作以DE为直径的圆。再作平行于BC，且距离等于h的直线XY，与圆的交点为A，则$\triangle ABC$即为所求（如果能够作为A的点有两个，则有两解）。

2436. 已知底边$BC(=a)$，从顶点A向BC所作的垂线的垂足H的位置，角A的两边AB、AC上的正方形面积之和$(=m^2)$，求作$\triangle ABC$。



解　[分析]　设$\triangle ABC$为所求的三角形，从A向底边BC所作的垂线的垂足为H，M为BC的中点，则AM是此三角形的中线。

$$\therefore\quad AB^2+AC^2=m^2=2(AM^2+BM^2),$$

$$\therefore\quad AM^2=\frac{1}{2}\left(m^2-\frac{a^2}{2}\right).$$

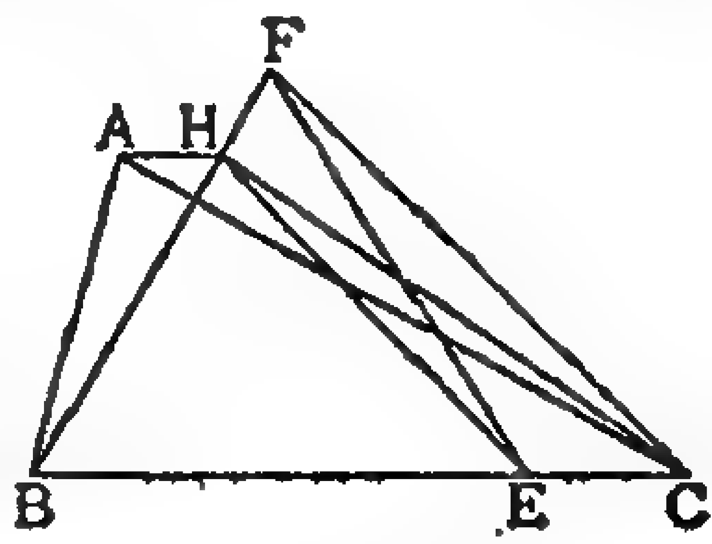
因此可作图如下。

[作图]　作线段$BC=a$，以BC的中点M为圆心、$\sqrt{\frac{1}{2}\left(m^2-\frac{a^2}{2}\right)}$为半径作圆。从$BC$上的已知点$H$作$BC$的垂线，与圆的交点为$A$，分别连结$AB$、$AC$。则$\triangle ABC$即为所求。

2437. 求作三角形与已知$\triangle ABC$等积，使在底边上的一个角等于已知角α，且底边等于已知线段l。

解　过$\triangle ABC$的顶点B作直线BH，使

$\angle HBC=\alpha$，



再作$AH\parallel BC$，则

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle HBC}$。　①

在BC或其延长线上取线段$BE=l$，连结EH，从C引EH的平行线，与BH或其延长线的交点为F，则

$$S_{\triangle HEC}=S_{\triangle HEF},$$

因此　　$S_{\triangle FBE}=S_{\triangle HBC}$　　②

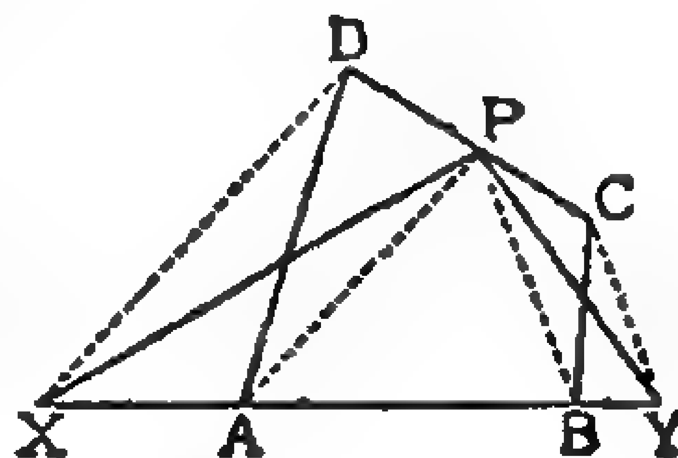
由①、②得

$S_{\triangle FBE}=S_{\triangle ABC}$，且$BE=l$，$\angle FBE=\alpha$，

因此$\triangle FBE$为所求作的三角形。

2438. 求作三角形，使其底边在已知四边形$ABCD$的边AB所在的直线上，顶点为CD上的已知点P，且与四边形等积。

解　过D、C分别引直线DX、CY平行于PA、PB，设与AB的延长线的交点为X、Y。则$\triangle PXY$即为所求的三角形。

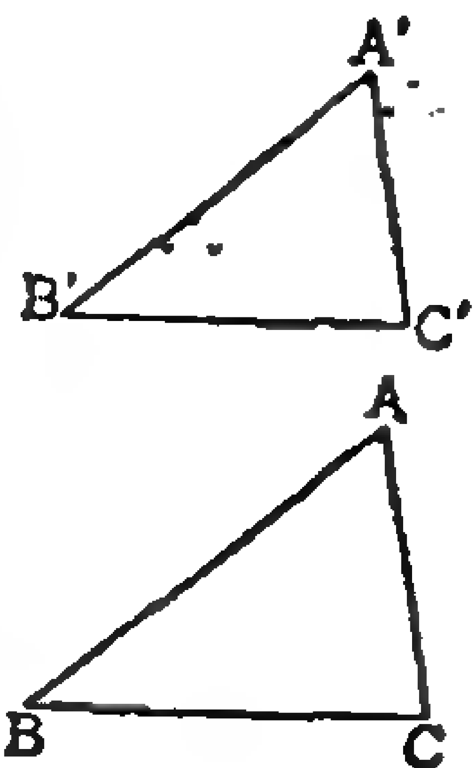


注　设在AB上的任意位置取$X'Y'=XY$，由于$\triangle PX'Y'=\triangle PXY$，对于本题来说，即使再适当增加一个条件作图也是可能的。

2439. 已知$\angle A(=\alpha)$，$\angle B(=\beta)$，面积$(=m^2)$，求作$\triangle ABC$。

解　作任意$\triangle A'B'C'$，使$\angle A'=\alpha$，$\angle B'=$

β，设与它等积的正方形的面积为 n^2，求线段 BC，使 $B'C':BC=n:m$。在 BC 上作与 $\triangle A'B'C'$ 相似的 $\triangle ABC$，使 BC 为 $B'C'$ 的对应边。则 $\triangle ABC$ 即为所求的三角形。其理由是：



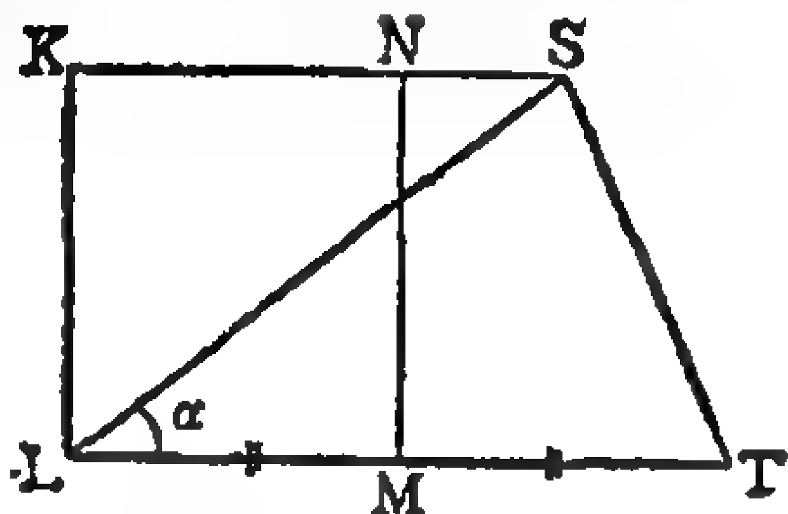
$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，

所以 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\dfrac{BC^2}{B'C'^2}=\dfrac{m^2}{n^2}$.

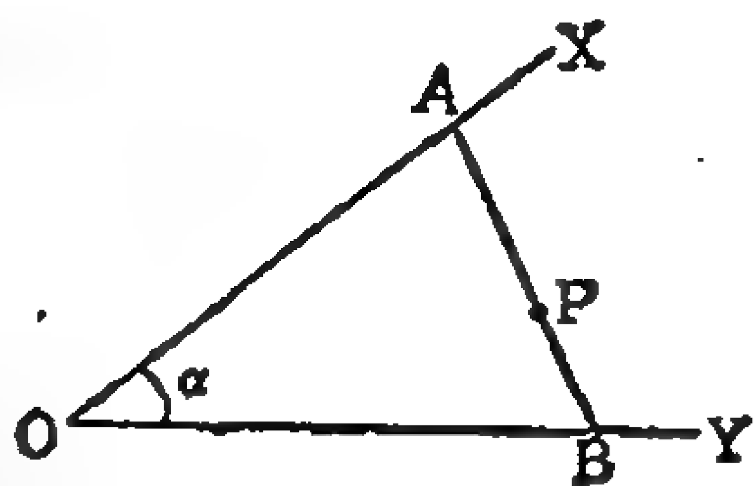
由于 $S_{\triangle A'B'C'}=n^2$，所以 $S_{\triangle ABC}=m^2$。

2440. 过已知点 P 作直线，与两条已知直线 OX、OY 构成 $\triangle OAB$，使其面积等于已知面积。

解 设矩形 $KLMN$ 面积为已知，在直线 KN 上求点 S，使 $\angle SLT=\angle XOY$，延长 LM，取 $MT=LM$，则矩形 $KLMN$ 面积 $=S_{\triangle SLT}$。



设 $\triangle AOB$ 为所求的三角形，则 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle SLT}$。由 $OA\cdot OB=LS\cdot LT$（一定），可归结为问题 **2098** 的作图。



(10) 其他

2441. 设在 $\triangle ABC$ 的外侧所作的三个正方形分别为 $ABDE$、$ACFG$、$BCHK$，已知三条线段 EG、FH、KD 的长度，求作 $\triangle ABC$。

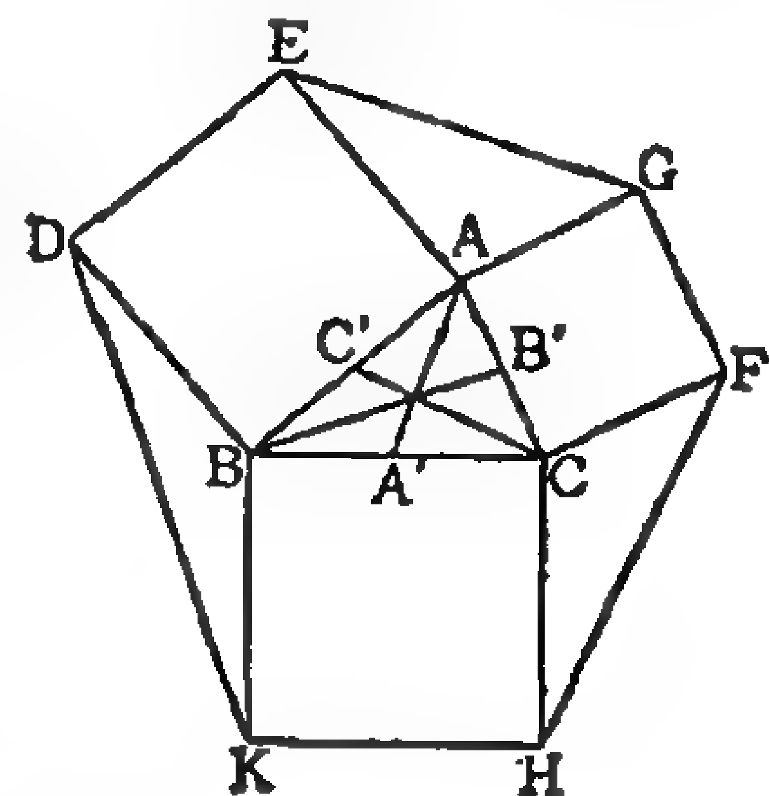
解 设 $\triangle ABC$ 的三条中线分别为 AA'、BB'、CC'，则

$EG=2AA'$,

$FH=2CC'$,

$DK=2BB'$

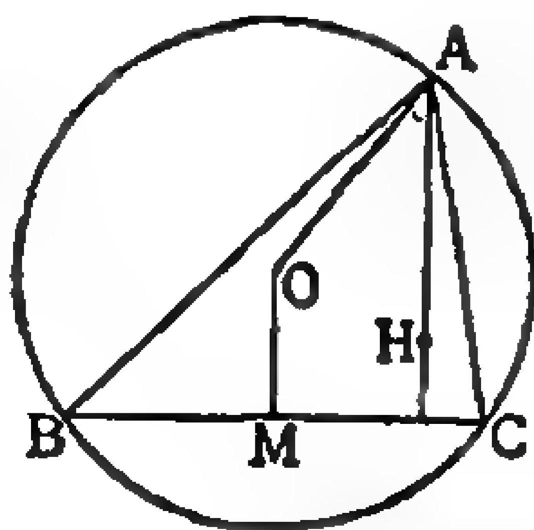
（问题 **237**）。



因此本题可归结为已知三条中线求作 $\triangle ABC$（问题 **2319**）。

2442. 已知三角形的一个顶点、外心与垂心的位置，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形。已知顶点 A，外心 O，垂心 H 的位置。过 O 作 BC 的垂线 OM，由问题 **500** 知 $AH\underline{\parallel}2OM$，$OA$ 是外接圆的半径。因此可作图如下。

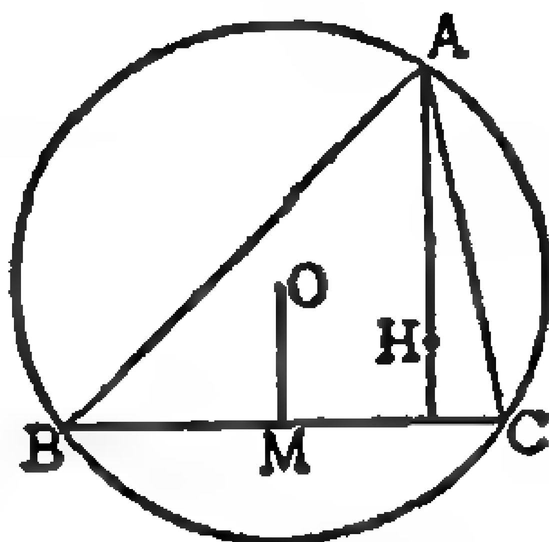


［作图］ 以 O 为圆心、OA 为半径作圆，如图所示求点 M，使 $OM\underline{\parallel}\dfrac{1}{2}AH$，再过 M 作垂直于 OM 的弦 BC，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

［证明］ 由作图知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，因为 $OM\perp BC$，且 $OM\underline{\parallel}\dfrac{1}{2}AH$，所以 H 就是 $\triangle ABC$ 的垂心。又 A、O、H 的位置一定，所以 $\triangle ABC$ 是所求的三角形。

2443. 已知顶点 A，底边 BC 的中点 M 与垂心 H 的位置，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 设符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出。作 $\triangle ABC$ 的外接圆 O，则 $OM\parallel AH$，且 $OM=\dfrac{1}{2}AH$（问题 **500**）。因此可作图如下。



［作图］ 过 M 作平行于 HA 的直线，在此直线上取点 O，使 $OM=\dfrac{1}{2}AH$（所取的点 O 使 MO 与 HA 同方向）。再以 O 为圆心、OA 为半径作圆，过 M 作垂直于 AH 的弦 BC，则 $\triangle ABC$ 即为所求。

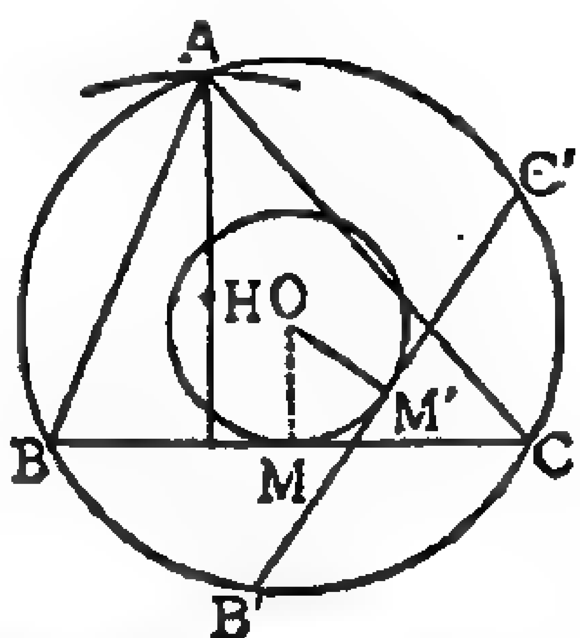
别解 过 M 作 AH 的垂线 MD，取 H 关于 DM 对称的点 H'，作 AH' 的垂直平分线，再过 M 作 DM 的垂线，设它们的交点为 O。以 O 为圆心、OA 为半径作圆，设此圆与 DM 的延长线的交点为 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求的三角形。

2444. 已知底边 $BC(=a)$，外接圆 O 的大小与位置，垂心 H 的位置，求作 $\triangle ABC$。

解 ［分析］ 假定 $\triangle ABC$ 已作出。过 O 引 BC 的垂线 OM，由于圆 O 是定圆，BC 是定长，所以 OM 的长一定。因 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，所以由问题 **500** 知 $AH=2OM$，因

而 AH 是定长. 因此可作图如下.

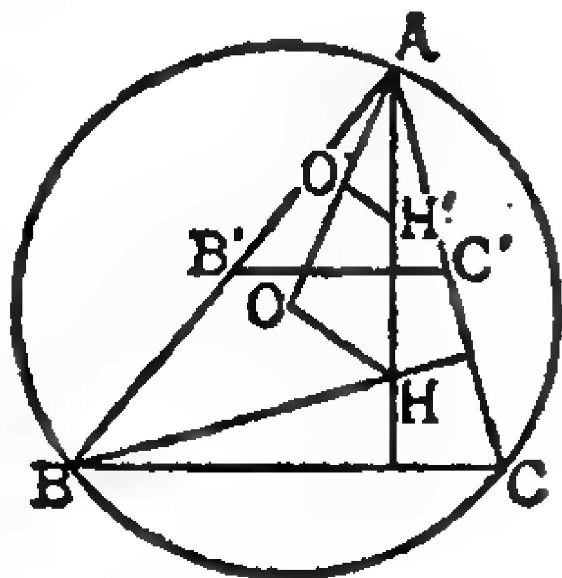
［作图］ 在圆 O 上任作等于 a 的弦 $B'C'$，过 O 引 $B'C'$ 的垂线 OM'，以 H 为圆心、$2OM'$ 为半径所作的圆与圆 O 交于点 A，再作弦 BC 与以 O 为圆心、OM' 为半径的圆相切，且垂直于 AH，则 $\triangle ABC$ 即为所求.



［证明］ 因为 $BC=B'C'=a$，$AH\perp BC$，$AH=2OM$，所以 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

2445. 已知两个角与垂心 H 到外心的距离 l，求作 $\triangle ABC$.

解 ［作图］ 作已知两角的任意 $\triangle AB'C'$，设其外心为 O'，垂心为 H'. 在 AB' 上取点 B，使 $AB:AB'=l:O'H'$，过 B 作 $B'C'$ 的平行线，与 AC' 的交点为 C，则 $\triangle ABC$ 即为所求.



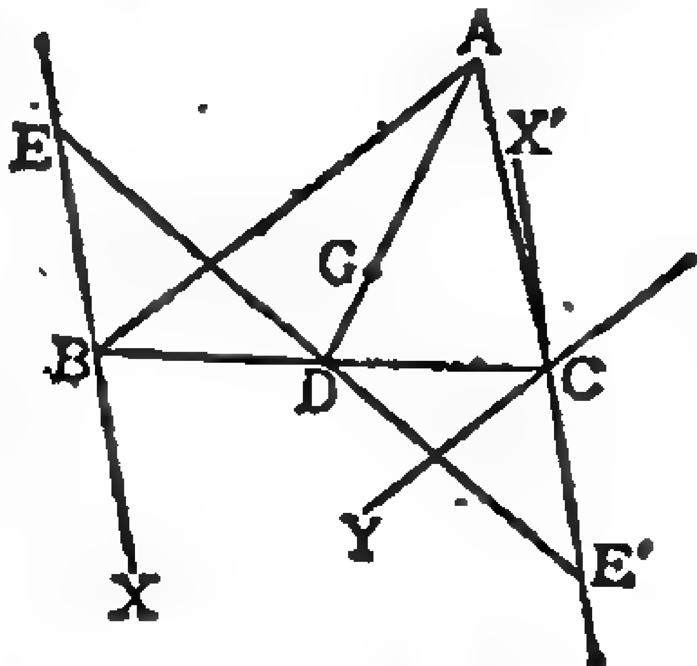
［证明］ 由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是相似三角形，设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，外心为 O，则

$$OH:O'H'=AB:AB'.$$

由作图知 $OH=l$，又两角等于已知角，故三角形 ABC 符合条件.

2446. 已知顶点 A 与重心 G，另外两个顶点 B、C 分别在两定直线 X、Y 上，求作 $\triangle ABC$.

解 ［作图］ 在 AG 的延长线上求点 D，使 $GD=\frac{1}{2}AG$，连结 D 和 X 上任意点 E，在 ED 的延长线上取 E'，使 $DE'=DE$. 过 E' 引平行于 X 的直线 $E'X'$，与直线 Y 交于点 C. 设 CD 的延长线与直线 X 的交点为 B，则 $\triangle ABC$ 即为所求.



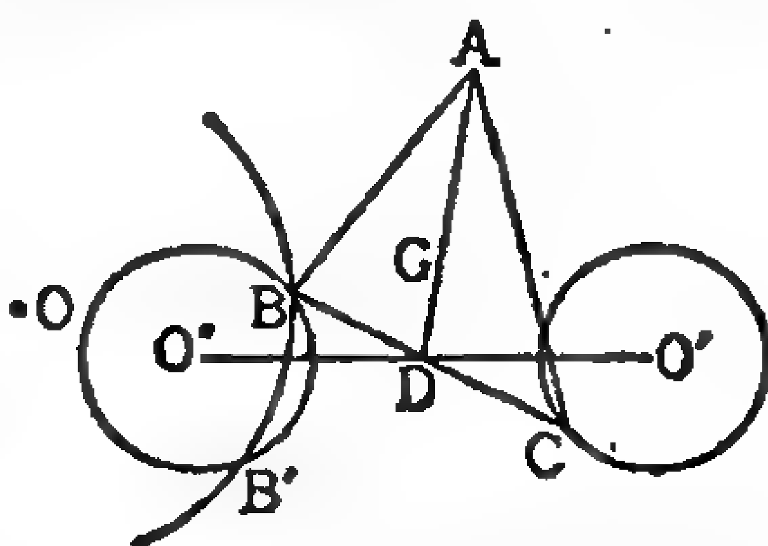
［证明］ 由作图知 $X\parallel E'X'$，$ED=DE'$，

$$\therefore\quad BD=DC,\ 且\ AG=\frac{2}{3}AD.$$

因此 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

2447. 已知重心 G 与一顶点 A 的位置，另外两个顶点 B、C 分别在两圆 O、O' 上，求作 $\triangle ABC$.

解 ［作图］ 连结 AG，在其延长线上取一点 D，使 $GD=\frac{1}{2}AG$. 作圆 O' 关于 D 对称的圆 O''，设圆 O 与圆 O'' 的交点为 B，连结 BD. 延长 BD 与圆 O' 的交点为 C，则 $\triangle ABC$ 即为所求的三角形.



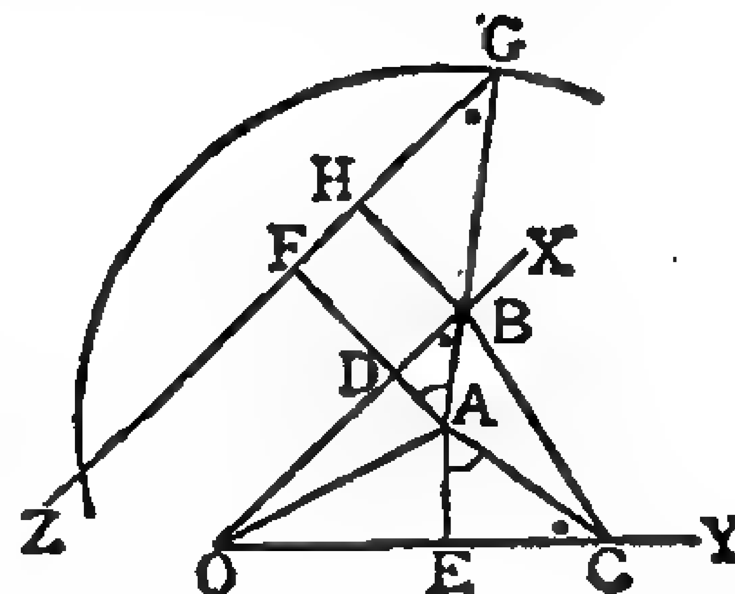
［证明］ 圆 O'' 是关于 D 与圆 O' 对称的，端点分别在两圆 O'、O'' 上的线段 BDC 被 D 平分，所以 D 是 BC 的中点，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线. 而 $AG=\frac{2}{3}AD$，因此 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

2448. 已知 $\angle XOY$ 内的定点 A 为一顶点，在 OX、OY 上分别有顶点 B、C，求作 $\triangle ABC$，使 $AB+AC=m$，$\angle ABO=\angle ACO$.

解 ［分析］ 假定符合条件的 $\triangle ABC$ 已作出. 延长 AB 至 G，使 $BG=AC$. 过 G 引 OX 的平行线 GZ，则

$$\angle G=\angle ABO$$
$$=\angle ACO.$$

过 A、B 向 OY、GZ 分别引垂线 AE、BH，则



$$\triangle BGH\cong\triangle ACE$$

$$(\because\ AC=BG,\ \angle C=\angle G,$$
$$\angle E=\angle H=\angle R).$$

又 $$AG=AB+AC=m,$$

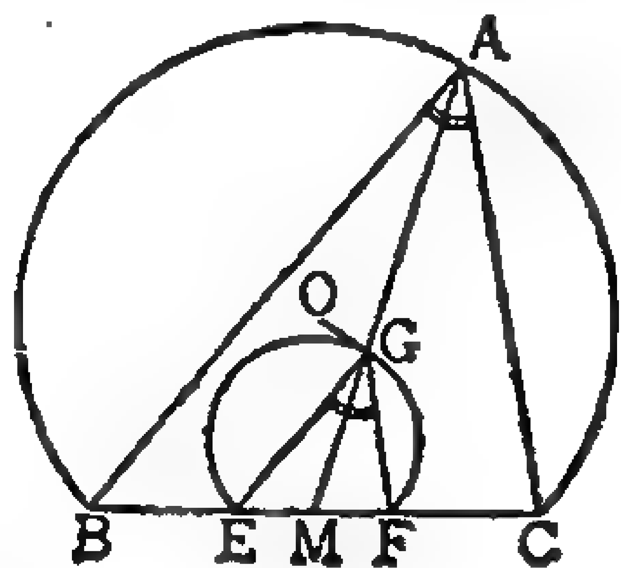
因此可作图如下.

［作图］ 由 A 向 OX、OY 引垂线 AD、AE. 在 AD 的延长线上取点 F，使 $DF=AE$，过 F 作 AF 的垂线，与以 A 为圆心、m 为半径的圆交于点 G，AG 与 OX 交于点 B. 引直线 AC，使 $\angle BAD=\angle CAE$，设与 OY 的交点为 C，则 $\triangle ABC$ 即为所求的三角形.

2449. 求作底边 $BC(=a)$，$\angle A(=\alpha)$，重心 G 与外心 O 的距离为 m 的三角形 ABC.

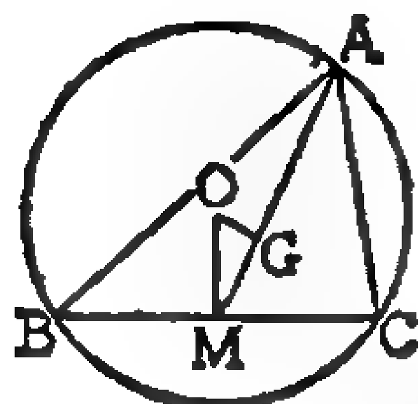
解 作长为 a 的线段 BC，以 BC 为弦作含角 α 的弓形弧，此弧的中心为 O. 设 BC 的

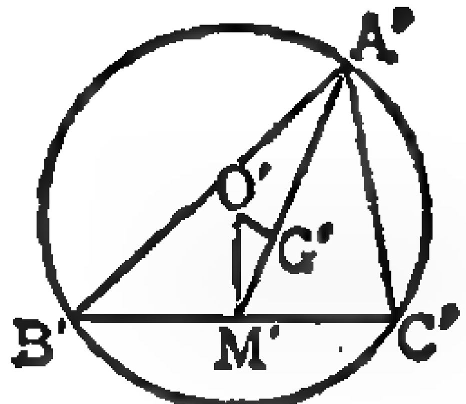
中点为M，在MB、MC上分别取点E、F，使$ME=MF=\frac{1}{3}MB$. 以EF为弦作含角α的弓形弧，则此弧是$\triangle ABC$重心的轨迹(问题1801)。在此弧上求点G，使$OG=m$，延长MG与以O为中心的弧的交点为A，则$\triangle ABC$即为所求。



2450. 已知外接圆O的位置与大小，边BC的长为a，重心G的位置，求作$\triangle ABC$.

解　因BC定长，外接圆的位置与大小一定，$\angle A$的大小一定。又G的位置确定，则OG的长一定(设其为m)。由于$\angle A=\alpha$, $BC=a$, $OG=m$，作适合上题的另一$\triangle A'B'C'$，使$\angle A'=\alpha$, $B'C'=a$, $O'G'=m$ (O'为外心，G'为重心)，则$\triangle O'M'G'$确定。若作与它全等的$\triangle OGM$，从而$\triangle ABC$确定。





2451. 已知底边$BC(=a)$, $\angle B(=\theta)$，边AC与高AH的差$(=m)$，求作$\triangle ABC$.

解　[分析]　设符合条件的$\triangle ABC$已作出。在高AH的延长线上取点D，使$AD=AC$. 过D作BC的平行线，则$AC-AH=AD-AH=DH=m$. 因此可作图如下。

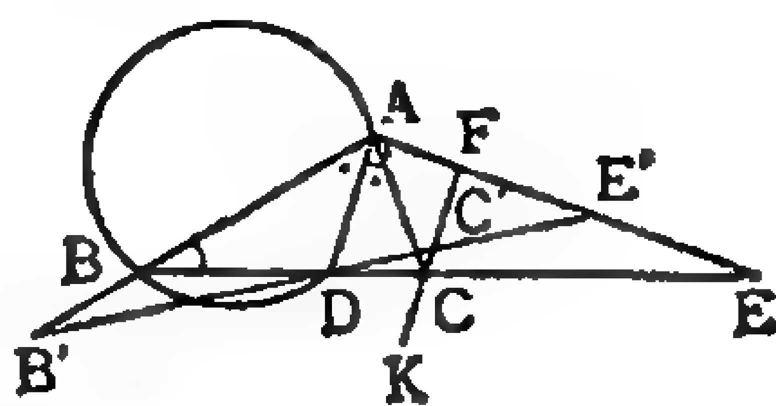
[作图]　取$BC=a$，过B引与BC的夹角为θ的射线BX，引与BC的距离为m的平行线EF，在EX上取一点A，由A向EF引垂线AD，使$AD=AC$ (问题1941)，则$\triangle ABC$是所求的三角形。

[证明]　由作图知$BC=a$, $\angle B=\theta$，设AD与BC的交点为H，因为$AC=AD$，所以$AC-AH=DH=m$.

2452. 已知$\angle A$的平分线$AD(=l)$, $\angle B(=\theta)$，从顶点C到AD的距离$(=m)$，求作$\triangle ABC$.

解　[分析]　假定符合条件的$\triangle ABC$已作出。设$\angle A$的外角平分线与BC的延长线的交点为E，则

$BD:DC=BE:CE$.



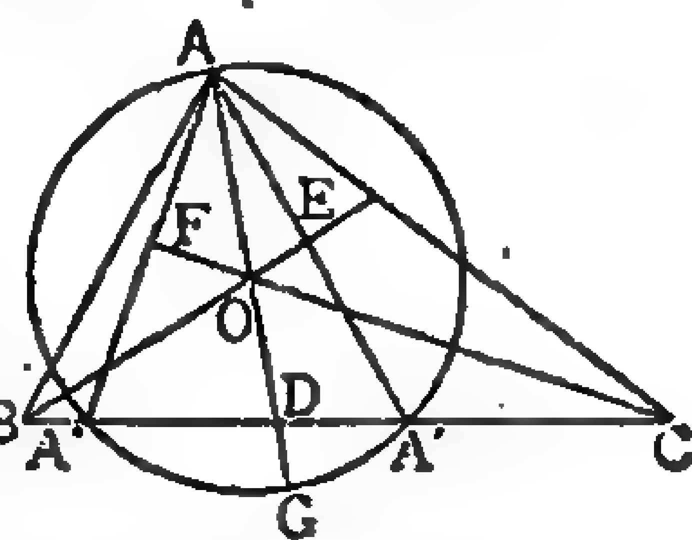
因此B、D、C、E构成调和点列。故可作图如下。

[作图]　作$AD=l$，以AD为弦，作含角θ的弓形弧。过A作AD的垂线，在垂线上以AD为弦弓形弧的另一侧取点F，使$AF=m$，过F作AD的平行线FK. 然后过D引直线与FK交于C'，与AF的延长线交于E'. 在此直线上求B'，使$E'C':C'D=E'B':DB'$. 连结$B'A$，与弓形弧的交点为B. 连结BD的直线与FK的交点为C，与AFE'的交点为E，则$\triangle ABC$是所求的三角形。

[证明]　由作图知，B'、D、C'、E'是调和点列，所以FB'、FD、FC'、FE'是调和线束。因而B、D、C、E是调和点列。这样一来，AB、AD、AC、AE构成调和线束。又$AD\perp AE$，所以AD成为$\angle BAC$的平分线。根据作图$AD=l$, $\angle B=\theta$. 从C到AD的距离等于$FA=m$. 所以$\triangle ABC$是符合条件的三角形。

2453. 已知$\angle A$的平分线$AD(=l)$,
$AB-BD(=m)$, $AC-CD(=n)$,
求作$\triangle ABC$.

解　[分析]　在边BC上，若取BA'、CA''分别等于BA、CA. 则DA'、DA''分别为m、n. 作外接于$\triangle AA'A''$的圆，则此圆与原三角形的内接圆是同心圆。



设$\angle B$、$\angle C$的平分线的交点为O，则BO是等腰$\triangle BAA'$的顶角平分线，垂直平分AA'. 同样，CO也垂直平分AA''. 因此O也是$\triangle AA'A''$的外心。设AD的延长线与圆$AA'A''$的交点为G，则AG是直径。因$AD\cdot DG=A'D\cdot A''D$，可以求出DG. 因此可作图如下。

[作图]　求符合$l\cdot x=m\cdot n$的线段x，以l

$+x$为直径作圆．在任意直径AOG上取$AD=l$，设以D为圆心、m为半径的圆与上面所作的圆的交点为A'，$A'D$与原来的圆的交点为A''，AA'、AA''的垂直平分线与$A'A''$的延长线的交点分别为B、C，则$\triangle ABC$即为所求的三角形．

2454． 已知分别以$m:n$，$p:q$，$r:s$内分三边BC、CA、AB的点P、Q、R的位置，求作$\triangle ABC$．

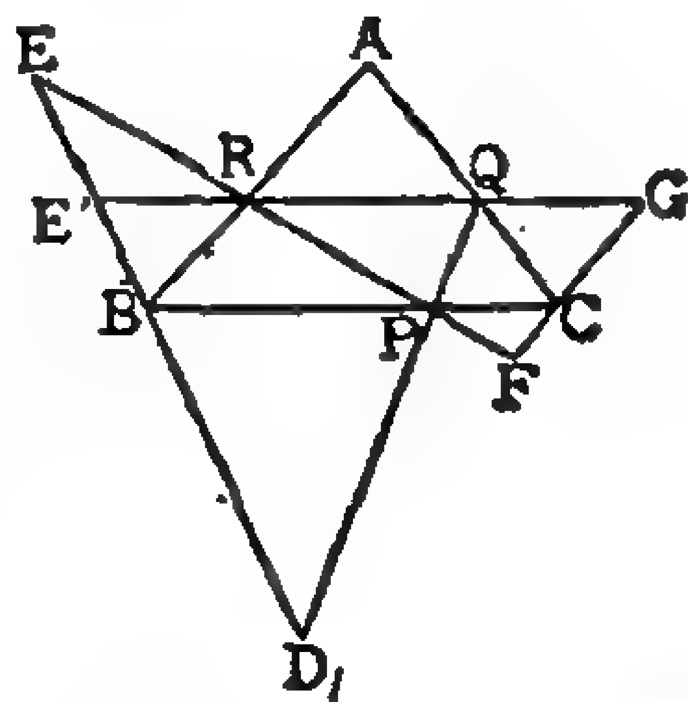
解 ［分析］ 设$\triangle ABC$为满足条件的三角形，从B引AC的平行线，与QP、QR的延长线的交点分别为D、E'，则

$$DP:PQ=BP:PC=m:n,$$

因此D是定点．同样，

$$QR:RE'=AR:RB=r:s,$$

E'也是定点．所以直线DE的位置可以确定，AC的方向一定．同样，过C点作AB的平行线与RP、RQ的延长线分别交于F、G，则F、G为定点，FG为定直线，因而BA的方向也就确定．故可作图如下．

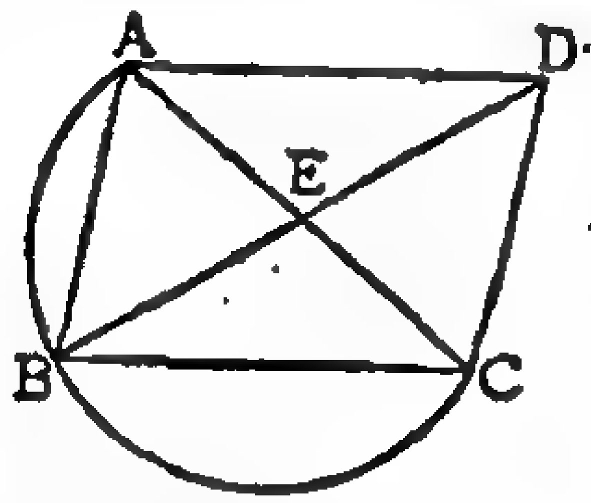


［作图］ 在QP、QR的延长线上分别取点D、E'，使$DP:PQ=m:n$，$QR:RE'=r:s$．再在RQ，RP的延长线上分别取点G、F，使$QG:QR=p:q$，$RP:PF=m:n$．过Q、R分别作DE、FG的平行线，设该两直线的交点为A，AR、DE的交点为B，AQ、GF的交点为C，则$\triangle ABC$即为所求作的三角形．

第四章　四边形和多边形的作图

1．平行四边形

2455． 已知对角线的交角α，角$\angle ABC(=\beta)$，对角线$AC(=d)$，求作平行四边形$ABCD$．



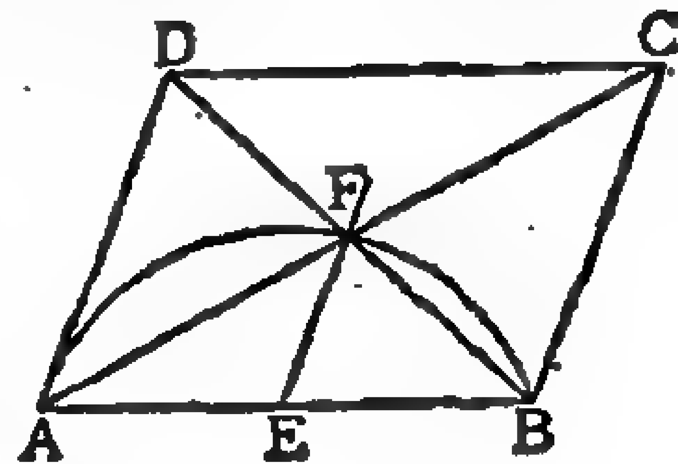
解 ［作图］ 作长为d的线段AC，以AC为弦作含角β的弓形弧．过AC的中点E，作与AE成角α的直线EB，与弓形弧的交点为B．在BE的延长线上取点D，使$ED=BE$，则$ABCD$即为所求的平行四边形．

［证明］ 因对角线AC、BD互相平分，所以$ABCD$为平行四边形．再由作图知，$AC=d$，$\angle ABC=\beta$，$\angle AEB=\alpha$(对角线的交角$=\alpha$)．

2456． 已知对角线的交角α，角$\angle ABC(=\beta)$，边$AB(=a)$，求作平行四边形$ABCD$．

解 ［作图］ 作长为a的线段AB，以AB为弦，作含角α的弓形弧．过AB的中点E，作$\angle AEF=\beta$的直线EF与弓形弧交于F．过A、B分别作EF的平行线与BF的延长线和AF的延长线交于点D、C，则$ABCD$即为所求的平行四边形．

［证明］ 因为E是AB的中点，且$EF\parallel AD$，所以F为BD的中点．同理，F为AC的中点，因此$ABCD$为平行四边形．



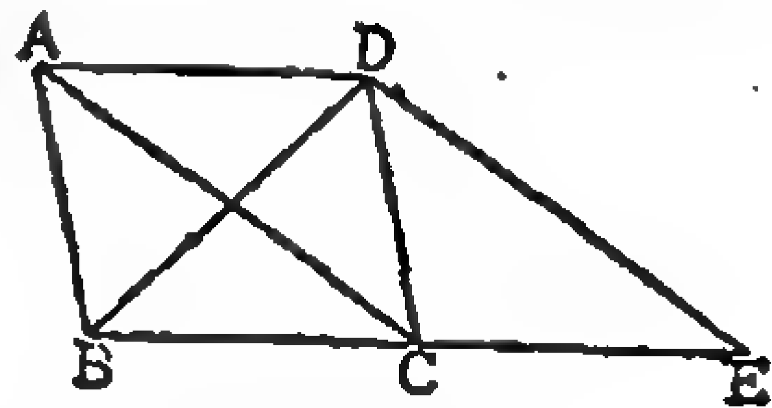
由作图，对角线的交角为α，$AB=a$，

$$\angle ABC=\angle AEF=\beta,$$

故$ABCD$为适合条件的平行四边形．

2457． 已知两邻边$AB(=l)$，$BC(=m)$，两对角线的交角(θ)，求作平行四边形$ABCD$．

解 ［分析］ 设适合条件的平行四边形$ABCD$已作出．过D引AC的平行线DE，与BC的延长线相交于E，则



$$BE=2BC=2m,$$

$$\angle BDE=\theta,\ CD=AB=l.$$

故可作图如下．

［作图］ 作长为$2m$的线段BE，以BE为弦作含角θ的弓形弧，与以BE的中点C为圆心，长l为半径的圆相交于D．若过B作

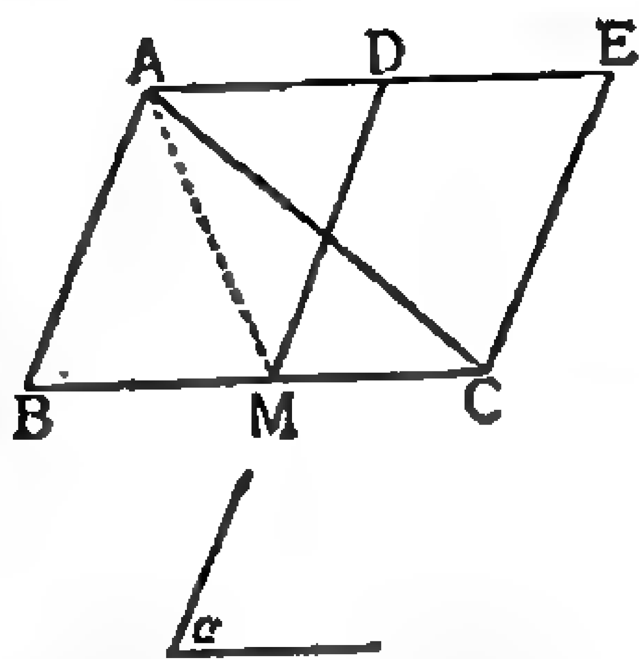
平行且等于 CD 的线段 BA，则 $ABCD$ 即为所求作的平行四边形。

［证明］ 因 $AB \perp\!\!\!= CD$，故 $ABCD$ 为平行四边形，又 $AD \perp\!\!\!= CE$，则 $ACED$ 也为平行四边形。所以 $AC \perp\!\!\!= DE$，从而，对角线的交角 θ 等于 $\angle BDE$，

且 $BC=\frac{1}{2}BE=m,\ AB=CD=l.$

2458. 作与已知 $\triangle ABC$ 等积的平行四边形，且使它的一个角等于已知角 α。

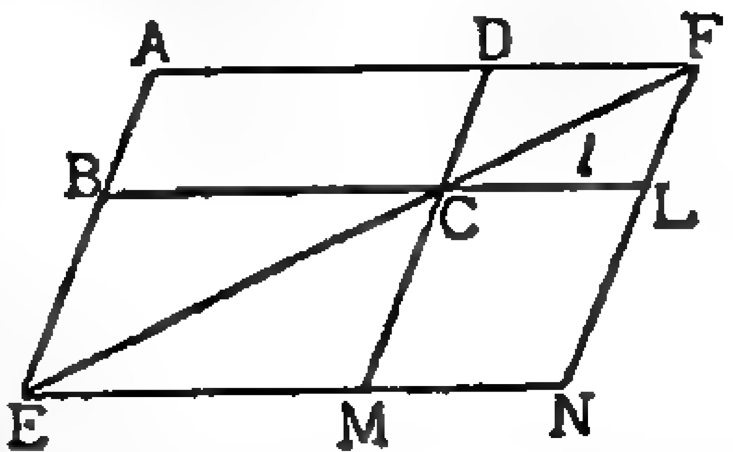
解 ［作图］ 过 BC 的中点 M 作 $\angle CMD=\alpha$ 的直线 MD，过 A 作 CM 的平行直线与 MD 的交点为 D，在 AD 的延长线上取点 E，使 $DE=MC$，则 $DMCE$ 为所求作的平行四边形。



［证明］ 因为 $DE \perp\!\!\!= MC$，所以 $DMCE$ 为平行四边形，又 $AE \parallel BC$，$CM=\frac{1}{2}BC$ 所以 $S_{\triangle ABC}=\square DMCE$ 面积。而 $\angle DMC=\alpha$，故 $DMCE$ 满足已知条件。

2459. 求作与已知三角形 P 等积的平行四边形，且使它的一边为已知长 l，一个角等于已知角 α。

解 ［作图］ 作平行四边形 $ABCD$ 与已知 P 等积，且 $\angle ABC$ 等于已知角 α（参照上题），延长 BC 到 L，使 $CL=l$，过 L 作 CD 的平行线交 AD 的延长线于 F，连结 FC 并延长交 AB 的延长线于 E。过 E 作 BL 的平行线分别与 DC、FL 相交于点 M、N，则 $CMNL$ 即为所求作的平行四边形。



［证明］ 因为 $\square ABCD$ 与 $\square CMNL$ 成为沿对角线 EF 的平行四边形的余形，所以是等积的。而

$$\square ABCD=P,$$

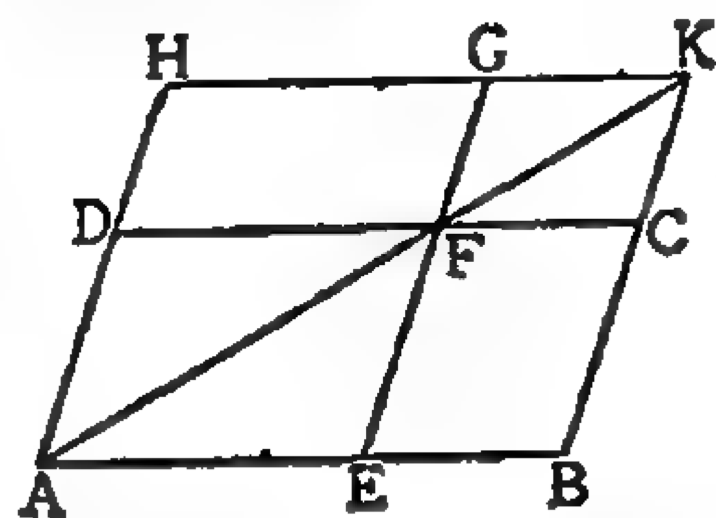
$$\therefore\ \square CMNL=P$$

且 $CL=l$，及 $\angle M=\angle ABC=\alpha$.

因此 $CMNL$ 为所求作的平行四边形。

2460. 求作与已知平行四边形 $ABCD$ 等角又等积的平行四边形，且使它们的一边长等于定线段 l。

解 ［作图］ 在 AB（或它的延长线）上作 AE 等于定长 l，过 E 作 BC 的平行线与 DC（或它的延长线）的交点为 F，AF（或延长线）与 BC 的交点为 K。过 K 作与 AB 的平行线与 EF、AD（或延长线）分别交于点 G、H，则 $AEGH$ 即为所求作的平行四边形。



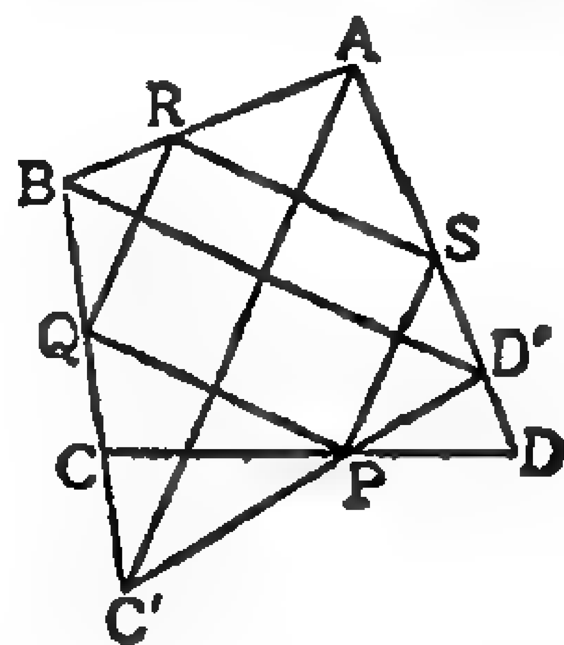
［证明］ F（或 K）为平行四边形 $ABKH$（或 $AEFD$）对角线上的点，由于

$\square BCFE$ 面积 $=\square DFGH$ 面积（余形），

$\therefore$ $\square ABCD$ 面积 $=\square AEGH$ 面积。

2461. 求作两组对边定向，且与已知四边形 $ABCD$ 内接的平行四边形。

解 ［作图］ 过 A、B 作给定方向的直线 AC'、BD'，设它们与直线 BC、AD 的交点分别为 C'、D'，$C'D'$ 与 CD 的交点为 P。过 P 作与 AC'、BD' 平行的直线 PS、PQ，与边 AD、BC 的交点为 S、Q。过 Q 作与 $C'A$ 平行的直线 QR，与 AB 的交点为 R，则四边形 $PQRS$ 即为所求作的内接平行四边形。

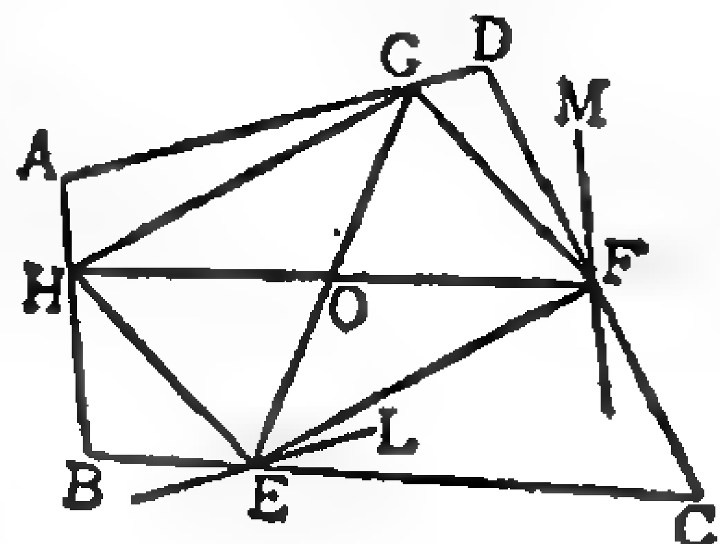


［证明］ $\frac{AS}{SD'}=\frac{C'P}{PD'}=\frac{C'Q}{BQ}=\frac{AR}{BR}$，

PQ、RS 都与 BD' 平行，PS、RQ 都与 AC' 平行，所以 $PQRS$ 即为所求作的平行四边形。

2462. 求作与已知四边形 $ABCD$ 内接，且以其已知点 O 为中心的平行四边形。

解 ［作图］ 作边 AD 关于点 O 的对称直线 L，与 BC 相交于点 E。作边 AB 关于点 O 的对称直线 M，与边 DC 相交于点 F。设 EO、FO 的延长线与边 AD、AB 的交点为 G、H，则 $EFGH$ 即为所求的平行四边形。



［证明］ 因为 E 是直线 L 上的点，它是边 AD 上点 G 关于 O 的

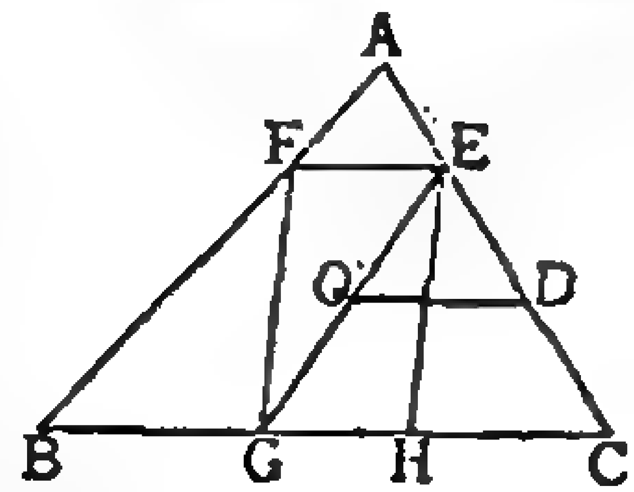
对称点，因此

$$EO=OG,\text{ 同理 } FO=OH,$$

故 $EFGH$ 为平行四边形，它又内接于 $ABCD$，且以点 O 为中心。

2463. 以已知 $\triangle ABC$ 内的点 O 为中心作平行四边形，且使它的一边在 $\triangle ABC$ 的边 BC（或其延长线）上，另外两个顶点分别在另两边上（或其延长线上）。

解 ［作图］ 过 O 作 BC 的平行线与 AC 的交点为 D，在 CA（或延长线）上取点 E，使 $CD=DE$。过 E 作 BC 的平行线与 AB（或延长线）交于点 F，EO 的延长线与 BC 的交点为 G，过 E 作 GF 的平行线与 BC 相交于点 H，则 $EFGH$ 即为所求的平行四边形。



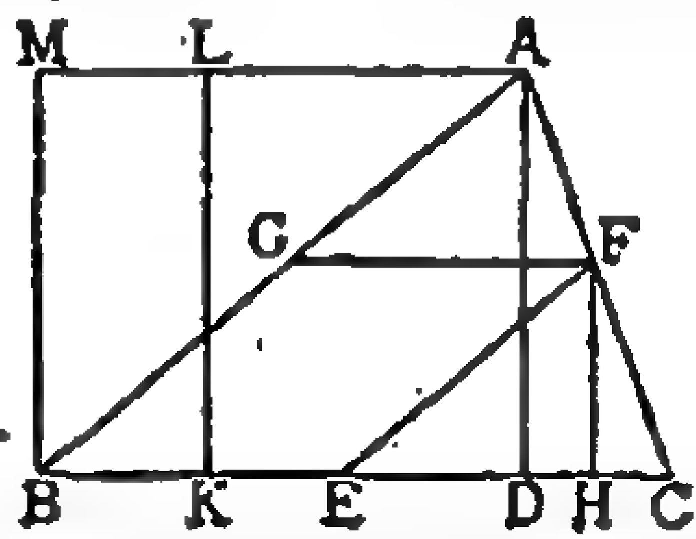
［证明］ 因 $EFGH$ 的两组对边分别平行，故为平行四边形。又因

$$DO\parallel BC,\ CD=DE\text{（作图）},$$

$$\therefore\ EO=OG.$$

故 O 为对角线 EG、FH 的交点，亦即 O 是中心。

2464. 求作内接于已知 $\triangle ABC$ 且与已知平行四边形相似的平行四边形。



解 ［作图］ 设已知平行四边形的一个角为 α，两邻边的比为 $m:n$，过 A 作直线 AD 与 BC 相交于 D，使 $\angle ADC=\alpha$，过 A 作 BC 的平行线 AE，并截取 AE，使

$$AD:AE=m:n,$$

连结 BE 与 AC 相交于 S，过 S 作 BC 的平行线 SP（P 为 SP 与 AB 的交点）。过 P、S 作与 AD 平行的直线 PQ、SR，它们与 BC 的交点分别为 Q、R，则 $PQRS$ 即为所求作的平行四边形。

［证明］ 因 $PQ:AD=BP:BA=PS:AE$，

所以 $\quad PQ:PS=AD:AE=m:n$.

又 $\quad \angle PQR=\angle ADC=\alpha$,

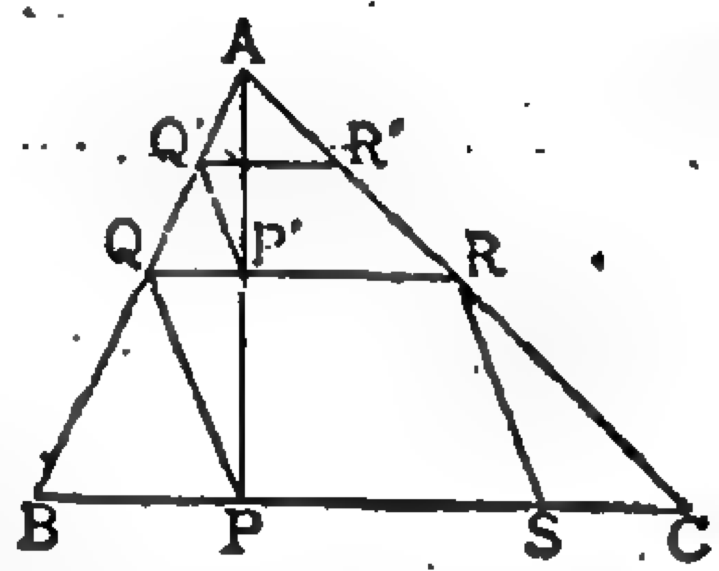
故 $PQRS$ 与已知平行四边形相似。

2465. 求作内接于已知 $\triangle ABC$，两邻边 BE、BG 分别在边 BC、AB 上的平行四边形，且使其面积为 m^2。

解 ［作图］ 作一边等于 $\triangle ABC$ 的高 AD、面积为 m^2 的矩形 $BKLM$。在边 BC 上取一点 E，使

$$BE:BC=BK:EC.$$

设过 E 作 AB 的平行线 EF 与 AC 的交点为 F，过 F 作 BC 的平行线 FG 与 AB 的交点为 G，则 $BEFG$ 即为所求的平行四边形。



［证明］ 从 F 作 BC 的垂线 FH，由于

$$AD:FH=CA:CF=BC:EC,$$

又 $\quad$ 矩形 $BKLM$ 面积 $=AD\cdot BK$,

$\quad\square BEFG$ 面积 $=FH\cdot BE$,

$$\therefore\ \frac{\text{矩形 } BKLM \text{ 面积}}{\square BEFG\text{ 面积}}=\frac{AD\cdot BK}{FH\cdot BE}=\frac{BC\cdot BK}{EC\cdot BE}=1,$$

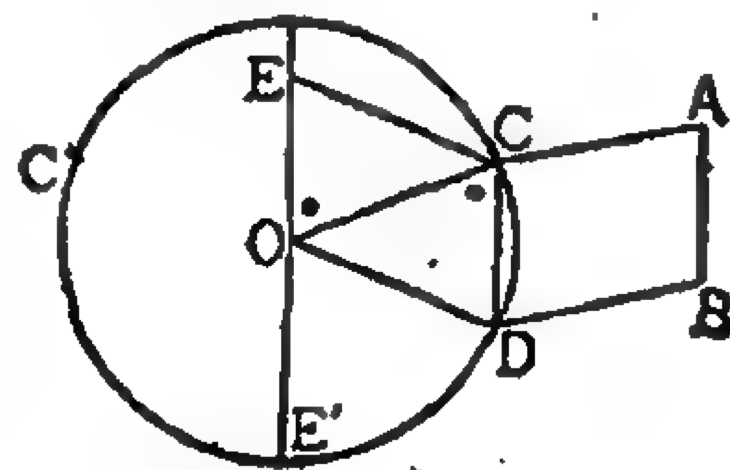
故 $\quad\square BEFG$ 面积 $=$ 矩形 $BKLM$ 面积 $=m^2$.

2466. 作内接于已知 $\triangle ABC$ 的平行四边形，使其两邻边的比为 $m:n$，一边在 BC 上并以 BC 上的已知点 P 为其一个顶点。

解 ［作图］ 任作一条平行于 BC 的直线 $Q'R'$，与 AB、AC 分别相交于 Q'、R'。在 AP 上取一点 P'，使

$$P'Q':Q'R'=m:n.$$

过 P 作 $P'Q'$ 的平行线 PQ，设与 AB 的交点为 Q。过 Q 作平行于 BC 的直线 QR，再作平行于 QP 的直线 RS，则 $PQRS$ 即为所求的平行四边形。



［证明］ 因 $P'Q':PQ=AQ':AQ=Q'R':QR$，所以 $PQ:QR=P'Q':Q'R'=m:n$.

注 若 $P'Q':Q'R'=n:m$，则还有一解。

2467. 在定圆 O 外有两个已知点 A、B，在圆 O 上求两点 C、D，使四边形 $ABDC$ 为平行四边形。

解 ［作图］ 在平行于 AB 的半径（或延长线）上取 $OE=AB$。以 E 为

圆心、圆 O 的半径为半径作圆，设与圆 O 的交点为 C。过 C 作 AB 的平行弦 CD，则 $ABCD$ 为所求的平行四边形。

［证明］ 因 $EO\parallel CD$，所以

$$\angle COE=\angle OCD,$$

两个等腰三角形 CEO，OCD 的底角与腰对应相等而全等。所以 $EO=CD$。

由作图　$EO=AB$，　$\therefore$　$AB=CD$。

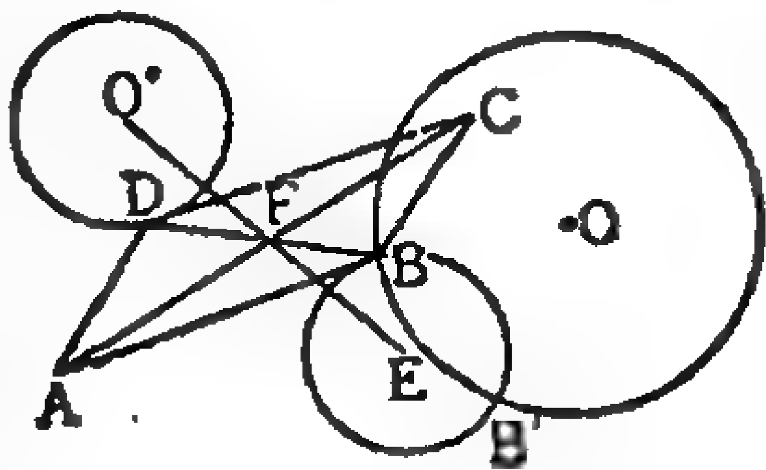
又 $AB\parallel OE\parallel CD$，所以 $ABCD$ 为平行四边形。

［讨论］ 以 E 为圆心、圆 O 的半径为半径的弧与圆 O 一般有两个交点(C 或 C')，故有两解；若 AB 的长与圆 O 的直径相等，则有一解；若 AB 的长大于圆 O 的直径则无解。

注　在平行于 AB 的圆 O 的直径上，还有等于 AB 的一点 E'，若用 E' 作图时，原来的点 C 应为点 D，而点 D 为点 C。

2468. 作以已知两点 A、C 为相对角顶点，其它两顶点在两已知圆 O、O' 上的平行四边形 $ABCD$。

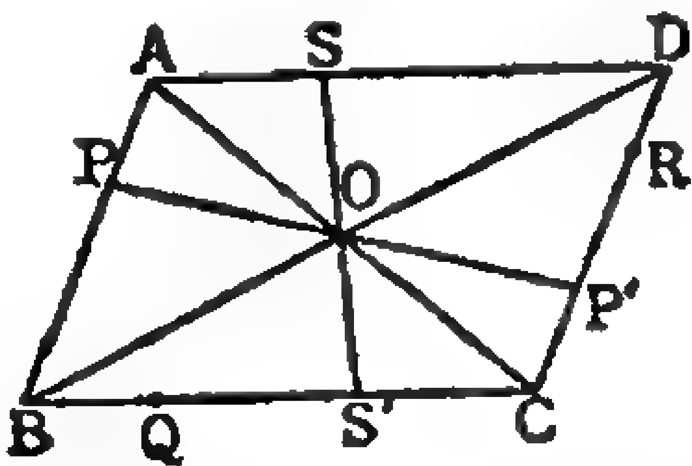
解　［作图］ 关于 AC 的中点 F，作 O' 的对称点 E。以 E 为圆心，作与圆 O' 相等的圆，与圆 O 相交于点 B。在 BF 的延长线上取点 D，使 $BF=FD$，则 $ABCD$ 为所求的平行四边形。



［证明］ 因为 $AF=FC$，$BF=DF$，所以 $ABCD$ 为平行四边形。又圆 O'、圆 E 关于点 F 对称，所以 D 在圆 O' 上。

2469. 作平行四边形，使它们的对角线交点为已知点 O，且四边分别过已知点 P、Q、R、S。

解．设 P、S 关于 O 的对称点分别为 P'、S'。连结 $P'R$，$S'Q$，它们交于点 C。再作 C 关于 O 的对称点 A，连结 AP、AS，它们分别与 CQ、CR 交于点 B、D，则 $ABCD$ 为所求的平行四边形。



［证明］ 因点 O 为 AC、PP'、SS' 的中点，所以 $AP'CP$，$ASCS'$ 是平行四边形。因此 $ABCD$ 也是平行四边形。由作图，P、Q、R、S 在 $ABCD$ 的各边上，又 O 为对角线 AC 的中点，故所求四边形适合于已知条件。再由作图，从 $P'R$，$S'Q$ 一定相交可以看出，若 P' 与 R 重合或 S' 与 Q 重合时，则本题有无数解。

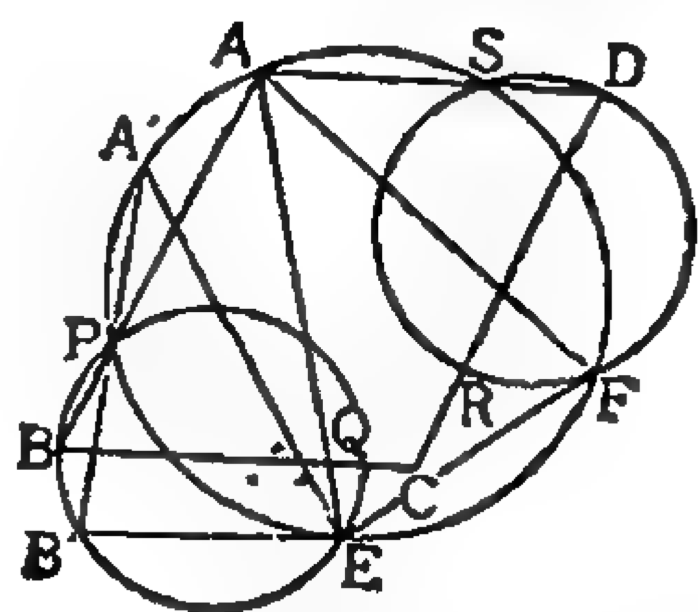
2470. 求作已知各个角、周长为 $2p$，且各边分别通过已知点 P、Q、R、S 的平行四边形 $ABCD$。

解　假定符合条件的平行四边形 $ABCD$ 已作出。设 $\triangle APS$、$\triangle BPQ$ 的外接圆的第二个交点为 E，过 P 引任意的倍弦 $A'B'$，则

$$\triangle ABE\backsim\triangle A'B'E,$$

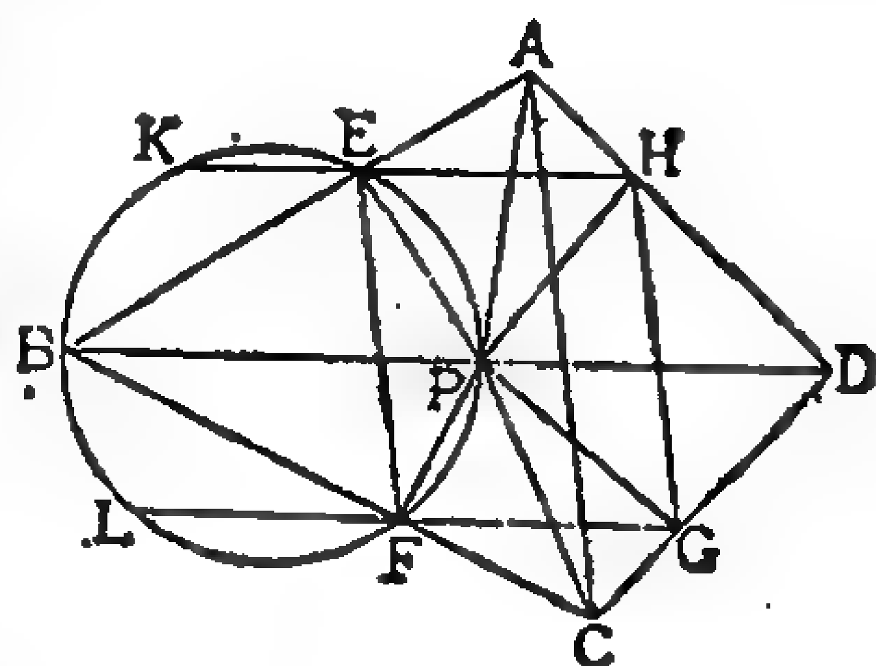
$$\therefore\quad AB:AE=A'B':A'E.\qquad①$$

但由于 $\angle A$、$\angle B$ 一定，P、S、Q 的位置确定，可作圆 PAS、PBQ。因此 E 是定点。可求出 $A'B'$：$A'E$，故在①式中设 $AB:AE=m:1$。同样，设圆 APS 与圆 DSR 的第二个交点为 F，则 $AD:AF$ 是定值(设为 $n:1$)。因此 $AB=m\cdot AE$，$AD=n\cdot AF$。但 $AB+AD=P$，所以 $P=m\cdot AE+n\cdot AF$。已经知道 $\triangle AEF$ 的边 EF、$\angle EAF$ 与 $m\cdot AE+n\cdot AF$，就可以作出（问题 **2317**）。因此，当点 A 确定后，其他三个顶点就能够依次确定。



2471. 在已知四边形 $ABCD$ 内求一点 P。由 P 向各边所引垂线的垂足分别为 E、F、G、H，求作平行四边形 $EFGH$。

解　［分析］ 设符合条件的平行四边形已作出。作外接于四边形 $AEPH$、$BEPF$、$CFPG$、$DGPH$ 的圆，延长 HE、GF 与四边形 $PEBF$ 的外接圆分别交于 K、L，则 $EK\parallel FL$，从而 $\overset{\frown}{KBL}=\overset{\frown}{EPF}$。



$$\therefore\quad \angle KEB+\angle BFL=\angle EBF.$$

但　　$\angle KEB=\angle AEH=\angle APH,$

$$\angle BFL=\angle CFG=\angle CPG,$$

$\therefore\quad \angle APH+\angle CPG=\angle ABC.$

而　　$\angle HPG=2\angle R-\angle ADC,$

将此两式各边相加，则

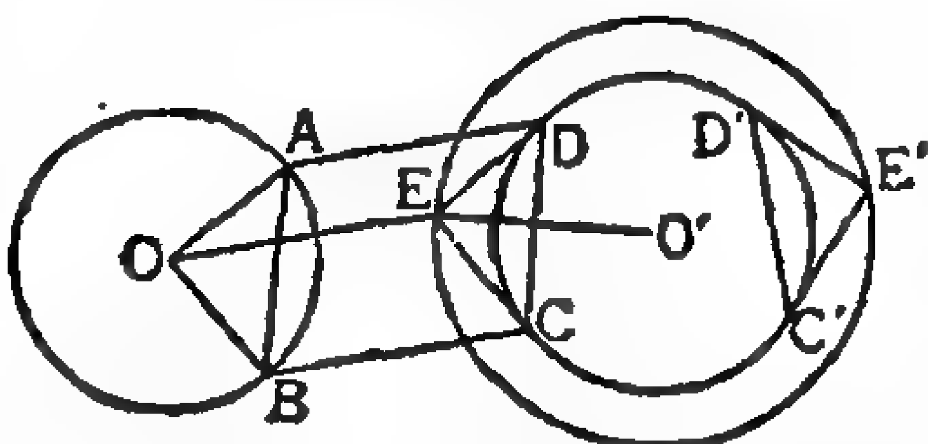
$\angle APC=\angle ABC+2\angle R-\angle ADC,$

因此可作图如下。

［作图］　以对角线AC为弦，在与B同一侧作含角等于$(\angle ABC+2\angle R-\angle ADC)$的弓形弧。又以对角线$BD$为弦，在与$C$同一侧，作含角等于$(\angle BCD+2\angle R-\angle BAD)$的弓形弧。设这两弧的交点为$P$，由$P$向各边引垂线，其垂足分别为$E$、$F$、$G$、$H$，则$EFGH$为所求的平行四边形。

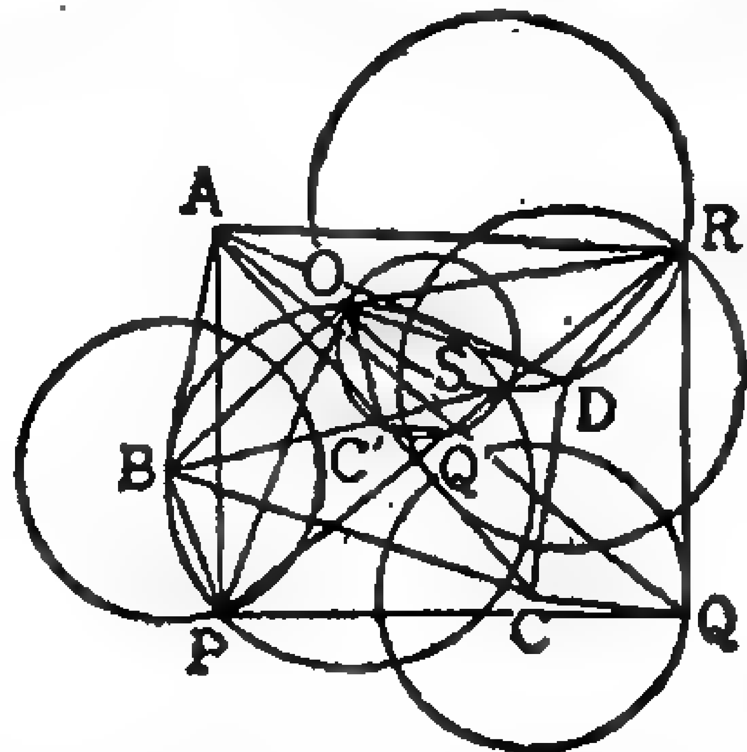
2472.　在两定圆O、O'上各有两个顶点A、B与C、D，作平行四边形$ABCD$，使$AB=a$，$BC=b$。

解　［分析］　假定符合条件的平行四边形$ABCD$已作出。过O作直线OE，使$OE \mathrel{\underline{\parallel}} AD$，则$\triangle DEC\cong\triangle AOB$，而$AB=a$，$OA=OB=r$（$r$为圆$O$的半径），因此，$\triangle AOB$的形状和大小一定。从而$\triangle DEC$的形状与大小也一定。故$O'E$的长也一定。可作图如下。



［作图］　过圆O'引等于a的弦$D'C'$，以$D'C'$为底边作$\triangle E'D'C'$。设$E'D'=E'C'=r$，以O'为圆心、$O'E'$为半径的圆与以O为圆心、b为半径的圆的交点为E，在圆O'引垂直于EO'的弦CD。设$DC=a$，过D、C引平行且等于OE的线段，与圆O的交点分别为A、B，则$ABCD$即为所求的平行四边形。

2473.　已知以平行四边形$ABCD$的三个顶点B、C、D为圆心的三个定圆，在顶点A上有已知角α，求作平行四边形$APQR$，使含有已知角α，并且其他三个顶点在三个定圆周上。



解　假定符合条件的平行四边形已作出。设AC的中点为C'，AQ的中点为Q'，则

$$C'Q'=\frac{1}{2}CQ.$$

设PR与BD的交点为S，作$\triangle SC'Q'$的外接圆与$\triangle SBP$的外接圆，它们的第二个交点为O，则

$$\angle BOP=\angle BSP=\angle C'OQ',$$
$$\angle OPB=\angle OSB=\angle OQ'C'.$$
$$\therefore\quad \triangle OBP\backsim\triangle OC'Q',$$

因而　$OB:OC'=BP:C'Q'$（一定）。　①

而　$\angle OBC'=\angle OPQ',$

又　$\angle OC'B=2\angle R-\angle OC'S$
$=2\angle R-\angle OQ'S$
$=\angle OQ'P,$

$\therefore\quad \triangle OBC'\backsim\triangle OPQ',$

因而　$OB:OP=BC':PQ'=2BC':2PQ'$
$=BD:PR.$

且　$\angle OBD=\angle OPR,$

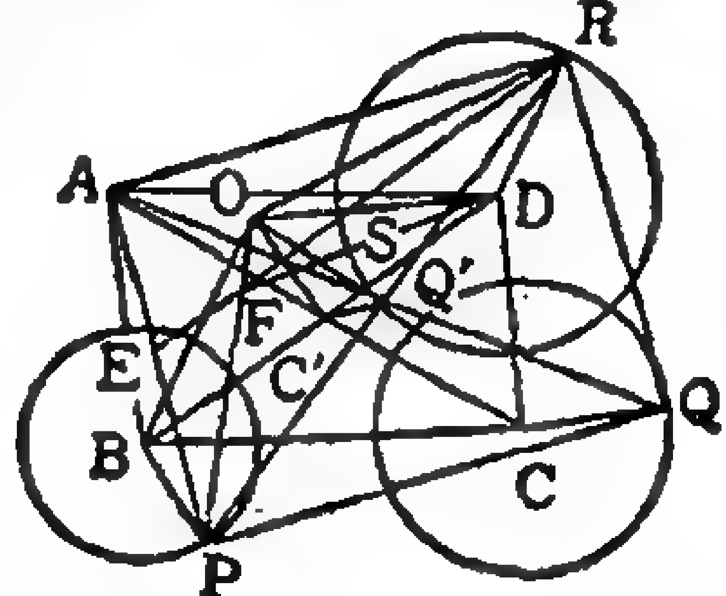
$\therefore\quad \triangle OBD\backsim\triangle OPR,$

因而　$\triangle OC'D\backsim\triangle OQ'R,$

$\therefore\quad \angle ODC'=\angle ORQ',$

即　$\angle ODS=\angle ORS.$

因此O、S、D、R四点共圆，$\triangle SBP$的外接圆，$\triangle SC'Q'$的外接圆与$\triangle SDR$的外接圆相交于一点O，从而



$\triangle OC'Q'\backsim\triangle ODR,$

$\therefore\quad OC':OD$
$=C'Q':DR$（一定）。　②

由①、②知O是定点，又由于

$$\triangle OBP\backsim\triangle ODR,$$

所以　$OB:OD=BP:DR,$

$$\angle OBP=\angle ODR,\ \angle OPB=\angle ORD.$$

引RE，使　$\angle DRE=\angle BPA,$

引DF，使　$\angle RDF=\angle PBA,$

设RE、DF的交点为F，RE、AP的交点为E，则$\triangle ABP\backsim\triangle FDR,$

$\therefore\quad AB:FD=BP:DR=OB:OD.$

但　$\angle ABP-\angle OBP=\angle FDR-\angle ODR,$

即　$\angle ABO=\angle FDO,$

所以　$\triangle ABO\backsim\triangle FDO,$

$\therefore\quad \angle AOB=\angle FOD.$

因此F是定点。又由

$$\angle OPA=\angle OPB-\angle APB$$
$$=\angle ORD-\angle FRD$$
$$=\angle ORF,$$

所以 O、R、P、E 四点共圆。

$$\angle PER=\angle POR=\angle BOD\ (\text{定角}),$$
$$\therefore\quad \angle ARF=\angle PER-\angle PAR$$
$$=\angle BOD-\alpha.$$

由于 $\angle BOD-\alpha$ 是定角，若 F 确定，则 R 也确定。关于 BD 在与 A 的同一侧确定 O，使

$$OB:OC'=BP:C'Q',$$
$$OC':OD=C'Q':DR.$$

确定点 F，使

$$\angle ABO=\angle FDO,\ \angle AOB=\angle FOD.$$

以 AF 为弦作含角 $(\angle BOD-\alpha)$ 的弓形弧，设它与圆 D 相交于 R，则 R 即为所求平行四边形的一个顶点。因而另外的顶点 P、Q 也可求出。

2. 矩形

2474. 已知两邻边的和 m 与面积 n^2，求作矩形。

解 [作图] 取 $AB=m$，以此为直径作半圆，从 A 作 AB 的垂线 AC 等于 n. 过 C 引平行于 AB 的直线与圆周相交于 D，由 D 向 AB 引垂线 DE，以 AE、BE 为两邻边作矩形 $AEFG$，则此矩形即为所求。

[证明] 由于 DE 垂直于直径 AB，所以 DE 是 AE 与 EB 的比例中项。

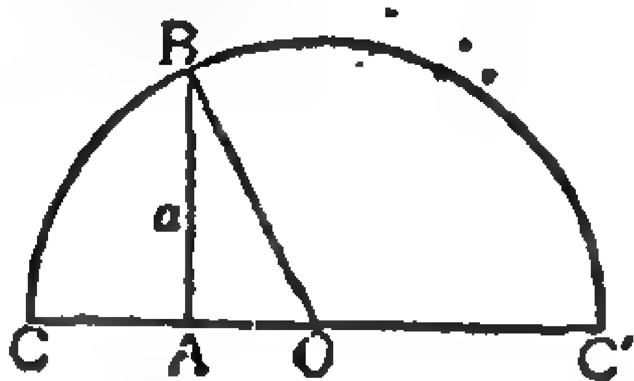
$$\therefore\quad AE\cdot EB=DE^2=AC^2=n^2.$$

又　　$AE+EF=AE+EB=AB=m$，

因此 $AEFG$ 为所求的矩形。

2475. 已知相邻两边的差 d 和面积 a^2，求作矩形。

解 [作图] 作 $OA=\frac{1}{2}d$、$AB=a$、$\angle A=\angle R$ 的直角 $\triangle OAB$. 以 O 为圆心、OB 为半径作圆，与 OA 的延长线相交于 C、C'，则以 AC'、AC 为两邻边的矩形即为所求的矩形。



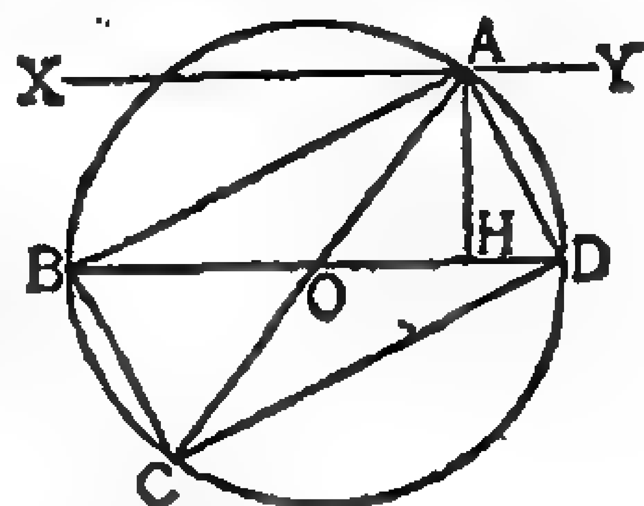
[证明] $AC=OC-OA$，$AC'=OC+OA$，

$$\therefore\quad AC'-AC=2OA=d,$$

且　　$AC\cdot AC'=AB^2=a^2$.

因此以 AC'、AC 为两邻边的矩形即为所求。

2476. 求作内接于已知圆 O 的矩形，使其面积等于已知正方形的面积 m^2.



解 设 $ABCD$ 为所求的矩形，从 A 向直径 BD 引垂线 AH，则

$$\angle BAD=\angle R,$$
$$\therefore\quad AB\cdot AD=BD\cdot AH.$$

设圆 O 的直径为 $2r$，$ABCD$ 的面积为 m^2. 由上式得 $BD\cdot AH=m^2$，所以

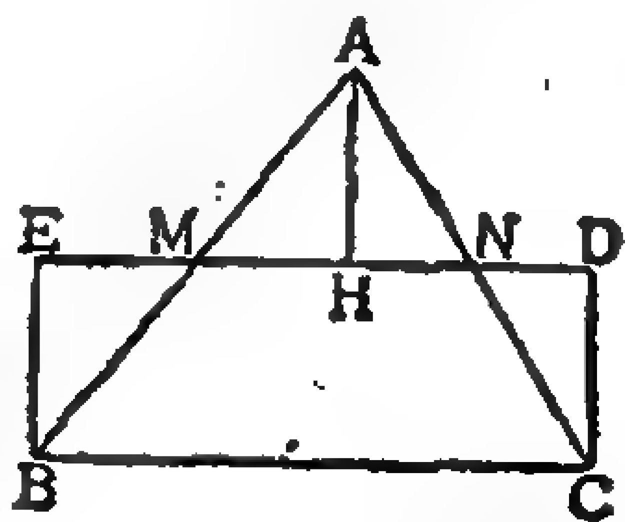
$$2r\cdot AH=m^2,$$

因而　　$AH=\frac{m^2}{2r}$.

因此 AH 为定长. 故可作图如下.

引圆 O 的任意直径 BD，引平行于 BD 且距离为 $\frac{m^2}{2r}$ 的直线 XY，设 XY 与圆的交点为 A. 作过 A 的直径 AC，则 $ABCD$ 为所求的矩形。

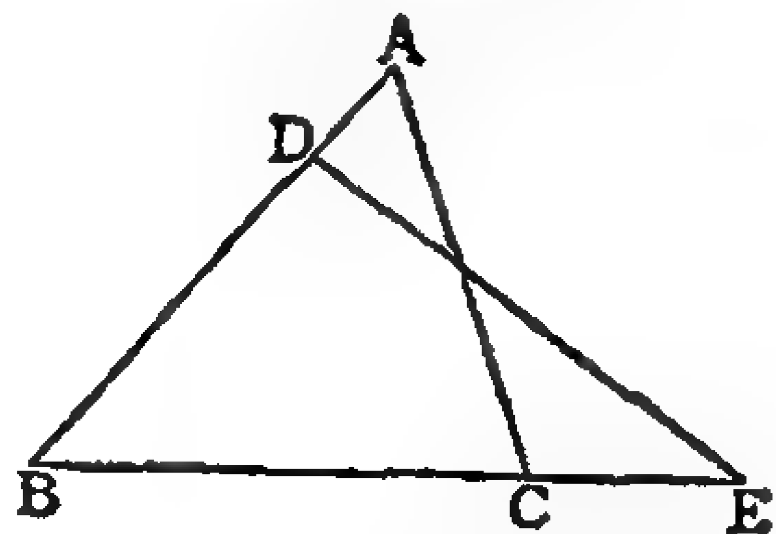
2477. 试作与定三角形 ABC 同底、等积的矩形 $BCDE$.



解 设边 AB、AC 的中点分别为 M、N，从 B、C 向过 M、N 的直线分别引垂线，设其垂足为 E、D，则 $BCDE$ 为所求的矩形。因为，从 A 向 DE 引垂线 AH，则

$$\triangle AMH\cong\triangle BME,\ \triangle ANH\cong\triangle CND.$$
$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\text{矩形 } BCDE \text{ 面积}.$$

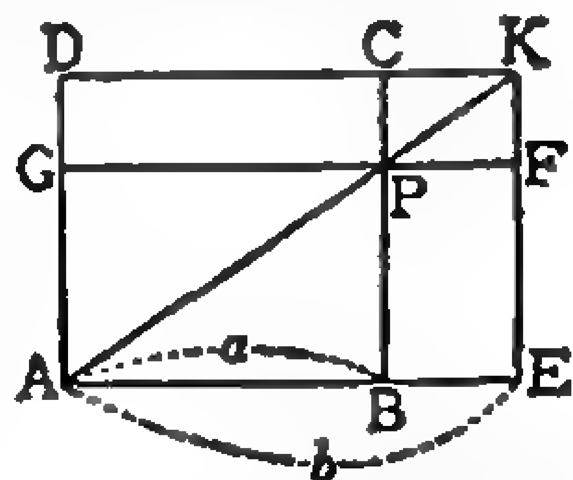
2478. 求作与已知 $\triangle ABC$ 等积，且一边为 l 的矩形。



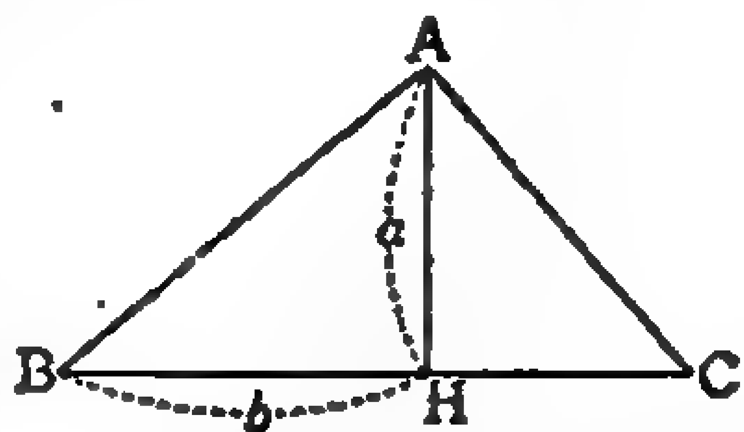
解 在 BC 或它的延长线上取 $BE=l$，以 BE 为边作与 $\triangle ABC$ 等积的 $\triangle DBE$，只要在 BE 上作出与 $\triangle DBE$ 等积的矩形就可以了(参照上题)。

2479. 以已知长 b 为一边，作与已知正方形(面积 a^2)等积的矩形。

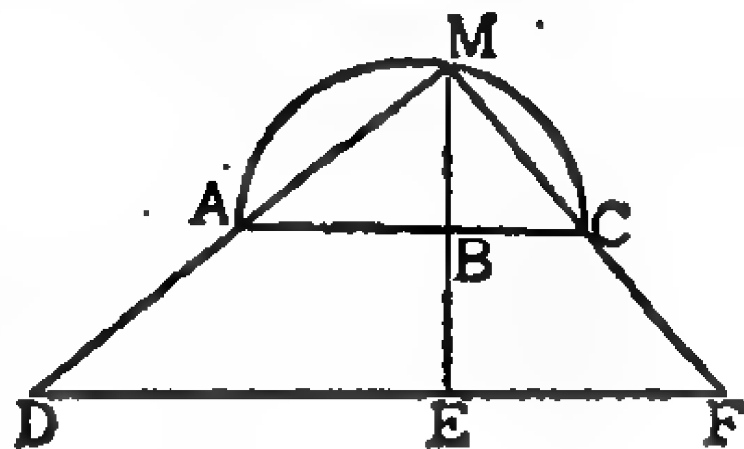
解　(i) 作一边为 a 的正方形 $ABCD$，在边 AB (或其延长线)上取 $AE=b$，过点 E 作 AE 的垂线与 CD 交于 K，过 AK 与 BC 的交点 P 引平行于 AB 的直线，设它与 AD、EK 的交点分别为 G、F，则 $AEFG$ 为所求的矩形。



(ii) 取 $BH=b$，过 H 作 BH 的垂线 AH，使 $AH=a$。过 A 作 AB 的垂线，设它与 BH 的交点为 C，则 BH、CH 就等于所求矩形的两邻边。



2480.　试作与已知正方形等积，且其两邻边的比等于 $m:n$ 的矩形。



解　[作图]　在一直线上按顺序取 A、B、C 三点，使 $AB=m$，$BC=n$。设以 AC 为直径的半圆与过点 B 垂直于 AC 的直线的交点为 M，在 MB(或其延长线)上取点 E，使 ME 与已知正方形的一边相等。设过 E 且平行于 AC 的直线与 MA、MC (或其延长线) 的交点分别为 D、F，则以线段 DE、EF 为两邻边的矩形即为所求。

[证明]　由于 $AC \parallel DF$，

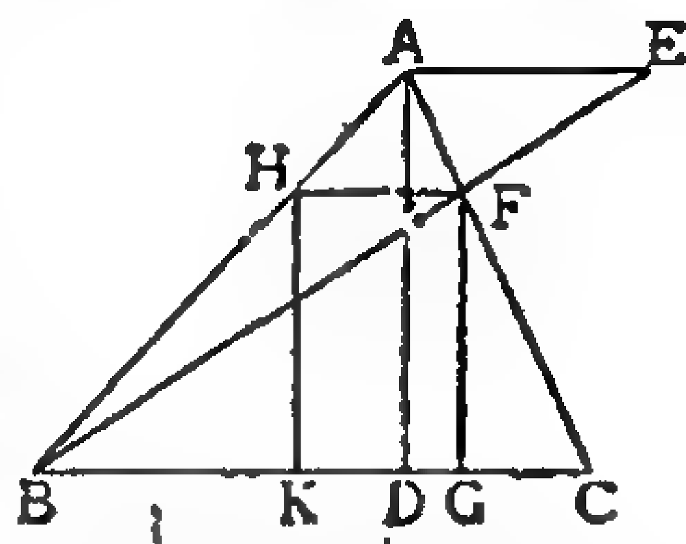
$$\therefore\quad DE:EF=AB:BC=m:n.$$

而 $\triangle DMF$ 是直角三角形，$ME \perp DF$，所以

$$DE \cdot EF=ME^2.$$

因此 DE、FE 等于所求矩形的两邻边。

2481.　求作两边的比为 $m:n$ 的矩形，使它内接于 $\triangle ABC$，且一边在 BC 上。



解　[作图]　过 A 作 BC 的垂线 AD 和平行于 BC 的直线 AE，且使 $AD:AE$ 为 $m:n$。连结 BE 与 AC 交于点 F，由 F 向 BC 引垂线 FG，再从 F 引 BC 的平行线 FH，与 AB 的交点为 H，然后由 H 向 BC 引垂线 HK，则 $FHKG$ 即为所求的矩形。

[证明]　由作图知 $HK \parallel AD$，

所以　$HK:AD=HB:AB$。

又因　$HF \parallel AE$，

所以　$HF:AE=HB:AB$。

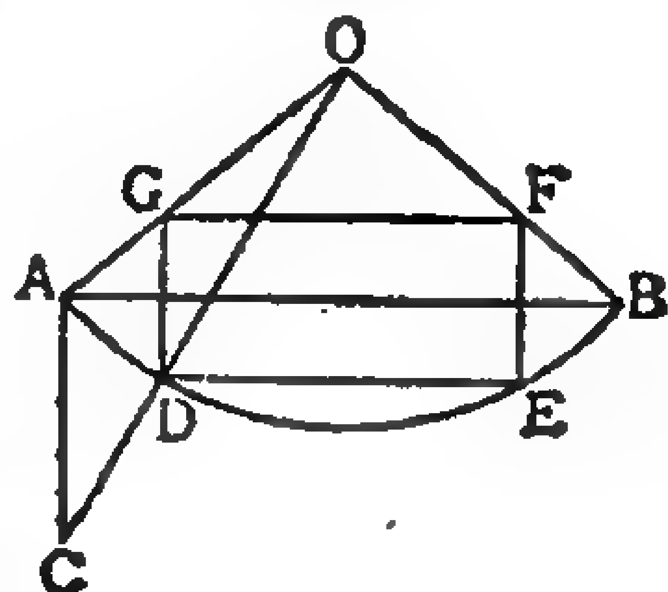
$$\therefore\quad HK:AD=HF:AE,$$

因而　$HK:HF=AD:AE=m:n$。

注　当 $\angle C$ 或 $\angle B$ 为钝角时，则 G 或 K 便在 BC 的延长线上，此时矩形在三角形外，不再是三角形的内接矩形。从严格的内接定义来说这是不能成立的。

2482.　试在扇形 OAB 中作内接矩形，并使其两邻边之比为 $m:n$。

解　[作图]　在扇形 OAB 的弦 AB 上，过 A 引垂线 AC，使 $AB:AC=m:n$。连结 OC，与弧 AB 的交点为 D，过 D 引直线使 $DG \parallel CA$，$DE \parallel AB \parallel GF$，则 $DEFG$ 即为所求的矩形。



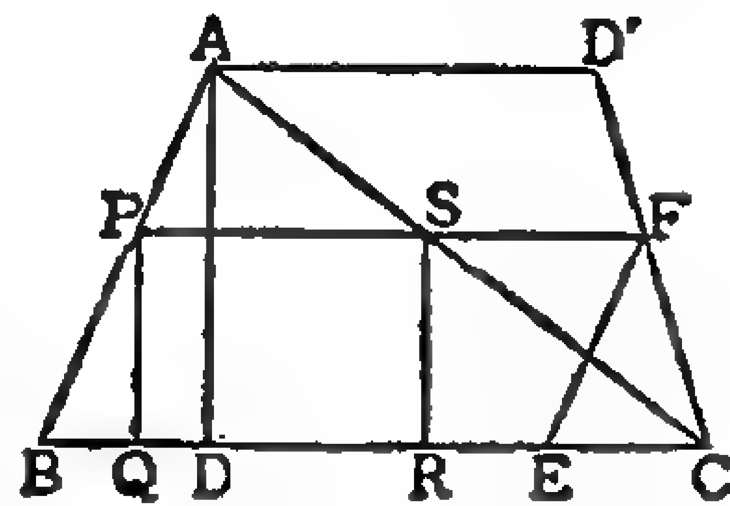
[证明]　由于 $GF \parallel AB$，$GD \parallel AC$，

$$\therefore\quad FG:AB=OG:OA=GD:AC,$$

因此　$FG:GD=AB:AC=m:n$。

而 $DEFG$ 显然是内接于扇形的矩形。

2483.　求作使周长等于已知长度 $2p$ 的矩形，使它内接于已知 $\triangle ABC$，且一边在边 BC 上。



解　[作图]　从 A 作 BC 的垂线 AD，过 A 引平行于 BC 的直线 AD'，取 $AD'=AD$。再在 BC 上取 $BE=p$，由 E 引平行于 AB 的直线 EF，与 CD' 的交点为 F。过 F 引平行于 BC 的直线 FP，与 AB、AC 的交点分别为 P、S，从 P、S 向 BC 作垂线 PQ、SR，则 $PQRS$ 为所求的矩形。

[证明]　由于 $PBEF$ 是平行四边形，所以

$$PF=BE=p,$$

$$SR:AD=CS:CA=SF:AD'.$$

但 $AD=AD'$，因此 $SR=SF$，

$$\therefore\quad PS+SR=PF=p.$$

因此 $PQRS$ 的周长等于 $2p$。

2484.　求作两邻边的和为已知长 m，且内接于已知半圆的矩形 $ABCD$。

解 [分析] 设内接于半圆的矩形$ABCD$已作出。过圆心O作AB的垂线OF，取$OF=m$，连结FD，设与直径的交点为E，CD的中点为G，则

$$EO \parallel DG,$$
$$FG=DC=2DG.$$

由此 $FG:DG=FO:EO=2:1$,

$$\therefore \quad EO=\frac{1}{2}FO=\frac{1}{2}m.$$

因此可作图如下。

[作图] 在直径上取点E，使$EO=\frac{1}{2}m$，过O作EO的垂线OF，取$OF=m$。连结EF的线段与圆周交于点D。然后过点D引平行于直径的弦DC，过D、C分别向直径引垂线DA、CB，则$ABCD$即为所求的矩形。

2485. 试作周长为$2m$的矩形$ABCD$，使它内接于已知圆O。

解 设内接矩形$ABCD$已作出。在DA的延长线上取点E，使$AB=AE$，则$DE=m$，且$\angle DEB=45°$。

以直径BD为弦，作含角$45°$的弓形弧，设它与以D为圆心，m为半径的圆的交点为E，DE与圆O的交点为A，则以AB、AD为两邻边作出的矩形$ABCD$即为所求。

2486. 在$\triangle ABC$内，求作内接矩形$DEFG$，使$DE-EF=l$（定长），且GF在边BC上。

解 [作图] 过B引BC的垂线，与过A平行于BC的直线的交点为A'，连结$A'C$。在BC上取点H，使$BH=l$，引射线HX，使$\angle CHX=45°$，设HX与$A'C$的交点为E'。过E'引平行于BC的直线，与$A'B$的交点为D'，与AB的交点为D，与AC的交点为E。过D、E向BC引垂线DG、EF，则矩形$DEFG$即为所求。

[证明] 过E'向BC引垂线$E'F'$，则$\angle F'HE'=45°$，因此，$E'F'=HF'$。由于$DE:BC=D'E':BC$，所以$DE=D'E'$。因矩形$DEFG$内接于$\triangle ABC$，

$$DE-EF=D'E'-E'F'$$
$$=BF'-HF'$$
$$=BH=l.$$

因此$DEFG$是满足条件的矩形。

2487. 求作内接于定$\triangle ABC$的矩形$DEFG$，使$DG+GF=l$（l为定长），且点E、F在边BC上。

解 [作图] 过A引BC的平行线，与过B的BC的垂线交于点A'，连结$A'C$。在BC上取点H，使$BH=l$，引射线HX使$\angle BHX=45°$，设HX与$A'C$的交点为G'。过G'引BC的平行线，与$A'B$的交点为D'，与AB的交点为D，与AC的交点为G。过D、G向BC引垂线DE、GF，则矩形$DEFG$即为所求。

[证明] 过G'向BC引垂线$G'F'$，则

$$\angle F'HG'=45°$$

可知，$G'F'=F'H$。又因$DG=D'G'$，所以

$$DG+GF=D'G'+G'F'$$
$$=BF'+F'H=BH=l.$$

因此，$DEFG$为满足条件的矩形。

2488. 求作内接于已知直角三角形ABC的矩形$DEBF$，使直角B为公共角，且$DB+DF=l$。

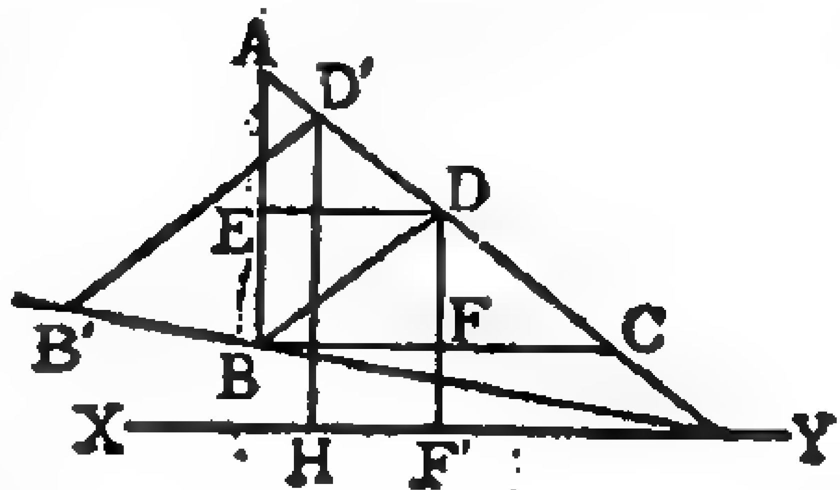
解 [分析] 设满足条件的矩形$DEBF$已作出。延长FD，取$DF'=DB$，则$FF'=l$。因此F'在平行于BC且与BC距离等于l的直线XY上。

[作图] 在和$\triangle ABC$同侧引平行于BC且与BC的距离等于l的直线XY，设AC（或其延长线）与XY的交点为K，连结KB。过KC上任意一点D'向XY引垂线$D'H$。以D'为圆心，$D'H$为半径作圆，与KB的交点为B'，过B作$B'D'$的平行线，与AC的交点为D。过D向AB、BC引垂线DE、DF，则$DEBF$即为所求的矩形。

2489. 在上题中，求作使$DB-DF=m$

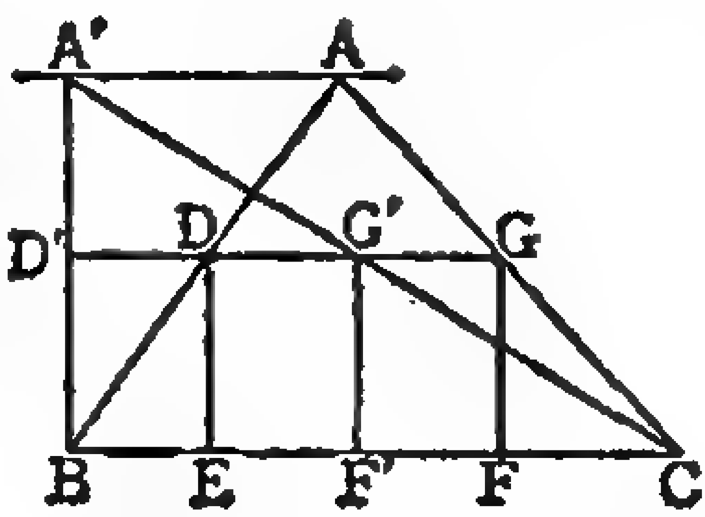
的矩形.

解　延长 DF, 取 $DF'=DB$, 则 $FF'=m$, 与上题一样作图. 在与 $\triangle ABC$ 相反的一侧, 引平行于 BC 且与 BC 的距离为 m 的直线 XY, AC 的延长线与 XY 的交点为 K, 连结 KB. 过 AC 上任意一点 D' 向 XY 引垂线 $D'H$. 以 D' 为圆心、$D'H$ 为半径作圆, 与 KB(或其延长线)的交点为 B'. 过 B 作 $B'D'$ 的平行线与 AC 的交点为 D. 过 D 分别向 AB、BC 引垂线 DE、DF, 则 $DEBF$ 即为所求的矩形.



2490.　求作内接于已知 $\triangle ABC$ 的矩形 $DEFG$, 使 $EG+GF=l$, 且 E, F 在边 BC 上.

解　作 $A'B\perp BC$, $A'A\parallel BC$. 设 $A'A$ 与 $A'B$ 的交点为 A', 作以 A' 为一顶点的直角 $\triangle A'BC$ 的内接矩形 $D'BF'G'$, 且 BF' 在 BC 上, 使 $BG'+G'F'=l$(问题 **2488**).



设 $D'G'$ 与 AB、AC 的交点为 D、G, 过 D、G 向 BC 引垂线 DE、GF, 则

$$\text{矩形 } D'BF'G' \cong \text{矩形 } DEFG,$$

$$EG+GF=BG'+G'F'=l.$$

因此 $DEFG$ 即为符合条件的矩形.

2491.　在上题中, 求作使 $GE-GF=l$ 的矩形.

解　作以 $A'B\perp BC$、$AA'\parallel BC$ 的点 A' 为一顶点的直角 $\triangle A'BC$, 再作内接于 $\triangle A'BC$ 的矩形 $D'BF'G'$, BF' 在 BC 上, 使 $G'B-G'F'=l$ (问题 **2489**). 设 $D'G'$ 与 AB、AC 的交点为 D、G, 过 D、G 向 BC 引垂线 DE、GF, 则矩形 $D'BF'G'\cong$矩形 $DEFG$,

$$GE-GF=G'B-G'F'=l.$$

因此 $DEFG$ 为符合条件的矩形.

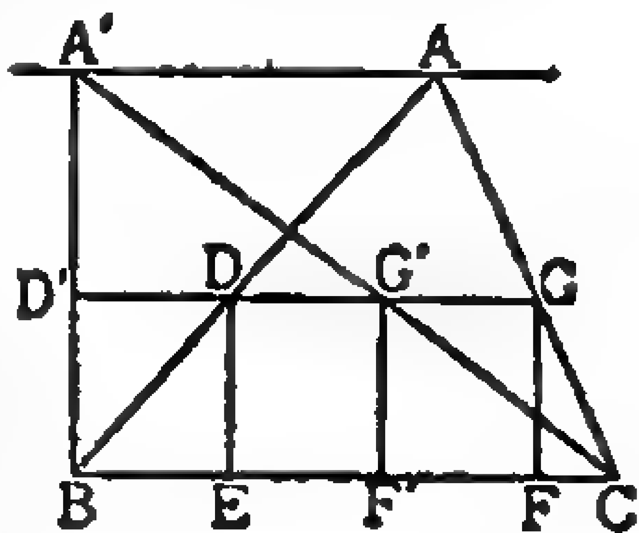
2492.　求作内接于以 $\angle B$ 为直角的 $\triangle ABC$ 内的矩形 $DBFE$, 使其面积为 m^2.

解　[分析]　假定符合条件的矩形 $DBFE$ 已作出. 另作 AB 为一边的矩形 $ABHK$, 使 $AB\cdot BH=m^2$, 则 $AB\cdot BH=BD\cdot BF$.

$$\therefore\quad \frac{BH}{BF}=\frac{BD}{AB}\quad ①$$

又

$$\frac{BD}{AB}=\frac{EF}{AB}=\frac{FC}{BC},\quad ②$$



由①、②得　$\dfrac{BH}{BF}=\dfrac{FC}{BC}$.

$$\therefore\quad BF\cdot FC=BH\cdot BC.$$

因此可作图如下.

[作图]　在 BC 上求点 H, 使 $AB\cdot BH=m^2$, 再求点 F 内分 BC, 使

$$BF\cdot FC=BH\cdot BC.$$

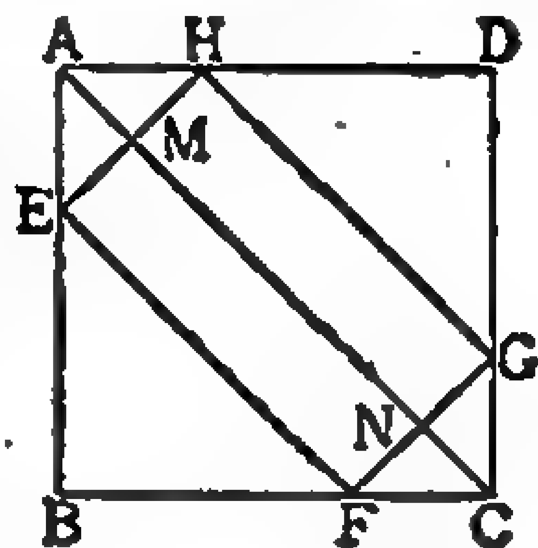
当作出以 BF 为一边的内接矩形 $BFED$ 时, 即为所求的矩形.

2493.　求作内接于已知 $\triangle ABC$、面积为 m^2 的矩形 $DEFG$, 且使 E、F 在边 BC 上.

解　设过 A 所作 BC 的平行线与过 B 所作 BC 的垂线的交点为 A', 作直角三角形 $A'BC$, 则 $\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 等积. 因此可作内接于 $\triangle A'BC$ 的矩形 $D'BF'G'$, 使其面积为 m^2(参照上题). 设 $D'G'$ 与边 AB、AC 的交点分别为 D、G, 过 D、G 向 BC 引垂线 DE、GF, 则 $DEFG$ 即为所求的矩形.

2494.　求作面积一定且内接于已知正方形 $ABCD$ 的矩形.

解　[作图]　作对角线 AC. 在 $\triangle ABC$ 中, 作面积等于已知面积一半的内接矩形 $EFNM$, 且使一边 MN 在 AC 上(参照上题), 延长 EM、FN 与 AD、CD 的交点分别为 H、G, 连结 HG, 则 $EFGH$ 即为所求的矩形.



[证明]　因矩形关于对角线对称, 所以

$$\text{矩形 } EFNM \cong \text{矩形 } HGNM.$$

因矩形 $EFGH$ 的面积等于 $EFNM$ 面积的两倍, 所以矩形 $EFGH$ 的面积等于已知面积.

2495.　在已知 $\triangle ABC$ 的边 AB 上求点 P, 过 P 引平行于 BC 的直线与边 AC 的交点为 S, 过 P 与 S 向 BC 或其延长线所引的

垂线足分别为 Q、R，求作矩形 $PQRS$，使其对角线的长等于 l。

解 ［分析］ 假定符合条件的矩形 $PQRS$ 已作出。设过 A 作 BC 的平行线与过 C 的 BC 的垂线交于点 A'，PS 或其延长线与 BA'、$A'C$ 的交点分别为 P'、S'，则

$$BC:PS=BC:P'S'=AB:AP,$$

又 $$PS=P'S'.$$

因此过 P' 向 BC 引垂线 $P'Q'$，则

$$\text{矩形 } PQRS\cong\text{矩形 } P'Q'CS'$$

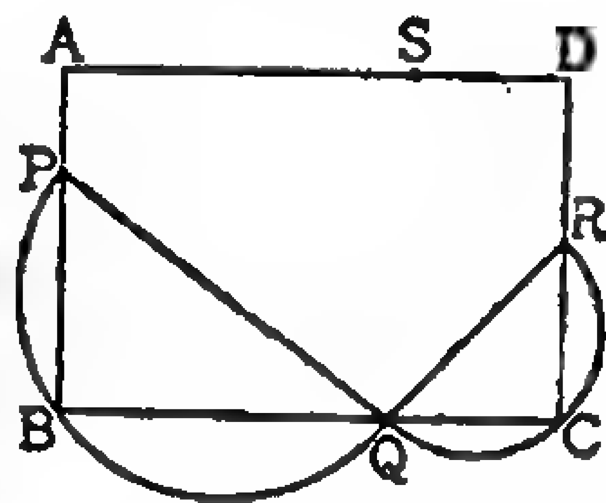
$$\therefore\quad P'C=PR=l.$$

故可作图如下。

［作图］ 作 $AA'\parallel BC$，$CA'\perp BC$，其交点为 A'。在 $A'B$ 上求点 P'，使 $CP'=l$，过 P' 引平行于 BC 的直线与 AB、AC 的交点分别为 P、S。过 P、S 向 BC 引垂线 PQ、RS，则 $PQRS$ 即为所求矩形。

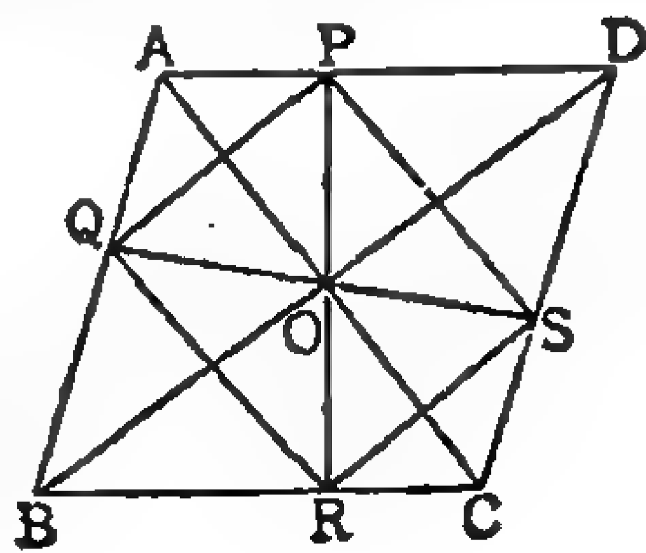
2496. 求作矩形 $ABCD$，使其各边分别过已知点 P、Q、R、S，且其中一条边等于已知长。

解 设符合条件的矩形 $ABCD$ 已求出，$\angle PBQ=\angle R$，所以 B 在以 PQ 为直径的圆周上。又 $\angle QCR=\angle R$，所以 C 在 QR 为直径的圆周上，又 BC 等于已知长，因此根据（问题 **2191**）Q 为两圆的交点，过 Q 的直线与两圆周的交点 B、C 的距离的和等于已知长，则 B、C 确定。连结 BP、CR。过 S 向 BP、CR 引垂线，其垂足分别为 A、D，则 $ABCD$ 是所求的矩形。



2497. 求作对角线的交角等于 α，且内接于已知平行四边形的矩形 $PQRS$。

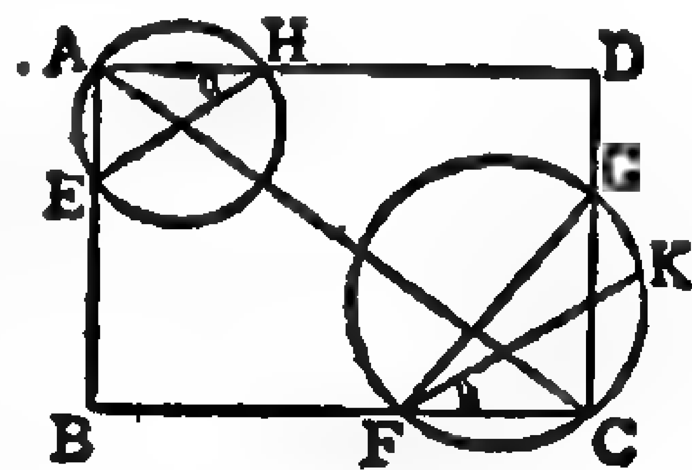
解 ［分析］ 设符合条件的矩形 $PQRS$ 已作出。两四边形的中心应是同一点。设其中心为 O，则 $OP=OQ$，由 $\angle POQ=\alpha$，所以可作出 $\triangle OPQ$。因此可作图如下。



［作图］ 设 AC、BD 的交点为 O，根据问题 **2282**，作以 O 为一顶点，在 AB、AD 上有顶点 Q、P 的 $\triangle OPQ$，使 $OP=OQ$，且 $\angle POQ=\alpha$。设 QO、PO 的延长线与 CD、BC 的交点分别为 S、R，则 $PQRS$ 即为所求的矩形。

2498. 求作四条边分别过 E、F、G、H，且对角线等于已知长 l 的矩形 $ABCD$。

解 设符合条件的矩形 $ABCD$ 已作出，$\angle EAH=\angle R$，所以 A 在以 EH 为直径的圆上。同样，C 在以 FG 为直径的圆上。再过 F 引平行于 EH 的弦 FK，则



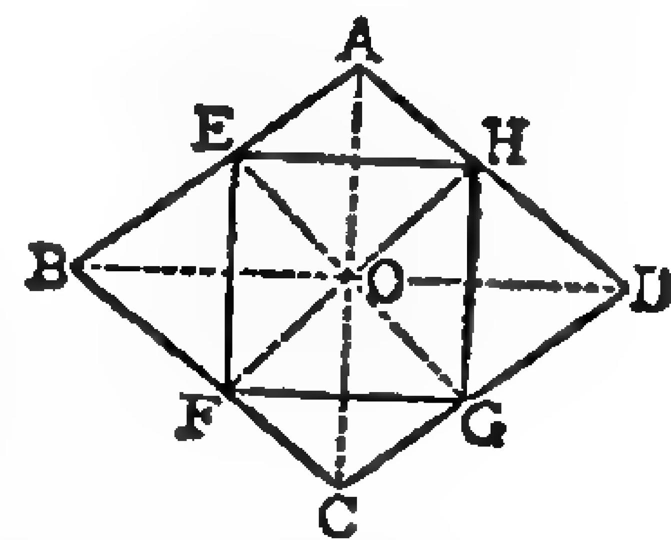
$$\angle AHE=\angle KFC.$$

因此，两条弧 AE 与 CK 相似。又两个圆与点 E、K 确定，AC 的长等于 l，在这两个圆上分别求点 A、C，使弧 EA、CK 相似，AC 的长等于 l（问题 **2011**），则点 A、C 确定。从而 B、D 也可求出。

3. 正方形

2499. 求作内接于已知菱形 $ABCD$ 的正方形 $EFGH$。

解 设菱形 $ABCD$ 对角线的交点为 O，作 $\angle AOB$、$\angle BOC$ 的平分线，与菱形四边的交点分别为 E、F、G、H，则 $EFGH$ 是所求的正方形。因为 $ABCD$ 是菱形，所以



$$\triangle AOB\cong\triangle COB\cong\triangle COD\cong AOD.$$

$$\therefore\quad OE=OF=OG=OH,$$

且 $$EG\perp FH.$$

故 $EFGH$ 是正方形。

2500. 已知对角线与一边的和为 m，求作正方形 $ABCD$。

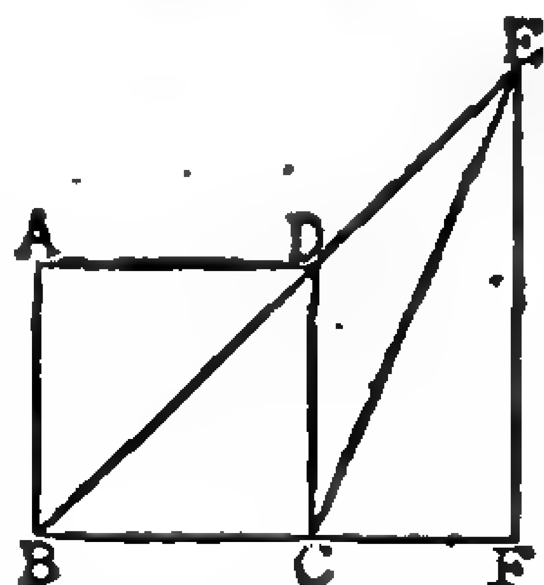
解 ［分析］ 假定符合条件的正方形 $ABCD$ 已作出。延长对角线 BD，取 $DE=DC$，则

$$BE=m.$$

连结 EC，则

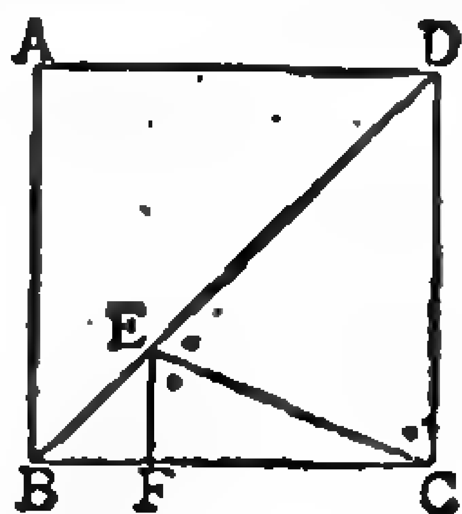
$$\angle DEC=\frac{1}{2}\angle BDC=22.5^\circ.$$

因此可作图如下。



［作图］ 取线段 $BE=m$，以 BE 为斜边作等腰直角 $\triangle BEF$。设 $\angle BEF$ 的平分线 EC 与 BF 的交点为 C，则 BC 即为所求正方形的一边。

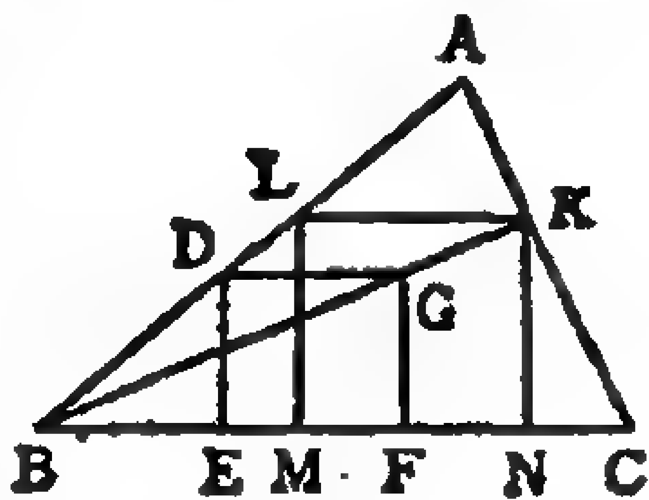
2501. 已知对角线与一边的差为 m，求作正方形 $ABCD$。



解 ［分析］ 设符合条件的正方形 $ABCD$ 已作出。在对角线 BD 上取 $DE=CD$，则 $BE=m$。过 E 向 BC 引垂线 EF，则 EC 平分 $\angle DEF$。因此可作图如下。

［作图］ 取 $BE=m$，作以 BE 为斜边的等腰直角 $\triangle BEF$。在 BE 的延长线上取点 D，设 $\angle DEF$ 的平分线与 BF 的延长线的交点为 C，则 BC 即为所求正方形的一边。

2502. 求作内接于已知 $\triangle ABC$ 的正方形，使其一边在边 BC 上。



解 ［作图］ 在边 AB 上取一点 D，过 D 向 BC 引垂线 DE，以 DE 为一边作内接于 $\triangle ABC$ 的正方形 $DEFG$。连结 BG 并延长，使与 AC 交于 K；过 K 引平行 BC 的直线，与 AB 的交点为 L。过 L、K 向 BC 所引垂线的垂足为 M、N，则 $KLMN$ 即为所求的正方形。

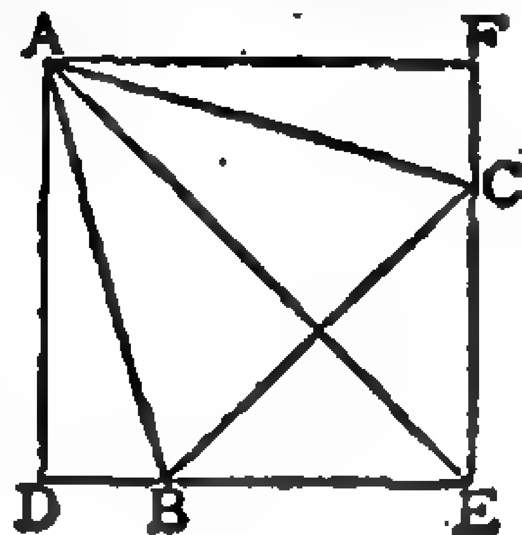
［证明］ $KN \parallel GF$，$KL \parallel GD$，

$$\therefore\quad \frac{GF}{KN}=\frac{BG}{BK}=\frac{GD}{KL}.$$

但 $\quad GF=GD,\quad \therefore\quad KN=KL.$

因此，$KLMN$ 即为所求的正方形。

2503. 求作外接于已知正 $\triangle ABC$ 的正方形 $ADEF$。



解 以 BC 为斜边在 $\triangle ABC$ 的外侧作等腰直角 $\triangle BCE$，过 A 向 BE、CE 引垂线 AD、AF，则 $ADEF$ 即为所求的正方形。其理由是：因为 AE 平分 $\angle BEC$，则

$$\angle D=\angle E=\angle F=\angle R,$$

所以 $ADEF$ 是所求的正方形。

2504. 已知定圆与在圆内的一点 P。

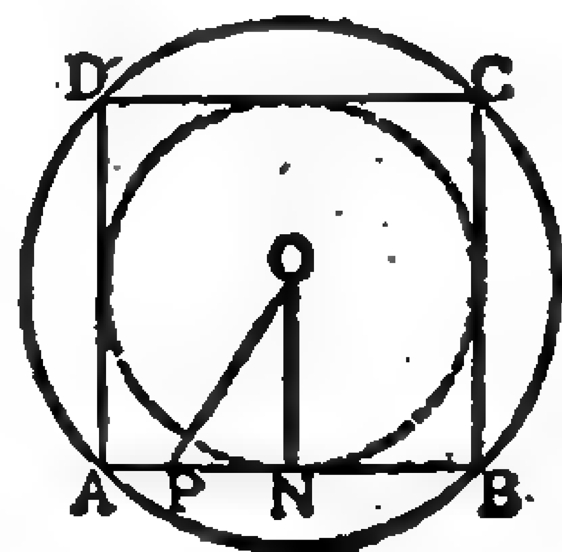
(1) 求作一边过 P 的内接正方形。

(2) 为了完成作图，P 应在圆的什么位置上。

解 ［分析］ 假定已作出边 AB 过已知点 P 的内接正方形 $ABCD$。过中心 O 向 AB 作垂线 ON。若已知圆的半径为 r，则

$$ON=\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

［作图］ 以 O 为圆心、$\frac{r}{\sqrt{2}}$ 为半径作同心圆，过 P 向此圆引切线 PN，与已知圆的交点为 A、B。若以 AB 为一边作内接矩形 $ABCD$，则此矩形即为所求的正方形。



［证明］ $AN^2=r^2-\frac{r^2}{2}=\frac{r^2}{2}$，

$$\therefore\quad AN=\frac{r}{\sqrt{2}},\quad \therefore\quad \angle OAB=45^\circ.$$

因此，$ABCD$ 是正方形。又 AB 通过 P，所以 $ABCD$ 是所求的正方形。

［讨论］ 为了完成作图，条件是必须使点 P 不在以 O 为圆心，以 $\frac{r}{\sqrt{2}}$ 为半径的圆内。即 $OP\geqq\frac{r}{\sqrt{2}}$。又由于 P 是圆 O 内的点，所以 $OP<r$，

$$\therefore\quad r>OP\geqq\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

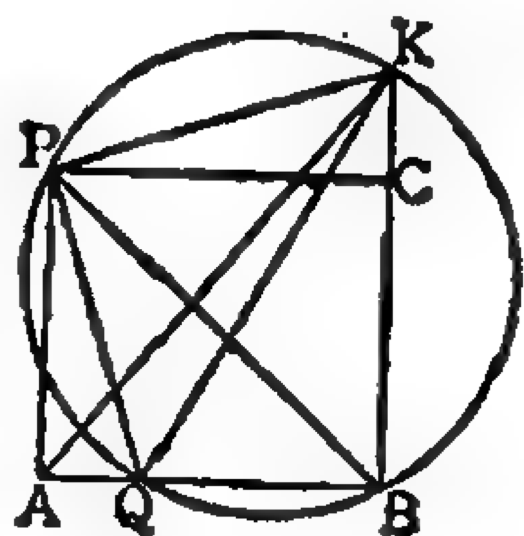
若 $r>OP>\frac{r}{\sqrt{2}}$，则有两个解。若 $OP=\frac{r}{\sqrt{2}}$ 时则有一解。

2505. 求作以定点 P 为顶点的正方形 $PABC$，使其边 AB、BC 或其延长线分别通过另外已知两点 Q、K。

解 ［分析］ 设正方形 $PABC$ 已作出。连结 PB，则 $\angle PBQ=\frac{1}{2}\angle R$。因此，$B$ 在以 PQ 为弦、含 $\frac{1}{2}\angle R$ 的弓形弧上。又 $\angle QBK=\angle R$，因此，B 在以 QK 为直径的圆周上。

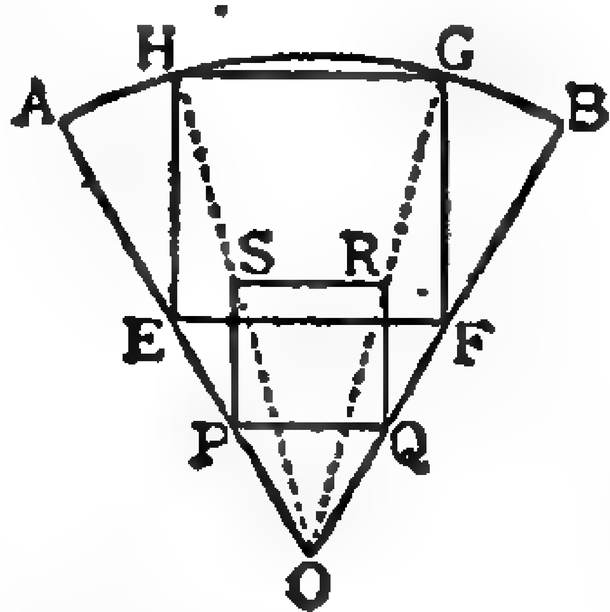
故可作图如下。

[作图] 以 PQ 为弦作含角 $\frac{1}{2}\angle R$ 的弓形弧，在同一侧以 QK 为直径作半圆，设它们的交点为 B.过 P 向 BQ、BK(或其延长线)所作的垂足分别为 A、C,则 $PABC$ 即为所求的正方形。



2506. 求作内接于定扇形 OAB 的正方形。

解 [作图] 在扇形 OAB 的半径 OA、OB 上分别取点 P、Q, 使 $OP=OQ$(OP 的长为任意).以 PQ 为边在与 O 相反的一侧作正方形 $PQRS$. 直线 OS、OR 与弧 AB 的交点分别为 H、G. 如图所示作 $HE \parallel SP$, $GF \parallel RQ$, 与 AO、BO 的交点分别为 E、F, 则 $EFGH$ 即为所求的正方形。



[证明] 由作图知 $RS \parallel GH$,

$$\therefore\ GH:RS=OH:OS=OG:OR$$
$$=HE:SP=GF:RQ.$$

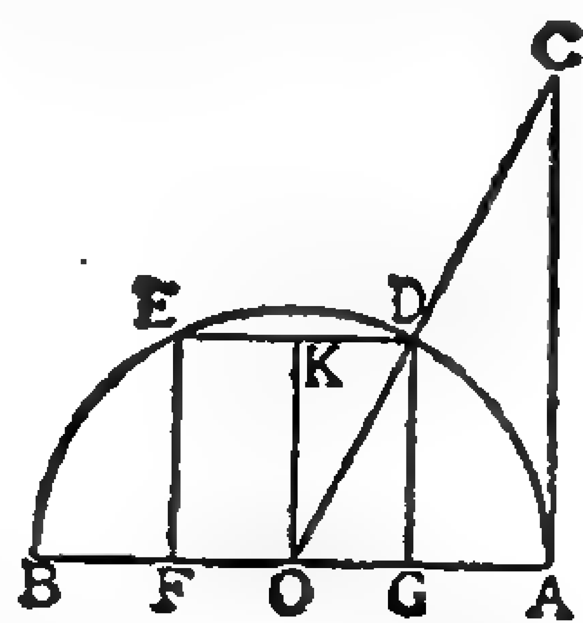
因为 $RS=SP=RQ$, 所以 $GH=HE=GF$,

又 $\angle GHE=\angle HGF=\angle R$.

因此 $EFGH$ 是内接于扇形 OAB 的正方形。

2507. 求作内接于已知弓形的正方形,使它的两个顶点在弧上,另外两个顶点在弦上。

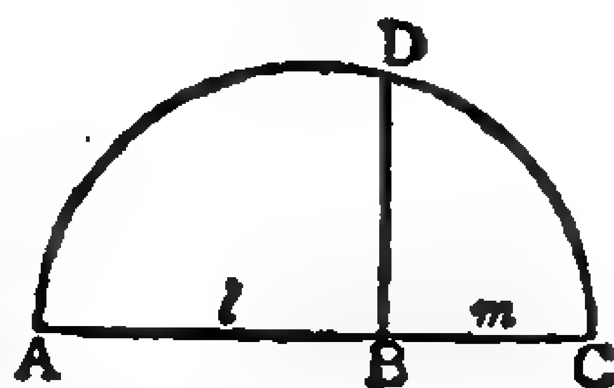
解 [作图] 过已知弓形的弦 AB 的一端 A 作 AB 的垂线 AC,取 C 使 $AB=AC$。连结 AB 的中点 O 与 C,OC 与弓形弧的交点为 D, 过 D 引平行于 AB 的弦 DE, 过 D、E 向 AB 引垂线,设垂足分别为 G、F, 则 $DEFG$ 即为所求的正方形。



[证明] 由于 $AC \parallel GD$, 则 $OA:AC=OG:GD$. 又 $2OA=AC$, 则 $OA:2OA=OG:GD$, 因此 $2OG=GD$. 过 O 向 DE 引垂线 OK,则垂足 K 是 DE 的中点,所以 $2KD=DE$. 又 $OGDK$ 是矩形,所以 $OG=KD$, 因此, $GD=ED$. 又 $DEFG$ 的各角都是直角. 所以 $DEFG$ 是所求的正方形。

2508. 求作面积等于已知矩形的正方形。

解 设已知矩形的两边长为 l、m, 在任意直线上取 AB、BC 分别等于 l、m。以 AC 为直径作半圆，过 B 作 AC 的垂线 BD,设它与半圆弧 ADC 的交点为 D, 则 BD 是所求正方形的一边。其理由是:



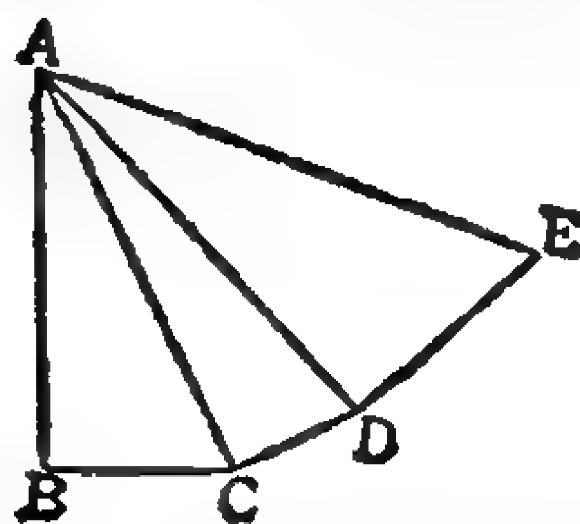
$$AB\cdot BC=l\cdot m=BD^2.$$

2509. 求作与已知 $\triangle ABC$ 等积的正方形。

解 根据问题 **2477** 作与 $\triangle ABC$ 等积的矩形 $DBCE$, 然后根据上题可以作出与 $DBCE$ 等积的正方形。

2510. 求作正方形等于已知 m 个正方形的和。

解 [作图] 设已知 m 个正方形的一边分别为 a、b、c、d、…。先作以 a 与 b 为直角边的直角 $\triangle ABC$,然后过 C 引垂直于 AC 的直线 CD, 取 CD 等于 c。再过 D 取等于 d 垂直于 AD 的直线 DE。依次这样作下去，最后的斜边 AX 就是所求正方形的一边。



[证明] $AB^2+BC^2=AC^2$, $AC^2+CD^2=AD^2$,

$$\therefore\ AB^2+BC^2+CD^2=AD^2,$$
$$a^2+b^2+c^2=AD^2.$$

同样, $a^2+b^2+c^2+d^2+\cdots=AX^2$.

2511. 求作两个正方形，使其面积之比为 $m:n$, 且两个正方形的一边之和(或差)为定长 l。

解 设在点 P 内分(或外分)等于定线段 l 的线段 AB,使 $AP^2:PB^2=m:n$.

则本题可归结为问题 **1933.**

2512. 求作对于已知正方形的比等于已知比 $a:b$ 的其他正方形。

解 [作图] 在直线上取三点 B、F、C, 使 $BF=a$, $FC=b$. 以 BC 为直径作半圆, 过 F 作 BC 的垂线与半圆弧的交点为 A. 设已知正方形的一边为 l, 在 AB 上取 $AD=l$,

过D引平行于BC的直线DE，与AC的交点为E，则AE即为所求正方形的一边。

［证明］ 由于$BC \parallel DE$，则

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE},$$

$$\therefore \quad \frac{AB^2}{AC^2}=\frac{AD^2}{AE^2}.$$

又$\triangle ABC$是直角三角形，$AF \perp BC$，

因此，$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BF}{FC}=\frac{a}{b},$$

$$\therefore \quad \frac{AD^2}{AE^2}=\frac{a}{b}.$$

又$AD^2(=l^2)$表示已知正方形的面积，所以AE即是所求正方形的一边。

2513. 设有三条已知线段a、b、c，将线段a分为两部分，使其一部分上的正方形与线段b上的正方形之比等于另一部分上的正方形与线段c之比。

解 ［作图］ 取线段$AB=a$,在其延长线上取$BC=c$。过A作AB的垂线AD，使$AD=b$，过B引CD的平行线BMN，与以AD为直径的圆的交点为M、N。连结DM、DN，设它们与BA的交点分别为E、F，则E是所求比的内分AB的点，F是外分点。

［证明］ 因AM垂直于DE，$\angle DAC=\angle R$，因此

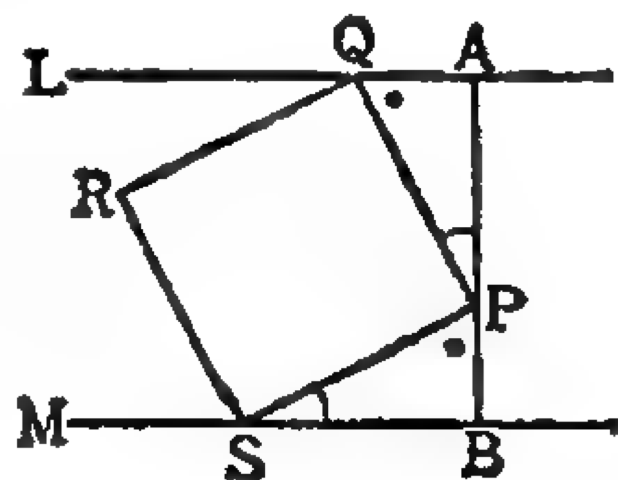
$$AE^2:AD^2=EM:DM.$$

由于$DC \parallel MB$，$\therefore \quad EM:DM=EB:BC$，

即 $$AE^2:b^2=EB:c.$$

对于F也同样可证。

2514. 求作以已知两条平行线L、M间的定点P为一顶点，另两个顶点在L、M上的正方形。



解 (1) 与点P相邻的两顶点Q、S分别在L、M上时。

［分析］ 设符合条件的正方形$PQRS$已求出。过P引公垂线APB，则

$$\angle APQ+\angle BPS=\angle R,$$

且 $$\angle APQ=\angle PSB,$$

因为$PQ=PS$，所以两个直角三角形PAQ、SBP相等，因此$AQ=PB$、$BS=AP$。由此可作图如下。

［作图］ 过P向L、M引公垂线APB,在其同一侧的L、M上取点Q、S，使$AQ=PB$，$BS=AP$。设过Q与S分别作PQ、PS的垂线的交点为R，则$PQRS$即为所求的正方形。

(2) 两顶点R、S分别在L、M上时。

［分析］ 设符合条件的正方形$PQRS$已作出。过P作公垂线APB,过S向L作垂线SC，与(1)同样，则

$$\triangle PBS \cong \triangle RCS.$$

因此$PB=RC$，$CS=SB=CA=AB$。

从而 $$RA=RC+CA=PB+CS$$
$$=PB+AB\ (\text{一定}).$$

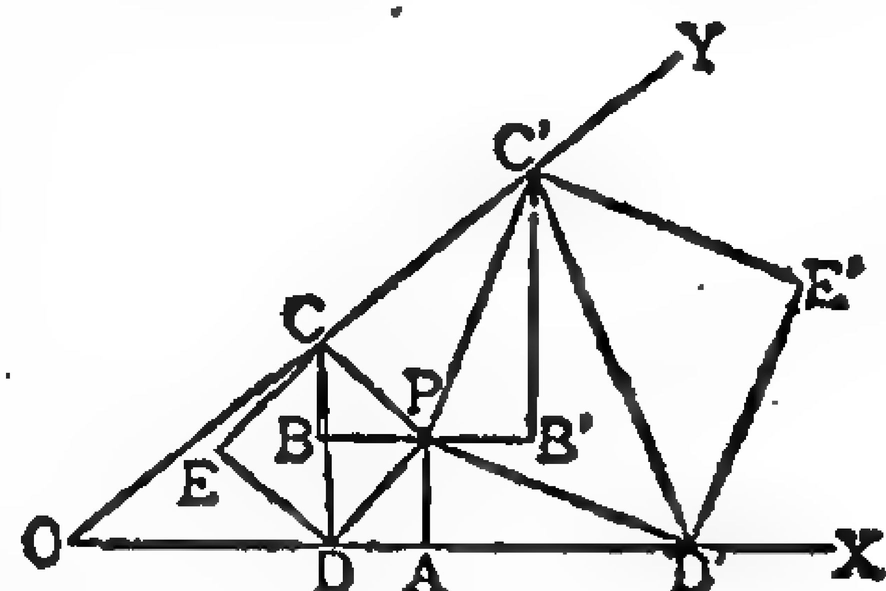
故可作图如下。

［作图］ 过P作L、M的公垂线APB,在同一侧的L、M上取点R、S，使$AR=AB+PB$，$BS=AB$，过P与R分别作PS、SR的垂线，其交点为Q，则$PQRS$即为所求的正方形。

(3) 两顶点Q、R分别在L、M上时，用与(2)同样的方法可以作出。

2515. 求作以$\angle XOY$内的定点P为一顶点，与此相邻的两顶点在两边OX、OY上的正方形。

解 ［分析］ 假定符合条件的正方形$PDEC$已作出。过P向OX引垂线PA，如图所示。引平行于OX的直线PB，使$PA=PB$，则在$\triangle PAD$与$\triangle PBC$中，$PA=PB$，$PD=PC$，$\angle DPA=\angle CPB$



$$(\because \quad \angle CPD=\angle R=\angle BPA).$$

$\therefore\quad \triangle PDA \cong \triangle PCB$,

$\therefore\quad \angle CBP = \angle PAD = \angle R$.

因此可作图如下.

［作图］ 过 P 向 OX 引垂线 PA，过 P 作 OX 的平行线，并在此直线上 P 的两侧取 B、B'，使 $PB=PA=PB'$. 过 B, B' 作 BB' 的垂线 BC、$B'C'$，它们与 OY 的交点分别为 C、C'. 然后从 P 分别引 PC、PC' 的垂线，与 OX 的交点分别为 D、D'；过 C、D 引 PC、PD 的垂线，其交点为 E，又过 C'、D' 引 PC'、PD' 的垂线，其交点为 E'，则 $PCED$、$PC'E'D'$ 都是所求的正方形.

［证明］ $\angle CPD = \angle R = \angle APB$,

$\therefore\quad \angle BPC = \angle APD,\ BP = AP$,

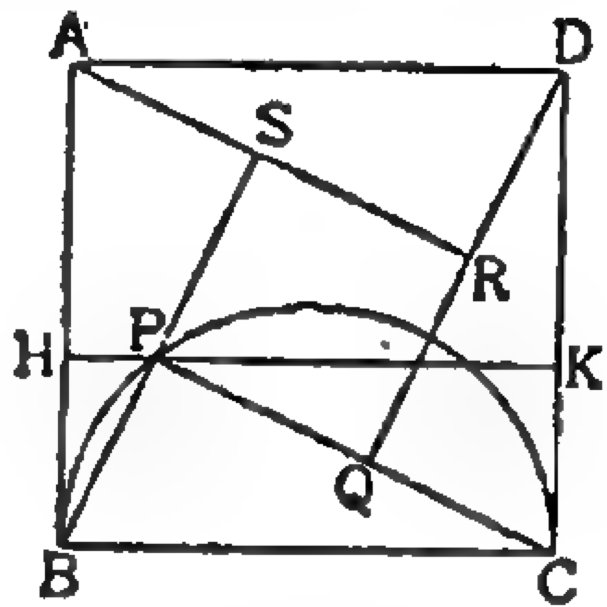
$\angle PBC = \angle R = \angle PAD$.

因为 $\triangle PBC \cong \triangle PAD$，所以 $PC=PD$，因而 $PDEC$ 是正方形. 同理，$PD'E'C'$ 也是所求的正方形.

注　本题的另外两顶点 C、E 或 E、D 分别在边 OY、OX 上时，可以按上题同样作图.

2516. 求五等分已知正方形 $ABCD$ 的面积，使其中四份是以已知正方形的边为斜边的直角三角形，另一份是正方形.

解 ［作图］ 在边 AB 上取 BH 等于 AB 的五分之二，过 H 引平行于 BC 的直线，与 CD 的交点为 K. HK 与以 BC 为直径作的圆相交于点 P，过 A 向 BP、过 D 向 CP 引的垂线足分别为 S、Q. 设 AS、DQ 的交点为 R，则 $PQRS$ 是正方形. 四个直角三角形 $\triangle PBC$, $\triangle QCD$, $\triangle RDA$, $\triangle SAB$ 与正方形 $PQRS$ 都等积.



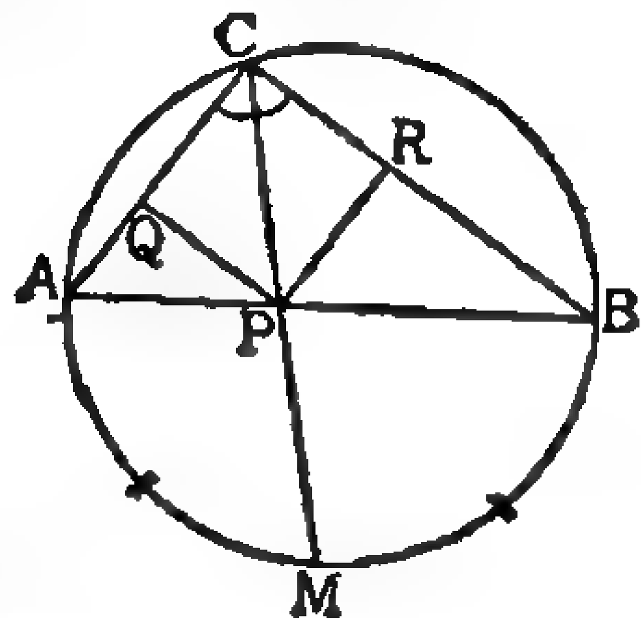
［证明］ 矩形 $HBCK$ 是正方形 $ABCD$ 的五分之二，则 $\triangle PBC$ 是正方形 $ABCD$ 的五分之一，又 $\angle BPC = \angle R$. $\triangle QCD$、$\triangle RDA$、$\triangle SAB$ 都是直角三角形. 它们的斜边与一锐角都等于 $\triangle PBC$ 的斜边与一锐角，所以都和 $\triangle PBC$ 相等. 因此都是正方形 $ABCD$ 的五分之一的面积. 又因

$$PS = BS - BP = PC - CQ = PQ,$$

所以 $PQRS$ 是正方形，其面积等于正方形 $ABCD$ 的五分之一.

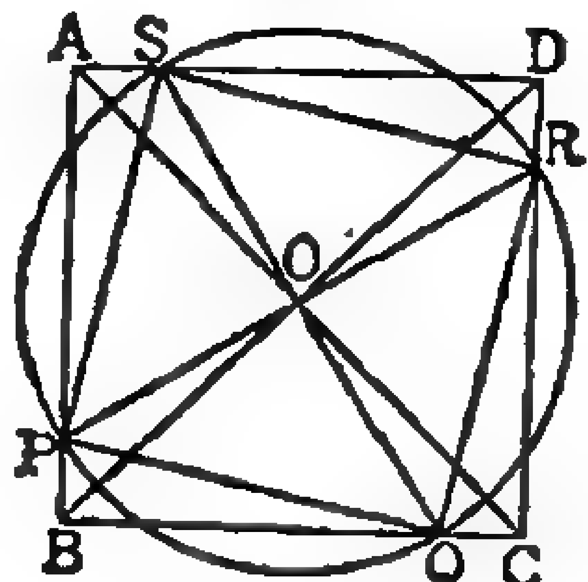
2517. 已知定线段 AB 及其上的定点 P，作以 AB 为斜边的直角三角形 ABC，在 AC 上取点 Q，在 BC 上取点 R，使 $PQCR$ 为正方形.

解 设符合条件的图形已作出，CP 平分 $\angle ACB$，所以 CP 过以 AB 为直径的圆弧 AMB 的中点 M. C 为 PM 与弧 AMB 的共轭弧的交点，可以确定.



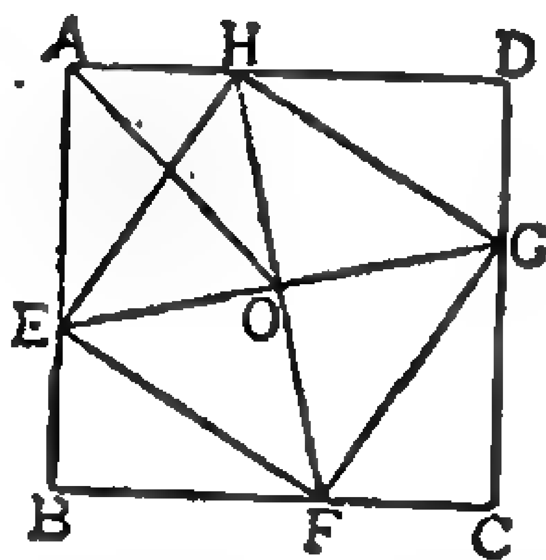
2518. 求作与已知正方形相等的正方形，且内接于另一已知正方形 $ABCD$.

解 设正方形 $ABCD$ 对角线的交点为 O. 设已知正方形的对角线长为 m，以 O 为圆心、$\frac{1}{2}m$ 为半径作圆，与 AB 的交点（有两个）为 P，在 BC、CD、DA 上顺次取 BQ、CR、DS 等于 AP，则 $PQRS$ 即为所求的正方形.



2519. 求作内接于已知正方形 $ABCD$ 的正方形 $EFGH$，使其面积等于 $ABCD$ 的 $\frac{3}{4}$.

解 设适合已知条件的内接正方形 $EFGH$ 已作出，则两个正方形的对角线交点是相同点，设此点为 O，由此



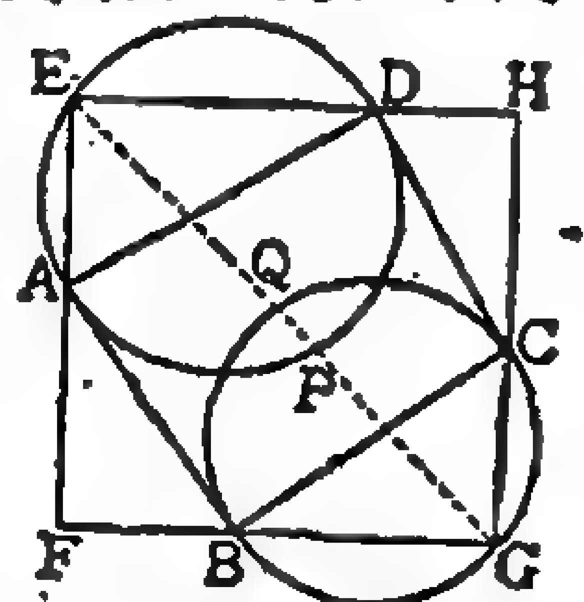
$$\frac{\text{正方形 } ABCD \text{ 面积}}{\text{正方形 } EFGH \text{ 面积}} = \frac{AB^2}{EF^2} = \frac{AO^2}{EO^2} = \frac{4}{3},$$

因此 EO 可以求出. 于是本题可转化为上题的作图.

2520. 求作外接于四边形 $ABCD$ 的正方形 $EFGH$.

解 ［分析］ 设符合条件的正方形 $EFGH$ 已作出. 由于 $\angle E = \angle R$，所以 E 在以 AD 为直径的圆上. 同样 G 在以 BC 为直径的圆

上，连结 EG 并与两圆相交于点 P、Q。由于 $EFGH$ 是正方形，对角线 EG 平分 $\angle E$ 与 $\angle G$。因此，P、Q 分别为弧 AED、弧 BGC 的共轭弧的中点。由 P、Q 可以确定 E、G 的位置，从而正方形 $EFGH$ 即为所求。故可作图如下。



［作图］ 分别以 AD、BC 为直径作圆，求四边形内弧的中点 P、Q，连结 PQ 的直线与两圆的另一交点分别为 E、G。连结 EA、ED、GB、GC 并延长相交于 F、H，则 $EFGH$ 即为所求作的正方形。

［证明］ 由作图 $\angle AED$、$\angle BGC$ 都是直角，又 P、Q 为弧 DA、CB 的中点，因此

$$\angle HEG=\angle HGE=45°,$$

$$\angle H=\angle R, \quad 且 \quad HE=HG.$$

同理 $\quad \angle F=\angle R, \quad 且 \quad EF=FG.$

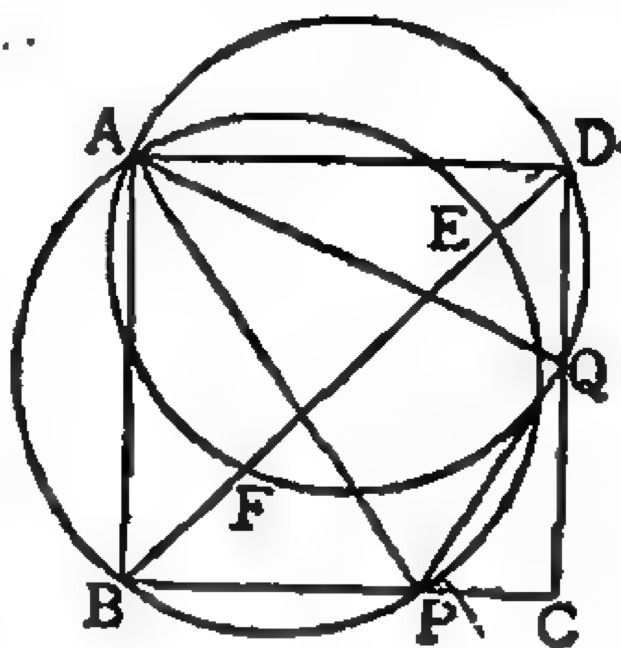
因此 $EFGH$ 为所求作的正方形。

［讨论］ 根据原四边形 $ABCD$ 的形状，P 和 Q 如果在原四边形之外，那么无法作出符合条件的正方形（不可能作图）。当 P、Q 重合为一点时，可作无数个 E、G。因此外接于 $ABCD$ 的正方形有无数个（不定的时候）。其他情况下一般有一解。

注　设弧 AED、BGC 的中点为 P'、Q'，则在上图中，若不连结 PQ，而连结 $P'Q$、PQ'、$P'Q'$，则除上述正方形外还有三个正方形。这些正方形的各边（或其延长线）过原四边形的各顶点，但不是四边形 $ABCD$ 的外接正方形，所以将此省去。如在问题 **2529** 中，求作过四点的正方形，这里当然包含着此情况。

2521. 作外接于已知三角形 APQ 的正方形 $ABCD$，使边 BC、CD 分别过已知点 P、Q。

解　本题是上题的特例。因此解法与上题相同。以 AP、AQ 为直径的圆分别过 B、D。连结 BD 的直线与圆相交于点 E、F，则 E、F 为弧 AEP、AFQ 的中点，因此位置都可确定（参照上题）。



2522. 作内接于已知四边形 $ABCD$ 的正方形 $PQRS$。

解　（问题 **2572**）先作外接于任意正方形 $P'Q'R'S'$ 且相似于 $ABCD$ 的四边形 $A'B'C'D'$。再在 AB、BC、CD、DA 上求点 P、Q、R、S，使

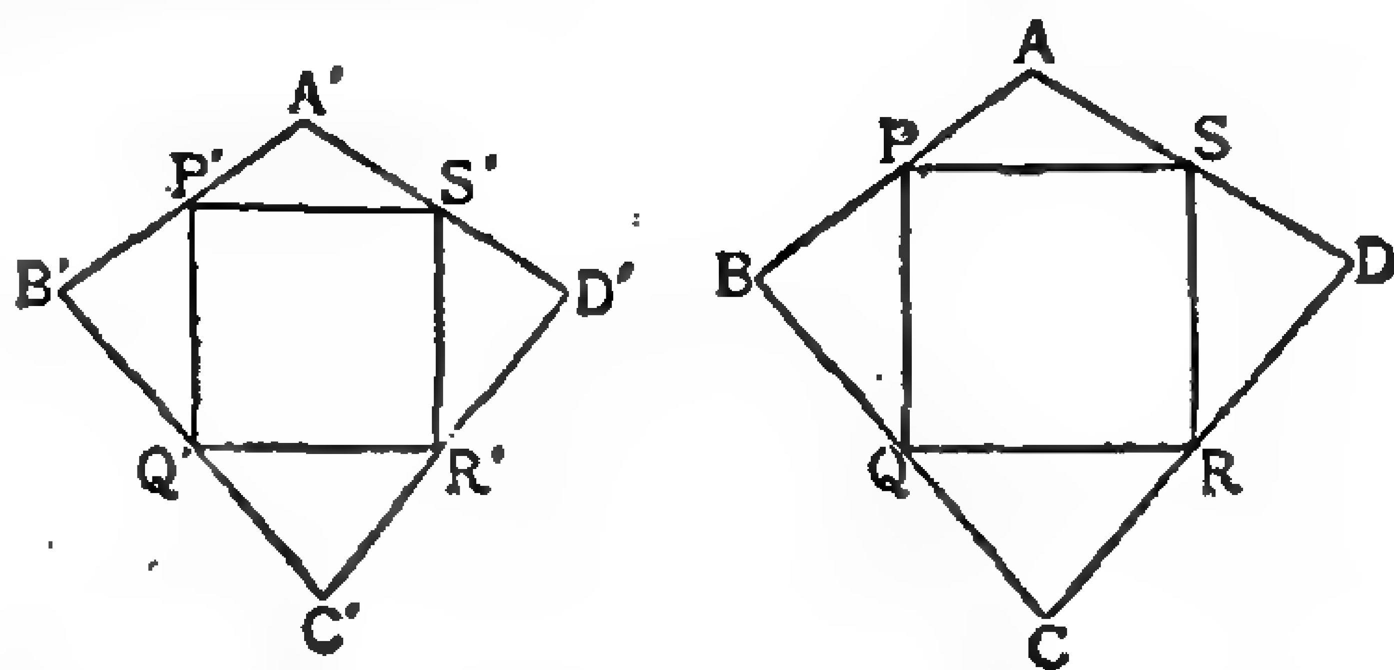
$$AP:PB=A'P':P'B',$$

$$BQ:QC=B'Q':Q'C',$$

$$CR:RD=C'R':R'D',$$

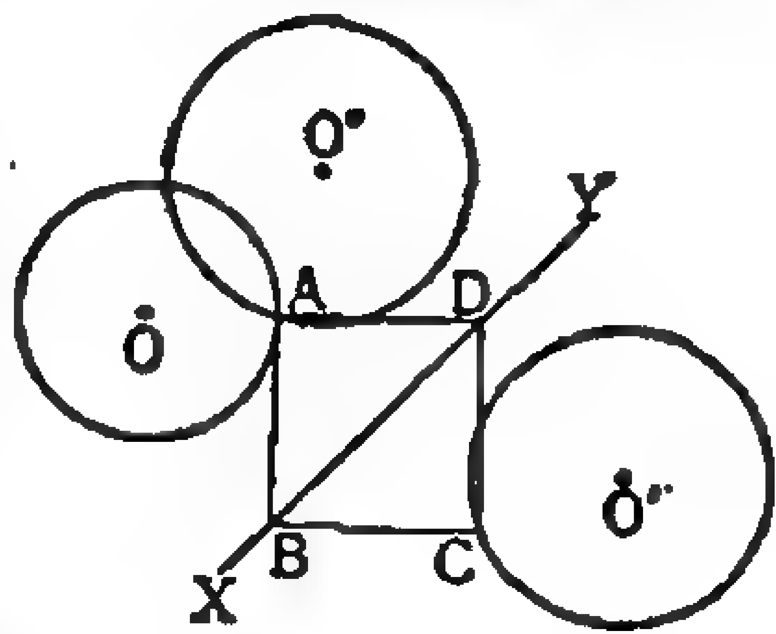
$$DS:SA=D'S':S'A'.$$

因此，$PQRS$ 与 $P'Q'R'S'$ 相似，故 $PQRS$ 即为所求的正方形。



2523. 求作正方形 $ABCD$，使它的两顶点 A、C 在已知圆 O、O' 上，而其他两顶点在已知直线 XY 上。

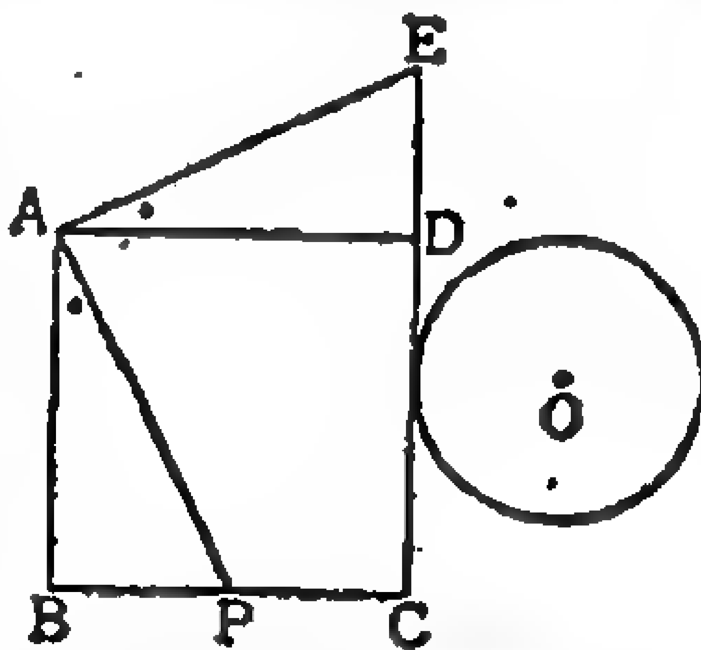
解 ［分析］ 设符合条件的正方形 $ABCD$ 已作出。将 $\triangle DCB$ 和圆 O' 沿 XY 对折，由于 $ABCD$ 为正方形，所以点 C 与点 A 重合，圆 O' 成为圆 O'' 的位置，而圆 O'' 与圆 O 的交点 A 即是正方形的一个顶点。故可作图如下。



［作图］ 作圆 O' 关于 XY 的对称圆 O''，圆 O 同圆 O'' 的交点为 A。再作 A 关于 XY 的对称点 C，以 AC 为一条对角线作正方形 $ABCD$ 即为所求。

2524. 求作正方形 $ABCD$，使它的一顶点为已知点 A，一边 BC 过已知点 P，且另一边 CD 与已知圆 O 相切。

解 ［作图］ 作互相垂直的两直线 AE、AP，并取 $AE=AP$。过 E 作圆 O 的切线 EDC，作 $AB\parallel EC$，$AD\perp EC$，$BPC\perp EC$，即得 AB、AD、BC，则



$ABCD$ 即为所求的正方形。

［证明］ $\angle B=\angle C=\angle D=\angle R$，则 $ABCD$ 为矩形。在 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ADE$ 中，$\angle B=\angle D=\angle R$，

$$AP=AE,\ \angle BAD=\angle PAE=\angle R,$$

$$\angle BAP=\angle DAE.$$

$$\therefore\quad \triangle ABP\cong\triangle ADE,$$

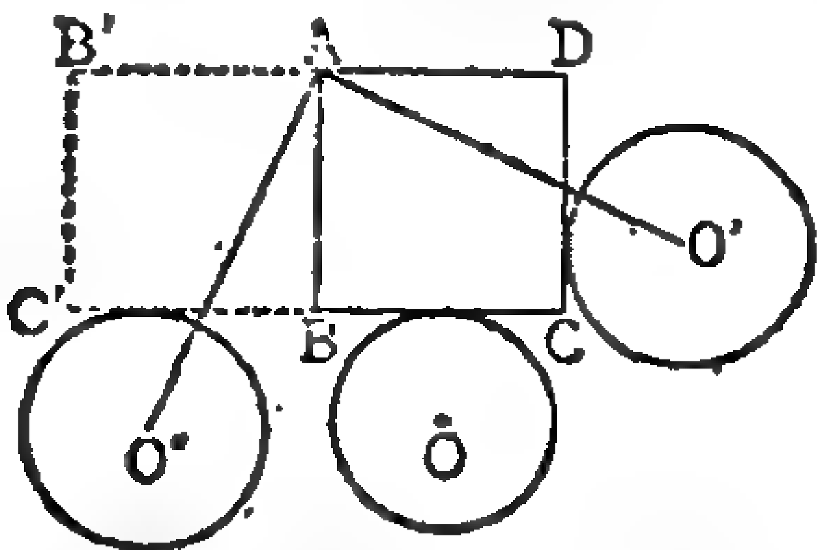
$$\therefore\quad AB=AD.$$

故 $ABCD$ 即为所求正方形。

［讨论］ 一般切线有两条。又可过 A 与上面相反一侧作 AE，从而问题有四解。

2525. 求作正方形 $ABCD$，使它的一顶点为已知点 A，两条边 BC、CD 与已知圆 O、O' 相切。

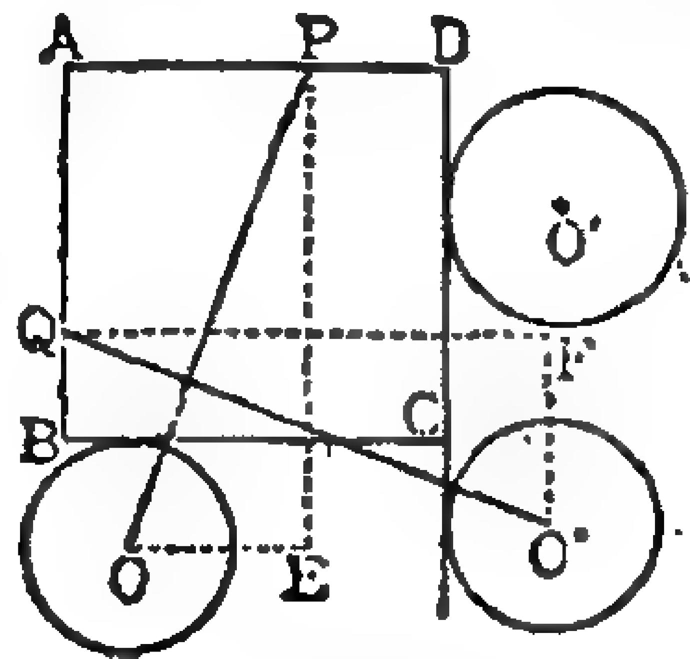
解 ［分析］ 设符合于条件的正方形 $ABCD$ 已作出。以 A 为中心，将正方形 $ABCD$ 和圆 O' 绕 A 旋转 90°，$ABCD$ 成为 $AB'C'B$ 的位置，圆 O' 成为圆 O'' 的位置。因为 $ABCD$ 为正方形，所以 C'、B、C 在一直线上。BC 为两圆 O 与 O'' 的公切线，故可作图如下。



［作图］ 连结 AO'，过 A 作 AO' 的垂线 AO''，取 $AO''=AO'$（O'' 取在 A 的两侧），以 O'' 为圆心，圆 O' 的半径为半径作圆，再作两圆 O、O'' 的公切线 $C'C$。过 A 作 $C'C$ 的垂线 AB，以 AB 为一边向圆 O' 的一侧作正方形 $ABCD$ 即为所求。

2526. 求作正方形 $ABCD$，使它的两边 AD、AB 分别过两已知点 P、Q，另两边 BC、CD 与两已知圆 O、O' 相切。

解 ［作图］ 作 PO 的垂线 QO''，并取 $QO''=PO$，以 O'' 为圆心、圆 O 的半径长为半径作圆，再作两圆 O''、O' 的公切线 CD，过 P 作 CD 的垂线，其垂足为 D，过 Q 作 CD 的平行线与 DP 的交点为 A。作与圆 O 相切而与 CD 垂直的直线，设它与 AQ、CD 的交点分别为 B、C，则 $ABCD$ 即为所求作的正方形。

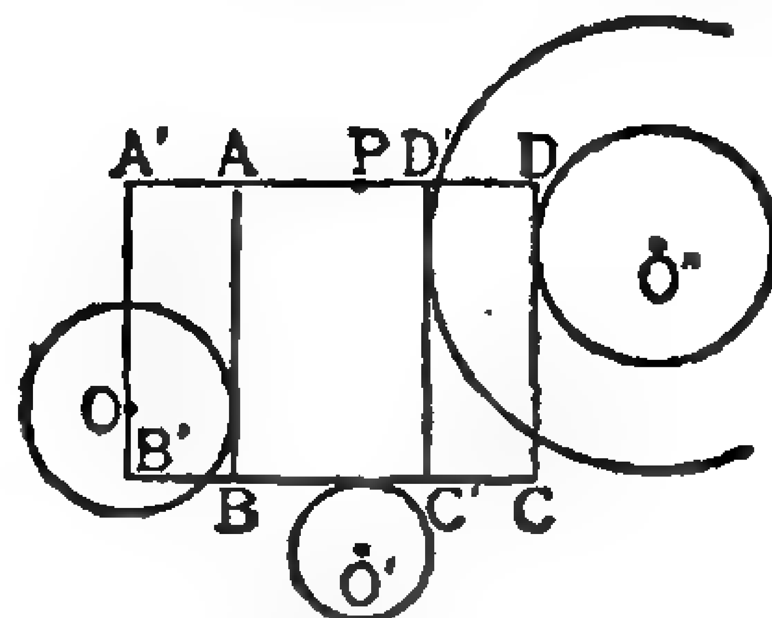


［证明］ $\angle A=\angle D=\angle C=\angle R$，因此 $ABCD$ 为矩形。由于 $QF\parallel AD\parallel OE$，$PE\parallel AB\parallel O''F$，可知 $\triangle POE\cong\triangle QO''F$。

$$\therefore\quad PE=QF.$$

等式两边减去圆 O 的半径，得 $AB=AD$。故 $ABCD$ 为正方形。

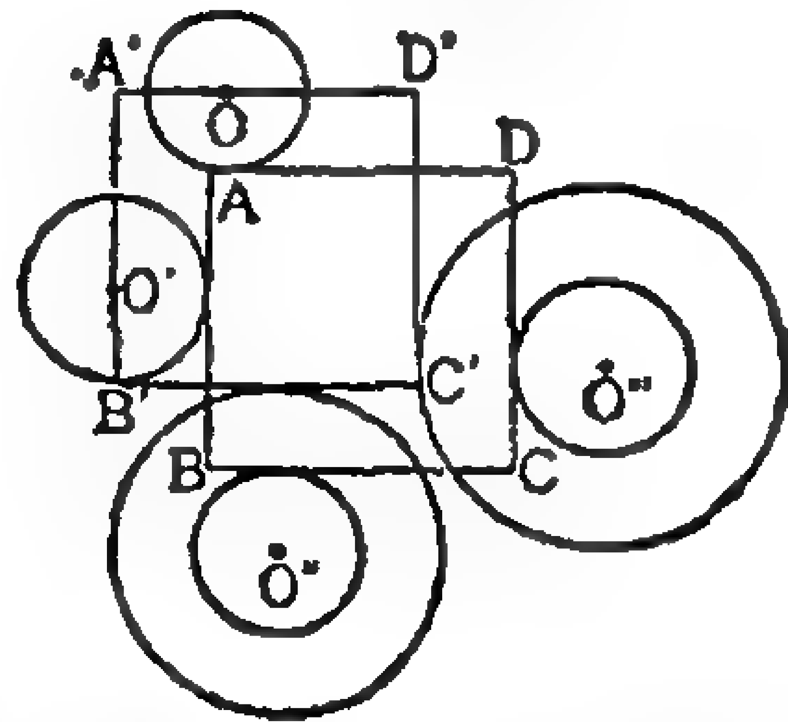
2527. 求作一边 AD 过定点 P，另外三边 AB、BC、CD 分别与已知圆 O、O'、O'' 相切的正方形 $ABCD$。



解 设两圆 O、O'' 的半径为 r、r''，以 O'' 为圆心、$r+r''$ 之长为半径作圆。过 P、O 作两边 $A'D$、$A'B'$，边 $B'C'$ 与圆 O' 相切，边 $C'D'$ 与圆 O''（半径为 $r+r''$）相切，则得正方形 $A'B'C'D'$（参照上题）。这里将 $A'D'$ 或 $B'C'$ 平行移动距离 r 就可以了。用 $r\sim r''$ 代替 $r+r''$，由此可得其他解。

2528. 求作四边与四个已知圆 O、O'、O''、O''' 相切的正方形 $ABCD$。

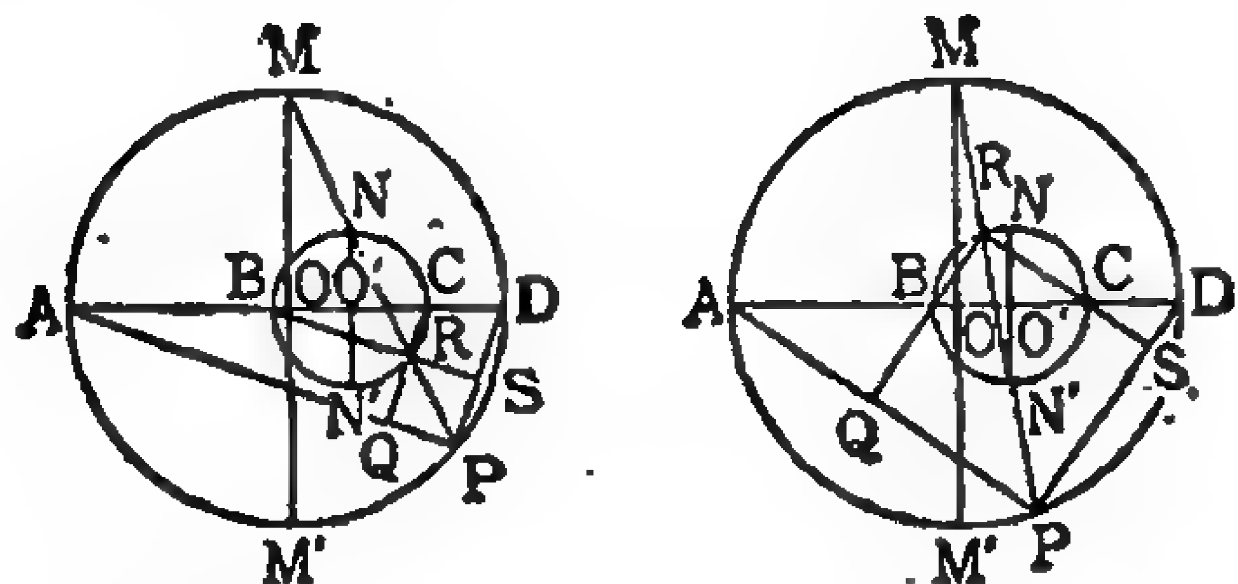
解 设四个已知圆 O、O'、O''、O''' 的半径分别为 r、r'、r''、r'''。以 O'' 为圆心、$r+r''$ 为半径作圆。以 O''' 为圆心、$r'+r'''$ 为半径作圆，再作两边过 O、O'，其他两边与圆 O''、O'''（半径分别为 $r+r''$，$r'+r'''$）相切的正方形 $A'B'C'D'$（参照上题）。若把 $A'B'$ 平行移动距离 r，或把 $A'D'$ 平行移动距离 r'，即可得解。如把 $r'+r''$ 以 $r'-r''$ 代替，$r'+r'''$ 以 $r'-r'''$ 代替，又可作出其他的解。



2529. 求作正方形 $PQRS$，使它的四边延长线通过在一条直线上的四个已知点 A、B、C、D（按一定顺序）。

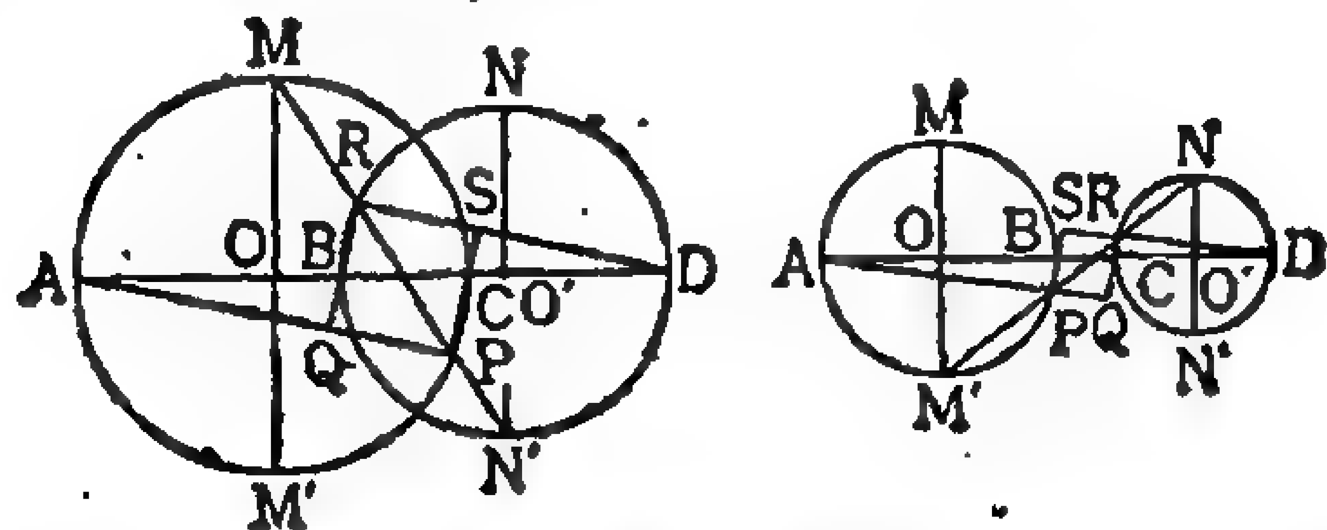
解 以 AD 为直径作圆 O，再作与 AD 垂直的圆 O 的直径 MOM'。以 BC 为直径作圆 O'，再作与 BC 垂直的圆 O' 的直径 $NO'N$。连结 MN（或 MN'，$M'N$，$M'N'$）与圆 O、圆 O'

的交点为 P、R。设两直线 PA, RC(或 PA, RB) 的交点为 Q, 两直线 PD, RB (或 PD RC) 的交点为 S, 则 $PQRS$ 即为所求作的正方形。



也可先作以 AC 为直径的圆，以 BD 为直径的圆，再作与 AC 垂直的直径 MM'、与 BD 垂直的直径 NN'，连接 MN (或 MN', $M'N$, $M'N'$)，同上面一样，连结此两点的直线与两圆的交点都可以作出。

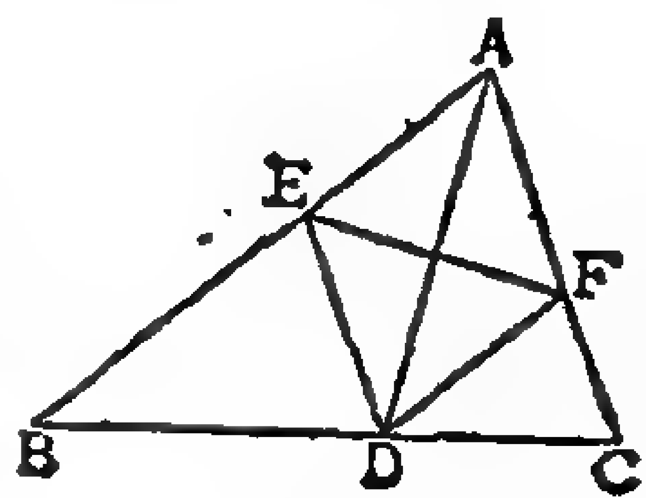
也可作以 AB 为直径的圆与以 CD 为直径的圆，可同上面一样考虑...



注　本题是问题 **2520** 的特例，即是四边形 $ABCD$ 的四个顶点 A、B、C、D 在一直线的情形。

4. 菱形

2530. 作与平行四边形 $ABCD$ 同底等高的菱形 $BCEF$。



解　[作图]　以 B 为圆心、BC 长为半径作圆，与直线 AD 相交于 F。过 C 作 BF 的平行线与直线 AD 相交于 E，则 $BCEF$ 即为所求。

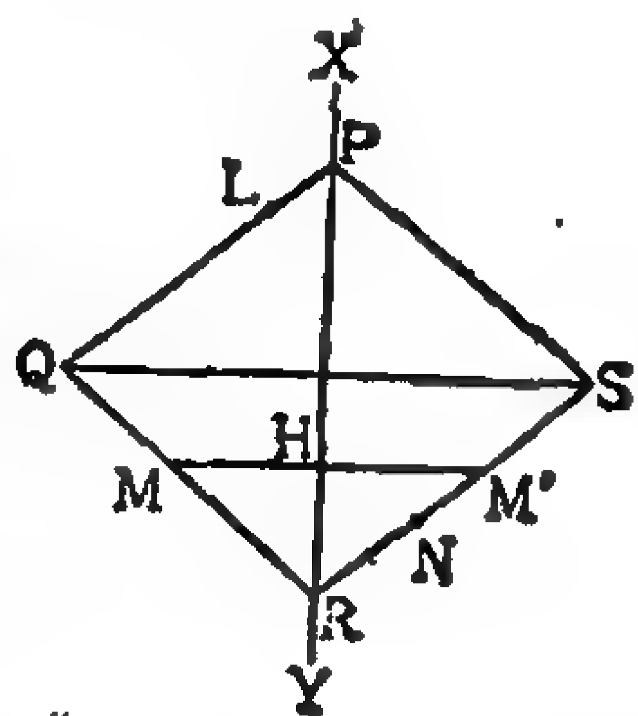
[证明]　$BCEF$ 为平行四边形，$BC=BF$，所以 $BCEF$ 为菱形。

2531. 求作两边分别在已知 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，一顶点在边 BC 上的菱形。

解　作 $\angle A$ 的平分线 AD，再作 AD 的垂直平分线与边 AB、AC 分别相交于 E、F，则 $AEDF$ 即为所求菱形。理由是，对角线 AD、EF 互相垂直平分，所以 $AEDF$ 为所求的菱形。

2532. 作对角线 PR 在已知直线 XY 上，边 PQ、QR、RS 分别过定点 L、M、N 的菱形。

解　[作图]　作点 M 关于 XY 的对称点 M'，连结 $M'N$ 与 XY 交于点 R，过 L 作 $M'N$ 的平行线与 RM 相交于点 Q，QL 与 XY 相交于点 P。设过 P 作 QR 的平行线 PS 与 $M'N$ 的交点为 S，则 $PQRS$ 为所求的菱形。

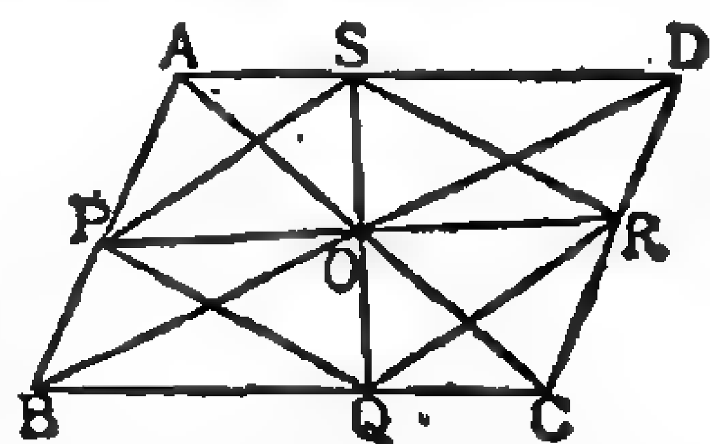


[证明]　很明显 $PQRS$ 为平行四边形。设 MM' 与 XY 的交点为 H，则

$$\triangle MHR \cong \triangle M'HR.$$

所以对角线 PR 平分 $\angle QRS$，从而 $PQRS$ 为菱形。

2533. 求作已知平行四边形 $ABCD$ 的内接菱形，使边 AB 上的定点 P 为菱形的一个顶点。



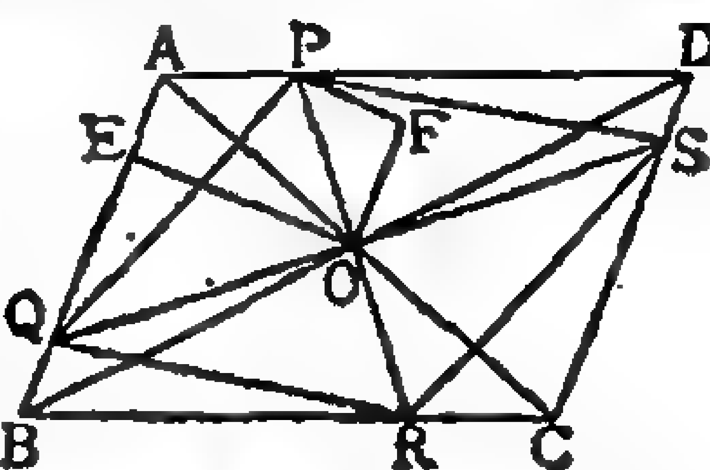
解　[作图]　连结 P 与对角线 AC、BD 的交点 O 的直线与 CD 相交于 R，过 O 作 POR 的垂线与两边 BC、AD 分别相交于 Q、S，则 $PQRS$ 即为所求菱形。

[证明]　平行四边形对角线的交点 O 为它的对称中心。

$$\therefore\ PO=OR,\ OQ=OS.$$

又 $PR\perp QS$，所以 $PQRS$ 为菱形。

2534. 求作两对角线的比为 $m:n$ 的菱形，且使它内接于已知的平行四边形 $ABCD$。



解　[分析]　设内接菱形 $PQRS$ 已作出。两四边形对角线的交点重合，设为点 O。在 $\triangle POQ$ 中，$\angle POQ=\angle R$,

$$PO:OQ=PR:QS=m:n,$$

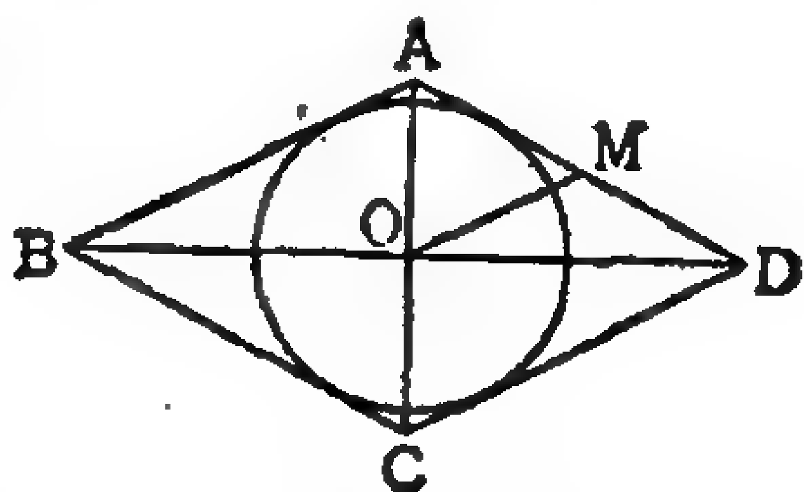
则菱形一定。故可作图如下。

[作图]　过O作AB的垂线OE，作直线OF，使$\angle EOF=\angle R$，且$OE:OF=n:m$．再过F作OF的垂线FP与AD相交于P，PO与BC相交于R．设过O作PR的垂线与AB、CD的交点分别为Q、S，则$PQRS$即为所求菱形。

2535.　作已知圆O的外切菱形，且边长为已知长。

解　[分析]　假定问题已解出，$ABCD$为所求菱形。求AD的中点M，连结OM，则

$$OM=MA=MD=\frac{1}{2}m,$$



所以可作图如下。

[作图]　过O作长为$\frac{1}{2}m$的线段OM，再过M作圆O的切线。在此切线上点M的两侧分别取长为$\frac{1}{2}m$的线段MA、MD，以AD为一边，作圆的外切四边形$ABCD$，且使$AD=AB$，则$ABCD$为所求菱形。

[证明]　在$\triangle AOD$中，$AM=MO=MD$．

又　　$\angle AOD=\angle R$，$AB=AD$，

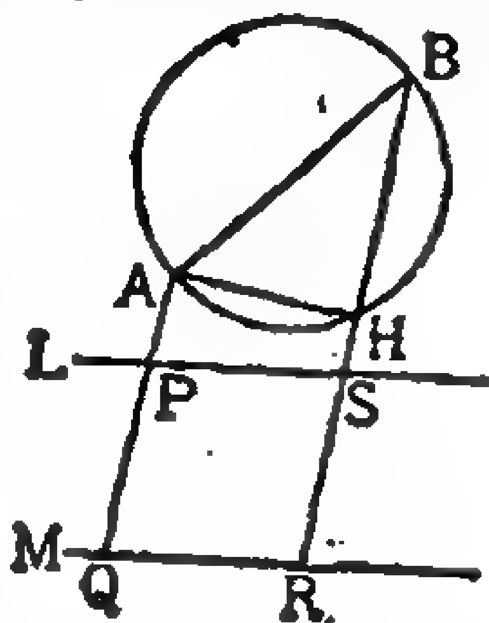
因此，　　$\triangle AOD\cong\triangle AOB$，

$$\therefore\quad \angle AOB=\angle AOD=\angle R.$$

又B、O、D三点共线，且$BO=OD$，BO是$\angle ABC$的角平分线．由$BO\perp AC$，可知$AB=BC$．同理，$AD=DC$．所以四边形$ABCD$的各边都相等，它是菱形。

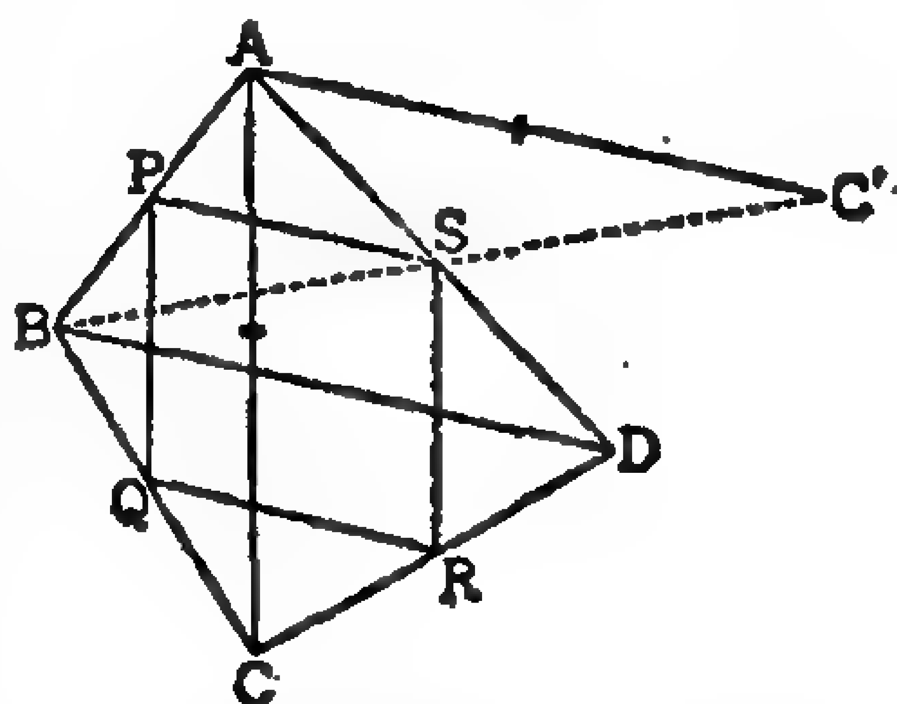
2536.　求作两边分别在已知两平行直线L、M上，另两边分别过已知点A、B的菱形。

解　设平行线L、M的距离（公垂线的长）为h，以AB为直径作圆，取长为h的弦AH（或AH'）．过B、H（或B、H'）的直线与L、M分别相交于S、R．设过A作SR的平行线与L、M的交点分别为P、Q，则$PQRS$即为所求的菱形。理由是，由作图，平行线PQ与RS的距离和PS与QR的距离都等于h，因此平行四边形为菱形。



2537.　求作边分别平行于已知四边形$ABCD$的对角线且内接于此四边形的菱形。

解　[作图]　过A作BD的平行线AC'，在AC关于点D同侧，取$AC'=AC$．设BC'与AD的交点为S，过S作DB、AC的平行线SP、SR，与AB、CD的交点分别为P、R．过P作AC的平行线PQ与BC的交点为Q，则$PQRS$为所求作的菱形。



[证明]　$PS\parallel AC'$，

$$\therefore\quad PS:AC'=BP:BA.$$

又　$PQ\parallel AC$，　$\therefore\ PQ:AC=BP:BA$，

因此　　$PS:AC'=PQ:AC$，

从而　　$PS=PQ$　（$\because\ AC=AC'$）．

再由$SR\parallel AC$知，　$SR:AC=DS:DA$．

而$AC'\parallel BD$，因此

$$DS:DA=BS:BC'=PS:AC'.$$

$$\therefore\quad SR:AC=PS:AC',$$

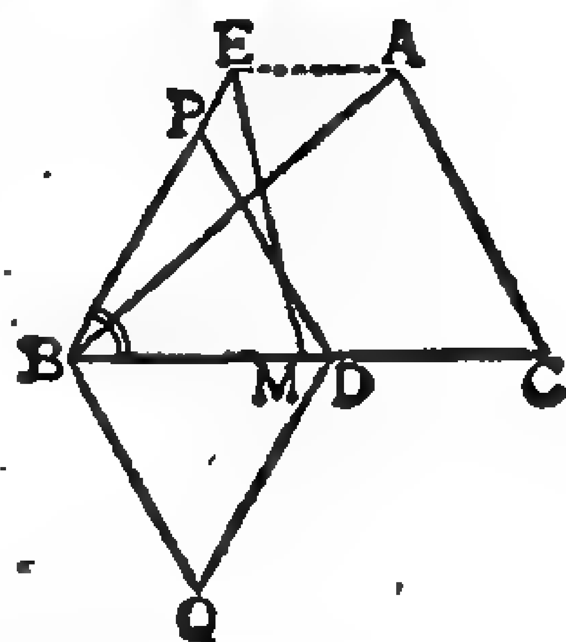
$$\therefore\quad SR=PS.$$

又　$SR=PQ$，所以$PQRS$为菱形．两组对边又分别与已知四边形$ABCD$对角线平行，符合题设条件。

2538.　求作与已知$\triangle ABC$等积且一角等于60°的菱形。

解　过点A引BC的平行线与过点B与BC成60°角的直线相交于E，则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle EBC}.$$



设BC的中点为M，在边BC上作与BE、BM的比例中项相等的线段BD．在BE上作$BP=BD$，则$\triangle BPD$为等边三角形，

$$BE\cdot BM=BD^2=BD\cdot BP$$

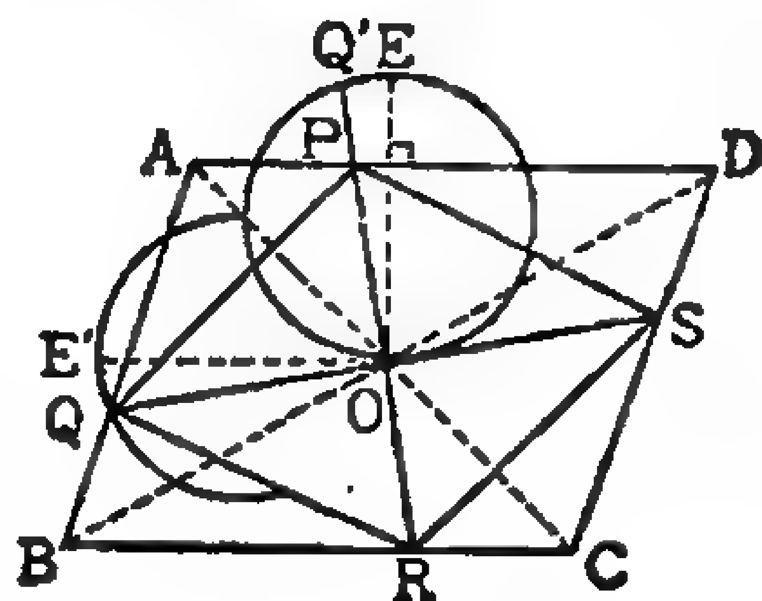
$$(\because\ BD=BP).$$

因此，　　$S_{\triangle BPD}=S_{\triangle BEM}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$

再作点P关于BD的对称点Q，则$PBQD$即

为菱形，它的面积为 $2S_{\triangle BEM}$，即与 $\triangle ABC$ 等积。

2539. 作内接于平行四边形 $ABCD$ 且面积为 m^2 的菱形。



解　设 $PQRS$ 为所求作的菱形，菱形的中心就是平行四边形 $ABCD$ 的中心。在 OP 上作与 OQ 相等的线段 OQ'，那么

$$OP\cdot OQ=OP\cdot OQ'=\frac{1}{2}m^2.$$

设点 P 在边 AD 上移动，点 Q' 的轨迹就是一个圆（问题 1874）。作此圆的直径 OE，若保持 OP 与 OQ 垂直，P 在 AD 上移动，则使 $OP\cdot OQ=\frac{1}{2}m^2$ 的点 Q 的轨迹就是以 O 为中心，把前面的圆旋转 $90°$（OE' 与 OE 垂直且相等），也就是以 OE' 为直径的圆。设此圆与边 AB 的交点为 Q，则 Q 为所求菱形的一个顶点。设 QO 与 CD 的交点为 S，通过 O 与 QS 垂直的直线与边 AD、BC 的交点分别为 P、R，则 $PQRS$ 即为所求作的菱形。

5. 梯形

2540. 以线段 a、b、c、d 为四边作梯形。

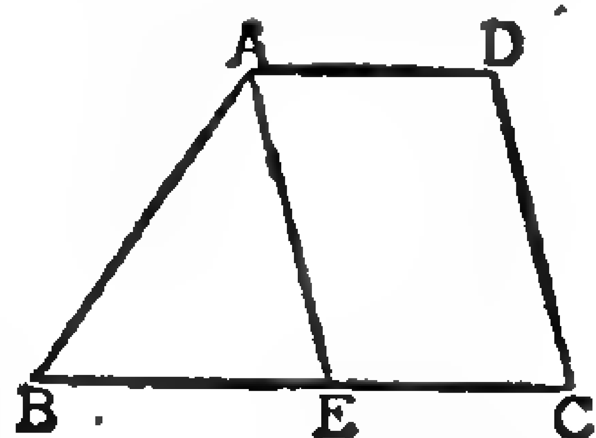
解　[分析]　设符合条件的梯形 $ABCD$ 已作出，AB、BC、CD、DA 的长分别等于 a、b、c、d，设 $AD\parallel BC$，过 A 作 $AE\parallel DC$ 交 BC 于 E，因此

$AE=DC$，

$AD=EC$，

而　$BE=BC-AD$

$=b-d$，



故可作图如下。

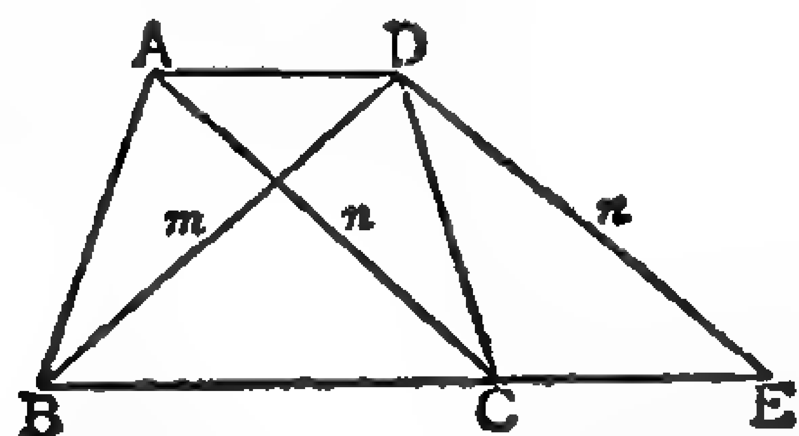
[作图]　作 $AB=a$、$AE=c$、$BE=b\sim d$ 的三角形 ABE。在 BE 的延长线上取 $EC=d$，过 A 作 BC 的平行线并取 $AD=d$，则 $ABCD$ 即为所求作的梯形。

2541. 已知两底 a、b，两对角线 m、n，求作梯形。

解　[分析]　设 $ABCD$ 为求作的梯形，过 D 作 AC 的平行线 DE 交 BC 于点 E。则在 $\triangle DBE$ 中，

$$DB=m,\quad DE=AC=n,$$
$$BE=BC+AD=a+b.$$

故可作图如下。



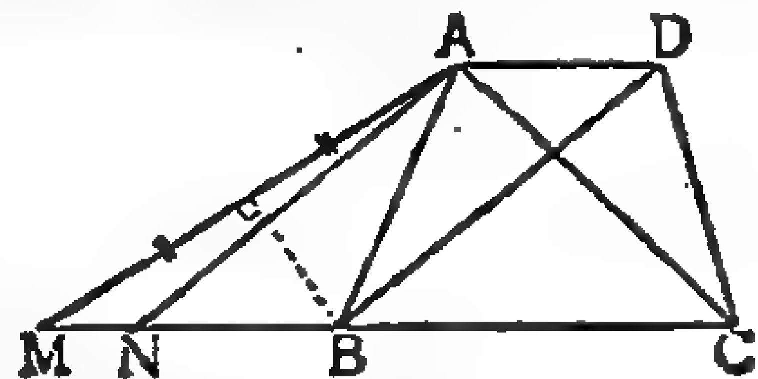
[作图]　作 $\triangle DBE$，使

$BE=a+b$，

$BD=m$，

$DE=n$。在 BE 上取 $BC=a$，过 D 作 BC 的平行线并取 $DA=b$，则 $ABCD$ 即为所求作的梯形。

2542. 已知两对角线的长为 m、n，两对角线的夹角为 θ，且一底边长为 a，求作梯形。



解　[作图]　作 $\triangle BDE$，使 $BD=m$，$DE=n$，$\angle BDE=\theta$。在 BE 上取点 C，使 $BC=a$。设过 C 所作 DE 的平行线 CA 与过 D 所作 BC 的平行线相交于点 A，则 $ABCD$ 即为所求作的梯形。

[证明]　由作图，$AD\parallel BC$，则 $ABCD$ 为梯形；又 $AC\parallel DE$，则 $ACED$ 为平行四边形。因此

$$AC=DE=n,\ BD=m,$$

而 AC、BD 的夹角为 θ。

2543. 已知对角线 $AC(=l)$，对角线 $BD(=m)$，边 $AB+BC(=n)$，AC 与 BD 的夹角为 α，求作梯形 $ABCD$。

解　[作图]　作 $\triangle ANC$，使 $AN=m$，$AC=l$，$\angle NAC=\alpha$；在 CN 的延长线上取点 M，使 $CM=n$。作 AM 的垂直平分线与 NC 相交于点 B。设过 B 所作 NA 的平行线与过点 A 所作 NC 的平行线相交于 D，则 $ABCD$ 即为所求作的梯形。

[证明]　由作图知，$BM=AB$，

$$AB+BC=MB+BC=MC=n,$$

又 $ANBD$ 为平行四边形，因此

$$BD=NA=m.$$

又 $AN\parallel DB$，则 AC、BD 的夹角与 $\angle NAC$ 相等即为 α。

2544. 已知两条对角线 $AC(=l)$，$BD(=m)$，连结不平行的两边 AB、CD 的中点 E、F 的线段$(=n)$，且 $\angle ABC(=\alpha)$，求作梯形 $ABCD$。

解 ［分析］ 设符合条件的梯形 $ABCD$ 已作出。过 A 作 DB 的平行线 AG 交 CB 的延长线交于点 G，则

$$AG=DB=m,\ AD=GB,$$

$$GC=AD+BC=2EF=2n.$$

而 $\angle ABC=\alpha$，故可作图如下。

［作图］ 作 $\triangle AGC$，使 $AG=m$，$GC=2n$，$AC=l$。以 AC 为弦，作含角 α 的弓形弧与 CG 边相交于点 B。设过 B 所作 AG 的平行线 BD 与过 A 所作 BC 的平行线相交于点 D，则 $ABCD$ 即为所求的梯形。

2545. 已知两对角线 $AC(=k)$，$BD(=l)$，连结它们的中点 H、G 的线段长为 m，连结相对两边中点 E、F 的线段长为 n，求作梯形 $ABCD$。

解 (1) E、F 为两底 AD、BC 的中点。

［分析］ 设符合条件的梯形 $ABCD$ 已作出。过 D 所作平行于 AC 的直线 DK 交 BC 的延长线于 K，设 BK 的中点为 O，连结 DO，取 $CK=AD$，$AC=DK$，

$$FO=BO-BF=\frac{1}{2}(BK-BC)$$

$$=\frac{1}{2}CK=ED,$$

则 $EFOD$ 为平行四边形，$DO=EF=n$，$GH=\frac{1}{2}(BC-AD)$，故可作图如下。

［作图］ 作 $\triangle BDK$，使 $BD=l$，$DK=k$，中线 $DO=n$。在 BK 上取 $BH'=2m$，设过 KH' 的中点 C 所作平行于 DK 的直线 CA 与过 D 所作平行于 BK 的直线相交于点 A，则 $ABCD$ 即为所求作的梯形。

(2) E'、F' 为不平行的两边 AB、CD 的中点。

［作图］ 作 $\triangle BDK$，使 $BD=l$，$BK=2n$，$DK=k$。以下与 (1) 的作法相同。

2546. 已知高 h，两底 AD、BC 的差为 l，求作内接于已知圆 O 的梯形 $ABCD$。

解 ［分析］ 设适合条件的圆 O 的内接梯形已作出。过 A 作 DC 的平行线 AE 与 BC 的交点为 E，则

$$AD=EC,$$

且 $$BE=BC-AD=l.$$

过 A 作 BC 的垂线 AH，则 H 为 BE 的中点。故可作图如下。

［作图］ 作直角三角形 $A'B'H'$，使 $A'H'=h$，$B'H'=\frac{1}{2}l$，$\angle H'=90°$。再以等于 $A'B'$ 的线段 AB 为弦作圆 O。作以 AB 为直径的半圆(圆 O 内)与以 B 为圆心、$\frac{1}{2}l$ 长为半径的圆相交于点 H，BH 与圆 O 的另一交点为 C，过 A 作平行于 BC 的弦 AD，则 $ABCD$ 即为所求的梯形。

2547. 已知面积为 l^2，一腰长为 m，求作内接于已知圆 O 的梯形 $ABCD$。

解 ［分析］ 设符合条件的梯形 $ABCD$ 已作出 $(AD \parallel BC)$，$AB=m$，则 A、B 为定点。设 DC 的中点为 E，由问题 811，

$$\triangle AEB=\frac{1}{2}ABCD.$$

故 E 在距离 AB 为定值的平行直线 XY 上。设 AB 的中点为 F，则 $OE=OF$，故可作图如下。

［作图］ 作长为 m 的弦 AB，作距离 AB 为 h (h 满足 $m\cdot h=l^2$)的平行直线 XY (与 O 在 AB 的同侧)。设弦 AB 的中点 F，以 OF 为半径的同心圆与 XY 相交点为 E，过 E 作内切圆的弦 CD，则 $ABCD$ 即为所求的梯形。

2548. 已知高为 h，两边 AD、BC 的和为 l，求作已知圆 O 的内接梯形 $ABCD$。

解　设适合条件的圆 O 的内接梯形 $ABCD$ 已作出。作垂直于底边的直径 XY，过 AB 的中点 E 作平行于底的直线 EF 与对边交点为 F，与直径的交点为 G，则

$$EF=\frac{1}{2}(AD+BC),$$

所以　$EG=\frac{1}{4}(AD+BC)$（一定）。

因此点 E 在平行于直线 XY、且其距离为 $\frac{1}{4}l$ 的弦 PQ 上。其次由 A 向 BC 作垂线 AH，那么 $AH=h$。设 PQ 与 BC 的交点为 K，则 $BK=KH$，由此得 H 是关于定直线 PQ 的点 B 的对称点。因为 B 在弧 PQ 上，所以 H 在关于弦 PQ 与弧 PBQ 的对称弧 PHQ 上。由此得，点 A 在圆 O 上，点 H 在弧 PHQ 上，线段 AH 等于已知长 h，并且平行于直线 XY（问题 **2160**），这样求得点 A 与 H。从而由 A 与 H 作 AH 的垂直弦 AD、BC，则 $ABCD$ 为所求的梯形。

2549.　已知两底 AD、BC 的比为 $m:n$，高为 h，求作内接于已知圆 O 的梯形。

解　设适合条件的内接于圆 O 的梯形 $ABCD$ 已作出。设 AC、BD 的交点为 K，BA、CD 的交点为 P，则 O、K、P 三点共线，由此

$$\angle KOD=\frac{1}{2}\angle AOD=\angle ACD.$$

故 K、O、C、D 四点共圆。

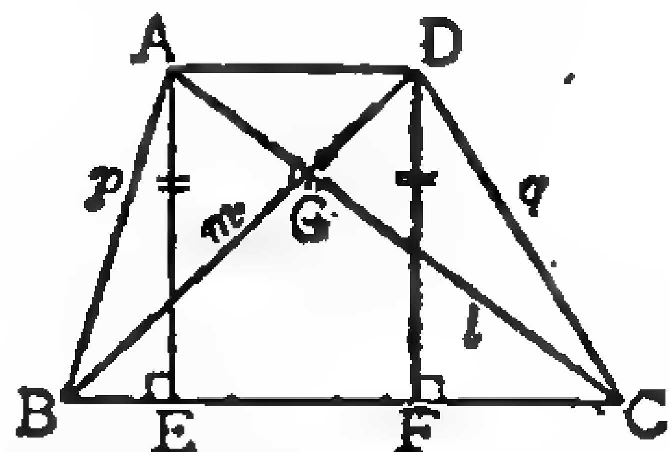
$$\therefore\quad \angle PKD=\angle OCD=\angle ODC.$$

从而　$\triangle OKD\backsim\triangle ODP$，

$$\therefore\quad OK\cdot OP=OD^2.$$

其中 K、P 把 $EF=h$ 分为 $m:n$ 的内分和外分点（问题 **1041**），所以 $OP-OK=PK$（定长）。故本题可归结为已知 OP 与 OK 的差或积分别求 OK 和 OP 的问题（问题 **2016**）。

2550.　已知对角线 $AC(=l)$，$BD(=m)$，以及不平行的两边 $AB(=p)$，$CD(=q)$，求作梯形 $ABCD$。其中 $l>m$，$p<q$，$AD<BC$。



解　设梯形 $ABCD$ 已作出。作 $AE\perp BC$，$DF\perp BC$，由问题 **847**，

$$l^2=p^2+BC^2-2BC\cdot BE,$$

$$m^2=q^2+BC^2-2BC\cdot CF.$$

两式相减，

$$l^2-m^2=p^2-q^2+2BC\cdot(CF-BE),$$

$$q^2-p^2=(CF^2+DF^2)-(BE^2+AE^2)$$

$$=CF^2-BE^2.$$

$$\therefore\quad l^2-m^2=(CF-BE)(2BC-CF-BE),$$

因而　$$\frac{l^2-m^2}{q^2-p^2}=\frac{2BC-CF-BE}{CF+BE}$$

$$=\frac{BC+AD}{BC-AD}.$$

设 $l^2-m^2=a^2$，$q^2-p^2=b^2$，上式化简为

$$\frac{BC+AD}{BC-AD}=\frac{a^2}{b^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{BC}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

设 AC 与 BD 的交点为 G，则

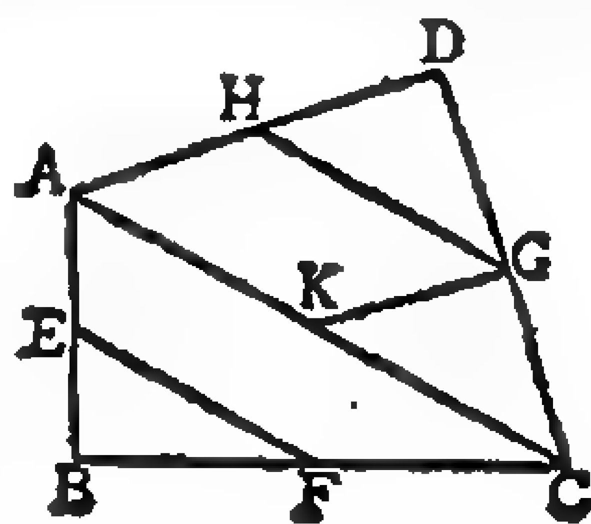
$$\frac{GA}{GC}=\frac{GD}{GB}=\frac{AD}{BC}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

由此，对角线的交点 G 内分对角线为定比 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$，所以 GA、GC 以及 GD、GB 均为定长，而 AB、CD 为已知长。先作 $\triangle GAB$，分别在 AG、BG 的延长线上取点 C、D，使 $AC=l$，$BD=m$，则 $ABCD$ 即为所求的梯形。

注　在 $l<m$，$p>q$，$AD>BC$ 的情形下同样可作图。重要的是，大小关系决定了，即可相应地求出其解。

6. 一般四边形

2551.　已知四边形三条边的中点位置，和一条对角线中点的位置，求作四边形。



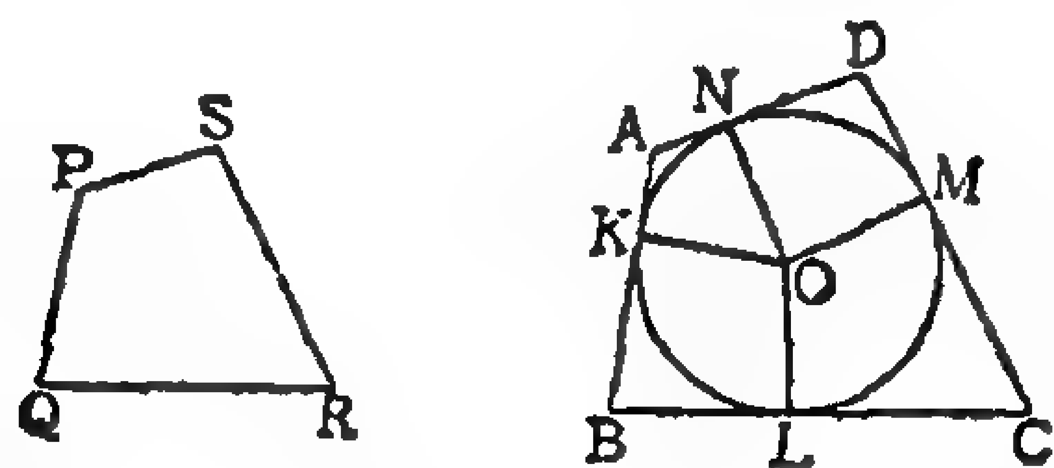
解　［分析］　设本题已解出，$ABCD$ 为所作出的四边形，则边 AB、AD、DC 的中

点 E、H、G 和对角线 AC 的中点 K 的位置都是给定的。因为 $AKGH$ 是平行四边形，其中 K、G、H 三点的位置是给定的，所以第四个顶点 A 也能确定。因此可作图如下。

[作图] 以 H、G、K 为三个顶点，作平行四边形 $HGKA$，得到第四个顶点 A。在 AH 的延长线上，作 $HD=AH$，设 DG 的延长线和 AK 的延长线的交点为 C。再连结 AE，在 AE 的延长线上，取 $EB=AE$，则四边形 $ABCD$ 即为所求。如果不知道 G(或 H 点)，而知道 BC 的中点 F，则因 $EFKA$ 也是平行四边形，所以可用同样方法作图。

2552. 求作外切于已知圆 O，且与任意四边形 $PQRS$ 相似的四边形 $ABCD$。

解 [分析] 从已知圆心 O 作四条半径 OK、OL、OM、ON，使 $\angle NOK$、$\angle KOL$、$\angle LOM$ 分别等于 $\angle P$、$\angle Q$、$\angle R$ 的补角。由此得 K、L、M、N 四点，以此四点为切点作切线 AB、BC、CD、DA，设它们的交点分别为 A、B、C、D，则 $ABCD$ 就是所求的四边形。



[证明] $\because \quad \angle ANO=\angle R=\angle AKO$,

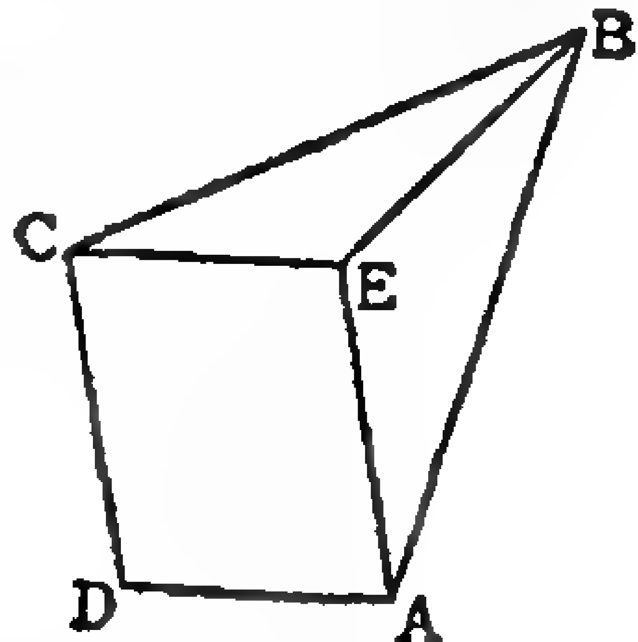
$\therefore \quad \angle NOK+\angle NAK=2\angle R$,

且 $\quad \angle NOK+\angle SPQ=2\angle R$.

$\therefore \quad \angle A=\angle P$.

同样可得 $\angle B=\angle Q$, $\angle C=\angle R$, $\angle D=\angle S$.

2553. 已知三边 $AB(=a)$, $BC(=b)$, $CD(=c)$, $\angle BAD(=\alpha)$, $\angle ADC(=\beta)$，求作四边形 $ABCD$，其中 $\alpha+\beta>2\angle R$.



解 [分析] 假定满足条件的四边形 $ABCD$ 已作出，过 C 作 $CE \perp\!\!\!\!= DA$，则

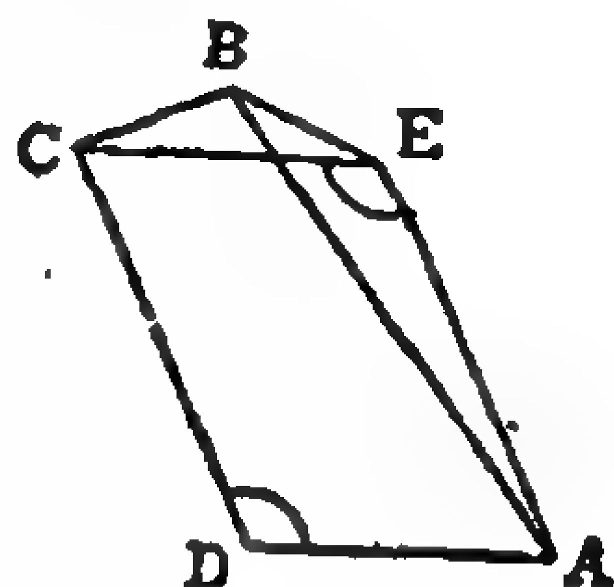
$$AE=CD=c,$$

$$\angle DAE=2\angle R-\angle D,$$

$$\therefore \quad \angle BAE=\angle A-(2\angle R-\angle D)$$
$$=\alpha+\beta-2\angle R.$$

又 $\quad \angle AEC=\angle D=\beta$,

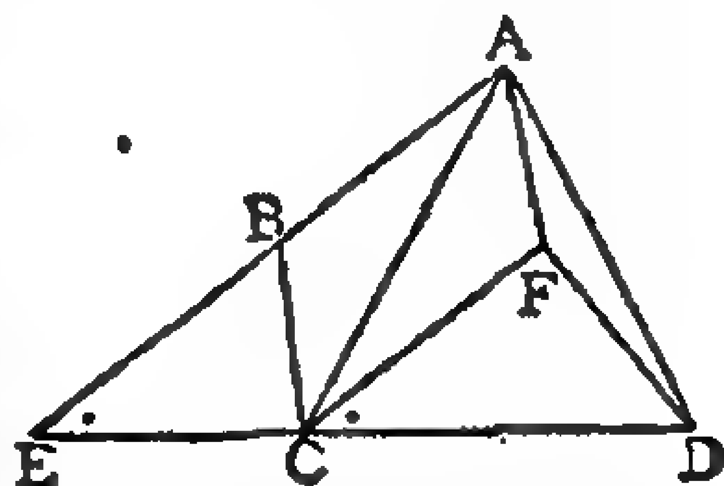
因此可作图如下。



[作图] 作 $\triangle ABE$ 使 $AB=a$, $AE=c$. 并使 $\angle BAE=\alpha+\beta-2\angle R$. 作射线 EC，使 $\angle AEC=\beta$. 以 B 为圆心、b 为半径作圆，与 EC 交于点 C. 过 C 作 $CD \parallel EA$，且 $CD=EA$，则 $ABCD$ 是所求的四边形。

注 在 $\alpha+\beta<2\angle R$ 时，先作 $AB=a$、$AE=c$、$\angle BAE=2\angle R-(\alpha+\beta)$ 的 $\triangle ABE$，以后就和上面一样。

2554. 已知四边 $AB(=a)$, $BC(=b)$, $CD(=c)$, $DA(=d)$ 和两边 AB 与 CD 的夹角 α，求作四边形 $ABCD$.



解 [分析] 假设满足条件的四边形 $ABCD$ 已作出，AB、DC 的交点为 E. 作 $CF \parallel AB$, $AF \parallel BC$. 设 AF 与 CF 的交点为 F，那么 $CF=AB$, $AF=BC$. 又

$$\angle FCD=\angle AED=\alpha,$$

因此可作出 $\triangle FCD$. 故可作图如下。

[作图] 作 $CF=a$、$CD=c$、$\angle FCD=\alpha$ 的 $\triangle CDF$. 以 F、D 为圆心，分别以 b、d 为半径作圆，其交点为 A. 其次以 A、C 为圆心，分别以 a、b 为半径作圆，其交点为 B. 则 $ABCD$ 就是求作的四边形。

2555. 已知对角线 $AC(=l)$, $BD(=m)$，一组对边 $AB(=a)$, $CD(=b)$，这两边的夹角 α，求作四边形 $ABCD$.

A
B
D
C
B'

解 [分析] 从 C 引直线 CB'，使 $CB' \perp\!\!\!\!= AB$，那么

$$AC=BB',$$

且

$$\angle DCB'=2\angle R-\alpha,$$

在 $\triangle DCB'$ 中，CD、CB'、$\angle DCB'$ 是已知的，所以这个三角形可作出，故可作图如下。

[作图] 作 $\triangle B'CD$，使 $\angle B'CD=2\angle R$

$-a$, $B'C=a$, $CD=b$; 其次以 B'、D 为圆心，分别以 l、m 为半径作圆，设其交点为 B，过 B 作 BA，使 $BA\perp B'C$，则四边形 $ABCD$ 就是所求的四边形。

2556. 已知两边 $AB(=a)$, $CD(=b)$, 对角线 $AC(=l)$，两角

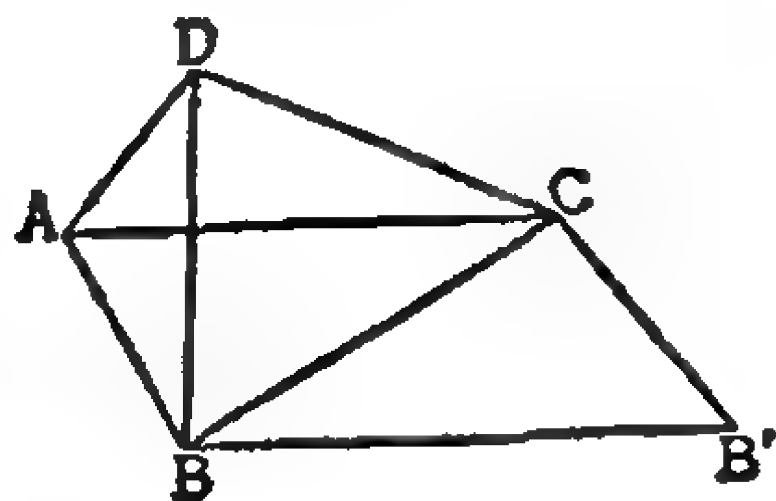
$$\angle ABD(=\alpha),\ \angle BDC(=\beta),$$

求作四边形 $ABCD$。

解 ［分析］ AB、CD 的交角为

$$\angle BDC-\angle ABD=(\beta-\alpha).$$

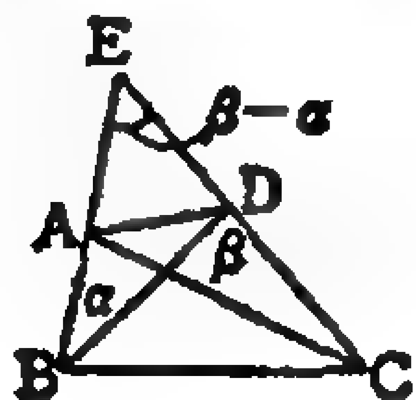
如果过 C 作 CB'，使 $CB'\perp AB$，连结 BB'，就有 $BB'\perp AC$，并且 $\angle DCB'$ 是 AB、CD 的交角 $(\beta-\alpha)$ 的补角，所以 $\triangle DCB'$ 可作出。因此可作图如下。



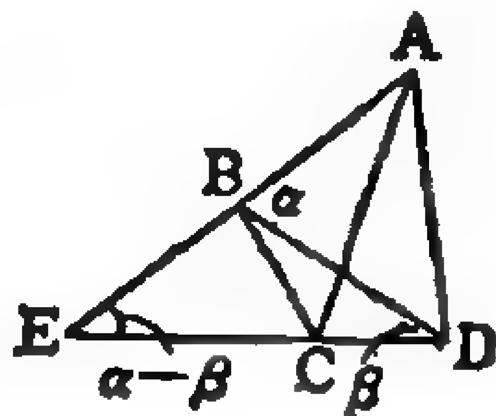
［作图］ 作 $\triangle B'CD$，使 $\angle B'CD=2\angle R-(\beta-\alpha)$, $B'C=a$, $CD=b$。过 D 作直线 DB，使 $\angle CDB=\beta$，且取点 B，使 $BB'=l$。其次，求与 D 在直线 BC 同一侧的点 A，使 $AB=a$, $AC=l$。那么四边形 $ABCD$ 就是所求的四边形。

注 由 α 和 β 的大小关系，使 AB 和 CD 相交形式不同，要引起注意。

（$\alpha<\beta$ 的情形）



（$\alpha>\beta$ 的情形）



2557. 已知边 $AB(=a)$, $CD(=b)$, $\angle BAC(=\alpha)$, $\angle ACD(=\beta)$, $\angle BDA(=\gamma)$，求作四边形 $ABCD$。

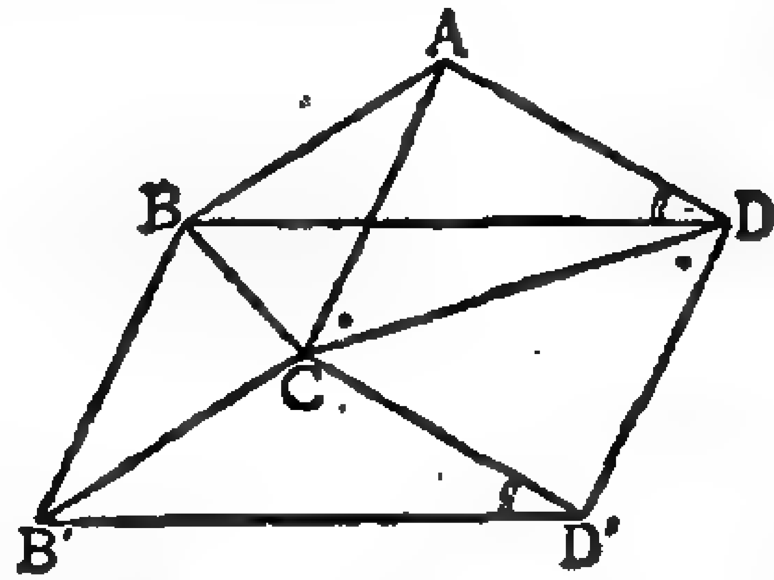
解 ［分析］ 由 C 作 $CB'\perp AB$, $CD'\perp AD$。那么边 AB、CD 的夹角是

$$\angle ACD\sim\angle BAC=(\beta\sim\alpha),$$

因此可以求出 $\angle B'CD$。其次，

$$\angle ADB=\angle CD'B'=\gamma,$$

所以 D' 是在以 CB' 为弦，且含角 γ 的弓形弧上。又有



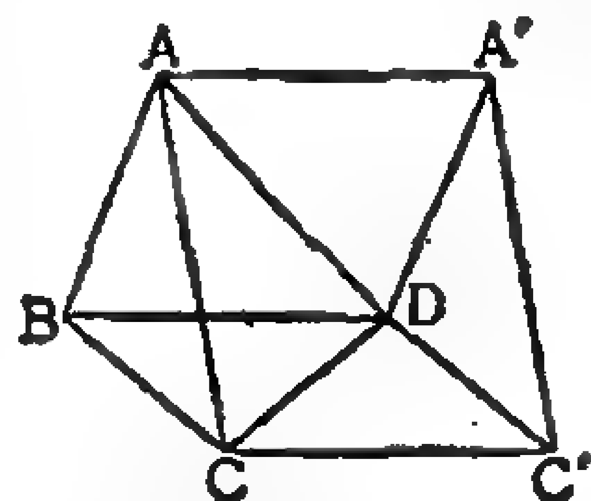
$$\angle ACD=\angle CDD'=\beta.$$

故可作图如下。

［作图］ 作 $\triangle B'CD$，使 $\angle B'CD=2\angle R-(\beta\sim\alpha)$, $B'C=a$, $CD=b$。作以 CB' 为弦，含角 γ 的弓形弧，过 D 引 DD'，使 $\angle CDD'=\beta$，并与弓形弧交于点 D'。过 B'、D 分别引 DD'、$B'D'$ 的平行线，其交点为 B。再从 C 引 BB' 的平行线且取 $CA=BB'$，则四边形 $ABCD$ 是所求的四边形。

2558. 已知对角线 $AC(=l)$, $BD(=m)$ 和它们的交角 θ，相对的两角 $\angle ABC(=\alpha)$, $\angle ADC(=\beta)$，求作此四边形 $ABCD$。

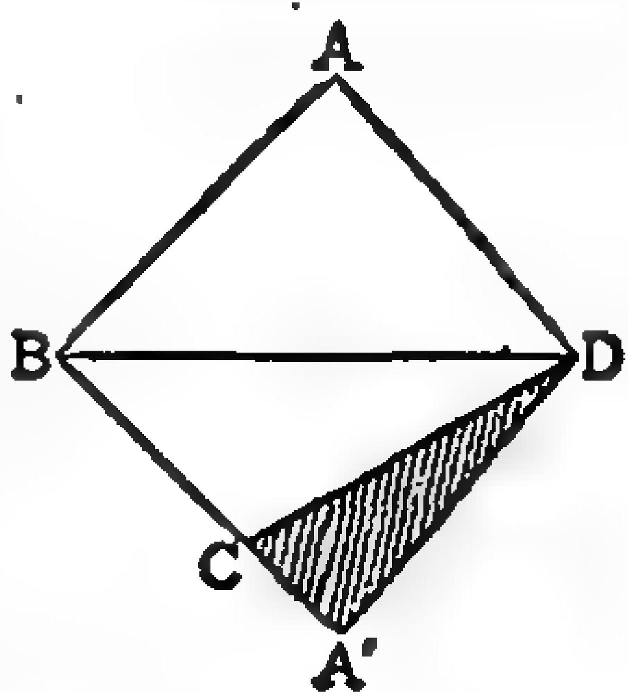
解 从 D 引 $DA'\perp BA$, $DC'\perp BC$，连结 $A'C'$，那么 $AA'=BD=CC'$, $AC=A'C'$，并且 $\angle CAA'=\theta$。因此可以作平行四边形 $ACC'A'$。又 $\angle ABC=\angle A'DC'=\alpha$,



所以 D 在以 $A'C'$ 为弦，含角 α 的弓形弧上。同样地，D 又在以 AC 为弦，含角 β 的弓形弧上。因此，求两条弧的交点 D，就可决定四边形 $ABCD$。

2559. 已知四边 $AB(=a)$, $BC(=b)$, $CD(=c)$, $DA(=d)$，且对角线 BD 平分角 $\angle ABC$，求作此四边形 $ABCD$。

解 ［分析］ 假设适合条件的四边形 $ABCD$ 已作出。以 BD 为折线，把 $\triangle ABD$ 反折过来，那么 AB 和 BC 重合，A 与其对应点 A' 重合。由于 $A'D=AD$, $CA'=AB-BC$，可作出 $\triangle A'CD$。故可作图如下。

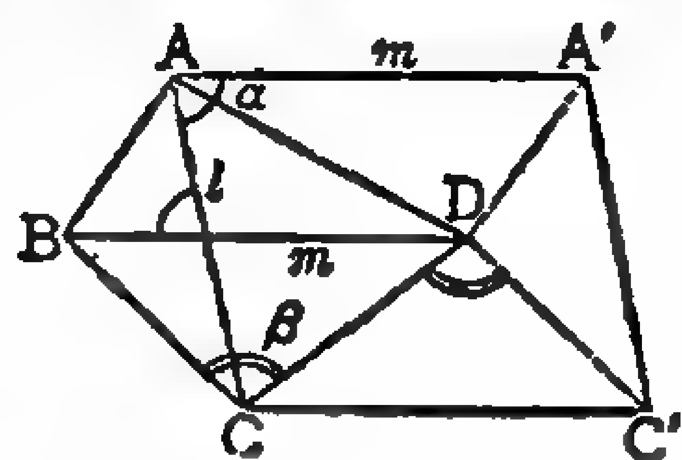


［作图］ 作 $\triangle A'CD$，使 $A'D=d$, $CD=c$, $AC=a-b$。在 $A'C$ 的延长线上取 B，使 $CB=b$，取 A' 关于 BD 的对称点 A，则 $ABCD$ 就是所求的四边形。

2560. 已知对角线 $AC(=l)$, $BD(=m)$，它们的交角为 α，两邻边 AB、AD 的比是 $a:b$, $\angle BCD=\beta$，求作四边形 $ABCD$。

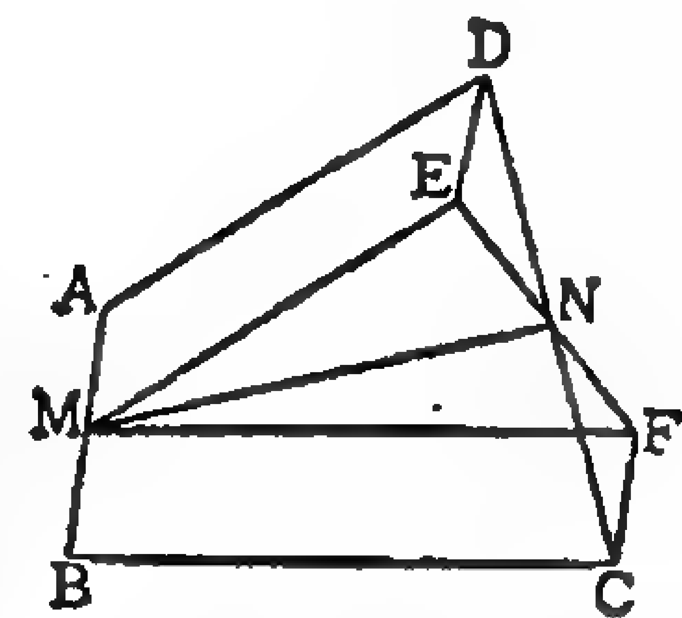
解 ［作图］ 作平行四边形 $ACC'A'$，使 $AC=l$, $AA'=m$, $\angle CAA'=\alpha$。以 CC' 为弦，作含角 β 的弓形弧。再作与 A、A' 的距离之

比为 $b:a$ 的轨迹的圆，设此圆与弓形弧的交点为 D，再过 D 作 $DB\perp AA'$．则 $ABCD$ 就是所求的四边形．



［证明］ 略．

2561. 已知四边 $AB(=a)$，$BC(=b)$，$CD(=c)$，$DA(=d)$，对边 AB、CD 的中点分别为 M、N，并且 $MN(=m)$．求作四边形 $ABCD$．



解 ［分析］ 假设已作出满足条件的四边形 $ABCD$．如果把 AD、BC 分别平移到 ME、MF 的位置，因为 $AM=BM$，所以 $DE\perp\!\!\!\!= FC$．因而 $FDEC$ 是平行四边形，而且 EF 过 DC 的中点 N．又 MN 是 $\triangle EMF$ 的中线，且 $MN=m$，$MF=BC=b$，$ME=AD=d$，所以可作出 $\triangle EMF$．

又
$$DN=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}c,$$
$$DE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a,$$

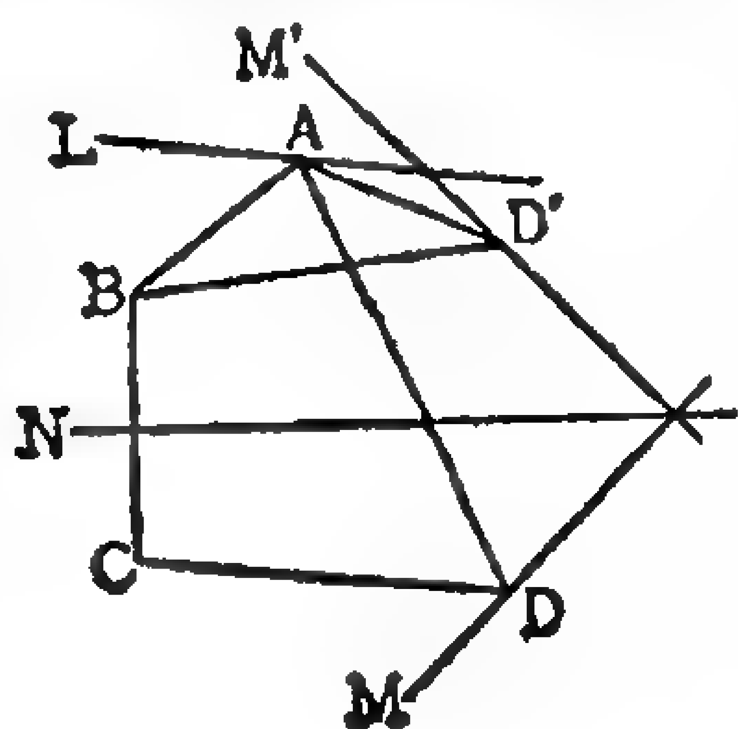
故可作图如下．

［作图］ 作 $\triangle EMF$，使两边 $ME=d$，$MF=b$，中线 $MN=m$．其次，以 E、N 为圆心，分别以 $\frac{a}{2}$、$\frac{c}{2}$ 为半径作两个圆，交点为 D．将 DN 延长到 C，使 $NC=DN$．再过 D、C 分别引 ME、MF 的平行线，并截取 $DA=EM$，$CB=FM$，那么四边形 $ABCD$ 即可作出．

2562. 以两定点 B、C 为顶点，作四边形 $ABCD$，使另外两顶点 A、D 分别在定直线 L、M 上，$\angle B$、$\angle C$ 的差为 θ，并且边 AB、CD 的比为 $a:b$．

解 ［分析］ 假设已作出适合条件的四边形 $ABCD$，以 BC 的中垂线 N 为轴，CD 和 M 的对称线分别为 BD' 和 M'．那么

$$BD'=CD,$$
$$\angle ABD'=\angle B-\angle C=\theta,$$

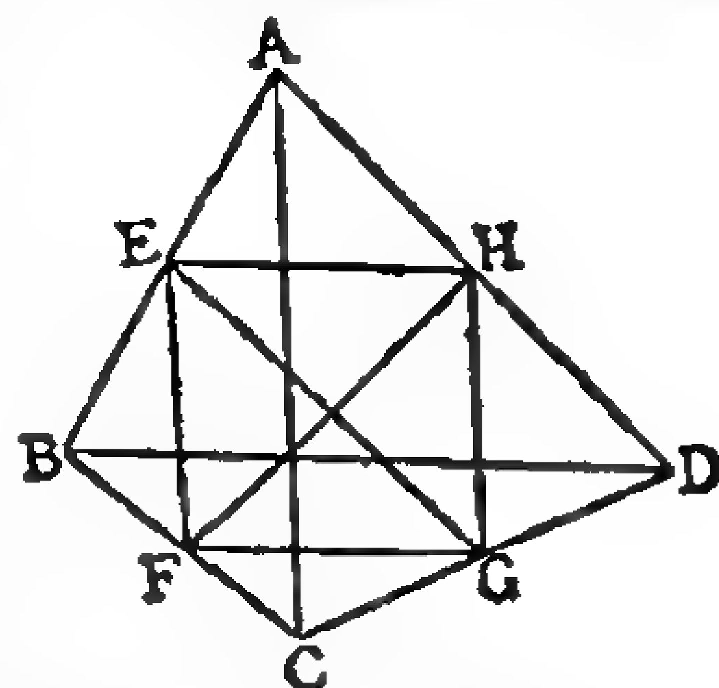


B 是定点，A 和 D' 分别在 L 和 M' 上，而 $AB:BD'=a:b$，因此 $\triangle ABD'$ 可作．

［作图］ 以线段 BC 的中垂线 N 为轴，作 M 的对称线 M'．由 $\angle ABD'=\theta$，$AB:BD'=a:b$，作 $\triangle ABD'$，使其顶点 A、D' 分别在 L、M' 上(问题 **2282**)．过 C 作 BD' 关于 N 的对称线 CD，与 M 相交于 D，则四边形 $ABCD$ 即为所求．

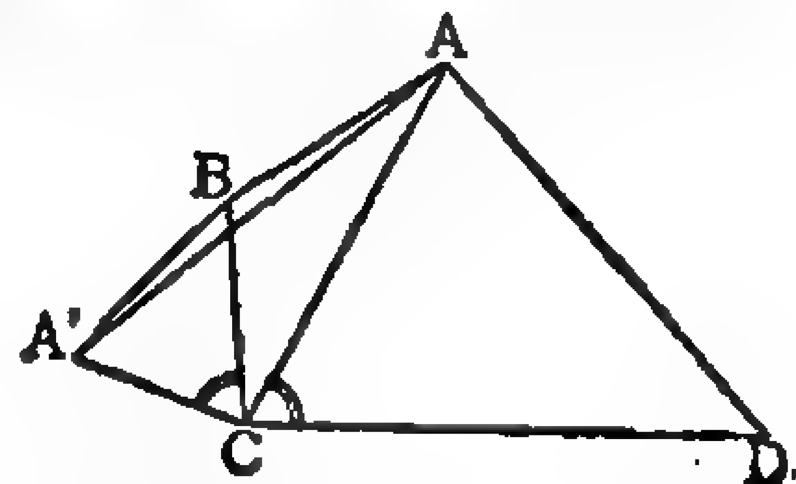
2563. 已知四边形的两个对角，面积及两组对边中点之间的距离，求作四边形．

解 设四边形 $ABCD$ 的对边中点的距离为 EG、FH，则 $EFGH$ 的各边是平行于原四边形对角线的四边形，并且其面积等于原四边形的面积之半．由此可知四边形 $EFGH$ 的对角线和面积，从而 $\triangle EFH$ 的面积、底边及底边的中线也是已知的，所以 $\triangle EFH$ 是可作的．因此，AC、BD 的夹角，EF、EH 的两倍线段 AC、BD，也是可求出的．故本题可归结为已知两个对角和两条对角线及其交角，求作四边形的问题(问题 **2558**)．



2564. 已知边 $AB(=a)$，$AD(=b)$，$\angle ABC(=\alpha)$，$\angle ADC(=\beta)$，两边 BC、CD 的比是 $m:n$，求作四边形 $ABCD$．

解 ［分析］ 假设已作出适合条件的四边形 $ABCD$，过 B 引直线 BA'，并使 $\angle A'BC=\angle D$．过 C 引直线 CA'，并使 $\angle A'CB=\angle DCA$，则 $\triangle A'CB\backsim\triangle ACD$，



$$\therefore\ A'B:AD=BC:DC=m:n.$$

由此可知 $A'B$ 是可以求出的．

又
$$A'C:AC=BC:DC=m:n,$$

故可作图如下．

［作图］ 作 $\triangle ABA'$，使边 $AB=a$，$A'B=\frac{mb}{n}$，$\angle ABA'=\alpha+\beta$．再作与 A'、A 的距离之比为 $m:n$ 的轨迹的圆，设它与 $\angle ABC=\alpha$ 的边 BC 的交点为 C．以直线 AC 为对称轴，在点 B 的异侧，对应于 $A'C$ 作与 $\triangle A'CB$

相似的 $\triangle ACD$，则四边形 $ABCD$ 即为所求.

2565. 已知过对角线的交点 O 向各边作垂线，垂足为 P、Q、R、S 的位置. 求作此四边形 $ABCD$.

解 假设已作出满足条件的四边形 $ABCD$，那么四边形 $OPBQ$、$OQCR$、$ORDS$、$OSAP$ 都是圆的内接四边形. 在四边形 $OPBQ$ 中，$\angle POQ=2\angle R-\angle PBQ$. 在 $\triangle BAC$ 中，

$$\angle BAC+\angle BCA=2\angle R-\angle PBQ.$$

$$\therefore\quad \angle POQ=\angle BAC+\angle BCA.$$

同理　$\angle QOR=\angle CBD+\angle CDB$，

又

$\angle BAC=\angle PSO$，

$\angle BCA=\angle QRO$，

$\angle CBD=\angle QPO$，

$\angle CDB=\angle RSO$.

$\therefore\quad \angle POR$

$=\angle POQ$

$+\angle QOR=\angle PSO+\angle QRO$

$+\angle QPO+\angle RSO$

$=\angle PSR+\angle QRO+\angle QPO$

$=\angle PSR+4\angle R$

$-(\angle POR+\angle PQR)$，

因而　$2\angle POR=4\angle R+\angle PSR-\angle PQR$，

即

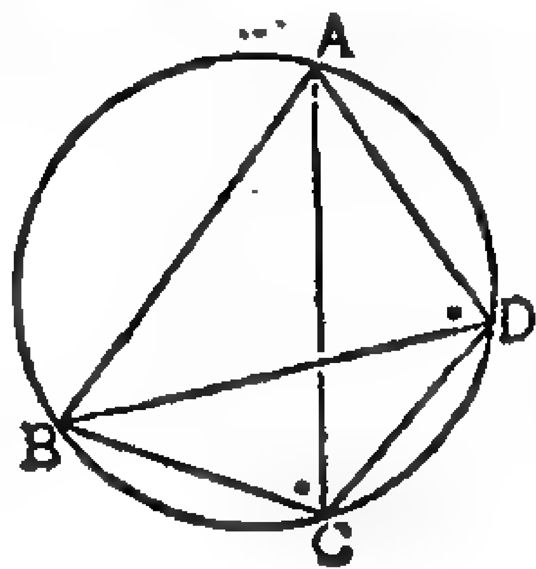
$$\angle POR=2\angle R+\frac{1}{2}(\angle PSR-\angle PQR).\quad ①$$

同理得

$$\angle QOS=2\angle R+\frac{1}{2}(\angle SPQ-\angle QRS).\quad ②$$

由 ①、② 可知，$\angle POR$、$\angle QOS$ 都是定角. 因而，O 是以 PR、QS 为弦，含 ①、② 定角的两个弓形弧的交点. 因此四边形 $ABCD$ 的各边是过 P、Q、R、S 分别与 OP、OQ、OR、OS 垂直的直线.

2566. 已知对角线 $AC(=l)$，$BD(=m)$，$\angle A(=\alpha)$，$\angle ACB(=\beta)$，求作内接于圆的四边形 $ABCD$.



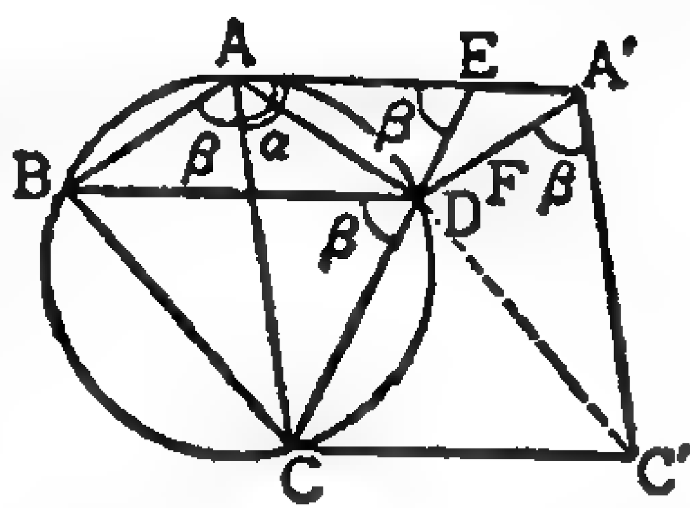
解 [分析] 假设已作出满足条件的四边形 $ABCD$，因为 $BD=m$，$\angle A=\alpha$，所以容易作出外接圆. 又由

$$\angle ACB=\beta=\angle ADB,$$

所以可作出边 AB. 又 $AC=l$，故可作图如下.

[作图] 取 $BD=m$，作以 BD 为弦、含角 α 的弓形弧的圆. 再作弦 DA，使 $\angle ADB=\beta$. 最后以 A 为圆心、l 为半径作圆弧和圆 ABD 的交点为 C，则四边形 $ABCD$ 即可作出 (如果 A 和 C 在 BD 的同侧，此题就无解).

2567. 已知对角线 $AC(=l)$，$BD(=m)$，其交角为 α，$\angle BDC(=\beta)$，求作对角互补的四边形 $ABCD$.



解 [分析] 假设满足条件的四边形 $ABCD$ 已作出. 过 A 和 C 分别引与 BD 平行且相等的线段 AA'、CC'，则 $ABDA'$、$BCC'D$、$ACC'A'$ 都是平行四边形. 在平行四边形 $ACC'A'$ 中，$AC=l$，$AA'=m$，$\angle CAA'=\alpha$，所以它是容易作出的.

又因四边形 $ABCD$ 的对角互补，所以它是圆内接四边形. 从而

$$\angle BAC=\angle BDC=\beta,$$

又 $A'D\parallel AB$，$A'C'\parallel AC$，

$$\therefore\quad \angle DA'C'=\angle BAC=\beta.$$

如果 CD 的延长线和 AA' 的交点为 E，因为 $AA'\parallel BD$，所以 $\angle AEC=\angle BDC=\beta$，由此可求得点 D.

[作图] 作平行四边形 $ACC'A'$，使 $AC(=l)$，$AA'(=m)$，$\angle CAA'(=\alpha)$. 过 C 作

$$\angle ACE=2\angle R-(\alpha+\beta),$$

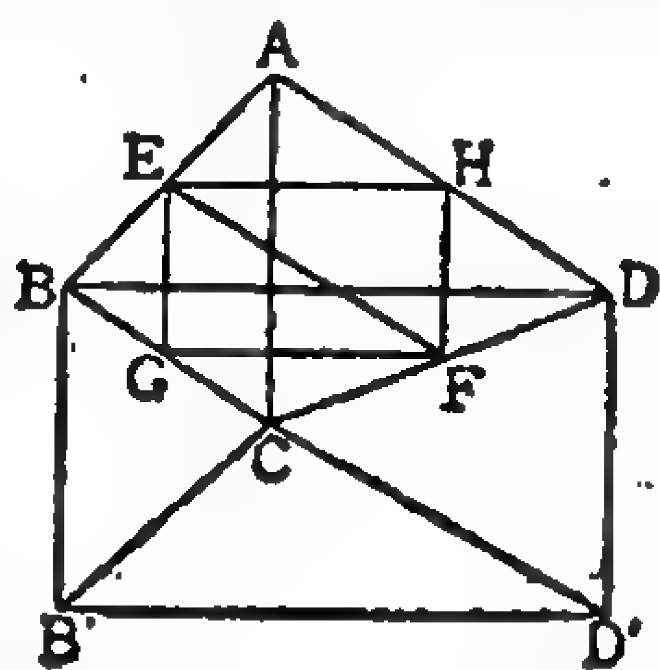
设 CE 与 AA' 相交于点 E，过 A' 引直线 $A'F$，使 $\angle FA'C'=\beta$. CE 和 $A'F$ 的交点为 D，以 A、A'、D 为三个顶点，作平行四边形，其第四个顶点为 B，则四边形 $ABCD$ 就是所求作的四边形.

[证明] 略.

2568. 已知一组对边 AB、CD 的中点之距离 $EF(=l)$，两条对角线 $AC(=m)$，$BD(=n)$，两边 AB、CD 的比为 $a:b$，另两边 AD、BC 的平方和 $(=k^2)$，求作此四边形 $ABCD$.

解 设 BC、AD 的中点为 G、H，则四边

形 $EGFH$ 是平行四边形，且其边分别等于原四边形对角线的一半。因为 $EGFH$ 的各边和一条对角线是一定的，所以可作出。由此可得出 AC、BD 的交角。其次，过 C 引 CB'、CD' 使它们平行且等于 AB、AD. 则 $AC=BB'$，$\angle DBB'$ 等于 AC、BD 的交角。因此，可作出平行四边形 $BB'D'D$. 又 C 在满足条件 $CB':CD=a:b$ 的轨迹的圆上，又在满足条件

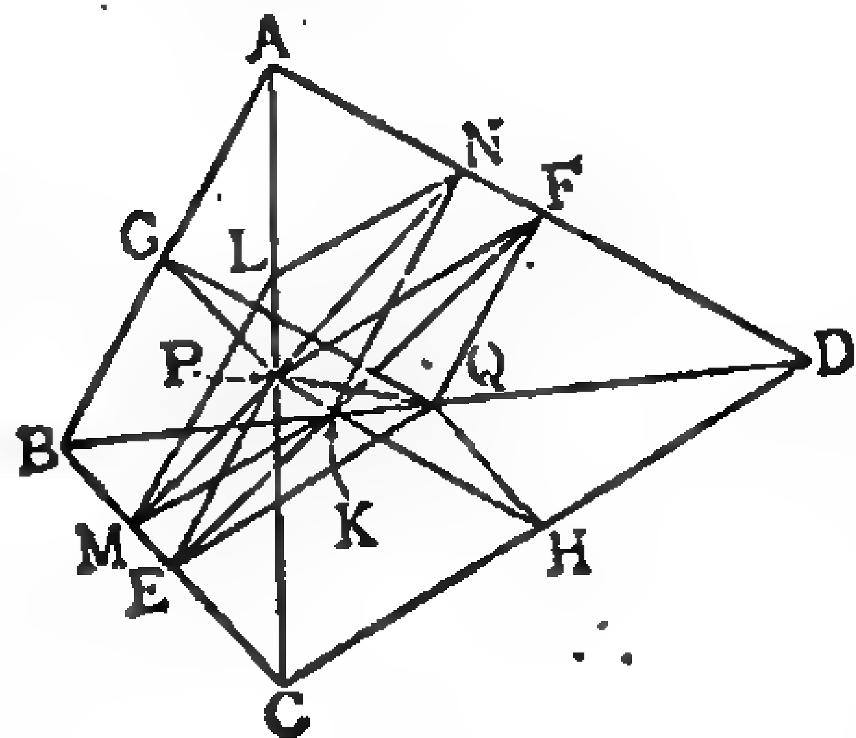


$$CB^2+CD'^2=k^2$$

的圆上，故 C 是这两个圆的交点。于是可作出四边形 $ABCD$.

2569. 已知一组对边 $AB(=a)$，$CD(=b)$，另一组对边 BC 和 AD 的比是 $m:n$，把 BC、AD 内分为 $m':n'$ 的点分别为 M、N，$MN(=l)$，两边 BC、DA 的夹角为 α. 求作四边形 $ABCD$.

解 设过 M、N 作 BA 的平行线 ML、NK，与 AC、BD 的交点分别为 L、K，则



$$BM:MC=AN:ND,$$

所以 $MKNL$ 是平行四边形。

又 $ML:AB=MC:BC=n':(m'+n')$，$AB=a$，所以可求得 LM 的长度。同样，

$$MK:CD=m':(m'+n'),$$

$CD=b$. 所以可作出平行四边形 $MKNL$(因为已知各边和对角线 MN)。从而可求出 AB、CD 的交角。

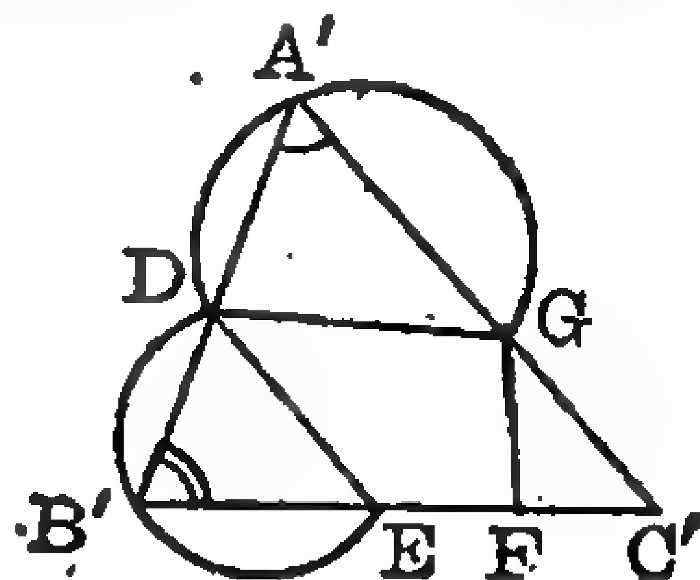
其次，设 BC、AD 的中点分别为 E、F，AC、BD 的中点分别为 P、Q，则 $PEQF$ 也是平行四边形。由于，

$$PE=\frac{1}{2}AB,\ PF=\frac{1}{2}CD,$$

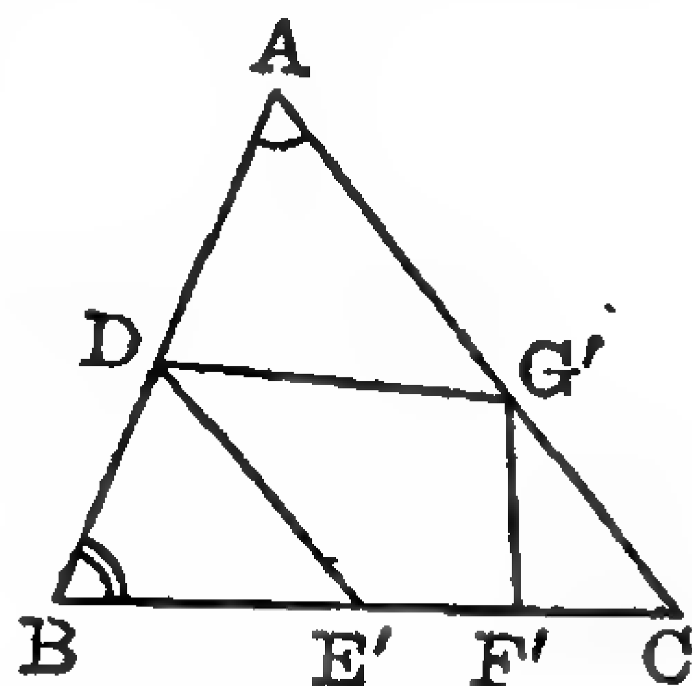
同时 $\angle EPF=\angle MLN$.

所以 $PEQF$ 也是可以作出的平行四边形，从而 EF、PQ 的长可知。再次，设 AB、CD 的中点分别为 G、H，$GPHQ$ 也是平行四边形，则 GP、GQ 分别等于 BC、AD 的一半，因此 $GP:GQ=BC:AD=m:n$，且 $\angle PGQ=\alpha$，所以这个平行四边形也是可作的。于是可以求出 $BC=2GP$，$AD=2GQ$. 综上所述，可知四边形 $ABCD$ 的四条边和一组对边中点的距离。本题可归结为问题 **2561**.

2570. 在给定的 $\triangle ABC$ 内作内接四边形 $D'E'F'G'$，使它相似于已知四边形 $DEFG$，且 E'、F' 在边 BC 上。



解 在四边形 $DEFG$ 的边 DG、DE 外侧，分别作含 $\angle A$、$\angle B$ 的弓形弧，与 FE 的延长线交于 B'，与 $B'D$ 的延长线交于 A'. 设 $A'G$、EF 的交点为 C'，则 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 的三个角对应相等，可知它们相似。



因此，在所给 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上求 D'、G' 点，使

$$\frac{AD'}{D'B}=\frac{A'D}{DB'},\quad \frac{AG'}{G'C}=\frac{A'G}{GC'}.$$

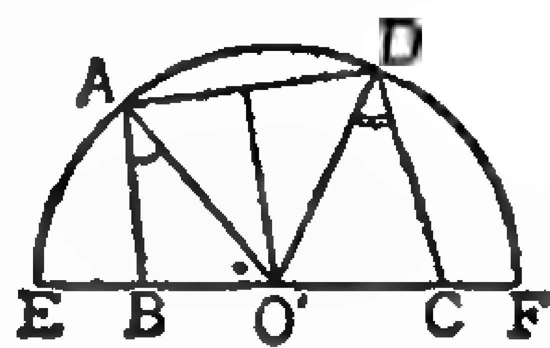
在 BC 上求点 E'、F'，使

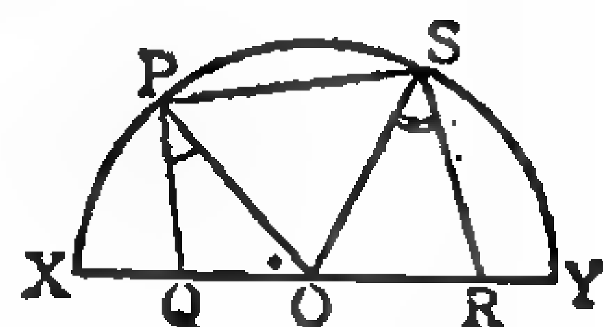
$$BE':E'F':F'C=B'E:EF:FC',$$

则四边形 $D'E'F'G'$ 为所求的四边形。

2571. 求作一个与已知四边形 $ABCD$ 相似的四边形，使其两个顶点在已知半圆的直径 XY (圆心为 O) 上，另外两个顶点在这个半圆的弧上。

解 ［作图］ 设 AD 的垂直平分线和 BC (或其延长线)的交点为 O'，以 O' 为圆心、$O'A$ 为半径作圆，它和 BC 的延长线交于 E、F. 其次，过 O 作两条半径 OP、OS，并使 $\angle XOP$、$\angle POS$ 分别等于 $\angle EO'A$，$\angle AO'D$. 在 XY 上求 Q、R 两点，使





$$\angle OPQ=\angle O'AB,\ \angle OSR=\angle O'DC,$$

则 $PQRS$ 就是所求的四边形。

［证明］ 因为两个等腰三角形 $AO'D$ 和 POS 是相似的．由此

$$DA:SP=O'A:OP=O'D:OS。$$

又　　$\triangle O'AB\backsim\triangle OPQ$，

AB、PQ 是其对应边，

$$\therefore\ AB:PQ=O'B:OQ=O'A:OP=O'D:OS=DA:SP.$$

同样的，因为 $\triangle O'CD\backsim\triangle ORS$，$CD$ 和 RS 是其对应边，所以

$$O'C:OR=CD:RS=O'D:OS=DA:SP。$$

故

$$O'B:OQ=O'C:OR=(O'B+OC'):(OQ+OR)=BC:QR=DA:SP.$$

因此两个四边形 $ABCD$ 和 $PQRS$ 的对应边也成比例，对应边所夹的角相等，所以四边形 $ABCD$ 和 $PQRS$ 相似．

2572. 求作已知四边形 $ABCD$ 的外接四边形 $PQRS$，使它相似于另一个四边形 $P'Q'R'S'$．

解 ［分析］ 设 $PQRS$ 为所求的四边形，点 P 在以 AB 为弦含 $\angle P'$ 的弓形弧上．点 R 在以 CD 为弦含 $\angle R'$ 的弓形弧上．连结 PR 分别与它们的共轭弧相交于 E、F，则由 $\angle APE=\angle S'P'R'$（定角），可知

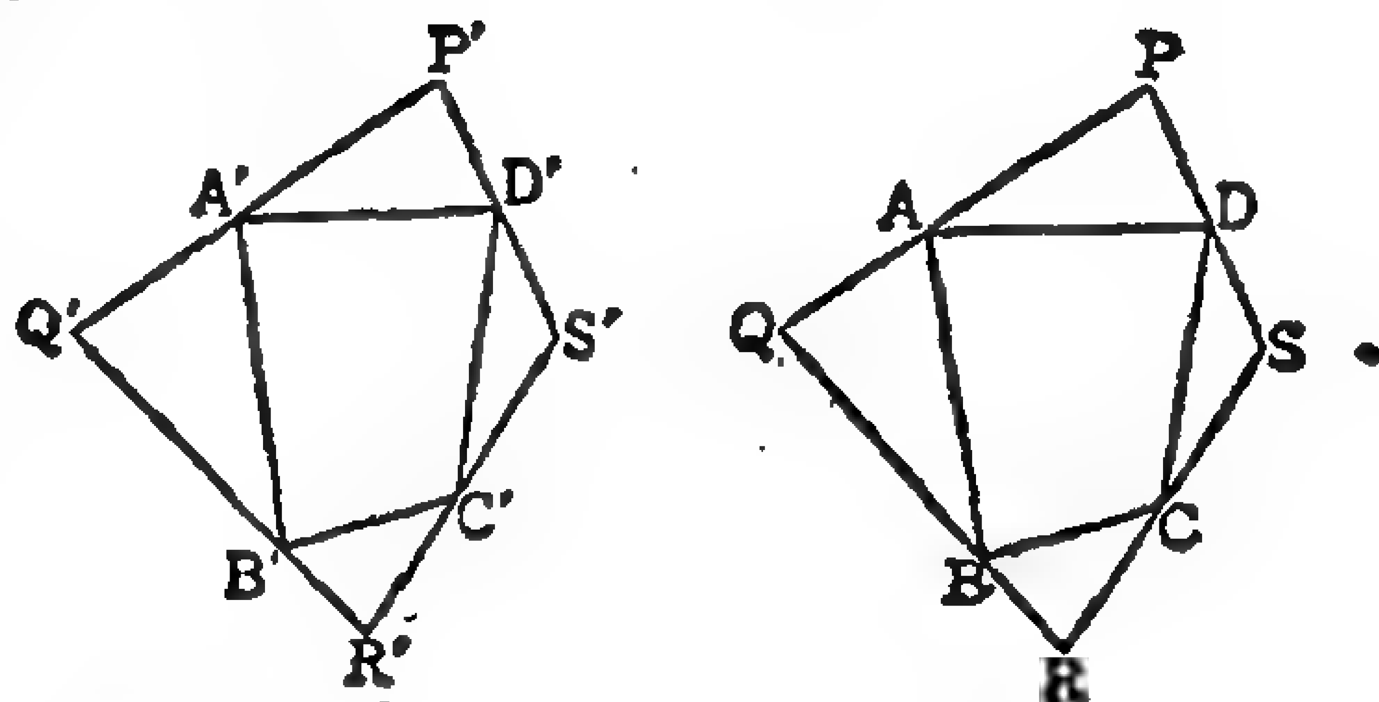
$$\angle ABE=\angle APE=\angle S'P'R'$$

（定角），所以，E 是定点．同样 F 也是定点．因此连结 EF，并延长与两个弓形弧相交于 P、R，则这两个点也是确定的．故可作图如下．

［作图］ 以 AB、CD 为弦分别作含 $\angle P'$、$\angle R'$ 的弓形弧．在其共轭弧的一侧，作等于 $\angle S'P'R'$ 的 $\angle ABE$，等于 $\angle S'R'P'$ 的 $\angle DCF$，延长 EF，与两个弓形弧相交于 P、R．延长 PA、RD 交于 S，PB、RC 交于 Q，则四边形 $PQRS$ 就是所求的四边形．

［讨论］ 如果直线 EF 和弓形弧 APB、CRD 不相交，此时本题无解．又当 E 和 F 重合时，本题有无数个解．

2573. 求作已知四边形 $PQRS$ 的内接四边形 $ABCD$，使它与四边形 $A'B'C'D'$ 相似。



解 利用上题的作法，作出四边形 $A'B'C'D'$ 的外接四边形 $P'Q'R'S'$，使其相似于四边形 $PQRS$［图 (1)］，把此图形原封不动地移到 $PQRS$ 上，即在各边上取 A、B、C、D 四点，使

$$AP:AQ=A'P':A'Q',$$
$$QB:BR=Q'B':B'R',$$
$$RC:CS=R'C':C'S',$$
$$SD:DP=S'D':D'P'.$$

那么四边形 $ABCD$ 是所求的内接四边形［图 (2)］．

2574. 已知四个角 α、β、γ、δ 和两条对角线 m、n．求作四边形 $ABCD$．

解 ［分析］ 假设本题已作出．$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 分别等于 α、β、γ、δ，$AC=m$，$BD=n$，作 $\triangle ABC$ 的外接圆．AD、CD 或其延长线与圆周交点分别为 E、F．作过点 B 的切线 PBQ，则

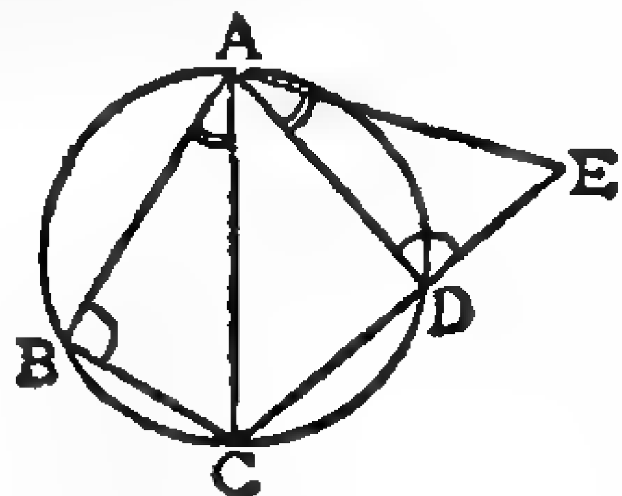
$$\angle FBP=\angle FCB=\gamma,$$
$$\angle EBQ=\angle EAB=\alpha,$$
$$\angle EDF=\angle ADC=\delta.$$

故可作图如下。

［作图］ 在等于线段 m 的弦 AC 上，作含角 β 的弓形弧和圆．在此圆周上任取一点 B，过 B 点作切线 PBQ．作出弦 BE、BF，使 $\angle PBF=\gamma$，$\angle QBE=\alpha$．再以 EF 为弦作含角 δ 的弓形弧，然后以 B 为圆心、n 为半径作圆与弓形弧相交于 D，ED、FD 的延长线与圆相交于 A、C，则四边形 $ABCD$ 就是所求的四边形。

2575. 作四边为 $AB(=a)$，$BC(=b)$，$CD(=c)$，$DA(=d)$，且内接于某圆的四边形 $ABCD$。

解 假设适合条件的四边形 $ABCD$ 已作出，过 A 引直线 AE，使 AE 与 AD 的夹角等于 $\angle BAC$，且与 CD 的延长线交于点 E，则



$\angle ADE=\angle ABC$，

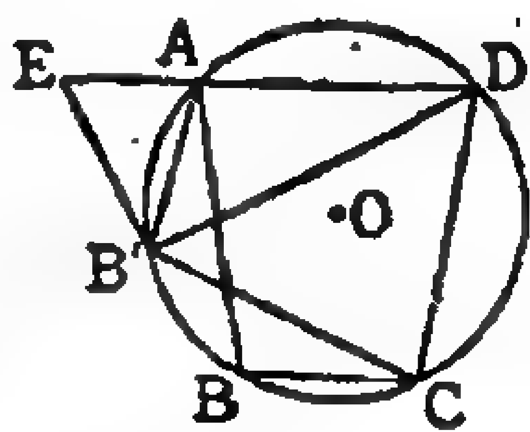
$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle ADE$，

$BC:DE=AB:AD$。

所以可求出 DE。又 $AC:AE=AB:AD$（一定），所以 CD、DE、AD 以及 $AC:AE$ 可知。因此 $\triangle ACE$ 确定，$\angle ADC$ 也可以确定。这样 $ABCD$ 的四条边和一个角是确定的，可以作图。

2576. 已知四边形 $ABCD$ 的一组对边 $AB(=a)$，$CD(=b)$，且另一组对边 AD 与 BC 的和是 l，求作已知圆 O 的内接四边形 $ABCD$。

解 ［分析］ 假设满足条件的四边形 $ABCD$ 已作出，在弧 ABC 上取点 B'，使 $AB'=BC$，连结 AB'、$B'C$，则 $B'C=AB$。于是在同一个圆 O 中的内接四边形 $AB'CD$，相邻的两边 $B'C$、CD 各等于 a、b。另外两边是 $AB'+AD=l$，故可作图如下。



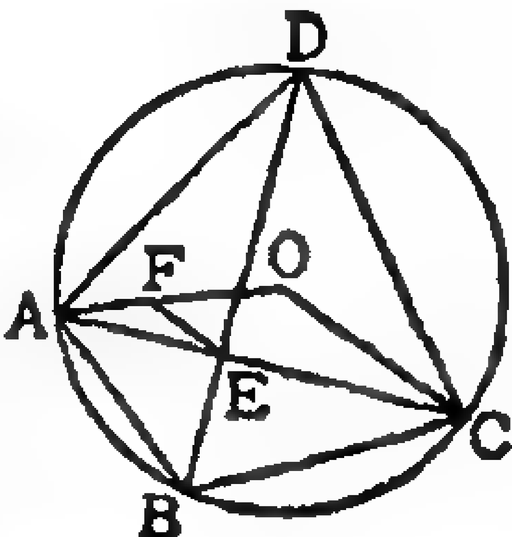
［作图］ 取定圆 O 的弦 $B'C$、CD 分别等于定线段 a、b，以 $B'D$ 为弦，作含角等于弧 $B'CD$ 所对圆周角的一半的弓形弧。它和以 D 为圆心、l 为半径的圆交于点 E，设 DE 和圆 O 的交点为 A，再在弧 $AB'C$ 上取点 B，使 $AB=B'C$。则四边形 $ABCD$ 就是所求的四边形。

2577. 求作圆的内接四边形 $ABCD$，使 $\angle DAB(=\alpha)$，$\angle ACB(=\beta)$，对角线 $BD(=l)$，AC 被 BD 分为两部分 AE 和 EC，且 $AE:EC=m:n$。

解 假设已作出四边形 $ABCD$，因为

$BD=l$，$\angle BAD=\alpha$，

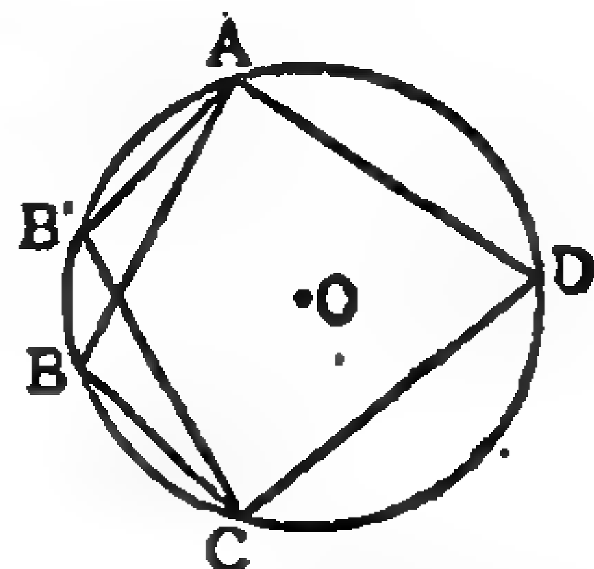
所以外接圆 O 可以确定。其次，$\angle ACB=\beta$，所以弦 AB 的长可以确定。因此，只要确定 BD，A 也随之确定。再次，过 E 作 $EF\parallel OC$，与半径 OA 交于 F。由于 $AF:FO=AE:EC=m:n$，F 成为定点。又 $OC:EF=AC:AE=(m+n):m$，EF 的长也可求出。以 F 为圆心，EF 为半径的圆和弦 BD 的交点就是点 E。因此可作出四边形 $ABCD$。



2578. 已知一组对边 $AB(=a)$，$CD(=b)$，另一组对边 BC 和 AD 的比是 $m:n$。求作四边形 $ABCD$。

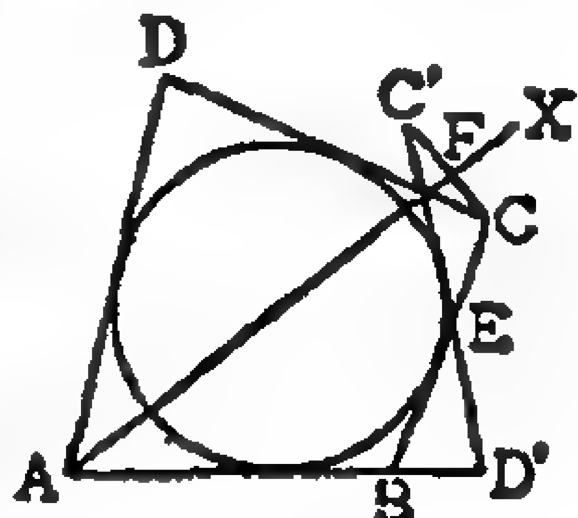
解 ［分析］ 假设满足条件的四边形 $ABCD$ 已作出。在弧 ABC 上取点 B'，使 $AB'=BC$，则 $B'C=AB=a$，且 $CD=b$，$AB':AD=BC:AD=m:n$。故可作图如下。

［作图］ 在圆 O 上任取一点 C，在 C 的两侧分别取等于 a、b 的弦 CB'、CD，再作到 B'、D 的距离的比等于 $m:n$ 的点的轨迹（阿波罗尼斯圆），设该轨迹和圆 O 的交点为 A，在弧 $AB'C$ 上取点 B，并使 $AB=B'C$，则四边形 $ABCD$ 就是所求的四边形。



2579. 求作外切于圆的四边形 $ABCD$，使两边 $AB(=a)$，$AD(=b)$，$\angle ADC(=\alpha)$，$\angle ABC(=\beta)$。

解 ［分析］ 假设已求得满足条件的四边形 $ABCD$，在 AB 或其延长线上取 AD'，使 $AD'=AD$。过 C 引 $\angle A$ 的平分线 AX 的垂线 CF。过 D' 作内切圆的切线 $D'C'$ 和 CF 的交点为 C'，和 CB 的交点为 E。则由 DC、$D'C'$ 关于 AX 对称，可知点 C' 是 C 的对称点。



又因 $BD'=AD\sim AB=b\sim a$，

$\angle EBD'=2\angle R-\beta$，

$\angle ED'B=\angle D=\alpha$，

所以 $\triangle BD'E$ 可以作出。故可作图如下。

［作图］ 作 $\triangle BD'E$，使 $\angle EBD'=2\angle R-\beta$，$BD'=b\sim a$，$\angle ED'B=\alpha$。在 $D'B$ 的延长线上取 BA，使 $BA=a$。在 $\angle BD'E$ 内作 $\triangle BD'E$ 的旁切圆。过点 A 作此圆的切

线 AD，使 $AD=b$，过 D 作这圆的切线和 BE 的延长线相交于 C，则四边形 $ABCD$ 就是所求作的四边形。

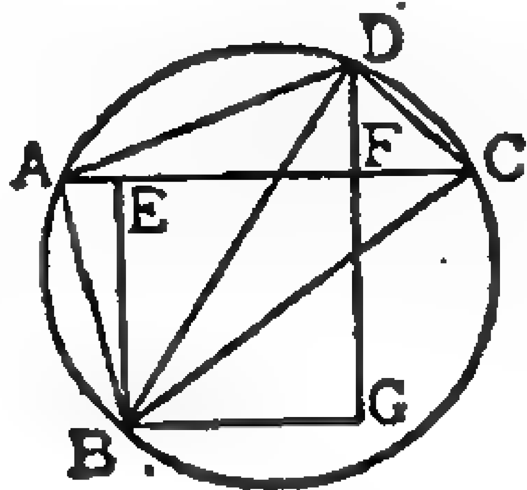
2580. 作已知圆的内接四边形 $ABCD$，使其对角线 AC、BD 为已知长，且使对角线 BD 两个端点的相邻边的积的和为定长 m^2。

解　设此四边形 $ABCD$ 已作出，分别过 B、D 作 AC 的垂线 BE、DF，再过 B 引 AC 的平行线与 DF 的延长线相交于 G。设四边形的外接圆半径为 R 则

$$BA\cdot BC=2R\cdot BE\ \text{（问题 1318）},$$
$$DA\cdot DC=2R\cdot DF\ \text{（问题 1318）},$$
$$\therefore\quad BA\cdot BC+DA\cdot DC=2R\cdot(BE+DF)=2R\cdot DG,$$

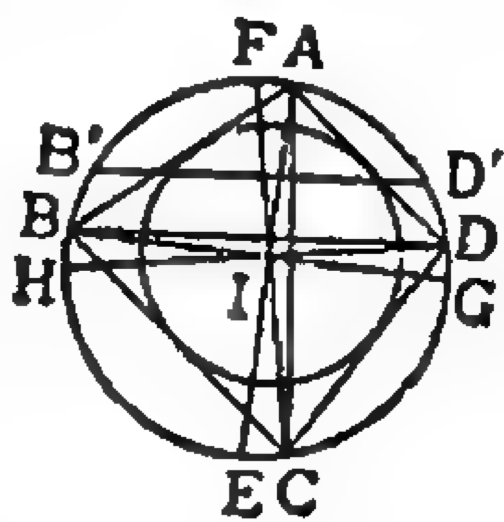
故
$$m^2=2R\cdot DG.$$

因此 DG 是定长．由此，在定圆内作定长的弦 BD，并以 BD 为斜边、DG 的定值 $m^2\div 2R$ 为直角边、$\angle BGD$ 为直角作直角三角形 BDG。在同圆内作平行于 BG 的定长弦 AC，那么 $ABCD$ 就是所求的四边形。



2581. 作定圆 O 的内接四边形 $ABCD$，使其对角线 $AC=(m)$，两条对角线的交角为 α，并外切于某圆。

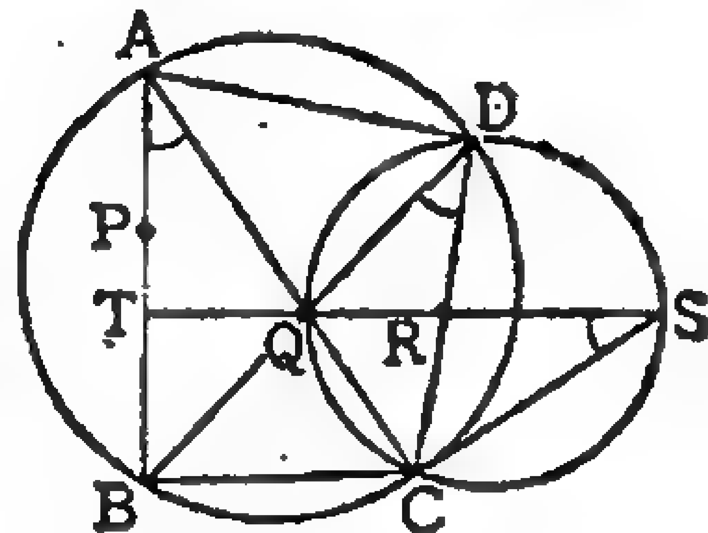
解　［分析］　假设圆 O 的内接四边形 $ABCD$ 已作出，则 $AC=m$，两对角线 AC、BD 的交角为 α．若 AC 一定，那么 BD 就是定方向的弦，因此两弧 BCD、DAB 的中点 E、F 也为定点．所以 AE、CF 分别平分四边形的 $\angle A$、$\angle C$，并且它们的交点 I 就是内切圆的圆心．因而 BI、DI 过 AC 所对的弧 CDA、ABC 的中点 G、H．故可作图如下。



［作图］　在任意位置上作圆 O 的等于 m 的弦 AC，再作与 AC 的交角为 α 的任意弦 $B'D'$。设弧 $B'CD'$、$D'AB'$ 的中点为 E、F，AE、CF 的交点为 I，弧 $CD'A$、$AB'C$ 的中点为 G、H．GI、HI 再与圆 O 分别相交于 B、D，则 $ABCD$ 即为所求的四边形。

2582. 已知 P、Q、R 是定圆 O 内的定点。作圆 O 的内接四边形，使对边 AB、CD 分别过 P、R，对角线相交于点 Q。

解　［分析］　假定满足条件的四边形 $ABCD$ 已作出．作 $\triangle DQC$ 的外接圆与 QR 的延长线相交于点 S，则 $RQ\cdot RS=RD\cdot RC$。又 R 是定圆 O 内的定点，所以不论弦 CD 的位置如何，积 $RD\cdot RC$ 是一定的，因此 $RQ\cdot RS$ 也一定，而 R、Q 是定点，所以 S 也是定点。



又
$$\angle RSC=\angle QDC=\angle CAB,$$

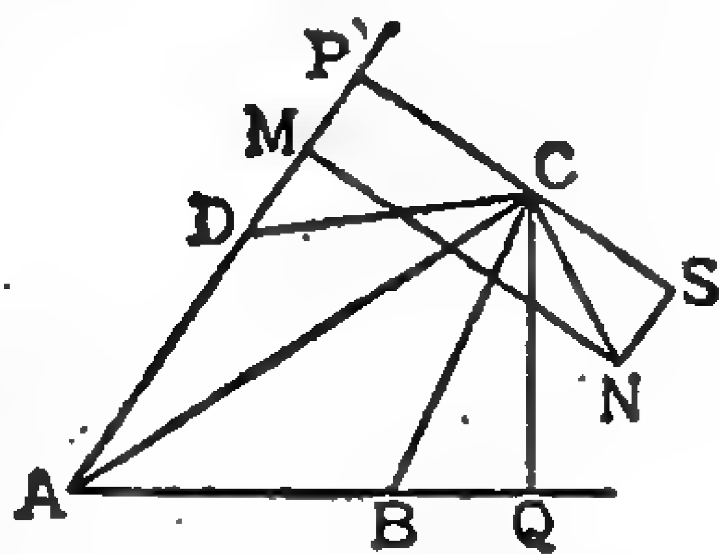
如果延长 SQ 与 AB 相交于 T，则 A、T、C、S 四点共圆，

$$\therefore\quad QS\cdot QT=AQ\cdot QC\ \text{（一定）}.$$

因此点 T 的位置可定．从而过 P、T 的弦 AB 可定．由此，可得如下作图。

［作图］　若圆 O 内关于 Q、R 两点的圆幂分别为 m^2、n^2（问题 1246），在 QR 的延长线上求一点 S，使 $QR\cdot RS=n^2$，再在 SQ 的延长线上求一点 T，使 $SQ\cdot QT=m^2$．过 P、T 作弦 AB，延长 AQ、BQ 分别与圆相交于 C、D，则 $ABCD$ 就是所求作的四边形。

2583. 已知四边的长和面积，$\angle B$、$\angle D$ 均为钝角，求作四边形 $ABCD$。



解　假定本题已解出，$ABCD$ 为所求的四边形．作对角线 AC，由 C 引 AD、AB 的垂线，设垂足分别为 P、Q，那么，在 $\triangle ABC$ 中

$$AC^2=AB^2+BC^2+2AB\cdot BQ. \quad ①$$

同样，在 $\triangle ADC$ 中

$$AC^2=AD^2+DC^2+2AD\cdot DP. \quad ②$$

由 ①－②，得

$$(AB^2+BC^2)-(AD^2+DC^2)=2(AD\cdot DP-AB\cdot BQ). \quad ③$$

根据题设，AB、BC、CD、DA 都是给定的，因此 ③ 式的左边是定值．为了方便，把它改写为

$$(AB^2+BC^2)-(AD^2+DC^2)=2AD\cdot m,$$

那么 m 是一个定值．若在 DP 上取点 M，使

$DM=m$，则 M 也是定点。由 ③ 式有

$$2(AD\cdot DP-AB\cdot BQ)=2AD\cdot DM.$$

$$\therefore\quad AD(DP-DM)=AB\cdot BQ,$$

亦即　　$AD\cdot PM=AB\cdot BQ.$　　④

$$\therefore\quad \frac{AB}{AD}=\frac{PM}{BQ}.\qquad ④'$$

其次，设四边形 $ABCD$ 的面积为 q，在 PC 或其延长线上取一点 S，使

$$AD\cdot PS=2q.\qquad ⑤$$

因为 AD、q 都是定值，所以 PS 也是定值。因 $PC\perp AD$，所以 $AD\cdot PC=2S_{\triangle ADC}$。因此⑤式和本式两边相减，便有

$$AD(PS-PC)=2q-2S_{\triangle ADC},$$

$$\therefore\quad AD\cdot CS=2S_{\triangle ABC}.$$

于是　　$AD\cdot CS=AB\cdot CQ.$　　⑥

用 ④ 式的两边除以 ⑥ 式的两边得

$$\frac{PM}{CS}=\frac{BQ}{CQ}.\qquad ⑦$$

作矩形 $PMNS$，连结 CN，在 $\triangle CNS$ 和 $\triangle CBQ$ 中，因为 $\angle S=\angle Q=\angle R$，由 ⑦ 式有 $CS:SN=CQ:BQ$，因此

$$\triangle CSN\backsim\triangle CQB.$$

$$\therefore\quad \frac{CN}{BC}=\frac{SN}{BQ}.\qquad ⑧$$

根据 ④′　$\dfrac{SN}{BQ}=\dfrac{PM}{BQ}=\dfrac{AB}{AD}$，

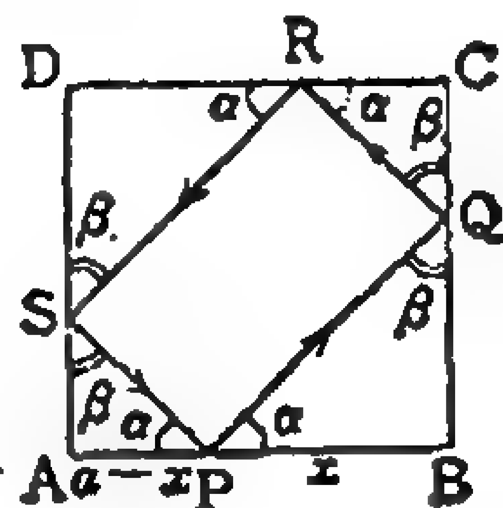
再由 ⑧ 便有

$$\frac{CN}{BC}=\frac{AB}{AD},\qquad ⑨$$

即 CN 是给定的三条线段 AD、BC、AB 的第四比例项，也是定值。由此，可得如下的作图。

［作图］　在给定线段 AD 的延长线上截取 $DM=m$，过 M 作 AM 的垂线 MN，使 MN 等于根据 ⑤ 确定的线段 PS。然后根据 ⑨ 作出 AD、BC、AB 的第四比例项 CN，利用 CN 和 CD 作 $\triangle DCN$。其它的一个顶点 B 的位置立即可以确定。

2584. 从正方形 $ABCD$ 的边 AB 上的一点向箭头所示的方向击球，球在点 Q 碰到边 BC，然后如图所示再次反射，最后回到出发点。那么 $\angle QPB$ 应该是多少度？又，为了使四边形 $PQRS$ 的面积达到最大，P 的位置应该在哪里？



解　设 $\angle QPB=\alpha$，$\angle PQB=\beta$，$AB=a$，$PB=x$。因 $\alpha+\beta=90°$，所以

$$\triangle BPQ\backsim\triangle CRQ\backsim\triangle DRS\backsim\triangle APS,$$

故　$$\frac{QB}{PB}=\frac{QC}{RC}=\frac{SD}{RD}=\frac{SA}{PA}.$$

设比值为 m，则 $QB=mPB$，$QC=mRC$，$SD=mRD$，$SA=mPA$。

$$\therefore\quad QB=mx,\quad QC=a-mx.$$

$$\therefore\quad mRC=a-mx,$$

因而　　$RC=\dfrac{a}{m}-x$，

$$RD=a-RC=a-\left(\frac{a}{m}-x\right)=\frac{m-1}{m}a+x.$$

$$\therefore\quad SD=mRD=m\left(\frac{m-1}{m}a+x\right)=(m-1)a+mx,$$

故　$SA=a-SD=a-[(m-1)a+mx]=(2-m)a-mx.$

而　$SA=mPA=m(a-x)=ma-mx,$

$$\therefore\quad (2-m)a-mx=ma-mx,$$

$$2a=2ma,\quad 即\quad m=1.$$

$$\therefore\quad QB=PB,\ QC=RC,$$

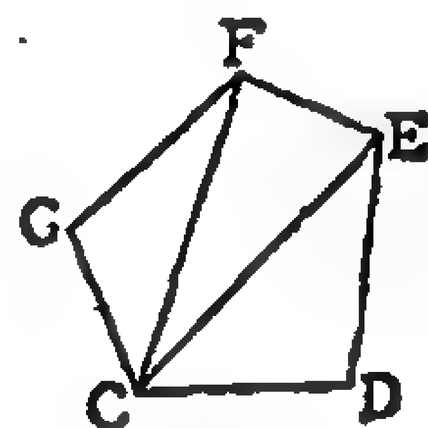
$$SD=RD,\ SA=PA.$$

$$\therefore\quad \alpha=\beta=45°,$$

即 $\angle QPB$ 应为 45°。那么四边形 $PQRS$ 是长方形。当它的面积最大的时候，P、Q、R、S 与 AB、BC、CD、DA 的中点重合，即把点 P 取在 AB 的中点就行了。

7. 多边形

2585. $CDEFG$ 是已知线段 CD 上的已知多边形，在另一已知线段 AB 上作出它的相似多边形。



解　［作图］　连结 CE，CF。先作 $\triangle BAL$，使

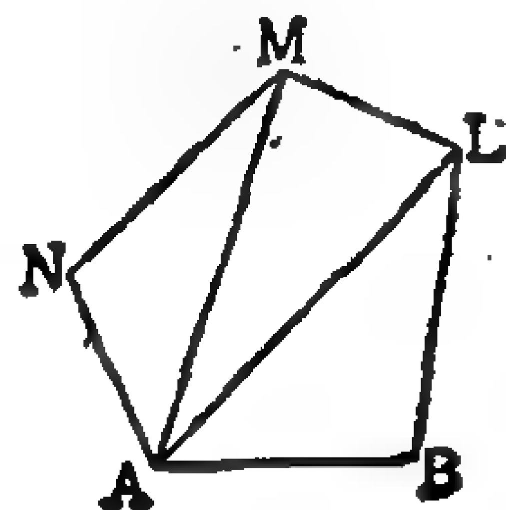
$$\angle BAL=\angle DCE,$$

$$\angle ABL=\angle CDE.$$

再作 $\triangle ALM$，使

$$\angle LAM=\angle ECF,$$

$$\angle ALM=\angle CEF.$$



再次，作 $\triangle AMN$，使

$\angle MAN=\angle FCG$，$\angle AMN=\angle CFG$，

则 $ABLMN$ 就是所求的多边形。

［证明］ $\triangle ABL\backsim\triangle CDE$，

$$\therefore\ \frac{AB}{CD}=\frac{BL}{DE}=\frac{AL}{CE},$$

$\triangle ALM\backsim\triangle CEF$，

$$\therefore\ \frac{AL}{CE}=\frac{LM}{EF}=\frac{AM}{CF},$$

因而 $$\frac{AB}{CD}=\frac{BL}{DE}=\frac{LM}{EF}=\frac{AM}{CF}.$$

$\triangle AMN\backsim\triangle CFG$，

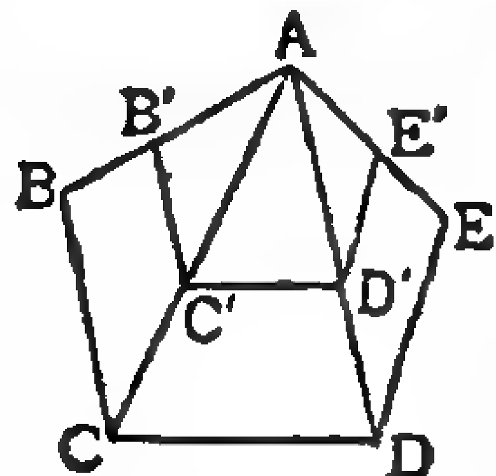
$$\therefore\ \frac{AM}{CF}=\frac{MN}{FG}=\frac{NA}{GC},$$

因而 $$\frac{AB}{CD}=\frac{BL}{DE}=\frac{LM}{EF}=\frac{MN}{FG}=\frac{NA}{GC},$$

并且 $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，$\angle L=\angle E$，$\angle M=\angle F$，$\angle N=\angle G$，所以多边形 $CDEFG\backsim$ 多边形 $ABLMN$。

2586. 求作一个多边形，使它与已知五边形 $ABCDE$ 相似，且对应比为 5:3。

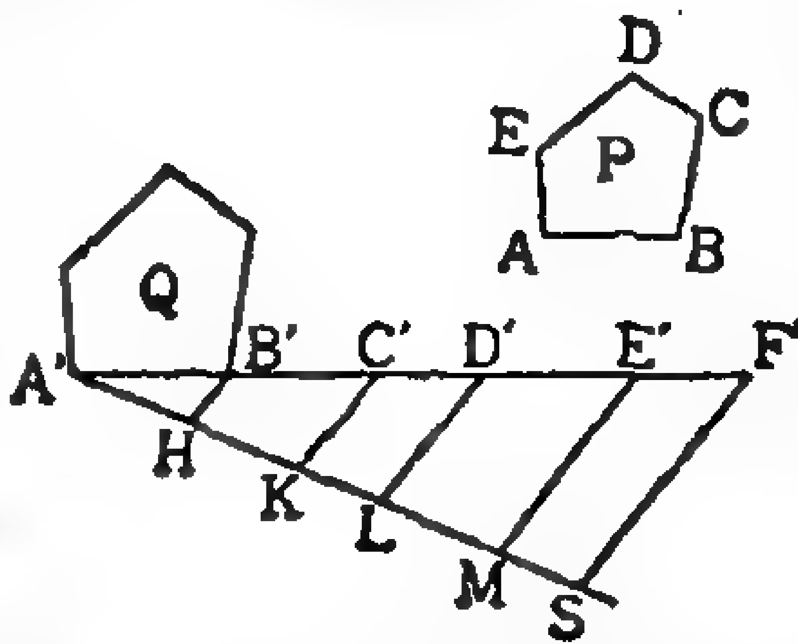
解 ［作图］ 连结 AC，AD。截取 AB'、AC'、AD'、AE'，使它们分别等于 AB、AC、AD、AE 的 $\frac{3}{5}$，则 $AB'C'D'E'$ 就是所求的多边形。



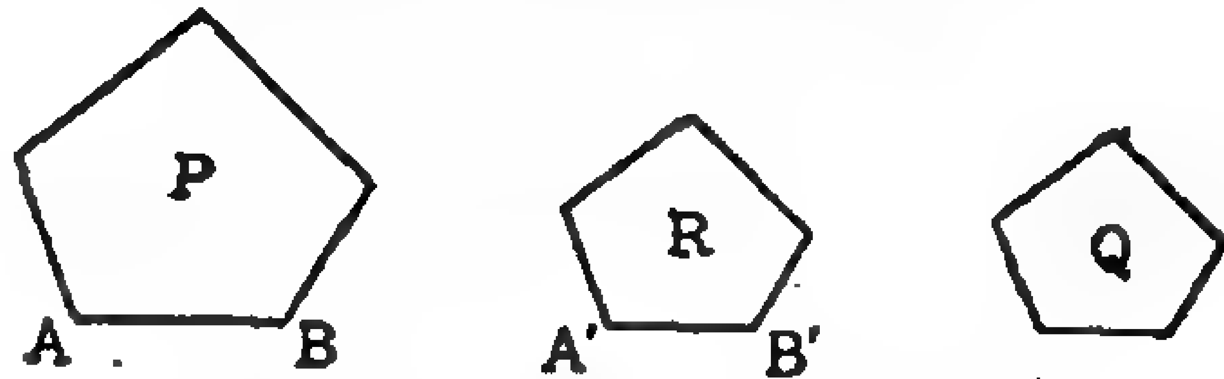
［证明］ 根据作图，$BC\parallel B'C'$，$CD\parallel C'D'$，$DE\parallel D'E'$，所以五边形 $ABCDE\backsim$ 五边形 $AB'C'D'E'$，且对应边的比是 $AB:AB'=5:3$。

2587. 求作多边形，使它与已知多边形 $ABCD\cdots$ 相似，且其周长等于定长 l。

解 作 $A'F'=l$，从 A' 引任意直线 $A'S$，在 $A'S$ 上截取 $A'H$、HK、…、MS 分别等于 AB、BC、…、EA。过 H、K、…各点作 SF' 的平行线，分别与 $A'F'$ 相交于 B'、C'、…。在 $A'B'$ 上作多边形 Q，使它与 AB 上的已知多边形 P 相似，则 Q 就是所求的多边形。其理由是，两个相似多边形对应边的比等于周长的比。在上述作图中，Q 的周长等于 l，而且 Q 与 P 相似，因此 Q 是所求的多边形。



2588. 求作与已知多边形 P 相似，且与另一已知多边形 Q 等积的多边形 R。

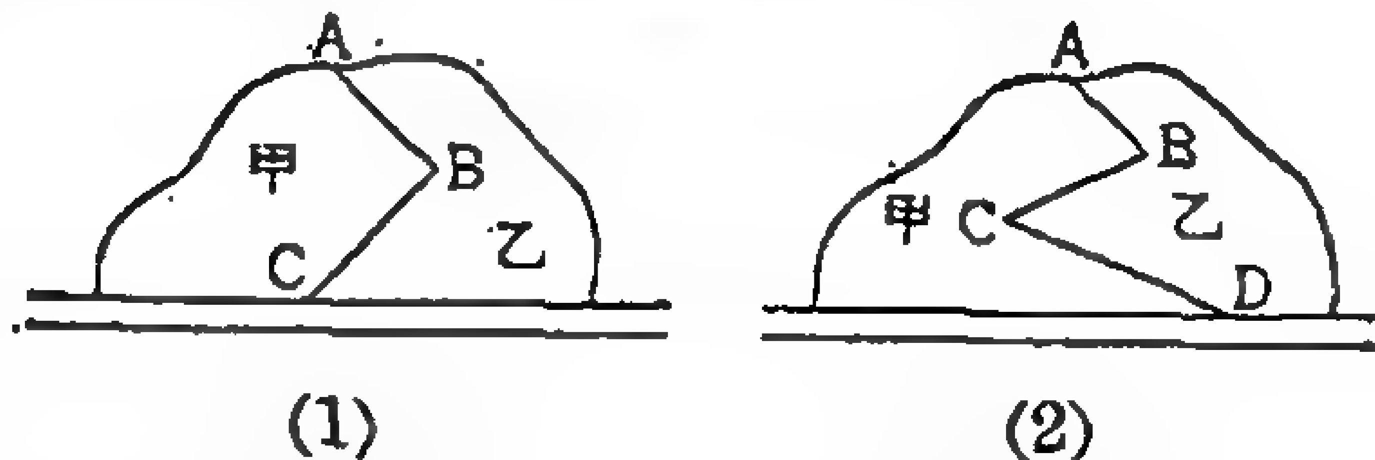


解 把 P、Q 变为等积的正方形，其面积分别为 m^2，n^2。假定与 P 相似且与 Q 等积的多边形 R 已求得，设 P 和 R 的一组对应边为 AB 和 $A'B'$，则 $\frac{P}{R}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$。

$$\therefore\ \frac{m^2}{n^2}=\frac{AB^2}{A'B'^2},\quad \therefore\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{m}{n}.$$

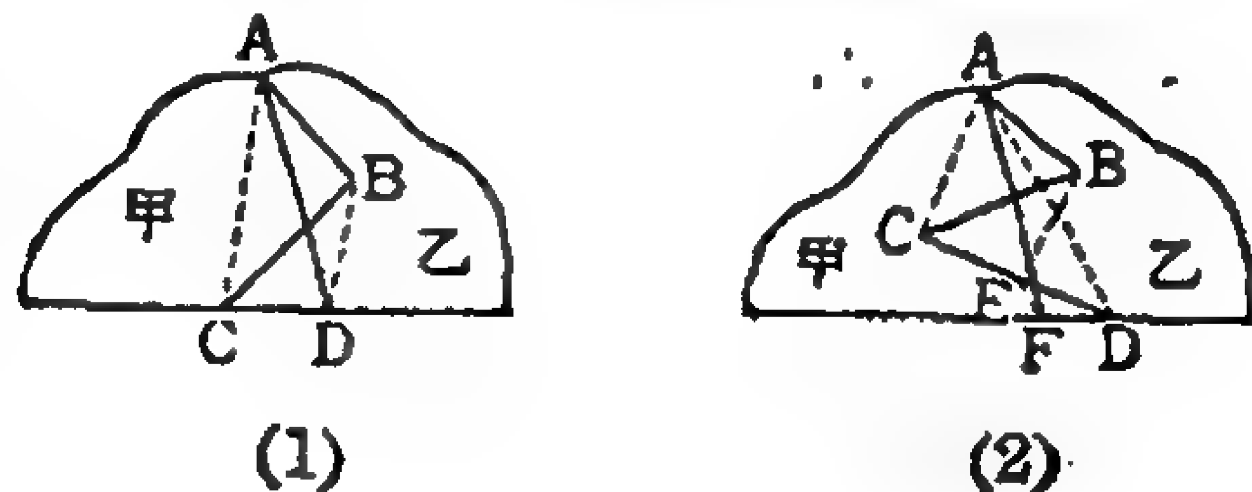
而 AB、m、n 是一定的，所以 $A'B'$ 也是定长。因而只要在 $A'B'$ 上作与 P 相似的多边形 R 即可。

2589. 在下面的图 (1) 中，要把甲地和乙地的分界小道 ABC 改为由 A 直通公路的直道，但又不想改变甲乙两块地的面积，问应如何作出直道？如果小道象图 (2) 中的 $ABCD$ 那样，又应该怎么办？对于图(1)要给出作图和证明，对于图(2)只要求作图。



解 在图 (1) 中，过 B 作 AC 的平行线与公路相交于 D，AD 就是所求的直道。对于 $\triangle BAC$、$\triangle DAC$ 来说，底边 AC 是公共的，因为 $BD\parallel AC$，边 AC 上的高是相等的，所以 $S_{\triangle BAC}=S_{\triangle DAC}$，因此两块地的面积没有改变。

在图 (2) 中，作 $BE\parallel AC$ (E 是 CD 上的点)，$EF\parallel AD$，AF 就是所求的直道。



2590. 已知两个相似的多边形 P、Q，求作多边形，使其面积为 $P+Q$ 或 $P\sim Q$。

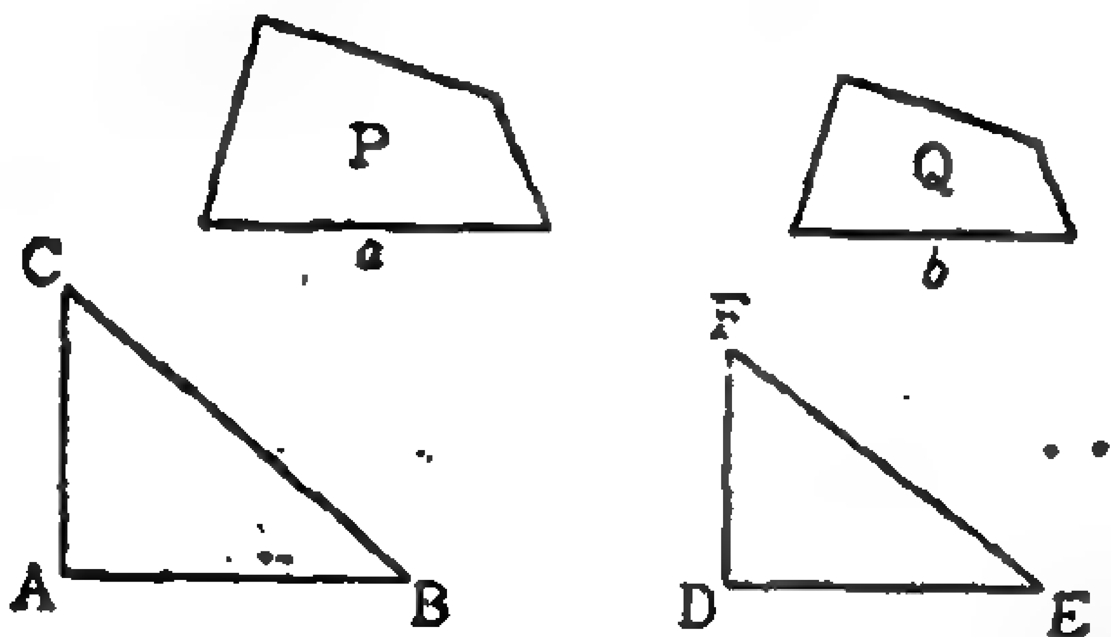
解 [作图] (i) 作 $R=P+Q$。设 P 和 Q 的一组对应边为 a、b。作 $\angle A=\angle R$ 的直角三角形 ABC，使 $AB=a$，$AC=b$，再使 BC 对应于 a 而在 BC 上作与 P 相似的多边形 R 即可。其理由是，因为 $P\backsim Q\backsim R$，则

$$P:Q:R=a^2:b^2:BC^2.$$

所以 $R:(P+Q)=BC^2:(a^2+b^2)$。

根据作图 $\angle A=\angle R$，所以

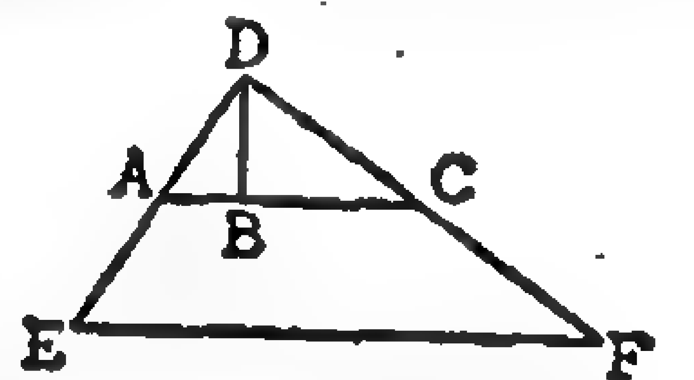
$$BC^2=a^2+b^2,\quad 故\quad R=P+Q.$$



(ii) 作 $R=P-Q(P>Q)$。可作 $\triangle DEF$，使 $\angle D=\angle R$，$EF=a$，$DE=b$，在 DF 上作与上面同样的相似多边形就行了。

2591. 求作多边形 Q，使它与给定的多边形 P 相似，且其面积为 P 的 n 倍。

解 [作图] 在一直线上顺次取三点 A、B、C，使 $n\cdot AB=BC$。由 B 作 AB 的垂线，与以 AC 为直径的半圆相交于 D。在 DA（或其延长线）上取 E，使 DE 与 P 的一边等长。从 E 作 AC 的平行线，与 DC（或其延长线）相交于 F。以 DF 与多边形 P 的边 DE 对应，在 DF 上作出与 P 相似的多边形 Q 即可。



[证明] 因为 $P\backsim Q$，所以

$$P:Q=DE^2:DF^2.$$

但是，$AB:BC=AD^2:DC^2$

$$=DE^2:DF^2\ (问题\ 1136),$$

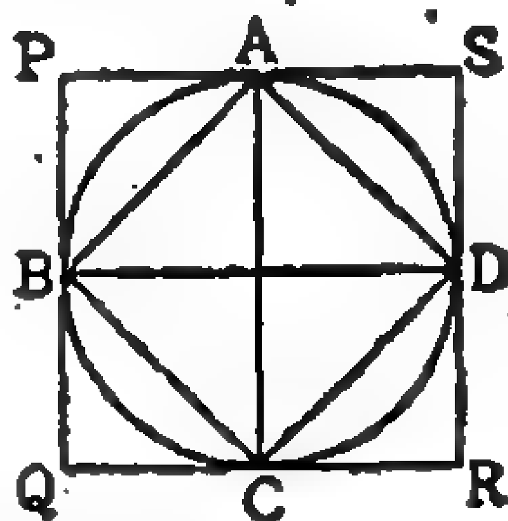
$$\therefore\quad P:Q=AB:BC.$$

又 $AB:BC=1:n$，因此 $P:Q=1:n$，

$$\therefore\quad n\cdot P=Q.$$

2592. 已知圆 O，求作它的内接或外切正四边形、八边形、十六边形、三十二边形。

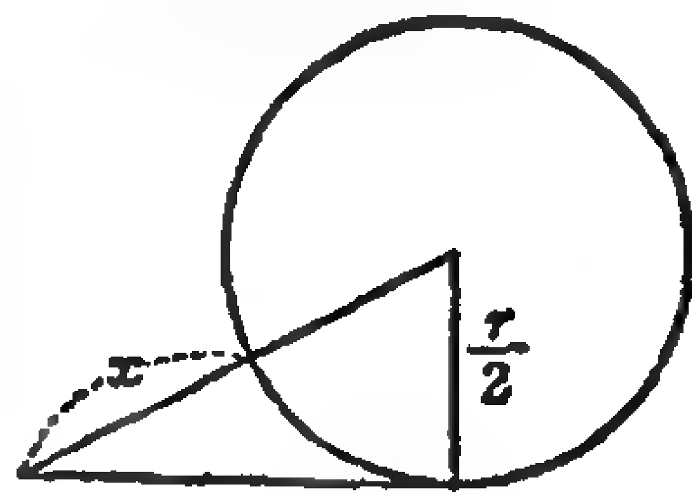
解 作互相垂直的两条直径 AC、BD，则 $ABCD$ 是内接正四边形。过 A、B、C、D 作圆的切线，它们的交点为 P、Q、R、S，则 $PQRS$ 就是外切正四边形。



设弧 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 K、L、M、N，则 $AKBLCMDN$ 就是内接正八边形.过 K、L、M、N 的圆的切线与 $PQRS$ 的各边的交点所成的多边形就是外切正八边形。其它的都可按同样的方法求得。

2593. 在已知圆内作正五边形和正十边形。

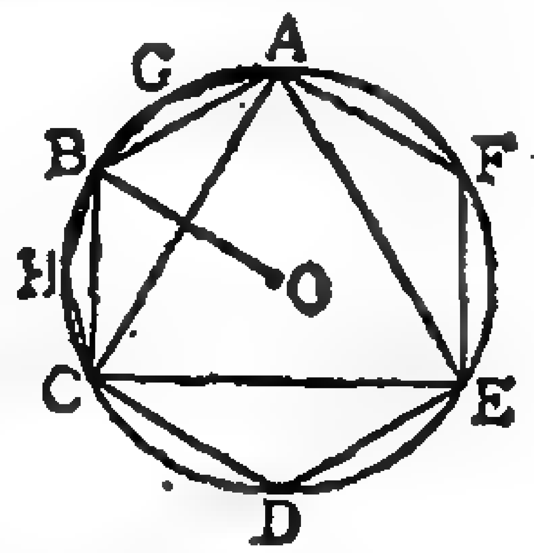
解 设已知圆的半径为 r，它的内接正十边形的边长为 x，根据问题 **1514**，$x^2=r(r-x)$（中外比），



所以 $x=\sqrt{r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}-\frac{r}{2}$。故可作图。作正十边形后，再把它的顶点隔一个连结起来，就可得到正五边形。

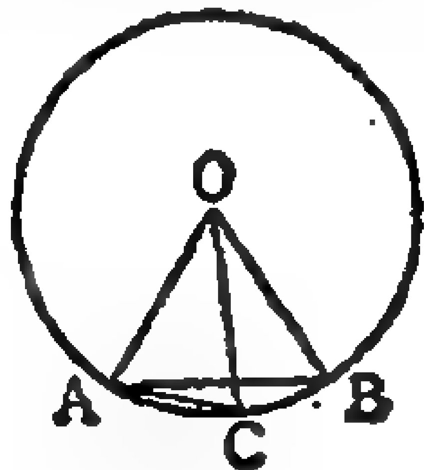
2594. 求作已知圆的内接和外切正三角形，正六边形，正十二边形。

解 设已知圆为 O，用它的半径的长去截圆周，就可得到内接正六边形 $ABCDEF$.再过各顶点作切线，便可得到外切正六边形。若把内接正六边形的顶点隔一个连结起来，就得到内接正三角形 ACE。再过各顶点作切线，可得外切正三角形。然后，把弧 AB、BC、… 平分，将所得的分点和 A、B、C、… 连结起来，就可得到所求的内接正十二边形 $AGBHC\cdots$。再过各顶点作切线，就可得外切正十二边形。



2595. 作已知圆的内接正十五边形。

解 设已知圆 O 的内接正六边形的一边为 AB，内接正十边形的一边为 AC，则



$$\angle AOB=\frac{4}{6}\angle R,$$

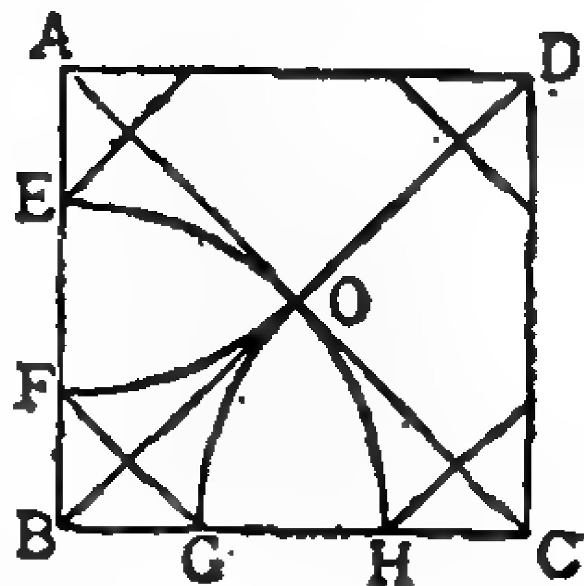
$$\angle AOC=\frac{4}{10}\angle R,$$

所以　$\angle BOC=\frac{4}{15}\angle R$。

由此，可作图如下。

［作图］ 设圆O的内接正六边形的一边为AB，在弧AB上求一点C，使弦AC等于内接正十边形的一边（问题 **2593**）。那么CB就是所求的内接正十五边形的一边。

2596. 作已知正方形$ABCD$的内接正八边形。



解 ［作图］ 设对角线的交点为O，在AB上取E、F，使$BE=AF=AO$。在BC上取G、H，使$BH=CG=BO$。同样，在CD、DA上取点，$EFGH\cdots$就是所求的正八边形。

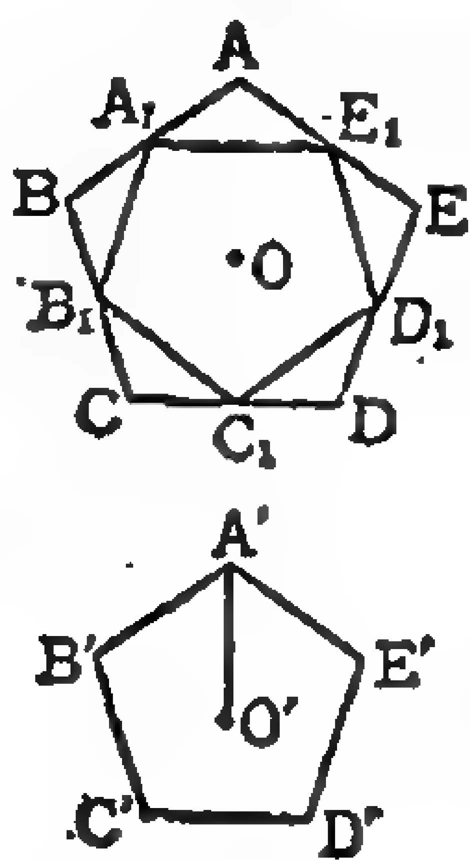
［证明］ $\triangle AOF$是等腰三角形，$\angle FAO=45°$，所以$\angle AOF=67.5°$，从而

$$\angle BOF=90°-67.5°=22.5°=\angle AOE.$$

因此$\angle EOF=45°$。同样，$\angle FOG=2\angle BOF=45°$，且$OE=OF=OG$，所以$EF=FG$。同理，也可证明其它的六条边和角都相等。

2597. 作已知正n边形P的内接多边形，使它与另一已知正n边形Q相等。

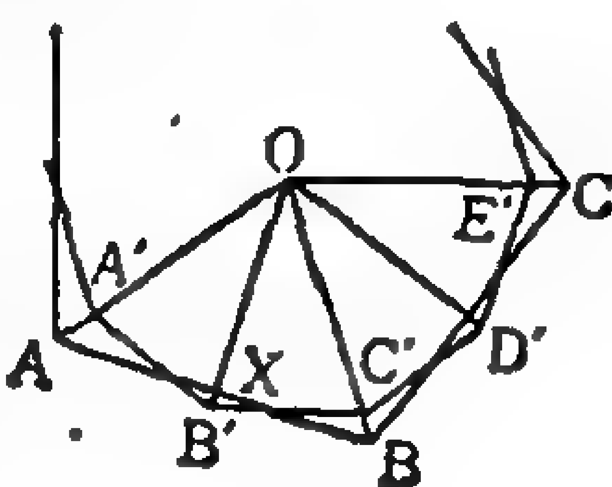
解 ［分析］ 设P为$ABCDE$，Q为$A'B'C'D'E'$，多边形$A_1B_1C_1D_1E_1$与Q相等，并内接于P。那么这两个多边形的中心重合于点O，而且$AA_1=BB_1=CC_1=DD_1=EE_1$。故可作图如下。



［作图］ 求P的外接圆O。设Q的外接圆的半径为$O'A'$，以O为圆心、$O'A'$为半径作圆与AB相交于点A_1（一般有两个交点）。在P的其它各边上求与AA_1相等的线段BB_1，CC_1，DD_1，EE_1，则$A_1B_1C_1D_1E_1$就是所求的多边形。

2598. 已知正n边形$ABCD\cdots$，求作与它等积且边数为$2n$的正多边形。

解 ［作图］ 设已知正多边形的中心为O，$\angle AOB$的平分线与AB的交点为X，求OA，OX的比例中项l。在OA，OB，OC，$\cdots$和$\angle AOB$，$\angle BOC$，$\cdots$的平分线上求OA'，OC'，OE'，$\cdots$和OB'，OD'，$\cdots$，使它们的长都等于l。则$A'B'C'D'\cdots$就是所求作的正多边形。



［证明］ $OA'=OB'=OC'=OD'=\cdots$，而且

$$\angle A'OB'=\angle B'OC'=\angle C'OD'=\angle D'OE'=\cdots,$$

所以$A'B'C'D'\cdots$是正多边形且边数是$2n$。又

$$S_{\triangle AOX}:S_{\triangle A'OB'}=(OA\cdot OX):(OA'\cdot OB'),$$

$$OA'=OB'=l,\ OA\cdot OX=l^2.$$

$$\therefore\ OA\cdot OX=OA'\cdot OB'.$$

因而　$S_{\triangle AOX}=S_{\triangle A'OB'}$，

$$\therefore\ 2n\cdot S_{\triangle AOX}=2n\cdot S_{\triangle A'OB'}.$$

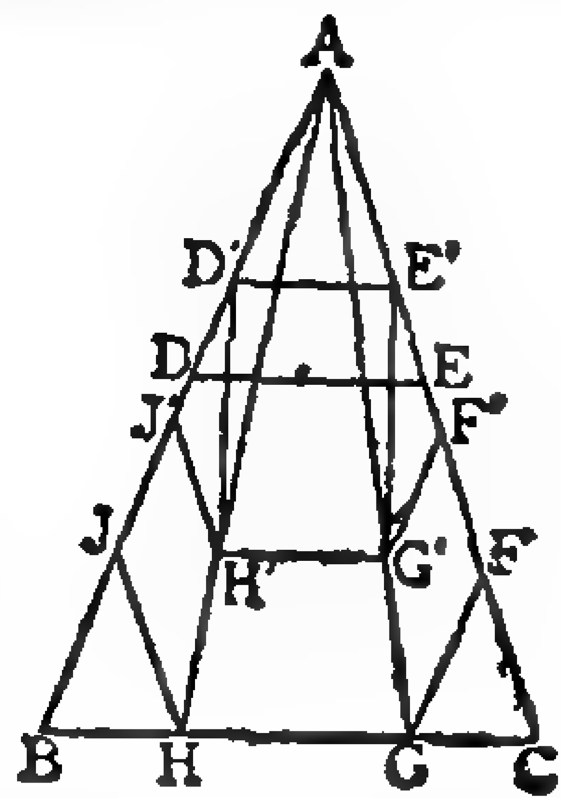
而$AX=XB$，

$$\therefore\ 2n\cdot S_{\triangle AOX}=n\cdot S_{\triangle AOB},$$

$$n\cdot S_{\triangle AOB}=2n\cdot S_{\triangle A'OB'}.$$

于是多边形$ABCD\cdots$＝多边形$A'B'C'D'\cdots$。

2599. 把已知三角形ABC的三个角切下来，使它成为三组对边互相平行的正六边形。

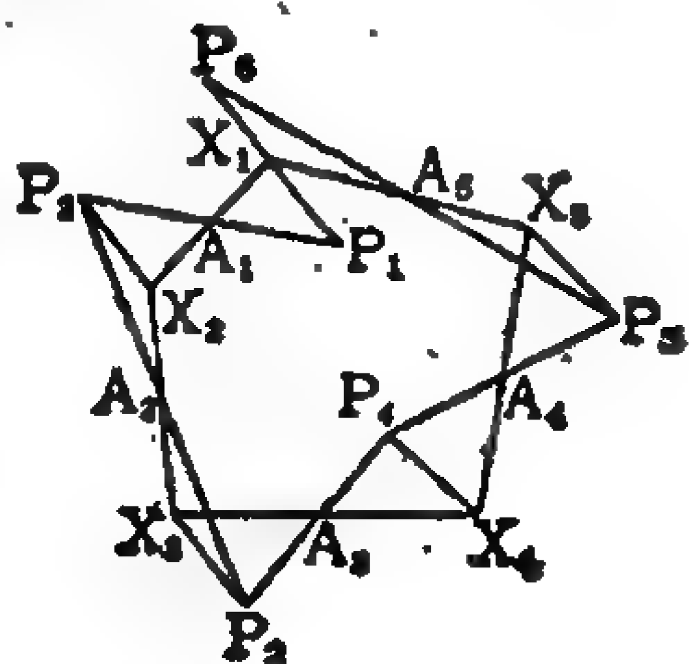


解 作与BC平行的任意直线，与AB、AC分别相交于D'、E'。在$D'B$、$E'C$上分别取点J'、F'，使$D'J'=E'F'=D'E'$。作直线$J'H'$、$F'G'$，使$J'H'\mathrel{\underline{\parallel}}E'F'$，$F'G'\mathrel{\underline{\parallel}}D'J'$，那么$D'H'\mathrel{\underline{\parallel}}E'G'$，所以$D'E'\mathrel{\underline{\parallel}}H'G'$，因此六边形$D'E'F'G'H'J'$的各边相等且三组对边分别平行。另外，设$AH'$、$AG'$的延长线与$BC$分别相交于$H$、$G$，以$HG$与$H'G'$对应，作出如图所示的六边形$DEFGHJ$，使$GF\parallel G'F'$，$HJ\parallel H'J'$，$EF=GF$，$DJ=HJ$。很明显，这两个六边形相似，因此六边形$DEFGHJ$是正六边形，三组对边分别平行。

2600. 已知奇数边多边形各边的中点，求作这个多边形。

解 为了说明上的方便，把已知点暂定为五个，如A_1、A_2、A_3、A_4、A_5。任取一点P_1，

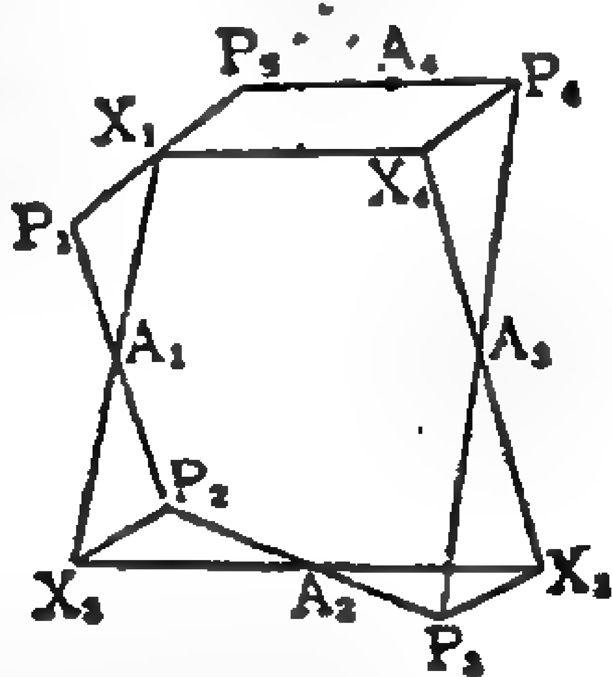
设 P_1 关于 A_1 的对称点为 P_2, P_2 关于 A_2 的对称点为 P_3, 如此依次取点 P_4、P_5、P_6. 设 P_1P_6 的中点为 X_1, X_1 关于 A_1 的对称点为 X_2, X_2 关于 A_2 的对称点为 X_3, 如此依次求出 X_4, X_5, 则 $X_1X_2X_3X_4X_5$ 就是所求的多边形.



其理由是: 根据作图, A_1 是 X_1X_2 和 P_1P_2 的中点, 所以 $P_1X_1 \perp\!\!\!\!\!= X_2P_2$, 同样地, $X_2P_2 \perp\!\!\!\!\!= X_3P_3 \perp\!\!\!\!\!= X_4P_4 \perp\!\!\!\!\!= X_5P_5 \perp\!\!\!\!\!= P_6X_1$, 因此 X_5X_1 被 A_5 平分. 其它的边 X_1X_2、X_2X_3、X_3X_4、X_4X_5 的中点显然是 A_1、A_2、A_3、A_4, 所以 $X_1X_2X_3X_4X_5$ 就是所求的多边形. 这种解法对于任意的奇数边都是成立的.

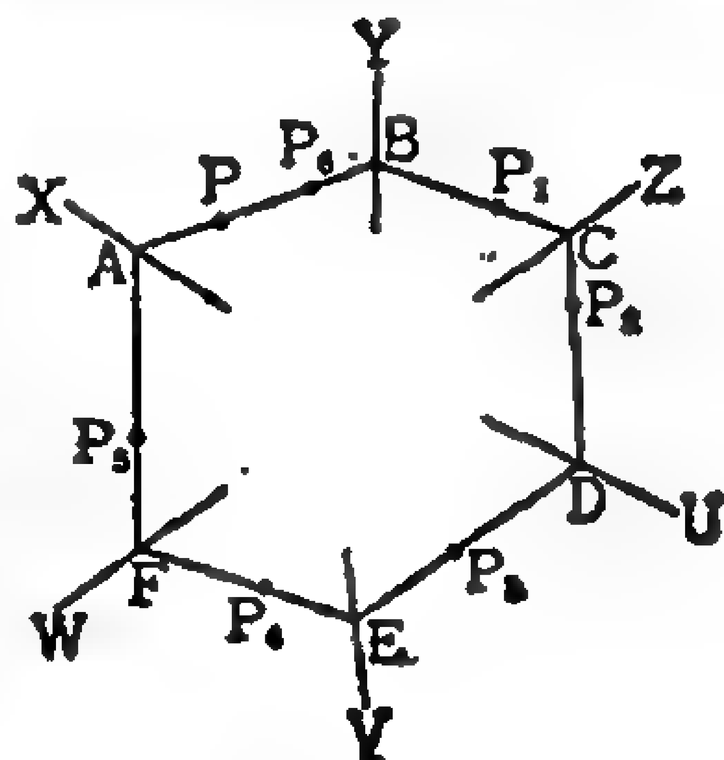
2601. 已知偶数边的多边形各边的中点 A_1, A_2, A_3, … 能作出这个多边形吗?

解　为了说明上的方便, 暂定中点的个数是4个, 如 A_1, A_2, A_3, A_4. 和上题一样, 取任意点 P_1, 设 P_1 关于 A_1 的对称点为 P_2, P_2 关于 A_2 的对称点为 P_3, 依次作 P_4、P_5. 设 P_1P_5 的中点为 X_1, 以 A_1、A_2、A_3 为对称中心, 依次作出 X_1 的对称点 X_2, X_2 的对称点 X_3, X_3 的对称点 X_4. 和上题同样考虑, 因为 $P_1X_1 \perp\!\!\!\!\!= P_2X_2 \perp\!\!\!\!\!= P_3X_3 \perp\!\!\!\!\!= P_4X_4$, 所以 $P_4X_4 \perp\!\!\!\!\!= P_5X_1$. 因为 $X_1X_4 \perp\!\!\!\!\!= P_4P_5$, 所以 X_1X_4 不通过 A_4. 如果 P_5 和 P_1 重合, 则 X_1X_4 与 P_4P_5 也重合, 这时无论 P_1 的位置如何都行, 因而这个问题是不定的. 由于这种证明对于任意的偶数边都成立, 所以本题有不定解或无解. 一般地说, 这样的多边形不能作出.



2602. 已知多边形的各个角的平分线 X, Y, Z, … 且一边过定点, 能作出这个多边形吗?

解　[分析] 假定所求的多边形 $ABCDEF$ 已经作出, 设 AB 通过点 P. 因为 Y 是 $\angle B$ 的平分线, 所以 P 关于 Y 的对称点 P_1 在边 BC 上. 同样, P_1 关于 Z 的对称点 P_2 在边 CD 上, P_2 关于 U 的对称点 P_3 在边 DE 上…. 由此, 可作图如下.



〔作图〕 作 P 点关于 Y 的对称点 P_1, P_1 关于 Z 的对称点 P_2, 反复用这种方法, 依次作出关于 U、V、W、X 的对称点 P_3、P_4、P_5、P_6. 设 P、P_6 所在的直线与 X、Y 分别相交于 A、B, BP_1 与 Z 相交于 C, CP_2 与 U 相交于 D, 依次得到 E、F.

这个作图只有在 F 和 P_5 的连线通过 A 的时候才有可能, 但由于 X, Y, Z, …W 的位置, 一般地 F 和 P_5 的连线不通过 A, 所以本题一般不能解. 例如三角形三个角的平分线一定相交于一点(内心), 所以已知的三条直线必须具备这个性质才行. 如果已知的三个角的平分线不相交于一点, 很明显本题无解. 如果边数大于四的多边形, 各个角的平分线不一定要求相交于一点. 上面作图中最后一个对称点 P_6 是否落在 AB 上还不一定, 因此当 P 和 P_6 的连线与 X 平行的时候, 本题无解. 若 P 和 P_6 重合, 则有无数解, 即不定.

第五章　圆 的 作 图

1. 基本作图

2603. 作已知三角形 ABC 的外接圆.

解　过 AB 的中点 E 作 AB 的垂线, 过 AC 的中点 F 作 AC 的垂线, 以两垂线的交点 O 为圆心、OA 为半径作圆即可. 其理由是:

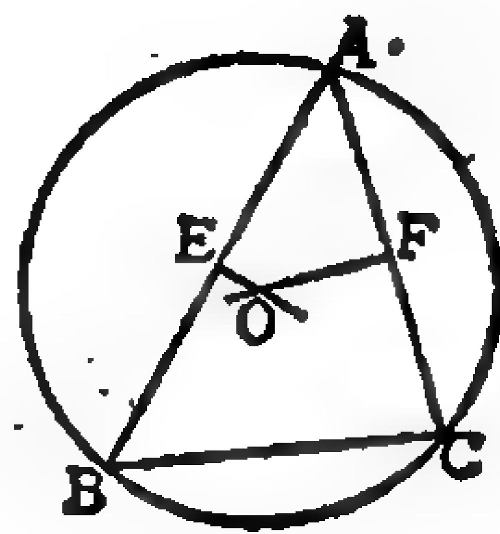
$\because$　$\triangle OAE \cong \triangle OBE$,

$\therefore$　$OA = OB$.

$\because$　$\triangle OAF \cong \triangle OCF$,

$\therefore$　$OA = OC$.

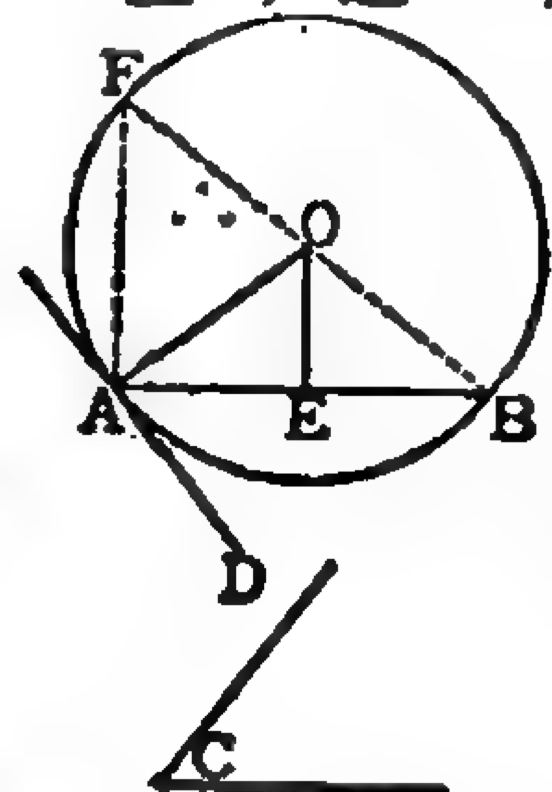
因而　$OA = OB = OC$.



因此以 O 为圆心、OA 为半径所作的圆过 A、B、C 三点，即是 $\triangle ABC$ 的外接圆。

2604. 在已知线段 AB 上作含已知角 $\angle C$ 的弓形弧。

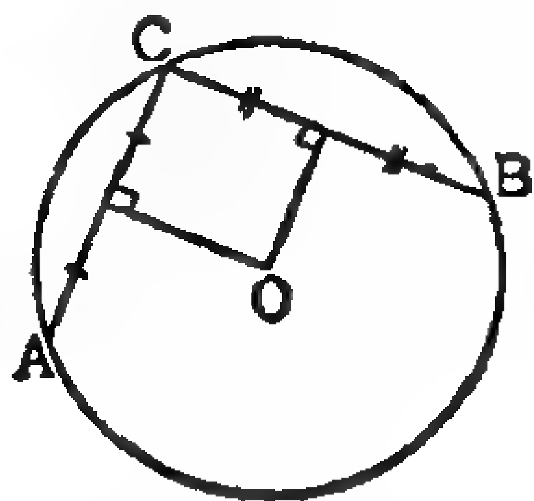
解 ［作图］ 作 $\angle BAD=\angle C$，过 A 作 AD 的垂线 AO。作 AB 的垂直平分线 EO，设它与 AO 的交点为 O。以 O 为圆心、OA 为半径作圆。设 $\angle BAD$ 外面的弧为 AFB，则弓形 AFB 即为所求。



［证明］ 因为 A、B 到 O 的距离相等，因此 B 在圆 O 上，所以这个弓形在 AB 上。其次，在这个弓形内作一个 $\angle AFB$，因为 AD 是半径 OA 的垂线，因而 AD 也是圆的切线，所以 $\angle AFB=\angle BAD=\angle C$。故此弓形 AFB 上的圆周角等于 $\angle C$。

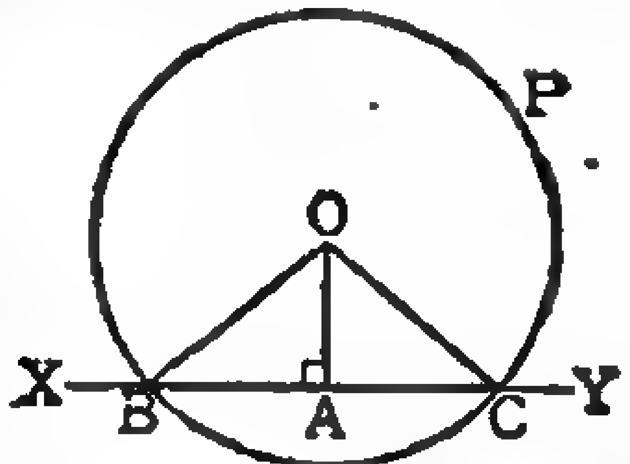
2605. 作已知弧 ACB 的全圆。

解 作线段 AC、CB 的垂直平分线，设它们相交于 O，则以 O 为圆心、OA 为半径的圆，即为所求的全圆。其理由是：因为 O 到 A、B、C 三点的距离相等，所以以 O 为圆心、OA 为半径的圆一定过 B、C 两点。因此，圆 ACB 为所求的全圆。



2606. 以已知点 O 为圆心作圆，使与直线 XY 相交而截得的弓形弧含有已知角 α。

解 过 O 作 XY 的垂线 OA，从 O 作 OB 使 $\angle BOA=\alpha$。设 OB 与 XY 相交于 B，则以 O 为圆心、OB 为半径的圆即为所求的圆。其理由是，此圆与 XY 的交点为 B、C，设在 XY 与 O 同侧的弓形为 BPC，则



$$\angle BPC=\frac{1}{2}\angle BOC=\alpha,$$

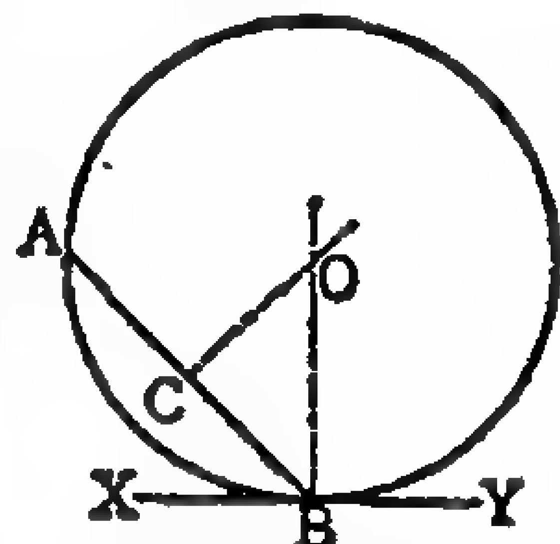
故圆 BPC 即为所求的圆。

若已知点 O 在已知直线 XY 之外：当 $90^\circ\neq\alpha<180^\circ$ 时，本题有一解（若 $90^\circ<\alpha<180^\circ$ 时，可作与 O 在 XY 的同侧且含角 $180^\circ-\alpha$ 的弓形）；当 $\alpha=90^\circ$ 时无解。若 O 在 XY 上，当 $\alpha=90^\circ$ 时解不定，当 $\alpha\neq90^\circ$ 时无解。

2. 作切于已知直线（或已知多边形）的圆或与已知角相交的圆

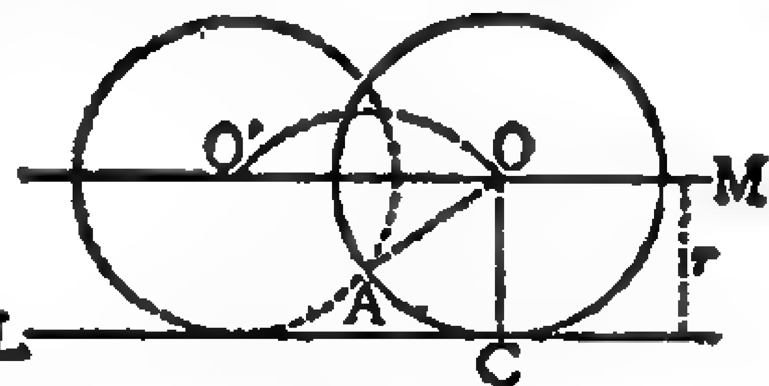
2607. 求作过已知点 A 且切于已知直线上定点 B 的圆。

解 设 AB 的垂直平分线 CO 和过 B 所作 XY 的垂线相交于 O，则以 O 为圆心、OB 为半径的圆就是所求的圆。其理由是，因为 CO 是 AB 的垂直平分线，所以 $OB=OA$，从而这个圆过 A 点。又 $OB\perp XY$，所以该圆在点 B 与 XY 相切。



2608. 过已知点 A 作半径为 r 的圆，使它与定直线 L 相切。

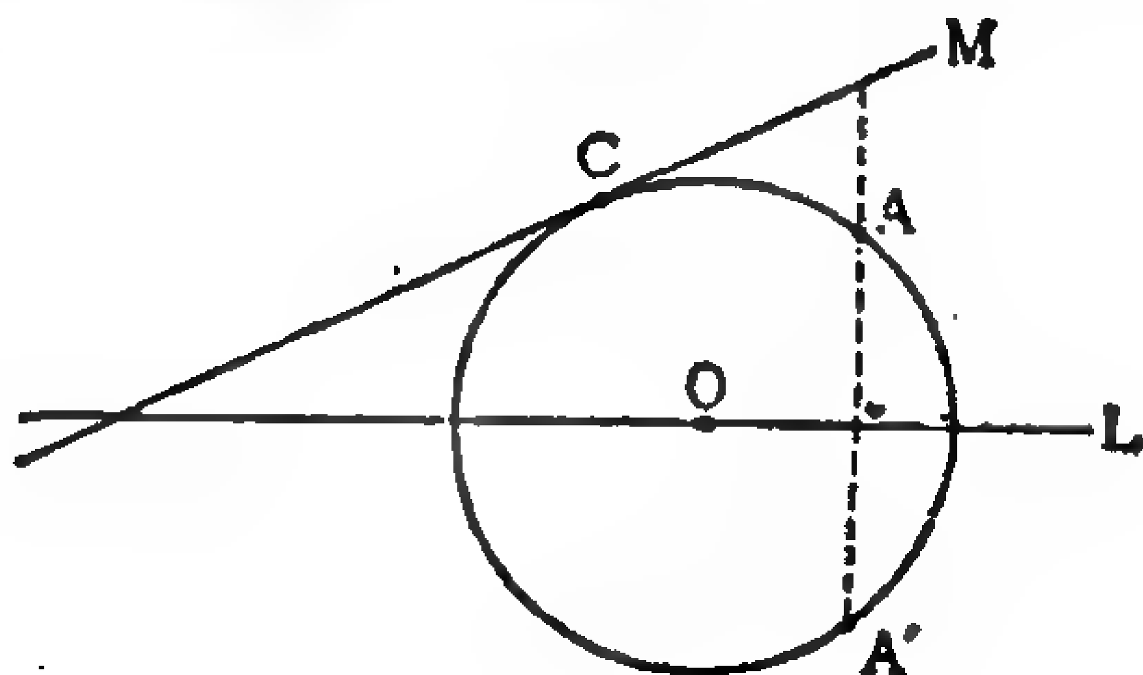
解 作与 L 平行且距 L 的距离为 r 的直线 M。在 L 与 A 的同侧，以 A 为圆心、r 为半径作圆，设与 M 的交点为 O。过 O 作 L 的垂线 OC，则以 O 为圆心、OC 为半径的圆即为所求的圆。其理由是，因 $OA=OC=r$，$OC\perp L$，所以圆 O 过点 A，与 L 切于点 C，且其半径为 r。



以 A 为圆心的圆（即圆 A）与 M 的交点，一般有两个，故本题一般有两解。如圆 A 与 M 相切，则本题有一解；如圆 A 与 M 无公共点，则本题无解。

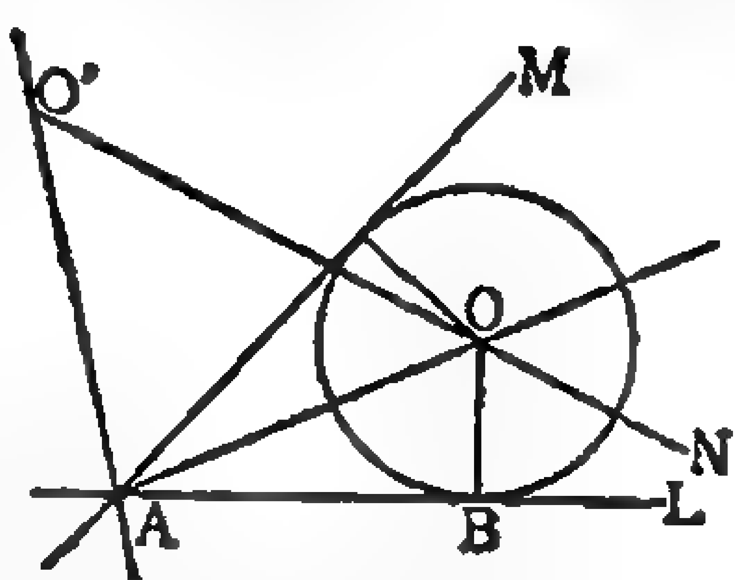
2609. 作过已知点 A 的圆，使其圆心在定直线 L 上，且与另一直线 M 相切。

解 作点 A 关于 L 的对称点 A'，再过 A、A' 作与 M 相切的圆，即为所求的圆。本题可归结为作过两定点且与另一直线相切的圆的问题（参照问题 2618）。



2610. 求作与两直线 L、M 相切且圆心在定直线 N 上的圆。

解 设两直线 L、M 的交角 $\angle LAM$ 的平分线与 N 的交点为 O，过 O 作 L 的垂线 OB，则以 O 为圆心、OB 为半径的圆即为所求的圆。其理由是：因

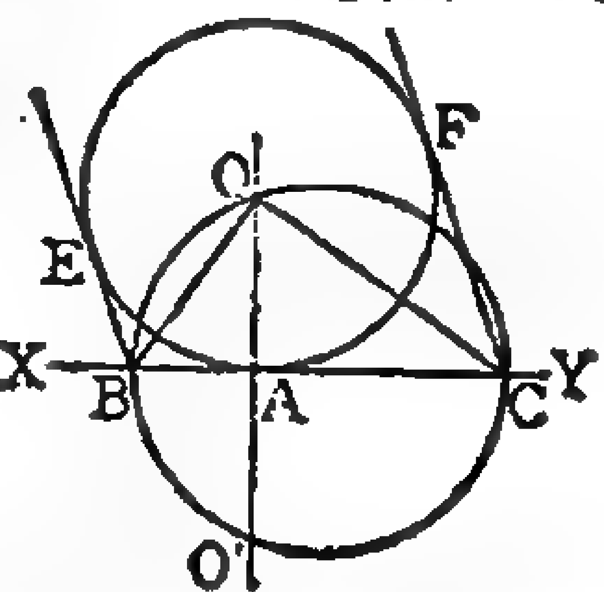


圆心 O 在 $\angle LAM$ 的平分线上，又在 N 上，且 $OB\perp AL$，所以圆 O 的圆心在 N 上且与 L、M 相切。

$\angle LAM$ 为两定直线 L、M 的交角，它的平分线有两条，故本题在一般情况下有两解。如一条平分线与 N 平行，则本题只有一解；如 $L\parallel M$，它们交角的平分线就是它们的公垂线的垂直平分线。当 N 与 L、M 不平行时，只有一解，当 N 与 L、M 平行时，无解；又 N 是 L、M 的公垂线的垂直平分线时，有无数多个解。

2611. 求作切于直线 XY 上定点 A 的圆，且使由该直线上另外两个定点 B、C 作该圆的两条切线平行。

解 过 A 作 XY 的垂线和以 BC 为直径的圆相交于 O，则以 O 为圆心、OA 为半径的圆即为所求的圆。其理



由是：由 B、C 引圆的切线 BE、CF。因圆 O 与 XY 相切于点 A，则 OB、OC 分别是 $\angle ABE$、$\angle ACF$ 的平分线，所以

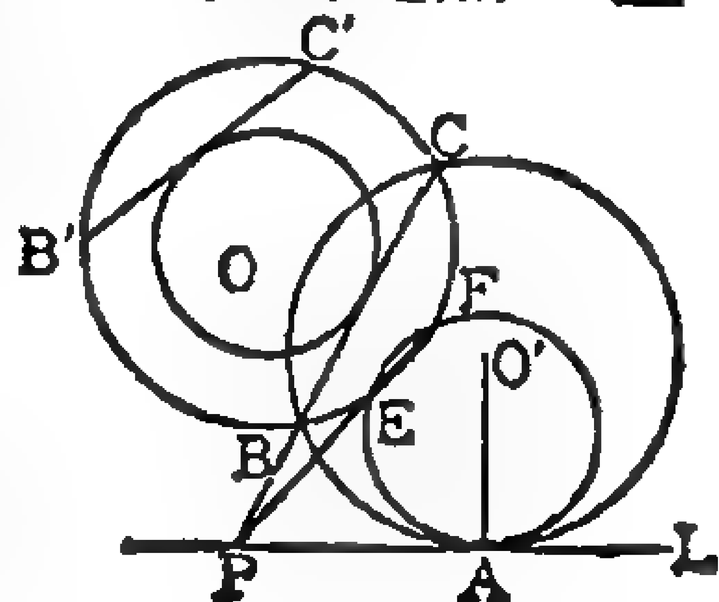
$$\angle OBC+\angle OCB=\angle R$$
$$(\because\ \angle BOC=\angle R),$$
$$\therefore\ \angle EBC+\angle FCB=2\angle R,$$

因而 $BE\parallel CF$.

当 B、C 在 A 的异侧，本题有两解，其他情况则无解。

2612. 求作切于直线 L 上的定点 A 且与已知圆 O 相交于 B、C（使 $BC=l$）的圆。其中 l 为已知长。

解 任作一个与已知直线 L 切于定点 A 且与已知圆相交于

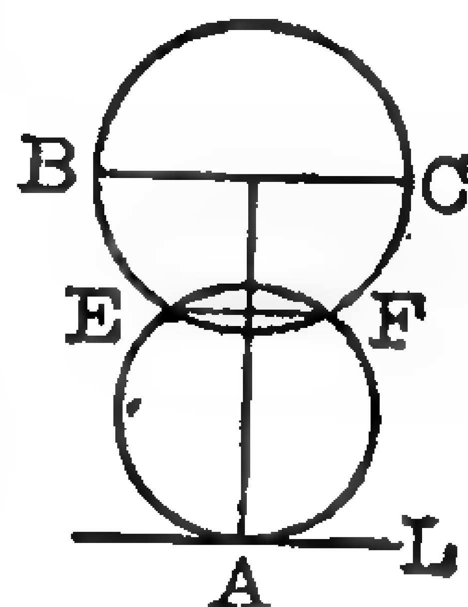


E、F 的圆，设 EF 与 L 的交点为 P。过 P 作圆 O 的割线 PBC，使 $BC=l$，则过三点 B、C、A 的圆 O' 就是所求的圆。其理由是：PA 与圆 EFA 相切于 A，所以 $PA^2=PE\cdot PF$，而在圆 O 中

$$PB\cdot PC=PE\cdot PF,$$
$$\therefore\ PB\cdot PC=PA^2.$$

从而圆 BCA 和 L 相交于点 A，又 $BC=l$，故圆 O' 为满足条件的圆。

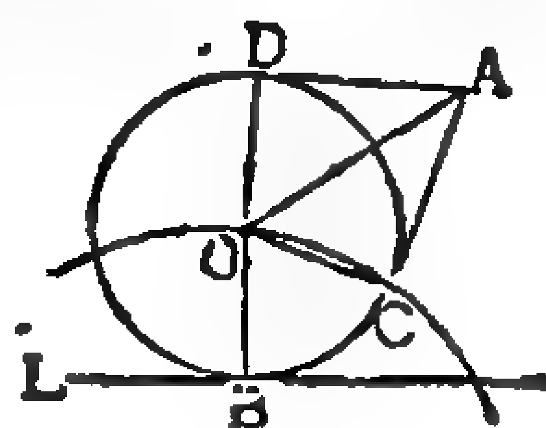
注 过 P 引 $BC=l$ 的弦一般有两条，故本题一般有两解。若 $EF\parallel L$，引与 EF 平行的弦 BC 使 $BC=l$，则过 B、C、A 三点的圆即为所求的圆。



2613. 求作切于定直线 L 上定点 B 的圆，使从定点 A 对该圆的张角等于已知角 α。

解 ［分析］ 设适合条件的圆 O 已作出，$\angle CAD=\alpha$，则

$$\angle OAC=\frac{1}{2}\alpha,$$
$$\angle OCA=\angle R.$$



所以 $\triangle OCA$ 的三个角一定。又因 $\dfrac{OC}{OA}$ 为定值，$OC=OB$，所以 $\dfrac{OB}{OA}$ 也为定值。设其比值为 $\dfrac{m}{n}$，则可得如下作图。

［作图］ 设到两定点 B、A 的距离的比为定比 $\dfrac{m}{n}$ 的点的轨迹（阿波罗尼斯圆），与从点 B 所作直线 L 的垂线相交于点 O，即为所求的圆心。以 O 为圆心、OB 为半径的圆，即为所求的圆。

［证明］ 显然，圆 O 在点 B 处与 L 相切。其次，由 A 向圆 O 引切线 AD、AC，根据作图

$$\frac{OB}{OA}=\frac{m}{n}=\frac{OC}{OA}\ （一定）.$$

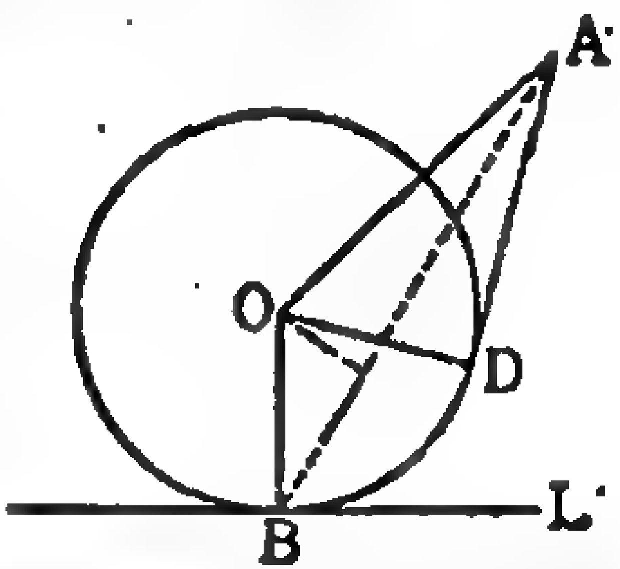
$$\therefore\ \angle OAC=\frac{1}{2}\alpha,\ \angle CAD=\alpha.$$

［讨论］ 由 B 作直线 L 的垂线，与到 B、A 的距离之比为定比 $\dfrac{m}{n}$ 的点的轨迹，一般有两个交点，故本题一般有两解。

2614. 作切于定直线 L 上的定点 B 的

圆，从定点 A 向该圆作切线 AD，使 $AD=l$。

解　因 $\triangle ADO$ 是直角三角形，$AO^2-OD^2=l^2$，而 $OD=OB$，因此 $OA^2-OB^2=l^2$（一定）。根据问题 **1834**，到两定点 A、B 的距离的平方差等于定长 l^2 的点的轨迹是垂直于 AB 的直线，这直线和过 B 所作 L 的垂线的交点 O 就是所求的圆的圆心。



2615. 作圆，使它切于定直线 L 上的定点 A，且与已知圆 O 的交角等于已知角 α。

解　[作图]　过 A 作 L 的垂线 AC。再过 A 作直线 AD，使 $\angle CAD=\alpha$。在 DA 的延长线上取一点 B，使 AB 等于圆 O 的半径。设 OB 的垂直平分线与 AC 相交于 C，则以 C 为圆心，CA 为半径的圆，即为所求。

[证明]　设圆 C 和圆 O 的交点为 G，在 $\triangle CAB$ 和 $\triangle CGO$ 中

$$CA=CG,\quad CB=CO.$$

根据作图 $OG=AB$，

$$\therefore\quad \triangle CAB\cong\triangle CGO,$$

因而　$\angle CGO=\angle CAB$。

而根据作图 $\angle CAD=\alpha$，所以

$$\angle CAB=180^\circ-\alpha\ （定值），$$

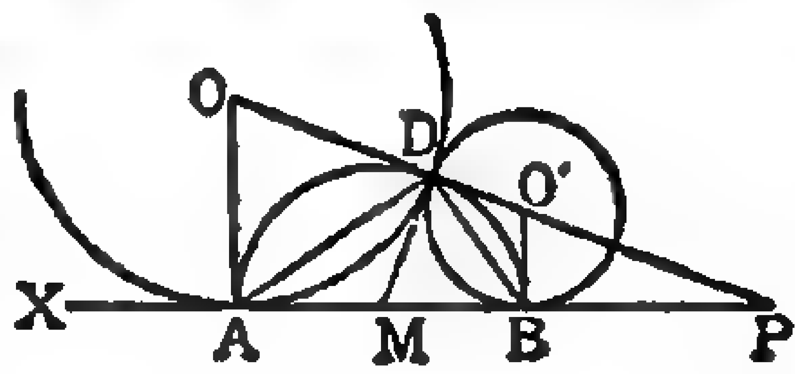
故　$\angle CGO=180^\circ-\alpha$。

因此由两圆的交点 G 作两圆的切线，其交角等于 α。

2616. 作互相外切的两个圆，使它们与已知直线 X 分别相切于该直线上的两个已知点 A、B，而且两圆半径的比为 $m:n$。

解　[分析]　假定本题已解，设所求两圆的圆心为 O、O'，OO' 的延长线与 X 相交于 P。则

$$PA:PB=AO:BO'=m:n.$$



由于 AB 是定线段，所以 P 是定点。设圆 O、O' 的切点为 D，过 D 作 OO' 的垂线与 AB 相交于 M，则

$$MA=MD=MB,\ \angle ADB=\angle R.$$

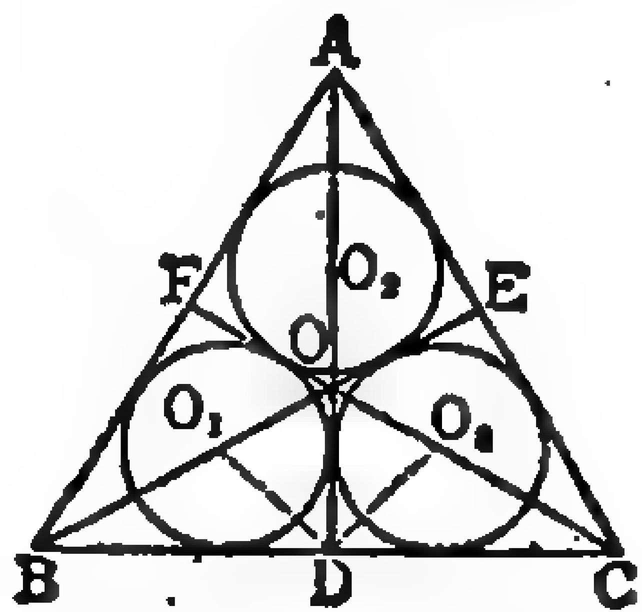
所以，OO' 与以 AB 为直径的圆相切于 D（PO 与半圆 ADB 相切）。

[作图]　在 AB 的延长线上求点 P，使 $PA:PB=m:n$。以 AB 为直径作半圆，由 P 作它的切线，切点为 D。由 A、B 分别作 X 的垂线 AO、BO'，与 PD 或其延长线相交于 O、O'，则以 O、O' 为圆心，分别以 OA、$O'B$ 为半径的两个圆，就是所求的圆。

2617. 在已知的等边三角形 ABC 内作三个互相外切的圆，使它们分别与三角形的两边相切。

解　设 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线相交于点 O。因为四边形 $AFOE$、$BDOF$、$DOEC$ 都相等，只要作它们的内切圆就行了。

$\angle ODB$ 的平分线与 BO 的交点 O_1 就是四边形 $BDOF$ 的内切圆的圆心。其它两圆也可同样作出。



2618. 作过两个定点 A、B，且与定直线 XY 相切的圆。

解　过 A、B 两点作任意圆。设 AB 的延长线与 XY 相交 P，由 P 作这个圆的切线 PT，在 XY 上取 PC（和 PC'），使它等于 PT。过 A、B、C（和 A、B、C'）三点作圆，这个圆即为所求。其理由是：因为 PT 是圆 ABT 的切线，所以

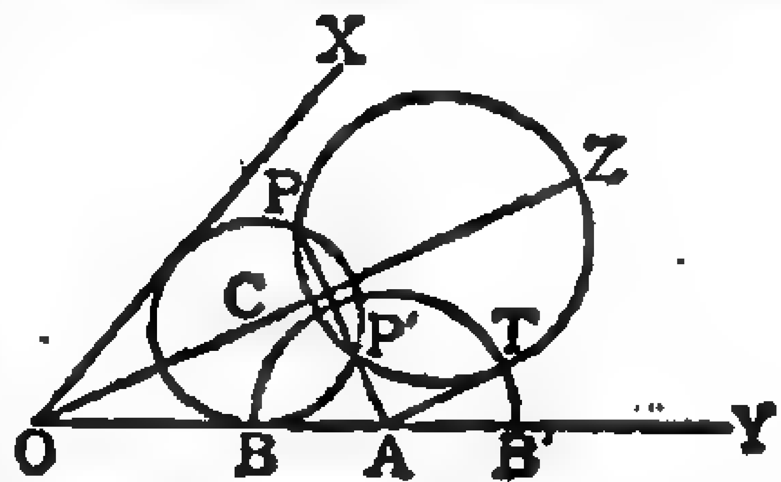
$$PT^2=PA\cdot PB.$$

$$\therefore\quad PA\cdot PB=PC^2\quad (\because\quad PT=PC).$$

因此过 A、B、C 三点的圆与 XY 相切于 C。至于 C' 也是同样的。

2619. 作圆，使它过定点 P 并与定角 XOY 的两边 OX，OY 相切。

解　[分析]　假定本题已解出。设所求圆的圆心为 C，则 C 在 $\angle XOY$ 的平分线 OZ 上。若设点 P 关于 OZ 的对称点为 P'，则 P' 也必在圆 C 上。所以本题可归结为过两点 P、



P' 作与 OY 相切的圆的问题(上题)。

别解　也可用如下的相似法来解。

先作与 OX、OY 相切的任意圆，设圆心为 D. O、P 的连线与圆 D 相交于 Q 和 Q'。过 P 作 QD (或 $Q'D$) 的平行线 PC 与 OD 相交于 C，则以 C 为圆心、CP 为半径的圆即为所求。其理由是：若过 D、C 分别作 OY 的垂线 DE、CF，由 $DQ=DE$ 可得 $CP=CF$，因此圆 C 与 OY 相切于 F，同样地，圆 C 也和 OX 相切。

2620. 以 r 为半径作圆，使它与已知的 $\angle XOY$ 的一边 OX 相切，与另一边 OY 的交角等于已知角 α。

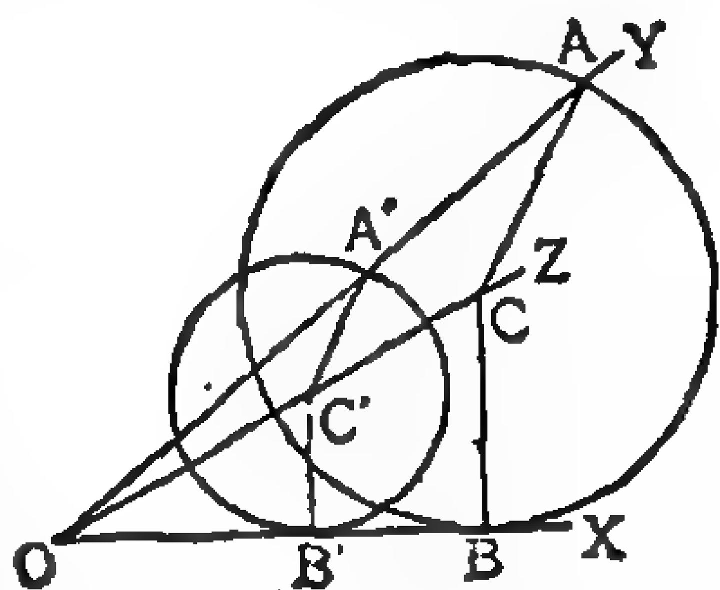
解　[分析]　假定本题已解出，C 是所求圆的圆心。圆 C 与 OX 相切于点 A，与 OY 相交于点 P、Q。过 P 作圆 C 的切线 PD 与 OX 相交于 D，那么 $\angle OPD$ 就是 OY 和圆 C 的交角，那么

$$\angle OPD=\alpha \quad 且 \quad \angle CPD=90^\circ.$$

所以 $\angle CPQ=90^\circ-\alpha$，因而 $\angle CPQ$ 的大小一定。过 C 作 PQ 的垂线 CE，则 $\triangle CPE$ 的形状一定，$CP:CE$ 一定。又因 $CP=CA$，所以 $CA:CE$ 一定。根据问题 **1855**，到定角 XOY 的两边的距离之比 $CA:CE$ 为定值的点的轨迹是过 O 的一直线 OZ。故可作图如下。

[作图]　在 OZ 上求点 C，使 $CA=r$。以 C 为圆心、CA 为半径作圆，此圆即为所求。

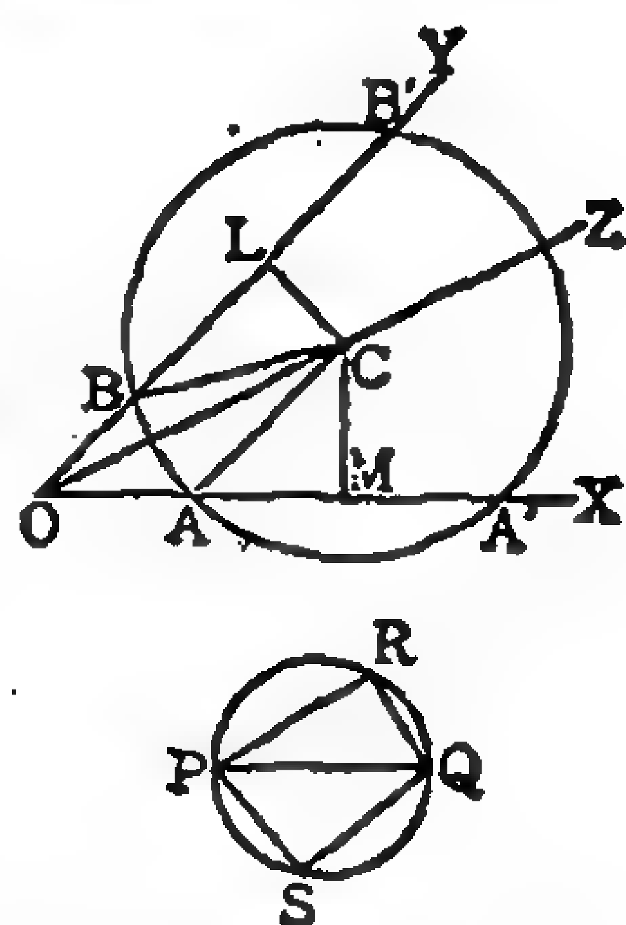
2621. 求作圆，使它与已知角 $\angle XOY$ 的一边 OX 相切，与另一边 OY 的交角等于已知角 α，并且过 OY 上的定点 A。



解　[作图]　和上题同样考虑，求与 OX 相切与 OY 的交角等于已知角 α 的圆的圆心的轨迹，得直线 OZ。从 OZ 上的任意一点 C' 作 OX 的垂线 $C'B'$。以 C' 为圆心、$C'B'$ 为半径作圆 C' 与 OX 相切，且与 OY 的交角为 α。设 OA 与圆 C' 的交点为 A' (因为交点有两个，所以一般有两个解)，由 A 作 $A'C'$ 的平行线与 OZ 相交于 C，由 C 作 OX 的垂线 CB。因为 $A'C'=C'B'$，所以 $AC=CB$。因此，以 C 为圆心、CB 为半径的圆与 OX 相切，且过点 A，并与 OY 的交角等于 α。故圆 C 就是所求的圆。

2622. 以定长 r 为半径作圆，使它与已知的 $\angle XOY$ 的两边 OX、OY 的交角分别为 α、β。

解　[分析]　假定本题已解出，C 为所求圆的圆心，圆 C 与 OX、OY 的交点分别为 A、A', B, B'，圆 C 与 OX、OY 的交角分别等于 α、β。因此与 **2620** 题同样考虑。



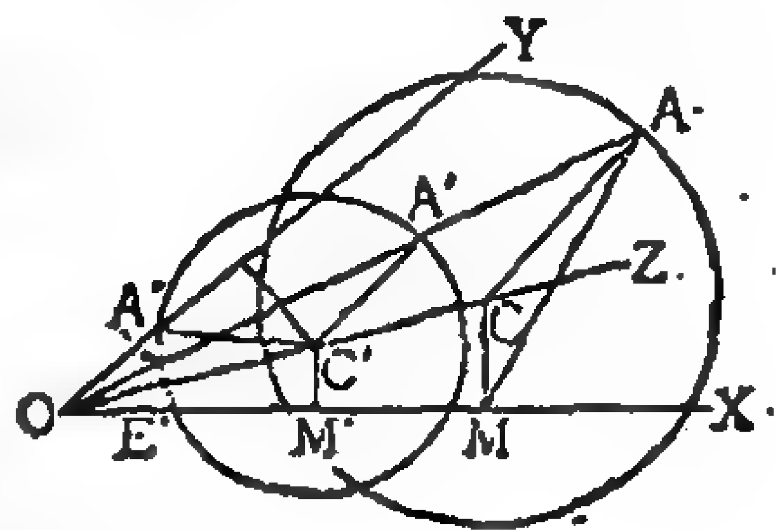
$$\angle XAC=90^\circ-\alpha,$$
$$\angle YBC=90^\circ-\beta.$$

所以由 C 作 OX、OY 的垂线 CM、CL，则 $\triangle CAM$、$\triangle CBL$ 的形状是一定的。又 CB、CA 等于定长 r，那么两个直角三角形 CAM，CBL 的大小就知道了，CM、CL 也就为定长。从而点 C 的位置可以确定。故可作图如下。

[作图]　以等于 r 的线段 PQ 为半径作圆，由 P 引两条弦 PS、PR，使 $\angle SPQ=90^\circ-\alpha$，$\angle RPQ=90^\circ-\beta$。在 $\angle XOY$ 内求一点 C，使由点 C 向 OX、OY 作的垂线 CM、CL，分别等于 SQ、QR。以 C 为圆心、r 为半径作圆，这个圆就是满足条件的圆。

2623. 作圆，使它与已知 $\angle XOY$ 的两边 OX、OY 的交角分别等于定角 α、β，而且过已知点 A。

解　设 C 为适合条件的圆的圆心，圆 C 与 OX、OY 的交角分别等于 α、β。根据上题，$\triangle CAM$ 和 $\triangle CBL$ 的形状是一定的，$CA:CM$，$CB:CL$ 的比值也分别是一定的。设



$$\frac{CM}{CA}=\frac{n}{m},\quad \frac{CL}{CB}=\frac{q}{p},$$

则 $CM=\frac{n}{m}\cdot CA,\ CL=\frac{q}{p}\cdot CB.$

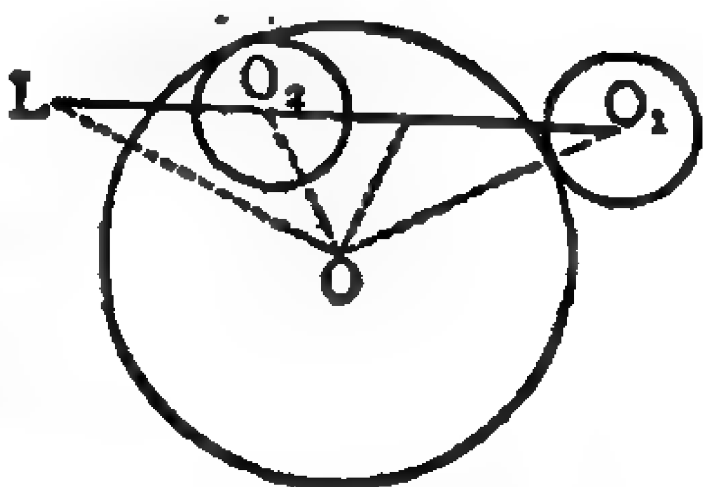
而 $CA=CB$，所以 $\frac{CM}{CL}=\frac{n}{m}\cdot\frac{p}{q}$，即 $CM:CL$ 的比值是一定的。根据问题 **1855**，圆心 C 的轨迹是一直线 OZ。

在 OZ 上任取一点 C'，以 C' 为圆心作与 OX 的交角为 α 的圆，设它与 OA 的交点为 A'（和 A''），由已知点 A 作 $A'C'$ 的平行线与 OZ 相交于 C，则以 C 为圆心、CA 为半径作圆，即为所求（问题 **2621**）。

3. 作与已知圆相切的圆

2624. 以给定的半径 r 作圆，使它的圆心在已知直线 L 上，并与已知圆 O 相切。

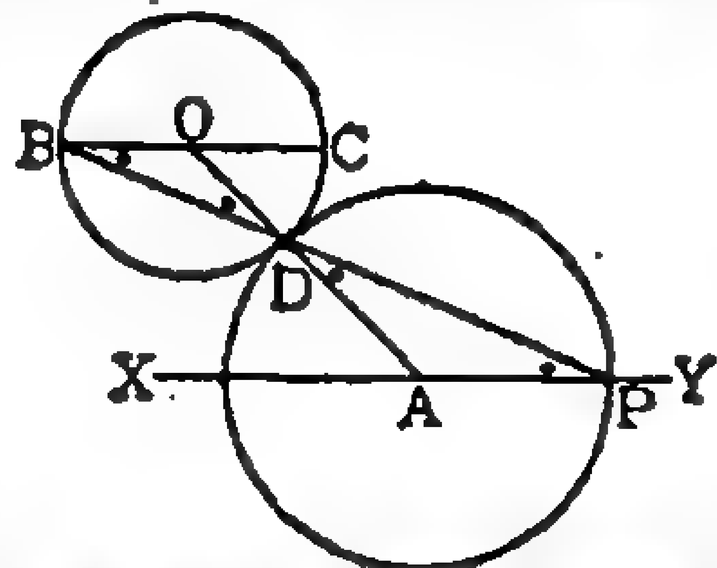
解　［作图］　以 O 为圆心，分别以圆 O 的半径 R 和已知圆的半径 r 的和或差为半径作圆，与直线 L 相交于 O_1、O_2。再以 O_1、O_2 为圆心，以 r 为半径作圆，那么这些圆都是所求的圆。



［证明］　O_1、O_2 都在直线 L 上，并且 $OO_1=R+r$，$OO_2=R-r$，因此圆 O_1、O_2 分别与圆 O 相切。这种圆一般有四个。

如果以 $R-r$ 为半径的圆与 L 相切，则有三个解；如果以 $R-r$ 为半径的圆与 L 既不相交又不相切，而以 $R+r$ 为半径的圆与 L 相交，则有两个解；如果以 $R+r$ 为半径的圆与 L 相切，则只有一个解；如果都与 L 没有任何公共点，就无解。

2625. 求作切于定圆 O，圆心在定直线 XY 上，并且过这条直线上的定点 P 的圆。



解　［作图］　过定圆的圆心 O 引与定直线 XY 平行的直径 BC，连结 BP 的直线和定圆 O 相交于 D，连结 OD 并延长和 XY 相交于 A，则以 A 为圆心、AP 为半径的圆，就是所求的圆。

［证明］　$\because\ BO\parallel AP$，

$\therefore\ \angle OBD=\angle DPA.$

又　$\angle ODB=\angle ADP,$

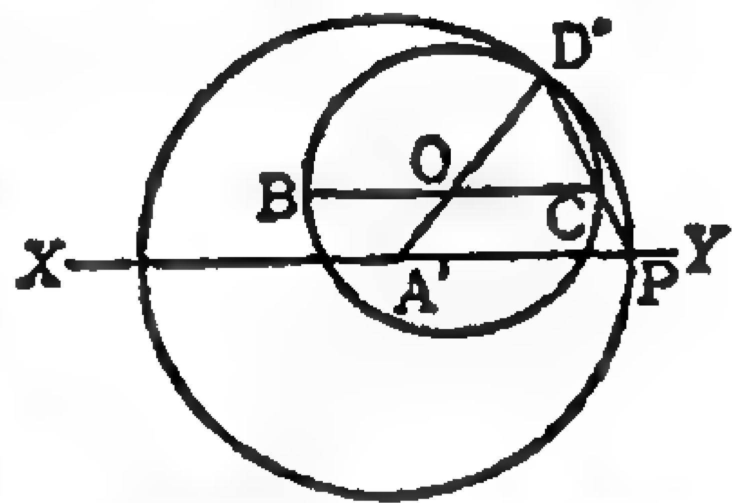
又因　$OB=OD$，$\therefore\ \angle OBD=\angle ODB,$

$\therefore\ \angle DPA=\angle ADP,$

$\therefore\ AD=AP.$

故圆 A 过点 D，AD 是它的半径。从而圆 O 和圆 A 的连心线等于这两个圆的半径之和，这两个圆外切。因此，圆 A 就是所求的圆。

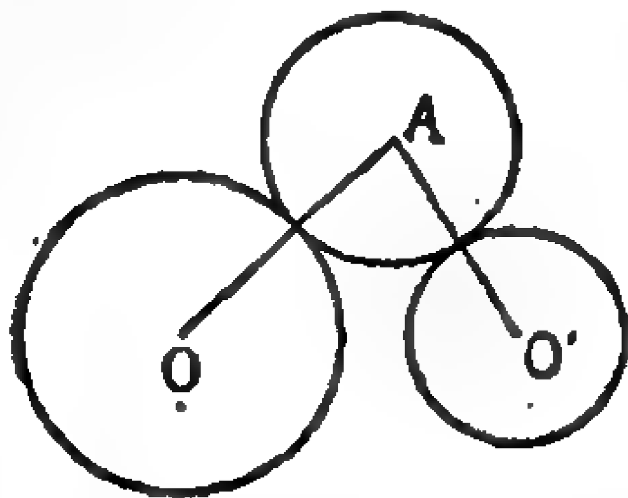
同样，连结 PC 的直线和圆 O 交于 D'，连结 OD' 并延长和 XY 交于 A'，则以 A' 为圆心、$A'P$ 为半径的圆也是所求的圆。因此，一般有两个解。



如果 PB 或 PC 为圆 O 的切线，则仅有一个解。如果定直线 XY 和定圆 O 相切，且切点为 P，则无解。

2626. 求作与两个已知圆 O、O' 相切，且半径等于已知长的圆。

解　设两个已知圆 O 和 O' 的半径分别为 R、R'，并把 A 为圆心、r 为半径的圆记作 (A,r)。设圆 $(O,\ R+r)$ 和圆 $(O',\ R'+r)$ 的公共点为 A（当两圆相交时，A 表示两个点；当两圆相切时，A 表示一个点即切点；当两圆相离时，A 不表示任何点），如以 A 为圆心、r 为半径画圆 $(A,\ r)$，则这个圆和两个已知圆 O 和 O' 外切，且半径为 r，所以这个圆就是满足已知条件的圆。



设圆 $(O,\ R+r)$ 和圆 $(O',\ R'\sim r)$ 的公共点（交点、切点）为 B，画圆 $(B,\ r)$，则这个圆外切于圆 O、内切于圆 O'，且半径等于 r，所以这个圆也是满足已知条件的圆。

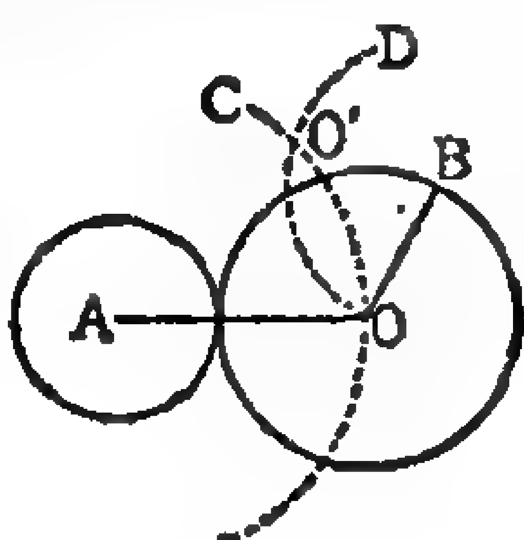
设圆 $(O,\ R\sim r)$ 和圆 $(O',\ R'+r)$ 的公共点（交点或切点）为 C，画圆 $(C,\ r)$，则这个圆内切于圆 O，外切于圆 O'，且半径等于 r，所以这个圆也是满足已知条件的圆。

设圆 $(O,\ R\sim r)$ 和圆 $(O',\ R'\sim r)$ 的公共点（交点或切点）为 D，画圆 $(D,\ r)$，则这个圆内切于已知的两个圆 O 和 O'，且半径等于 r，所以这个圆也是满足已知条件的圆。

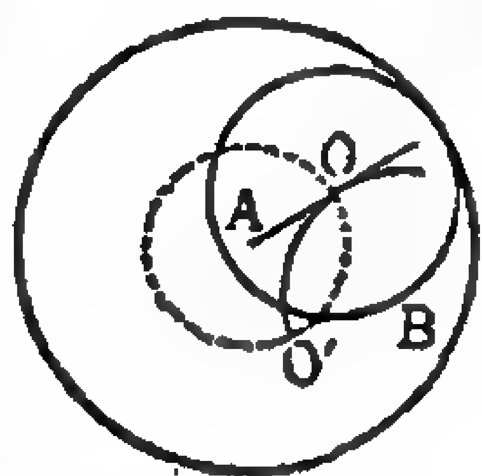
综上所述，如 A、B、C、D 都表示两个点，则本题有八个解。但是其中有的不是交点而是切点或没公共点等情况，所以本题的解也包括七解、六解、五解、四解、三解、二解、一解或无解等情况。

2627. 求作过一定点 B、切于定圆 A、且半径等于定长 r 的圆。

解 [作图] 设已知圆 A 的半径为 R，以 A 为圆心、$R+r$ 为半径画圆 C。又以 B 为圆心、r 为半径画圆 D。设圆 C 和圆 D 的交点为 O，则以 O 为圆心、r 为半径的圆，就是所求的圆。



[证明] $OB=r$，所以圆 O 过点 B。又圆 C 的半径为 $R+r$，即圆 A 和圆 O 的中心距离等于这两个圆的半径之和，所以圆 O 外切于已知圆 A。因此圆 O 就是所求的圆。

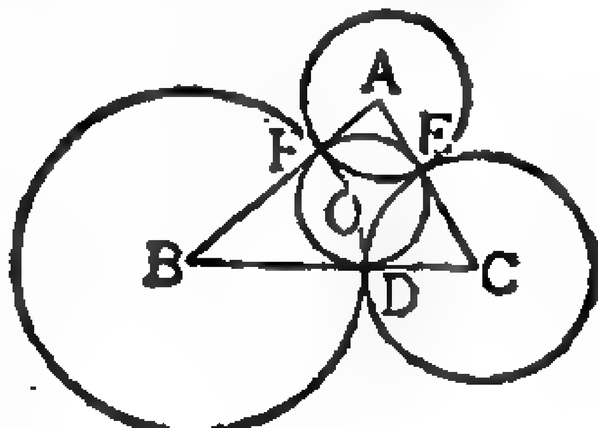


如果定点 B 在已知圆 A 内，则以 A 圆心、R 和 r 的差为半径作圆 C。

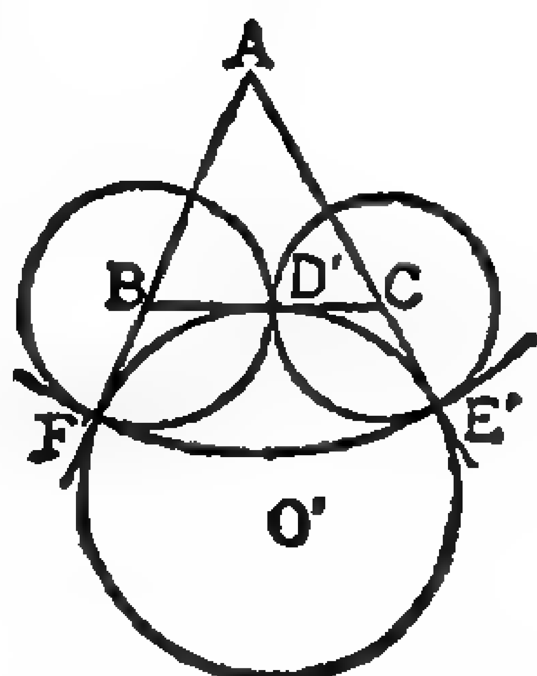
当圆 C 和圆 D 相交时，本题有两解；当圆 C 和圆 D 相切时，本题有一解；当圆 C 和圆 D 不相交时，本题无解。

2628. 分别以已知点 A、B、C 为圆心，作互相相切的圆。

解 [作图] 设以 A、B、C 为顶点的三角形的内心为 O，过 O 分别作边 BC、CA、AB 的垂线 OD、OE、OF，以 A、B、C 为圆心，分别以 AE、BF、CD 为半径作三个圆，则这三个圆互相外切。



又从 $\angle A$ 内的旁心 O' 向边 BC 及 AC、AB 的延长线分别引垂线 $O'D'$、$O'E'$、$O'F'$，以 A、B、C 为圆心，分别以 AE'，BF'，CD' 为半径作三个圆，则有两个圆外切且它们和第三个圆内切。从 $\angle B$、$\angle C$ 内的旁心可以类似地作圆。



[证明] O 为 $\triangle ABC$ 的内心，所以

$$AE=AF,\ BF=BD,\ CD=CE.$$

因而圆 A、B、C 分别在点 D、E、F 处互相外切。

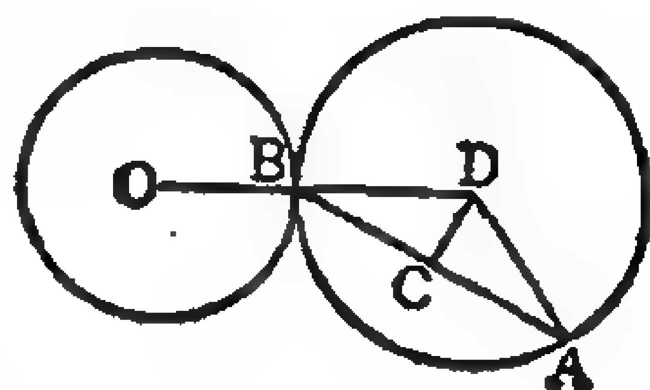
其次，因为 O' 是旁心，所以旁心圆 O' 和 BC、CA、AB 的切点分别为 D'、E'、F'，从而

$$AE'=AF',\ BD'=BF',\ CE'=CD'.$$

因此，以 A、B、C 为圆心，分别以 AE'，BD'、CD' 为半径的三个圆中，圆 B 和圆 C 外切，且它们都和圆 A 内切。

2629. 求作过定点 A 且和已知圆 O 切于该圆上定点 B 的圆。

解 [作图] 设线段 AB 的垂直平分线 CD 和 OB 或其延长线相交于 D，则以 D 为圆心、DB 为半径的圆就是所求的圆。



[证明] CD 是距 A、B 等距离的点的轨迹，

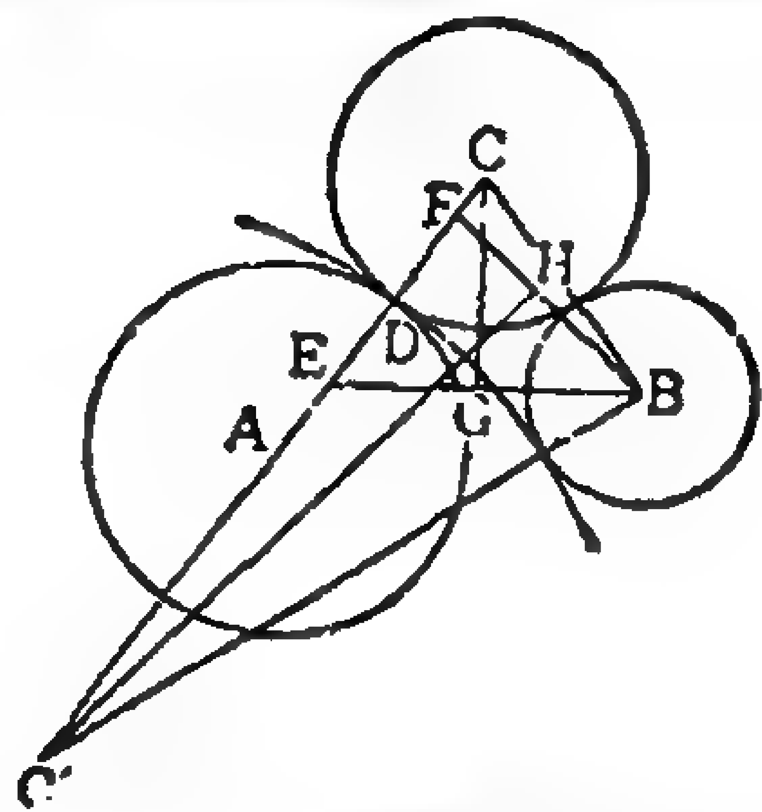
$$\therefore\ DA=DB.$$

从而圆 D 过 B，又定圆 O 和圆 D 的公共点 B 在这两个圆的连心线上，因而它们相切于 B，于是圆 D 就是所求的圆。

[讨论] 当 $AB\perp OB$ 时，本题无解；当点 A 和点 B 重合时，本题有无数多个解；除此之外，本题仅有一解。

2630. A、B 是已知两圆的圆心，D 是圆 A 上的定点，求作一圆和圆 B 相切且和圆 A 相切于 D。

解 [作图] 设圆 B 的半径为 r，在直线 AD 上的点 D 的两侧分别取 E、F，使 $DE=DF=r$。设线段 EB 的垂直平分线 GC 和 AD 或其延长线相交于 C，则以 C 为圆心、以 CD 为半径的圆，就是所求的圆。



[证明] GC 是和 E、B 等距离的点的轨迹，

$$CE=CB,$$

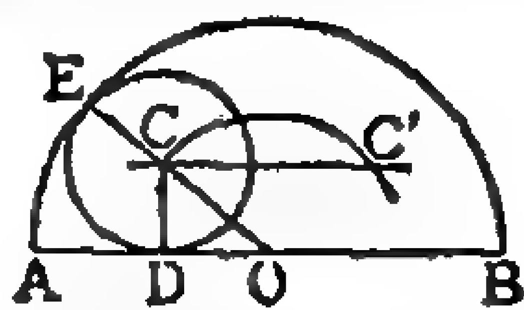
又 $$CE=CD+DE=CD+r,$$

$$\therefore\ CB=CD+r.$$

因此圆 C 和圆 A 外切于 D，且和圆 B 外切。

同样可以证明，线段 FB 的中垂线 HC' 和 DA 的延长线相交于 C'，则以 C' 为圆心、$C'D$ 为半径的圆也适合于已知条件。

2631．求作半径为 r 的圆，使与半径为 R 的半圆内切。



解 ［作图］ 以半圆的圆心 O 为圆心，$R-r$ 为半径画圆弧，这个圆弧和距半圆的直径 AB 的距离为 r 的平行线相交于 C，则以 C 为圆心、r 为半径的圆就是所求的圆。

［证明］ 从 C 引 AB 的垂线 CD，连结 OC，并延长和半圆 O 相交于 E，则由 $CD=r$ 可知圆 C 和直径 AB 相切。又

$$OE=R,\ OC=R-r,$$

$$\therefore\quad CE=R-(R-r)=r.$$

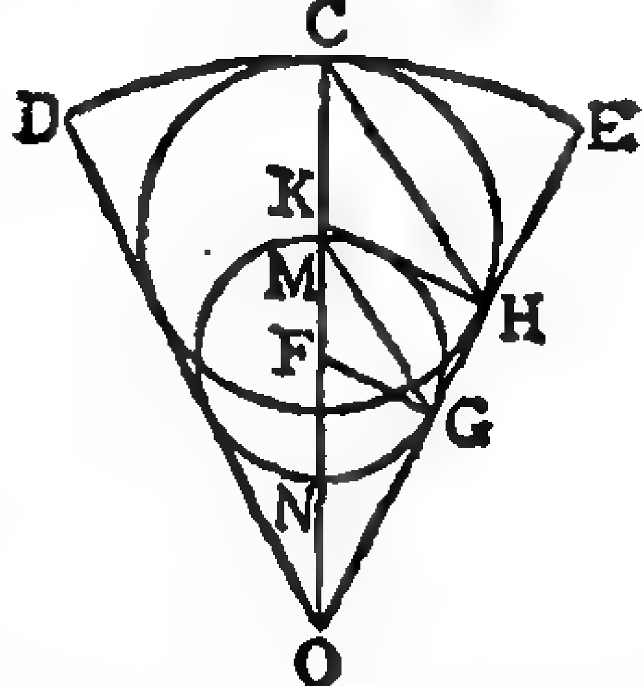
故圆 C 与半圆 O 相切于 E。因此圆 C 就是满足条件的圆。

如果 $R>r$，且圆弧 CC' 和平行线 CC' 相交于两点 C、C'，则有两个解；如圆弧 CC' 和平行线 CC' 相切，即 C' 与 C 重合，则有一个解；如果圆弧 CC' 和平行线 CC' 无公共点，则无解。

如果 $R\leqq r$，则本题无解。

2632．求作已知扇形 ODE 的内切圆。

解 ［作图］ 作 $\angle DOE$ 的平分线 OC，设它和 $\overset{\frown}{DE}$ 相交于点 C，从 OC 上的任意一点 F 引 OE 的垂线，垂足为 G。以 F 为圆心、FG 为半径画圆，设它和 OC 的交点为 N、M $(ON<OM)$。从 C 引 MG 的平行线和 OE 相交于 H，再从 H 引 OE 的垂线和 OC 相交于 K，则以 K 为圆心、KH 为半径的圆就是内切于扇形 ODE 的圆。



［证明］ 因为 $CH\parallel MG$，$HK\parallel GF$，KC 和 FM 都在直线 OC 上，所以

$$\triangle CHK\backsim\triangle MGF.$$

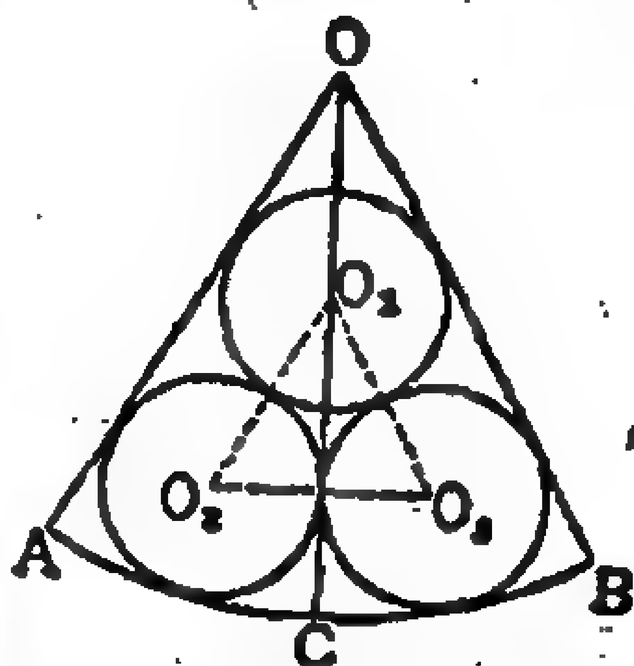
$$\therefore\quad KH:FG=KC:FM.$$

但 $\qquad FG=FM,\quad\therefore\quad KH=KC.$

故以 K 为圆心、KH 为半径的圆与直线 OE 和 $\overset{\frown}{DE}$ 相切。又因圆 K、OD 和 OE 都关于 OC 对称，所以圆 K 也和 OD 相切。因此，圆 K 就是内切于扇形 ODE 的圆。

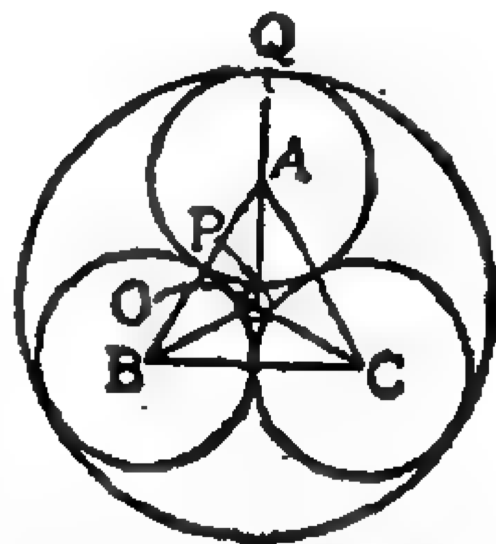
2633．在圆心角为 60° 的已知扇形 OAB 中，试作尽可能大的三个等圆。

解 因为圆心角是 60°，又考虑到所求三个等圆的圆心应为正三角形的顶点，可得如下作图。



作 $\angle O$ 的平分线和 $\overset{\frown}{AB}$ 相交于点 C。在扇形 OAC、OBC 内分别作其内切圆 O_2、O_3（参照上题），以 O_2O_3 为边作正三角形 $O_1O_2O_3$，则 O_1 在 OC 上，所以从 O_2 引 AO 的平行线和 OC 的交点即为 O_1。以 O_1 为圆心、圆 O_2 的半径为半径画圆，则圆 O_1、O_2、O_3 就是所求的三个等圆。

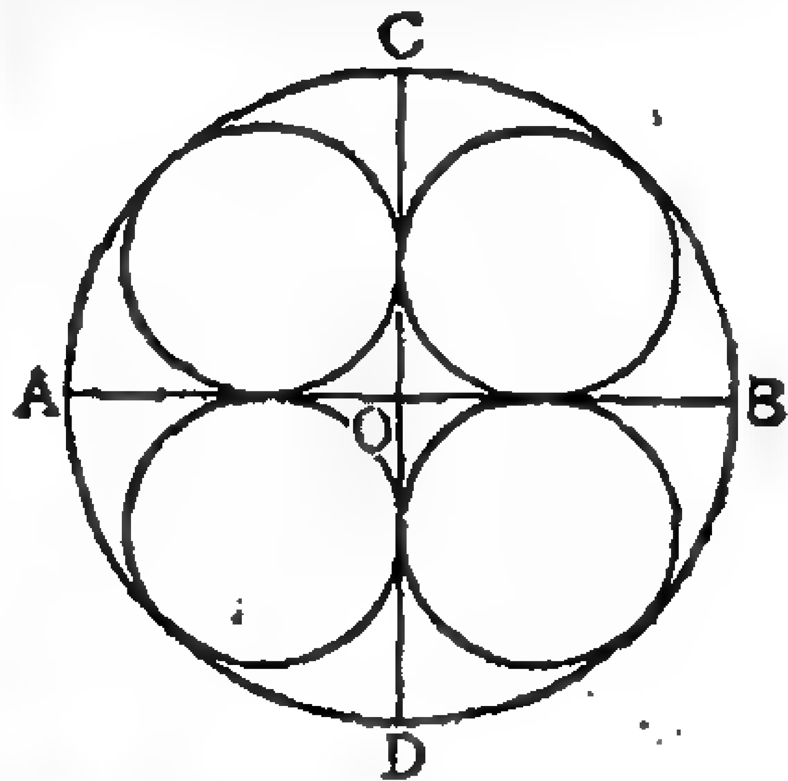
2634．求作互相外切的三个等圆和与这三个等圆相切的圆。



解 作任意的正三角形 ABC，则以这个三角形的各顶点为圆心、各边的一半为半径所画的圆，就是互相外切的三个等圆。

再作 $\triangle ABC$ 的外心 O。设 OA 及其延长线和圆 A 分别交于 P、Q，则以 O 为圆心、OP 或 OQ 为半径所画的圆就和三个等圆 A、B、C 都相切。

2635．在已知圆 O 内作四个互相外切的等圆，且使它们都和圆 O 内切。

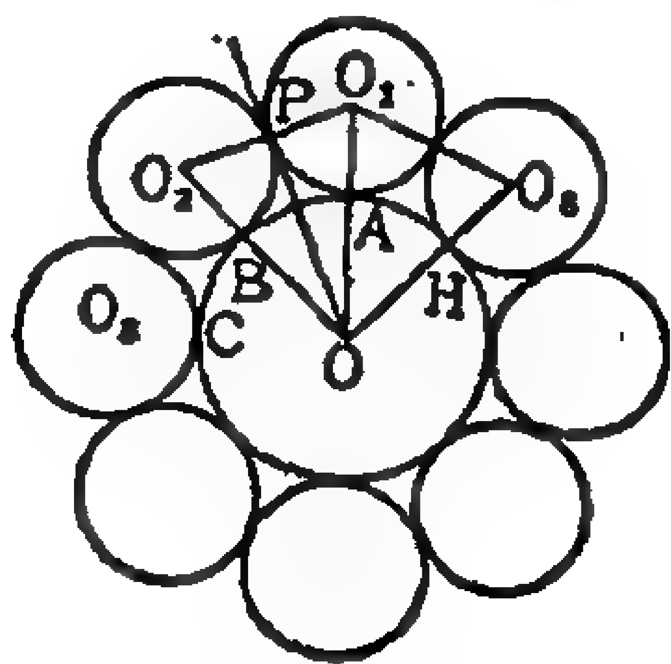


解 在圆 O 内作互相垂直的直径 AOB 和 COD，则圆 O 被分成四个扇形 OAC、OBC、OBD、OAD。在这些扇形内分别作其内切圆（参照问题 2632），则这四个内切圆就是所求的四个圆。

2636．求作与已知圆 O 外切的八个等圆，且使这八个等圆也两两外切。

解 假设所求的八个等圆已经作出，其圆

心分别为 O_1、O_2、O_3、…、O_8。这些圆和已知圆 O 的切点分别为 A、B、C、…、H。圆 O_1 和圆 O_2 的切点为 P，圆 O_2 和圆 O_3 的切点为 Q，…，圆 O_8 和圆 O_1 的切点为 W，所以 A 应在 OO_1 上，B 应在 OO_2 上，…，H 应在 OO_8 上。且



$$OA=OB=\cdots=OH,$$
$$AO_1=BO_2=\cdots=HO_8.$$

所以　$OO_1=OO_2=\cdots=OO_8$.

又　$O_1O_2=O_1P+PO_2=2O_1P=2AO_1$,

同样，　$O_2O_3=2BO_2$，…，$O_8O_1=2HO_8$,

$$\therefore\ O_1O_2=O_2O_3=\cdots=O_8O_1.$$

从而　$\triangle OO_1O_2\cong\triangle OO_2O_3\cong\cdots\cong\triangle OO_8O_1$.

因此八边形 $O_1O_2\cdots O_8$ 和八边形 $AB\cdots H$ 都是正八边形。

$$\angle O_1OO_2=\angle O_2OO_3=\cdots=4\angle R\div 8=\frac{1}{2}\angle R.$$

$$\therefore\ \angle OO_1O_2=\left(2\angle R-\frac{1}{2}\angle R\right)\div 2=\frac{3}{4}\angle R,$$

$$\therefore\ \angle O_1AP=\left(2\angle R-\frac{3}{4}\angle R\right)\div 2=\frac{5}{8}\angle R,$$

$$\therefore\ \angle OAP=2\angle R-\frac{5}{8}\angle R=\frac{11}{8}\angle R.$$

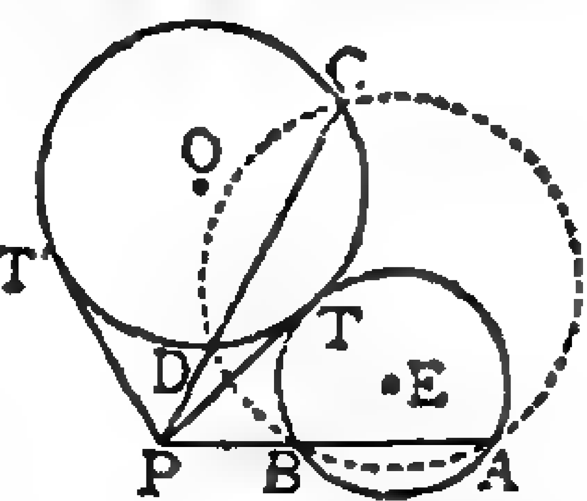
又　$\angle O_1OP=\frac{1}{2}\angle R\div 2=\frac{1}{4}\angle R.$

因为 OA 为定长，所以 $\triangle OAP$ 的大小和形状都可确定，从而 $\triangle OPO_1$ 可以作出，因此圆 O_1 的半径就可确定，可作图如下。

先作圆 O 的内接正八边形 $ABC\cdots H$。再作 $\triangle OAP$ 和 $\triangle OO_1P$ 以确定 O_1。以 O_1 为圆心、O_1A 为半径画圆 O_1，再在 OB 上取 $OO_2=OO_1$，以 O_2 为圆心、O_2B 为半径画圆 O_2。其他的圆可类似地作出。

2637．求作过两个定点 A、B 且和定圆 O 相切的圆。

解　先作过定点 A、B 且和圆 O 相交的圆。设这两个圆相交于点 C、D，AB 和 CD 的延长线相交于 P，从 P 引圆 O 的切线 PT 和 PT'，其切点分别为 T、T'，则过点 A、B、T 和 A、B、T' 的圆就是所求的圆。



［证明］　PT 是定圆 O 的切线，

$$PT^2=PC\cdot PD.$$

又因 C、D、B、A 四点共圆，

$$PC\cdot PD=PA\cdot PB,$$
$$\therefore\ PT^2=PA\cdot PB.$$

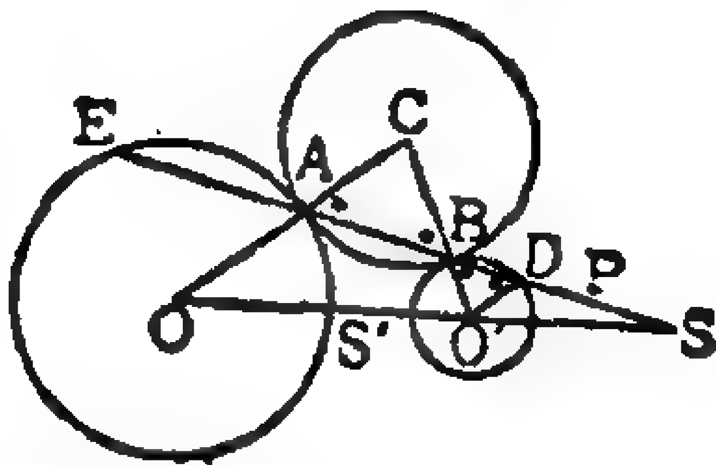
因此过三点 A、B、T 的圆和直线 PT 相切。设这个圆的圆心为 E，则 PT 为圆 O 和圆 E 的公切线，即圆 O 和圆 E 外切于 T，所以圆 E 就是所求的圆。

同样，可以证明过三点 A、B、T' 的圆也是所求的圆。

当 $AB\parallel CD$ 时，则过线段 AB 的垂直平分线和定圆 O 的交点以及 A、B 三点的圆，就是所求的圆。

2638．求作与已知两圆 O、O' 相切的圆，且使连结其切点 A、B 的直线过定点 P。

解　假定所求圆已经作出，设其圆心为 C，AB 和 OO' 的交点为 S，AB 和圆 O' 的另一交点为 D，则圆心 C 是 OA 和 $O'B$ 的交点，且



$$\angle CAB=\angle CBA=\angle O'BD=\angle O'DB.$$
$$\therefore\ OA\parallel O'D,$$

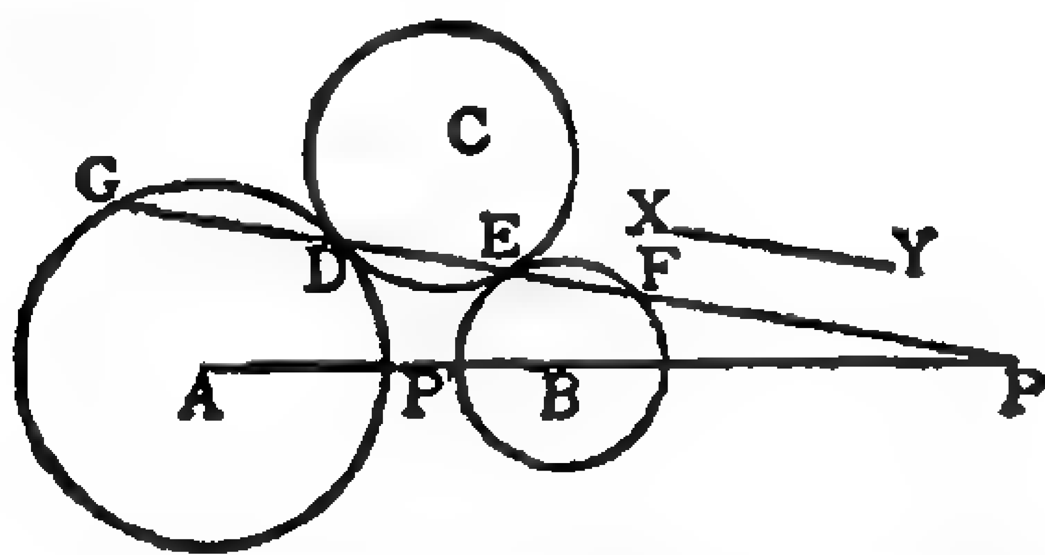
因而　$OS:O'S=OA:O'D$,

所以 S 为两圆 O、O' 的相似外心。可作图如下：先求两圆 O、O' 的相似外心 S，相似内心 S'，当 SP 或 $S'P$ 和两圆 O、O' 相交时，则以其非对应点（在 SP 上，如图是 A、B，或 D、E）为切点画圆，就是所求的圆。当 SP 与圆 O、O' 相交时，可以得到两组非对应点。对于 $S'P$ 也一样，故本题的解的个数可以是四个、两个或无解。当圆 O、O' 的半径相等时，直线 PAB 和 OO' 平行，这时容易作出所求的圆。如点 P 在 OO' 上，则有四个解（设 OO' 和圆 O 的交点为 E、A，和圆 O' 的交点为 B、

D，则在点 A、B 处与已知圆 O、O' 分别相切的圆，在点 A、D 处，E、B 处，E、D 处与两圆 O、O' 分别相切的圆，这四个圆都是所求的圆）。如 P 不在 OO' 上，从 P 引 OO' 的平行线，如该平行线和已知两圆相交，则有两解（设它和圆 O 的交点为 E、A，和圆 O' 的交点为 B、D，则在点 A、B 处或 E、D 处分别和两圆 O、O' 相切的圆都是所求的圆）。如从 P 所引 OO' 的平行线和两圆 O、O' 都不相交，则无解。特别地，当点 P 为线段 OO' 的中点时，则有无数多个解。

2639．求作圆 C 使与两个定圆 A、B 相切，且其两个切点的连线与定直线 XY 平行．

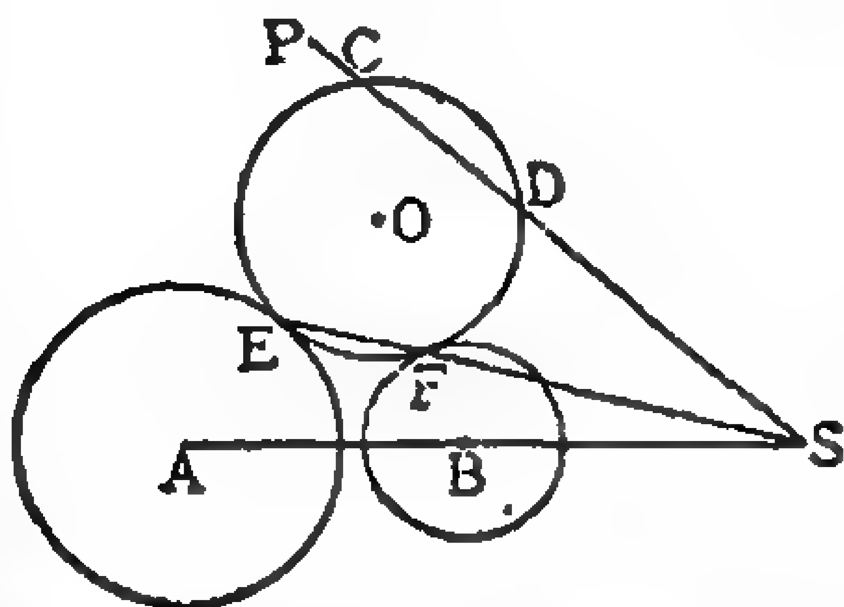
解 ［分析］ 假设所求圆已经作出，C 为其圆心，D、E 分别是圆 C 和两定圆 A、B 的切点，根据问题 **1131**，则 DE 过两圆 A、B 的相似外心 P 或相似内心 P' 中的一个．因此可作图如下．



［作图］ 先求两定圆 A、B 的相似中心 P 及 P'，从 P 或 P' 引定直线 XY 的平行线，它和两圆相交于 F、E，D、G，则以非对应点 (F, G) 或 (E, D) 为切点可作出与已知两圆 A、B 相切的圆，这就是所求的圆．

2640．求作一圆与已知的两圆 A、B 外切（或内切），且在过已知两圆的相似外心的给定直线上截取定长的弦．

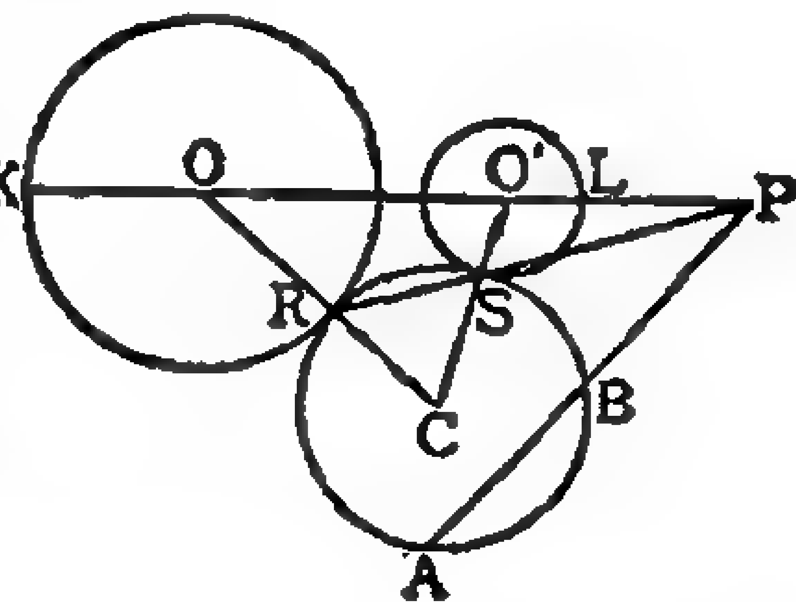
解 设所求的圆的圆心为 O，与已知两圆 A、B 的切点分别为 E、F．因圆 O 与圆 A、B 同时外切（或内切），所以 EF 过相似外心 S（问题 **1131**）．设圆 O 和给定直线 SP 相交于 C、D，则 $SC\cdot SD$ 为定值，又因 SC 和 SD 的差是一定的，根据问题 **2016** 可求出 SC、SD 的长，从而确定点 C、D 的位置．因此作过 C、D 且切于已知圆



A（或 B）的圆（问题 **2637**），就是所求的圆．

2641．求作过定点 A 且与已知两圆 O、O' 相切的圆 C．

解 ［分析］ 假定所求的圆已经作出，设其圆心为 C，圆 C 与已知两圆 O、O' 分别外切于 R、S，RS 和 OO' 的交点为 P，根据问题 **1131**，点 P 是两圆 O、O' 的相似外心，它是定点．



设连心线 OO' 的延长线和两圆 O、O' 的交点分别为 K、L，则根据问题 **1409** 知

$$PR\cdot PS=PK\cdot PL.$$

由于 P、K、L 都是定点，$PK\cdot PL$ 是定值，所以 $PR\cdot PS$ 为定值．设 PA 和圆 C 相交于 B，则 $PA\cdot PB=PR\cdot PS$（一定）．所以 B 也是定点．于是可作图如下．

［作图］ 作两圆 O、O' 的相似外心 P，设 PO' 和圆 O' 的交点为 L，PO 的延长线和圆 O 的交点为 K，过 K、L、A 三点的圆和 PA 的交点为 B，过点 A、B 且和圆 O 相切的圆 C（问题 **2637**），就是所求的圆．

［证明］ 设圆 C 和圆 O 的切点为 R，PR 和圆 C 的交点为 S，则

$$PA\cdot PB=PR\cdot PS. \quad ①$$

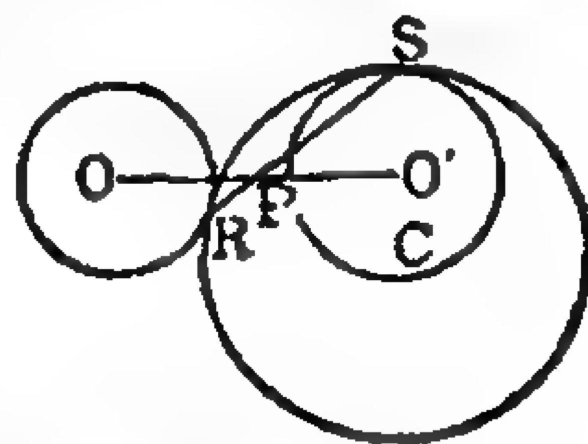
根据作图，K、L、B、A 四点共圆，所以

$$PK\cdot PL=PA\cdot PB. \quad ②$$

从 ①、② 知 $PR\cdot PS=PK\cdot PL$．

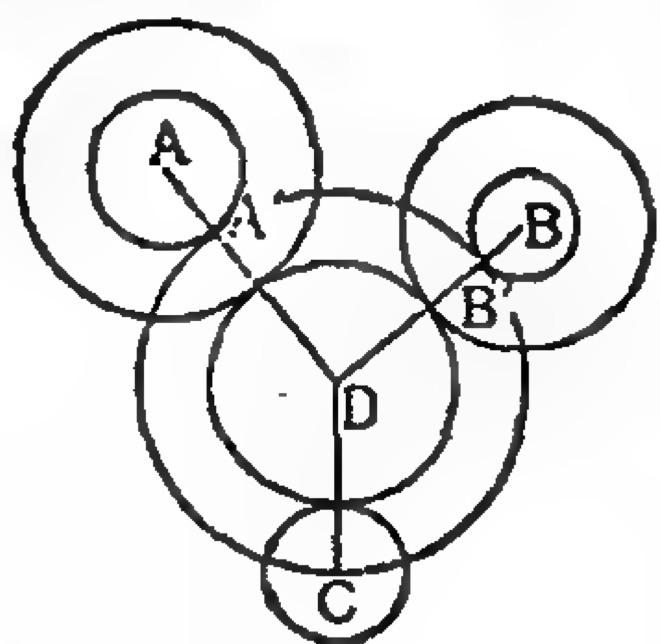
因而 K、L、S、R 四点共圆．因为 P 是两圆 O、O' 的相似外心，R 是圆 O 和圆 C 的切点，则由 $PK\cdot PL=PR\cdot PS$ 知，S 是圆 C 和圆 O' 的切点．故圆 C 满足题设条件．

注 在上面的解法中，圆 C 和两已知圆 O、O' 外切，如右图，当圆 C 外切于一个圆 O 且内切于另一圆 O'，连接两切点 R、S 的直线和 OO' 相交于 P，则 P 为两圆 O、O' 的相似内心．因此作图方法和上面一样．当圆 O、O' 都内切于圆 C 时，作图方法也一样．



2642．求作和已知三圆 A、B、C 相切的圆．

解　[分析]　假设所求的与三圆 A、B、C 外切的圆已经作出，其圆心为 D。以 D 为圆心，DC 为半径画圆，设它和 DA、DB 的交点分别为 A'、B'，圆 A、B、C 的半径分别为 a、b、c，则



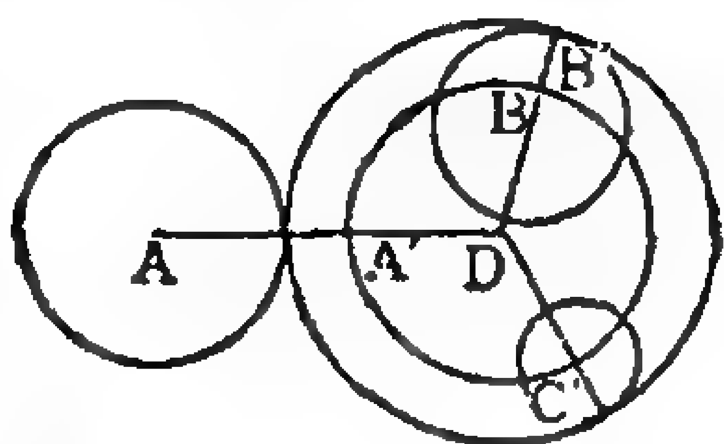
$$AA'=a-c,\ BB'=b-c.$$

因此可按以下方法作图.

[作图]　设圆 A、B、C 的半径分别为 a、b、c $(a>b>c)$，以 A、B 为圆心，分别作半径为 $a-c$，$b-c$ 的两圆。再过点 C 作与这两个圆相切的圆（参照上题），设该圆的圆心为 D，则以 D 为圆心且外切于圆 C 的圆，就是所求的圆。

[证明]　根据分析容易证明，所以省略.

注　设圆 A 外切于圆 D，而圆 B 内切于圆 D，以 D 为圆心，DC 为半径画圆，则有 $AA'=a+c$，$BB'=b-c$。因此，以 A、B 为圆心，分别以 $a+c$，$b-c$ 为半径画两圆，就可以如上作图。同样，圆 D 和圆 A、B、C 有以下八种情况：



（i）三个圆 A、B、C 都和圆 D 外切；

（ii）圆 A 外切于圆 D，而圆 B、C 内切于圆 D；

（iii）圆 B 外切于圆 D，而圆 C、A 内切于圆 D；

（iv）圆 C 外切于圆 D，而圆 A、B 内切于圆 D；

（v）圆 A 内切于圆 D，而圆 B、C 外切于圆 D；

（vi）圆 B 内切于圆 D，而圆 C、A 外切于圆 D；

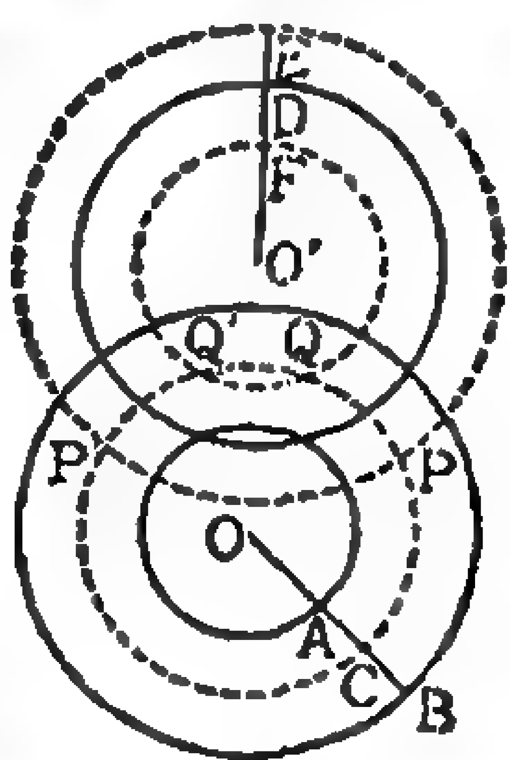
（vii）圆 C 内切于圆 D，而圆 A、B 外切于圆 D；

（viii）三个圆 A、B、C 都内切于圆 D。

以上无论那种情况，都可先作以 A、B 为中心，分别以 $a\pm c$、$b\pm c$ 为半径的两个辅助圆。

2643. 求作一圆切于以 O 为圆心的两个同心圆和另一圆 O'。

解　[作图]　先从同心圆的圆心 O 引任意的射线，它和这两个同心圆分别交于 A、B，设 AB 的中点为 C，以 O 为圆心、OC 为半径画圆。其次，在圆 O' 的任意半径 $O'D$ 上和它的延长线上分别取 F、E，使 $DE=DF=AC$。再以 O' 为圆心，$O'E$ 和 $O'F$ 为半径画两圆．设这两圆和以 O 为圆心、OC 为半径的圆分别交于 P、P' 和 Q、Q'。如分别以 P、P'、Q、Q' 为圆心、AC 为半径画圆，则这些圆就是所求的圆。



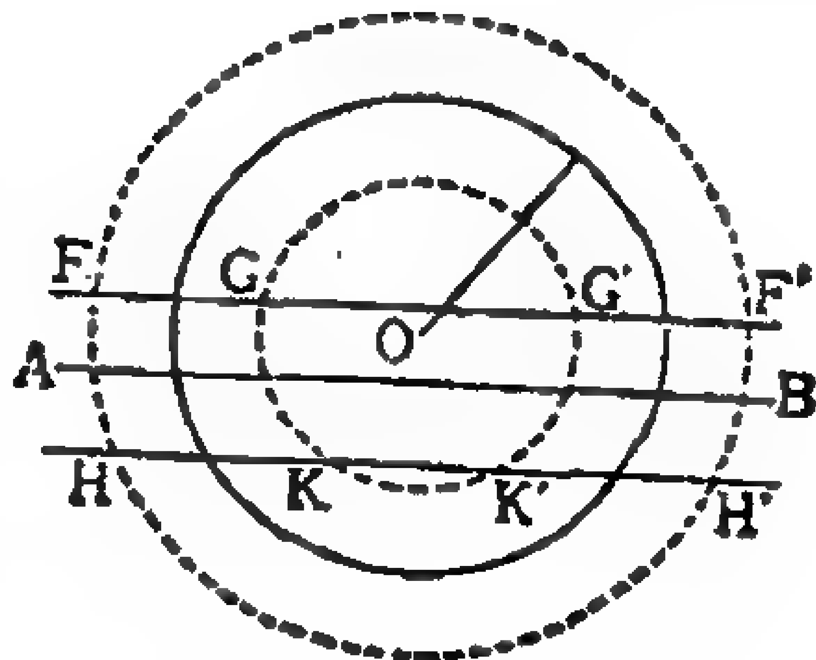
[证明]　以 O 为圆心、OC 为半径的圆，是与以 O 为圆心的两个同心圆相切的圆的圆心的轨迹，并且所求圆与同时切于这两个同心圆的圆，它的半径相等．又和圆 O' 相切的圆的圆心的轨迹是以 O' 为圆心、分别以 $O'E$、$O'F$ 为半径的两圆，因此这两个轨迹的交点 P、P'、Q、Q' 就是所求圆的圆心。分别以这些点为圆心、AC 为半径画圆，则这些圆就是和以 O 为圆心的两个同心圆及圆 O' 相切的圆。

因为解的个数和以上两种轨迹的交点的个数有关，所以最多有四个解。

4．作与定直线、定圆相切的圆

2644. 求作一圆使和已知圆、已知直线相切，且其半径等于定长 r。

解　[作图]　设圆 O 的半径为 R，以 O 为圆心，以 $R+r$、$R\sim r$ 为半径的两圆和距定直线 AB 的距离为 r、且与 AB 平行的两条直线的交点为 F、F'、G、G'、H、H'、K、K'，则以这些点为圆心，以 r 为半径的圆，就是所求的圆。

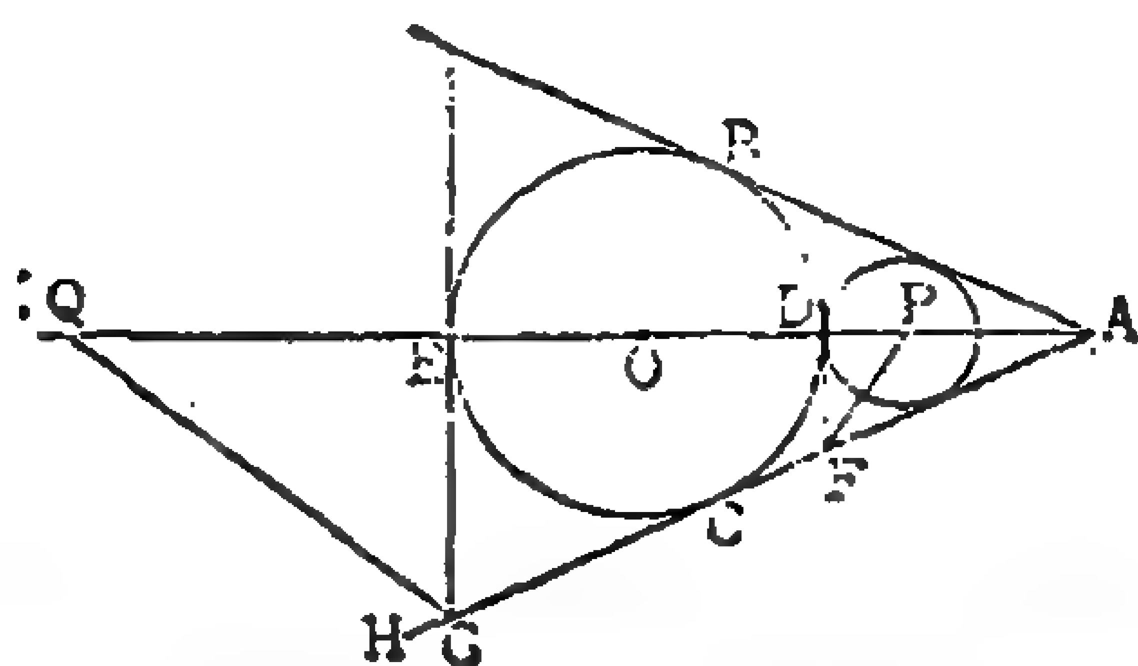


[证明]　以 O 为圆心，$R+r$、$R\sim r$ 为半径的圆是距圆 O 的距离等于 r 的点的轨迹．距直线 AB 的距离等于 r 的两条平行线是距 AB 的距离等于 r 的点的轨迹。所以上述八个点就是所求圆的圆心。

因为这两个轨迹交点的个数决定本题解的个数，所以本题的解不能超过八个。

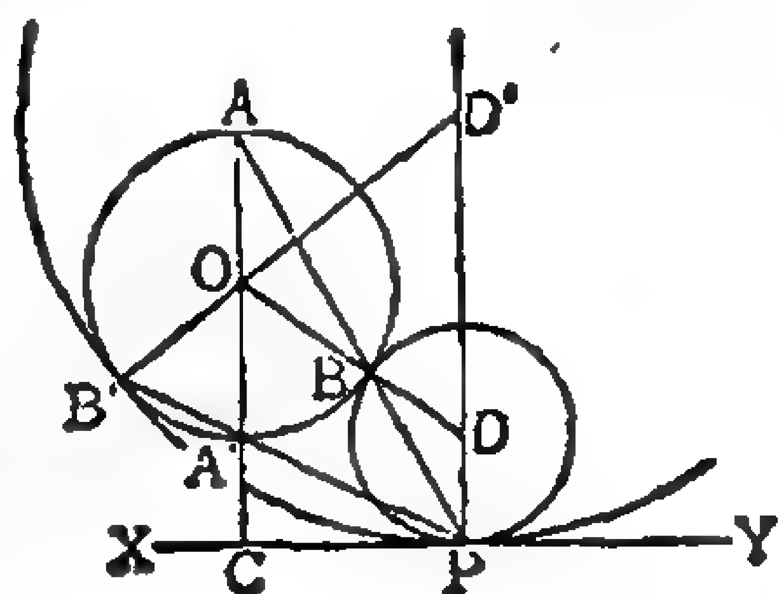
2645. 已知圆 O 和两直线 AB、AC 相切，求作一圆使和直线 AB、AC 及圆 O 相切。

解　连结 A O 的直线和圆 O 相交于 D、E。过 D、E 分别作圆 O 的切线，它们与直线 AC 的交点分别为 F、G。再作 $\angle AFD$ 的平分线和 AD 交于 P，则以 P 为圆心、PD 为半径的圆，就是所求的圆。其理由是：点 P 是 $\angle A$ 的平分线和 $\angle AFD$ 的平分线的交点，所以点 P 与 AB、FD、AF 等距离，从而圆 P 切于直线 AB、AC，且与已知圆 O 切于 D。



以 $\angle EGH$ 的平分线和 AO 的延长线的交点 Q 为圆心、QE 为半径的圆，也是所求的圆。即使以平行两直线 AB、AC 代替相交两直线 AB、AC，也容易知道它有相同的两个解。

2646. 求作在定直线 XY 上的定点 P 处与直线 XY 相切且和定圆 O 相切的圆。



解　从点 O 引定直线 XY 的垂线 OC，设这条垂线和圆 O 的交点分别为 A、A'，连结 AP，$A'P$，它们和圆 O 分别交于 B、B'。再过 P 引 XY 的垂线，它和 OB、$B'O$ 分别相交于 D、D'，则以 D、D' 为圆心、DP、$D'P$ 为半径分别画圆，就是所求的圆。其理由是：

$$DP \parallel AO,\ OA=OB.$$

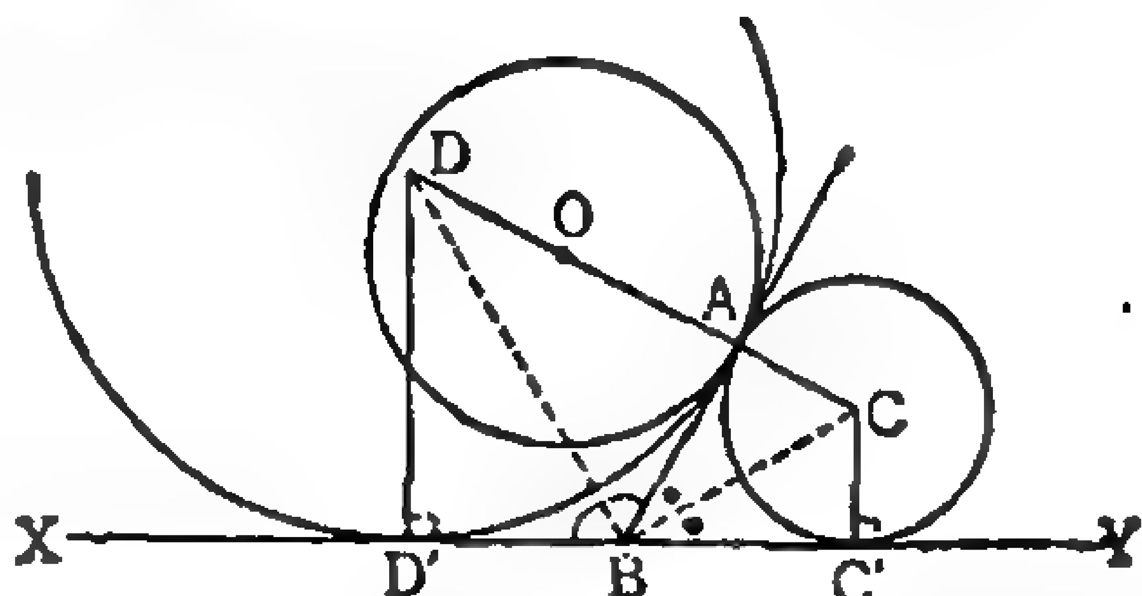
$$\therefore\ DB=DP.$$

故圆 D 必过点 P、B。因为 $DP\perp XY$，所以圆 D 和直线 XY 切于点 P。又因 OD 是两圆半径 OB、BD 之和，所以两圆在点 B 处相切。因此圆 D 就是所求的圆。

同样，圆 D' 和直线 XY 相切于点 P，和定圆 O 内切于 B'，圆 D' 也是所求的圆。本题一般有两个解。

2647. 求作和定圆 O 上的定点 A 处相切且和定直线 XY 相切的圆。

解　过点 A 引圆 O 的切线和定直线 XY 相交于 B。再作 $\angle ABY$ 和 $\angle ABX$ 的平分线和 OA 的延长线分别交于 C、D。以 C、D 为圆心，分别以 CA 和 DA 为半径画圆，这些圆就是所求的圆。



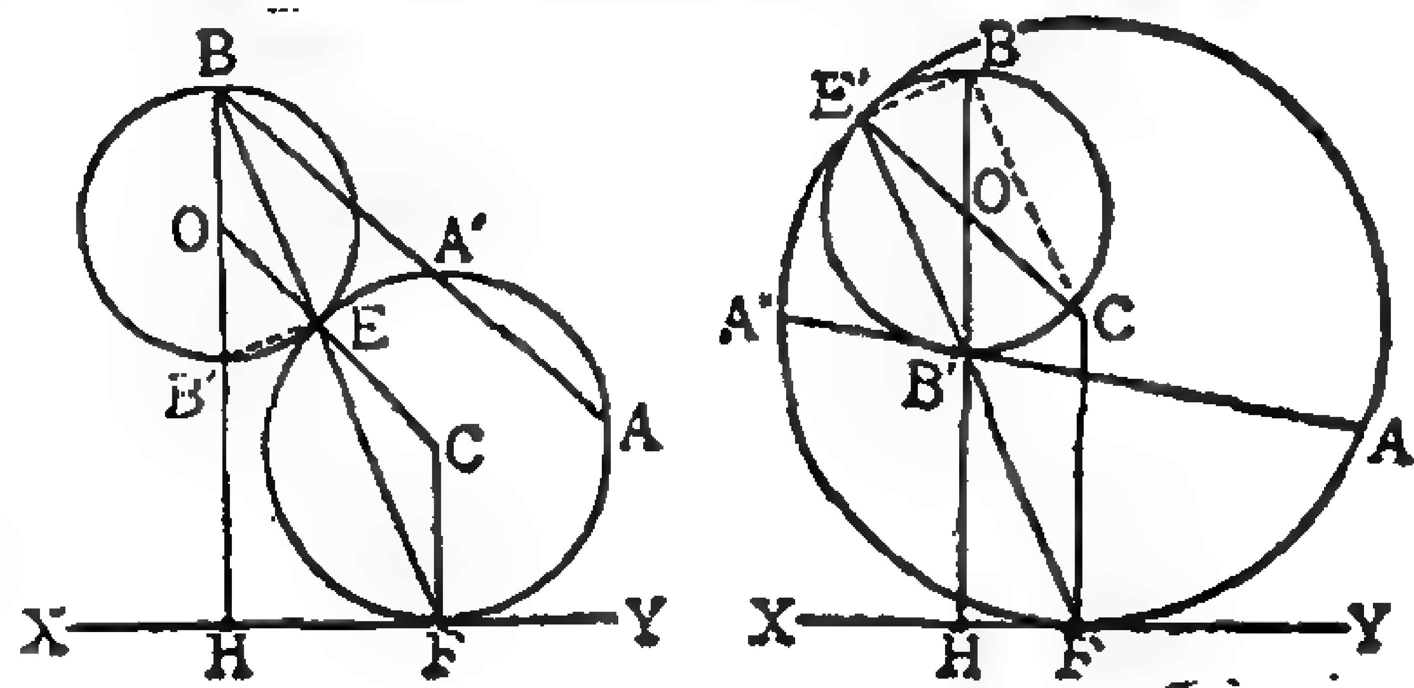
其理由是：从 C 引 XY 的垂线 CC'。因 AB 是定圆 O 的切线，$AB\perp OA$，所以两个直角三角形 ABC 和 $C'BC$ 全等。从而 $AC=CC'$，又 $CC'\perp XY$，故圆 C 和定直线 XY 切于点 C'。$CA\perp AB$，所以圆 C 也与 AB 相切，即 AB 为圆 O 与圆 C 的公切线，故这个圆在点 A 处相切。因此圆 C 就是适合已知条件的圆。同样，以 D 为圆心、DA 为半径的圆也与定圆 O 切于定点 A，且和定直线 XY 相切，所以圆 D 也是适合已知条件的圆。

当 AB 与 XY 相交时，有两解。当 AB 与 XY 平行时有一解，即以 AB 和 XY 的公垂线为直径的圆。

2648. 求作一圆，使该圆过定点 A 且和定圆 O、定直线 XY 相切。

解　假定所求圆已经作出，设其圆心为 C。从 O、C 分别引 XY 的垂线 OH、CF，OH 和圆 O 的交点为 B、B'。

(1) 当圆 C 和圆 O 外切时，其切点 E 为



BF 和 OC 的交点。(2) 当圆 C 和圆 O 内切时，其切点 E' 为 $B'F$ 和 OC 的交点。

在(1)的情形下，设连结 BA 的直线和圆 C 交于点 A'，则

$$BA\cdot B'A'=BF\cdot BE, \qquad ①$$

$\angle BEB'$ 和 $\angle BHF$ 都是直角，所以四边形 $EB'HF$ 为圆内接四边形。从而

$$BF\cdot BE=BH\cdot BB'. \qquad ②$$

由①、②　$BA\cdot BA'=BH\cdot BB'$.　③

在③中，BH、BB'、BA 都是定值，所以 BA' 也是定值，从而 A' 是定点。因此，本题可归结为求作过两定点 A、A' 且和定直线 XY 相切的圆的问题(问题 2618)。

在(2)的情形下，设连结 $B'A$ 的直线和圆 C 相交于 A''，则

$$B'A\cdot B'A''=B'F\cdot B'E'. \qquad ①'$$

这时 $\angle BE'B'(=\angle BE'F)$ 和 $\angle BHF$ 都是直角，所以 $BE'HF$ 为圆内接四边形。从而

$$B'F\cdot B'E'=B'H\cdot B'B. \qquad ②'$$

由①′、②′知

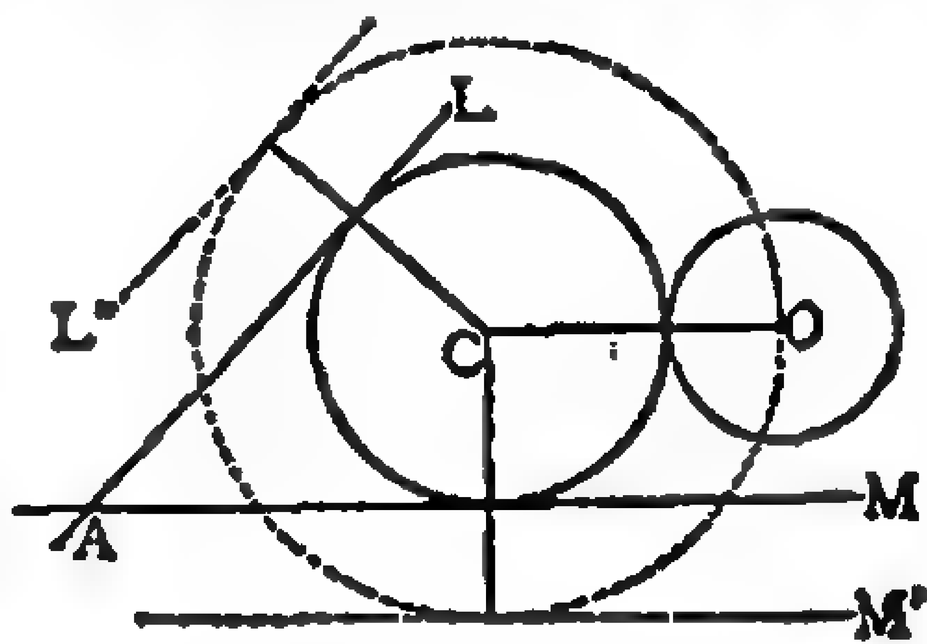
$$B'A\cdot B'A''=B'H\cdot B'B. \qquad ③'$$

在③′中，$B'H$、$B'B$、$B'A$ 都是定值，所以 $B'A''$ 也是定值，从而 A'' 为定点。因此，本题可以归结为求作过两定点 A、A'' 且和定直线 XY 相切的圆的问题(问题 2618)。

在(1)的情形下，如果点 A、A' 分别在直线 XY 的两侧，则无解；如果 $XY \parallel AA'$，则有一解；如果 AA' 的延长线和 XY 相交，则有两解。在(2)的情形下，也是一样，不过要以 A'' 代替 A' 罢了。因此，本题的解不超过四个。

2649. 求作切于两定直线 L、M 和定圆 O 的圆。

解　假定所求圆已经作出，设 C 为其圆心。以 C 为圆心、CO 为半径作圆。引平行于直线 L 且和这个圆相切的直线 L'，引平行于直线 M 且和这个圆相切的直线 M'，则直线 M 和 M'、L 和 L' 的距离都等于圆 O 的半径。因此得作法如下。

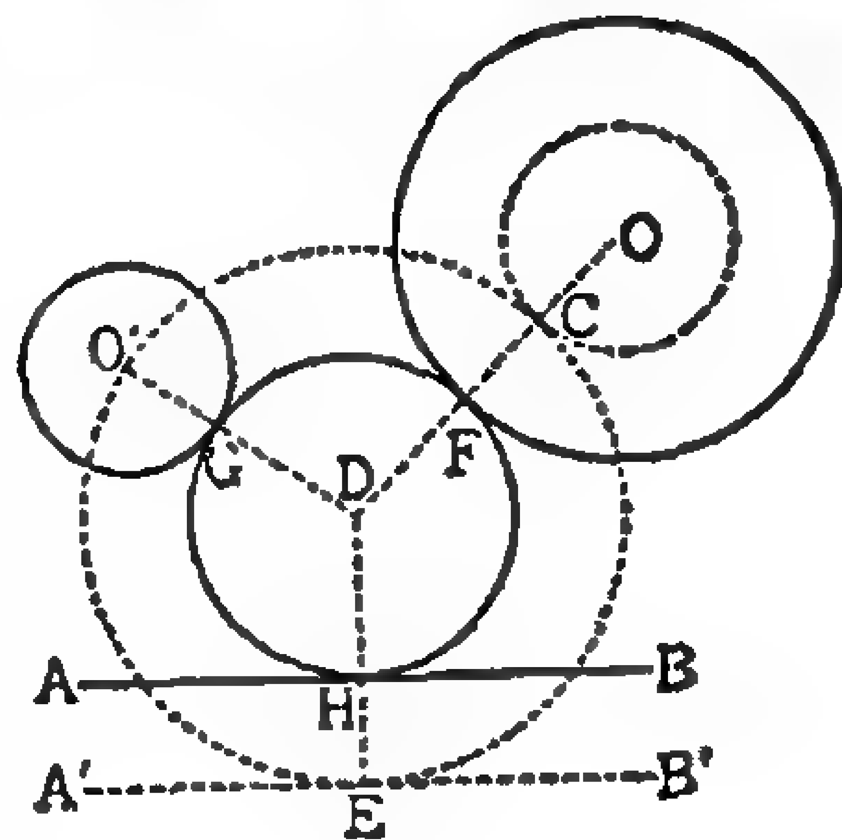


分别引平行于直线 L、M 且其间距离为定圆 O 的半径的两直线 L'、M'。作过定圆的圆心 O 且和两直线 L'、M' 相切的圆(问题 2619)，设其圆心为 C，则可作出以 C 为圆心且切于两定直线 L、M 和定圆 O 的圆。

注　分别与 L、M 平行的直线 L'、M'，可在 L、M 的两侧各作一条，且过一点 O 并切于两直线 L'、M' 的圆有两个，所以本题有四个解。如圆 O 和 L、M 相交时，L'、M' 的选择可有四组，所以可能得到八个解。

2650. 求作切于两个定圆 O、O' 和定直线 BA 的圆。

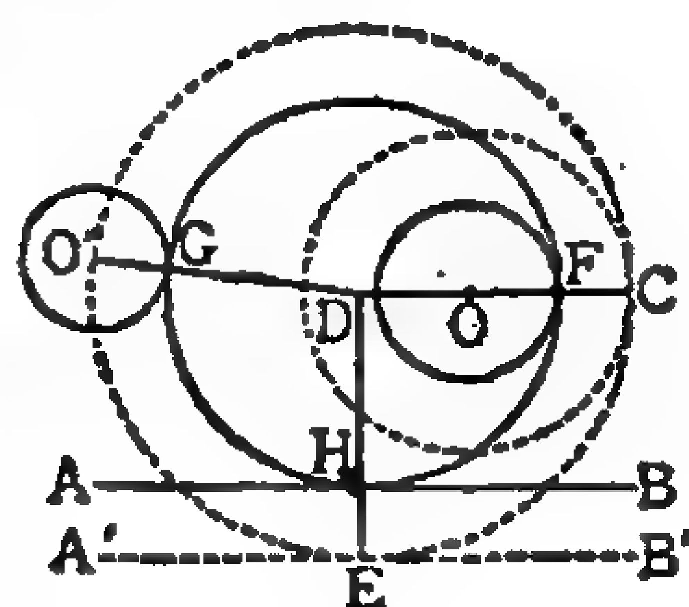
解　[分析]　假定所求圆已经作出，其圆心为 D，切定直线 BA 于 H，切两定圆 O、O' 于 F、G。以 D 为圆心作过点 O' 的圆和 FO 或其延长线相交于 C。设圆 O、O' 的半径分别为 r、r'，则 $CF=O'G=r'$。所以在图(1)中有 $OC=r-r'$，在图(2)中有 $OC=r+r'$。再作平行于 AB 且与以 D 为圆心、DO' 为半径的圆相切的直线 $A'B'$，设其切点为 E，则



(1)

$$HE=O'G=r'.$$

因此，可按如下方法作图。



(2)

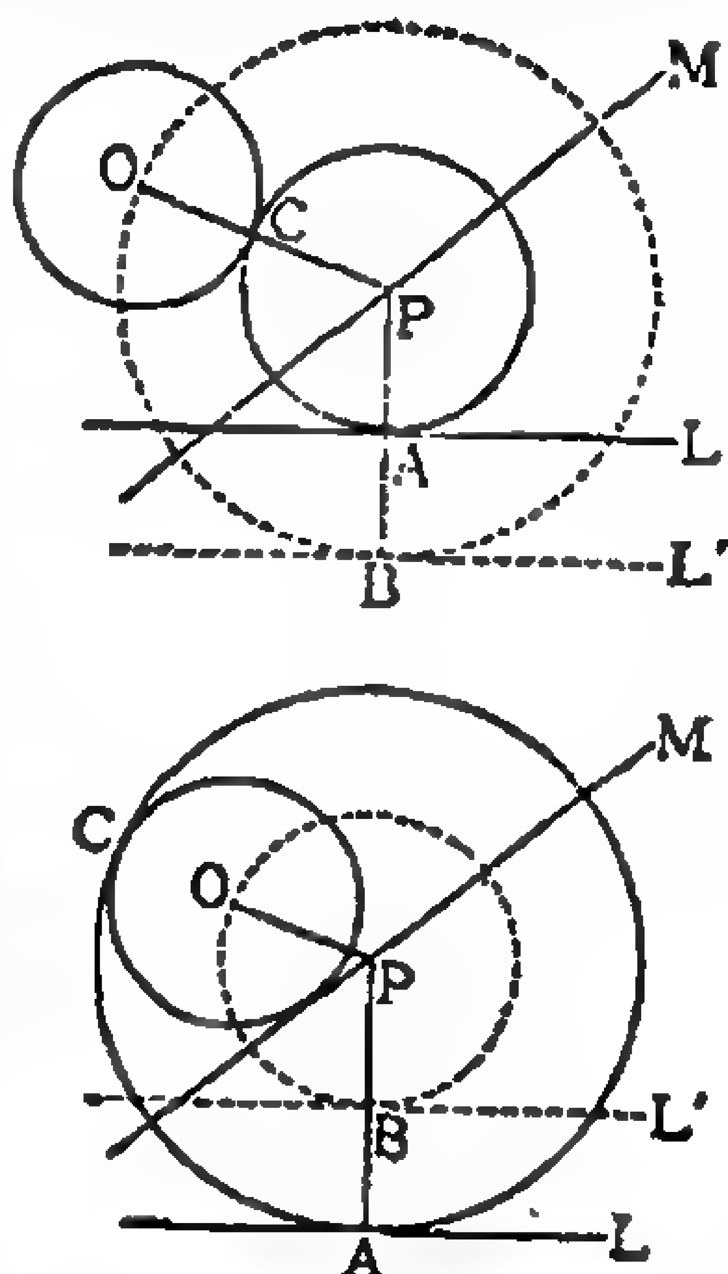
[作图]　以 O 为圆心，以 $r+r'$，$r-r'$ 为半径作圆。再作与 AB 的距离等于 r' 的平行线 $A'B'$。然后根据问题 2648 作圆，使它过定点 O' 与直线 $A'B'$ 相切且与以 O 为圆心、以 $r\pm r'$ 为半径的圆相切。设该圆的圆心为 D，再作以 D 为圆心且与定直线 AB 相切的圆，就是所求的圆。

注　一般地，本题有八个解。

2651. 求作一圆，使它和定直线 L 及定圆 O 相切，且圆心在另一条定直线 M 上。

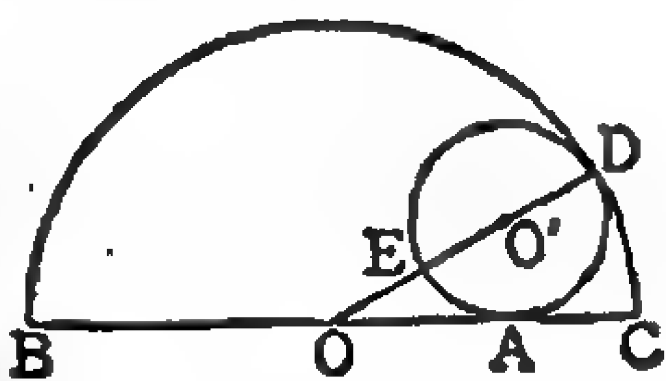
解　[分析]　假定所求圆已经作出，设其圆心为 P，和定直线 L 切于 A，和定圆 O 切于 C。在 PA 的延长线上取 $AB=CO$ 得点 B，从 B 引以 P 为圆心、PO 为半径的圆的

切线 L'，则 $L /\!/ L'$，而且这两条平行线间的距离等于定圆 O 的半径。因此可作图如下。



［作图］ 作定直线 L 的平行线并且使这两条平行线间的距离等于定圆 O 的半径（L' 在 L 的两侧各有一条），根据问题 **2609**，作圆心在直线 M 上、过定圆的圆心 O 且与定直线 L' 相切的圆，设其圆心为 P，再作以 P 为圆心且和定直线 L 相切的圆，则这圆 P 就是所求的圆。本题一般有四个解。

2652． 求作圆 O'，使它相切于定圆 O 的直径 BC 上的定点 A，而且和圆 O 相切。



解 设圆 O' 为所求的圆，OO' 和圆 O' 的交点为 E、D，圆 O' 和圆 O 的切点为 D，则 $OA^2=OE\cdot OD$。其中 OA、OD 是定长，由此可确定 OE。从而圆 O' 的半径为 $\frac{1}{2}(OD-OE)$。于是圆 O' 即可作出。

2653． 求作一圆，使它内切于半圆 ABC，并且与直径 AB 及它的垂线 CD 相切。

解 设圆 O 为所求的圆，它和 AB、CD 及半圆 ABC 的切点分别为 E、F、G，则 B、F、G 在同一直线上，所以

$$BE^2=BF\cdot BG.$$

因为 $ADFG$ 为圆的内接四边形，所以

$$BF\cdot BG=BD\cdot BA.$$

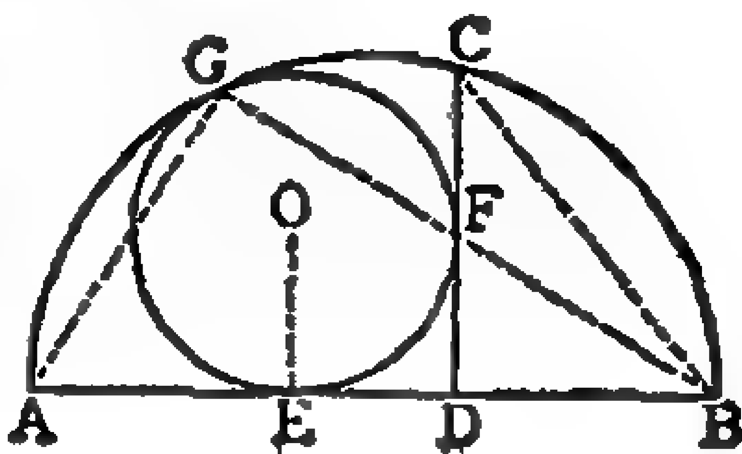
又 $$BD\cdot BA=BC^2,$$

$$\therefore\quad BE=BC.$$

又 $$OE=DE,$$

$$OE\perp DE.$$

故 E 为定点，OE 是定长，从而 O 是定点。因此可作图如下。



［作图］ 在 BA 上取 $BE=BC$，得到点 E。过 E 作 AB 的垂线，在其上取点 O 使 $OE=ED$，则以 O 为圆心、OE 为半径的圆，就是所求的圆。

其理由是：由作法知圆 O 与直径 AB 相切于点 E，设圆 O 和 CD 的切点为 F，BF 的延长线和圆 O 的交点为 G，则

$$BE^2=BF\cdot BG,\ BE=BC,$$

$$\therefore\quad BC^2=BF\cdot BG.$$

又 $$BC^2=BD\cdot BA,$$

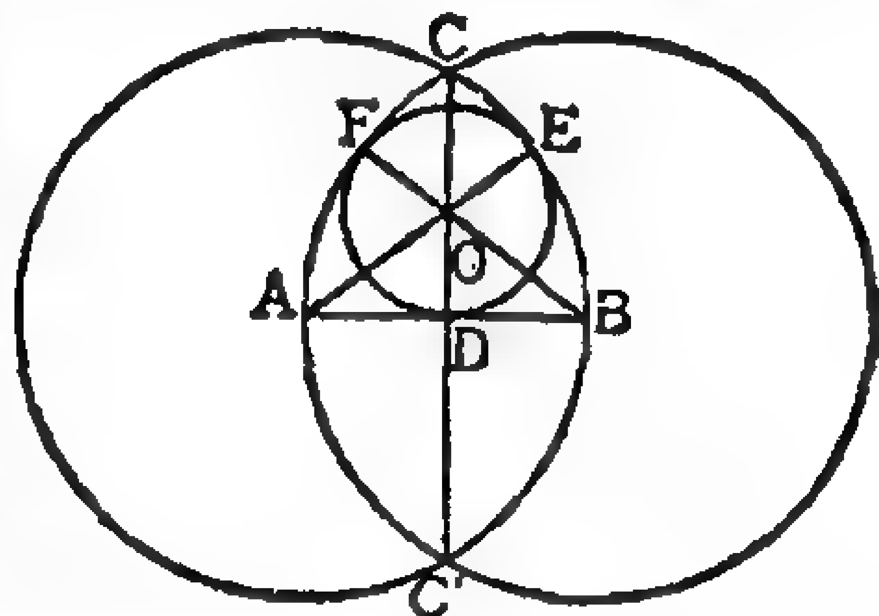
$$\therefore\quad BF\cdot BG=BD\cdot BA.$$

故四边形 $ADFG$ 为圆内接四边形。从而

$$\angle AGB=\angle ADF=\angle R.$$

所以 G 为弧 ACB 上的点，而且 G 和直径的一端 B、垂线 CD 和圆 O 的切点 F 在同一直线上，因此 G 是圆 O 和圆弧 ACB 的切点。这样，圆 O 就是适合条件的圆。

2654． 已知 A、B 是两个等圆的圆心（A 在圆 B 上，B 在圆 A 上），C 是这两个圆的交点，求作与直线 AB 和两条弧 AC、BC 相切的圆。



解 ［分析］ 假定所求圆已经作出，设其圆心为 O。在圆 A、B 内分别引半径 AOE、BOF，则

$$AE=BF,\ OE=OF.$$

所以 $$AO=BO.$$

故 O 在线段 AB 的垂直平分线 CC' 上。再设线段 AB 的中点即圆 O 和 AB 的切点为 D，则 $OD=OE$，所以在 $\triangle ADO$ 中，AD 是确定的，$AO+OD=AE$，$\angle ADO$ 是直角。因此可作图如下。

［作图］ 设两圆的连心线 AB 和该两圆的公共弦的交点为 D，在 CD 上取点 O 使 $AO+OD=r$（r 是等圆的半径）（参照下面的注），则以 O 为圆心、OD 为半径的圆就是所求的圆。

别解 等分线段 AB 得中点 D，在 DC 上取点 O 使 $DO=\frac{3}{8}AB$，则点 O 就是所求圆的圆心。其理由是：

$$AD=\frac{1}{2}AB,\ OD=\frac{3}{8}AB,$$

$$\therefore\quad AO=\sqrt{AD^2+DO^2}=\frac{5}{8}AB.$$

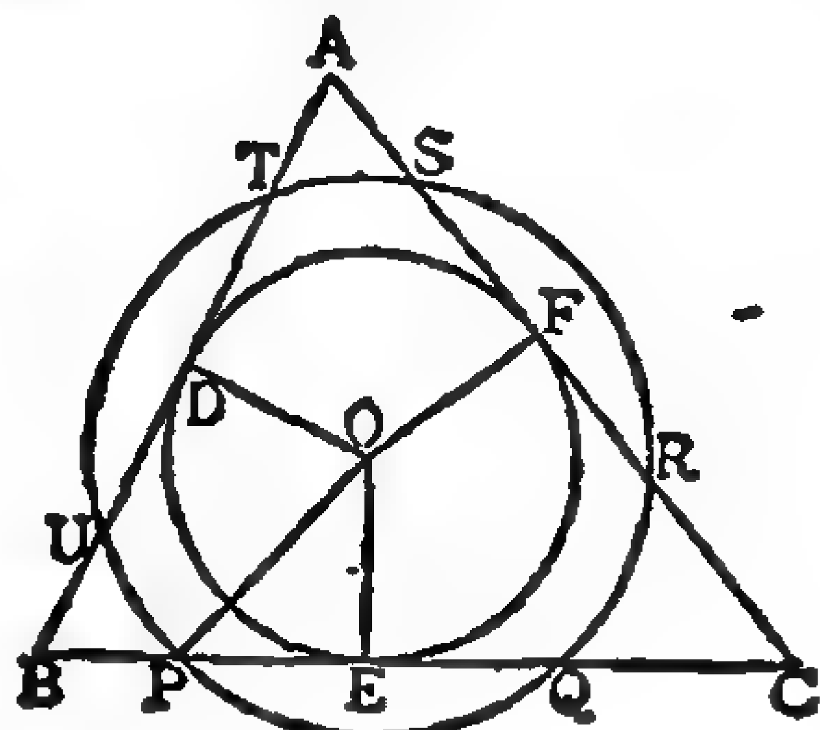
从而　　$OE=\frac{3}{8}AB=OD.$

以下从略。

注　在上面的作图中，设 $AO+OD=r$，在 DC 上取 $DP=r$，然后作 AP 的垂直平分线，它和 CD 的交点就是所求的点 O。

5. 作在定直线（或圆）上截取定长线段（或弧）的圆

2655. 求作一圆，使它在已知 $\triangle ABC$ 的各边上分别截取定长m的线段。



解　设所求圆的圆心为 O，和边 BC、CA、AB 的交点分别为 P、Q，R、S，T、U，且

$$PQ=RS=TU=m,$$

则 O 距三边 AB、BC、CA 的距离相等。过 O 作三边的垂线分别为 OE、OF、OD，就有

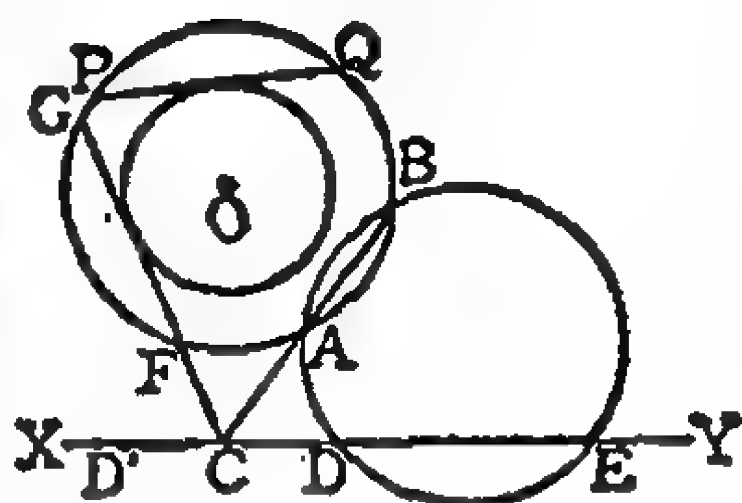
$$OE=OF=OD,$$

因此 O 为 $\triangle ABC$ 的内心。故可作图如下。

首先求 $\triangle ABC$ 的内心 O，再从 O 引边 BC 的垂线 OE，在 BC 上求点 P 使 $PE=\frac{1}{2}m$，则以 O 为圆心、OP 为半径的圆，就是所求的圆。

2656. 已知在定直线 XY 的同侧有两个定点 A、B，求作一圆，使它过两定点且在定直线 XY 上截取定长 l 的弦。

解　过两定点 A、B 作一个直径比定长 l 大的圆 O，在圆 O 内引等于定长的任意弦 PQ。再作以 O 为圆心且和 PQ 相切的同心圆，然后从 BA 和 XY 的交点 C 引这个圆的切线 CFG，这条切线就是原来的圆 O 的割线。最后在 XY 上取两个点 D、D'，使



$$CD=CD'=CF.$$

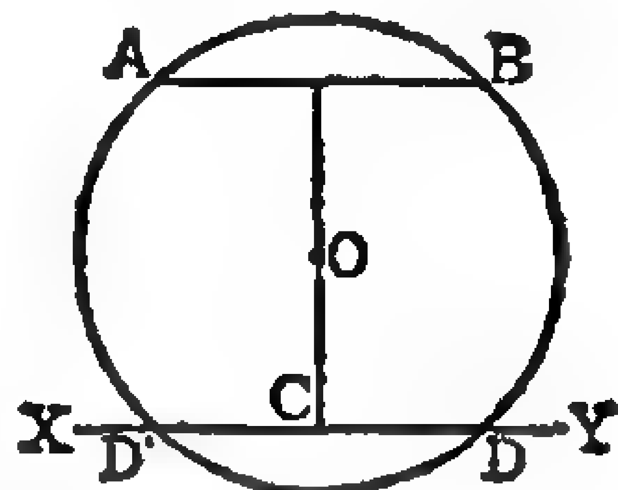
则过三点 A、B、D 的圆和过三个点 A、B、D' 的圆就是所求的圆。其理由是：设过 A、B、D 的圆和 XY 的另一交点为 E，则

$$CD\cdot CE=CA\cdot CB=CF\cdot CG.$$

根据作图，$CD=CF$，$\therefore CE=CG$。

从而　　$DE=FG=PQ=l$，

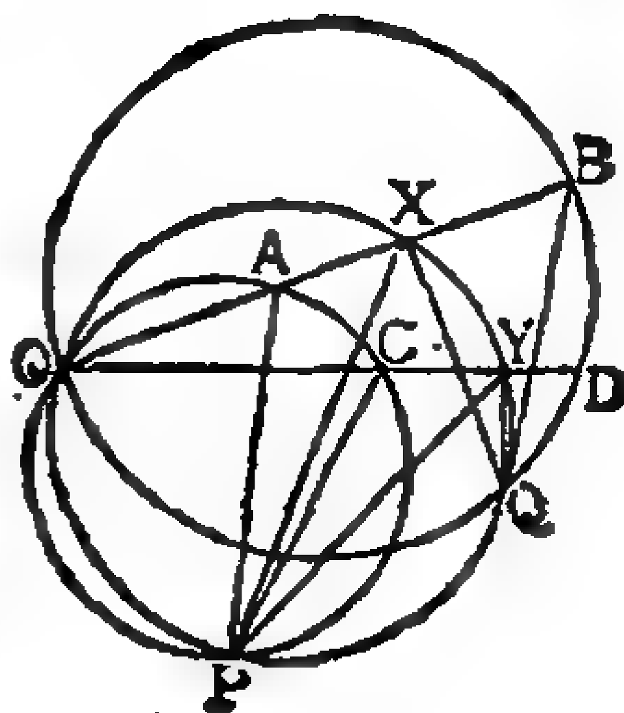
故过 A、B、D 的圆适合条件。同样，过三点 A、B、D' 的圆也适合条件。因此，本题一般有两解。



当 $AB\parallel XY$ 时，设线段 AB 的垂直平分线和 XY 相交于 C，在 XY 上取 $CD=\frac{1}{2}l$，则过 A、B、D 的圆 O 就是所求的圆。其理由是：如果 XY 割圆 ABD 的另一点为 D'，则

$$CD=CD',\quad \therefore\quad DD'=2CD=l.$$

2657. 过两定线段 AB、CD 的延长线的交点 O 作一个圆和 AB 割于点 X，和 CD 割于 Y，使 $AX:CY$，$XB:YD$ 分别等于给定的比。



解　假定所求圆 OXY 已经作出，它和圆 OAC 的交点为 P，则在 $\triangle APX$ 和 $\triangle CPY$ 中，

$$\angle OXP=\angle OYP,$$

$$\angle OAP=\angle OCP,$$

$$\therefore\quad \angle XAP=\angle YCP.$$

于是　　$\triangle APX\backsim\triangle CPY$，

因而　　$PA:PC=AX:CY$（一定）。

根据阿波罗尼斯定理，点 P 是在圆 OAC 上，且使 $PA:PC$ 等于给定比，所以点 P 的位置可以确定。再作 $\triangle OBD$ 的外接圆，设它和圆 OXY 的交点为 Q，则和上面一样可知

$$\triangle QXB\backsim\triangle QYD,$$

$$QB:QD=BX:DY\ （一定）。$$

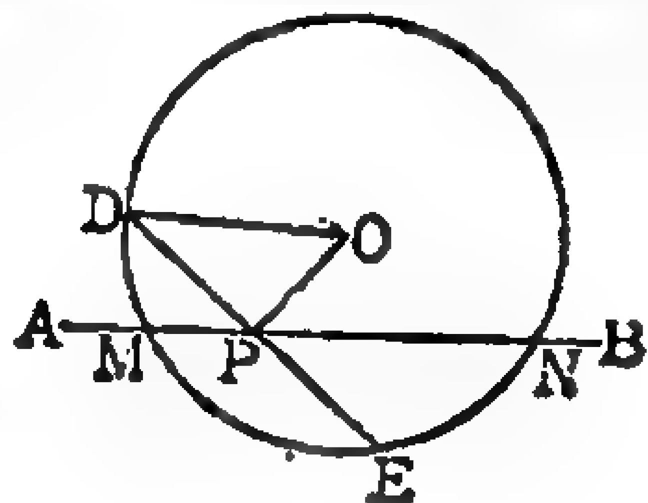
因此，点 Q 在 $\triangle OBD$ 的外接圆上，且使 $QB:QD$ 等于给定比，从而点 Q 的位置也可以确定。

综上所述，所求圆 OXY 过三点 O、P、Q. 所以首先确定 P、Q 两点的位置，然后过三点 O、P、Q 作圆，就是所求的圆。

2658. 已知定直线 AB 上的一点 P 和该直线外的一点 O，求以定点 O 为圆心作圆和 AB 相交于 M、N，且使 $PM\cdot PN=l^2$ (其中 l 为定值)。

解 (i) P 在线段 MN 上。

过点 P 作 OP 的垂线，在这条垂线上取点 D 使 $PD=l$。再以 O 为圆心、OD 为半径画圆和 AB 相交于 M、N，则圆 O 就是所求的圆。其理由是：设 DP 的延长线和这个圆相交于点 E，则 $DP=PE=l$。



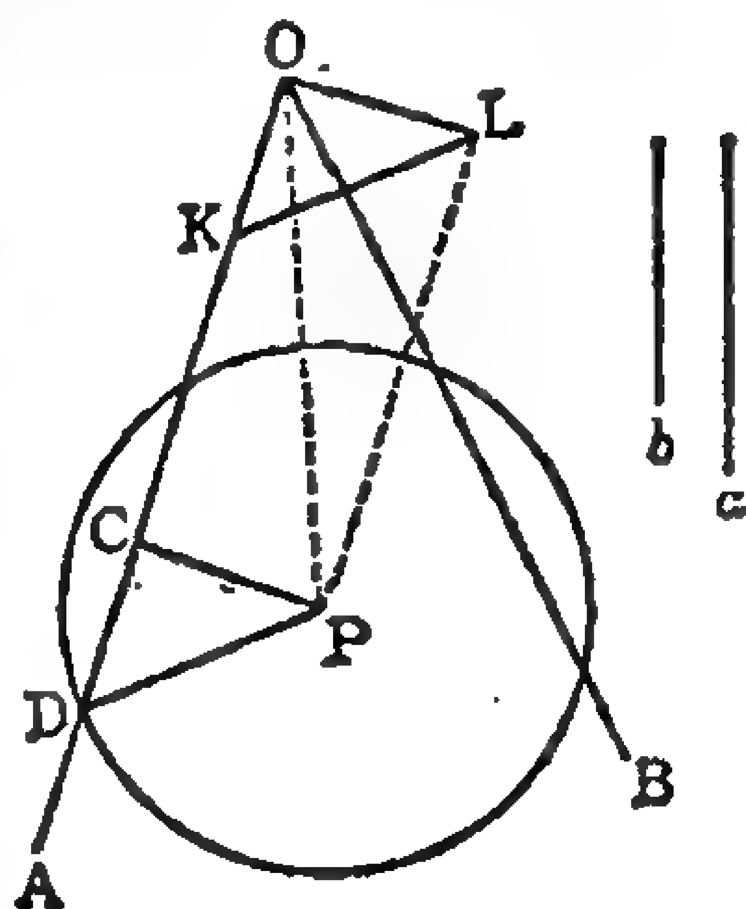
(1)

又 $PM\cdot PN=DP\cdot PE=DP^2=l^2$,

$\therefore\quad PM\cdot PN=l^2$。

(ii) P 在线段 MN 的延长线上。

设以 P 为圆心、l 为半径的圆和以 OP 为直径的圆的交点为 D，再以 O 为圆心、OD 为半径作圆和 AB 相交于 M、N，则圆 DMN 就是所求的圆。其理由是：$\angle PDO=\angle R$，所以 PD 与圆 O 相切于 D，从而 $PD^2=PM\cdot PN$。根据作图 $PD=l$，所以



(2)

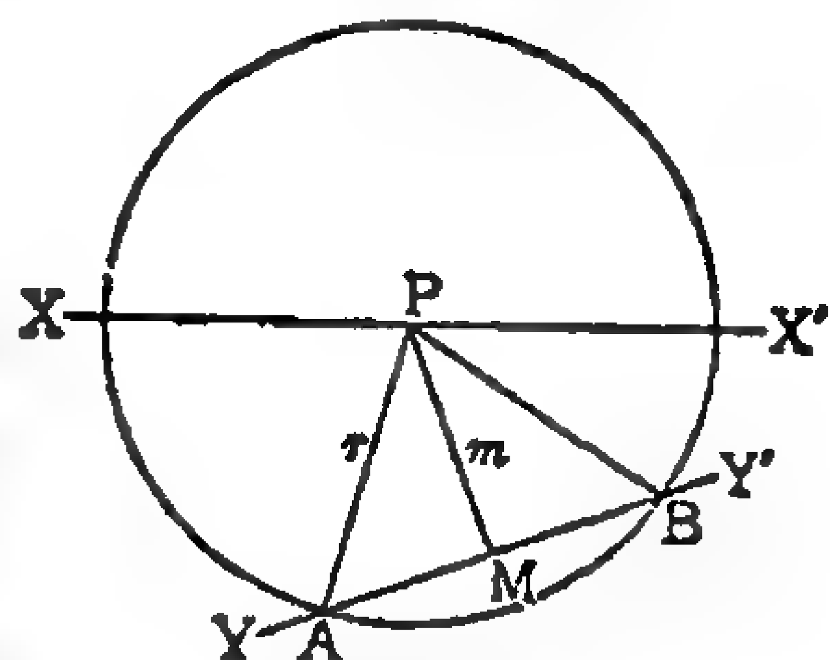
$$PM\cdot PN=l^2.$$

因此圆 DMN 适合条件。

从 O 向 AB 引垂线 OF，其垂足为 F，则当 $l>PF$ 时本题无解。

2659. 已知两直线 OA、OB 相交于点 O，求作一圆，使它的半径等于定长 b 且在 OA、OB 上截取的弦等于定长 a。

解 在 OA 上取点 K，使 $OK=\frac{1}{2}a$。从 O 引 OA 的垂线 OL，取 $KL=b$。过点 L 引 OA 的平行线和 $\angle AOB$ 的平分线相交于 P，则以 P 为圆心、b 为半径的圆就是所求的圆。其理由是：如图，在圆 P 中，$PC\perp OA$，引半径 PD，则



$$\triangle PCD\cong\triangle LOK,$$

$$\therefore\quad PD=LK=b,$$

$$2CD=2OK=a.$$

又因点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上，它和两边 OA、OB 的距离相等，所以圆 P 在 OA、OB 上截取的弦相等。

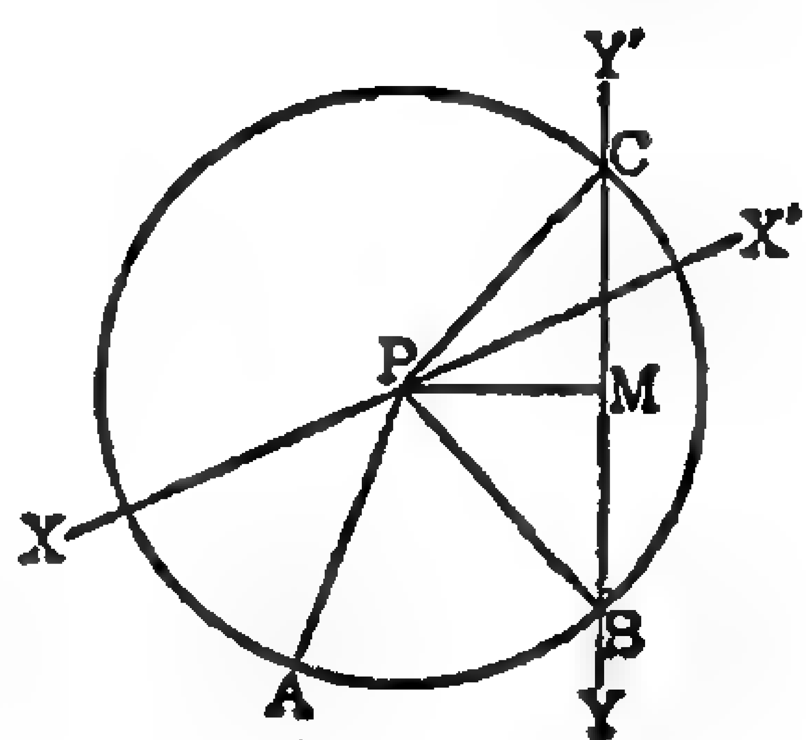
2660. 求作一圆，使它的圆心 P 在定直线 XX' 上，半径等于定长 r，和另一直线 YY' 相交于 A、B 且 $\angle APB=\alpha$ (α 为定角)。

解 假定所求圆已经作出，P 为其圆心。从 P 引 YY' 的垂线 PM，则在直角三角形 PAM 中，

$$PA=r,\ \angle APM=\frac{1}{2}\alpha,\ \angle PMA=\angle R.$$

因此在 $\triangle PAM$ 中，可知 PM 为定长，设它为 m。于是可按以下方法作图。

作与定直线 YY' 平行且与 YY' 的距离等于 m 的两条平行线，它和定直线 XX' 的交点为 P (一般有两个交点)，则以 P 为圆心、r 为半径的圆就是所求的圆。



2661. 求作圆 P，使它过定点 A，圆心 P 在已知直线 XX' 上，在已知直线 YY' 上所截取的弦所对的圆心角等于已知角 α。

解 假定所求圆已经作出，设 P 为其圆心，和 YY' 的交点为 B、C，$\angle BPC$ 等于已知角 α，则

$$\angle PBC=\frac{1}{2}(2\angle R-\alpha)=\angle R-\frac{1}{2}\alpha$$

(一定)。

所以如从 P 引 YY' 的垂线 PM，则 $\triangle PMB$ 的形状一定，$PB:PM$ 是一定的。又 $PA=PB$，从而 $PA:PM$ 一定。因此，本题可归结为在 XX' 上

求一点 P，使 PA 和 PM 的比一定。根据问题 **1941**，就可确定点 P 的位置。

2662. 求作两圆 O、O'，使它们的半径分别为定长 R 和 r，圆 O 在定直线 L 上截取的弦等于定长 l，而圆 O' 在定直线 M 上截取的弦等于定长 m，且两圆相切其公切线的方向一定。

解　假定所求的圆 O、O' 已经作出，如图。

从 O 引弦 AB 的垂线 OE，则

$$OA=R,\quad AE=\frac{1}{2}l.$$

所以在直角三角形 OAE 中，OE 可以确定，从而点 O 在与定直线 L 的距离等于 OE 的一组平行线 X、X' 上。同样，O' 在与定直线 M 的距离为定值的一组平行线 Y、Y' 上。又 $OO'=R+r$，OO' 与公切线 N 垂直，所以 OO' 也是确定的。因此可作图如下。

先引两端分别在 X、Y 上，长度为 $R+r$，与 N 垂直的线段 OO'，则以 O、O' 为圆心，分别以 R、r 为半径的圆就是所求的圆。

［讨论］　线段 OO' 可作在两定直线 X、Y 交点的两侧，所以关于 X、Y 有两个解。如取 X、Y'，X'、Y，X'、Y'，同样可作出适合条件的圆，故一般有八个解。

如果圆 O、O' 内切，则 $OO'=R-r$，同样有八个解。所以本题有 16 个解。

2663. 求作一圆，使它过两定点 A、B，在定直线 XY 上截取弦 MN，且 $AB\cdot MN=m^2$（其中 m 为定值）。

解　假定适合条件的圆 $ABNM$ 已经作出。设 AB 和 XY 的交点为 D，$AB\cdot MN=m^2$，A、B、N、M 为共圆点，则

$$DM\cdot DN=DA\cdot DB,\qquad ①$$

$$DM-DN=MN.\qquad ②$$

在 $AB\cdot MN=m^2$ 中，AB 为定长，m 为已知正方形的一边，所以 MN 的长度一定，用 l 表示 MN，则本题可归结为，求作过两定点 A、B，且在定直线 XY 上截取定长弦的圆。根据问题 **2656**，可以作出。

注　如果直线 XY 和线段 AB 相交，则 D 在 M 和 N 之间，所以上面的 ② 应为

$$DM+DN=l.$$

这时，可根据问题 **2656** 求 M，N。

2664. 求作一圆，使它通过两定点 P、Q，且把定圆 O 的圆周分成两部分的比为 1:2。

解　设圆 $PQCD$ 为所求的圆，则 D、C 把定圆 O 的圆周分成 1:2，所以圆心角 $COD=120°$，从而 DC 的长为定长。因此，本题可归结为：求作过两定点 P、Q，且在定圆 O 上截取定长弦的圆（问题 **2673**）。

2665. 求作一圆，使它过两定点 A、B，且和定圆的公共弦平行于定直线 l。

解　［作图］　过 O 引 l 的垂线 OE，设 OE 或其延长线和线段 AB 的垂直平分线 FO' 相交于 O'，则以 O' 为圆心、$O'A$ 为半径的圆就是所求的圆。

［证明］　FO' 是线段 AB 的垂直平分线，$AO'=BO'$，所以圆 O' 过两定点 A、B。又 OO' 是两圆的连心线，垂直于公共弦 CD，而 $OE\perp l$，所以 CD 平行于定直线 l。因此圆 O' 是适合条件的圆。

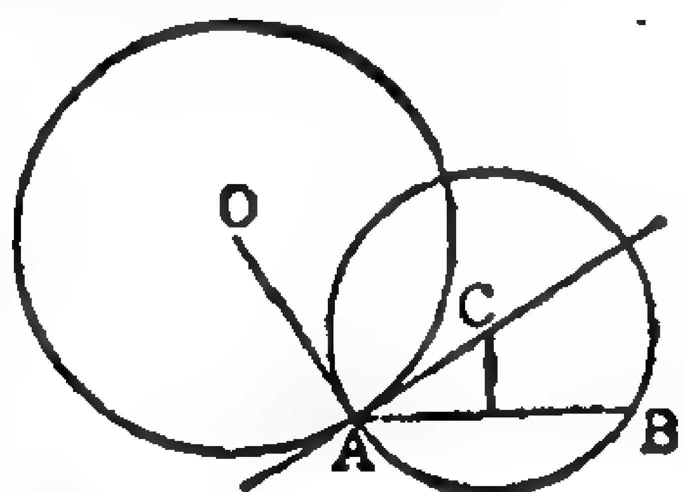
2666. 求作一圆，使它过定点 B 并和以 O 为圆心的定圆 O 在定点 A 处直交。

注　两圆直交，就是两圆在其交点处的切线的夹角为直角。

解　［作图］　设定圆 O 在点 A 处的切线和线段 AB 的垂直平分线相交于 C，则以 C

为圆心、CA为半径的圆就是所求的圆。

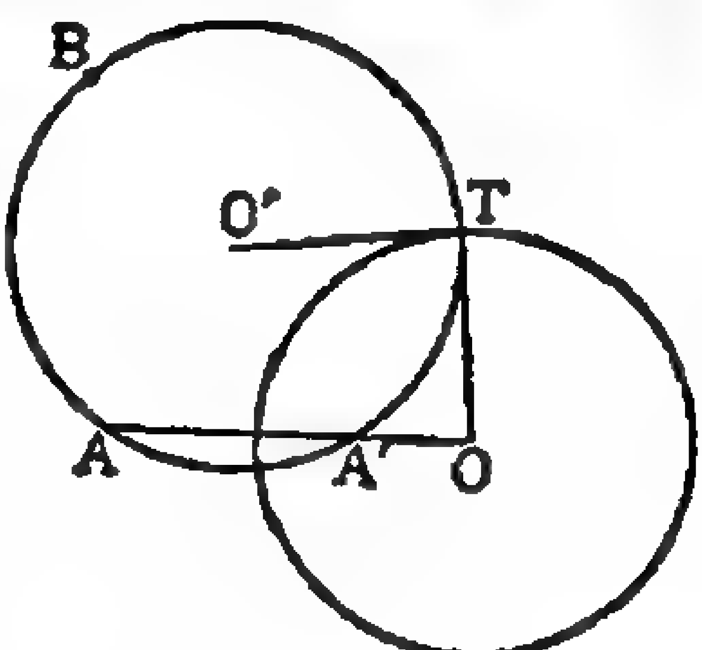
［证明］ 点C在过圆O点A的切线上，所以圆C和圆O直交。又点C在AB的垂直平分线上，它和A、B的距离相等，所以圆C通过B。因此，圆C就是适合条件的圆。



2667. 求作过两定点A、B，且和定圆O直交的圆。

解 ［分析］ 假定过两定点A、B，且和定圆O直交的圆已经作出，设O'为其圆心。连结OA的直线和圆O'交于A'，因圆O和圆O'直交，设其交点为T，则OT和圆O'相切(因$OT\perp O'T$)

$\therefore\ OA\cdot OA'=OT^2=r^2$。

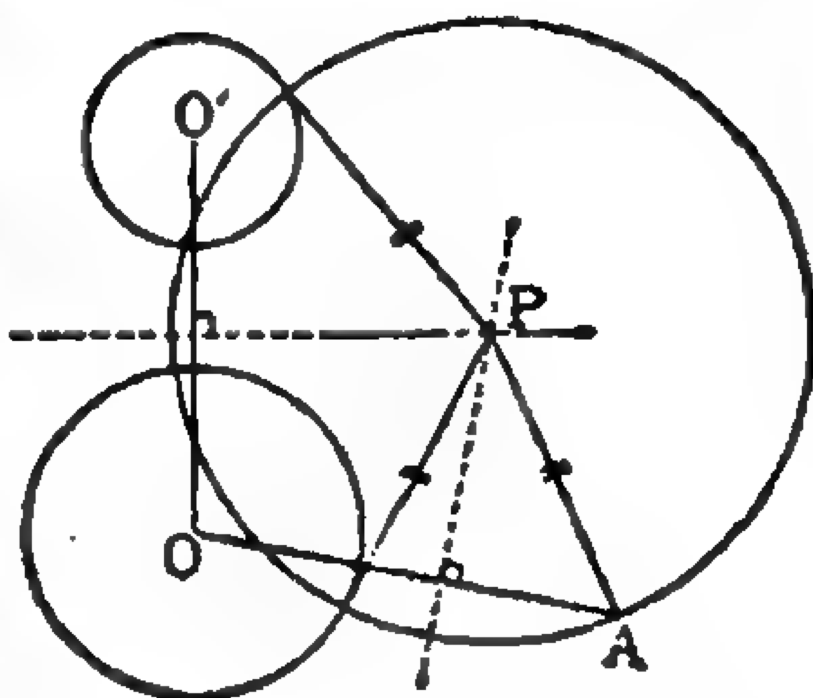


从而知道A'是定点，故过A、A'、B三点的圆就是所求的圆。故可按以下方法作图。

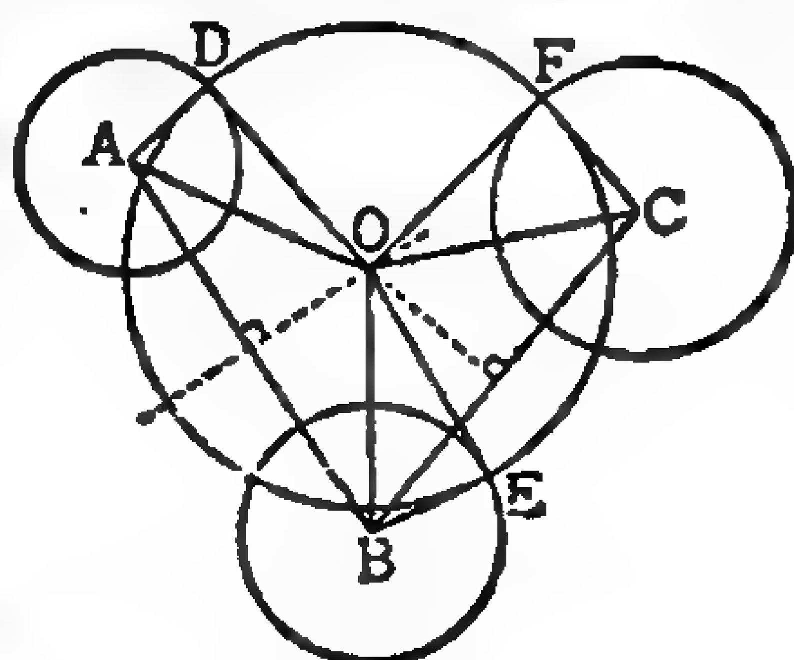
［作图］ 设定圆O的半径为r，在OA上确定点A'，使$OA\cdot OA'=r^2$，则过A、B、A'三点的圆就是所求的圆。

2668. 求作过定点A且和两定圆O、O'分别直交的圆P。

解 设P为所求圆的圆心，因圆P和两圆O、O'直交，所以点P在问题**1835**的轨迹上。又点P到A的距离等于从点P向圆O所引切线的长，所以点P也在问题**1836**的轨迹上。因此点P可由这两个轨迹的交点所确定。



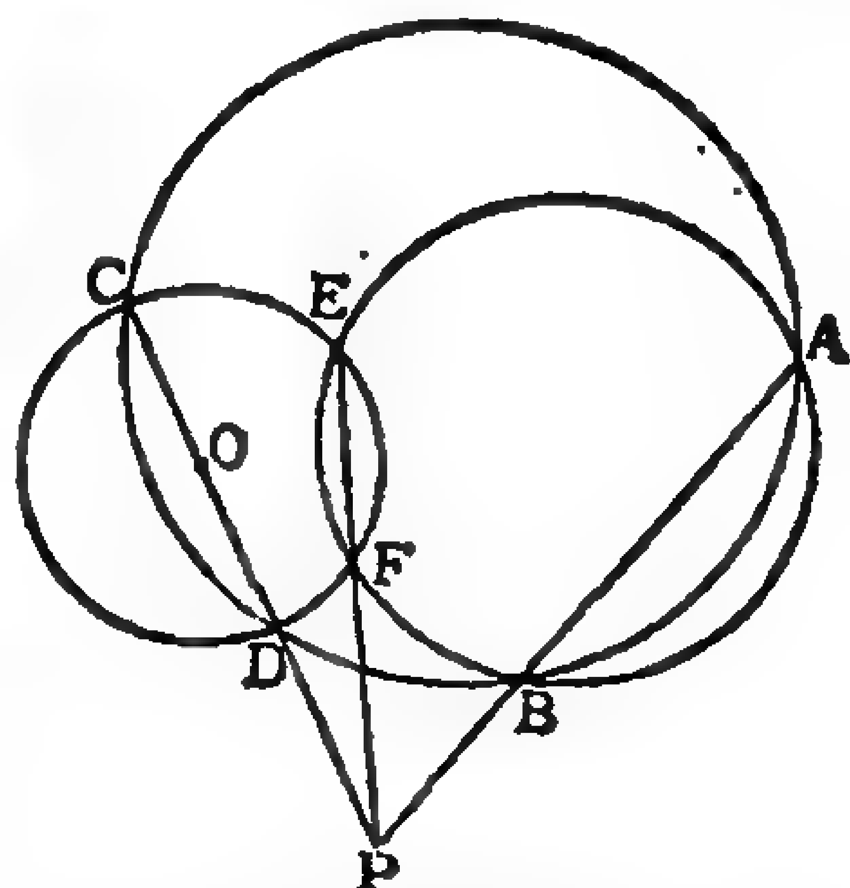
2669. 求作与已知三圆A、B、C分别直交的圆。



解 设O为所求圆的圆心，根据问题**1835**可知O在两圆A、B的根轴上，也在两圆B、C的根轴上。所以由这两个轨迹的交点，就可确定圆心。

注 本题也可写成"求作一圆，使从三定点A、B、C向该圆所引切线的长分别为a、b、c。其中a、b、c分别是圆A、B、C的半径。

2670. 求作一圆，使它过两定点A、B，和定圆O相交于C、D，且CD恰为定圆O的直径。



解 ［作图］ 作过两定点A、B，且和定圆O相交的任意一圆，设其交点为E、F。设AB和EF的交点为P，过P引圆O的直径CD，则过四点A、B、C、D的圆就是所求的圆。

［证明］ 因为四点A、B、F、E共圆，所以

$$PA\cdot PB=PE\cdot PF。\quad ①$$

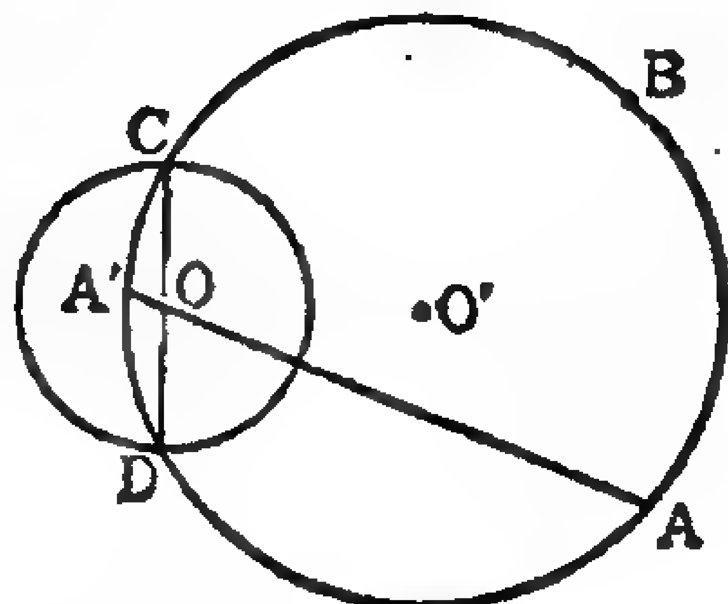
又在圆O中，

$$PE\cdot PF=PC\cdot PD。\quad ②$$

由①、②知 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，

故四点A、B、C、D共圆，且CD是圆O的直径。因此这个圆就是所求的圆。

别解 设O'为所求圆的圆心，延长AO和圆O的交点为A'，则四点A、D、A'、C共圆，所以

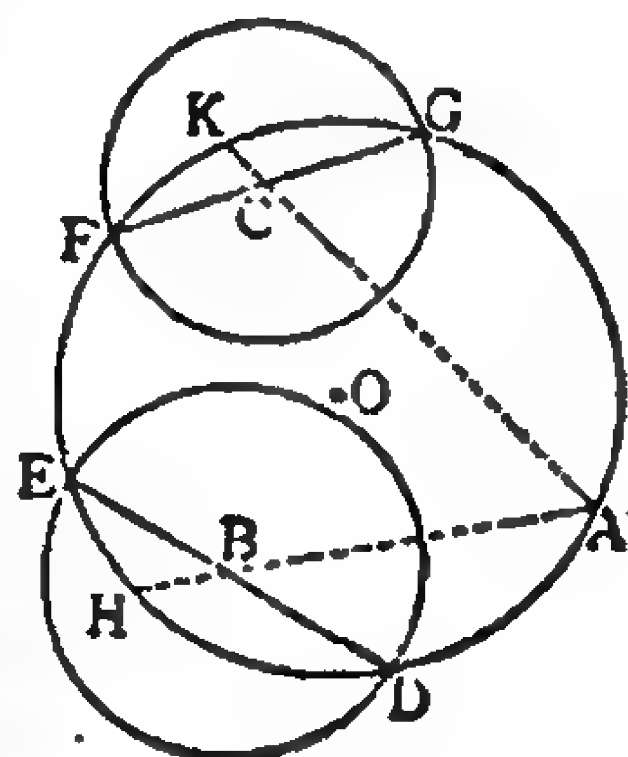


$$AO\cdot OA'=OD\cdot OC=r^2,$$

其中r是圆O的半径。因为A、O是定点，r是定长，所以A'是定点。因此过三点A、A'、B的圆就是所求的圆。

2671. 求作通过定点A且把两定圆B、C二等分的圆。

解 假定所求的圆已经作出，设其圆心为O。设AB的延长线和圆O的交点为H，则和上题的别解一样有

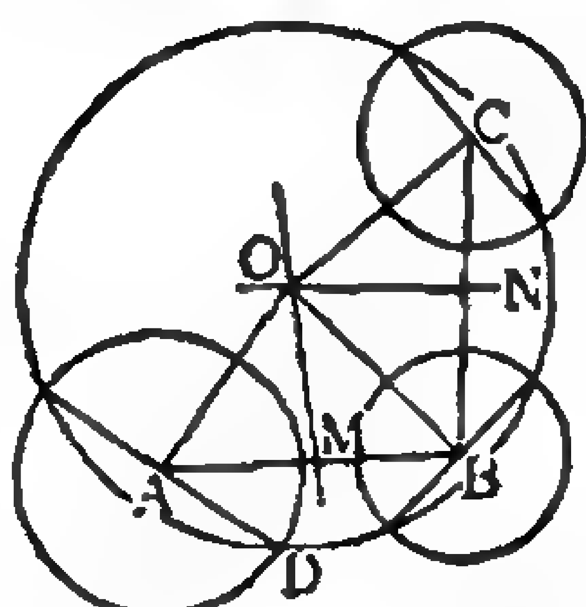


$$AB\cdot BH=r^2,$$

其中 r 是圆 B 的半径，从而 H 是定点。同样，AC 的延长线和圆 O 的交点 K 也是定点。因此，过三点 A、H、K 的圆就是所求的圆。

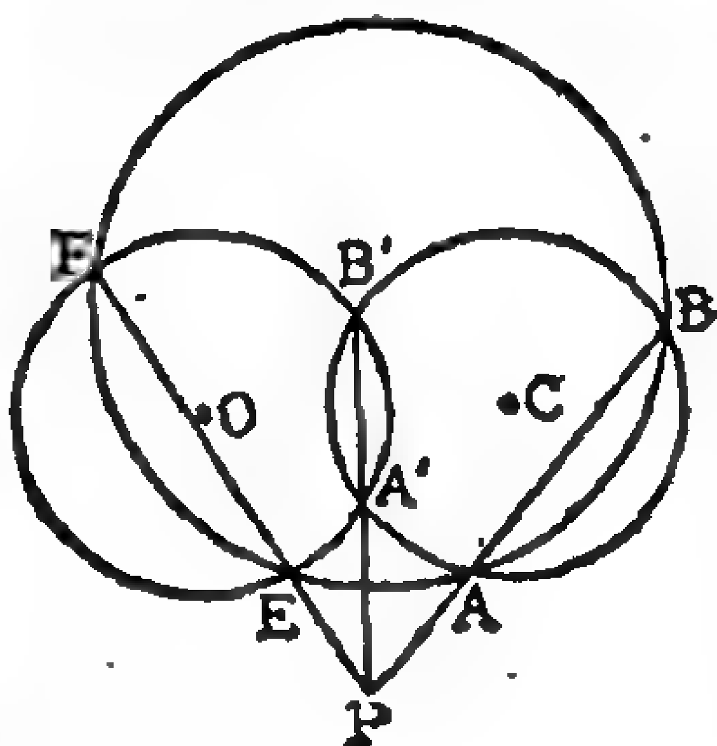
2672. 求作分别把三个已知圆 A、B、C 二等分的圆。

解 [分析] 设 O 为所求圆的圆心，根据问题 **1756**，点 O 由把两圆 A、B 二等分的圆的圆心的轨迹和把两圆 B、C 二等分的圆的圆心的轨迹所决定。因此，如已求出点 O，再作与 OA 垂直的圆 A 的半径 AD，则以 O 为圆心、以 OD 为半径的圆，就是所求的圆。



2673. 求作过已知两点 A、B，且在定圆 O 上截取定长 l 的弦的圆。

解 过两点 A、B 作和圆 O 相交的任意的圆 C，设两圆的交点为 A'、B'，BA 和 $B'A'$ 的交点为 P，从点 P 引圆 O 的割线 PEF，使 $EF=l$（问题 **2125**），则过 A、B、F、E 的圆就是所求的圆。其理由是：在圆 C 中



$$PA\cdot PB=PA'\cdot PB'. \quad ①$$

在圆 O 中，

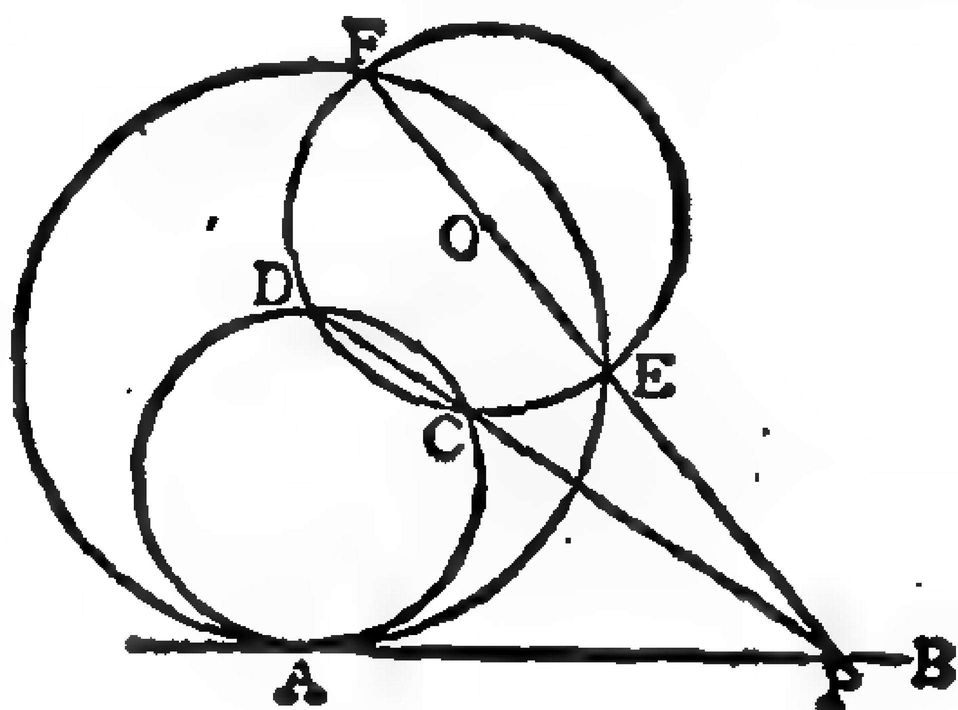
$$PE\cdot PF=PA'\cdot PB'. \quad ②$$

从①、②得 $PA\cdot PB=PE\cdot PF$，

所以 A、B、E、F 为共圆点。又根据作图知 $EF=l$，因此圆 $ABFE$ 就是适合条件的圆。

2674. 已知圆心为 O 的圆和与此圆不相交的直线 AB，求作切于直线 AB 上的定点 A 且把圆 O 二等分的圆。

解 [作图] 先作切于 AB 上点 A 且和圆 O 相交的任意的圆，设两圆的交点为 C、D，DC 的延长线和 AB 的交点为 P。连结 PO 和圆 O 交于 E、F，则过三点 E、A、F 的圆，就是所求的圆。



[证明] 根据作图，直线 PA 和圆 ACD 在点 A 处相切，所以

$$PA^2=PC\cdot PD. \quad ①$$

又因 C、D、F、E 四点共圆，

$$PC\cdot PD=PE\cdot PF. \quad ②$$

由①、②知 $PE\cdot PF=PA^2$，

所以圆 AEF 在点 A 处和直线 AB 相切。又 EF 是圆 O 的直径，因此圆 AEF 是适合条件的圆。

2675. 求作在定直线 XY 上截取定长的弦 AB、把定圆 O 二等分且半径等于定长 r 的圆 C。

解 [分析] 假定所求圆 C 已经作出。设圆 O 的半径为 r'，则 $\angle POC=\angle R$，所以

$$OC^2=PC^2-PO^2=r^2-r'^2 \text{（一定）},$$

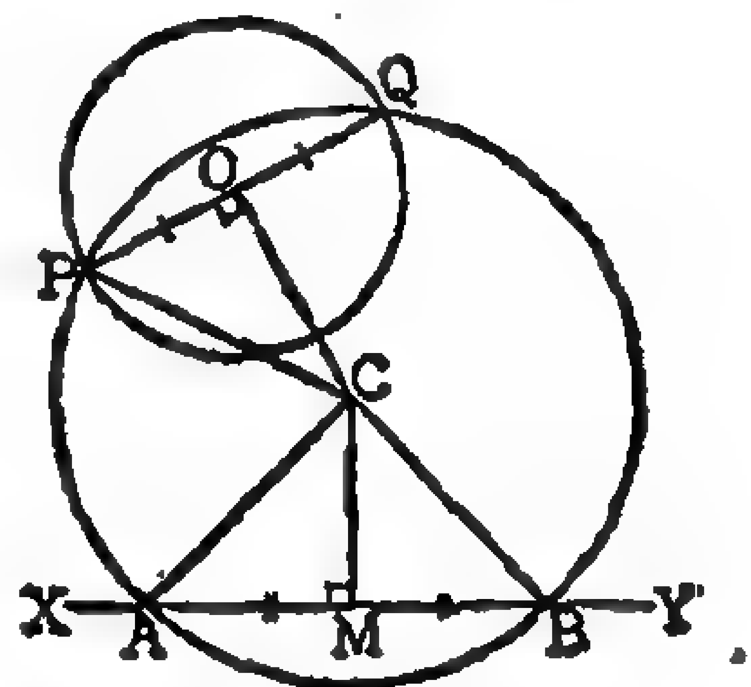
从而 OC 的长为 $\sqrt{r^2-r'^2}$。故点 C 在以 O 为圆心、$\sqrt{r^2-r'^2}$ 为半径的圆上。设 AB 的中点为 M，则

$$CM^2=AC^2-AM^2=r^2-\left(\frac{1}{2}l\right)^2 \text{（一定）},$$

$$\therefore\quad CM=\sqrt{r^2-\frac{l^2}{4}} \text{（一定）}.$$

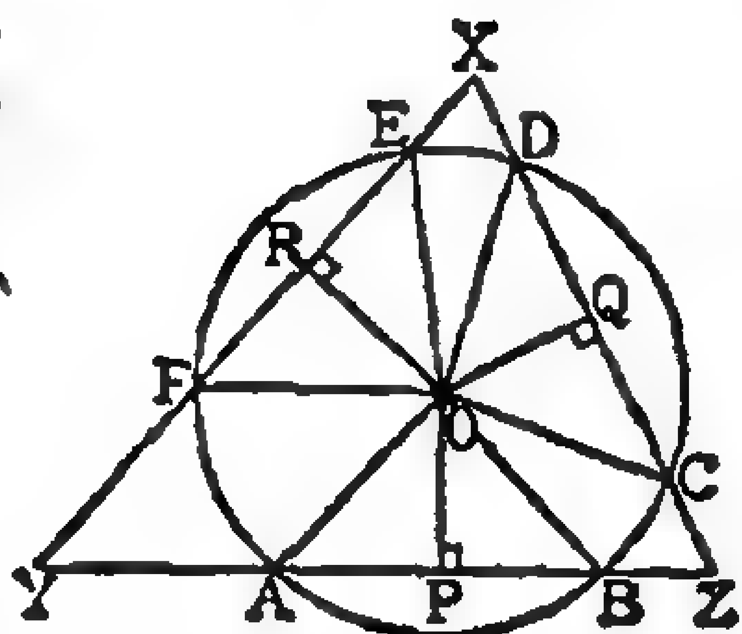
故点 C 又在与 XY 的距离等于 $\sqrt{r^2-\frac{l^2}{4}}$ 的平行线上。因此可按下法作图。

[作图] 先作以 O 为圆心、$\sqrt{r^2-r'^2}$ 为半径的圆。再作与 XY 的距离等于 $\sqrt{r^2-\frac{l^2}{4}}$ 的平行线（在直线 XY 的两侧各有一条）。设这个圆和这条直线的交点（一般不多于四个）为 C，则以 C 为圆心、把圆周 O 二等分的圆就是所求的圆。



2676. 求作一圆，和三条直线 YZ，ZX，XY 分别在 A、B，C、D，E、F 各点处相截，并使 $\angle AOB=\alpha$，$\angle COD=\beta$，$\angle EOF=\gamma$。

解 [分析] 假定适合条件的圆O已经作出，过O向AB、CD、EF引垂线，设其垂足分别为P、Q、R，则



$$\angle AOP=\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\angle COQ=\frac{1}{2}\beta,$$

$$\angle EOR=\frac{1}{2}\gamma.$$

所以 $\angle OAP=\angle R-\frac{1}{2}\alpha$ (一定),

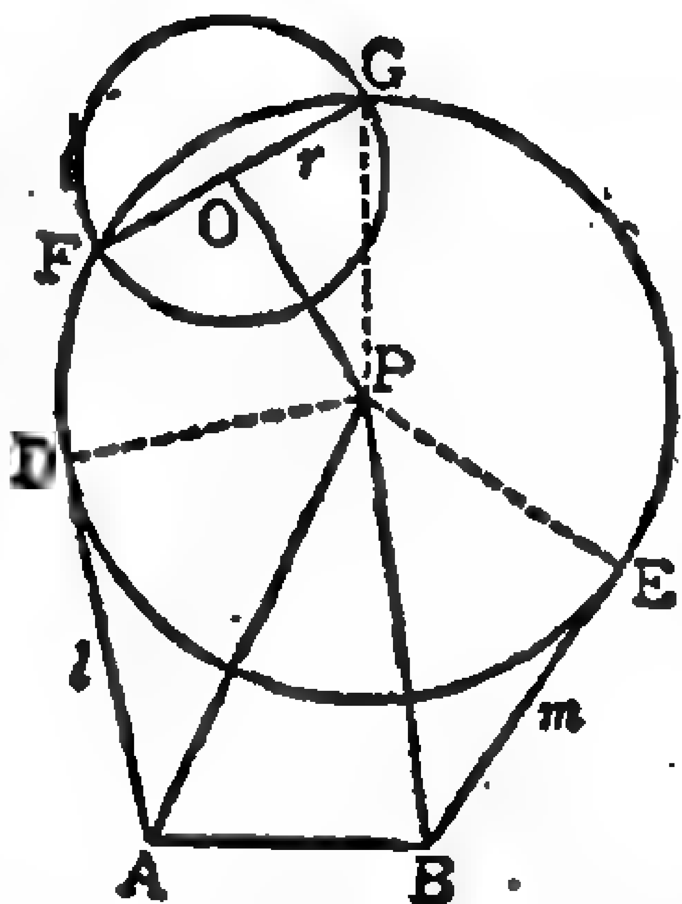
$$\angle OCQ=\angle R-\frac{1}{2}\beta \text{ (一定)},$$

$$\angle OER=\angle R-\frac{1}{2}\gamma \text{ (一定)}.$$

故三个三角形$\triangle OAP$，$\triangle OCQ$，$\triangle OER$的形状一定，由于$OA=OC=OE$，所以$OP:OQ:OR$的比一定。根据问题**1855**，$OP:OQ$是定值的点O的轨迹为过Z的直线ZO。$OQ:OR$是定值的点O的轨迹为过X的直线XO。因此，这两条直线的交点就是所求圆的圆心。

2677．求作圆P，使它把定圆O的圆周二等分，且过两定点A、B作圆P的切线分别等于定长l、m。

解 [分析] 假定所求圆已经作出，设圆心为P，过A、B作圆P的切线分别为AD、BE，则



$AD=l$，$BE=m$。

$\therefore\ PA^2=PD^2+DA^2=PD^2+l^2$， ①

$$PB^2=PE^2+BE^2=PE^2+m^2. \quad ②$$

因为$PD=PE$，由①、②知

$$PA^2-PB^2=l^2-m^2 \text{ (定值)}.$$

由问题**1757**知，点P的轨迹为垂直于AB的一条直线。又

$$PG^2=PO^2+OG^2=PO^2+r^2, \quad ③$$

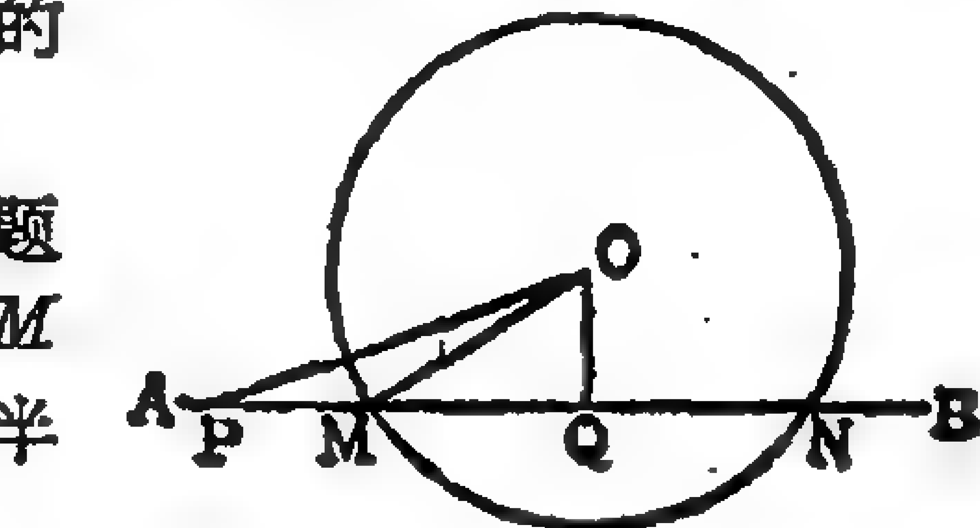
因$PE=PG$，由②、③知

$$PB^2-m^2=PO^2+r^2,$$

$$\therefore\ PB^2-PO^2=r^2+m^2 \text{ (定值)}.$$

同上面一样，到两定点B、O的距离的平方差为定值的点P的轨迹，是与OB垂直的一条直线。综上所述，可知这两条轨迹的交点就是所求圆的圆心P。

2678．设O是定点，P是定直线AB上的定点。求作以O为圆心的圆，使它和AB相交于M、N，且$PQ^2-MQ^2=n^2$，其中Q为线段MN的中点。



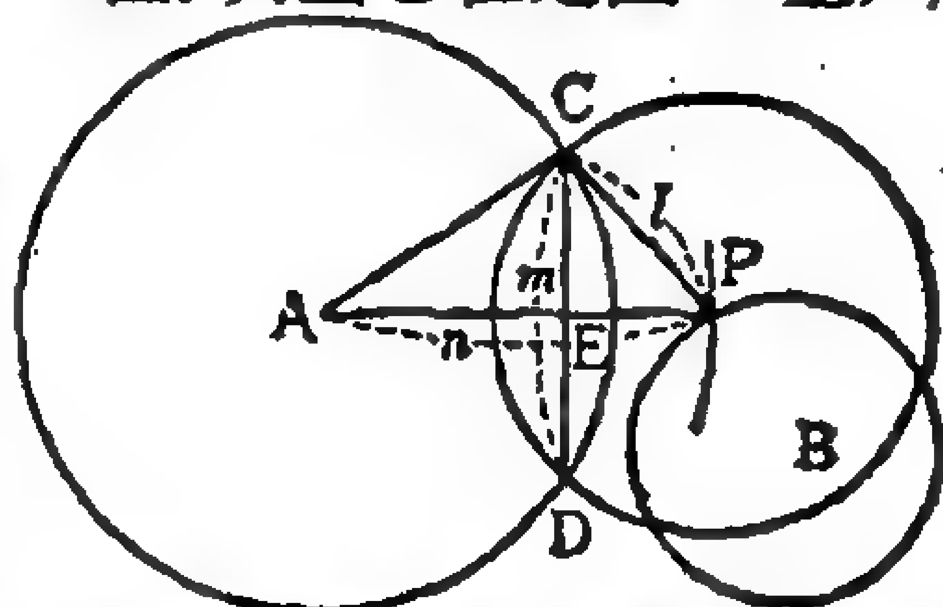
解 假定问题已解出，设OM为所求圆的半径，则

$$MQ=QN,$$

$$PQ^2-MQ^2=PN\cdot PM=OP^2-OM^2=n^2.$$

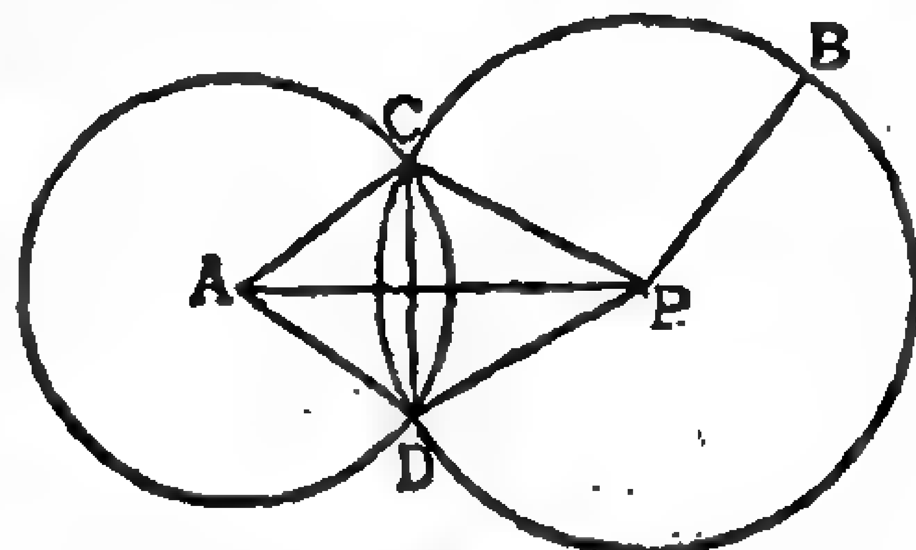
因为OP一定，所以OM长也一定。设$OP=m$，则$OM=\sqrt{m^2-n^2}$，以O为圆心、$\sqrt{m^2-n^2}$为半径作圆，设与AB的交点为M、N，则此圆即为所求的圆。其中$OP>n$。

2679．求作一圆，其圆心在定圆B上，半径等于已知长l，且与另一定圆A的公共弦CD等于定长m。



解 假设问题已解出，P为所求圆的圆心。设公共弦CD与AP的交点为E，由于E是CD的中点，CE是定长，所以在直角$\triangle ACE$中，AC、CE为已知，AE可作出。又在直角$\triangle PCE$中，PC、CE为已知，所以PE也可作出。从而AP长为已知，设$AP=n$，以A为圆心、n为半径的圆弧与圆B的交点P，即为所求圆的圆心。

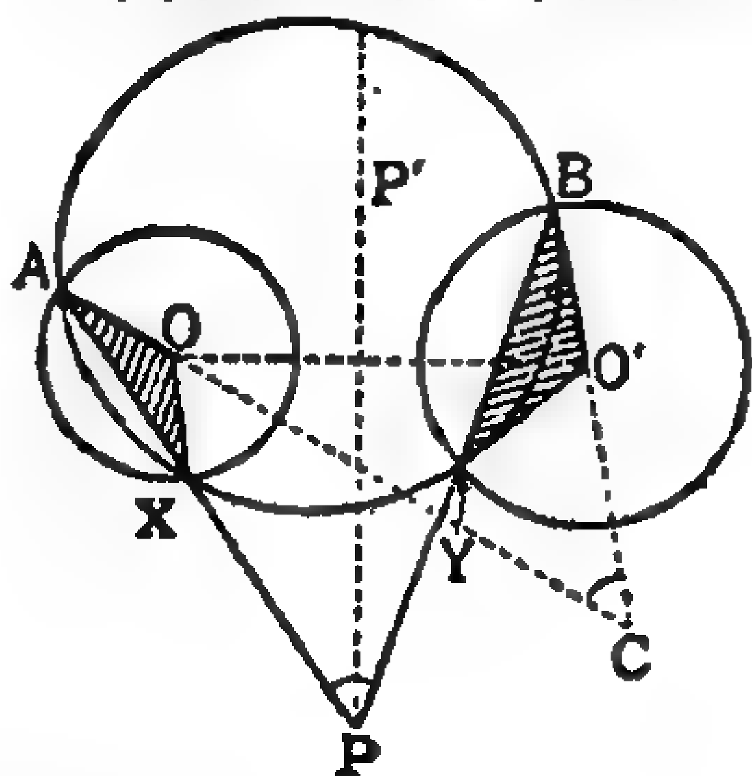
2680．过定点B求作圆P，使与定圆A的交点为C、D，$CD=m$，且使圆P的半径等于定长l。



解 与上题一样，AP的长一定，且A是定点，所以点P的轨迹是以A为圆心、AP为半径的圆。又B是定点，$BP=l$，

所以点 P 的另一条轨迹是以 B 为圆心、l 为半径的圆。故这两条轨迹的交点 P 即为所求圆的圆心。

2681. 在以 O、O' 为圆心的两个定圆上分别有两个定点 A、B；过 A、B 求作一圆，与两定圆分别相交的另两点为 X、Y，且使 $\angle AOX=\angle BO'Y$。



解 [分析] 设所求圆为 $AXYB$，因为

$$\angle AOX=\angle BO'Y,$$

所以 $\triangle AOX\backsim\triangle BO'Y$。

由于对应边的交角相等，所以点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上（P 是 AX、BY 的交点）。又四点 A、X、Y、B 共圆，因此

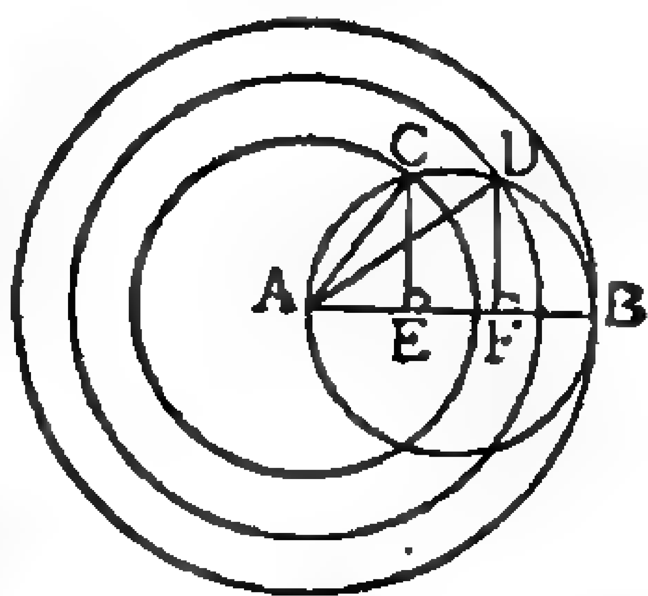
$$PX\cdot PA=PY\cdot PB.$$

所以点 P 在两圆 O、O' 的根轴上。故点 P 可作出（一般地有两点 P、P'）。假设点 P 已定，则 PA、PB 与圆 O、O' 的交点 X、Y 就可确定。

6. 杂题

2682. 已知一圆，求作两个同心圆将其面积分成三等分。

解 已知圆的圆心为 A、半径为 AB，及以 AB 为直径画半圆，把 AB 分成三等分，其分点为 E、F。过 E、F 作 AB 的垂线 EC、FD，设与半圆弧 AB 交于 C、D，再以 A 为圆心，AC、AD 为半径分别画两个圆，则此两圆即为所求之同心圆。其理由是：以 A 为圆心、AB 为半径的圆用圆 (AB) 表示，那么



圆 (AB) 的面积 $=\pi\cdot AB^2$，

圆 (AC) 的面积 $=\pi\cdot AC^2=\pi\cdot AE\cdot AB$，

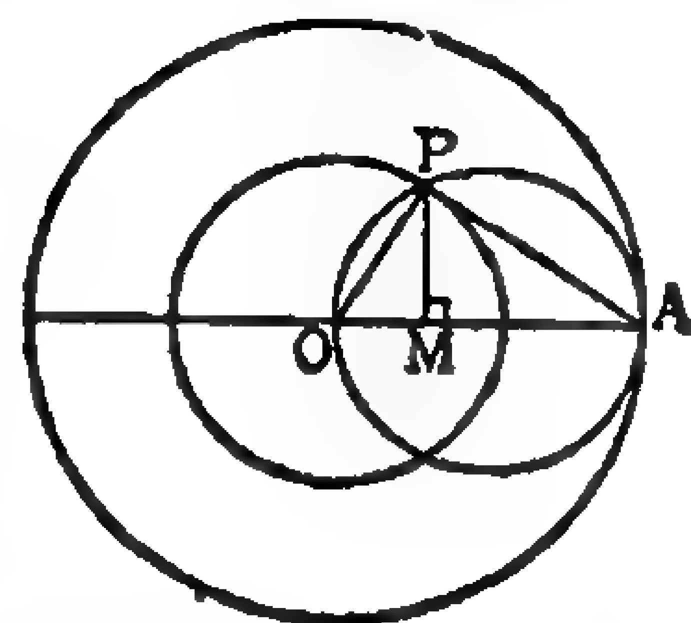
圆 (AD) 的面积 $=\pi\cdot AD^2=\pi\cdot AF\cdot AB$。

因此 $$\frac{\text{圆}(AD)\text{的面积}}{\text{圆}(AB)\text{的面积}}=\frac{\pi\cdot AF\cdot AB}{\pi\cdot AB^2}=\frac{AF}{AB}=\frac{2}{3}.$$

同理，圆 (AC) 的面积 $=\frac{1}{3}$ 圆 (AB) 的面积。

2683. 求作一个与已知圆同心的圆，把已知圆分成 $m:n$。

解 在已知圆 O 的半径 OA 上取点 M，使 $OM:MA=m:n$，由 M 作 OA 的垂线，设与以 OA 为直径的半圆的交点为 P，则以 O 为圆心、OP 为半径的圆将圆 O 分成 $m:n$。其理由是：



$$\text{圆}(OA)\text{面积}=\pi\cdot OA^2.$$

但是由 $\angle OPA=\angle R$，$PM\perp OA$，有

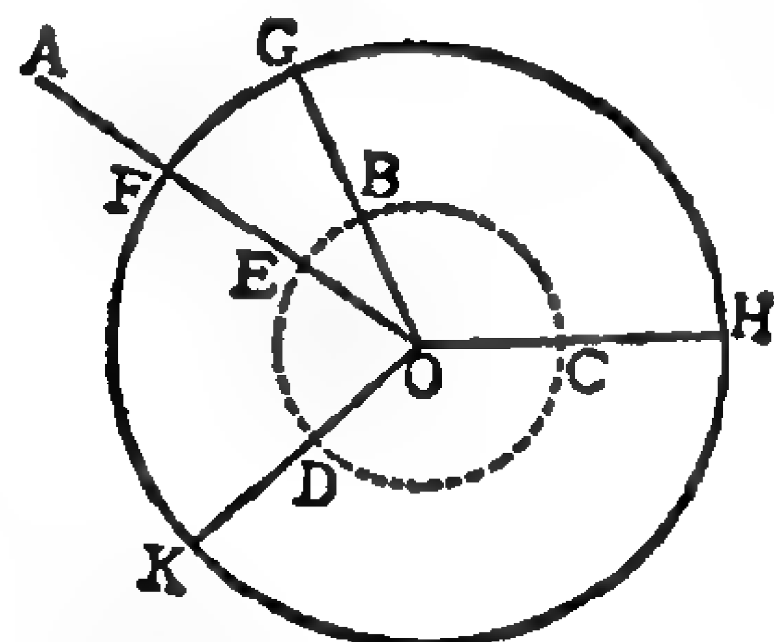
$$OP^2=OM\cdot OA.$$

$$\therefore\quad \frac{\text{圆}(OP)\text{面积}}{\text{圆}(OA)\text{面积}}=\frac{\pi\cdot OP^2}{\pi\cdot OA^2}=\frac{OM\cdot OA}{OA^2}=\frac{OM}{OA}=\frac{m}{m+n},$$

故 $$\text{圆}(OP)\text{面积}=\frac{m}{m+n}\cdot\text{圆}(OA)\text{面积}.$$

2684. 已知平面上有四个定点 A、B、C、D，求作一圆，使这四点到此圆周的最短距离相等。

解 [分析] (1) 设所求的圆已作出，四个定点中有一点 A 在圆外，其他三点 B、C、D 在圆内，假设求作的圆心为 O，OA 及 OB、OC、OD 与圆周的交点分别为 F、G、H、K，则有



$$BG=CH=DK=AF.$$

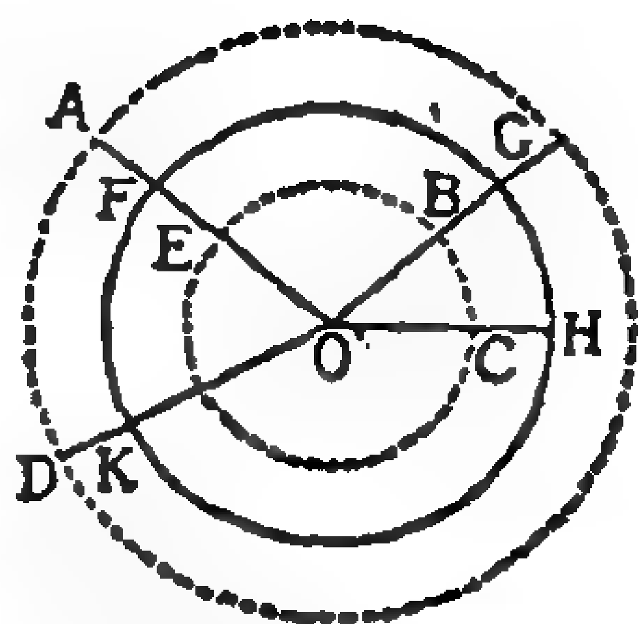
但是 $$OG=OH=OK=OF,$$

所以 $OB=OC=OD$。由此知点 B、C、D 是在以 O 为圆心的圆周上。因此可作图如下。

［作图］ 过三点 B、C、D 作圆 O，设此圆与 OA 的交点为 E，EA 的中点为 F，则以 O 为圆心、OF 为半径的同心圆即为所求的圆。这里对四个定点中有一点在圆内或在圆外，另外三点在圆外或在圆内，一般地所求的

圆有四个。

[分析]　(2) 有两个定点 A、D 在所求的圆外，另外两点 B、C 在圆内的情况。设求作的圆心为 O，假设 OA、OB、OC、OD 与圆的交点分别为 F、G、H、K，则应有



$$AF=BG=CH=DK.$$

于是　$AO=OD,\ OB=OC.$

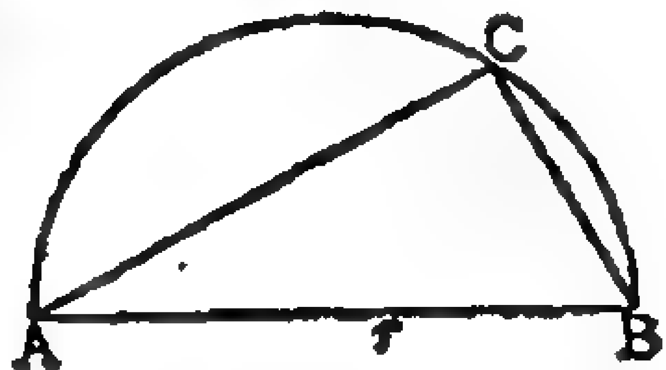
因此点 O 至 A、D 的距离相等，又点 O 至 B、C 的距离相等。所以可作图如下。

[作图]　作 AD 的垂直平分线与 BC 的垂直平分线的交点 O，则点 O 为所求的圆心，以 O 为圆心、OB 为半径画圆，设此圆与 OA 的交点为 E，EA 的中点为 F，则以 O 为圆心、OF 为半径作同心圆，此圆即为所求作的一个圆。这里四个点中有两个在圆内，两个在圆外，一般地所求的圆有六个。

[讨论]　在 (1) 中，有三个点在一条直线上时，有三个解；四个点在一条直线上时无解；如果四个点在同一圆周上时有无穷多解。

在 (2) 中，四点不是圆内接梯形的顶点时，有两解；四点在同一圆周上时，有无穷多个解；如果四点在同一直线上时，内侧两点间线段的中点与外侧两点间线段的中点重合有无穷多解，不重合无解。

2685. 求作两圆 O、O'，使圆 O、O' 的半径之比为 $l:m$ 且两圆的面积之和等于定圆面积 πr^2。



解　取线段 $AB=r$，以 AB 为直径作半圆，在此半圆上求一点 C，使 $CA:CB=l:m$ (问题 **1856**)，分别以 CA、CB 为半径所作的圆，即为所求的圆。其理由是：根据作图，$CA:CB=l:m$，所以

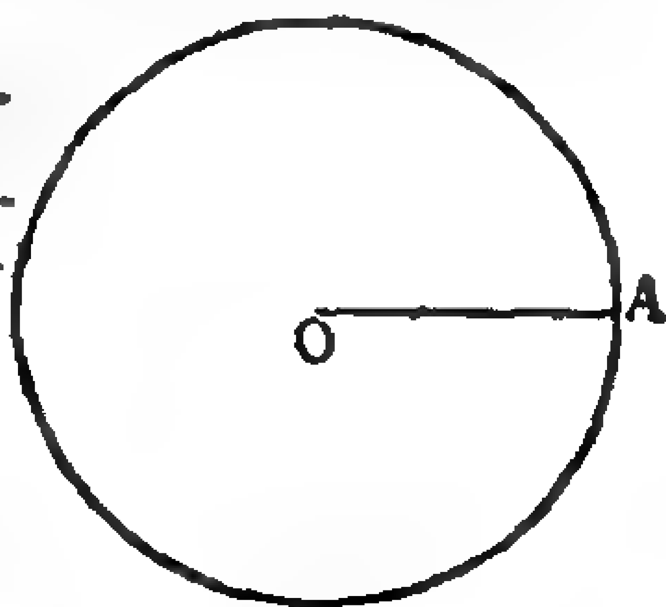
$$圆(CA)面积=\pi\cdot AC^2,$$

$$圆(CB)面积=\pi\cdot CB^2.$$

$$\therefore\quad 圆(CA)面积+圆(CB)面积=\pi\cdot(AC^2+CB^2)=\pi\cdot(AB)^2=\pi r^2.$$

2686. 求作任意个圆，使其半径之比等于相同个数的线段之比，其面积之和等于已知圆的面积。

解　[作图]　已知任意个数的线段为 l、m、n、…、s，已知面积的圆心为 O，半径为 OA。以 l 与 m 为两直角边作直角三角形，求出其斜边 a。其次以 a 与 n 为两直角边作直角三角形，求出其斜边 b。继续这样作下去，最后得斜边 k，则有



$$k:OA=l:R=m:R_1=n:R_2=\cdots.$$

求出 $R, R_1, R_2, \cdots$，即为所求作的圆的半径。

[证明]　因为 $k^2:OA^2=l^2:R^2=m^2:R_1^2=\cdots$

$$\therefore\quad k^2:OA^2=(l^2+m^2+n^2+\cdots):(R^2+R_1^2+R_2^2+\cdots).$$

但是　$k^2=l^2+m^2+n^2+\cdots,$

$$\therefore\quad OA^2=R^2+R_1^2+R_2^2+\cdots.$$

设已知圆的面积为 S，半径为 R，R_1，$R_2\cdots$ 的圆面积为 L, M, N, … 则

$$S:L=OA^2:R^2,\ S:M=OA^2:R_1^2,\ \cdots$$

$$\therefore\quad S:(L+M+\cdots)=OA^2:(R^2+R_1^2+\cdots).$$

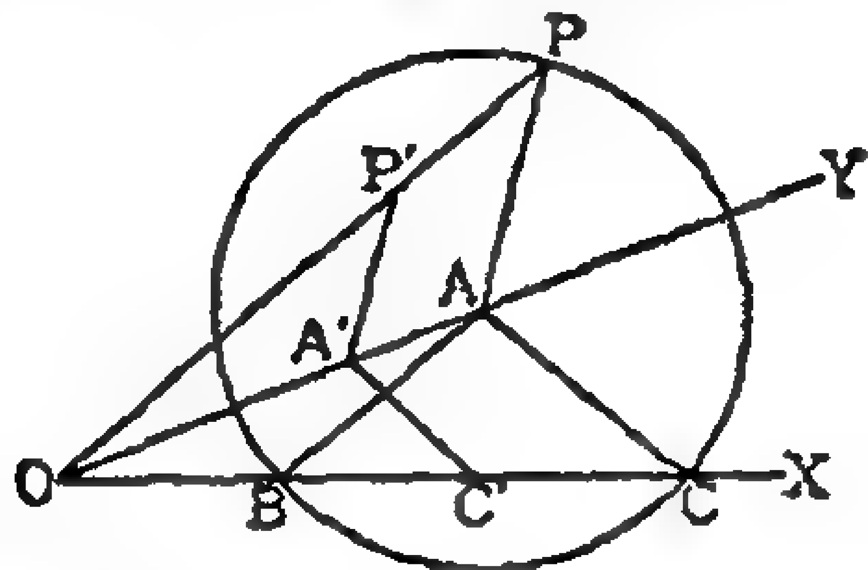
因为　$OA^2=R^2+R_1^2+R_2^2+\cdots,$

$$\therefore\quad S=L+M+N+\cdots$$

即所求作的圆的半径与 l, m, n, … 成比例，且其面积之和等于已知圆的面积。

2687. 通过定点 P，圆心在已知 $\angle XOY$ 的一边 OY 上，求作一个圆，使在 OX 上截割的线段 BC 所张的圆心角等于定角 α。

解　[分析]　设求作的圆已作出，则 $\triangle ABC$ 是顶角为 α 的等腰三角形，于是 $\angle ACO=\angle R-\dfrac{\alpha}{2}$ (一定)。又 $AP=AC$，所以可作图如下。



[作图]　在 OY 上任取一点 A'，引直线 $A'C'$ 与 OX 交于点 C'，使

$$\angle A'C'O=\angle R-\frac{\alpha}{2}.$$

连结 OP，在直线 OP 上求一点 P'，使

$$A'P'=A'C'.$$

其次，设由点P引$P'A'$的平行线与OY的交点为A，则点A即为所求的圆心。

［证明］ 由A引$A'C'$的平行线，设与OX交于点C，则有$PA=AC$。其理由是：因为$P'A'=A'C'$，$PA\parallel P'A'$，$AC\parallel A'C'$。又

$$\angle C=\angle C'=\angle R-\frac{\alpha}{2},$$

所以 $\angle BAC=\alpha$.

2688．求作一圆，使其面积与已知圆面积之比等于$m:n$。其中m、n表示定长线段。

解 ［作图］ 在任意直线上取A、B、C三点，使

$$AB:BC=m:n.$$

设过点B垂直于AC的直线与以AC为直径的半圆交于点M，则在MA或其延长线上取一点E，使ME等于已知圆的半径．过点E作AC的平行线，与MC或其延长线交于点F，则以MF为半径作圆，就是所求之圆。

［证明］ 因为$\angle AMC=\angle R$，$MB\perp AC$，所以

$$MA^2:MC^2=AB:BC=m:n. \quad ①$$

而$ME:MF=MA:MC$，因此由①有$ME^2:MF^2=m:n$。于是，设以ME、MF为半径的圆面积分别用a、b表示，则

$$a:b=\pi\cdot ME^2:\pi\cdot MF^2=ME^2:MF^2=m:n.$$

故以MF为半径的圆是所求之圆。

2689．已知$\triangle ABC$的边AB的长及位置，$\angle A$的大小，过顶点C的直径与AB的交点D的位置，求作此三角形的外接圆。

解 ［分析］ 设所求的圆已作出，假定其圆心为O，则

$\angle BOC=2\angle A$，
$\angle DOB=2\angle R-\angle BOC$
$=2(\angle R-\angle A)$

（一定），因此点O在以DB为弦、张成定角$2(\angle R-\angle A)$的弓形弧上。又点O在AB的垂直平分线上，从而这两个轨迹的交点，就是所求的圆心。所以作图如下。

［作图］ 设以DB为弦，作张成定角$2(\angle R-\angle A)$的弓形弧与AB的垂直平分线交点为O，则以O为圆心、OA为半径的圆，即为所求之圆。

2690．已知四点A、B、C、D，求作一圆过A、B两点，且使从C、D向此圆所引的切线相等。

解 ［分析］ 设O为所求圆心，CE、DF为相等的切线，则$\triangle CEO\cong\triangle DFO$，从而有$CO=DO$，即点$O$至$C$、$D$的距离相等。然而，点$O$至$A$、$B$的距离也相等。因此作图如下。

［作图］ 设AB、CD的垂直平分线MO、NO的交点为O，则以O为圆心，OA为半径所作的圆即为所求。

［讨论］ AB、CD的垂直平分线平行时无解，又点C、D之中的一点在圆内时也无解。

2691．以平行四边形$ABCD$的对边AB、CD为弦，求作两个相等的圆，使这两圆的交点E、F分别在AD、BC上。

解 ［分析］ 设所求的圆已作出，则由两圆相等，所以公共弦EF在各圆中所对的圆周角相等，即

$$\angle EBF=\angle ECF.$$

由此得$BE=CE$，故可作图如下。

［作图］ 引边BC的垂直平分线，与AD的交点为E，则$\triangle ABE$、$\triangle EDC$的外接圆即为所求之圆。

［证明］ 设$\triangle ABE$的外接圆与BC的交点为F，则

$$\angle A+\angle EFB=2\angle R.$$

又因$ABCD$是平行四边形，所以

$$\angle A+\angle D=2\angle R,$$
$$\therefore\ \angle EFB=\angle D.$$

因此圆EDC过点F。而EF是两圆的公共弦，且$\angle EBC=\angle ECB$，故两圆相等。

2692．以定点O为圆心，求作一圆与已

知两条平行线 M、N 分别相交于 A、B，C、D，使 $AB+CD=l$ 或 $AB\sim CD=l$。

解 ［分析］ 假定所求之圆 O 已作出。设 BD 的中点为 E，AB、CD 的中点分别为 G、H，则 G、O、H 在一条直线上，且 $GH\perp AB$。设 GH 的中点为 F，则 $EF\perp GH$，

(1)

$$EF=\frac{1}{4}(AB+CD)=\frac{1}{4}l\ （已知），$$

且 $GF=FH$。由此点 E 确定，所以可作图如下。

［作图］ 从点 O 作 M、N 的公垂线，其垂足分别为 G、H，从 GH 的中点 F 作 GH 的垂线 FE，使 $EF=\frac{1}{4}l$。其次，连结 OE，由 E 引 OE 的垂线与 M、N 的交点分别为 B、D。然后以 O 为圆心、OB（或 OD）为半径画圆，即为所求之圆。

(2)

［证明］ 略。

［讨论］ 在这个作图中，若点 B 与 D 在 GH 的同侧，则有 $AB+CD=l$（图 1），B 与 D 在 GH 的异侧，则有 $AB\sim CD=l$（图 2）。

2693. 已知直线 MN 上一定点 A 及线外两个定点 B、C，求作一圆 O 使其过点 A、C 与 MN 交于点 D，且使 BD 成为圆 O 的切线。

解 设圆 O 为求作的圆，则 BD 为此圆的切线，于是

$$\angle BDC=\angle CAD\ （一定）。$$

以 BC 为弦，作张成圆周角等于 $\angle CAM$ 的弓形弧与 MN 交于点 D，则圆 ACD 即为所求之圆。其理由是：因为 $\angle BDC=\angle CAD$，所以 BD 在点 D 处与圆 ACD 相切。用 D' 代替 D 或若弧与 MN 不相交，无解。

2694. 求作一圆，使从已知三点 A、B、C 看，视角分别等于角 α、β、γ。

解 设圆 O 已作出。设 AE、BF 为切线，则 $\angle OAE=\frac{1}{2}\alpha$，$\angle OBF=\frac{1}{2}\beta$ 是定角。于是 $\triangle OAE$、$\triangle OBF$ 的形状一定。由此 $OA:OE$，$OB:OF$ 一定。从而 $OA:OB$ 也一定。同理，$OB:OC$ 一定。所以点 O 是满足 $OA:OB$ 时的轨迹的圆（问题 **1856**）与满足 $OB:OC$ 时的轨迹的圆的交点。其次，从点 A 引直线 AE，使 $\angle OAE=\frac{1}{2}\alpha$，从 O 引 AE 的垂线 OE。则以 O 为圆心、OE 为半径的圆，即为所求之圆。

注 两条轨迹圆的交点一般有两点，所以本题一般有两解。

2695. 求作一个半圆，使它切于已知 $\triangle ABC$ 边 BC 上的定点 P，且它的直径的端点分别在三角形另外的两边上。

解 设所求的半圆 EPF 已作出。在 FP 的延长线上取 $PD=PF$，从 D 引 AC 的平行线 DG，设与 CB 的延长线交于点 G，则 $PC=PG$。从而点 G 是定点。设半圆的圆心为 O，则 $\angle F=\angle OPF$。又 $\angle F=\angle EDF$，因而 $\angle OPF=\angle EDP$，所以 $OP\parallel ED$。因为半圆 EPF 在点 P 与 BC 相切，有 $OP\perp BC$，

$$\therefore\ ED\perp BC.$$

由此直角三角形 PED 的直角顶点 P 的位置确定，斜边 ED 是定方向（与 BC 垂直），点 E 在定直线 AB 上，点 D 在定直线（从定点 G 引 AC 的平行线）GD 上，根据问题 **2264** 知这个直角 $\triangle EPD$ 可作出。显然点 F 也可作出。

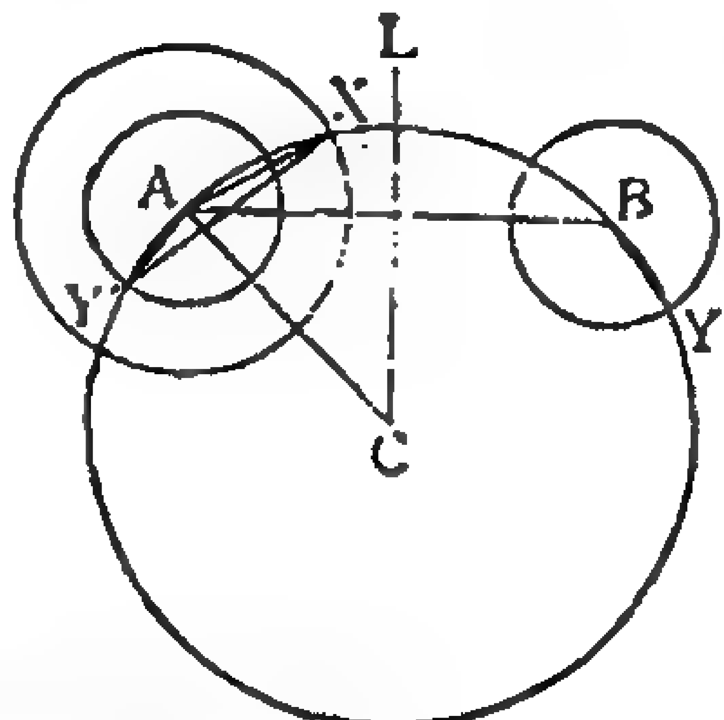
2696. 已知两圆心为 A、B，求作一圆，使它过 A、B，与已知两圆在 AB 的异侧分别交于 X、Y，且 $\angle ABY$、$\angle BAX$ 之和等于已知角 α。

解　设所求之圆心为 C，点 Y 关于 AB 的垂直平分线 CL 的对称点为 Y'，则

$$\angle ABY=\angle BAY'.$$

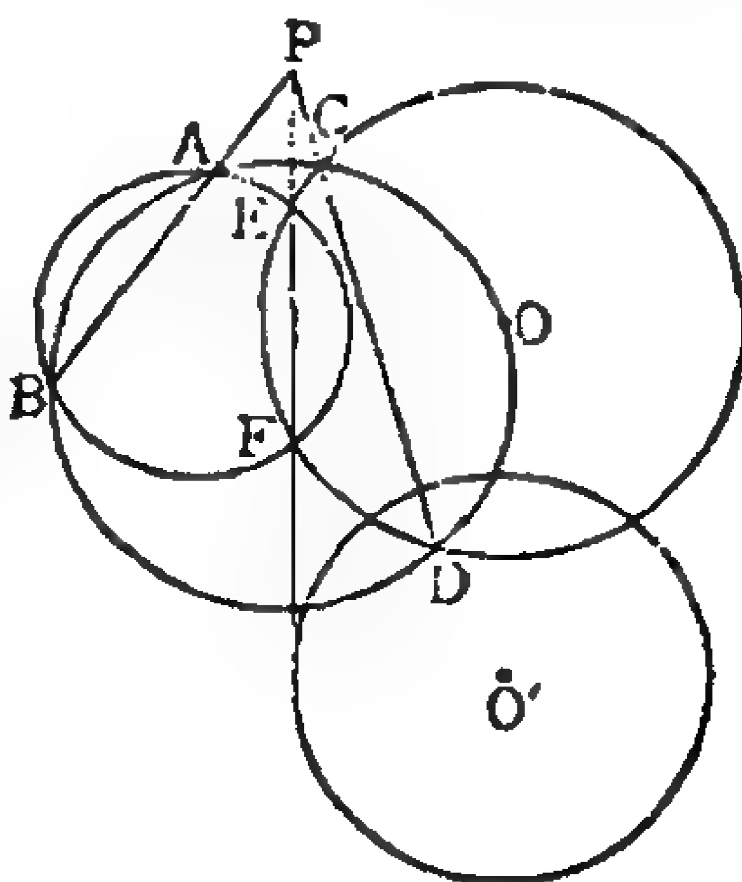
由此在 $\angle XAB+\angle ABY=\angle XAB+\angle BAY'=\alpha$

中，$\angle XAY'$ 是一定的。又 AX、AY' 分别是定圆的半径，是定长。从而，$\triangle AXY'$ 的两边 AX、AY' 和 $\angle XAY'$ 大小一定，所以这个三角形为已知。由此这个三角形外接圆的半径 AC 的长也是一定的。其次，因为圆 C 过 A、B，因而点 C 在 AB 的垂直平分线 L 上，故圆 C 的圆心 C 即可决定，于是问题得解。



2697. 求作一圆，使它过两已知点 A、B，与已知圆 O 有公共弦，且使此公弦切于另一已知圆 O'。

解　作过点 A、B 的任意圆与圆 O 相交于 C、D。设 BA 与 DC 相交于 P，从点 P 向圆 O' 作切线 PEF，与圆 O 交于 E、F，圆 BAE 即为所求作之圆。其理由是：



因为 $PA\cdot PB=PC\cdot PD=PE\cdot PF$。因此，点 F 在圆 BAE 上。所以 EF 是圆 O 与圆 BAE 的公共弦。因为从点 P 向圆 O' 可引两条切线，故本问题一般地有两解。

注　若 AB 与 CD 平行时，引圆 O' 的切线也平行于 AB。

2698. 设过点 O 的已知直线 OQ 及线外一点 P，求作一圆，使圆心在 OQ 上，OQ 与该圆相交于 S、T，且使 $OS:OT$ 等于已知比。

解　［作图］　在 OQ 上任取两点 A、B，使 $OA:OB$ 等于已知比，以 AB 为直径画圆与 OP 的交点之一为 C。由 P 作 CA、CB 的平行线 PS、PT，与 OQ 交于 S、T，则以 ST 为直径画圆，此圆即为所求之圆。

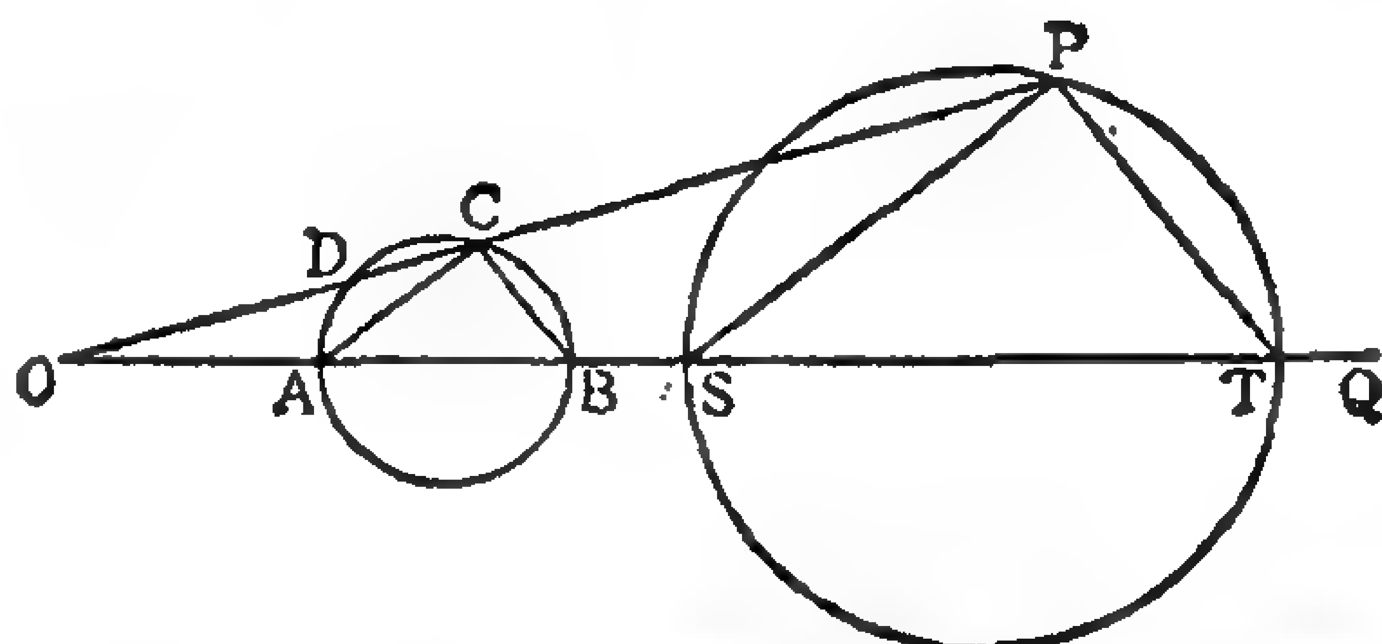
［证明］　因为 $\angle SPT=\angle R$，因此这个圆 SPT 的圆心在 OQ 上，且过点 P。

又　　$PS\parallel CA,\quad PT\parallel CB,$

于是　$\dfrac{OA}{OS}=\dfrac{OC}{OP},\quad \dfrac{OB}{OT}=\dfrac{OC}{OP}.$

$$\therefore\quad \frac{OA}{OS}=\frac{OB}{OT},$$

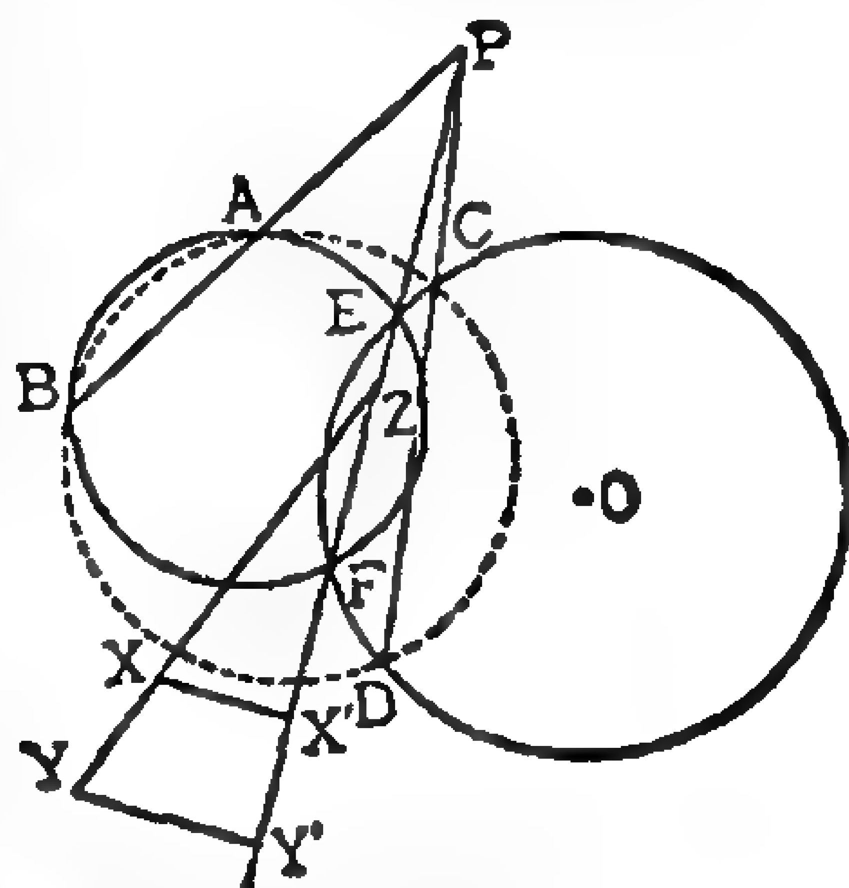
即 $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OS}{OT}$，所以 $\dfrac{OS}{OT}$ 等于已知比。



［讨论］　以 AB 为直径的圆在 OP 上截两点 C、D，从 P 引 DA、DB 的平行线也还可作出一个圆。一般地本题有两解。如果以 AB 为直径的圆与 OP 相切，本题有一解，与 OP 不相交则本题无解。

2699. 求过已知两点 A、B 作一圆，与定圆 O 相交，使从已知两定点 X、Y 至公共弦的距离之比等于已知比。

解　过已知点 A、B 作任一圆与定圆 O 相交，设其交点为 C、D，AB 与 CD 的交点为 P。其次，在连结 XY 的直线上取外分点 Z，使 $ZX:ZY=m:n$（已知比）。设过点 Z 与 P 的直线与圆 O 相交于 E、F，则圆 ABE 就是所求作的圆。其理由是：因为 A、B、D、C 是共圆点，因此 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$。又 C、D、F、E 是共圆点，



$$PC\cdot PD=PE\cdot PF,$$

$$\therefore\quad PA\cdot PB=PE\cdot PF.$$

所以 A、B、F、E 是共圆点，根据作图知

$$ZX:ZY=m:n.$$

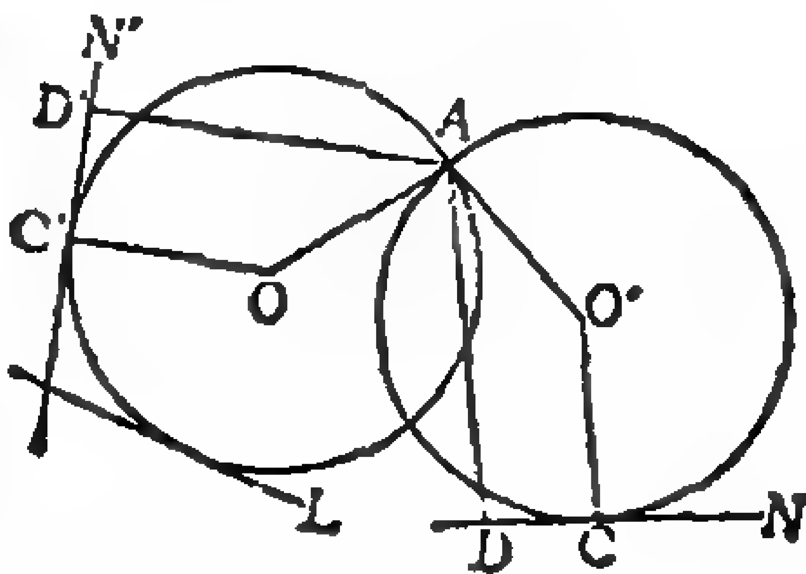
由 X、Y 向直线 PZ 作垂线 XX'、YY'，则

$$XX':YY'=m:n.$$

2700. 在定点 A 上求作交角为 α 的两个

等圆，且使此两等圆分别与两条定直线 L、N 相切。

解 ［分析］ 设问题已解出，O、O' 为所求的两个等圆，且两等圆在点 A 的交角为 α，则 $\angle OAO'=2\angle R-\alpha$（一定）。从点 A 作直线 N 的垂线 AD，又从 A 引直线 AD' 使



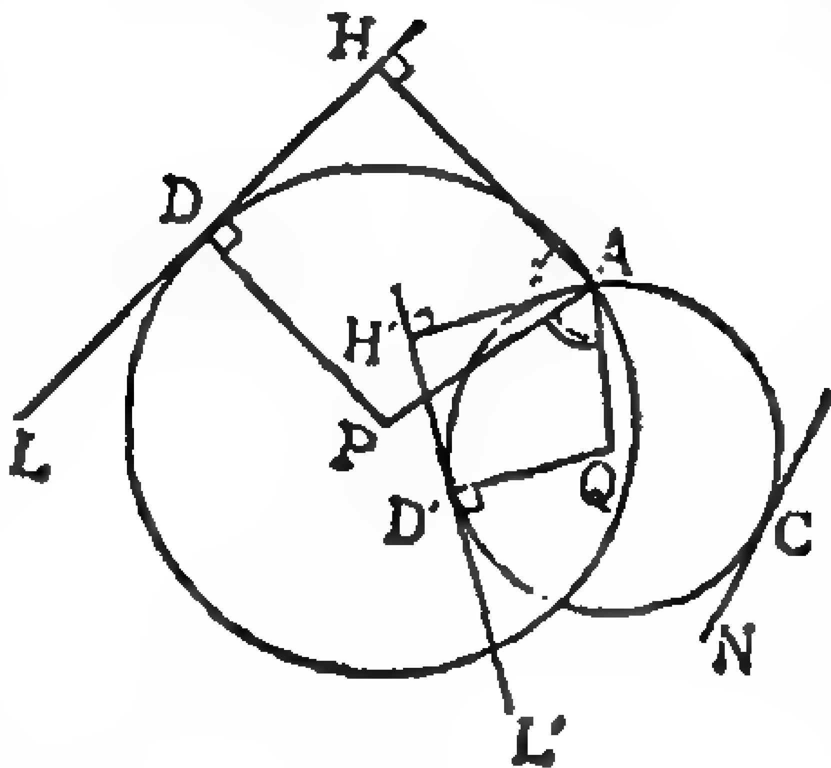
$$\angle DAD'=\angle OAO',\ AD=AD',$$

则 D' 是定点．过 D' 作 AD' 的垂线 $D'N'$，因圆 O、C' 是等圆，所以 $N'D'$ 与圆 O 相切．故可作图如下。

［作图］ 由 A 向 N 作垂线 AD，在点 A 引直线 AD'，使 $\angle DAD'=2\angle R-\alpha$，且 $AD=AD'$．过 D' 作 AD' 的垂线 $D'N'$，过定点 A 作圆 O 与两条直线 N'、L 相切(问题 **2619**)．连结 AO，由 A 引直线 AO'，使 $AO'=AO$，$\angle OAO'=2\angle R-\alpha$，则 O、O' 是所求作的圆。

2701． 过定点 A 求作相交的两圆，使其交角为 α，半径之比为 $m:n$，且各圆与已知直线 L、N 分别相切。

解 ［分析］ 设问题已解出，P、Q 为所求圆的圆心，半径之比为 $m:n$，圆 P、Q 分别与直线 L、N 的切点为 D、C．由 A 引 L 的垂线，设垂足为 H，在 AP、AQ 上作与图形 $AHDP$ 的相似比为 $m:n$ 的相似图形 $AH'D'Q$，则 $AH:AH'=m:n$，且



$$\angle HAH'=\angle PAQ=2\angle R-\alpha.$$

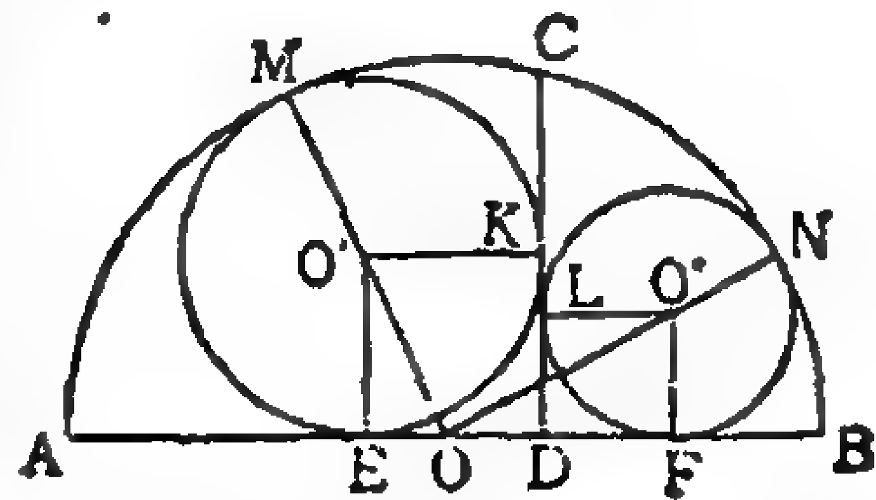
由此得点 H' 是定点，从而 $H'D'$ 是定直线，设它为直线 L'．又由 $AP=PD$ 有 $AQ=QD'$，因此点 D' 在圆 Q 上．由 $\angle QD'H'=\angle R$ 知，L' 是圆 Q 的切线。

［作图］ 由点 A 作 L 的垂线 AH，设 $\angle HAH'=2\angle R-\alpha$，$AH:AH'=m:n$，则可求出点 H'．过 H' 引 AH' 的垂线 L'，则过点 A 即可作出与 L'、N 相切的圆 Q（问题 **2619**）。

由 $\angle QAP=2\angle R-\alpha$，$AP:AQ=m:n$，求出点 P．以 P 为圆心、PA 为半径作圆，则圆 P、Q 就是所求的两圆。

2702． 在直径 AB 上求作一条垂线分已知半圆 ACB 为两部分，使其两部分上分别作内切圆的半径之比等于定比 $m:n$。

解 ［分析］ 设半圆 ACB 的圆心(即直径 AB 的中点)为 O．在直径上取点 D，由 D 作 AB 的垂线 CD 把半圆分成两部分，其中一部分 DAC 上的内切圆 O'，在 DA、DC、弧 AC 上的切点为 E、K、M，另一部分上的内切圆 O'' 在 DB、DC、弧 BC 上的切点为 F、L、N，则



$$O'E=O'K=O'M=r_1,$$
$$O''F=O''L=O''N=r_2,$$

且 $\qquad r_1:r_2=m:n$（定比）。

由作图及假设知 O、O''、N 在一条直线上，所以 $\angle ONA=\angle O''NL$，从而 A、L、N 在一条直线上．$\therefore AL\cdot AN=AF^2$．又 $\angle ANB$ 及 $\angle LDB$ 都是直角，因此 $LDBN$ 是圆内接四边形。

$$\therefore\ AL\cdot AN=AD\cdot AB=AC^2.$$
$$\therefore\ AC^2=AF^2,\quad 因而\quad AC=AF.$$

故 $\triangle ACF$ 是等腰三角形，

$$\angle ACF=\angle AFC.$$

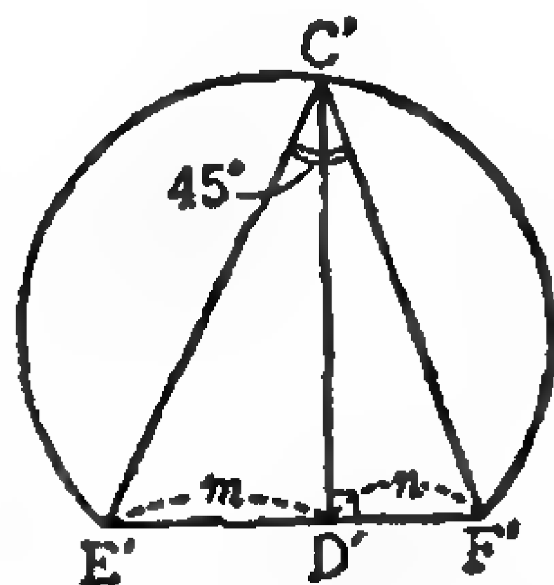
但是 $\qquad \angle ACD+\angle DCF=\angle ACF$

及 $\qquad \angle ABC+\angle FCB=\angle AFC$,

又 $\qquad \angle ACD=\angle ABC$,

$\therefore\ \angle DCF=\angle FCB$.

因此 CF 平分 $\angle DCB$，同理 CE 平分 $\angle ACD$．由此得 $\angle ECF=45°$ 且



$$ED:DF=O'K:O''L=m:n,$$

即可作图如下。

［作图］ 取任意线段 $E'F'$，在其上取比为 $m:n$ 的内分点 D'．设以 $E'F'$ 为弦作含 $45°$ 角的弓形弧，此弓形弧与过点 D' 且垂直于 $E'F'$ 的直线交于点 C'．在 $\angle E'C'F'$ 的外侧

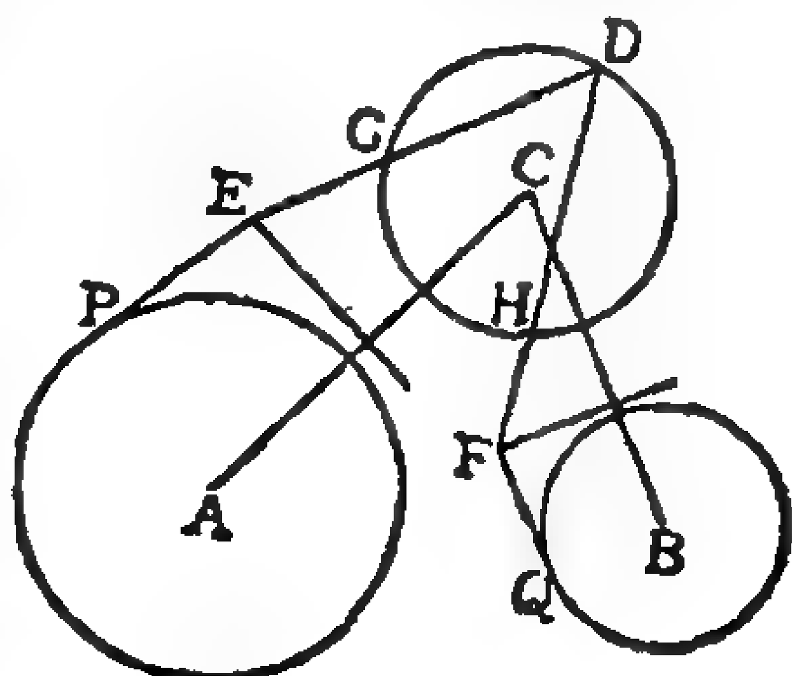
引直线$C'A'$、$C'B'$，使

$$\angle A'C'E'=\angle E'C'D',$$
$$\angle B'C'F'=\angle F'C'D',$$

延长$E'F'$与$C'A'$、$C'B'$的交点分别为A'、B'($\angle A'C'B'=90°$)。其次，在半圆ACB上，引AC使$\angle BAC=\angle B'A'C'$且与半圆的交点为C，由C作AB的垂线CD。由题意知CD就是所求的直径AB的垂线，它将半圆ACB分为所求的两部分。

[证明] 略。

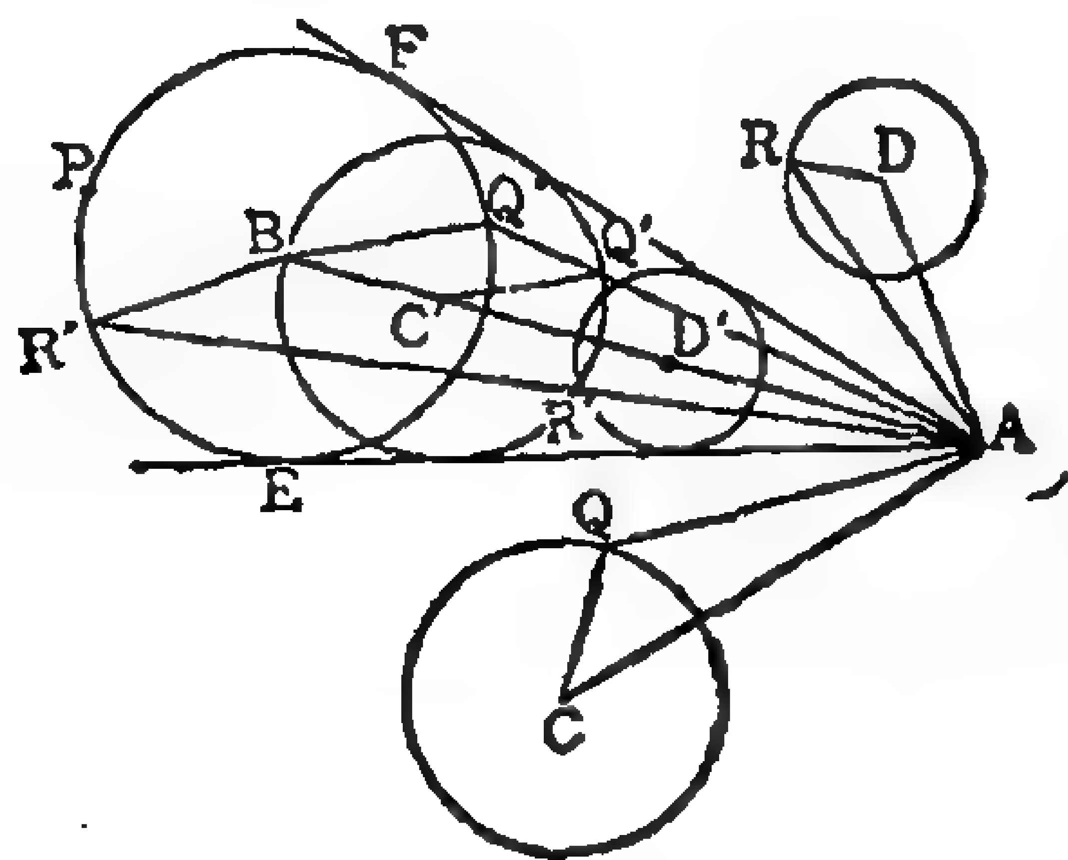
2703. 已知两圆A、B及三点D、E、F，过点D求作一圆C，使圆A、C的根轴过点E，圆B、C的根轴过点F。



解 设适合于条件的圆已作出，C为此圆的圆心。从点E向圆A引切线EP，从点F向圆B引切线FQ，设ED与圆C的交点为G，FD与圆C的交点为H，则点E是圆A、C根轴上的点，因此有$ED\cdot EG=EP^2$。但是EP、ED的长是已知的，所以点G确定。同理$FD\cdot FH=FQ^2$，所以点H也确定。由于圆C上有三点D、G、H已确定，所以求作的圆C即可作出。

2704. 求作三个圆B、C、D，从一点A看这三个圆的视角相等，且使每个圆分别过一定点P、Q、R，三个圆的半径之比为$l:m:n$及从点A到圆心距BC、BD、DC的视角分别等于已知角α、β、γ。

解 设所求之圆B、C、D已作出，从点



A引圆B的切线AE、AF，在直线AB上取点C'、D'，使$AC'=AC$、$AD'=AD$。以C'、D'为圆心分别作圆C、D的等圆，此两圆显然与AE、AF相切。其次设$\angle CAB=\alpha$，从A引直线AQ'，使$\angle QAQ'=\alpha$、$AQ=AQ'$，则由点Q在圆C上，知点Q'在圆C'上。又设延长AQ'与圆B交于点Q''，则两圆B、C'是以点A为相似中心，所以

$$AQ':AQ''=C'Q':BQ''. \quad ①$$

根据假设圆B、C、D的半径之比为$l:m:n$，所以$C'Q':BQ''=m:l$(一定)。连结定点A、Q，在直线AQ上作夹角为α的$\angle QAQ'$及$AQ'=AQ$。在AQ'的延长线上取点Q''，使$AQ':AQ''=m:l$，则Q''是圆B上的定点。

同理，连结AR，作$\angle RAR'=\angle DAB=\beta$，$AR'=AR$，在$AR'$的延长线上取$R''$，使

$$AR':AR''=n:l,$$

则R''在圆B上且决定了R''的位置。因此圆B过三个定点P、Q''、R''，所以圆B即可作出。设圆B已作出，则因三个圆的半径之比与相似中心A的位置一定，所以圆C'、圆D'已决定，从而圆C、圆D的大小已决定了。

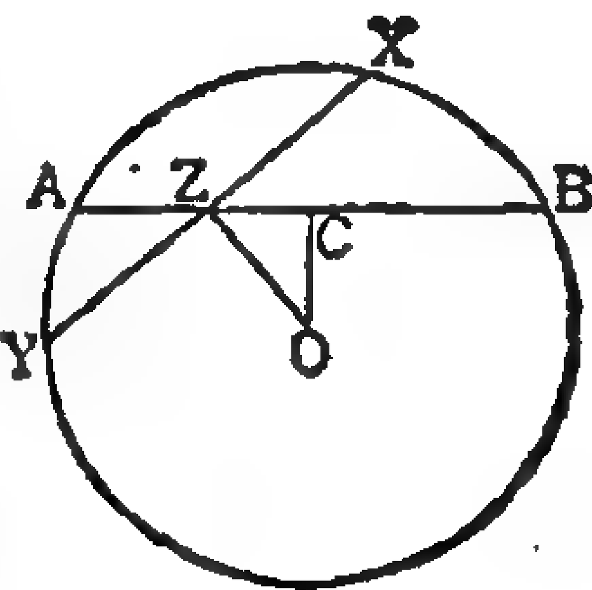
第六章 最大、最小

(包括证明题)

1. 线段的最大、最小

2705. 设AB是定圆的定弦，动弦XY的中点Z在AB上，求XY的最大及最小位置。又当点Z越接近于AB的中点，XY随之增大，试证明之。

解 设定圆的圆心为O，则因Z为XY的中点，有$OZ\perp XY$。又AB的中点为C，有$OC\perp AB$，$\therefore OZ\geq OC$(等号仅在点Z与C重合

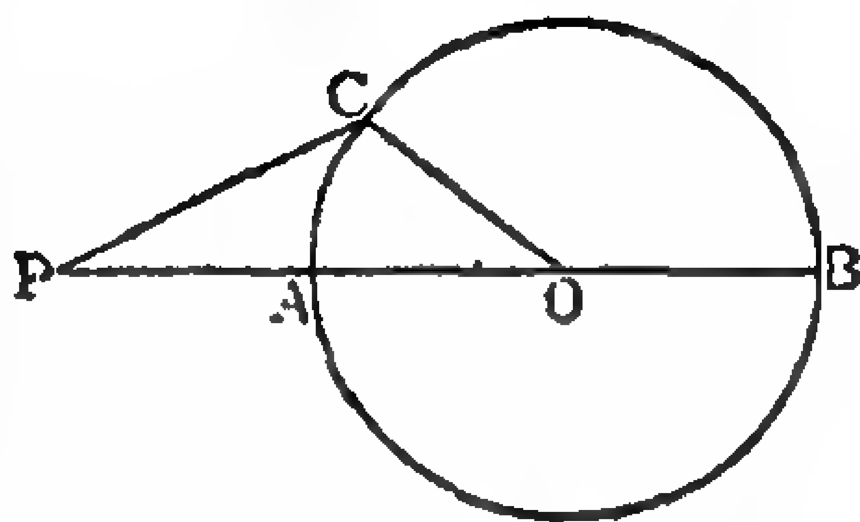


时成立)。由此得 $XY\leqq AB$。于是 XY 最大是由 OZ 的最小而决定，当 OZ 垂直于 AB 时，即点 Z 在 AB 的中点 C 上时，显然 XY 与 AB 重合，此时 XY 最大。同理，XY 最小就是 OZ 最大，即点 Z 与 A 或者 B 重合时，这时弦 XY 为 0 时最小。

其次，当点 Z 从 A 向点 C 靠近时，OZ 由大变小，XY 由小增大，在点 C 处最大。当 Z 越过点 C 靠近于点 B 时，XY 由大变小至 0。

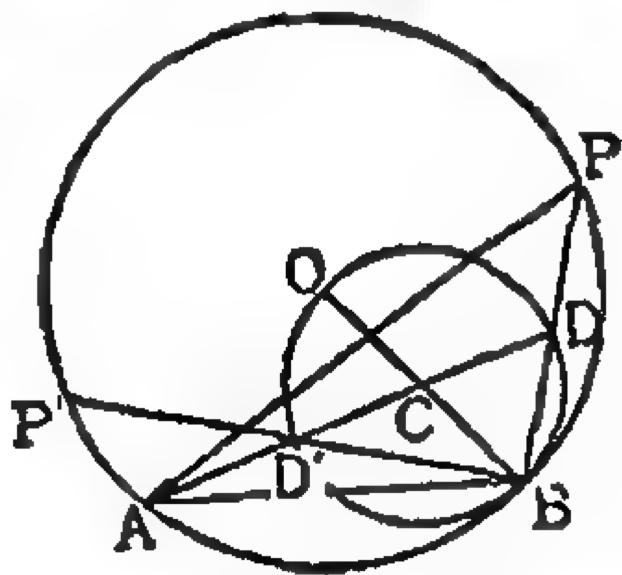
2706. 求由圆外一定点向圆所引的最大与最小线段。

解 设点 P 为定圆 O 外的一定点，PO 或其延长线与圆的交点为 A、B，点 C 为不在 OP 上的圆周上的任意一点，设点 A、P 在点 O 的同侧，则在 $\triangle POC$ 中有 $PO-OC<PC$，又

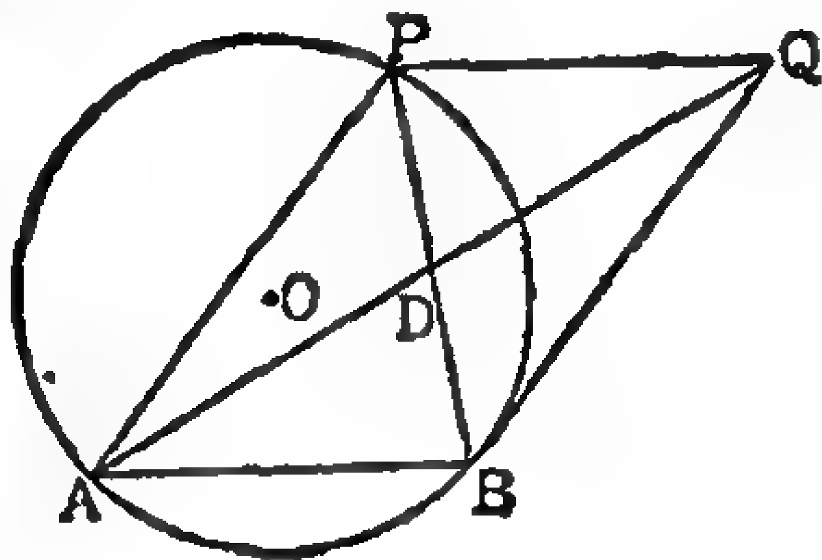


$OC=OA$。因此 $PO-OA<PC$，即 $AP<PC$。又 $PC<PO+CO$，而 $CO=OB$，有 $PC<PO+OB$ 即 $PC<PB$。所以从点 P 作圆 O 的最大、最小线段是：连结 PO 的直线与圆的交点 A、B，PB 最大，PA 最小。

2707. 设定圆 O 的定弦 AB，在圆 O 上求一点 P，使 $\triangle APB$ 的中线 AD 为最大或最小。



解 因为 PB 的中点 D 的轨迹是以 BO 为直径的圆（问题 1630）。因此，问题就是从点 A 至这个圆的距离为最大、最小，即在此圆上求一点，使其距离最大或最小就可以了。由上题知，从点 A 引过圆 BO 的圆心 C 的直线，设与圆相交于 D、D'，则在图上的 AD 为最大，AD' 为最小。因此 BD 及 BD' 的延长线与圆 O 的交点分别为 P、P'，即为所求之点。



注 本题是与问题"设定圆 O 的定弦 AB，在圆上求一点 P，使以 AP、AB 为邻边的平行四边形 $PABQ$ 的对角线 AQ 的长为最大或最小"一样。

2708. 在相离的两定圆 O、O' 上分别求一点，使它们连结的线段为最大、最小。

解 [作图] 设 OO' 与两圆分别交于 A、B，OO' 的延长线与两圆分别交于 C、D，则有 AB 为最小，CD 为最大。

[证明] 引任一直线与两圆相交，设交点为 A'、B'，则 $A'B'+OA'+O'B'>OO'$。从两边减去 $OA'=OA$，$O'B'=O'B$ 得 $A'B'>AB$。其次，$OA'+OO'+O'B'>A'B'$

即 $CO+OO'+O'D>A'B'$，

$\therefore\ CD>A'B'$。

2709. 在定直线 XY 上求一点，使从这点向定圆 O 所引的切线最短。

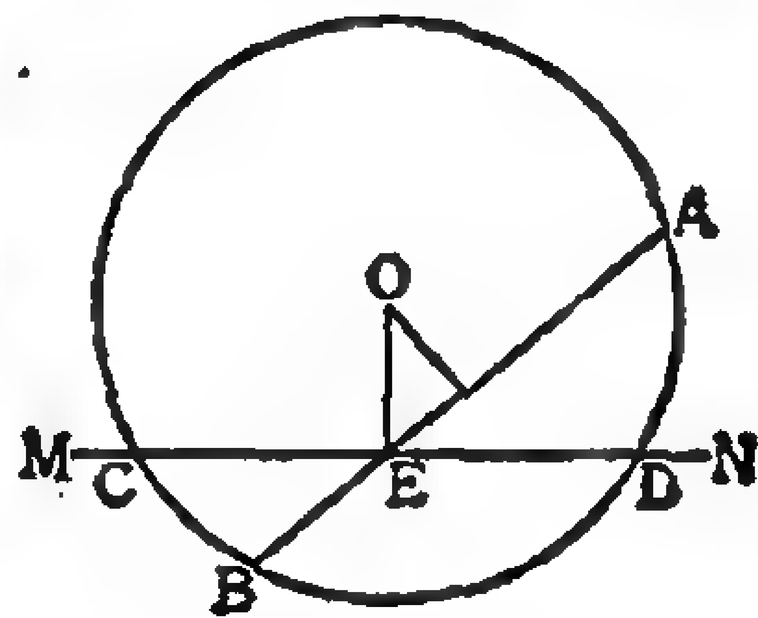
解 [作图] 过 O 向 XY 作垂线，设其垂足为 P，由 P 向圆 O 引切线 PQ（Q 为切点），则 PQ 即为所求之最短切线。

[证明] 设由 XY 上任意一点 A 向圆 O 引切线 AT（T 为切点），则 $AT^2=OA^2-OT^2$，$PQ^2=OP^2-OQ^2$。而 OP 是 XY 的垂线，于是 $OP<OA$，但 $OT=OQ$，

$\therefore\ PQ^2<AT^2,\ PQ<AT$。

故切线 PQ 是最短的。

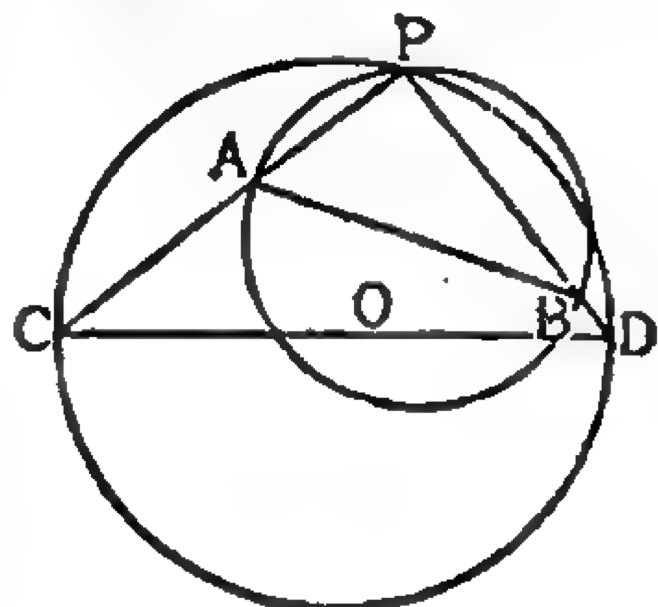
2710. 设在已知直线 MN 的异侧有两定点 A、B，过点 A、B 求作一圆，使圆割下 MN 的线段 CD（即为弦）为最短。



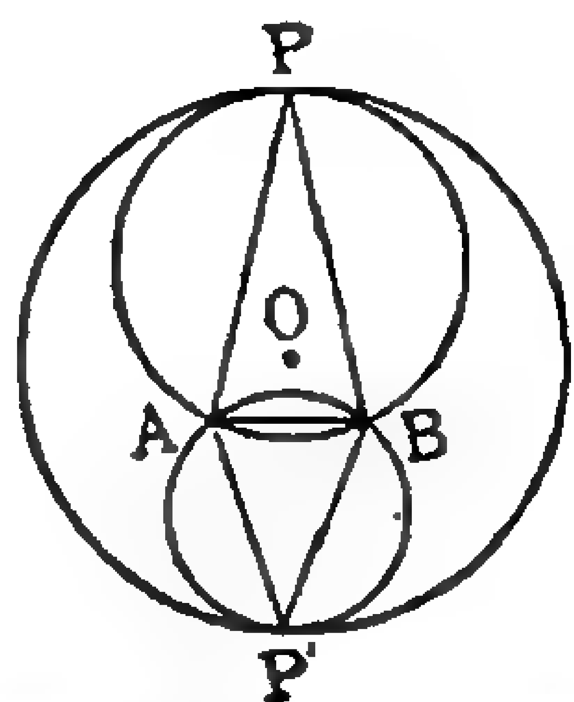
解 [作图] 过 MN 与 AB 的交点 E 作 MN 的垂线，与 AB 的垂直平分线相交于点 O，则以 O 为圆心、OA 为半径作圆，即为所求作之圆。

［证明］ 因为 $EC\cdot ED=EA\cdot EB$（一定），即两条线段之积一定，在 $EC=ED$ 时线段之和 $EC+ED=CD$ 为最小．由此所求的圆心 O 在过点 E 且垂直于 MN 的直线上．又因为圆过定点 A、B，所以圆心 O 在 AB 的垂直平分线上，故过点 E 的 MN 的垂线与 AB 的垂直平分线的交点 O 即为所求圆之圆心．

2711． 设 A、B 是已知圆 O 内的两个定点，在圆周上求一点 P，使当延长 PA、PB 与圆周分别交于 C、D 时，弦 CD 为最大．



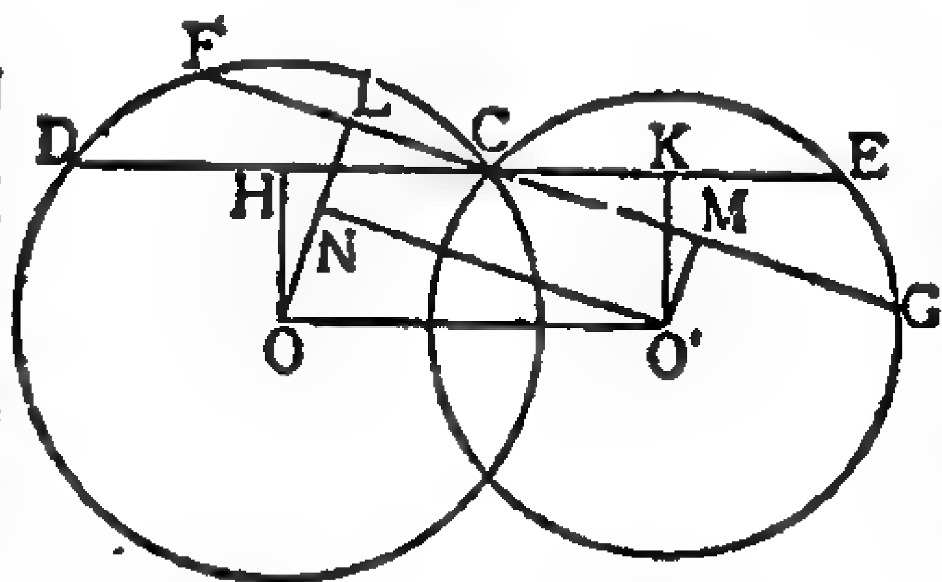
解 以 AB 为直径作圆，与圆 O 的交点设为 P（或 P'），则 $\angle APB=\angle R$．延长 PA、PB 与圆 O 交于点 C、D，则 CD 为圆 O 的直径．因此 CD 是最大的弦．如果以 AB 为直径的圆与圆 O 不相交时，那么就过 A、B 作圆 O 的内切圆，则其切点 P 即为所求之点．



其理由是，因为 $\angle APB$ 是最大的锐角，它所对的弦 CD 也是最大．这时在 AB 的两侧可作圆 O 的两个内切圆，从而有两个切点．若切点为 P、P' 时，则 $\angle APB$、$\angle AP'B$ 中的大角所对的弦也大．

2712． 过两圆的交点之一求作一条直线，使被两圆割下的线段最大．

解 ［作图］ 设 O、O' 为两圆的圆心，其交点之一为 C，过点 C 引 OO' 的平行线 DCE，设与两圆的交点为 D、E，则 DE 就是所求之最大的线段．



［证明］ 过 C 引任意直线 FG，由 O、O' 向 DE、FG 分别作垂线 OH、$O'K$，OL、$O'M$．再由 O' 引 FG 的平行线 $O'N$，与 OL 相交于点 N，则 OO' 是直角 $\triangle ONO'$ 的斜边，于是 $OO'>NO'$．而 $OO'=HK$，$NO'=LM$，$2HK=DE$，$2LM=FG$，

$$\therefore\quad DE>FG.$$

故 DE 是最大的线段．

2713． 求作 $\triangle ABC$，使其顶角与面积一定，底边 BC 为最小．

解 因为底边 BC 一定时，$\angle A$ 的大小也一定的 $\triangle ABC$ 中，其面积最大的是 A 为等腰三角形的顶点．因此在顶角及面积一定的 $\triangle ABC$ 中，是 $AB=AC$ 的等腰三角形的底边 BC 最小．

注1 本题可应用余弦定理求解．

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 一定，其面积也一定时，则夹 $\angle A$ 两边的积 $AB\cdot AC$ 一定．然后根据余弦定理知

$$\begin{aligned}BC^2&=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A\\&=(AB+AC)^2-2AB\cdot AC\\&\quad-2AB\cdot AC\cos A\\&=(AB+AC)^2-2AB\\&\quad\times AC(1+\cos A),\end{aligned}$$

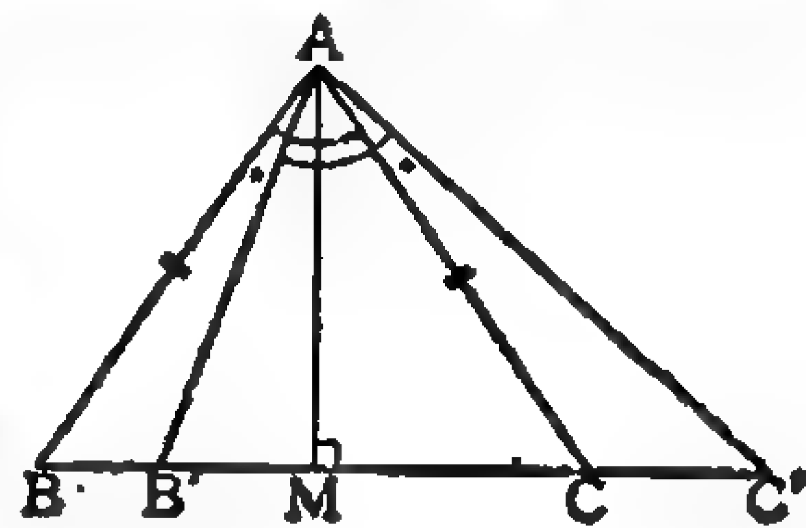
由于 $AB\cdot AC$ 及 $\angle A$ 一定，所以 $AB+AC$ 最小时，BC 就最小．而 AB、AC 之积一定时，其和 $AB+AC$ 为最小，根据问题 **2761** 知 $AB=AC$，所以当 $AB=AC$ 时，BC 最小．

2 与这个问题一样，下面的问题也可解．

(1) 引一条直线与定角的两边相交作成面积一定的三角形时，与定角两边夹成等角的线段最小．

(2) 设 $\angle XAY$ 为定角，求作一条直线，设与定角两边 AX、AY 分别交于 B、C，当 AB、AC 之积等于定值 k^2 时，使 BC 最小．

2714． 已知三角形的顶角及过顶点的高，求作三角形，使其底边最小．



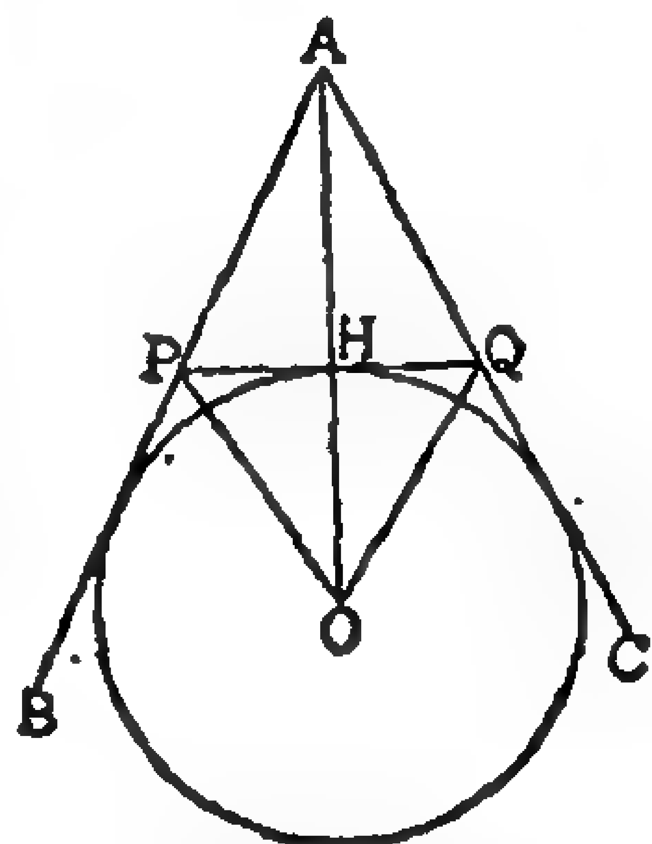
解 因为高一定，因此这个问题是求底边最小，或者面积最小．所以与问题 **2799** 一样，高和顶角为已知的等腰三角形，底边最小．

2715． 已知 $\angle BAC$ 的两边 AB、AC 切于定圆 O，在 $\angle A$ 内的点 A 与 O 之间求作一条最短的切线 PQ．

解 ［分析］ 设 $\angle A=\alpha$，则

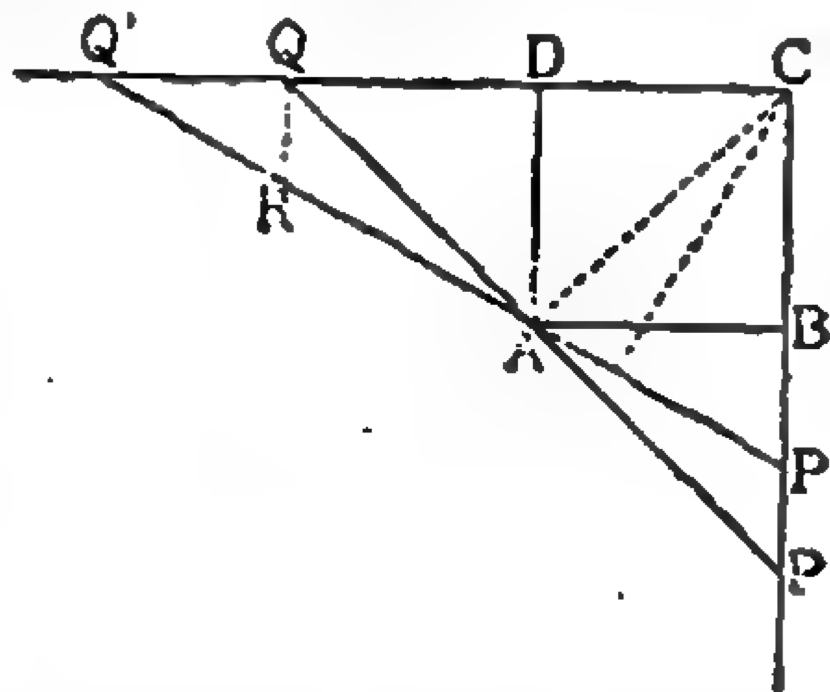
$$\angle POQ=\angle B-\frac{1}{2}\alpha.$$

又从 O 作 PQ 的垂线 OH，则 $OH=r$（r 为圆 O 的半径）。在 $\triangle POQ$ 中，$\angle O$ 的大小与高都一定，所以当 $OP=OQ$ 时 PQ 为最小（参照上题）。由此可作图如下。



［作图］ 连结 AO 的直线与圆交于点 H，过 H 引 OA 的垂线，设与 AB、AC 的交点分别为 P、Q，则 PQ 即为所求之最小切线。

2716. 过正方形 $ABCD$ 的顶点 A 引一条直线，与 CB 的延长线交于 P，与 CD 的延长线交于点 Q。为使线段 PQ 最短，那么点 P、Q 应取在何处？

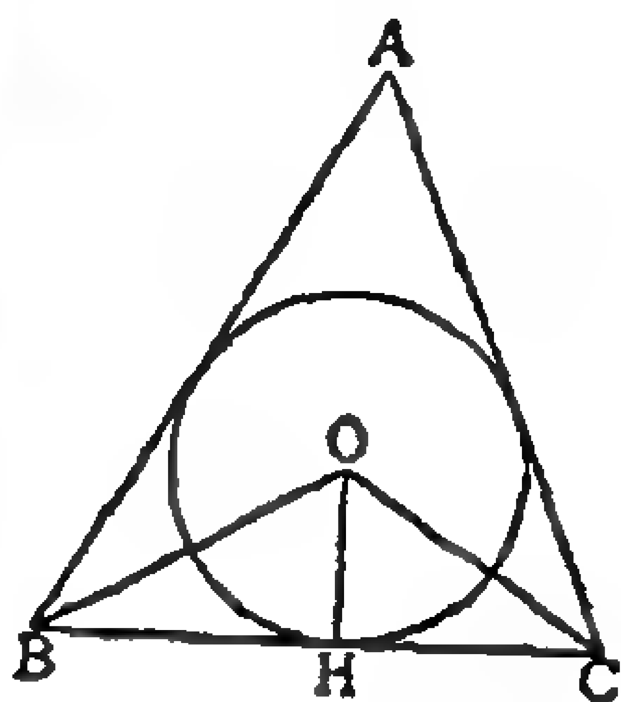


解 当 PQ 被点 A 平分时，PQ 垂直于 AC，则 PQ 为最小。其理由是，设 $PQ\perp AC$，$P'Q'$ 是不垂直 AC 的任一条直线，若 P' 在 B、P 之间，过 Q 引 BC 的平行线与 $P'Q'$ 的交点为 R，这时有

$$\triangle APP'\cong\triangle AQR,$$

$\therefore$ $S_{\triangle CPQ}=$四边形 $CP'RQ$ 面积$<S_{\triangle CP'Q'}$，而从 C 向 $P'Q'$ 引垂线小于 CA。因此 $\triangle CPQ$ 的面积小于 $\triangle CP'Q'$ 的面积。从底边 PQ 上的高大于 $P'Q'$ 上的高，所以底边 PQ 比底边 $P'Q'$ 小，故 PQ 垂直于 AC 时，即 PQ 被点 A 平分时，PQ 最小。

2717. 已知定角 BAC 的两边切于定圆 O，求作切线 BC，使 BC 的长最小。



解 设所求的直线 BC 已作出，则由 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，知

$$\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A.$$

又从 O 向 BC 引高为 OH，则 $OH=r$（r 为圆 O 的半径）。由此得 $\angle O$ 的大小及高 OH 一定，所以当 $OB=OC$ 时 BC 最小（问题 **2714**）。故在 $AB=AC$ 时，BC 为最小。

2718. 求作一条直线，被已知 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 割下线段 PQ，使 $BP+CQ=PQ$，且 PQ 为最小。

解 设所求直线 PQ 已作出，则由

$$PQ=PB+QC$$

知 $\triangle APQ$ 的周长 $AB+AC$ 为定值。作 $\triangle APQ$ 的旁切圆 O，设与 AB、AC 的切点分别为 E、F，则

$$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC).$$

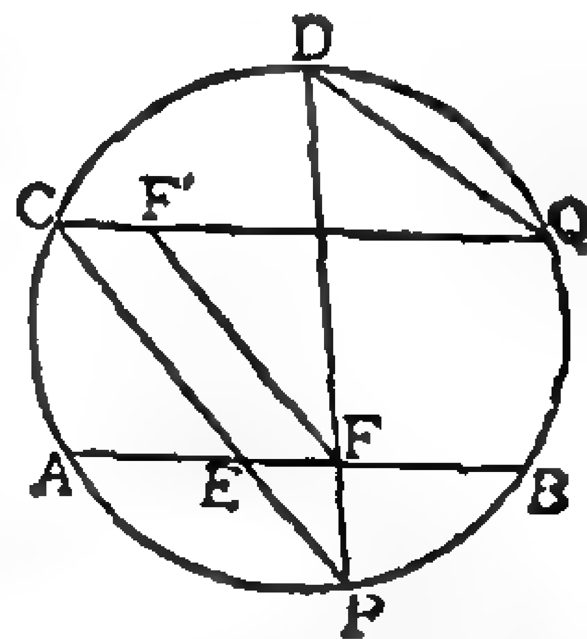
因而 E、F 是定点，圆 O 的位置一定。所以就归结为问题 **2715**，当 $AP=AQ$ 时，PQ 就是所求之最小线段。

2719. 以 AB 为弦的已知圆周上有两定点 C、D。在弧 AB 上求一点 P，使当 PC、PD 与 AB 的交点为 E、F 时，EF 为最大。

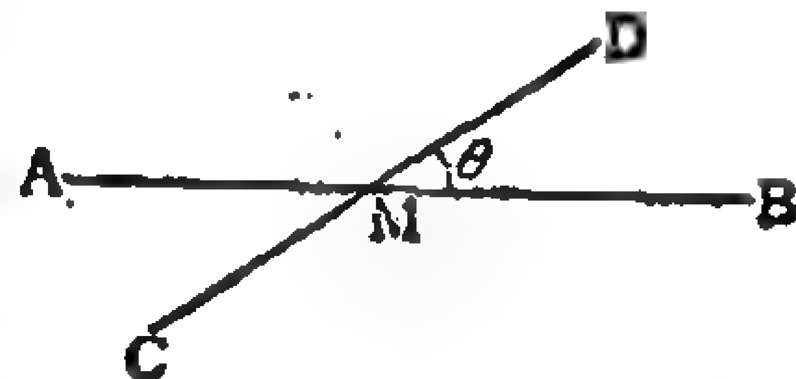
解 从 C 引 AB 的平行弦 CQ，在其上取一点 F'，使 $CF'=EF$，则四边形 $CEFF'$ 是平行四边形，从而

$$\angle F'FD=\angle CPD=\angle CQD.$$

过 D、Q、F' 的圆与 AB 相交于点 F，或是切点。在圆 DQF' 与 AB 相切时 EF（即 CF'）最大。由此作过 D、Q 的圆与 AB 相切，设切点为 F，此圆与 CQ 的交点为 F'。设延长 DF 与弧 AB 交于点 P，则点 P 即为所求之点。



2720. 若 $AB=20\text{cm}$，$CD=16\text{cm}$，AB 与 CD 相交于 CD 的中点 M，为使点 A、B、C、D 在同一圆周上，AM 的长是多少？过四点 A、B、C、D 的圆的大小是随 θ 而变化。将半径 R 表示为 θ 的函数，并求 R 的最小值。



解 设 $AM=x$，$MB=20-x$，$MC=MD$

$=8$. 由 $AM\cdot MB=MC\cdot MD$ 有

$$x(20-x)=8^2,$$

解出 x 得 $x=4$ 或 $x=16$. 若 $x=4$, 则 $MN=6$, 而

$$\angle DMB=\theta$$

有 $$\angle NMO=90^\circ-\theta,$$

$$ON=MN\cdot \operatorname{tg}(90^\circ-\theta)=MN\operatorname{ctg}\theta.$$

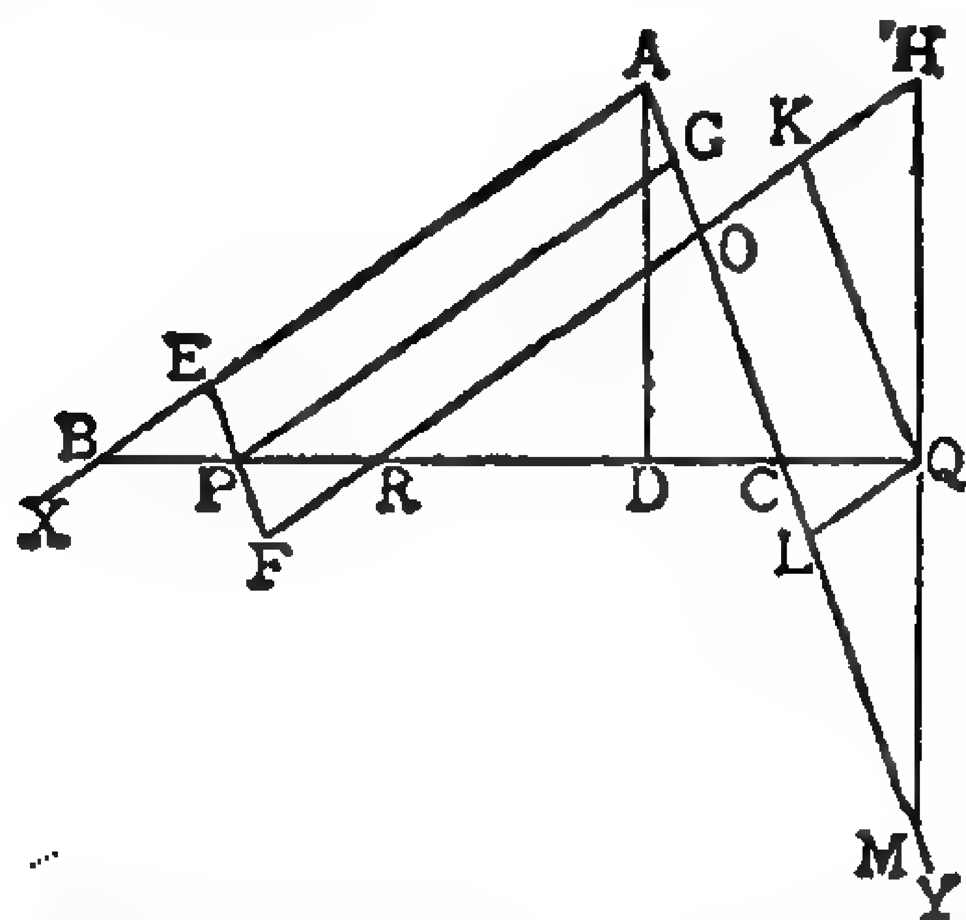
从而 $$ON=6\operatorname{ctg}\theta.$$

设圆的半径为 R, 则

$$R^2=OA^2=ON^2+AN^2=(6\operatorname{ctg}\theta)^2+100$$
$$=36\operatorname{ctg}^2\theta+100=4(9\operatorname{ctg}^2\theta+25).$$

当 $\operatorname{ctg}^2\theta=0$ 即 $\theta=90^\circ$ 时 R 最小。这时 $R=10$。

2721. 过已知角 XAY 内的定点 P 作线段 BPC, 设从点 A 向 BC 所作垂线为 AD, 则当 $PB=DC$ 时, BPC 最小。



解 我们证明, 当 $PB=DC$ 时, BC 最小。

设图中 $BP=PR=DC=CQ$, $PG\parallel FO\parallel AB$, $AGO\parallel EPF$, 且 $QK\parallel AY$, $QL\parallel AB$, $HQM\parallel AD$, 则 $PR=CQ$, $PG\parallel RK$, $GC\parallel KQ$, 因此 $\triangle GPC\cong\triangle KRQ$. 从两边减去 $\triangle ORC$ 得

四边形 $GPRO$ 面积＝四边形 $KOCQ$ 面积. ①

但是 $PR=CQ$, $PF\parallel CL$, $RF\parallel QL$, 所以

$$\triangle PFR\cong\triangle CLQ. \quad ②$$

由 ①、②, 得

$$\square GPFO \text{ 面积}=\square KOLQ \text{ 面积}. \quad ③$$

但是 $PB=PR$, $BE\parallel FR$, 可知 $FP=PE$,

$$\therefore\ \square AEPG \text{ 面积}=\square GPFO \text{ 面积}. \quad ④$$

由 ③、④ 得

$$\square KOLQ \text{ 面积}=\square AEPG \text{ 面积（一定）}. \quad ⑤$$

由 $\qquad DC=CQ,\ AD\parallel QM$

知 $\qquad AD=QM.$

又由 $\qquad \triangle ABD\cong\triangle HRQ$

知 $\qquad AD=HQ,$

$$\therefore\ HQ=QM. \quad ⑥$$

因此 Q 是 $\triangle HOM$ 的一边 HM 的中点。从而 $\square KOLQ$ 是 $\triangle HOM$ 内最大的平行四边形 (问题 2813)。如果过点 P (除 BQ 外) 引任意直线 $B'Q'$, 除 $\square KOLQ$ 外, 作另一个平行四边形 $K'O'L'Q'$, 与上面一样有

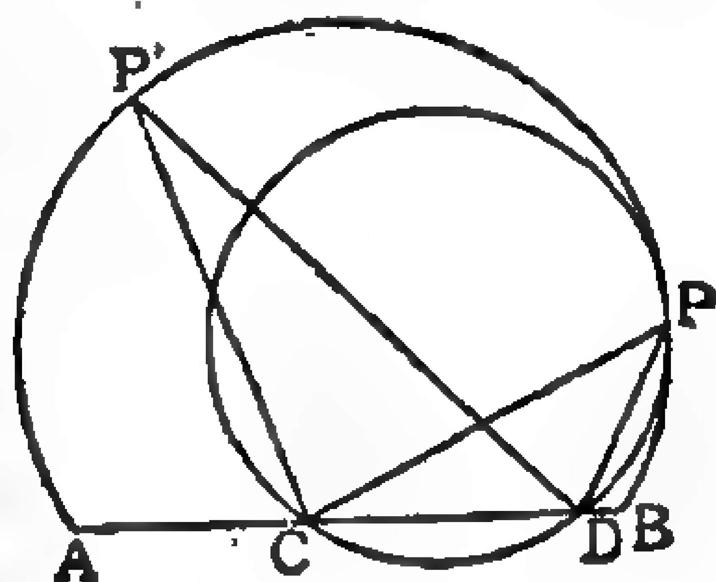
$$\square K'O'L'Q' \text{ 面积}=\square AEPG \text{ 面积}$$
$$=\square KOLQ \text{ 面积}.$$

但是 $\square KOLQ$ 是 $\triangle HOM$ 内面积最大的, 因此与它等积的 $\square K'O'L'Q'$ 不可能在 $\triangle HOM$ 内, 从而 Q' 在 $\triangle HOM$ 之外. 可是 $PQ=BC$, $PQ'=B'C'$ 有 $BC<B'C'$, 故 BC 为最小。

注 这条直线是用圆规、直尺作出的, 它原是初等几何作图不能问题, 这条直线叫做弗尔洛线。

2. 角的最大、最小

2722. 已知弓形的弦 AB 上有两定点 C、D, 在弓形弧上求一点 P, 使 $\angle CPD$ 为最大。

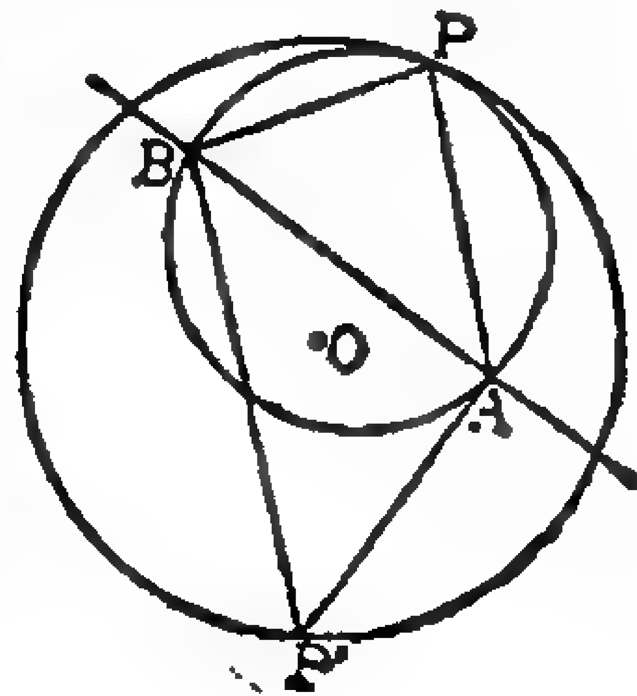


解 过 C、D 两点作弓形弧的内切圆, 其切点 P 即为所求之点。其理由是, 因为圆 CPD 与弓形弧相切, 因此在弓形弧 AB 上任意取一点 P', 则 P' 在弧 CPD 之外,

$$\therefore\ \angle CPD>\angle CP'D,$$

故点 P 是适合条件的点。

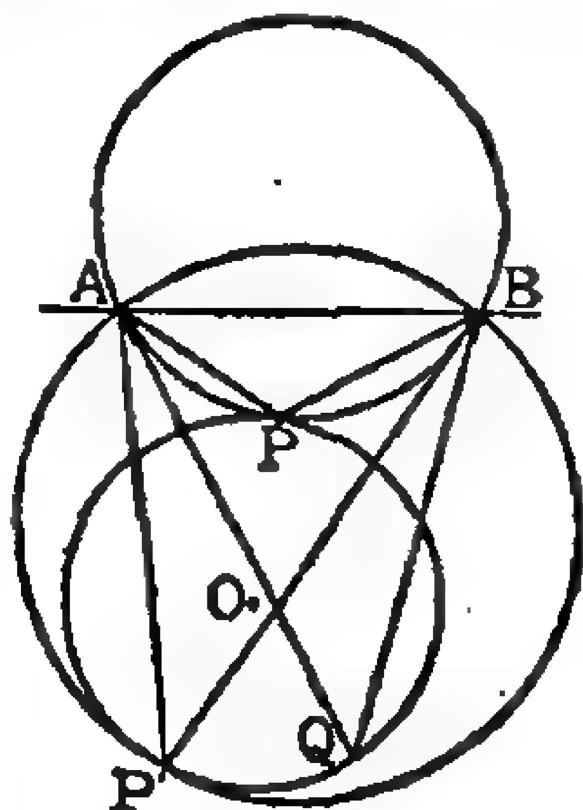
2723. 在已知圆 O 内有两定点 A、B, 在圆周上求一点 P, 使 $\angle APB$ 最大。



解 过点 A、B 作圆 O 的内切圆, 设其切点为 P, 则点 P 是使 $\angle APB$ 为最大的点. 证明与上题相同。

2724. 已知在圆 O 外有两定点 A、B，在圆周上求一点 P，使 $\angle APB$ 为最大或最小。其中设 AB 与圆 O 不相交。

解 ［作图］ 过 A、B 作圆 O 的外切圆，其切点 P 即为所求的使 $\angle APB$ 为最大的点。其次，过 A、B 作圆 O 的内切圆，其切点 P' 就是使 $\angle AP'B$ 为最小之点。



［证明］ 在已知圆周上作（除 P 外）任一点 Q，则点 Q 在圆 APB 之外，因此 $\angle APB>\angle AQB$。所以点 P 是使 $\angle APB$ 为最大之点。又点 Q 在圆 $AP'B$ 内部，因此 $\angle AP'B<\angle AQB$。所以 P' 是使 $\angle AP'B$ 为最小之点。

2725. 在锐角 XOY 的一边 OY 上有两点 A、B，在 OX 上求一点 P，使 $\angle APB$ 为最大。当 $OA=4\text{cm}$，$AB=5\text{cm}$ 时，求 OP 之长。

解 过 A、B 作与 OX 相切的圆，设切点为 P，则 P 即为所求之点。其理由是，因为 OX 上的点与弧 APB 在 AB 的同侧，在弓形 APB 外（除点 P）的 OX 上任取一点 P'，则

$$\angle AP'B<\angle APB.$$

点 P 的作图方法如下。

过 A、B 作任意圆，由点 O 引此圆的切线 OT，在 OX 上取 $OP=OT$，则点 P 即为所求。事实上，由作图知

$$OP^2=OT^2=OA\cdot OB,$$

所以过点 A、B、P 的圆，在点 P 与 OX 相切。其次，当 $OA=4\text{cm}$，$AB=5\text{cm}$ 时，

$$OP^2=OA\cdot OB=4(4+5)=36,$$

$$\therefore\ OP=6\text{cm}.$$

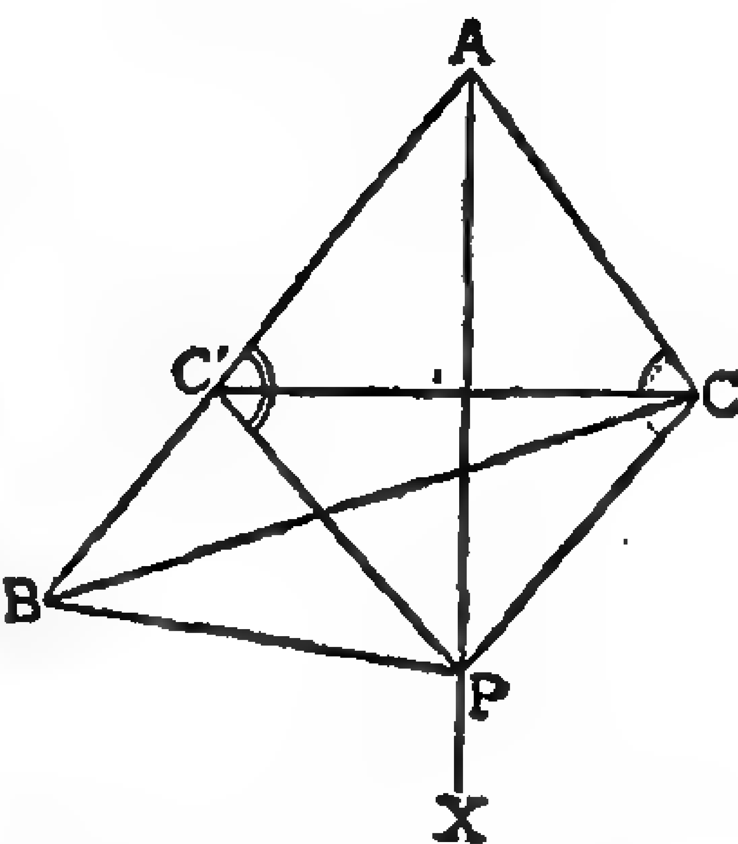
2726. 在已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 平分线 AX 上求一点 P，使 $\angle PBA\sim\angle PCA$ 为最大。

解 设 $AB>AC$，在 AB 上取 $AC'=AC$，连结 PC'，由于 AX 是 $\angle A$ 的平分线，所以

$$\angle ACP=\angle AC'P,$$

因而

$$\angle ACP-\angle ABP=\angle AC'P-\angle ABP=\angle BPC'.$$



因此使 $\angle BPC'$ 为最大就可以了。过点 B、C' 作与 AX 相切的圆，则其切点 P 即为所求之点。

2727. 在已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 平分线 AX 上求一点 P，使 $\angle PBC\sim\angle PCB$ 为最大。

解 设 $\angle ABC=\alpha$，$\angle ACB=\beta$，则

$$\angle PBC=\angle ABP-\alpha,$$

$$\angle PCB=\angle ACP-\beta.$$

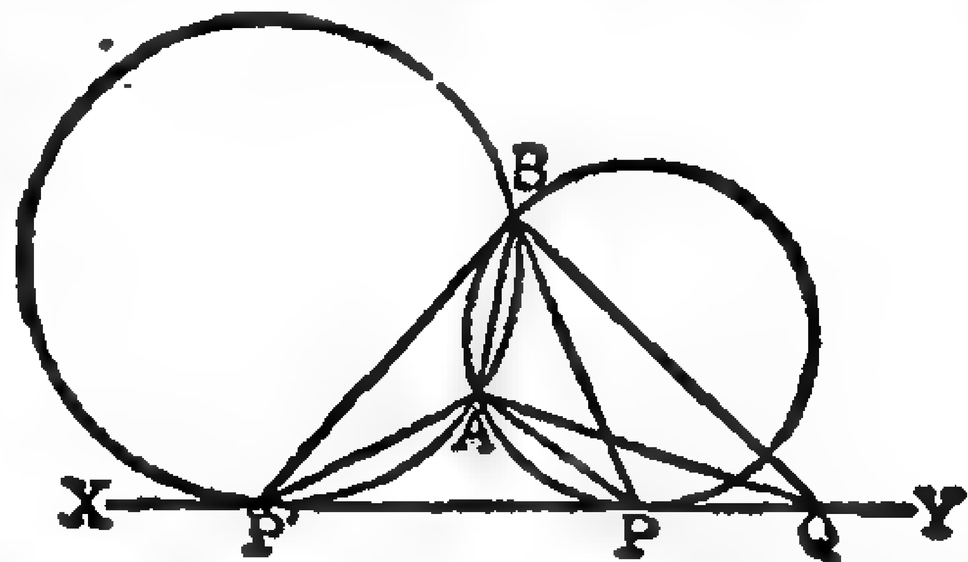
因此

$$\angle PBC\sim\angle PCB=(\angle ABP\sim\angle ACP)-(\alpha\sim\beta).$$

但是 $(\alpha\sim\beta)$ 一定，为使 $\angle PBC\sim\angle PCB$ 为最大，只要 $\angle ABP\sim\angle ACP$ 最大就可以了。从而本题的结论包含在上题中。

2728. 设在已知直线 XY 的同侧有两定点 A、B，在此直线上求一点 P，使 $\angle APB$ 最大。

解 ［作图］ 过 A、B 作两圆与 XY 相切，小圆与直线的切点 P 即为所求的使 $\angle APB$ 为最大的点。

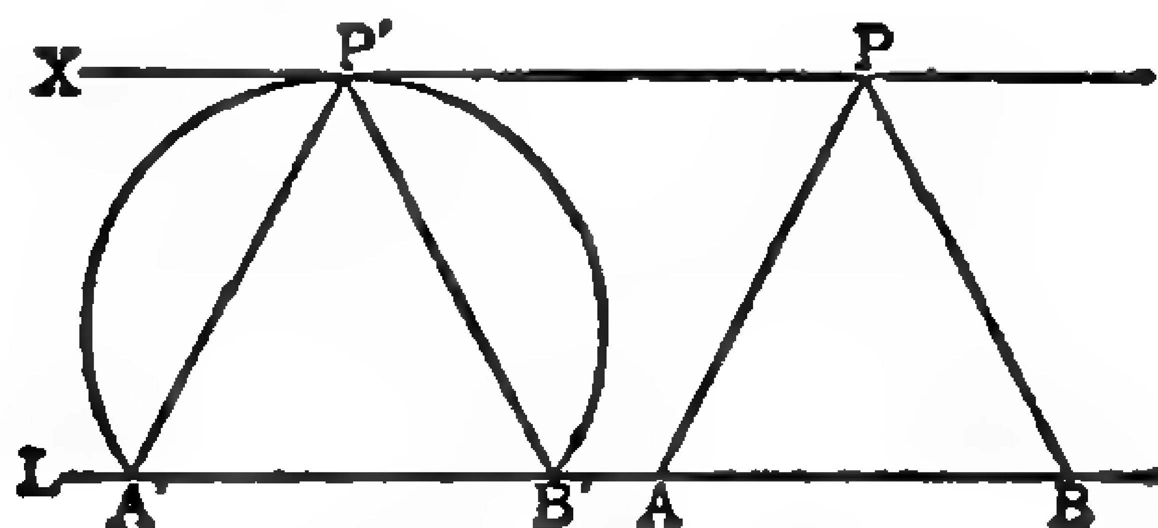


［证明］ 设直线 XY 与小圆的切点为 P，大圆的切点为 P'。在 XY 上任取一点 Q，与 P 在 AB 的同侧，则点 Q 在小圆之外，有 $\angle APB>\angle AQB$。同理，在 AB 同侧的点 P' 中，有 $\angle AP'B$ 最大。而圆 ABP' 比圆 ABP 大，所以在同一弦 AB 上的角 $\angle APB>\angle AP'B$，故点 P 是使 $\angle APB$ 为最大的点。

2729. 在已知直线 L 上求作等于定长 m 的线段 AB，过 L 外一定点 P 与 A、B 连结，

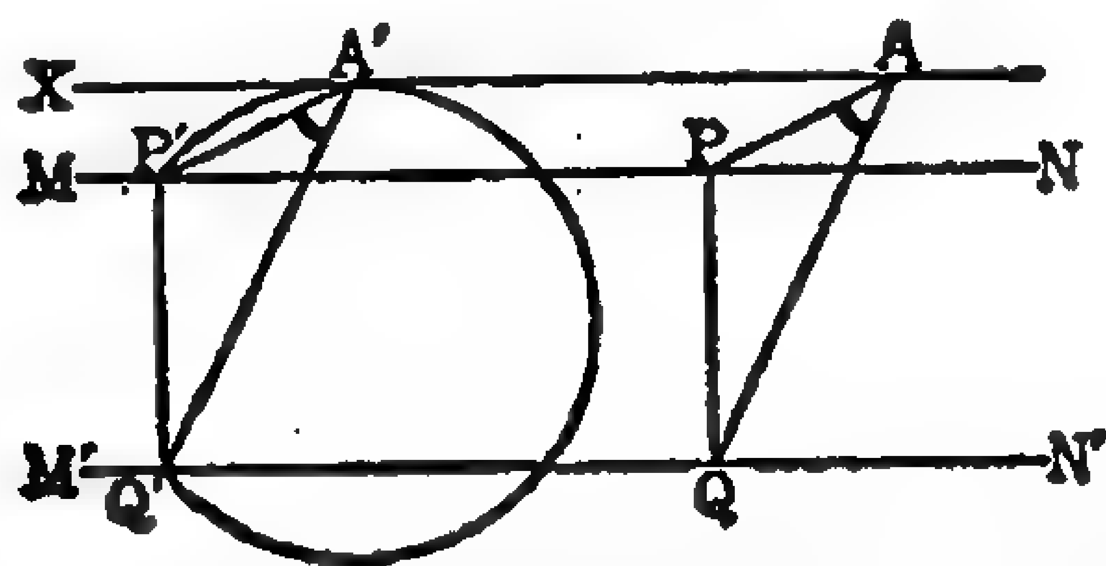
使 $\angle APB$ 最大.

解 [分析] 在直线 L 上取长等于 m 的线段 $A'B'$，从 P 引 L 的平行线 PX. 在 PX 上求一点 P'，连结 $P'A'$, $P'B'$，使 $\angle A'P'B'$ 最大，则圆 $A'P'B'$ 在点 P' 处与 PX 相切. 由此可作图如下.



[作图] 在 L 上取长等于 m 的线段 $A'B'$，过 P 引 L 的平行线 PX，以 $A'B'$ 为弦作圆与 PX 相切，P' 为其切点. 再从 P 引平行于 $P'A'$、$P'B'$ 的直线，设它与 L 的交点分别为 A、B，则 AB 即为所求作之线段.

2730. 设有两条平行线 MN、$M'N'$ 及平行线外一定点 A. 在 MN、$M'N'$ 之间求作一条公垂线 PQ，使 $\angle PAQ$ 为最大.

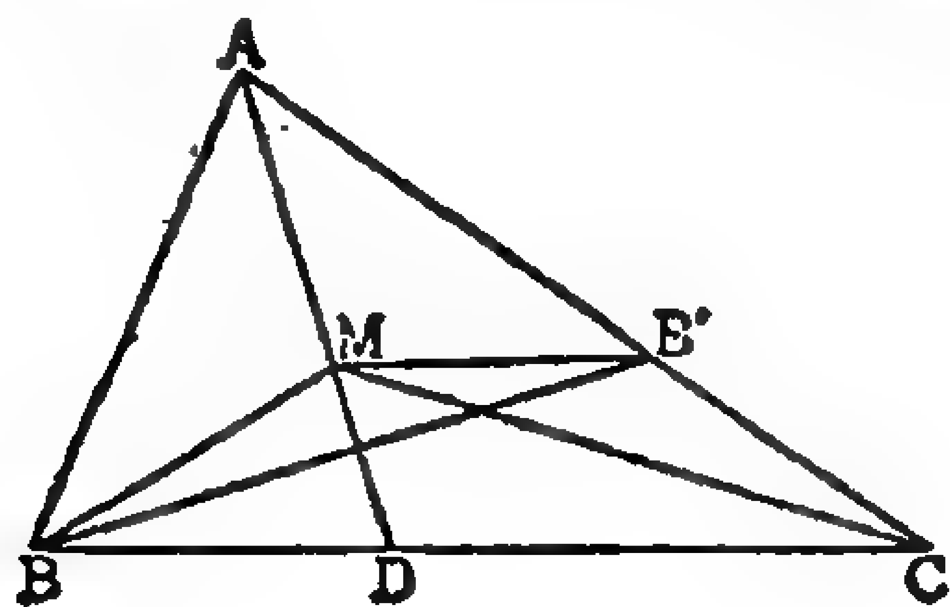


解 从点 A 引 MN 的平行线 AX，在 MN、$M'N'$ 之间任引一公垂线 $P'Q'$，在 AX 上求一点 A' 使 $\angle P'A'Q'$ 最大，根据上题知，圆 $P'A'Q'$ 与 AX 相切于点 A'. 过点 P'、Q' 作切于 AX 的圆，设其切点为 A'. 过 A 引 $A'P'$、$A'Q'$ 的平行线 AP、AQ，设它们与 MN、$M'N'$ 的交点分别为 P、Q，则

$\triangle PAQ \cong \triangle P'A'Q'$, $\angle PAQ = \angle P'A'Q'$,

故 PQ 是所求的适合于条件的公垂线.

2731. 在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 平分线 AD 上求一点 M，使 $\angle DMB \sim \angle DMC$ 为最大.

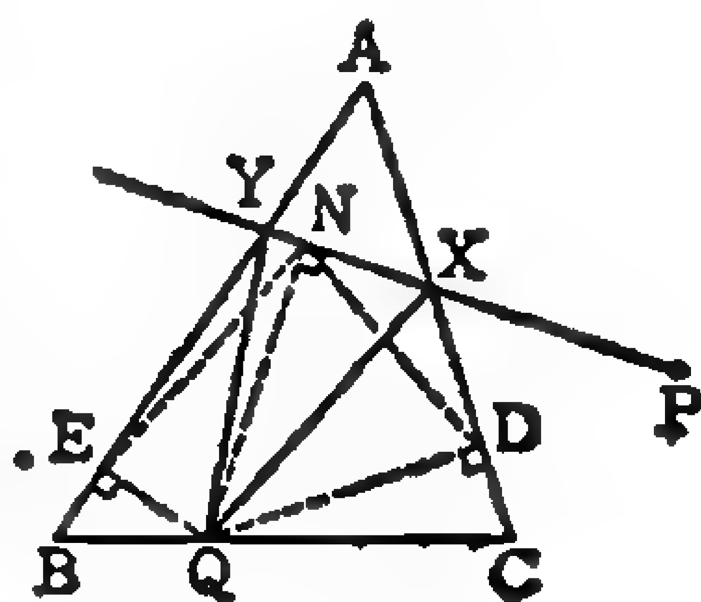


解 设 B 点关于 AD 的对称点为 B'，则由 $\angle DMB = \angle DMB'$ 有

$$\angle DMB \sim \angle DMC = \angle DMB' \sim \angle DMC = \angle B'MC.$$

因此，求点 M 使 $\angle B'MC$ 最大就可以了. 由于 B'、C 是定点，且 AD 是定直线. 由此过 B'、C 作切于 AD 的圆有两个，其中小圆的切点 M 即为所求之点.

2732. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 外一定点，Q 为其一边上的定点. 过 P 引一条直线截三角形的另外两边于 X、Y，使 $\angle XQY$ 等于已知角 α. 又使 $\angle XQY$ 为最大，求直线的位置.



解 设 Q 为 BC 边上的定点，且适合题意的直线 PXY 已作出. 从 Q 向 AC、AB、PXY 分别作垂线 QD、QE、QN，则

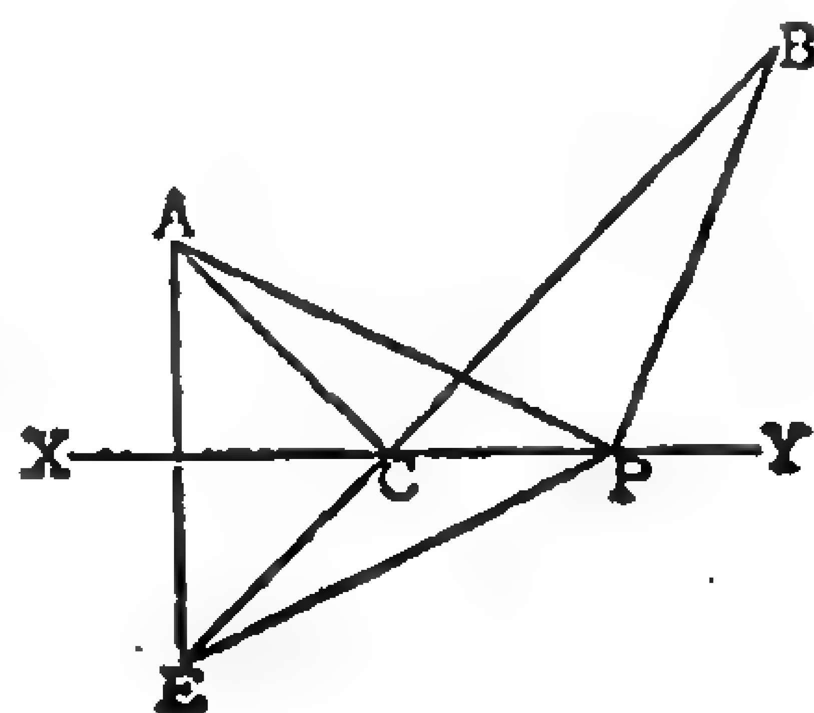
$$\begin{aligned}\angle DNE &= \angle A + \angle AEN + \angle ADN \\ &= \angle A + \angle YQN + \angle XQN \\ &= \angle A + \angle XQY \\ &= \angle A + \angle\alpha \ (\text{一定}).\end{aligned}$$

因此点 N 在以 ED 为弦含定角 $\angle A + \angle\alpha$ 的弓形弧上. 又 $\angle QNP$ 为直角，P、Q 都是定点，所以 N 在以 PQ 为直径的圆周上，从而点 N 在这两个圆弧的交点上. 故直线 PXY 即可作出. 如果点 Q 在 $\triangle AXY$ 的内部时，$\angle DNE = \angle\alpha - \angle A$，与前面一样，直线 PXY 亦可作出.

其次，当直线 PXY 过点 Q 时 $\angle XQY$ 最大，即为所求.

3. 两条(或几条)线段的和、差的最大、最小

3733. 已知直线 XY 外有两定点 A、B，在 XY 上求一点 C，使 $AC + BC$ 为最小.



解 [作图] (i) 若 A、B 在 XY 的同侧时，取点 A 关

于 XY 的对称点 E，连结 BE，设与 XY 交于点 C，则 C 即为所求之点。

(ii) 若 A、B 在 XY 的两侧时，则 AB 与 XY 的交点 C 即为所求之点。

[证明] (i) 在 XY 上另取一点 P，由于 C、P 都是 AE 的垂直平分线上的点，于是 $AC=EC$，$AP=EP$。

$$\therefore \quad AC+BC=EC+BC=BE,$$
$$AP+BP=EP+BP.$$

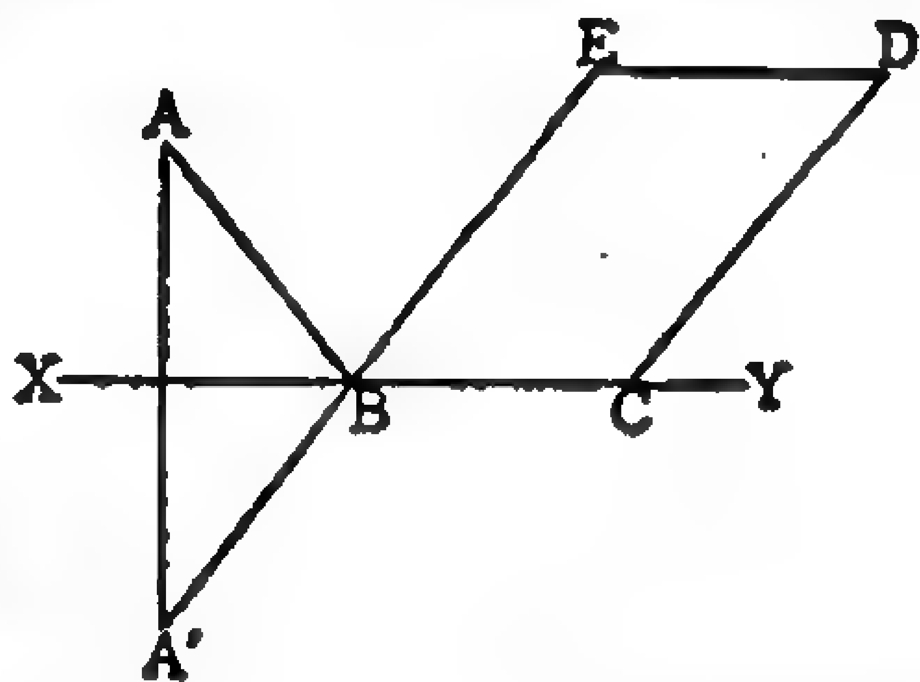
而 $BE<EP+BP$，$\therefore AC+BC<AP+BP$。

(ii) 设在 XY 上任取一点 P，则在 $\triangle ABP$ 中有

$$AB<AP+BP,$$

即 $$AC+BC<AP+BP.$$

2734. 在已知直线 XY 的同侧有两定点 A、D，在 XY 上求两点 B、C，使 BC 之长等于已知线段 l，且 AB、BC、CD 之和为最小。



解　设点 B、C 已求出，由 D 引 BC 的平行线 $DE=BC$，则

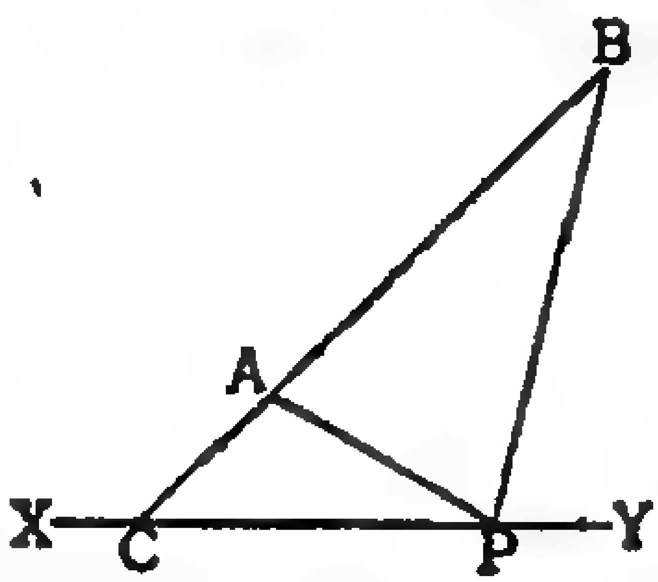
$$AB+BC+CD=AB+ED+BE.$$

因为 $BC=l$，有 $DE=l$，从而点 E 是定点。由此要使 $AB+BE+ED$ 最小，必须使 $AB+BE$ 为最小。故得作图如下。

[作图] 取点 A 关于 XY 的对称点 A'，由 D 引 XY 的平行线 DE 且等于 l。设 $A'E$ 与 XY 的交点为 B，由 D 引 BE 的平行线 DC，与 XY 的交点为 C，则 B、C 即为所求之点(参照上题)。

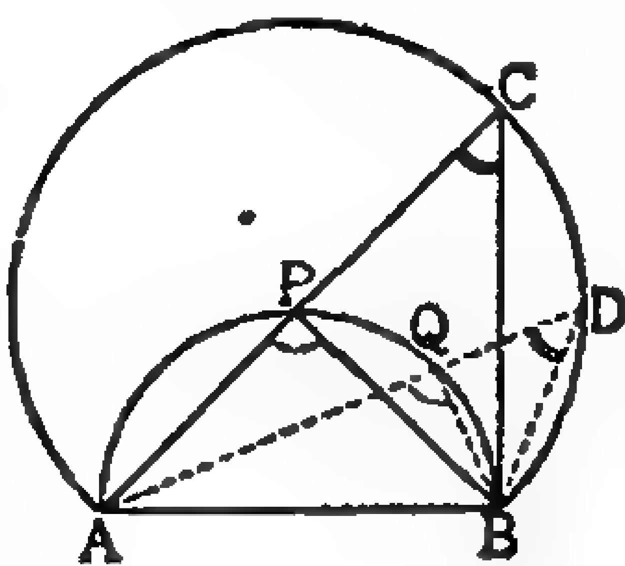
2735. 已知直线 XY 外有两点 A、B，在 XY 上求一点 C，使 $AC\sim BC$ 为最大。

解 [作图] (i) 若 A、B 都在 XY 的同侧时，延长 AB 与 XY 的交点为 C，则 C 即为所求之点。



(ii) 若 A、B 在 XY 的异侧时，设点 A 关于 XY 的对称点为 E，则延长 BE 与 XY 的交点 C 即为所求之点。

[证明] (i) 在 XY 上另取任意点 P，则在 $\triangle ABP$ 中 $AB>AP\sim BP$，即 $AC\sim BC>AP\sim BP$。



(ii) 设在 XY 上另取任意点 P，则 $\triangle APC\cong\triangle EPC$。

$$\therefore \quad AC=EC,$$
$$AP=EP.$$

因而 $$AC\sim BC=EC\sim BC=EB,$$
$$AP\sim BP=EP\sim BP.$$

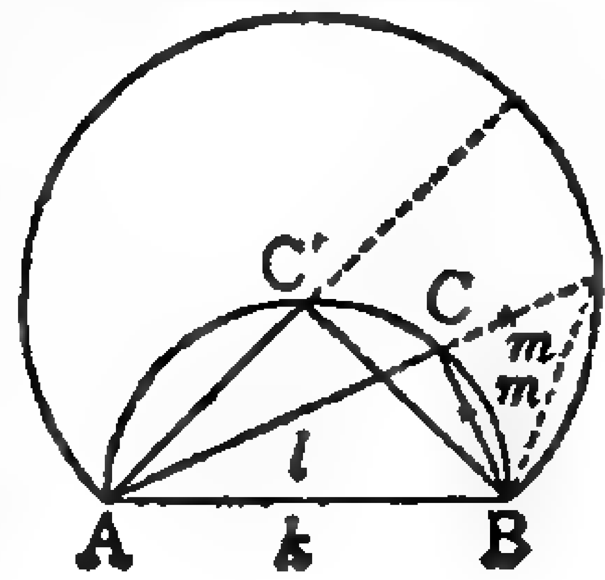
但是在 $\triangle BEP$ 中 $BE>PE\sim BP$，

$$\therefore \quad AC\sim BC>AP\sim BP.$$

2736. 在以 AB 为弦的圆弧上求一点 P，使 $AP+BP$ 为最大。

解 [作图] 设弧 AB 的中点为 P，则 $AP+BP$ 最大。

[证明] 由于 P 是弧 AB 的中点，$\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{BP}$，因此以 P 为圆心、PA 为半径的圆过点 B。延长 AP 与圆交于点 C，则 $PB=PC$，



$$\therefore \quad AP+PB=AP+PC=AC.$$

又在弧 APB 上另取任意点 Q，延长 AQ 与弧 ACB 交于点 D，则 $\angle ACB=\angle ADB$。

而 $$\frac{1}{2}\angle APB=\angle ACB,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\angle AQB=\angle ADB.$$

因而 $$QD=QB,$$

$$\therefore \quad AQ+QB=AQ+QD=AD.$$

由于点 P 过 A、C、D、B 的圆心，因而 APC 是其直径。

$$\therefore \quad AC>AD,\ AP+PB>AQ+QB,$$

故 P 是所求之点。

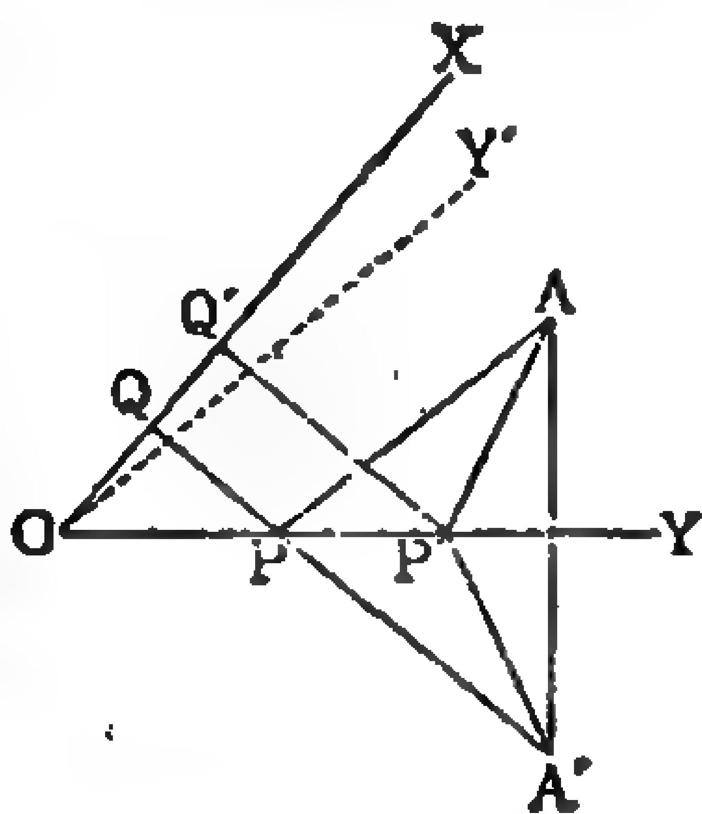
2737. 设两条线段为 l、m，若 l^2+m^2 是一个定值 $k^2(k>0)$，求 $l+m$ 的最大值。

解　因为 $l^2+m^2=k^2$，若 AC、BC、AB 分别等于 l、m、k 的 $\triangle ABC$ 是 $\angle ACB$ 为直角的三角形。从而本题就是讨论，当直角三角形斜边

是一定时，求其他两边之和为最大。由此与上题一样，以 AB 为直径作半圆，然后按前面的作图就可以了（最大值是 $\sqrt{2}k$）。

2738. 已知 $\angle XOY$ 内有一定点 A. 在 OY 上求一点 P，从 P 向 OX 作垂线 PQ，使 $AP+PQ$ 为最小。设 $\angle XOY\leq 45°$.

解　［作图］ 取点 A 关于 OY 的对称点 A'. 从 A' 向 OX 作垂线，其垂足为 Q. 设此垂线与 OY 的交点为 P，则 P 即为所求之点。



［证明］ 在 OY 上（除点 P 外）任取一点 P'，由 P' 向 OX 作垂线，垂足为 Q'. 连结 AP'，$A'P'$，则 $AP'=A'P'$. 于是

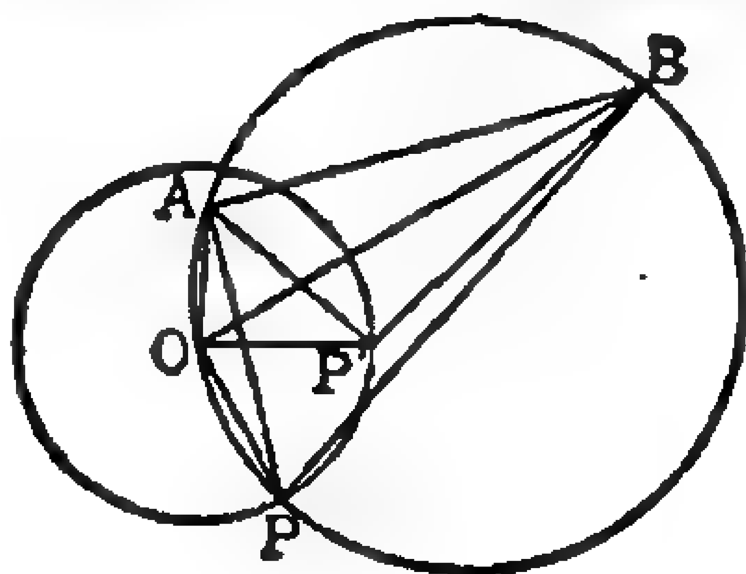
$$A'P'+P'Q'>A'Q,$$

从而　　$$AP'+P'Q'>AP+PQ.$$

注　本题是设 $\angle XOY\leq 45°$. 如果 $\angle XOY>45°$，在 $\angle XOY$ 内引直线 OY' 使 $\angle YOY'$ 为 $\angle XOY$ 的余角。若 A 在 $\angle XOY'$ 内部时，点 A 关于 OY 的对称点 A'，由 A' 向 OX 作垂线 $A'Q$，当 Q 在 OX 的延长线上，则不能作图。当 $\angle XOY>45°$，且 A 在 $\angle YOY'$ 内时，上述的作图总是可能的。

2739. 设定点 A 在定圆 O 内，定点 B 在圆 O 外，且 $OA:OB=m:n$（已知比）。在此圆周上求一点 P，使 $n\cdot PA\sim m\cdot PB$ 为最大。

解　［作图］ 过 A、O、B 作圆，与圆 O 的交点为 P，且点 P 与点 O 在 AB 的同侧，则点 P 即为所求之点。



［证明］ 在圆 O 上（除点 P 外）另取任意点 P'，则四边形 $AOP'B$ 是圆内接四边形，因此 $OB\cdot AP'<OA\cdot BP'+OP'\cdot AB$（问题 **1504**）即

$$OB\cdot AP'-OA\cdot BP'<OP'\cdot AB.$$

根据假设 $\dfrac{OA}{m}=\dfrac{OB}{n}=\dfrac{1}{k}$，则

$$n\cdot AP'-mBP'<k\cdot OP'\cdot AB.$$

因为四边形 $AOPB$ 是圆内接四边形，因此

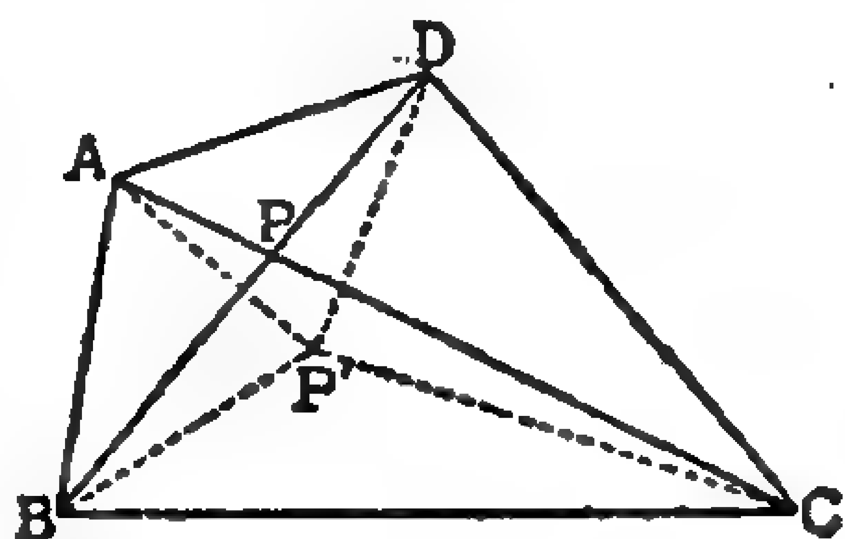
$$OB\cdot AP=OA\cdot BP+OP\cdot AB.$$

$$\therefore\quad n\cdot AP-m\cdot BP=k\cdot OP\cdot AB,$$

故　$$n\cdot AP'-m\cdot BP'<n\cdot AP-m\cdot BP.$$

2740. 在凸四边形 $ABCD$ 的平面上求一点 P，使 $PA+PB+PC+PD$ 为最小。

解　设两条对角线 AC、BD 的交点为 P，则 P 即为所求之点。其理由是，任取一点 P'，连结 $P'A$，$P'B$，$P'C$，$P'D$，则



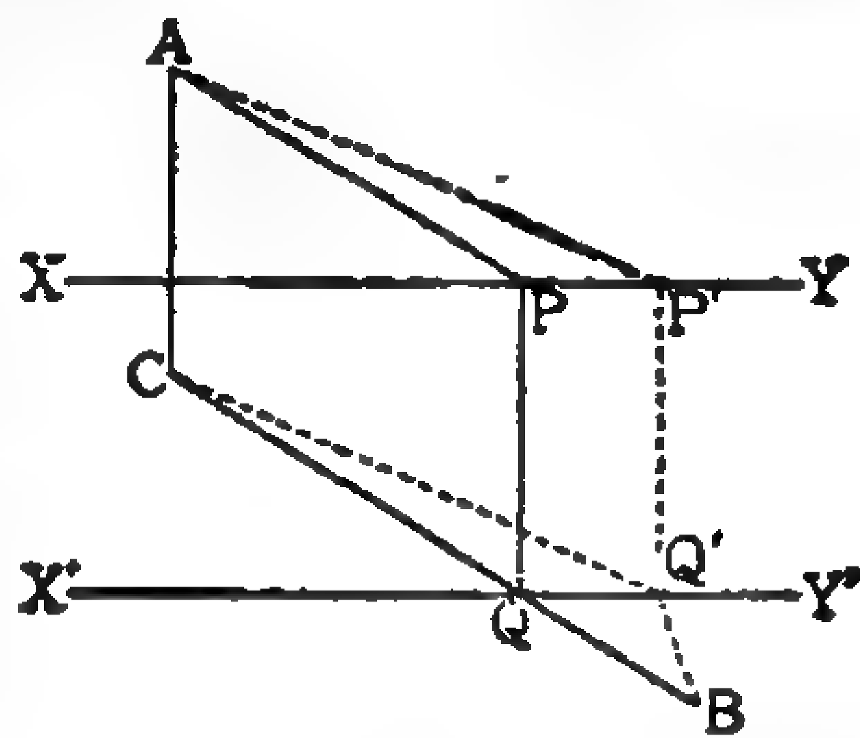
$$PA+PC<P'A+P'C,$$
$$PB+PD<P'B+P'D.$$

若 P' 在对角线上时，上述两不等式中有一个为等式，所以下列关系总成立。

$$\therefore\quad PA+PB+PC+PD<P'A+P'B+P'C+P'D.$$

2741. 在平面上有两条平行线 XY、$X'Y'$，它的两侧各有一个定点 A、B. 求从一个定点至另一个定点的最短距离。其中经过平行线间的线段是平行线间的公垂线。

解　［作图］ 设定点 A 在 XY 的外侧，定点 B 在 $X'Y'$ 的外侧。从 A 向 XY 作垂线，在其上取等于平行线间的距离的线段 AC. 设 CB 与 $X'Y'$ 的交点为 Q，从 Q 作 $X'Y'$ 的垂线 QP，与 XY 交于点 P，则 $APQB$ 即为所求之最短距离。



［证明］ 在 $X'Y'$ 上（除点 Q 外）任取一点 Q'，由 Q' 向 XY 作垂线 $Q'P'$，则有 $P'Q'\mathrel{\underline{\parallel}}PQ\mathrel{\underline{\parallel}}AC$，$\therefore AP'=CQ'$.

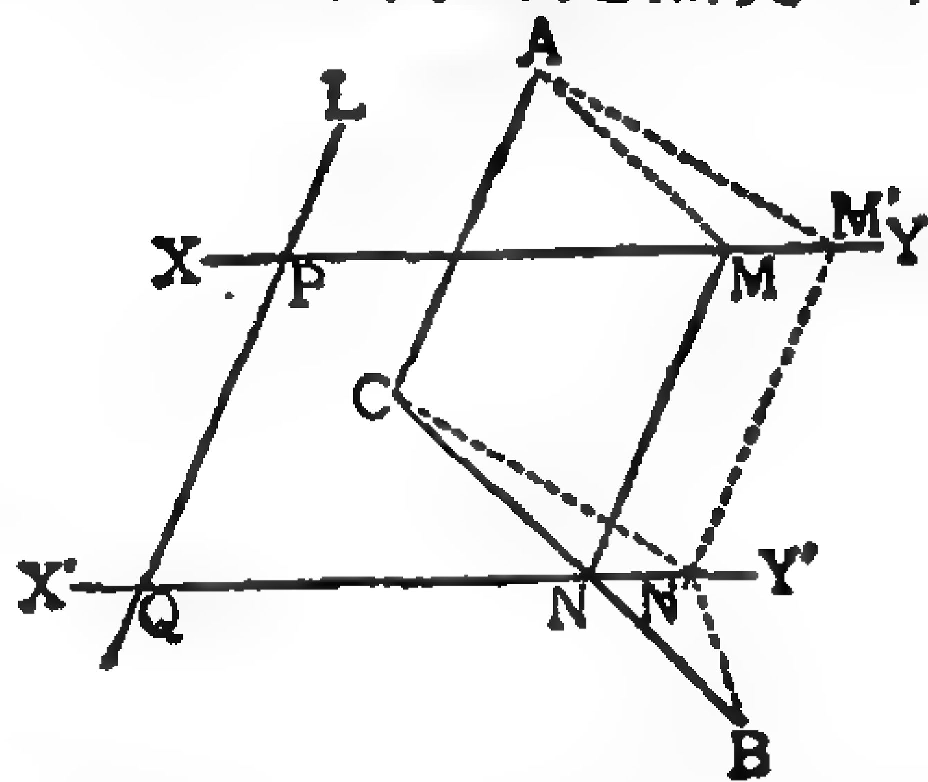
因而　$$AP'+P'Q'+Q'B=CQ'+Q'B+AC,$$
$$AP+PQ+QB=CQ+QB+AC=CB+AC.$$

但是　　$$CB<CQ'+Q'B.$$

$$\therefore\quad AP+PQ+QB<AP'+P'Q'+Q'B.$$

2742. 已知两条平行线 XY、$X'Y'$，A、B 是平行线两侧的点。试在此平行线间作已知方向的直线 MN，使折线 $AMNB$ 为最短。

解　[作图]　设 XY 外侧的定点为 A，$X'Y'$ 外侧的定点为 B，且已知方向的直线为 L，L 在平行线间的线段为 PQ。如图作线段 AC，使 $AC \perp\!\!\!= PQ$。连结 CB 与 $X'Y'$ 的交点为 N，过 N 引平行于 L 的直线与 XY 的交点为 M，则折线 $AMNB$ 即为所求之最短折线。



[证明]　在 $X'Y'$ 上(除点 N 外)任取一点 N'，过 N' 引平行于 L 的直线与 XY 交于点 M'，则

$$M'N' \perp\!\!\!= MN \perp\!\!\!= AC, \quad \therefore \quad AM' = CN'.$$

而　$AM'+M'N'+N'B=AC+CN'+N'B$，

又　$AM+MN+NB=AC+CN+NB$
$=AC+CB$。

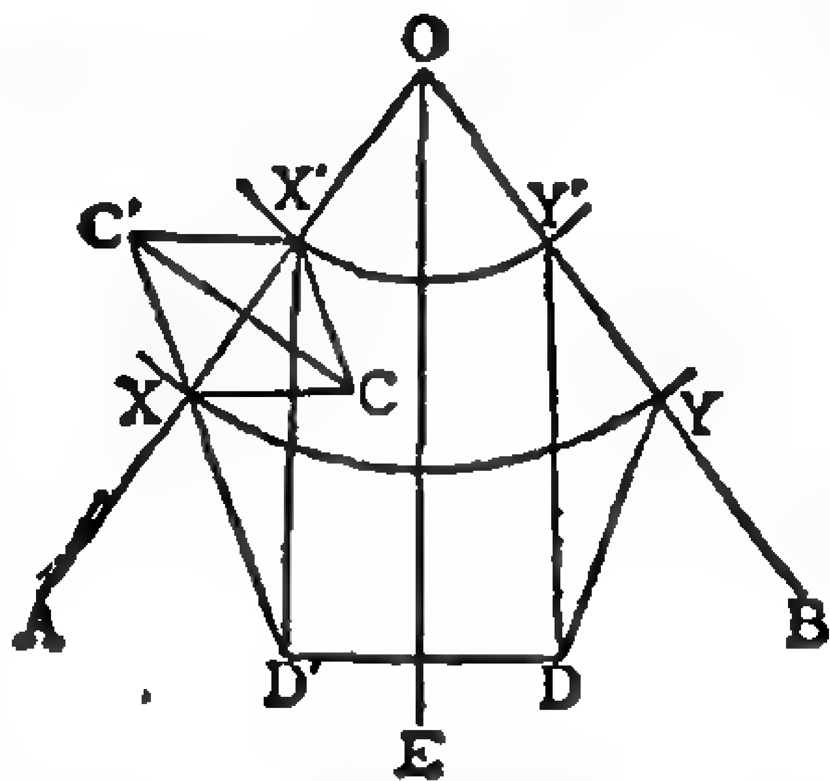
且　$CB<CN'+N'B$，

$\therefore \quad AM+MN+NB<AM'+M'N'+N'B$，

故折线 $AMNB$ 为最短。

2743. 在已知角 AOB 内有两定点 C、D，以 O 为圆心求作一圆与角两边分别交于 X、Y，且使 $CX+DY$ 为最小。

解　[作图]　作 $\angle AOB$ 的平分线 OE，设点 D 关于 OE 的对称点为 D'，点 C 关于 OA 的对称点为 C'，连结 $C'D'$ 与 OA 的交点为 X。以 O 为圆心，OX 为半径作圆，设与 OB 的交点为 Y，则 X、Y 即为所求之点。



[证明]　在 OA 上(除点 X 外)任取一点 X'，以 O 为圆心、OX' 为半径作圆与 OB 的交点为 Y'，则

$$CX'+DY'=C'X'+D'X',$$
$$CX+DY=C'X+D'X=C'D'.$$

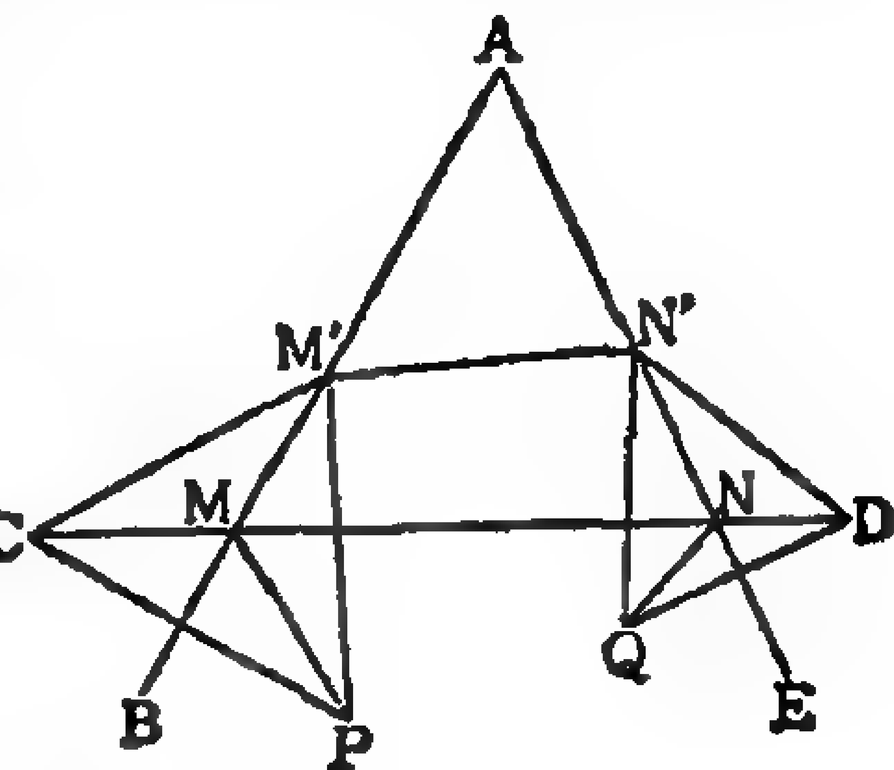
而　$C'D'<C'X'+D'X'$，

$\therefore \quad CX+DY<CX'+DY'$，

故 $CX+DY$ 为最小。

2744. 在 $\angle BAE$ 内有两点 P、Q，在边 AB、AE 上分别取点 M、N，使 $PM+MN+NQ$ 为最小。

解　[作图]　设 P 关于 AB 的对称点为 C，点 Q 关于 AE 的对称点为 D。设 CD 与 AB、AE 的交点分别为 M、N，则 M、N 即为所求之点。



[证明]　因为 $PM=CM$，$NQ=ND$，所以

$$PM+MN+NQ=CD.$$

在 AB、AE 上取另外的点 M'、N'，则

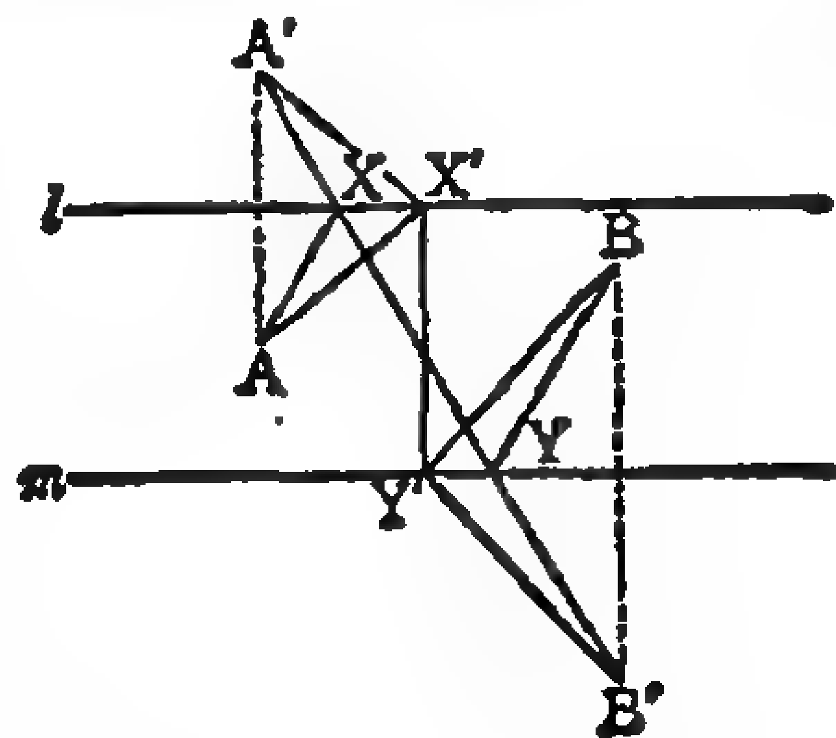
$$PM'+M'N'+N'Q=CM'+M'N'+N'D,$$

而　$CD<CM'+M'N'+N'D$，

因此　$PM+MN+NQ<PM'+M'N'+N'Q$。

故 M、N 分别在 AB、AE 上使 $PM+MN+NQ$ 为最小的点。

2745. 在平面上两条平行线 l、m 之间有两个已知点 A、B，在 l 上求一点 X，在 m 上求一点 Y，使 $AX+XY+YB$ 为最小。



解　取 A 关于 l 的对称点 A'，B 关于 m 的对称点 B'，则

$$AX+XY+YB=A'X+XY+YB',$$

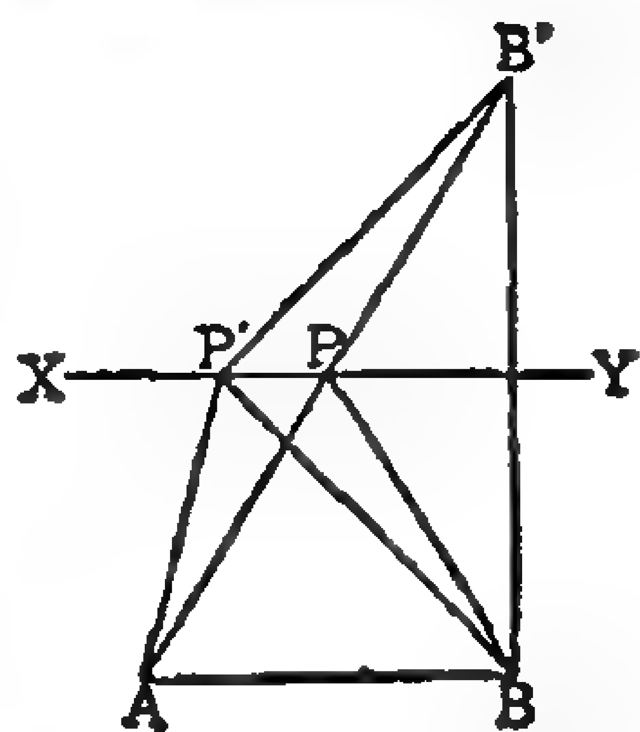
要使 $AX+XY+YB$ 为最小，只要 $A'X+XY+YB'$ 最小即可。为此，连结 $A'B'$ 的直线与 l、m 的交点分别为 X、Y，则 X、Y 即为所求之点。事实上，若在 l、m 上任取点(至少有一个与 X、Y 不同)X'、Y'，则由

$$AX+XY+YB=A'X+XY+YB'=A'B',$$
$$AX'+X'Y'+Y'B=A'X'+X'Y'+Y'B'>A'B'.$$

$\therefore \quad AX+XY+YB<AX'+X'Y'+Y'B$。

2746. 已知两定点 A、B，平行于 AB 的直线 XY，在 XY 上求一点 P，使 $PA+PB$ 为最小。

解　设点 B 关于 XY 的对称点为 B'，$B'A$ 与 XY 的交点为 P，则 P 即为所求之点。其理由是，因为 B、B' 是关于 XY 的对称点，所以 A、P、B' 在一条直线上，因此



$$PA+PB=PA+PB'=AB'.$$

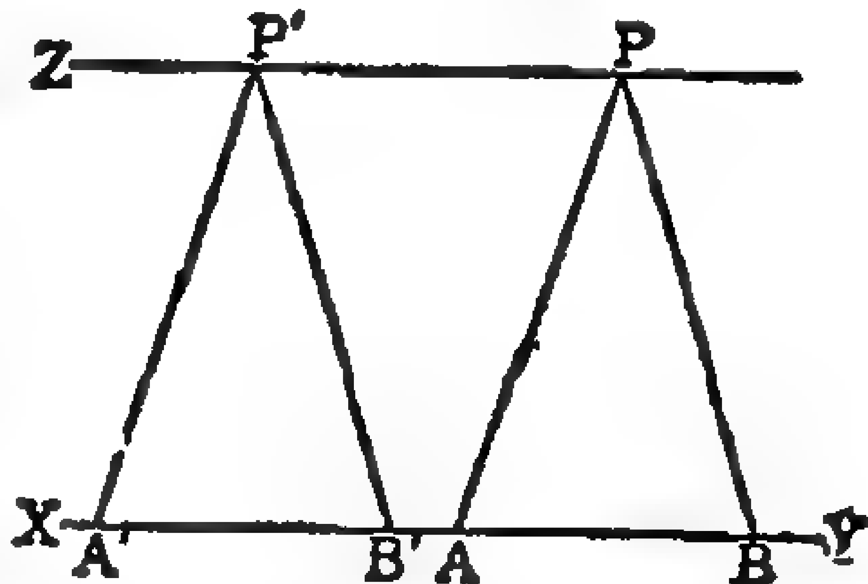
如果在 XY 上（除 P 点外）任取一点 P'，则 $P'B=P'B'$。因此 $P'A+P'B=P'A+P'B'>AB'$。

$$\therefore\quad P'A+P'B>PA+PB.$$

注　这时有 $PA=PB$。

2747. 设 P 为定直线 XY 外的定点，在直线 XY 上求两点 A、B，使 $PA+AB+BP$ 为最小。其中 AB 等于定长 l。

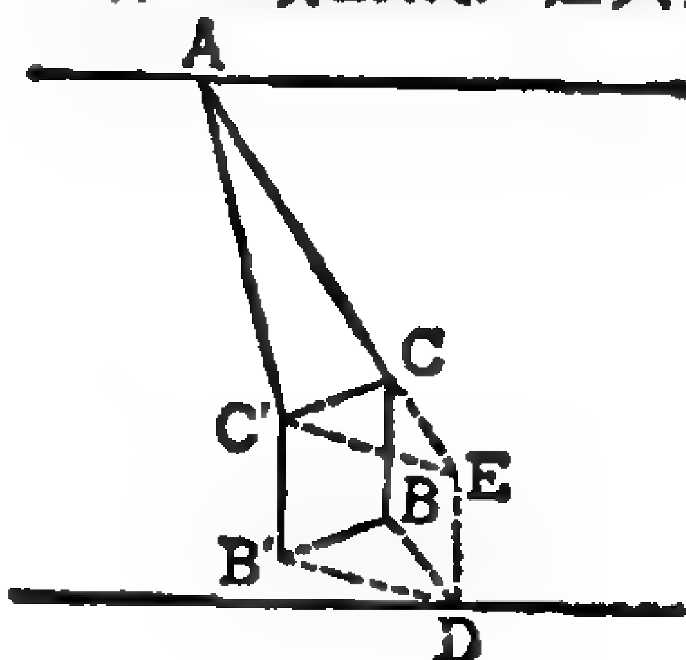
解　设 $AB=l$，$PA+AB+BP$ 为最小，就是 $PA+PB$ 为最小。由此作图如下。



在 XY 上取等于 l 的线段 $A'B'$，从 P 引平行于 XY 的直线 PZ，与上题一样，在 PZ 上求一点 P'，使 $P'A'+P'B'$ 为最小。过点 P 引 $P'A'$、$P'B'$ 的平行线与 XY 的交点分别为 A、B，则 A、B 即为所求之点。

2748. 在定点 A 悬挂电灯 B。若在 AB 上一定点 C 将灯拉至桌子附近，使桌子上的定点 D 至电灯的距离为最小，那么点 C 应在什么位置？其中 $AD>AB$。

解　由桌面上的点 D 作一根垂线，在其上取 DE 等于 CB，将 C 引至 AE 上时，从电灯 B 至点 D 的距离为最小。事实上，如果另取 $AC'B'$ 的位置，则



$$AE<AC'+C'E,$$

即　$$AC+CE<AC'+C'E.$$

而　$AC=AC'$，$\therefore\quad CE<C'E$。

又　$$CE=BD,\ C'E=B'D,$$

$$\therefore\quad BD<B'D.$$

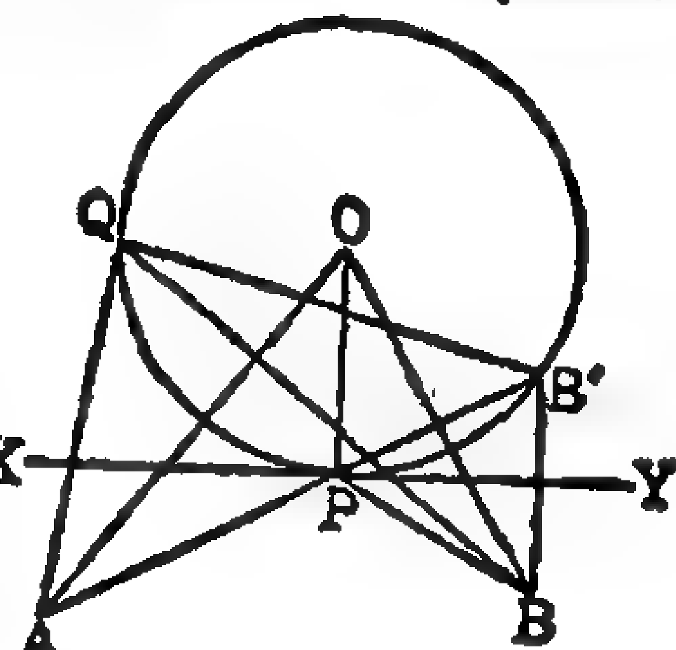
故 C 在 AE 上时，电灯至 D 的距离最小。

2749. 已知圆 O 及两定点 A、B，在圆周上求一点 P，使 $PA+PB$ 为最小。［阿勒哈森问题］

解　在圆周上作点 P 使

$$\angle OPA=\angle OPB,$$

则 P 即为所求之点。其理由是，过 P 引圆 O 的切线 XY，设点 B 关于 XY 的对称点为 B'，则 $OP\perp XY$，$\angle OPA=\angle OPB$，从而 A、P、B' 在一条直线上。



$$\therefore\quad AP+PB=AB'. \qquad ①$$

在圆周上（除点 P 外）任取一点 Q，则 $QB>QB'$，

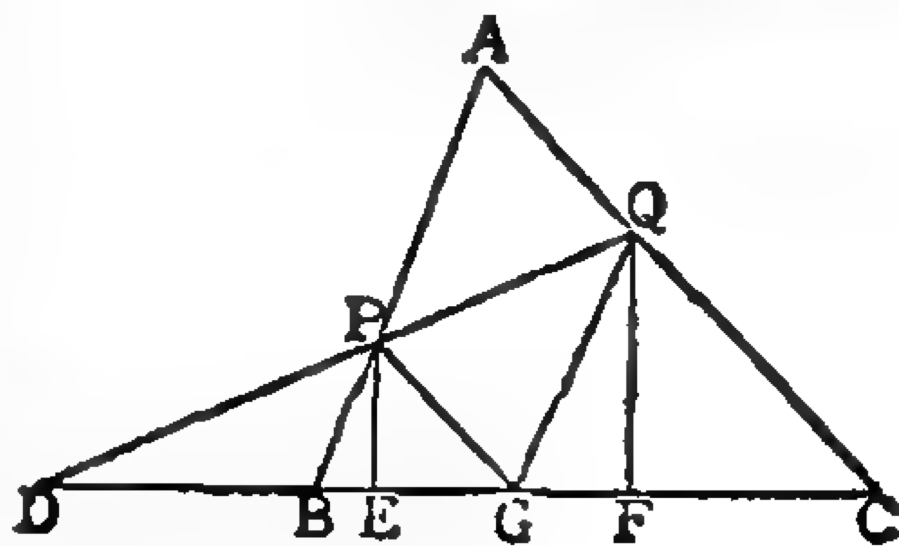
$$QA+QB'>AB',\ QA+QB>AB'. \qquad ②$$

由①、②得　$QA+QB>PA+PB$，

从而点 P 是适合条件的点。

注　点 P 的作图是以 A、B 为焦点的椭圆与圆 O 的切点，此问题一般地在解析几何中解决。

2750. 过已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 延长线上一定点 D，求作直线 DPQ，与 AB、AC 的交点分别为 P、Q，由 P、Q 向 BC 作垂线，设其垂足为 E、F，使 $PE\sim QF$ 为最大。



解　［作图］　在边 BC 上取一点 G，使 DG 为 DB、DC 的比例中项。过点 G 引 AC 的平行线与 AB 的交点为 P，设延长 DP 与 AC 的交点为 Q，则 DPQ 即为所求作之直线。

［证明］　由作图知 $DG^2=DB\cdot DC$，

$$\therefore\quad \frac{DG}{DB}=\frac{DC}{DG}. \qquad ①$$

因 $PG\parallel AC$，　$\therefore\quad \dfrac{DQ}{DP}=\dfrac{DC}{DG}$。　②

由①、②得　$$\frac{DG}{DB}=\frac{DQ}{DP},$$

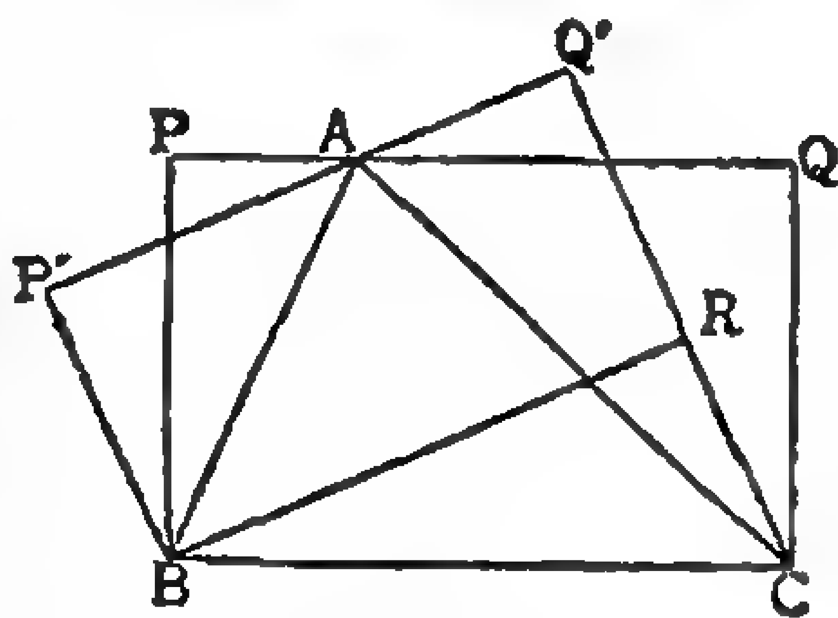
$$\therefore\quad AB\parallel QG.$$

因此，四边形 $APGQ$ 为平行四边形．而四边形 $APGQ$ 为平行四边形时，则 $\triangle GPQ$ 面积最大(问题 **2821**)．但是

$$S_{\triangle GPQ}=S_{\triangle DGQ}-S_{\triangle DGP}$$
$$=\frac{1}{2}DG\cdot QF-\frac{1}{2}DG\cdot PE$$
$$=\frac{1}{2}DG\cdot(QF-PE).$$

由于 D、G 的位置是确定的，因此当 $\triangle GPQ$ 面积最大时，$QF-PE$ 也就最大．

2751． 过已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A 求作一条直线，由 B 及 C 向这条直线作垂线 BP、CQ，使 $AP+AQ$ 为最大．



解 (i) 当 P、Q 在点 A 的异侧时，则过 A 引 BC 的平行线，即为适合条件的最大直线．其理由是，$PQ\parallel BC$，因 BP、CQ 垂直于 PQ，因此

$$AP+AQ=PQ=BC.$$

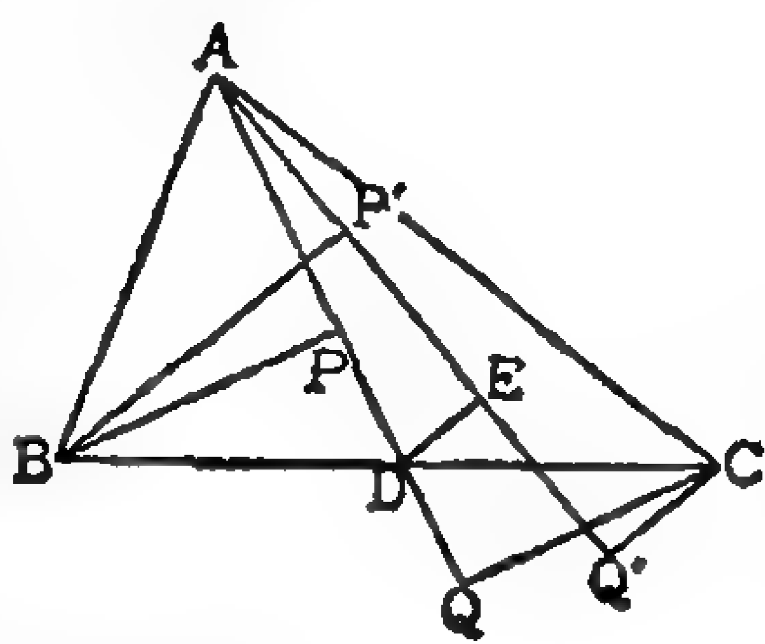
过 A 另作一条直线 $P'AQ'$，由 B、C 向 $P'AQ'$ 作垂线，其垂足为 P'、Q'，由 B 向 CQ' 作垂线 BR，与前面一样

$$AP'+AQ'=P'Q'=BR,$$

由 $BC>BR$ 有

$$AP'+AQ'<AP+AQ=BC.$$

(ii) 当 P、Q 在点 A 的同侧时，则过 A 引 $\triangle ABC$ 的中线 AD，即为所求适合条件的直线．其理由是，D 为 BC 的中点，且 BP、CQ 垂直于 AD．因此



$$AP+AQ=2AD.$$

在 AD 外另引一条直线，由 B、C 向这条直线作垂线的垂足分别为 P'、Q'，由 D 引这条直线的垂线 DE，与前面一样有

$$AP'+AQ'=2AE,$$

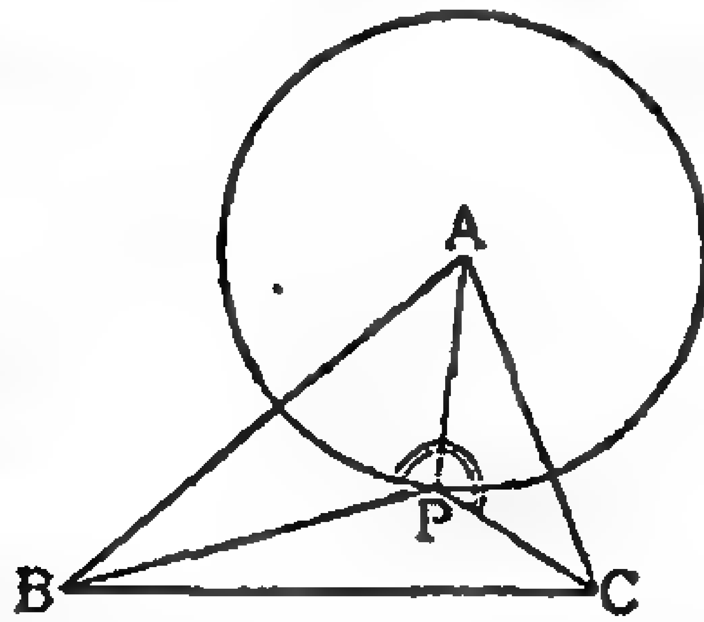
由于 $AD>AE$，有

$$AP+AQ=2AD,\ 2AE=AP'+AQ'.$$

归纳(i)、(ii)，在情况(i) $2AD<BC$，情况(ii) $2AD>BC$ 时 $AP+AQ$ 为最大，即若 $\angle A>\angle B$ 时，$BC\parallel AP$；$\angle A<\angle B$，APQ 过点 A 的中线 AD；$\angle A=\angle B$ 时，(i)、(ii)的 $AP+AQ$ 的值相同，都使 $AP+AQ$ 为最大值．

2752． 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一定点，在边 AB、AC 上分别求点 D、E，使 $BD=CE$，且 $PD+PE$ 为最小．

解 四边形 $ADPE$ 为圆内接四边形时，$PD+PE$ 最小．其理由是，在 $\triangle ABC$ 的外侧引直线 CG，使 $\angle ABP=\angle ACG$，延长 PE 与 CG 交于点 G，由于四边形 $ADPE$ 是圆内接四边形，因此



$$\angle BDP=\angle AEP=\angle CEG,$$

且 $BD=CE$，$\quad\therefore\quad \triangle BDP\cong\triangle CEG$.

因而 $PD=EG$，$\quad PE+PD=PG.$ ①

除 D、E 点外，在 AB、AC 上分别取任意点 D'、E'，使 $BD'=CE'$，连结 $D'P$，$E'P$，$E'G$，与上面一样得

$$\triangle BPD'\cong\triangle CGE',\quad\therefore\quad PD'=GE'.$$

由此得 $\quad PD'+PE'=GE'+PE'.$ ②

但是 $\quad PE'+GE'>PG,$

由①、②，得 $\quad PD'+PE'>PE+PD.$

故 $PE+PD$ 为最小．

2753． 在每个内角小于 $\frac{4}{3}\angle R$ 的三角形 ABC 内求一点 P，使 $PA+PB+PC$ 为最小．[此点称为 $\triangle ABC$ 的费尔马点]

解 [作图] 在 $\triangle ABC$ 的各边内侧分别作含 $\frac{4}{3}\angle R$ 的弓形弧，设其交点为 P，则 P 即为所求之点．

[证明] 在 $\triangle ABC$ 内任取一点 P，设 AP 不变，则使 $BP+CP$ 为最小点，根据问题 **2749** 知，它在以 A 为圆心、AP 为半径的圆周上，且使 $\angle APB=\angle APC$．同理，若 BP 不变，当 $\angle APB=\angle BPC$ 时 $AP+CP$ 为最小，由此推知，在

$$\angle APB=\angle APC=\angle BPC=\frac{4}{3}\angle R$$

时，$PA+PB+PC$ 为最小。

2754．在 $\angle XOY$ 内的圆 O' 的圆周上求一点 P，使 P 至角两边 OX、OY 的距离之和 $PA+PB$ 最大或最小。

解　作与 OX、OY 成等角的圆 O' 的切线，设离点 O 近切点为 P，远切点为 Q，则点 P、Q 即为所求的最小点与最大点。

［证明］　与 OX、OY 夹成等角的圆 O' 的近切线与 OX、OY 分别交于点 D、E，设 $DF\perp OY$，$PA\perp OX$，$PB\perp OY$，则

$$PA+PB=DF\text{（问题 150）。}$$

又在圆 O' 上取点 P'，过 P' 引直线 $D'E'$，使 $OD'=OE'$，设 $D'F'\perp OY$，$P'A'\perp OX$，$P'B'\perp OY$，则

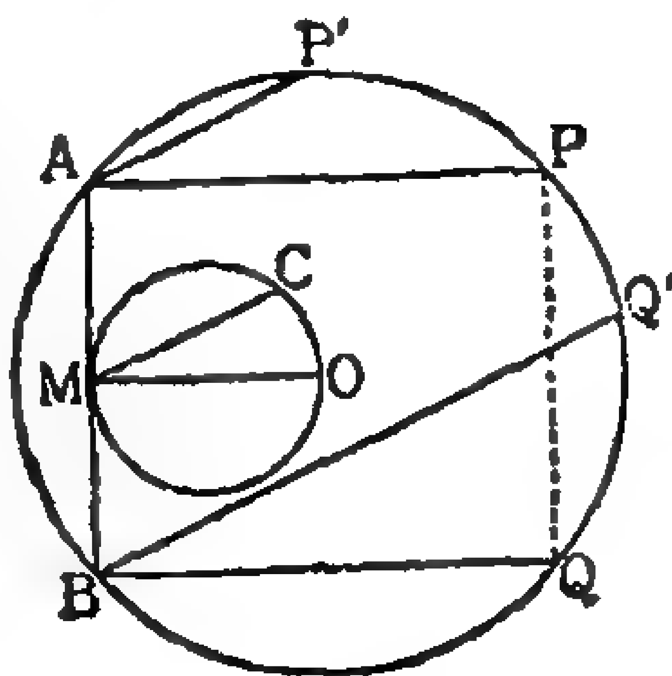
$$P'A'+P'B'=D'F'.$$

由于 $DF<D'F'$，所以

$$PA+PB<P'A'+P'B'.$$

同理可证最大点 Q 的情况。

2755．过已知圆 O 上两定点 A、B，引两条平行弦，使两条平行弦之和 $AP+BQ$ 为最大。其中 AP、BQ 是同向平行。



解　过 A、B 作垂直 AB 的两弦 AP、BQ，即为所求的两弦。其理由是，另引两条平行弦 AP'、BQ'，设 AB 的中点为 M，过 M 引 $MC\parallel AP'$ 与以 MO 为直径的圆相交于点 C，则

$$MO=\frac{1}{4}(AP+BQ),$$

$$MC=\frac{1}{4}(AP'+BQ').$$

但 $MO>MC$，所以 $AP+BQ>AP'+BQ'$。

2756．过已知圆 O 外一定点 A 引割线 APQ，使由 P 与 Q 向 AO 所作的垂线之差 $PB\sim QC$ 为最大。

解　因为 $S_{\triangle AOQ}=\frac{1}{2}AO\cdot QC$，

$$S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}AO\cdot PB.$$

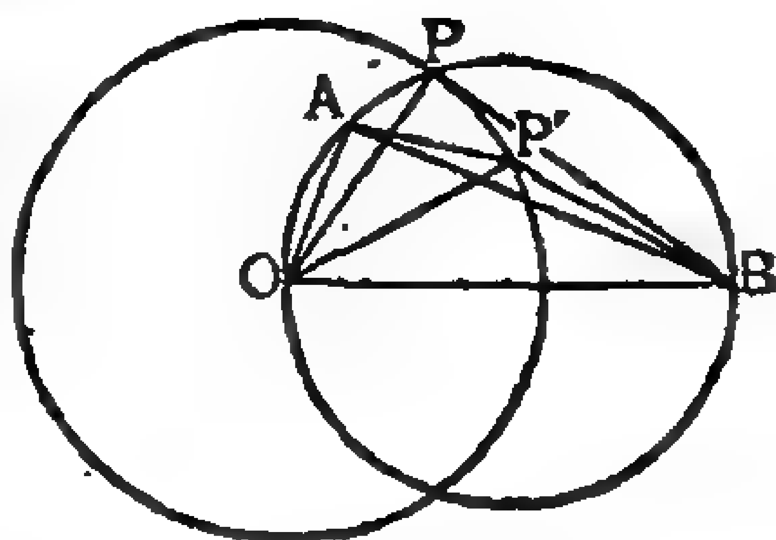
所以

$$\frac{1}{2}AO\cdot(QC-PB)=S_{\triangle AOQ}-S_{\triangle AOP}=S_{\triangle POQ}.$$

要使 $QC-PB$ 为最大，只须使 $\triangle POQ$ 的面积为最大就行了。从而得

$$\angle POQ=\angle R.$$

2757．已知定点 A 在圆 O 内，B 在圆 O 外，且 $OA:OB=m:n$，在圆周上求一点 P，使 $n\cdot PA+m\cdot PB$ 为最小。



解　［作图］　过 A、O、B 的圆与圆 O 交于点 P，P 在点 O 关于 AB 的异侧，即为所求之点。

［证明］　在圆 O 上（除点 P 外）任取一点 P' 时，因为四边形 $AOBP'$ 不是圆内接四边形，因此有

$$OB\cdot P'A+OA\cdot P'B>AB\cdot P'O\text{（问题 1504），}$$

而

$$\frac{OA}{OB}=\frac{m}{n},$$

$$\therefore\quad \frac{OA}{m}=\frac{OB}{n}=\frac{1}{k},$$

于是　$n\cdot P'A+m\cdot P'B>k\cdot AB\cdot P'O$。

由于四边形 $PAOB$ 是圆内接四边形，与前面一样有

$$n\cdot PA+m\cdot PB=k\cdot AB\cdot PO,$$

$$\therefore\quad n\cdot PA+m\cdot PB<n\cdot P'A+m\cdot P'B.$$

2758．已知 a、b 是正数，在以 AB 为直径的定圆 O 上求一点 P，使 $a\cdot PA+b\cdot PB$ 为最大。

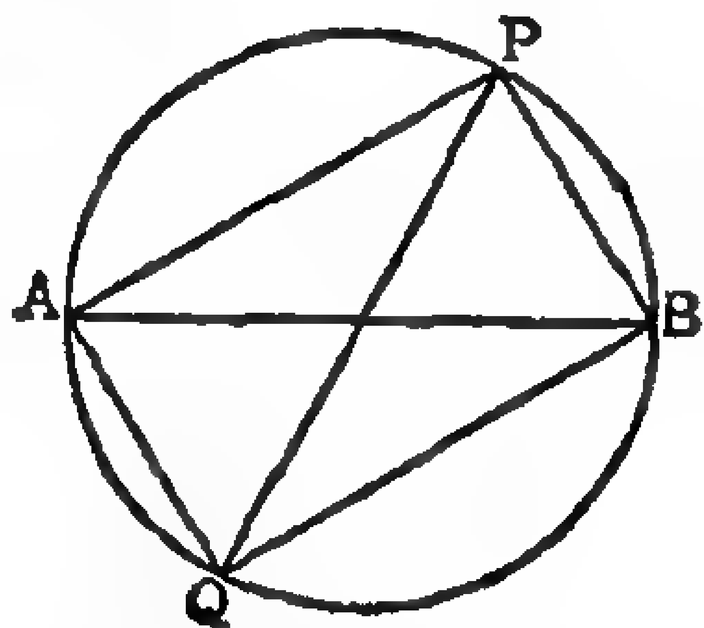
解　［作图］　到直径两端 A、B 距离之比为 $a:b$ 的阿波罗尼斯圆，与以 AB 为直径的已知圆的交点 P，即为所求之点。

［证明］　取 e 为单位长，以 ae、be 为直角两边作直角三角形，其斜边的长设为 ce，则

$(ae)^2+(be)^2=(ce)^2$,

$\therefore\ a^2+b^2=c^2$。

若以任意长 r、ar、br、cr 为三边考虑三角形，由



$$(ar)^2+(br)^2=(a^2+b^2)r^2=c^2r^2=(cr)^2$$

知是直角三角形。这里由 $cr=AB$ 决定 r，$QB=ar$，$QA=br$，作直角三角形 QAB。以 AB 为直径作圆，此圆过顶点 $Q(\angle AQB=\angle R)$，设取点 Q 关于 AB 异侧的圆周上一点 P，则

$$QB\cdot PA+QA\cdot PB=AB\cdot QP,$$

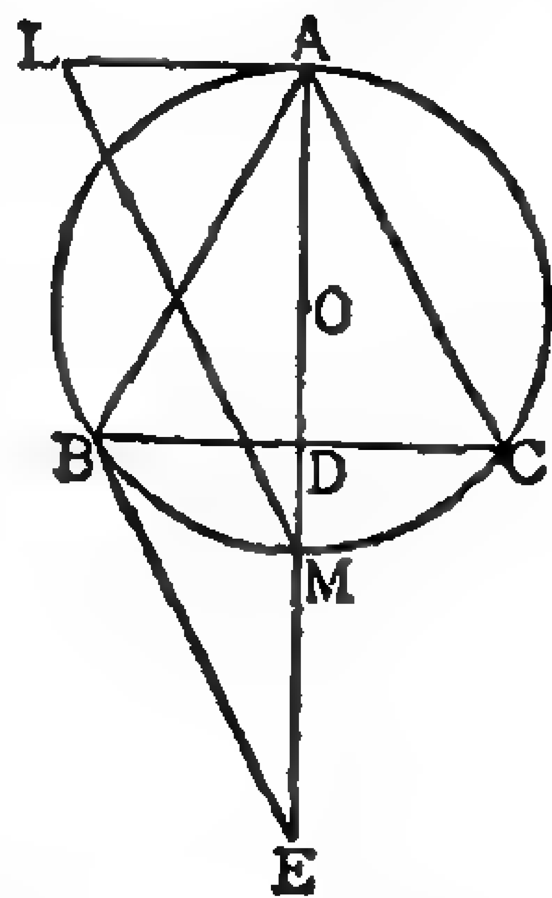
$$ar\cdot PA+br\cdot PB=cr\cdot QP,$$

$$\therefore\ a\cdot PA+b\cdot PB=c\cdot QP.$$

因为 c 是定值，所以使 $a\cdot PA+b\cdot PB$ 为最大，只要 QP 最大就可以了，即只要 QP 等于直径 AB。

设 $QP=AB$，则 $PA=QB=ar$，$PB=QA=br$，所以当 $PA:PB=ar:br=a:b$ 时，$a\cdot PA+b\cdot PB$ 为最大。

2759. 在已知圆 O 内求作等腰 $\triangle ABC$，使底 BC 与高 AD 之和为最大。



解 [分析] 首先考虑 $AD+BC$ 等于定长 m 的作图，延长 AD，在其上取 $DE=BC$，于是 $AE=AD+BC=m$，且

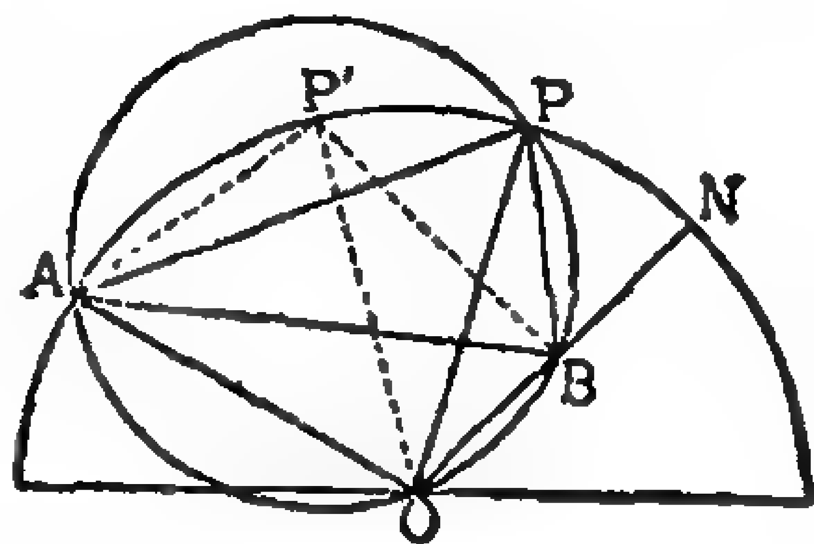
$$BD:DE=1:2.$$

由此可知直角 $\triangle BDE$ 的形状，$\angle E$ 的大小是已知的，EB 是定向的，由此使 m 为最大，只要 AE 为最大就可以了。这时 EB 是圆 O 的切线。因此可作图如下。

[作图] 作直径 AM，从 A 引切线 AL，设 $AL=\frac{1}{2}AM$，引平行于 LM 且与圆相切的直线，设切点为 B，延长 AM 与切线相交于 E，过 B 作垂直于 AM 的弦 BC，则 $\triangle ABC$ 即为所求之三角形。

2760. 已知半圆上的定点为 A，设定半径 ON 的中点为 B，在半圆上求一点 P，使 $AP+2BP$ 为最小。

解 [作图] 设 O 为已知半圆的圆心，过点 A、O、B 的圆与半圆相交于点 P，则 P 即为所求之点。



[证明] 因为 A、O、B、P 共圆，所以

$$AP\cdot OB+OA\cdot BP=AB\cdot OP$$

[托勒密定理]。

设圆 O 的半径为 r，则

$$AP\cdot\frac{r}{2}+r\cdot BP=AB\cdot r,$$

从而 $$AP+2BP=2AB. \quad ①$$

在圆 O 上(除点 P 外)另取一点 P'，则有

$$AP'\cdot OB+OA\cdot BP'>AB\cdot OP'$$

(问题 **1504**)，

即 $$AP'\cdot\frac{r}{2}+r\cdot BP'>AB\cdot r,$$

从而 $$AP'+2BP'>2AB. \quad ②$$

由①、②得 $AP'+2BP'>AP+2BP$.

2761. 若两条线段长的积为矩形的面积是定值，则两条线段相等时其和为最小。

解 设线段为 m、n，由题意有 $m\cdot n=k^2$. $m+n$ 为最小，或 $(m+n)^2$ 为最小。

$$\therefore\ (m+n)^2=m^2+n^2+2mn=(m-n)^2+4mn,$$

$m\cdot n=k^2$ (一定)，$\therefore\ m-n=0$.

此时 $(m+n)^2$ 为最小，即 $m=n$ 时 $m+n$ 为最小。

4. 平方和与差的最大、最小

2762. 若把已知线段分为两部分，当线段等分时这两部分上的正方形之和最小。

解 设已知线段 AB 的中点为 O。若将 AB 分成两部分的分点 C 在 OB 上，则

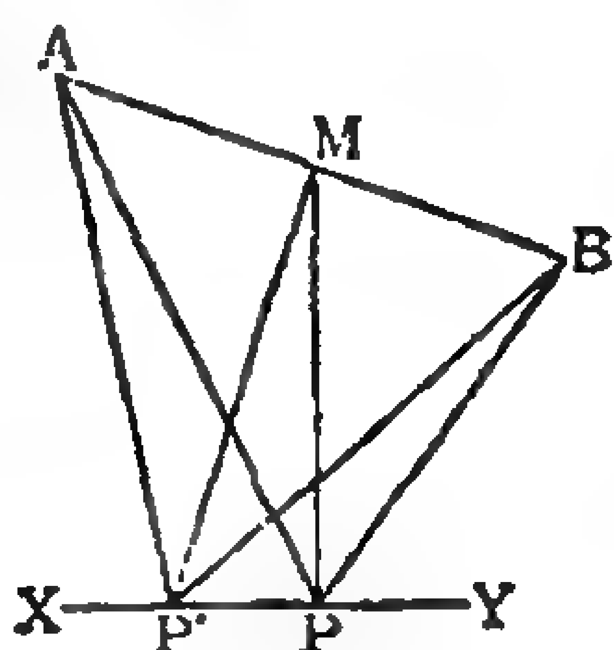
A　　O C　B

$$AC^2+CB^2=(AO+OC)^2+(OB-OC)^2$$
$$=AO^2+2AO\cdot OC+OC^2+OB^2-2OB\cdot OC+OC^2$$
$$=2(AO^2+OC^2)$$
$$(\because\ AO=OB).$$

为使 AC^2+CB^2 为最小，由于 AO^2 是一定的，

只要 OC^2 最小，C 与 O 重合即可。当点 C 在 AO 上，也完全一样。

2763. 已知两定点 A、B 及定直线 XY。在 XY 上求一点 P，使 PA^2+PB^2 为最小。



解 在 XY 上取一点 P'，设

$$P'A^2+P'B^2=m^2$$

（m 表示线段），

取 AB 的中点 M，连结 MP'，则

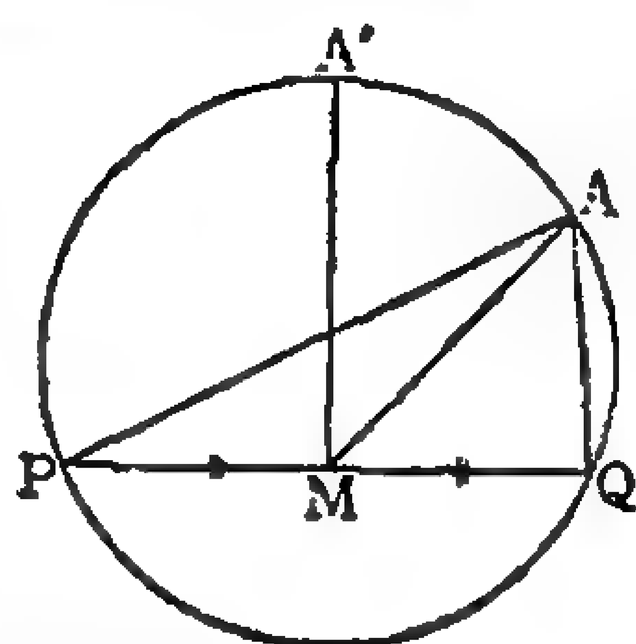
$$P'A^2+P'B^2=2(P'M^2+AM^2),$$

$$\therefore\quad 2P'M^2+2AM^2=m^2.$$

这里 AM 是已知线段，为使 m^2 最小，只要 MP' 为最小就行了。但是 M 是定点，从 M 到 XY 的最短距离是从 M 向 XY 引的垂线 MP。故这个垂足 P 即为所求之点。

2764. 已知圆周上的两个定点 P、Q，在这个圆周上求一点，使这点至点 P、Q 的线段上的正方形之和为最大。

解 设已知圆周上任意点 A，PQ 的中点为 M，则 $AP^2+AQ^2=2(PM^2+AM^2)$。但是 PM^2 是一定的，为使 AP^2+AQ^2 为最大，只要 AM^2 最大，从而 AM 为最大就可以了。因此所求之点 A' 应是优弧 PQ 的中点。

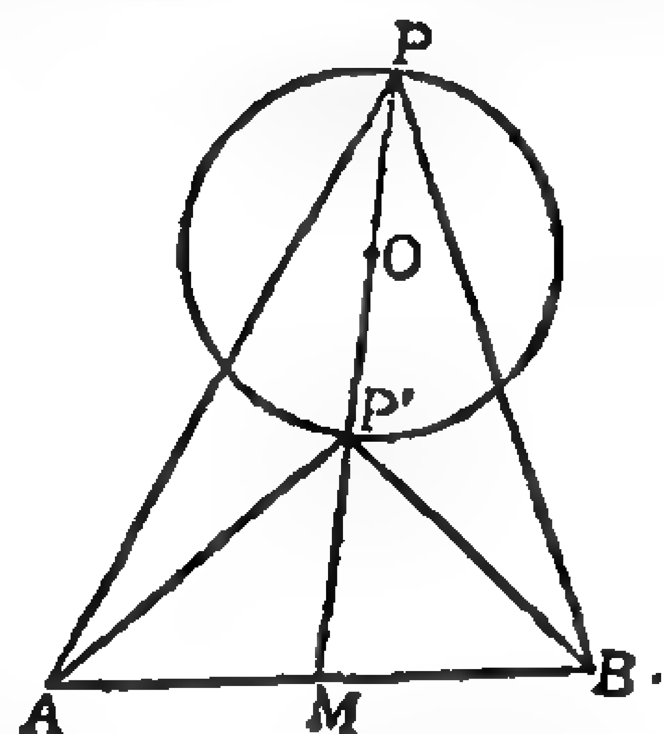


如果 PQ 是圆的直径时，则

$$AP^2+AQ^2=PQ^2$$

是定值，这时既不是最大也不是最小。

2765. 设 A、B 为已知圆外的两定点，在圆周上求一点 P，使 AP^2+BP^2 为最大或最小。



解 设 P 为圆周上的一点，AB 的中点为 M，则

$$PA^2+PB^2=2PM^2+2AM^2.$$

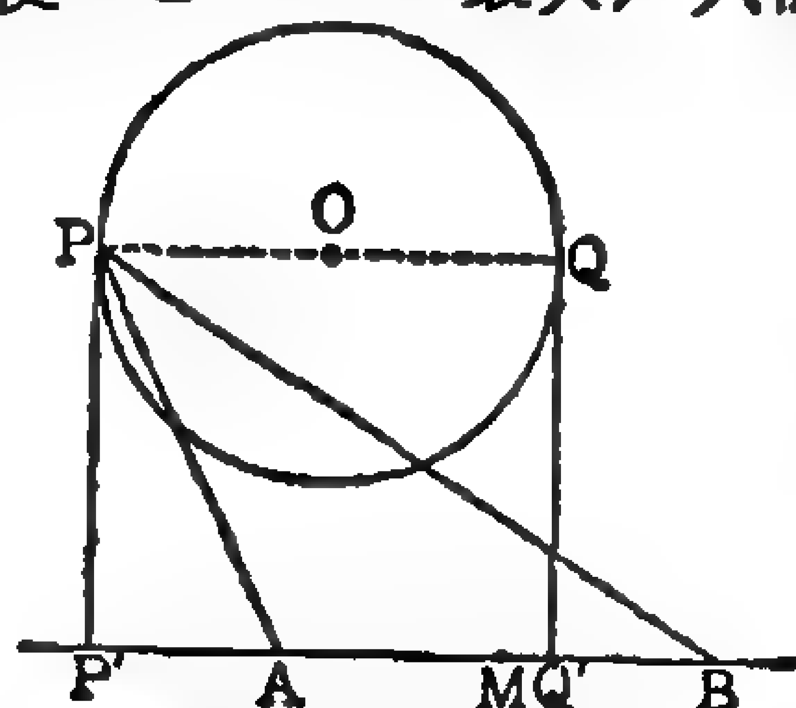
但是 AM 是定长，要使 PA^2+PB^2 为最大或最小，只须 PM 为最大或最小就行了。设圆心为 O，若 MO 及其延长线与圆周的交点 P'、P，则 P、P' 即为所求之最大、最小的点。

2766. 已知圆 O 外有两定点 A、B，在圆周上求一点 P，使 $PA^2\sim PB^2$ 为最大。

解 设 P 为已知圆周上的一点，从 P 向 AB 引垂线，设其垂足为 P'，AB 的中点为 M，则

$$PA^2\sim PB^2=P'A^2\sim P'B^2$$
$$=2AB\cdot MP'\ \text{（问题 894）}.$$

这里 AB 一定，要使 $PA^2\sim PB^2$ 最大，只需要 MP' 为最大。



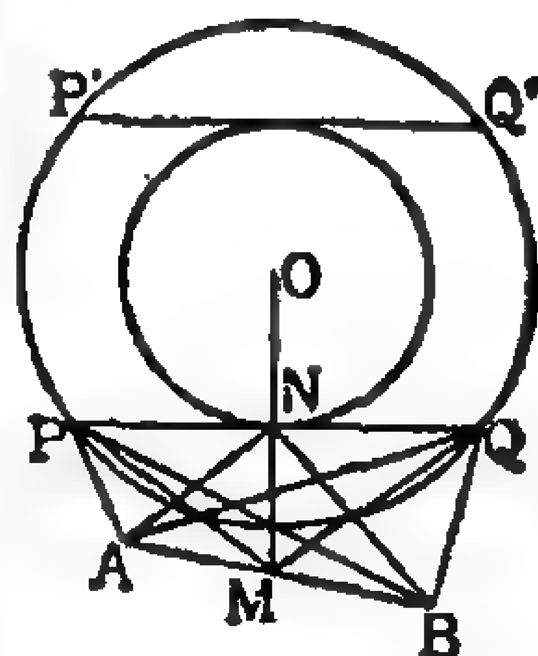
而 MP' 为最大是引 AB 的垂线且切于圆 O，设其切点为 P、Q，垂线足分别为 P'、Q' 时，MP' 最大。若 $MP'>MQ'$，则 P 即为所求之点。其理由是，在圆周上除点 P 外的点，其垂线足在点 P' 与 Q' 之间，因此到点 M 的距离比 MP' 小，故点 P 是所求之点。

2767. 已知圆的外部有两定点 A、B 及圆上定长的弦 PQ，问定长弦 PQ 的端点在圆周上移动到怎样的位置时，$AP^2+AQ^2+BP^2+BQ^2$ 为最小或最大。

解 设 M、N 分别为 AB、PQ 的中点，则

$$AP^2+AQ^2=2AN^2+2PN^2,$$
$$BP^2+BQ^2=2BN^2+2PN^2.$$
$$\therefore\quad AP^2+AQ^2+BP^2+BQ^2$$
$$=4PN^2+2(AN^2+BN^2).$$

由假设知 PQ 是定长，因此 PN 是定长，于是本题是讨论 AN^2+BN^2 为最小或最大。因为



$$AN^2+BN^2=2MN^2+2AM^2,$$

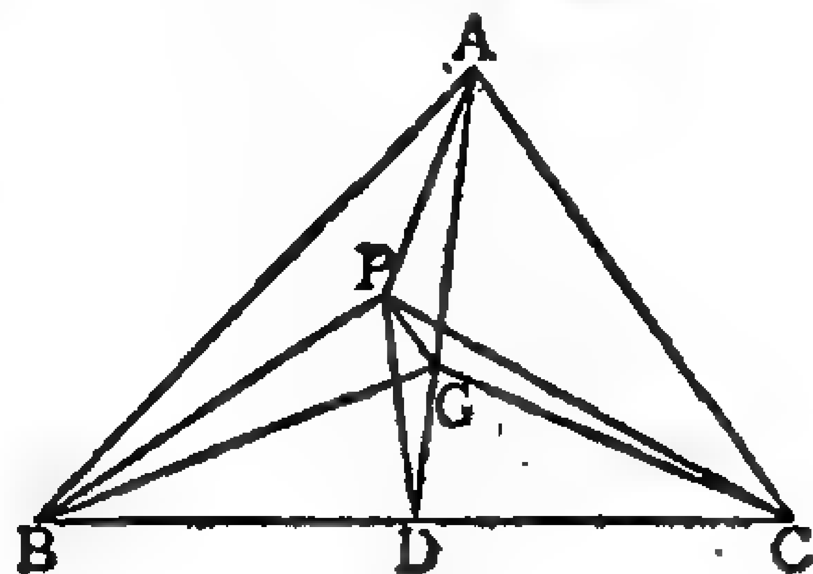
所以本题可归结为 MN 是最小或最大。而 PQ 是定长，其中点 N 的轨迹是以 O 为圆心的一个圆。过 M、O 的直线与圆的交点中，设关于点 O 与点 M 同侧的点为 N'，异侧的点为 N''，在 N'、N'' 上引内圆的切线与外圆的交点分别为 P、Q 及 P'、Q'，则 PQ 就是所要求的最小弦的位置，$P'Q'$ 是最大弦的位置。

2768. 在已知 $\triangle ABC$ 内求一点 P，使 $PA^2+PB^2+PC^2$ 为最小。

解 $\triangle ABC$ 的重心 G 即为所求的点。其理由是，设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，则

$$PA^2+PB^2+PC^2$$
$$=GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2$$

（问题 884）。要使 $PA^2+PB^2+PC^2$ 最小，只须使 $GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2$ 为最小。但是 $GA^2+GB^2+GC^2$ 是一定的，所以 PG^2 为最小就可以了。所以应有 $PG=0$，即 P 与 G 重合时最小。



2769. 在正方形 $ABCD$ 内求一点 P，使 $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ 为最小。

解 对角线 AC、BD 的交点 P 即为所求之点。其理由是，设（除点 P 外）取一点 P'，则

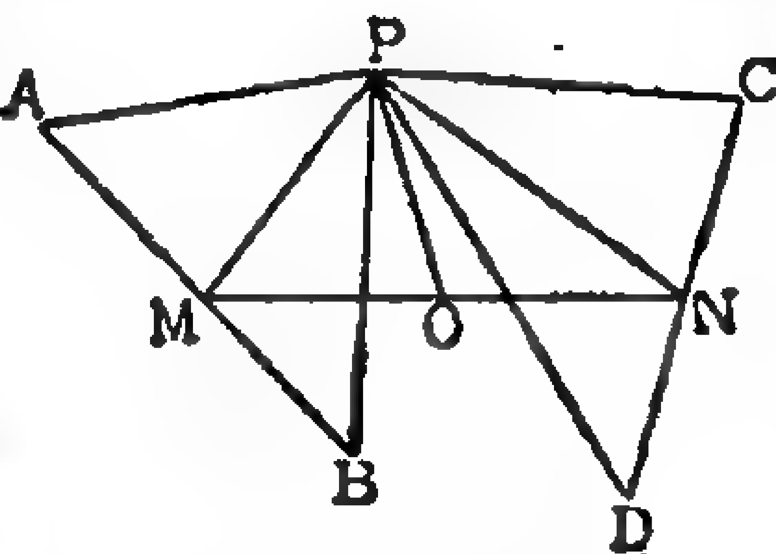
$$P'A^2+P'C^2=2PP'^2+\frac{AC^2}{2},$$

$$P'B^2+P'D^2=2PP'^2+\frac{BD^2}{2}.$$

$$\therefore\quad P'A^2+P'B^2+P'C^2+P'D^2$$
$$=4PP'^2+AC^2(\because AC=BD).$$

因为 AC^2 一定，当 $PP'=0$ 时，即 P' 与 AC、BD 的交点 P 重合时，$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ 为最小。

2770. 求到四个定点 A、B、C、D 距离的平方和为最小的点。



解 设 AB、CD 的中点分别为 M、N，连结 PM，PN，（根据问题 874）有

$$PA^2+PB^2=2PM^2+2AM^2,$$
$$PC^2+PD^2=2PN^2+2CN^2,$$
$$\therefore\quad PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$$
$$=2(PM^2+PN^2)$$
$$+2(AM^2+CN^2).$$

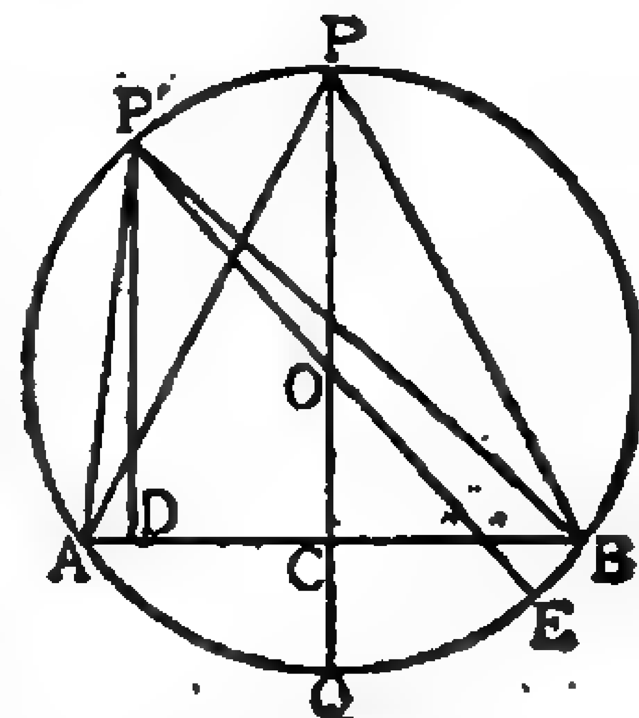
设 MN 的中点为 O，连结 OP，则

$$PM^2+PN^2=2PO^2+2MO^2.$$
$$\therefore\quad PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$$
$$=4PO^2+4MO^2$$
$$+2(AM^2+CN^2).$$

这里 M、N 是定点，因此 AM、MO、CN 是定长。所以 $4MO^2+2(AM^2+CN^2)$ 是定值。故当 $4PO^2$ 即 PO 最小时，$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ 的值为最小。从而当点 P 与点 O 重合时，$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ 为最小，故 MN 的中点 O 即为所求的适合条件的点。

5. 两条线段的积（或比）的最大、最小

2771. 已知圆周 O 上两个定点 A、B，在圆周上求一点 P，使 $AP\cdot BP$ 为最大。

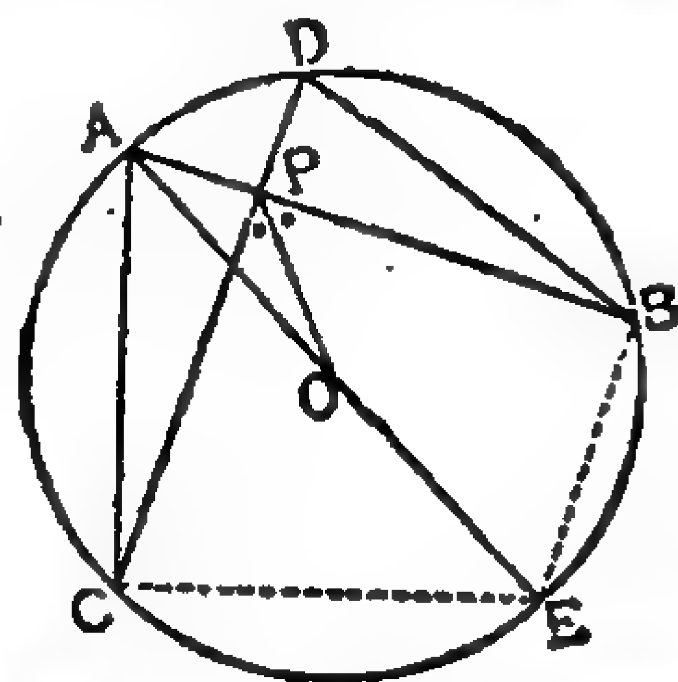


解 设点 P 为优弧 APB 的中点，则 P 即为所求的适合条件的点。其理由是，设优弧 APB 的中点为 P，延长 PO 与圆交于点 Q，PQ 与 AB 的交点为 C。而在圆上另取一点 P'，引 $P'D\perp AB$，设 $P'E$ 为直径，则

$$P'A\cdot P'B=P'D\cdot P'E\ （问题 1318）.$$

又 $PA\cdot PB=PC\cdot PQ$，但是 $P'E=PQ$，又因 $PC>P'D$，所以 $P'A\cdot P'B<PA\cdot PB$。故 P 是适合于条件的点。

2772. 过定圆 O 内一定点 P，求作互相垂直的两弦 AB，CD，使 $AC\cdot BD$ 为最大或最小。



解 AB、CD 与 OP 的夹角相等时 $AC\cdot BD$ 最大，AC、BD 中有一条与 OP 垂直时，$AC\cdot BD$ 最小。其理由是，过 B 引 CD 的平行线，与圆 O 交于点 E，连结 CE，因为 $AB\perp CD$，所以 $\angle ABE=\angle R$。于是 A、O、E 在一条直线上，$BD=CE$，

$$\therefore\quad AC\cdot BD=AC\cdot CE=2S_{\triangle ACE}.$$

为使 $AC\cdot BD$ 最大，只要 $\triangle ACE$ 的面积最大，即 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$ 时最大，所以

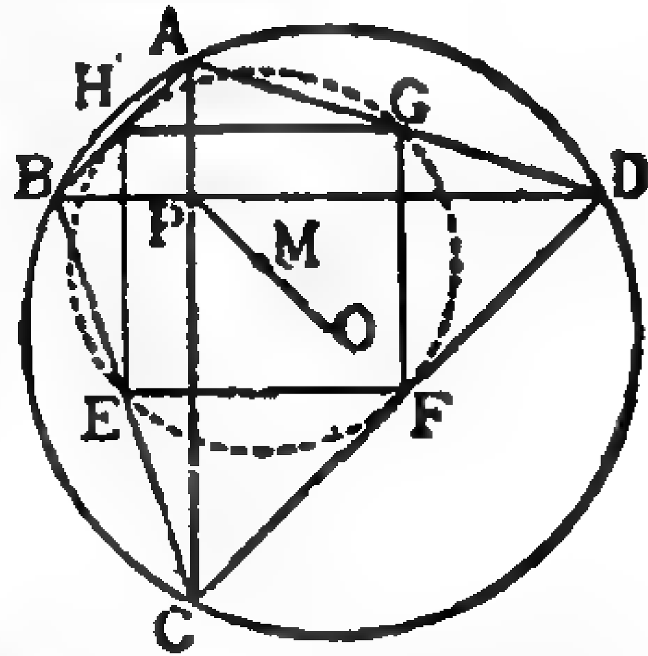
$$AC=CE=BD.$$

从而 $AB=CD$, AB、CD 与 OP 夹角相等。

在 $\triangle ACE$ 的面积最小时 $AC\cdot BD$ 最小. 因为 AE 是一定的, 因此从点 C 至 AE 的高为最小就可以了。从而当 CE、AC 之一为最小时, $\triangle ACE$ 为最小。而 $\angle APC=\angle B$, P 是定点, 于是 AC(或 BD)为最小的充要条件是 $AC\perp OP$。故这时 $AC\cdot BD$ 最小。

2773. 过已知圆 O 内的定点 P 求作互相垂直的两弦 AC、BD, 使 $AC\cdot BD$ 为最大。

解 AC、BD 与 OP 夹角相等时, $AC\cdot BD$ 最大。其理由是, 设 AC、BD 为任意垂直相交的两弦, 连结 AB, BC, CD, DA, 它们的中点分别为 H、E、F、G, 则 H、E、F、G 在以 M(OP 的中点)为圆心的圆周上。而 $HG\parallel BD\parallel EF$, $GF\parallel AC\parallel HE$,

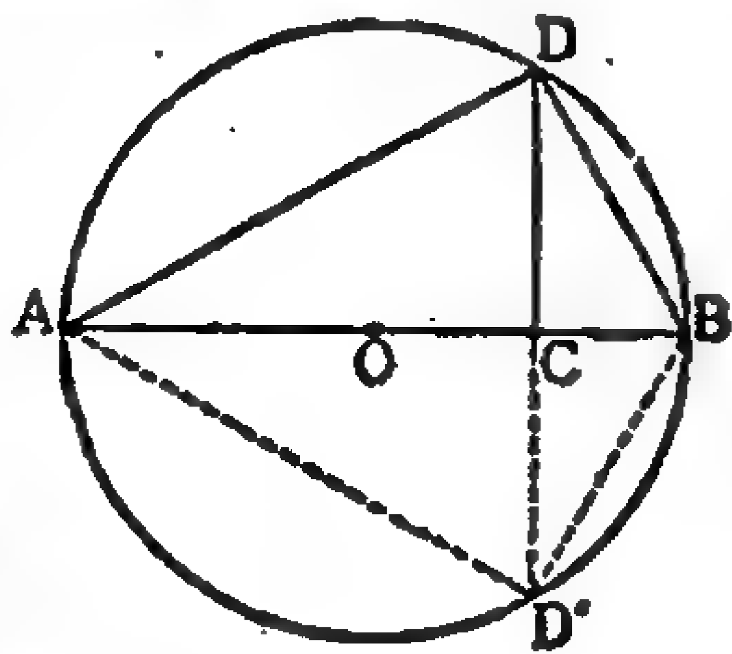


$$\therefore\ AC\cdot BD=4HG\cdot GF$$
$$=4\text{矩形 } HEFG \text{ 面积}.$$

当矩形 $HEFG$ 是圆内接正方形时, 其面积最大, 即 $HE=EF=FG=GH$. 当 $AC=BD$ 时, 矩形 $HEFG$ 即 $AC\cdot BD$ 最大。这时 $AC=BD$ 即 AC、BD 与 OP 的夹角相等。

2774. 在已知圆 O 的直径 AB 上取一点 C, 过点 C 引 AB 的垂线与圆周交于点 D, 则点 C 在什么位置时 $AC\cdot CD$ 最大。

解 点 C 在 OB 的中点上时 $AC\cdot CD$ 最大。其理由是, 延长 DC 与圆交于 D', 则



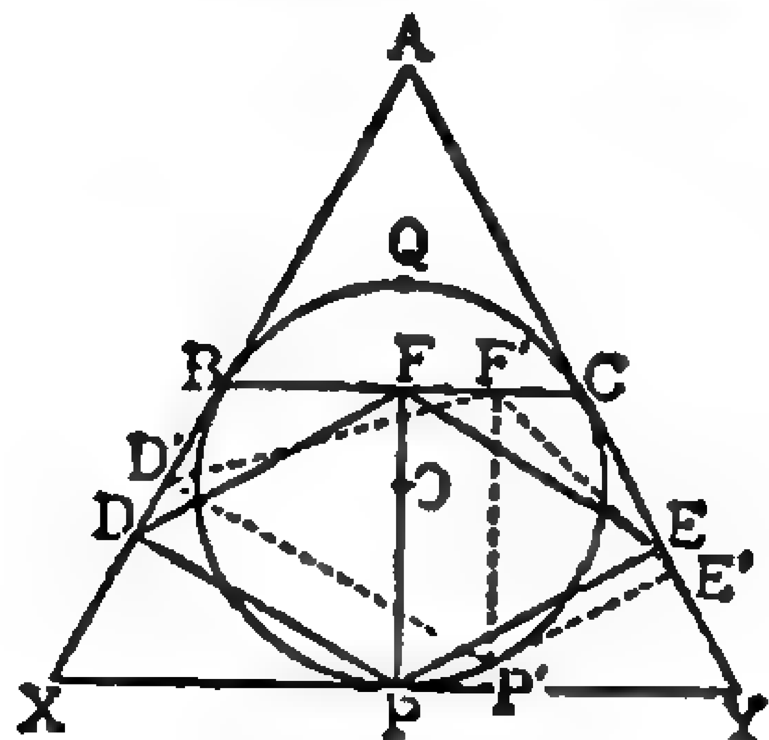
$$AC\cdot CD=S_{\triangle ADD'}.$$

因此 $AC\cdot CD$ 最大, 就是 $\triangle ADD'$ 面积最大。当 $\triangle ADD'$ 为正三角形时最大(问题 **2829**), 从而 DD' 过 OB 的中点 C。

2775. 已知角 XAY 的边与圆 O 在点 B、C 相切, 在圆周上求一点 P, 从 P 向 AX、AY 引垂线 PD、PE, 使 $PD\cdot PE$ 为最大或最小。

解 [作图] 设优弧的中点为 P, 劣弧的中点为 Q, 则点 P 即为所求适合条件的最大点, 点 Q 为适合条件的最小点。

[证明] 从 P 向 BC 作垂线 PF。在圆周上(除点 P 外)取一点 P', 设从 P' 向 AX、AY、BC 作垂线分别为 $P'D'$、$P'E'$、$P'F'$, 则 $\triangle PDF\backsim\triangle PFE$, 由此



$$PD\cdot PE=PF^2.$$

同理 $\triangle P'D'F'\backsim\triangle P'F'E'$,

$$\therefore\ P'D'\cdot P'E'=P'F'^2.$$

但是 P' 在切线与 BC 之间, 于是 $PF>P'F'$,

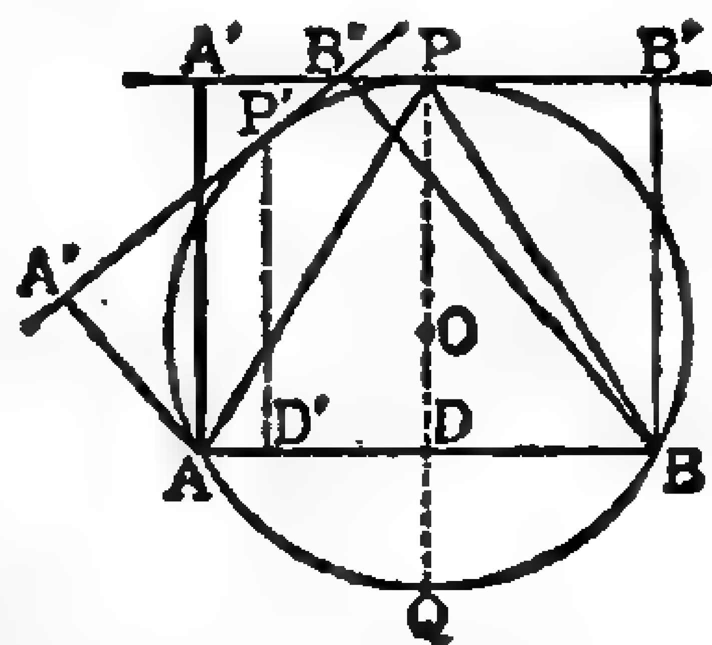
$$\therefore\ PF^2>P'F'^2,$$

因而 $PD\cdot PE>P'D'\cdot P'E'$.

即点 P 是适合条件的最大点。同理可证点 Q 是适合条件的最小点。

2776. 在以 O 为圆心的定圆上有两定点 A、B, 在圆上求一点 P, 使过点 A、B 向过 P 的切线所引垂线之积 $AA'\cdot BB'$ 为最大或最小。

解 从优弧 AB 的中点 P 向 AB 作垂线 PD。在圆周上(除 P 点外)取一点 P', 从 A、B 向过 P' 点的切线引垂线 AA''、BB'', 又从 P' 向 AB 引垂线 $P'D'$, 则由



$$\triangle PA'A\backsim\triangle BDP,\ \triangle BB'P\backsim\triangle PDA$$

知, $AA'\cdot BB'=PD^2$.

同理 $AA''\cdot BB''=P'D'^2$.

由于 P' 在 $A'B'$ 与 AB 之间, 于是 $PD>P'D'$,

$$\therefore\ AA'\cdot BB'>AA''\cdot BB'',$$

即点 P 是所求的适合条件的最大点。

同理容易证明, 劣弧中点 Q 是所求的适合条件的最小点。

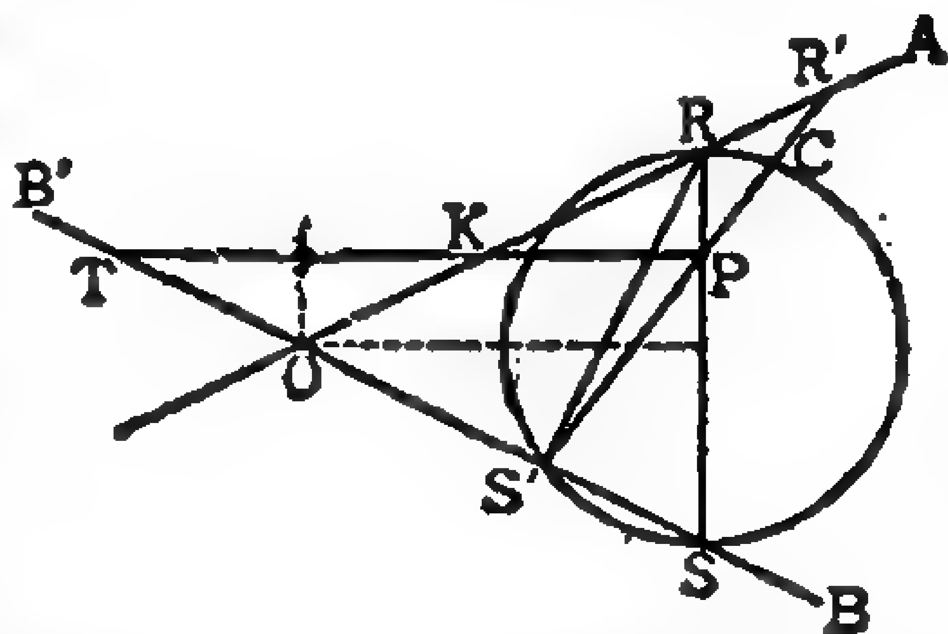
2777. 已知 $\angle AOB$ 内一点 P, 过 P 求作一条直线与 OA、OB 分别交于点 R、S, 使 $PR\cdot PS$ 最小。

解 过点 P 引与已知角两边夹角相等的直线 RPS, 即为所求之直线。其理由是, 过 P 引另一条直线 $S'PR'$, 过 S、S'、R 作圆, $\angle SRR'>\angle SS'R$. 设 $S'R'$ 与圆的交点为 C, 则 $\angle PRR'>\angle PRC$, 从而 C 在 P 与 R' 之

间，

$$\therefore\quad PR\cdot PS=PC\cdot PS'<PR'\cdot PS'.$$

又过点P引直线PKT与角的一边及另一边的延长线夹角相等，则当$\angle AOB<\angle R$时，SPR适合最小条件的直线。$\angle AOB>\angle R$时，PKT是适合最小条件的直线。$\angle AOB=\angle R$时，两条直线都适合最小条件的直线。其理由是，当$\angle AOB<\angle R$时，在$\triangle PKR$中，RP垂直于$\angle AOB$的平分线，因此$\angle KPR=\angle R$，



$$\angle PKR=\frac{1}{2}\angle AOB<\frac{1}{2}\angle R,$$

$$\therefore\quad \angle PKR<\angle PRK,$$

因而 $PR<PK$.

同理在$\triangle PST$中，

$$\angle PTS<\angle PST,\quad\therefore\quad PS<PT,$$

从而 $PR\cdot PS<PK\cdot PT$.

同理可证，当$\angle AOB>\angle R$时，$PR\cdot PS>PK\cdot PT$；当$\angle AOB=\angle R$时，

$$PR\cdot PS=PK\cdot PT.$$

2778. 过两圆O、O'的交点之一的点A，求过A作一条直线与两圆再交于B、C，且使$AB\cdot AC$为最大。

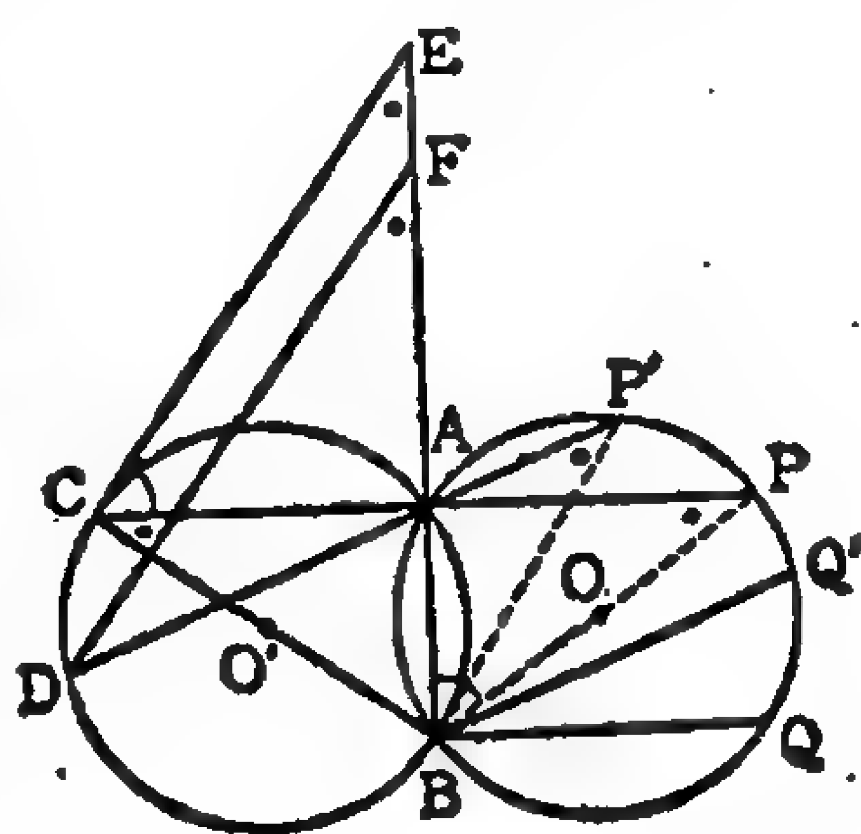
解 过A引圆O'的直径AD，从点B作DA延长线的垂线BE，则$\angle BEA=\angle ACD=\angle R$，

$$\therefore\quad AB\cdot AC=AD\cdot AE.$$

因为AD一定，因而只要AE最大，就有$AB\cdot AC$最大。因此，作平行于BE的圆O的切线，切点为B'，过B'引直线$B'AC'$，设与圆O'交于点C'，则$B'AC'$即为所求的适合条件的直线。

2779. 过已知圆O上的两定点A、B，作一组平行弦AP、BQ，使AP、BQ为最大。

解 当AP、BQ与AB垂直时，AP、BQ最大。其理由是，另引一组平行弦AP'、BQ'，作圆O关于AB对称的圆O'，延长PA、$P'A$与圆O'分别相交于C、D，过点C作圆O'的切线与BA延长线交于点E，过点D引CE的平行线，设与BE的交点为F，则



$$\angle ACE+\angle ACB=\angle R.$$

又 $$\angle P+\angle ABP=\angle R,$$

$$\angle ACB=\angle P,$$

$$\therefore\quad \angle ACE=\angle ABP.$$

由此B、P、E、C共圆。

$$\therefore\quad AP\cdot BQ=AP\cdot AC=AB\cdot AE.$$

又$\angle F=\angle E=\angle P=\angle P'$，因此$B$、$P'$、$F$、$D$共圆。

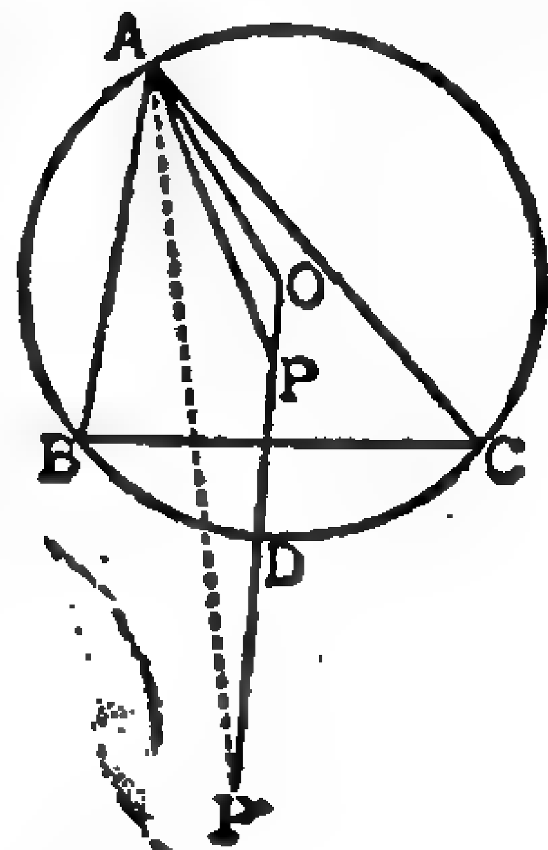
$$\therefore\quad AP'\cdot BQ'=AP'\cdot AD=AB\cdot AF.$$

由于DF是割线，$AF<AE$，

$$\therefore\quad AP'\cdot BQ'<AP\cdot BQ.$$

2780. 设$\triangle ABC$的外心为O，求一点P，使$(PA+PB+PC):PO$为最小。

解 设$\triangle ABC$外接圆半径为r，P为任意点，OP或其延长线与外接圆的交点为D，在过点O、P、D的直线上求一点P'，使



$$OP\cdot OP'=OD^2=OA^2=OB^2=OC^2,\quad ①$$

则有

$$\triangle OAP\backsim\triangle OP'A,$$

$$\triangle OBP\backsim\triangle OP'B,$$

$$\triangle OCP\backsim\triangle OP'C.$$

$$\therefore\quad \frac{PA}{PO}=\frac{P'A}{AO},\quad \frac{PB}{PO}=\frac{P'B}{OB},$$

$$\frac{PC}{PO}=\frac{P'C}{OC},$$

因而

$$\frac{PA+PB+PC}{PO}=\frac{P'A+P'B+P'C}{r}\quad ②$$

($\because OA=OB=OC=r$)。要使$(PA+PB+$

PC):PO 最小，只要 $P'A+P'B+P'C$ 最小就可以了。根据问题 **2753**，点 P' 是费尔马点，因此可以求出。求出点 P'，可求出满足条件①的点 P，则 P 即为所求之点。

2781. 以 O 为圆心的圆外有两定点 A、B，在圆周上求一点 P，使 $AP:BP$ 为最大或最小。

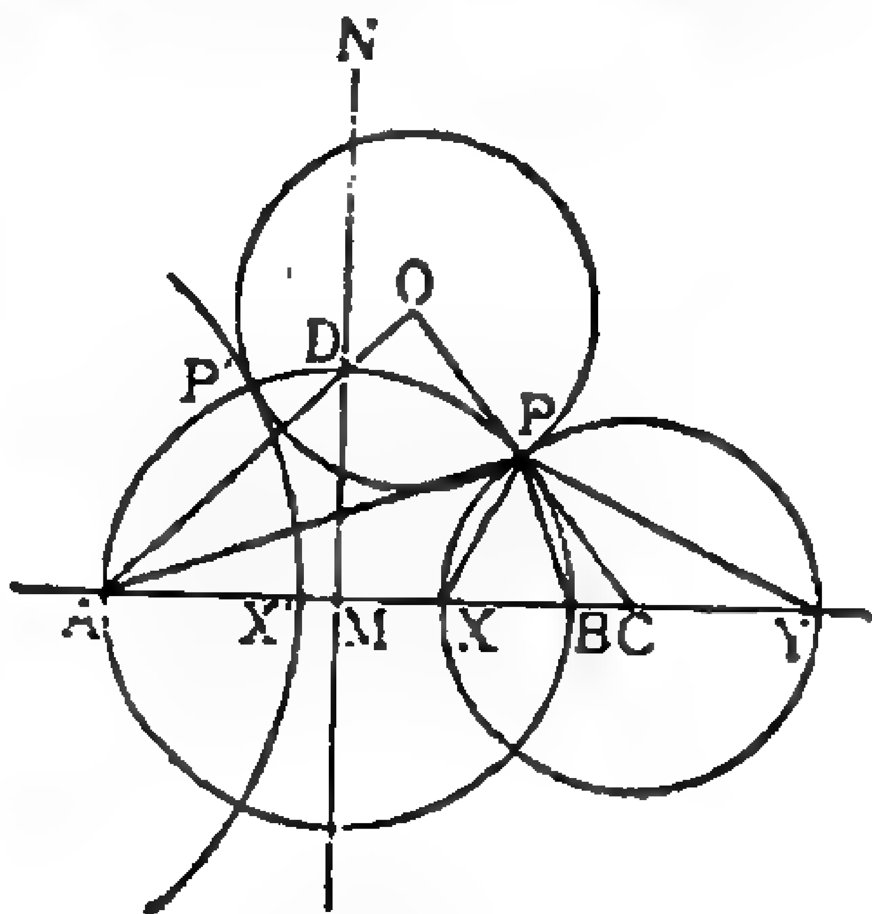
解　在圆 O 上取一点 P，设 $\angle APB$ 及其补角的平分线与 AB 的交点分别为 X、Y，则

$$\frac{PA}{PB}=\frac{AX}{BX}=\frac{AY}{BY}. \qquad ①$$

因此 A、X、B、Y 成调和点列。设 AB 的中点为 M，则

$$MX\cdot MY=MB^2 \text{（问题 1480）}. \qquad ②$$

由于 MB 一定，所以 MX 大于 MY，或者 MX 小于 MY。而点 P 总是在以 XY 为直径的圆周上（阿波罗尼斯圆）。要使 $\frac{PA}{BP}$ 最大，根据①知只要 $\frac{AX}{BX}$，$\frac{AY}{BY}$ 最大就可以了。由②有 MX 最大（MY 为最小）就可以了。当圆 XPY 与圆 O 外切时，线段 MX 最大，设其切点为 P，则 $PA:PB$ 最大。点 P 由以下方法来决定其位置。



设圆 XPY 与圆 O 在点 P 上外切，C 为 XY 的中点，则 O、P、C 在一直线上，且 A、X、B、Y 成调和点列，$CP^2=CA\cdot CB$（问题 **1480**）。由此 CP 在点 P 上与圆 APB 相切。设 OA 与圆 APB 的交点为 D，则 $OA\cdot OD=OP^2$。但是 OA、OP 都是定长，所以 CD 也是定长，点 D 为定点。故过 A、D、B 三点作圆，此圆与圆 O 的交点 P 即为所求之点。

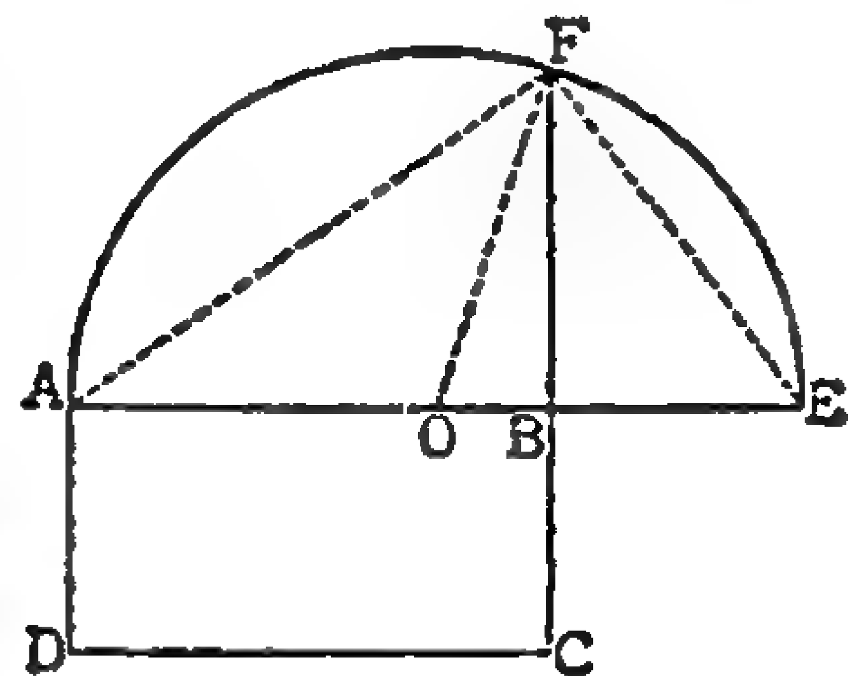
由 M 引圆 O 的一条切线 MP'，则 P' 是所求的适合条件的最小点。

注　上述情况是在圆 O 与 AB 的垂直平分线 MN 相交时求解的。如不相交，设关于 MN 圆 O 与点 B 在同侧时，则过 X、Y 与圆 O 内切圆的切点 P'，就是所求的适合条件的最小点。

6．三角形（或多边形）周长的最大、最小

2782. 在面积一定的矩形中，周长最小的是正方形。

解　设矩形 $ABCD$ 的面积一定。延长 AB 至 E，设 $BE=BC$，延长 CB 与以 AE 为直径的圆交于点 F，则



$$\angle AFE=\angle R,\ FB\perp AE,$$

$$\therefore\quad AB\cdot BE=BF^2.$$

即 BF 是面积一定的正方形的一边。而 $OF>BF$，$\therefore 4OF>4BF$，

从而　　$2(AB+BC)>4BF$.

故在等积矩形中正方形的周长最小。

2783. 正方形的周长比与它等积的平行四边形的周长小。

解　设 $\square ABCD$ 的面积为 a^2，从 B、C 向 AD 作垂线 BF、CE，则有

$\square ABCD$ 面积

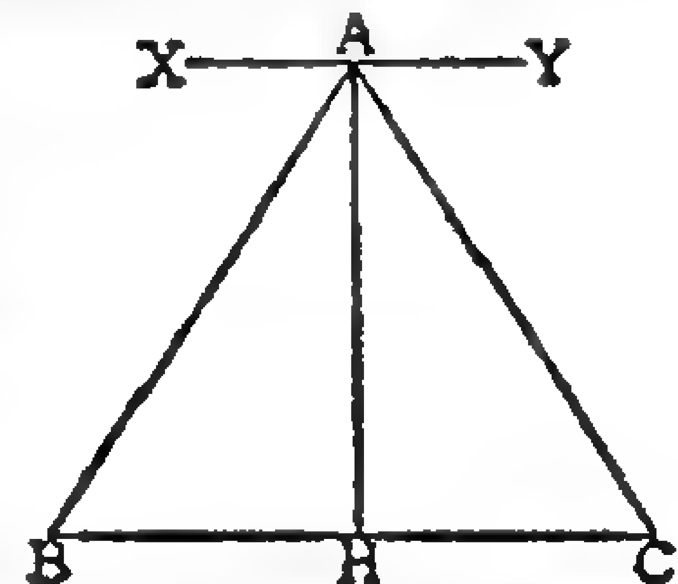
$=$矩形 $EFBC$ 面积

$=a^2$.

但是 $BF<AB$，$CE<CD$，所以 $AB+BC+CD+DA$ 大于矩形 $EFBC$ 的周长。由上题知，面积相等的矩形中正方形的周长最小，故正方形的周长比与它等积的平行四边形的周长小。

2784. 在同底 BC 等积的三角形中，求其周长最小的三角形。

解　在 $\triangle ABC$ 中，BC 是定长，因为其面积一定，所以其高为定长。过顶点 A 引 BC 平行线 XY，根据问题 **2746**，当 $AB=AC$ 时，三角形的周长最小。

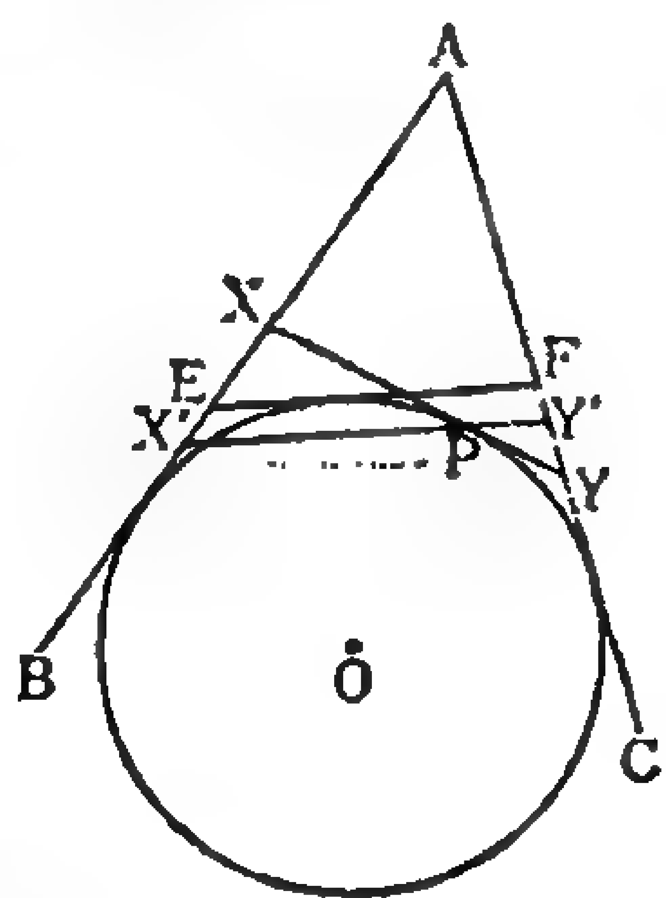


2785. 过已知 $\angle BAC$ 内一定点 P，求作直线 XPY，与 AB、AC 的交点分别为 X、

Y，使$\triangle AXY$的周长最小。

解　[作图]　过定点P作切于AB、AC的圆O(问题**2619**)，由P引圆O的切线XPY，即为所求之直线。设点A与圆O在过点P切线的两侧。

[证明]　过点P另引一条直线与AB、AC的交点分别为X'、Y'，则因XPY是圆O在点P的切线，所以$X'PY'$必与圆O相交。因此作圆O的切线平行于$X'PY'$，与AB、AC的交点分别为E、F，则EF在$\triangle AX'Y'$内部(因为点A与圆O在XY的两侧)，于是$EF<X'Y'$，



$$\therefore\quad AE+EF+AF<AX'+X'Y'+AY'.$$

但是　$AX+XY+AY=AE+EF+AF$
$=2AK$

(K是AB与圆O的切点)，

$$\therefore\quad AX+XY+AY<AX'+X'Y'+AY'.$$

故XPY为所求的适合条件的直线。

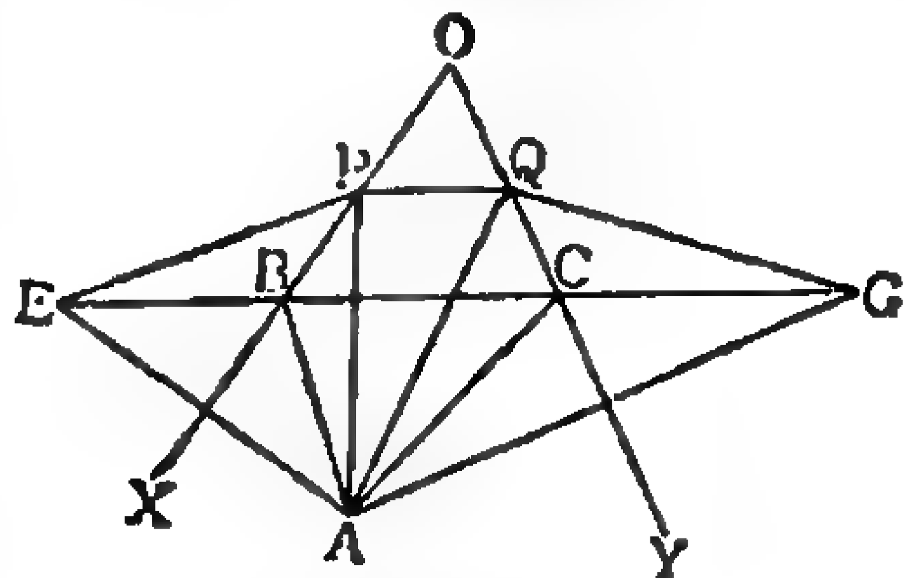
2786. 以锐角XOY内已知点A为一顶点，另外两顶点分别在角的两边上所作的三角形中，求其周长最小的三角形。

解　[作图]　取点A关于OX、OY的对称点E、G，连结EG与OX、OY的交点分别为B、C，则$\triangle ABC$即为所求三角形。

[证明]　在OX、OY上分别取点P、Q，因为E、G分别是点A关于OX、OY的对称点，则

$PE=PA$,

$QG=QA$,



所以　$AP+PQ+QA=EP+PQ+QG$.

由$BE=BA$，$CA=CG$，得

$$AB+BC+CA=EG.$$

但是　$$EP+PQ+QG>EG,$$

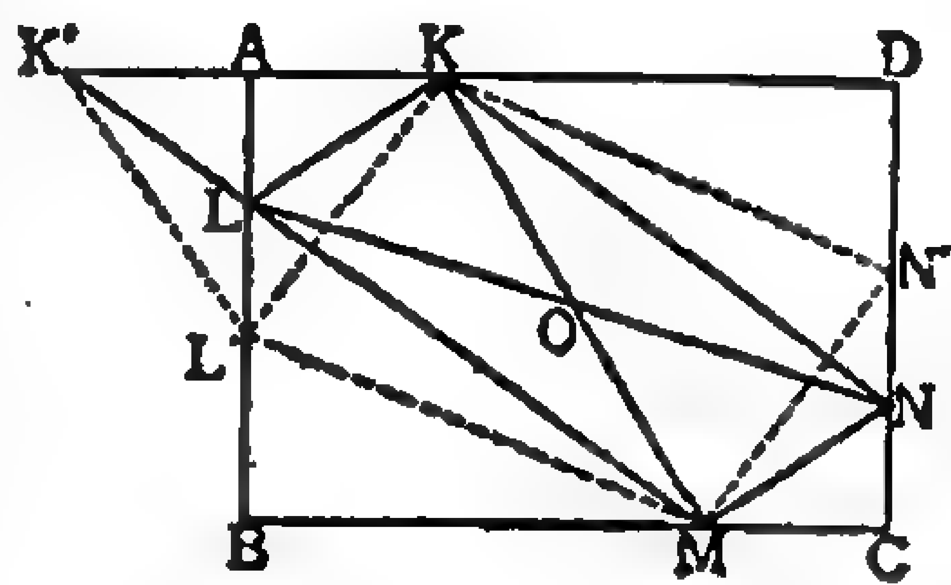
$$\therefore\quad AP+PQ+QA>AB+BC+CA.$$

故B、C即为所求的适合条件的点。

2787. 已知矩形$ABCD$的边AD上的定点K，以K为一顶点，其余三点L、M、N分别在AB、BC、CD上，求作平行四边形$KLMN$，使其周长为最小。

解　[作图]　设矩形$ABCD$的中心为O，点K关于O点的对称点为M，关于AB的对称点为K'.设$K'M$与AB的交点为L，点L关于O点的对称点为N，则$\square KLMN$即为所求之平行四边形。

[证明]　显然四边形$KLMN$是矩形$ABCD$的内接平行四边形，而K是定点，于是点M被确定。在AB上任取一点L'，点L'关于点O的对称点设为N'，则四边形$KL'MN'$是平行四边形。由于K'是关于AB的对称点K，于是$K'L'=KL'$，



$$\therefore\quad KL'+L'M=K'L'+L'M,$$

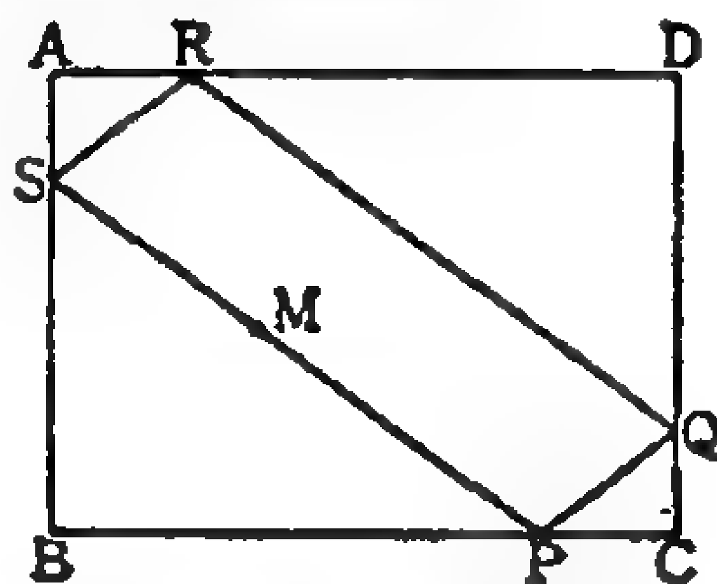
又$KL+LM=K'L+LM=K'M$，但是$K'M<K'L'+L'M$，

$$\therefore\quad KL+LM<KL'+L'M.$$

$$\therefore\quad 2(KL+LM)<2(KL'+L'M),$$

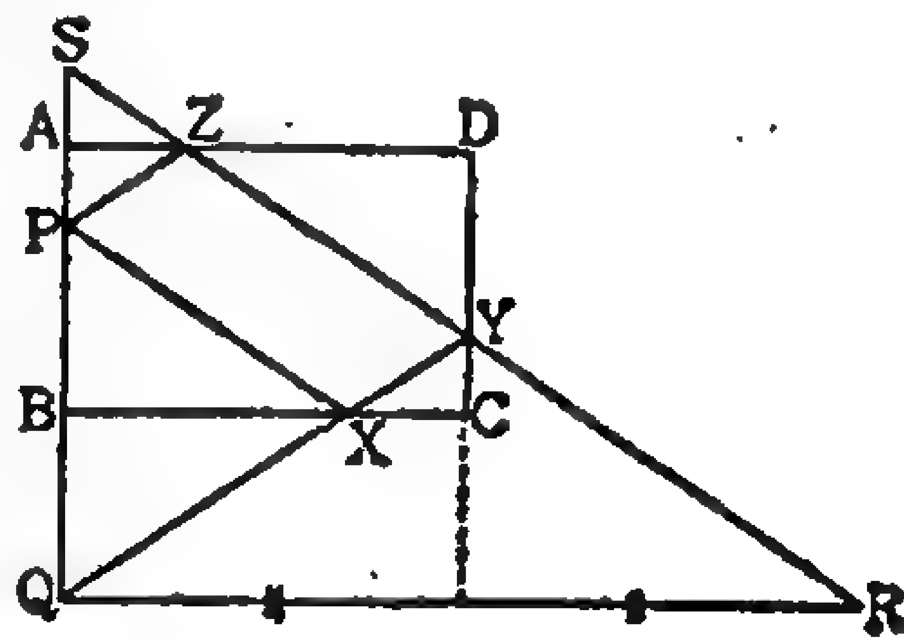
故$\square KLMN$的周长最小。

2788. 已知矩形$ABCD$内的定点M，在边BC、CD、DA、AB上分别求点P、Q、R、S，使$MP+PQ+QR+RS+SM$为最小。



解　设点M关于BC的对称点为M_1，其次点M_1关于CD的对称点为M_2，点M_2关于AD的对称点为M_3，点M_3关于AB的对称点为M_4，连结M_4M的直线与AB的交点为S，又SM_3与AD的交点为R，RM_2与CD的交点为Q，QM_1与BC的交点为P，则P、Q、R、S即为所求之点(参考上题)。

2789. 设P为矩形$ABCD$的边AB上的定点，在BC、CD、DA



上分别求点 X、Y、Z，使 $PX+XY+YZ+ZP$ 为最小。

解　设点 P 关于 BC、AD 的对称点为 Q、S，点 Q 关于 DC 的对称点为 R，SR 与 AD、DC 的交点为 Z、Y，设 QY 与 BC 的交点为 X，则 $PX+XY+YZ+ZP$ 为最小。

〔证明〕（参考上题）。

2790. 内接于已知锐角三角形 ABC 的三角形中，以垂足三角形的周长最小。

解　设 $\triangle ABC$ 的垂足三角形为 EFG，另一任意内接三角形为 $E'F'G'$。取 E、E' 关于边 AB 的对称点分别为 Q、Q'，关于 AC 的对称点分别为 P、P'，则

$EG=QG$,

$E'G'=Q'G'$,

$EF=PF$,

$E'F'=P'F'$.

$$\therefore\ EF+FG+EG=PF+FG+QG=PQ, \quad ①$$

$$E'F'+F'G'+E'G'=P'F'+F'G'+Q'G'\geqq P'Q'. \quad ②$$

其次在 $\triangle PAQ$、$\triangle P'AQ'$ 中，

$$\angle PAQ=\angle P'AQ'=(2\angle A),$$

$$AP=AE=AQ,\ AP'=AE'=AQ'.$$

又 $AE<AE'$ 即 $AP<AP'$，所以

$$PQ<P'Q'. \quad ③$$

由①、②、③得

$$EF+FG+EG<E'F'+F'G'+E'G',$$

故垂足三角形 EFG 的周长最小。

2791. 在边数与面积相等的多边形中，周长最小的是正多边形。

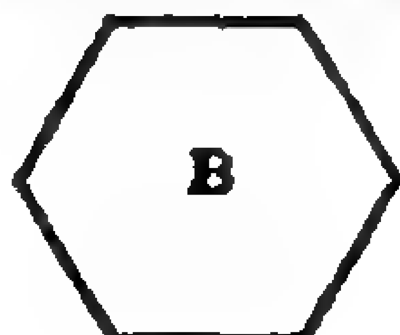
解　若任意多边形相邻两边都不相等，在多边形面积不变的情况下，变化不等边的公共顶点，使其两边相等，得到正多边形，由问题 **2746** 知它的周长减小。但是在边数相等的多边形中，正多边形的面积最大（问题 **2827**）。由以上可知，边数相等的多边形的面积一定时，正多边形的周长最小。

2792. 面积相等的三角形中，正三角形的周长最小。

解　这是上题的特殊情况。设 $\triangle ABC$ 的一边 BC 不变，其面积保持一定，由问题 **2784** 知，当 $AB=AC$ 时，$AB+AC$ 最小。其次假定 AB 不变，则 $AC=BC$ 时，$AC+BC$ 最小。由此，若面积一定，则当 $AB=BC=CA$ 时，即为正三角形时，其周长最小。

2793. 在面积一定的正多边形中，当其边数增加时周长减小。





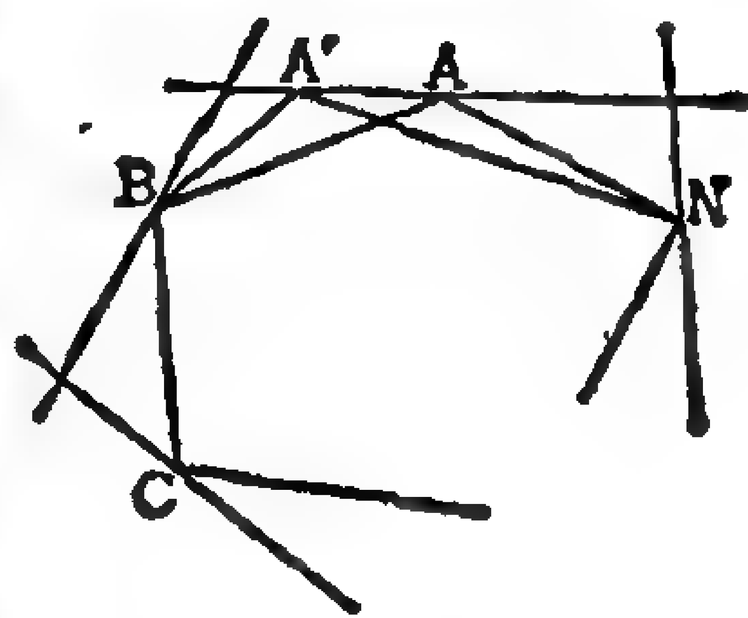


解　设有面积相等的两个正多边形 A、B，B 的边数比 A 的边数多，则 B 的周长比 A 的周长小。其理由是，作与 B 的周长相等且与 A 的边数相同的正多边形，设为 C，根据问题 **2825** 知 $C<B$。但是 $A=B$，于是 $C<A$，由此知 C 的周长比 A 的周长小。故知在面积相等的正多边形中，当边数增加时周长减小。

2794. 在面积相等的平面图形中，圆的周长最小。

解　因为在边数及面积一定的多边形中，正多边形的周长最小（问题 **2791**）。又由上题，在面积一定的正多边形中，当边数增加时其周长减小。因为圆是边数无限增加的正多边形的极限，所以面积一定的平面图形中以圆的周长最小。

2795. 求作一个 n 边形，其顶点分别在已知的 n 条定直线上，且使其周长最小。

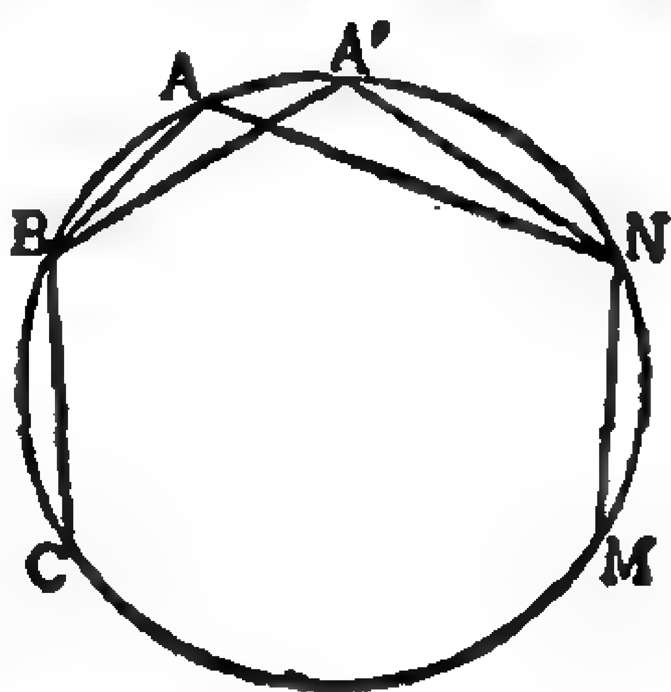


解　当每个顶点上相邻两边与过顶点定直线的夹角相等时，n 边形的周长为最小。其理由是，若相邻两边与过顶点定直线的夹角不相等，由问题 **2733** 知，当顶点移动到与定直线夹角相等时，其周长减小到最小。

2796. 已知圆的内接 n 边形中，正 n 边形的周长最大。

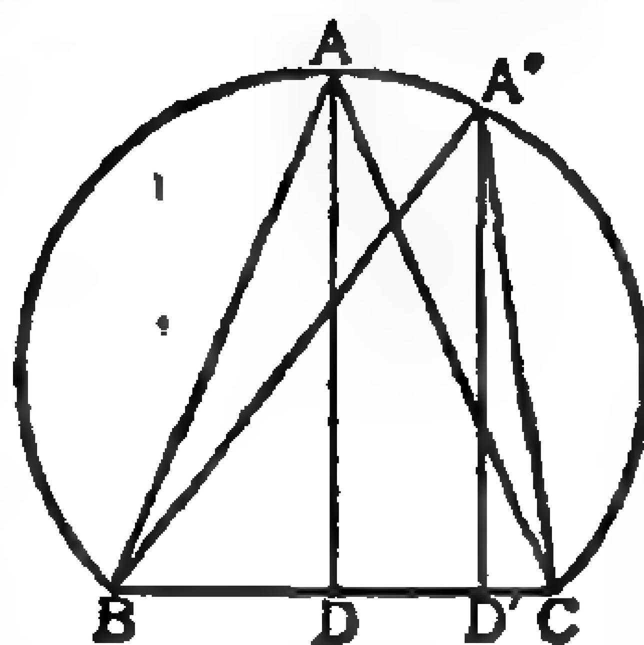
解　设圆的内接 n 边形为 $ABC\cdots MN$，在这个多边形的边中，设 $AB\neq AN$，取 A' 为弧 BAN 的中点，则

$A'B+A'N>AB+AN$ (问题 2736)，即在此多边形中，其他边不变，只改变顶点 A 的两邻边，此两邻边相等时，多边形的周长增大。从而多边形的各边都相等时，其周长最大。



7. 面积的最大、最小

2797. 已知底边及顶角的三角形中，面积最大的是等腰三角形。



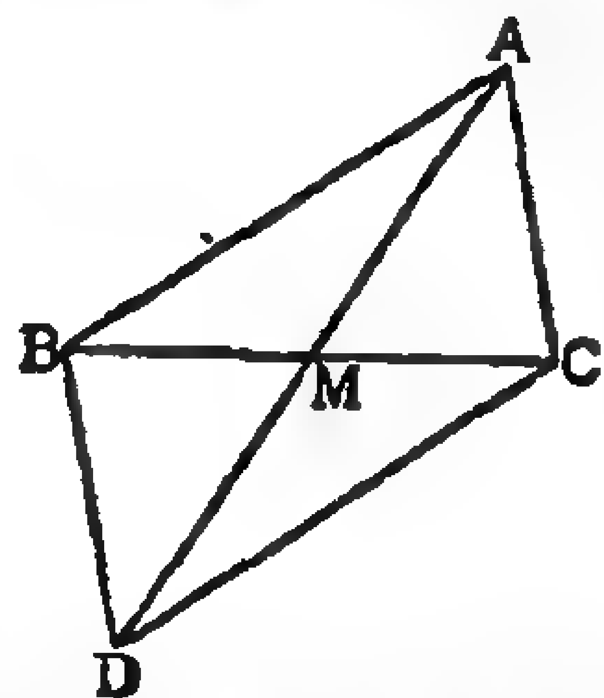
解 设底边为 BC，顶角 A 一定，则点 A 在以 BC 为弦张成定角 A 的弓形弧上。设弧 BAC 的中点为 A，则 $AB=AC$。在弧上取另一点 A'，从 A、A' 向 BC 作垂线 AD、$A'D'$，则有 $AD>A'D'$。

$$\therefore\quad AD\cdot BC>A'D'\cdot BC,$$

从而 $S_{\triangle ABC}>S_{\triangle A'BC}$。

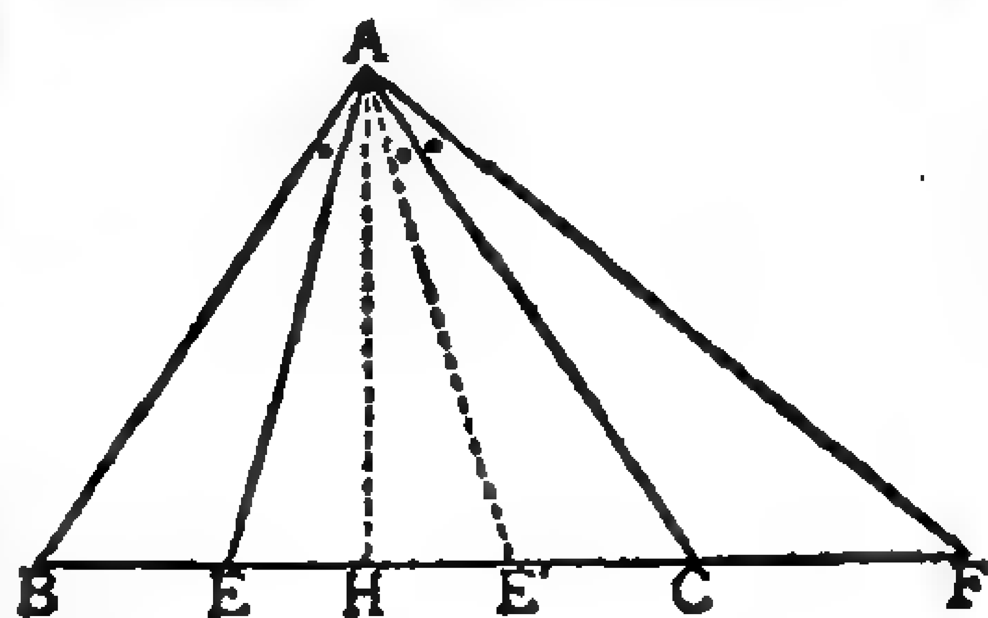
故等腰三角形的面积最大。

2798. 在顶角 $A(=\alpha)$，中线 $AM(=m)$ 为一定的三角形中，求面积最大的三角形。



解 设 $\triangle ABC$ 已求得，延长 AM 取 $MD=AM$，则 $ABDC$ 是平行四边形，$AD=2m$，$\angle ABD=180°-\alpha$。在 $\triangle ABD$ 中，AD 与 $\angle ABD$ 一定，根据上题，最大面积的 $\triangle ABD$ 可作出。从而顶点 C 的位置即可决定。

2799. 在已知顶角及高的三角形中，面积最小的是等腰三角形。



解 设已知顶角及高的等腰三角形为 ABC，顶角与高一定的任意三角形 AEF，高为 AH，点 E 关于 AH 的对称点为 E'，则

$$\triangle ABE\cong\triangle ACE',$$

$$\therefore\quad \angle BAE=\angle CAE'.$$

由于 $\angle BAC=\angle EAF$,

$$\therefore\quad \angle BAE=\angle CAF,$$

从而 $\angle CAE'=\angle CAF$.

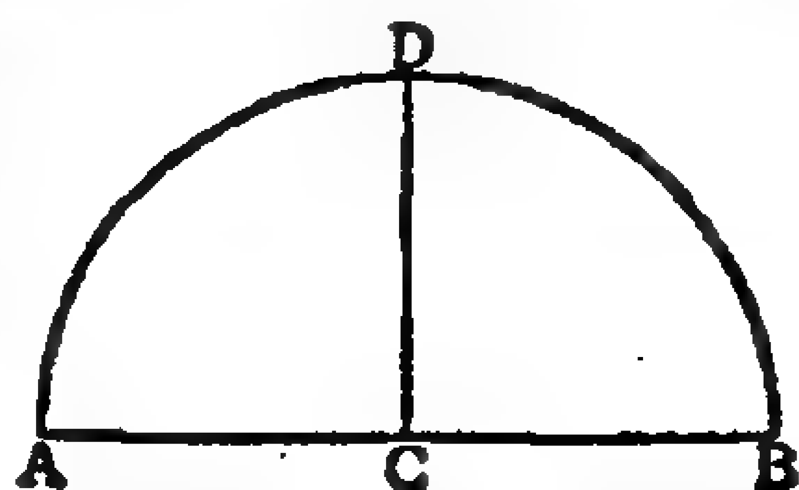
因此 $AF:AE'=CF:E'C$.

$$\because\quad AF>AE',\quad \therefore\quad CF>E'C,$$

从而 $EF>BC$，$\therefore\ S_{\triangle AEF}>S_{\triangle ABC}$。

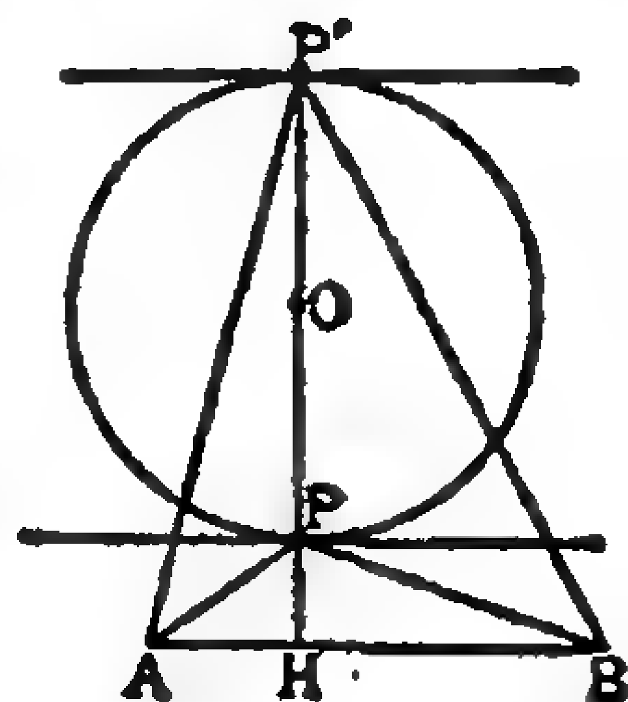
即等腰 $\triangle ABC$ 的面积最小。

2800. 在线段 AB 上求一点 C，使矩形的面积 $AC\cdot CB$ 最大。



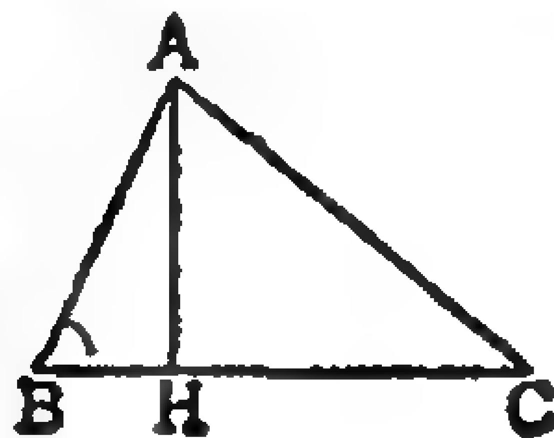
解 作以 AB 为直径的半圆，过点 C 作 AB 的垂线与半圆周交于点 D，则 $AC\cdot CB=DC^2$。要使 $AC\cdot CB$ 为最大，只须使 DC 为最大就可以了。所以，当 C 为 AB 的中点时，$AC\cdot CB$ 最大。

2801. 在已知圆 O 外有两点 A、B，在圆周上求一点 P，使 $\triangle ABP$ 的面积最小或最大。设线段 AB 与圆不相交。



解 [作图] 因为线段 AB 的长一定，所以当高 PH 为最小或最大时就有 $\triangle ABP$ 面积为最小或最大。引平行于 AB 且切于圆的直线，设其切点为 P、P'，则 P、P' 即为所求的适合条件的点。在图中，P 为适合条件的最小点，P' 是最大点。

2802. 两条边为定长的三角形中，其夹角为直角时三角形的面积最大。

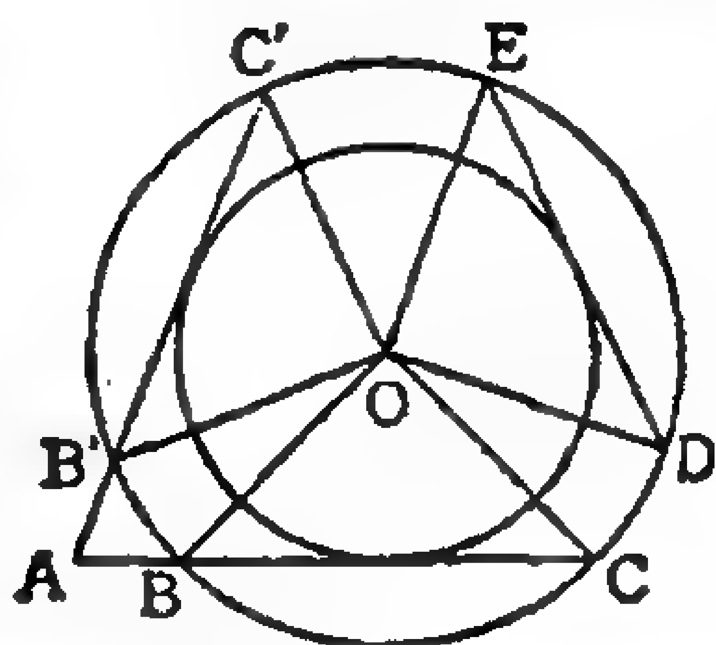


解 在 $\triangle ABC$ 中，边 AB、BC 为定长，从 A 向 BC 作垂线，设其垂足为 H，$\triangle ABC$ 的面积为 S，则

$$S=(BC\cdot AH)\div 2.$$

当 $\angle ABC=\angle R$ 时，AH 与 AB 重合；当 $\angle ABC\neq\angle R$ 时，$AH<AB$，故当 $\angle ABC=\angle R$ 时，S 最大。

2803. 从圆 O 外一点 A，求作该圆的一条割线，与圆周交于 B、C，且使 $\triangle OBC$ 的面积最大。



解　在 $\triangle OBC$ 中，OB、OC 都是圆 O 的半径，因此长一定。根据上题知，要使 $\triangle OBC$ 的面积为最大，只须 $\angle BOC=\angle R$ 就可以了。得作图如下。

[作图]　作 $\angle DOE=\angle R$，使 OD、OE 为圆 O 的半径，以 O 为圆心作切于 DE 的圆 O 的同心圆。设从点 A 向此圆引切线与圆周 O 的交点为 B、C（及 B'、C'），则 $\triangle OBC$（及 $\triangle OB'C'$）是所求之三角形。

2804. 在同底等周的三角形中，等腰三角形的面积最大。

解　设 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，另一三角形为 $\triangle EBC$ 且

$$AB+AC=BE+CE.$$

延长 BA 使 $AD=AC$，连结 CD，ED，设 $\angle A$ 的外角平分线为 AM，与 CD 的交点为 M，则

$$AB+AC=AB+AD=BD.$$

且　$BD<BE+ED$，

因　$AB+AC=BE+CE$，

$\therefore\quad BE+CE<BE+ED$，

从而　$CE<ED$.

因此，点 E 与 BC 在 AM 的同侧，从 E 到 BC 的高小于从 A 到 BC 的高。从而 $S_{\triangle EBC}<S_{\triangle ABC}$，即等腰三角形的面积最大。

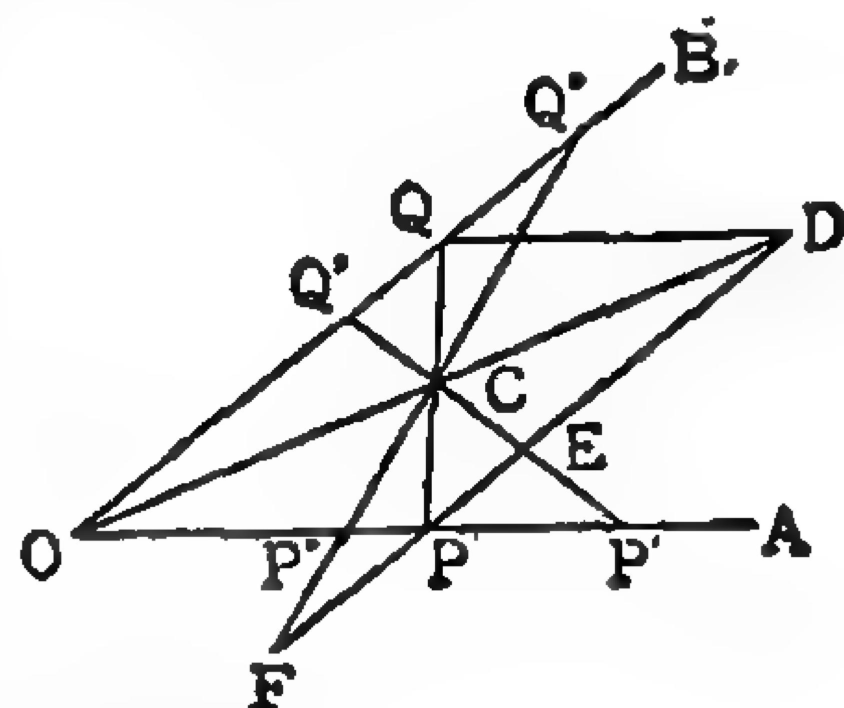
2805. 过已知 $\angle AOB$ 内一定点 C，求作一条直线，与 OA 交于点 P，与 OB 交于点 Q，且使 $\triangle OPQ$ 的面积最小。

解　连结 OC，并在其延长线上取 $CD=OC$，若从 D 引 OB、OA 的平行线，与 OA、OB 的交点为 P、Q，则四边形 $OPDQ$ 是平行四边形，C 为 PQ 的中点。这样，$\triangle OPQ$ 的面积最小。其理由是，过 C 引直线与 OP 延长线交于 P'，与 OQ 交于 Q'，设 $P'Q'$ 与 DP 的交点为 E，则

$$\triangle CQQ'\cong\triangle CPE,$$

$$\therefore\quad S_{\triangle CQQ'}<S_{\triangle CPP'},$$

$$\therefore\quad S_{\triangle OPQ}<S_{\triangle OP'Q'}.$$



若过 C 的直线与 OP 交于 P''，与 OQ 的延长线交于 Q''，$Q''P''$ 的延长线与 DP 的延长线交于点 F，则 $\triangle CPF\cong\triangle CQQ''$.

$$\therefore\quad S_{\triangle OPP''}<S_{\triangle CQQ''},$$

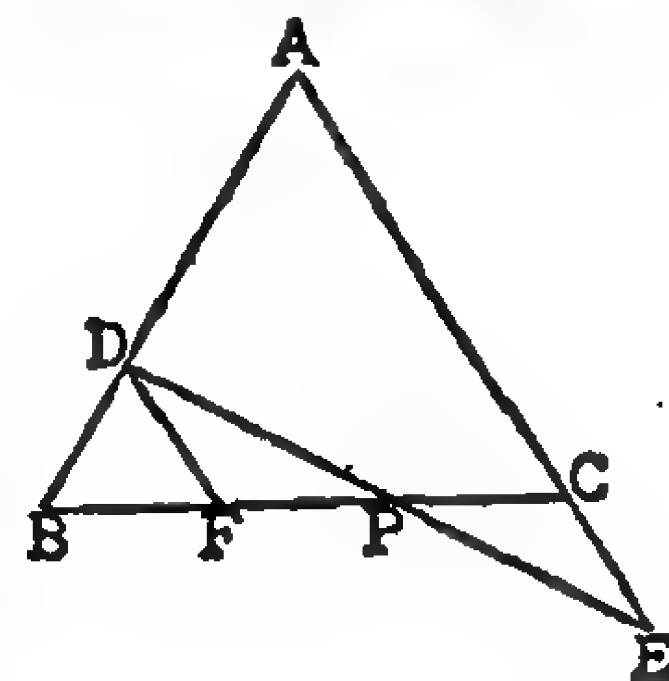
$$S_{\triangle OPQ}<S_{\triangle OP''Q''}.$$

故 $\triangle OPQ$ 的面积最小。

2806. 在已知顶角（$=\alpha$）与夹此角的两边之和（$=l$）的三角形中，求其面积最大的三角形。

解　设 $\triangle ABC$ 已作出，$\angle A=\alpha$，

$$AB=AC=\frac{l}{2}$$



时，则 $\triangle ABC$ 的面积最大。其理由是，$\angle A$ 公用，作另一三角形 ADE，使

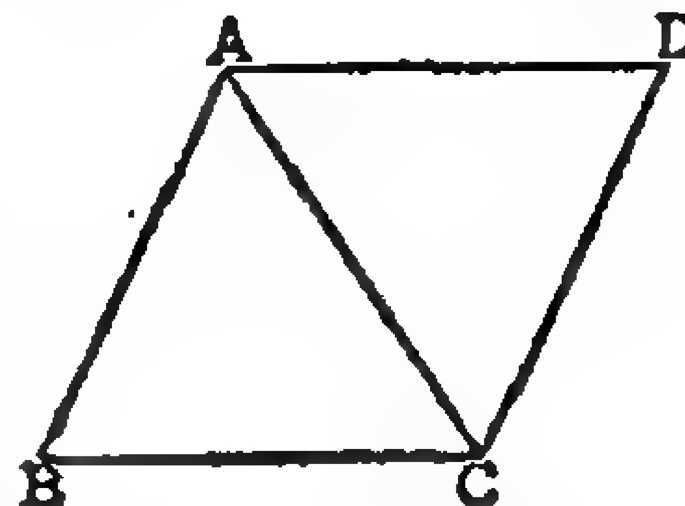
$$AD+AE=AB+AC,$$

在 AB 上取点 D，设 $BD=CE$，$DF\parallel CE$，则 $DF=CE$，从而 $\triangle DPF\cong\triangle EPC$.

$\therefore\quad S_{\triangle ADE}=$ 四边形 $ADFC$ 面积 $<S_{\triangle ABC}$，即 $\angle A$ 公用，夹此角两边之和 $AB+AC$ 为一定的所有三角形中，$\triangle ABC(AB=AC)$ 的面积最小。

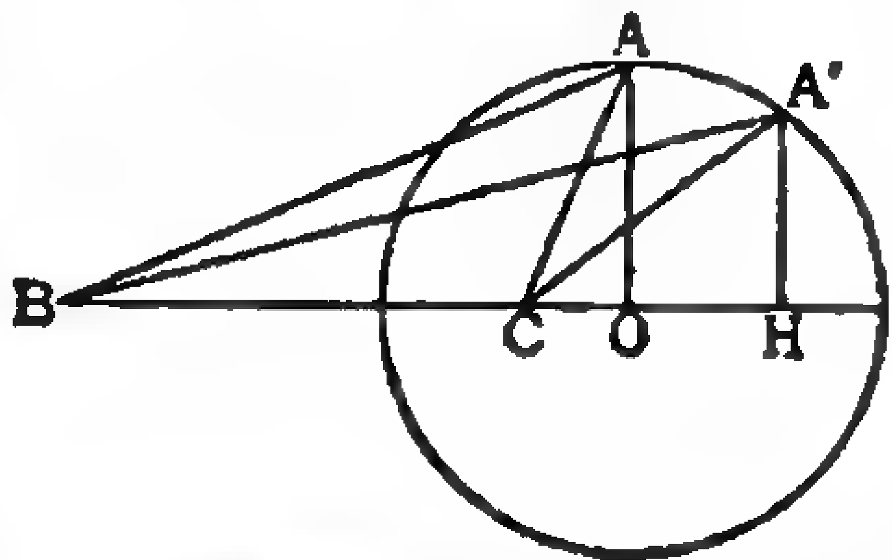
2807. 在角及周长一定的平行四边形中，求其面积最大的。

解　在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle B$ 大小一定，夹此角的两边之和 $AB+BC$ 也一定，由上题知，当 $AB=BC$ 时 $\triangle ABC$ 的面积最大。所以 $\square ABCD$ 的面积也最大。因此，在符合条件的 $\square ABCD$ 中，以菱形的面积最大。



2808. 在已知底边 BC（$=a$）、另外两边之比 $AB:AC(=m:n)$ 的三角形中，求其面积最大的。

解　[作图]　作到两定点 B、C 的距离之比为 $m:n$ 的阿波罗尼斯圆，其圆心为 O。过点 O 作 BC 的垂线，与圆 O 相交于点 A，则 $\triangle ABC$ 的面积最大。

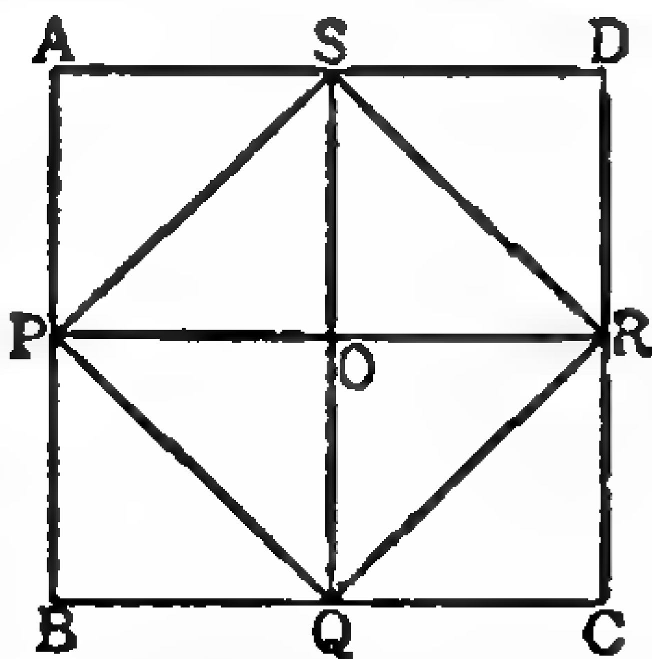


[证明]　因为圆周上的点到点 B、C 的距离之比为 $m:n$，在圆 O 上取点 A'，使 OA' 不垂直于 BC，从 A' 向 BC 的延长线作垂线 $A'H$，则 $AO>A'H$。

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}>S_{\triangle A'BC}$$

即 $\triangle ABC$ 的面积最大。

2809. 在已知正方形 $ABCD$ 内，求面积最小的内接正方形 $PQRS$。



解　正方形 $ABCD$ 与 $PQRS$ 的对角线交点是重合的。设这一点为 O，则要使 $PQRS$ 的面积最小，只须 OP 最小就可以了。因此，由点 O 向 $ABCD$ 的各边作垂线，其垂足就是各边的中点 P、Q、R、S，则 $PQRS$ 即为所求的面积最小的正方形。

2810. 在已知圆 O 内，求面积最大的矩形 $ABCD$。

解　圆内接矩形 $ABCD$ 是正方形时，其面积最大。其理由是，圆内接矩形是关于圆心 O 对称的图形，因此从固定一条对角线来考虑。任作一个矩形 $A'BC'D$，从 A' 向 BD 作垂线 $A'H$，由于 $AB=AD$，$AO\perp BD$，有 $AO>A'H$。

$$\therefore\quad S_{\triangle ABD}>S_{\triangle A'BD}.$$

故正方形 $ABCD$ 面积 > 矩形 $A'BC'D$ 面积。

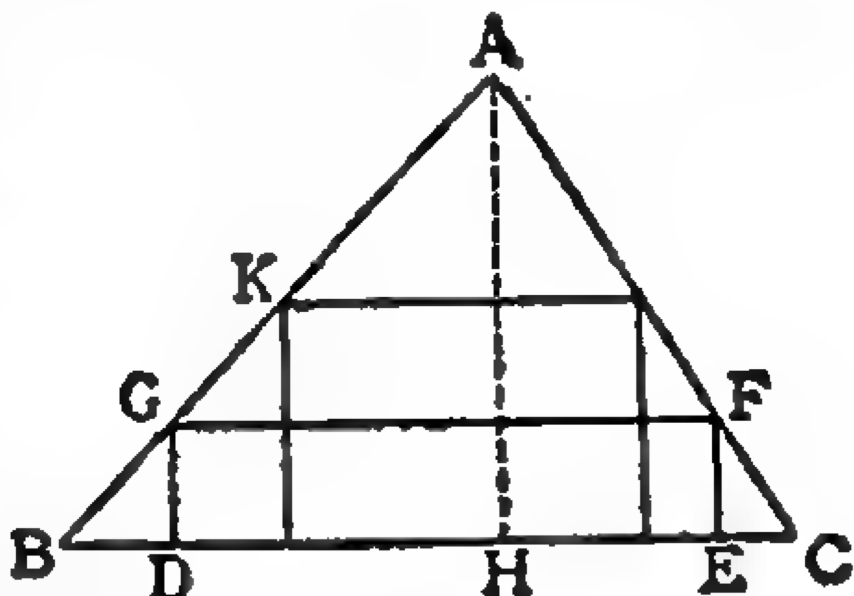
2811. 在已知 $\triangle ABC$ 内，求作面积最大的内接矩形。

解　设任意内接矩形为 $DEFG$。从 A 向 BC 作垂线为 AH，则

$$GF:BC=AG:AB,$$

$$DG:AH=BG:AB,$$

$$\therefore\quad GF\cdot DG:BC\cdot AH=AG\cdot BG:AB^2.$$



因为 $BC\cdot AH$ 及 AB^2 是一定的，当 $AG\cdot BG$ 最大时，$GF\cdot DG$ 也最大。设 AB 的中点为 K，则

$$AG\cdot BG=AK^2-KG^2.$$

当 $KG=0$ 时，即点 G 为 AB 的中点时，矩形 $GDEF$ 的面积最大。

2812. 在三边长的和为一定的直角三角形中，证明斜边最小的是等腰直角三角形。并作其图。

解　设周长为 a，斜边为 z，其他两边为 x、y，这时

$$x+y+z=a, \qquad ①$$

$$z^2=x^2+y^2. \qquad ②$$

从 ① 解出 y，代入 ② 得

$$z^2=x^2+(a-x-z)^2,$$

即 $$2x^2+2x(z-a)+a^2-2az=0.$$

因 x 取实数，必须使这个方程的判别式

$$(z-a)^2-2(a^2-2az)\geqq 0,$$

即 $$z^2+2az-a^2\geqq 0.$$

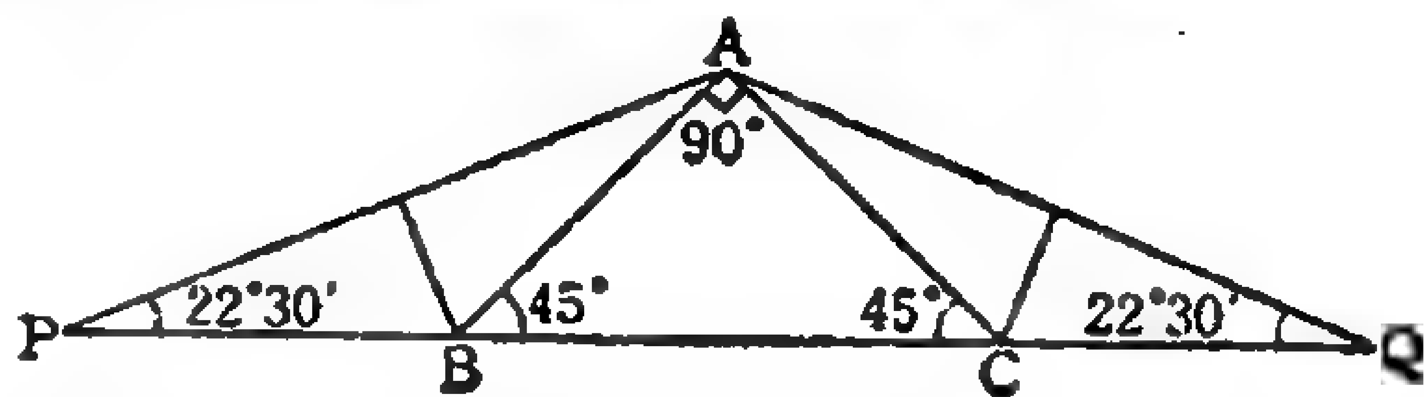
$$\therefore\quad [z+(\sqrt{2}+1)a]\cdot[z-(\sqrt{2}-1)a]\geqq 0.$$

因为 $z>0$，解这个不等式得

$$z\geqq(\sqrt{2}-1)a,$$

满足此不等式的 z 的最小值是 $(\sqrt{2}-1)a$。因此 $x=y=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}a$ 是等腰三角形。

[作图]　作等于 a 的线段 PQ，作 $\triangle APQ$ 使 $\angle P=\angle Q=22°30'$。再作 AP、AQ 的垂直平分线，与 PQ 的交点为 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求的适合条件的直角等腰三角形。

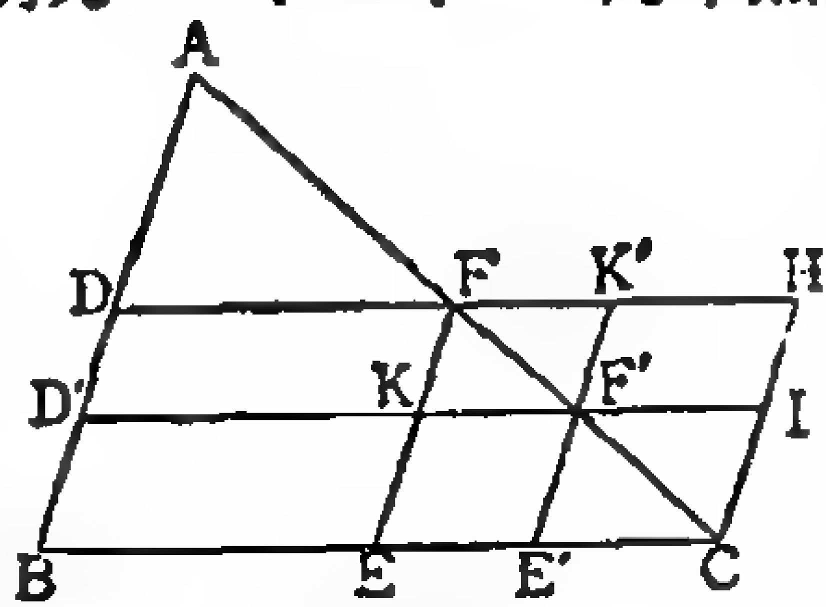


2813. 在 $\triangle ABC$ 的两边 AB、BC 上取两段为两边，在边 CA 上取一点为顶点的内接平行四边形中，求其面积最大者。

解　设 D、E、F 为 $\triangle ABC$ 的各边中点，

则平行四边形 $DBEF$ 的面积最大。证明如下。

设 D、E、F 分别为 AB、BC、CA 的中点，作另一个内接四边形 $D'BE'F'$。再作平行四边形 $DBCH$，设 $D'F'$ 与 FE 的交点为 K，则



$$\square FDD'K\text{ 面积}=\square FKIH\text{ 面积}$$
$$(\because\ DF=FH).\quad ①$$

又点 F' 在 $\square FECH$ 的对角线 FC 上，因此有

$$\square KEE'F'\text{ 面积}=\square K'F'IH\text{ 面积}.\quad ②$$

由①、②得，

$$\square FDD'K\text{ 面积}>\square KEE'F'\text{ 面积},$$

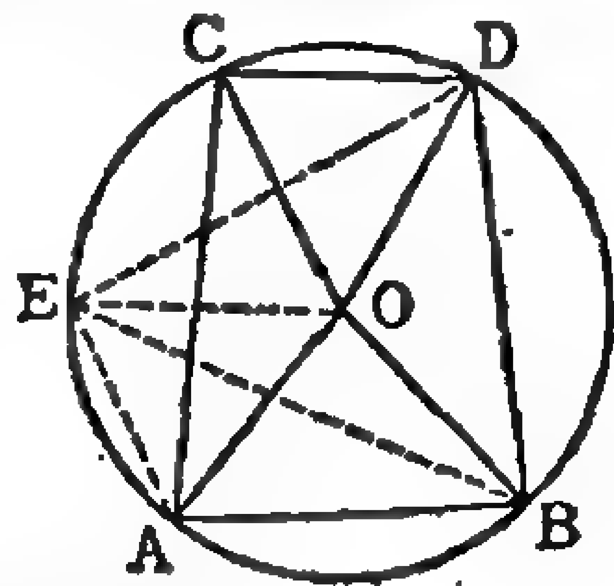
两边同时加上 $\square D'BEK$，得

$$\square DBEF\text{ 面积}>\square D'BE'F'\text{ 面积},$$

即以三角形各边中点为顶点的内接平行四边形的面积最大。

2814. 在以 AB 为弦的弓形内，作定长为 l 的弦 CD，使四边形 $ABDC$ 的面积最大。

解 若 $AB\parallel CD$，则四边形 $ABDC$ 的面积最大。其理由是，取弦 $AE=l$，因为 $CD=l$ 有

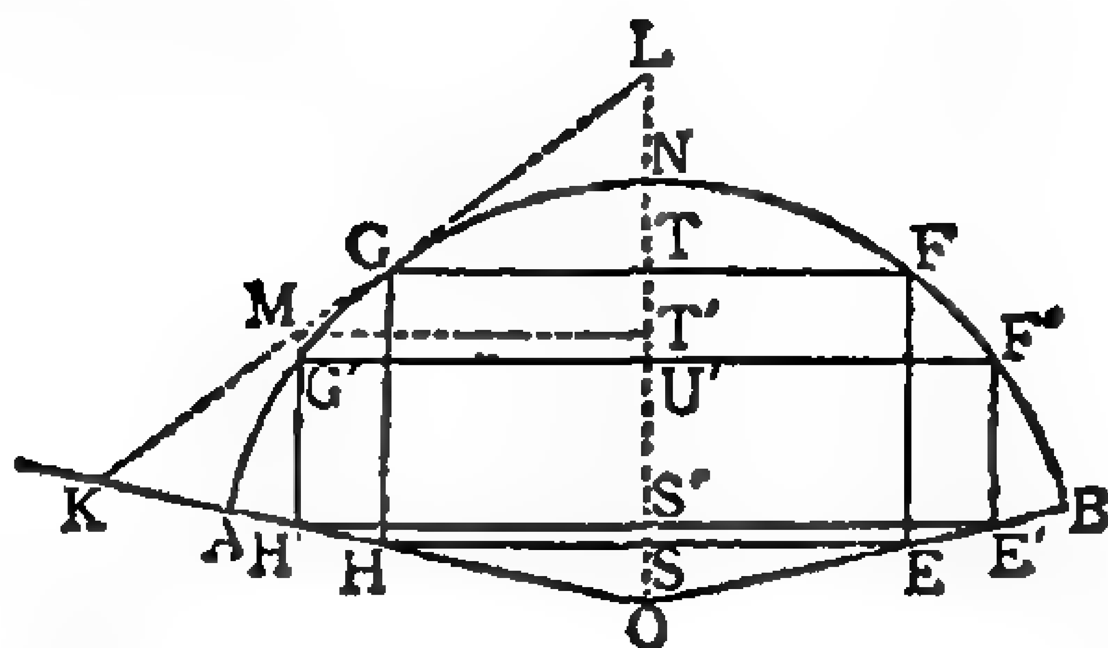


$$\triangle OAE\cong\triangle OCD,$$
$$\therefore\quad \triangle OAC\cong\triangle CED.$$

要使四边形 $ABDC$ 的面积最大，因为 $\triangle OAB+\triangle OCD$ 为一定，只要 $\triangle OBD+\triangle OAC$ 即 $\triangle OBD+\triangle OED$ 为最大就可以了。加上一定值 $\triangle OBE$，使 $\triangle BED$ 为最大就行了。所以取 $\angle BOD=\angle EOD$（这样有 $CD\parallel AB$）的点 D，则四边形 $ABDC$ 的面积最大。

2815. 扇形 OAB 的内接矩形 $GHEF$ 的面积，当 $\widehat{AG}=\frac{1}{4}\widehat{AB}$ 时最大。其中，点 G、F 在 $\widehat{AB}$ 上，H、E 分别在 OA、OB 上。

解 设 $\widehat{AB}$ 的中点为 N，因为 $\widehat{AG}=\frac{1}{4}\widehat{AB}$，所以 $\widehat{AG}=\frac{1}{2}\widehat{AN}$。过点 G 作切线与 OA、ON 的延长线的交点分别为 K、L，则 $KG=GL$。



现另作一个任意内接矩形 $G'H'E'F'$，设 HE、$H'E'$ 与 OL 的交点分别为 S、S'，则顶点 G' 在切线 KL 的内侧，延长 $H'G'$ 与 LK 相交，设其交点为 M，因为 G 是 KL 的中点，根据问题 **2811** 得

$$\text{矩形 }GHST\text{ 面积}>\text{矩形 }MH'S'T'\text{ 面积}.$$

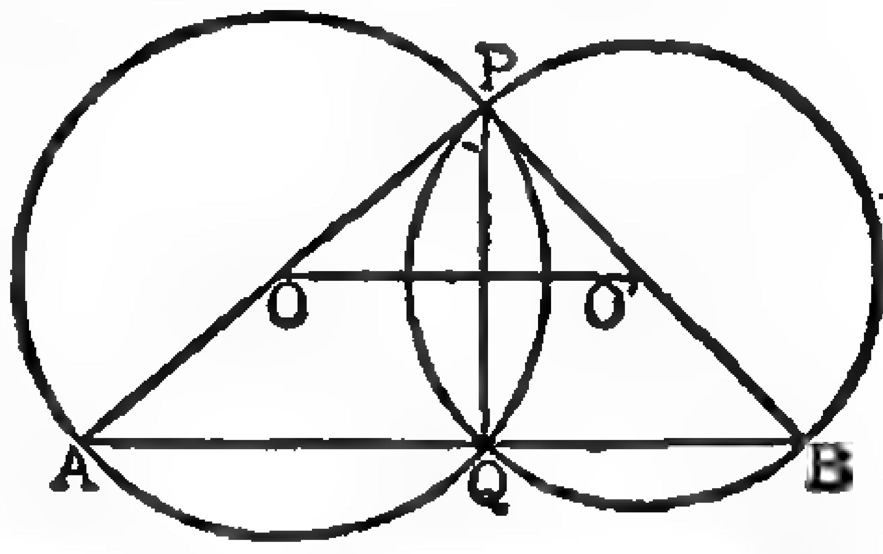
又 $$\text{矩形 }MH'S'T'\text{ 面积}>\text{矩形 }G'H'S'U'\text{ 面积},$$

$$\therefore\quad\text{矩形 }GHST\text{ 面积}>\text{矩形 }G'H'S'U'\text{ 面积},$$

故 $$\text{矩形 }GHEF\text{ 面积}>\text{矩形 }G'H'E'F'\text{ 面积}.$$

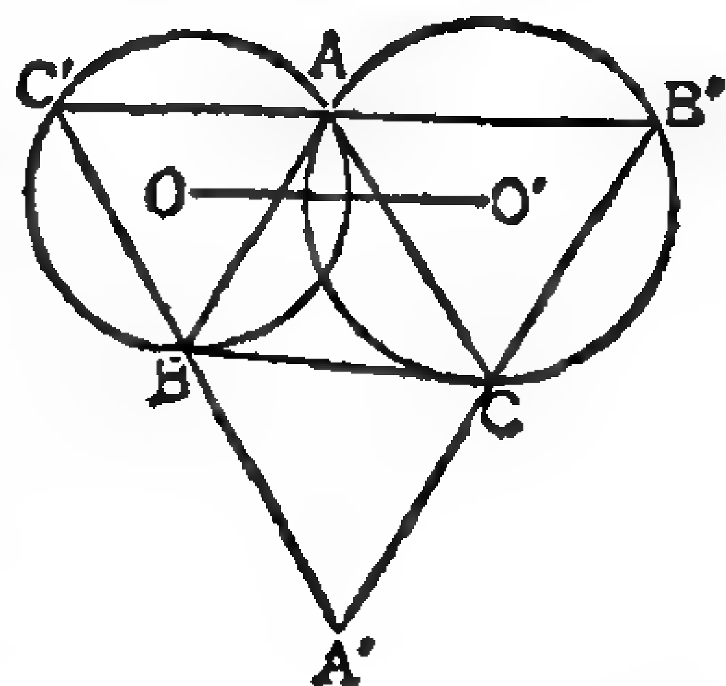
2816. 设两已知圆 O、O' 相交于点 P、Q，过点 Q 引两圆的弦 AQB，使 $\triangle PAB$ 的面积最大。

解 因为圆 O、O' 是定圆，所以引弦 AQB，$\angle PAB$ 及 $\angle PBA$ 的大小一定。因而 $\triangle PAB$ 的形状一定。要使 $\triangle PAB$ 的面积最大，只须 AB 为最大。当 AB 与连心线 OO' 平行，即 $PQ\perp AB$ 时，AB 最大，故此时 $\triangle PAB$ 的面积最大。



2817. 在已知 $\triangle ABC$ 的外接正三角形中，求面积最大的。

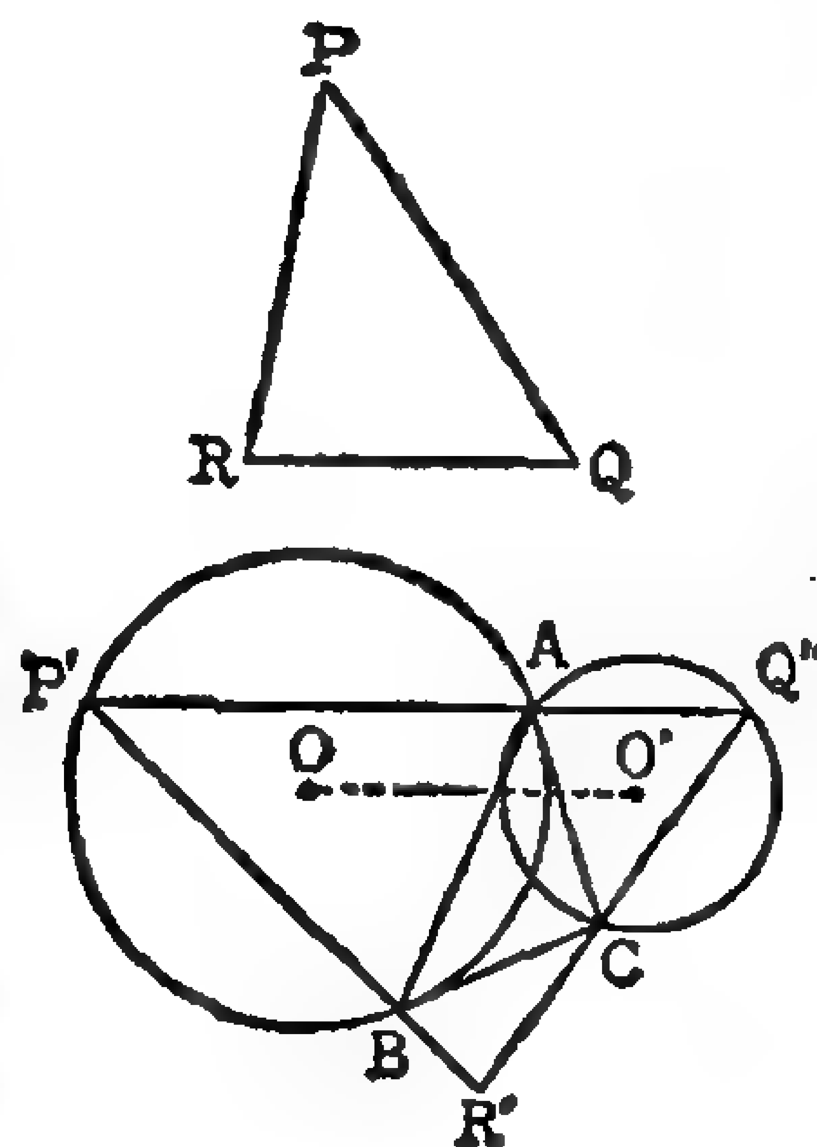
解 [作图] 以 AB、AC 为弦分别作张成角 $60°$ 的弓形弧，设其圆心分别为 O、O'。过点 A 引平行 OO' 的直线，与两弓形弧的交点分别为 C'、B'，延长 $B'C$ 与延长 $C'B$ 相交于 A'，则 $\triangle A'B'C'$ 是最大面积的正三角形。



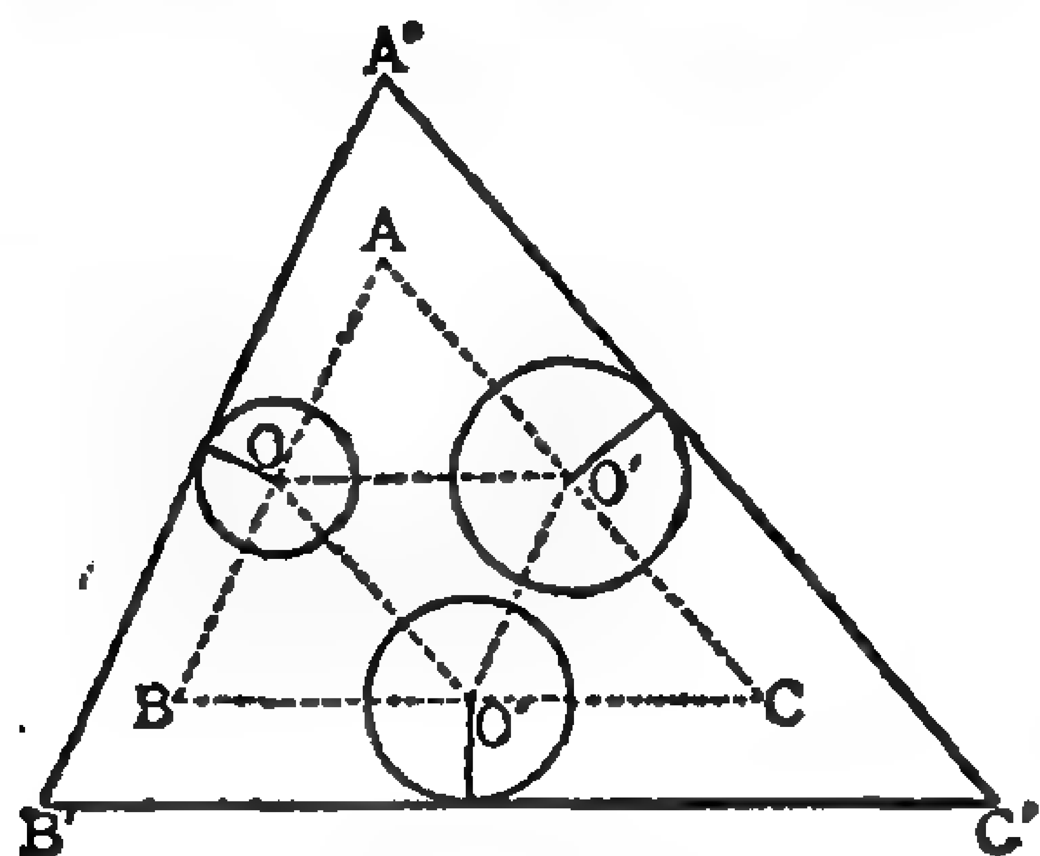
［证明］ 由作图知 $\angle B'=60°$，$\angle C'=60°$，因此 $\triangle A'B'C'$ 是正三角形。因为 $B'C'$ 平行连心线 OO'，它是过点 A 的最长割线，故 $\triangle A'B'C'$ 是面积最大的正三角形。

2818. 求作已知 $\triangle ABC$ 的有最大面积的外接三角形 $P'Q'R'$，且与定 $\triangle PQR$ 相似。

解 以 AB 为弦作含角 $\angle P$ 的弓形，设其圆心为 O。其次以 AC 为弦作含角 $\angle Q$ 的弓形，设其圆心为 O'。设过 A 引 OO' 的平行线与圆 O、O' 相交于 P'、Q'，$P'B$ 与 $Q'C$ 的交点为 R'，则 $\triangle P'Q'R'$ 即为所求的适合条件的三角形。

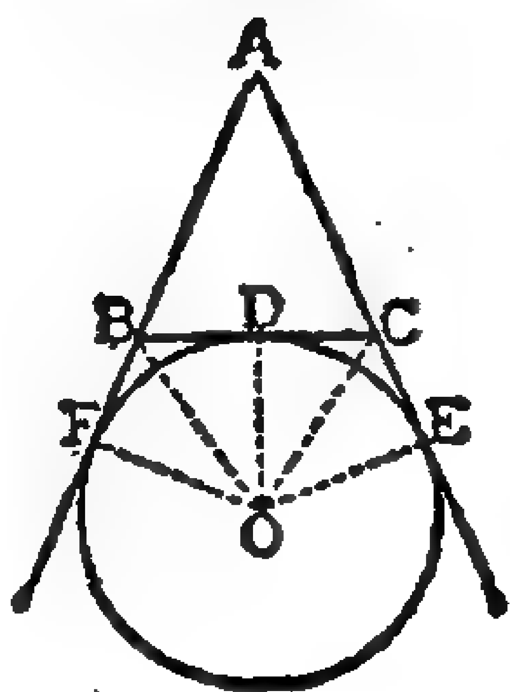


2819. 求作与已知三角形相似的三角形，使它外切于三个定圆，且其面积最大。

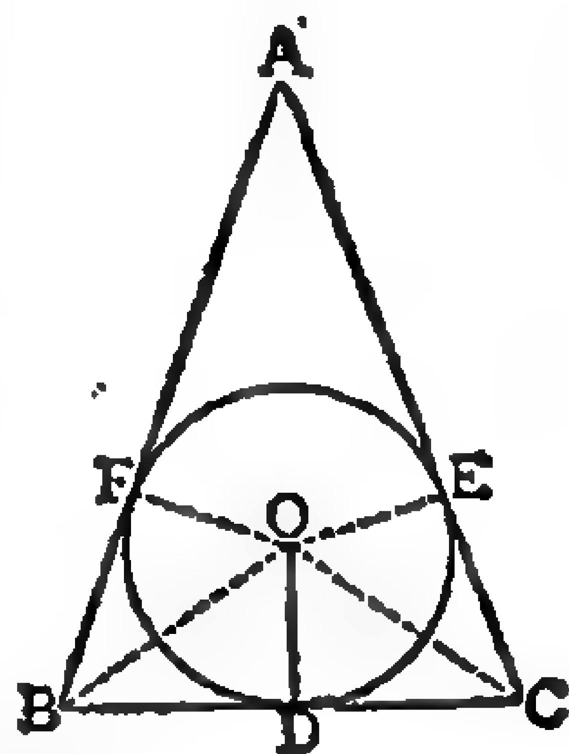


解 设已知三个定圆的圆心分别为 O、O'、O''，则 $\triangle OO'O''$ 是定三角形。根据上题，作 $\triangle OO'O''$ 的外接三角形 ABC，与已知三角形相似，且使其面积为最大。在 $\triangle ABC$ 的外侧引平行于各边的直线，且分别切于三个定圆，设其交点为 A'、B'、C'，则 $\triangle A'B'C'$ 即为所求之三角形。其理由是，点 O、O'、O'' 分别在 $\triangle ABC$ 的各边上，作与 $\triangle ABC$ 各边平行且分别切于定圆的直线组成的三角形 $A'B'C'$。则 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$，各对应边间的距离是三个圆的半径，是一定的。所以要使 $\triangle A'B'C'$ 的面积最大，只须使 $\triangle ABC$ 的面积最大即可。根据以上作图已满足此条件。

2820. 已知角 BAC 的两边切于圆 O，在圆 O 的切线与 $\angle A$ 的两边所作的三角形 ABC 中，若切线 BC 与点 A 在圆 O 的同侧，求最大面积的 $\triangle ABC$；若切线 BC 与点 A 在圆 O 的异侧，求最小面积的 $\triangle ABC$。



解 使 $AB=AC$，且 BC 与点 A 在圆 O 的同侧，则三角形 ABC 的面积最大。BC 与点 A 在圆 O 的异侧，则三角形 ABC 的面积最小。



［证明］ 当 BC 与点 A 在 O 的同侧时，

$S_{\triangle ABC}$＝四边形 $AFOE$ 面积 $-2S_{\triangle OBC}$。

由于四边形 $AFOE$ 是一定的，当 $\triangle OBC$ 最小时，$\triangle ABC$ 最大。但是 $2S_{\triangle OBC}=BC\cdot OD$，因为 OD 一定，所以 BC 最小时，$\triangle OBC$ 就最小。由问题 **2715** 知，在 $AB=AC$ 时 BC 最小，从而 $\triangle ABC$ 的面积最大。

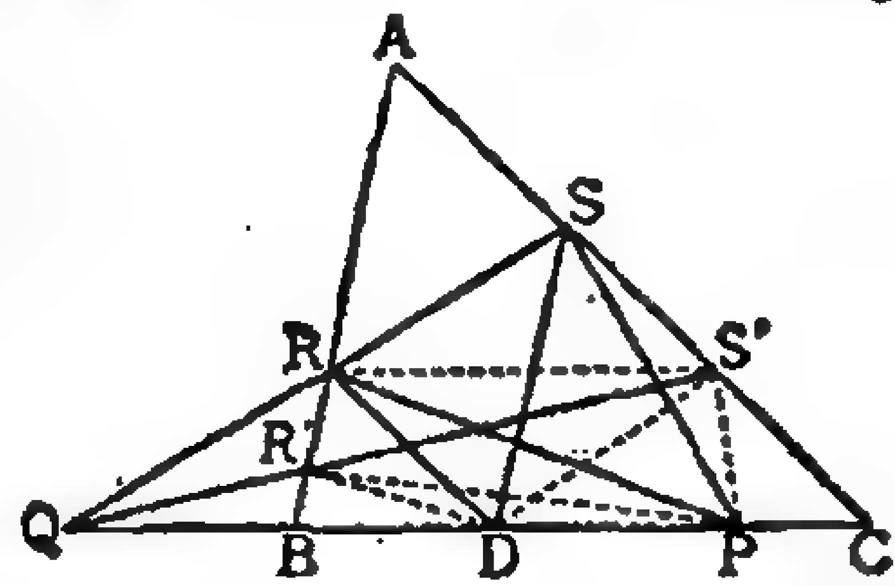
当 BC 与点 A 在 O 的异侧时，

$S_{\triangle ABC}$＝四边形 $AFOE$ 面积 $+2S_{\triangle OBC}$。

当 BC 最小时 $\triangle OBC$ 最小，从而使 $\triangle ABC$ 为最小。同理当 $AB=AC$ 时，$\triangle ABC$ 的面积最小。

2821. 在已知 $\triangle ABC$ 中，BC 上有一定点 P，其延长线上有一定点 Q，求从点 Q 引直线 QRS 与 AB、AC 分别交于点 R、S，使 $\triangle PRS$ 的面积最大。

解 ［作图］ 在 BC 上取点 D，使 QD 为 QB、QC 的比例中项，过点 D 引 AC、AB 的平行线与 AB、AC 的交点为 R、S，连结 PR，PS，则 $\triangle PRS$ 即为所求之三角形。



［证明］ 由作图知，$QB:QD=QD:QC$，$DR\parallel AC$，$DS\parallel AB$，因此 S、R、Q 在一直线上。另外任作一条直线 $QR'S'$，设与 AB、AC 的交点分别为 R'、S'，连结 $R'P$、$S'P$，则

$$\frac{S_{\triangle PRS}}{S_{\triangle DRS}}=\frac{PQ}{DQ}=\frac{S_{\triangle PR'S'}}{S_{\triangle DR'S'}},$$

且 $S_{\triangle DRS}=S_{\triangle DRS'}>S_{\triangle DR'S'}$，

$\therefore\ S_{\triangle PRS}>S_{\triangle PR'S'}$。

故 $\triangle PRS$ 的面积最大。

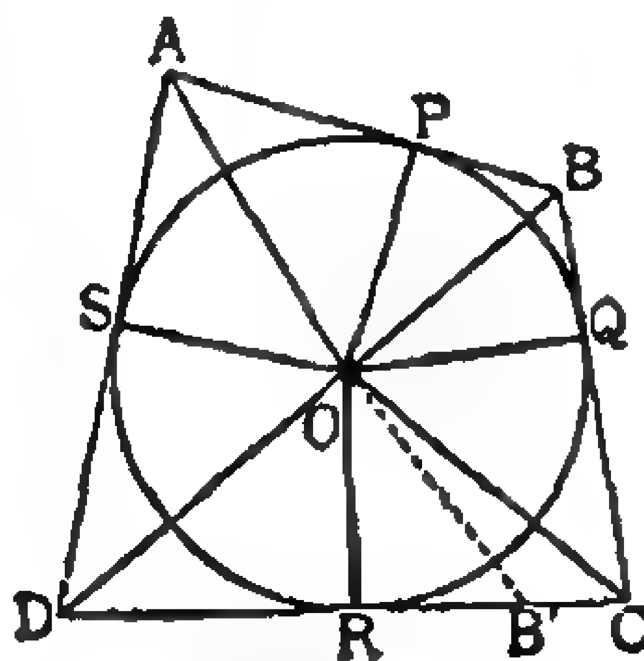
2822. 作一四边形，使其一组对角等于已知角，外切于定圆、且其面积为最小。

解 设四边形 $ABCD$ 为定圆 O 的外切四边形，$\angle A$、$\angle C$ 分别等于已知角。其切点依次为 P、Q、R、S，则只须

$$\angle SOR=\angle POQ=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$$

就可以了。其理由是，因为

$$\angle POS=2\angle R-\angle A,$$
$$\angle ROQ=2\angle R-\angle C.$$



由于 $\angle A$、$\angle C$ 是一定的，所以 $\angle POS$ 及 $\angle ROQ$ 一定，从而四边形 $ASOP$、$CROQ$ 的面积一定，因此四边形 $DSOR$+四边形 $BQOP$ 为最小时，外切四边形的面积最小。因此只要其一半 $\triangle DOR+\triangle BOQ$ 为最小就可以了。

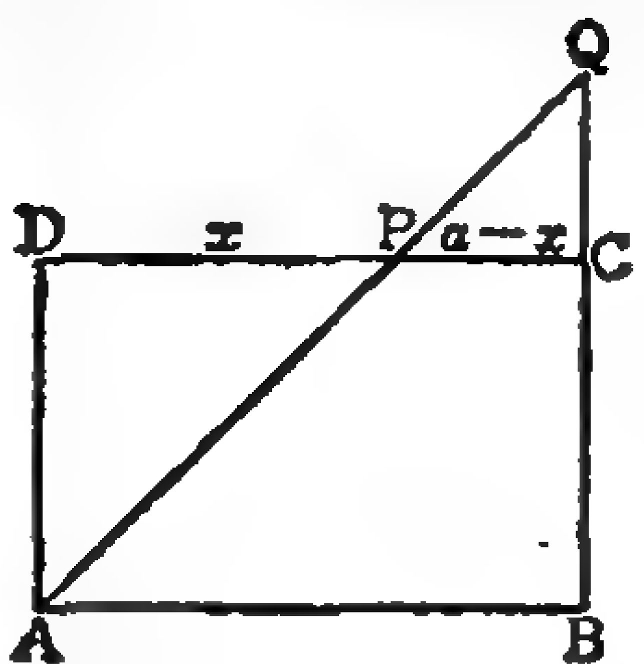
把 $\triangle OQB$ 绕 O 旋转，使 OQ 与 OR 重合，其位置为 $\triangle ORB'$。则由 $\overset{\frown}{SP}+\overset{\frown}{RQ}$ 一定，可知 $\overset{\frown}{SR}+\overset{\frown}{PQ}$ 一定。故 $\angle DOB'$ 一定。由此要使 $\triangle DOB'$ 的面积最小，只须 $OD=OB'$ 即 $DR=RB'$（问题 **2799**）从而 $\overset{\frown}{SR}=\overset{\frown}{PQ}$。因此 $\angle SOR=\angle POQ$。

$$\therefore\ 2\angle SOR=4\angle R-(\angle SOP+\angle ROQ)$$
$$=\angle A+\angle C,$$

故 $\angle SOR=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=\angle POQ$。

故即可作图。

2823. 若过已知矩形 $ABCD$ 的顶点 A 引一条直线，与 CD 交于点 P，与 BC 的延长线交于点 Q，求使 $\triangle APD+\triangle CPQ$ 为最小的点 P 的位置。



解 设 $DC=a$，$DP=x$，则 $PC=a-x$。因为 $DA:CQ=x:(a-x)$，设 $DA=b$，则

$$CQ=\frac{b}{x}(a-x).$$

设 $S_{\triangle DAP}+S_{\triangle PCQ}=S$，

则 $2S=DP\cdot DA+PC\cdot CQ$

$$=bx+(a-x)\cdot\frac{b}{x}(a-x).$$

$$\therefore\ 2Sx=bx^2+b(a-x)^2$$
$$=2bx^2-2abx+a^2b,$$

因而 $2bx^2-2(ab+S)x+a^2b=0$。 ①

要使方程有实根，必须

$$D/4=(ab+S)^2-2a^2b^2\geqq 0.$$

解此不等式得 $S\geqq(\sqrt{2}-1)ab$，因此 S 的最小值为 $(\sqrt{2}-1)ab$。代入 ① 式，可得

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

2824. 设锐角 $\triangle ABC$，从边 BC 上一点 P 向其他两边作垂线，其垂足分别为 M、N。求使 $\triangle PMN$ 的面积最大时点 P 的位置。

解 设 BC 的中点为 O，从 O 向 AB、AC 作垂线的垂足为 Q、R。在 BC 上另取一点 P，设 $OP=x$，$OB=OC=m$，$OQ=a$，$OR=b$，则

$$\frac{PM}{OR}=\frac{PC}{OC}$$
$$=\frac{m+x}{m},$$

即 $\frac{PM}{b}=\frac{m+x}{m}$，

$$\therefore\ PM=\frac{m+x}{m}\cdot b.$$

又 $\frac{PN}{OQ}=\frac{BP}{OB}=\frac{m-x}{m}$，

即 $PN=\frac{m-x}{m}a$。

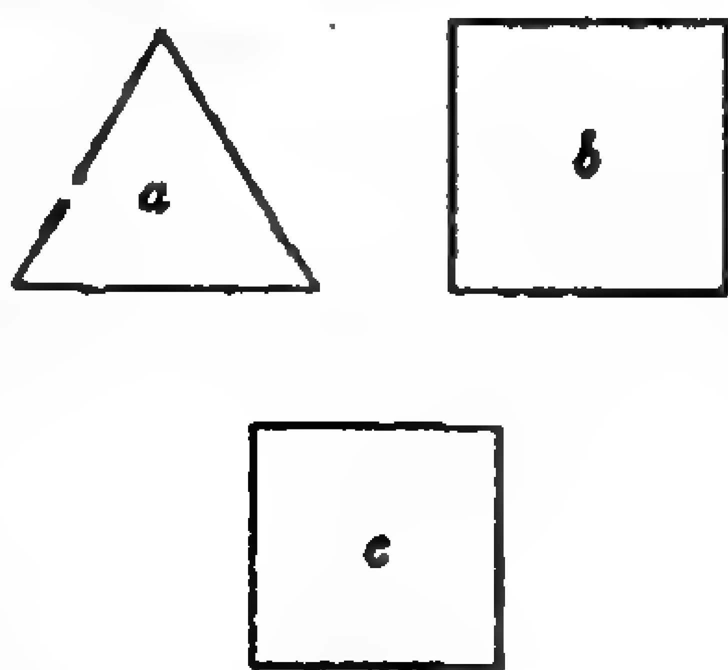
$$\therefore\ PM\cdot PN=\frac{m^2-x^2}{m^2}\cdot ab.$$

而 m、a、b 是定值，要使 $PM\cdot PN$ 为最大，只须使 $x=0$ 就可以了。故当 P 在 BC 的中点上时，$\triangle PMN$ 的面积最大。

2825. 周长一定的正多边形，若其边数增加，则其面积增大。

解 设 a 为正 m 边形，b 为周长与 a 相等的正 n 边形，于是 $m<n$。作与 a 的面积相等的正 n 边形 c，则根据问题 **2793** 知，a 的周长 $>c$ 的周长。但是 a 的周长 $=b$ 的周长，

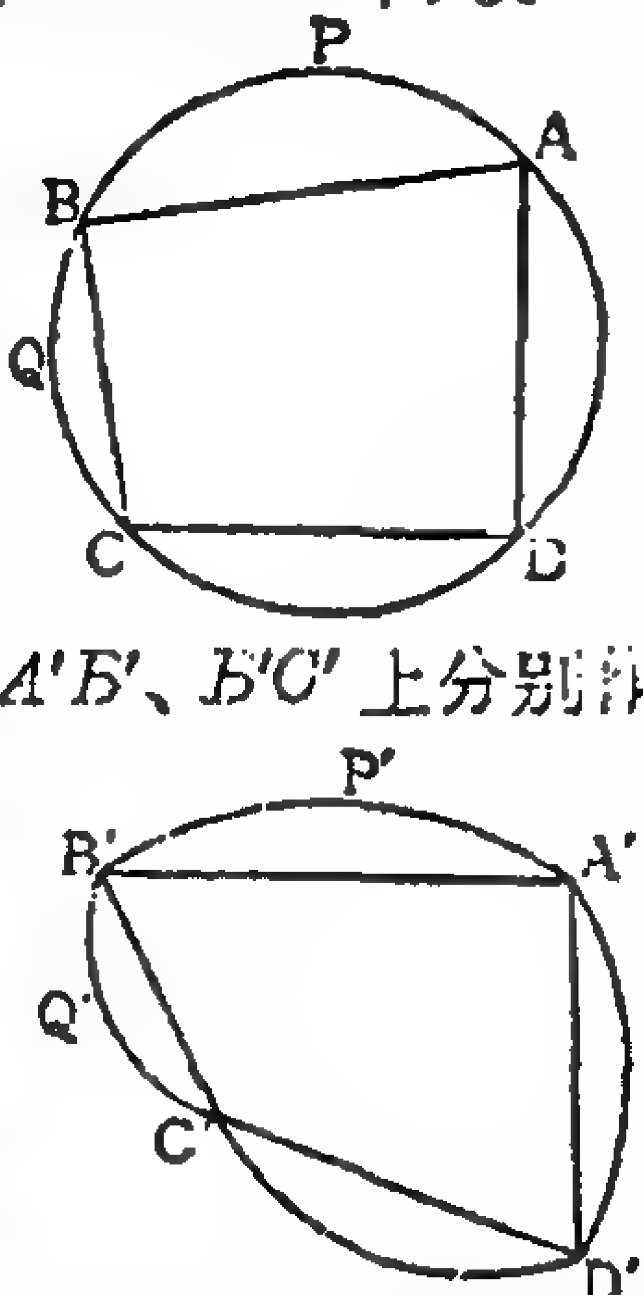
$\therefore$ b的周长>c的周长.



因为b、c都是正n边形，所以b的一边大于c的一边．又因为边数相同的正多边形的面积与其一边的平方成比例，所以$b>c$．故周长一定的正多边形，当边数增多时，其面积增大．

2826．在边长分别相等的以直线为边的图形中，以圆内接图形的面积最大．

解 在多边形$ABCD$、$A'B'C'D'$中，设$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CD=C'D'$，$DA=D'A'$，$ABCD$是圆内接图形，$A'B'C'D'$不是圆的内接图形，则$ABCD$的面积比$A'B'C'D'$的面积大．其理由是，在$A'B'$、$B'C'$上分别作等于弓形弧APB、BQC的弓形弧，这两条曲线的周长相等．但是，因为一个是圆另一个不是圆，所以根据问题**2830**知，圆$ABCD$比曲线形$A'P'B'Q'C'D'$大．故使图形APB与$A'P'B'$，BQC与$B'Q'C'$相等引四个弓形时，则$ABCD$的面积大于$A'B'C'D'$的面积．



2827．在边数一定的等边、等周长的多边形中，面积最大的是正多边形．

解 根据上题知，在等周长、等边的多边形中，面积最大的是圆内接多边形．但在圆内接等边多边形中，以正多边形的面积最大．故在边数一定的等边、等周长多边形中，正多边形的面积最大．

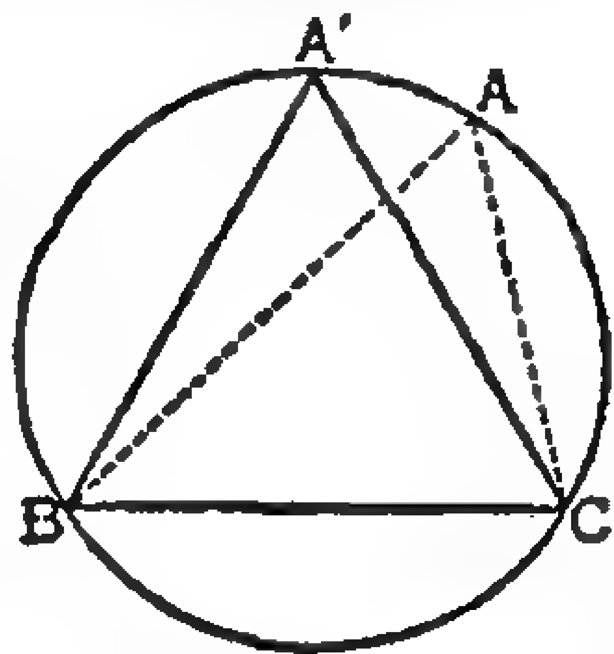
2828．在边数一定的等周长多边形中，以正多边形的面积最大．

解 如果在多边形中，相邻的两边不相等，则在两边之和不变的条件下移动顶点，使两边相等时，根据问题**2804**知其面积变大．又根据上题知，等边多边形为正多边形时，其面积最大．故等周长的多边形为正多边形时面积最大．

注 在等周长的三角形中，面积最大的是正三角形．

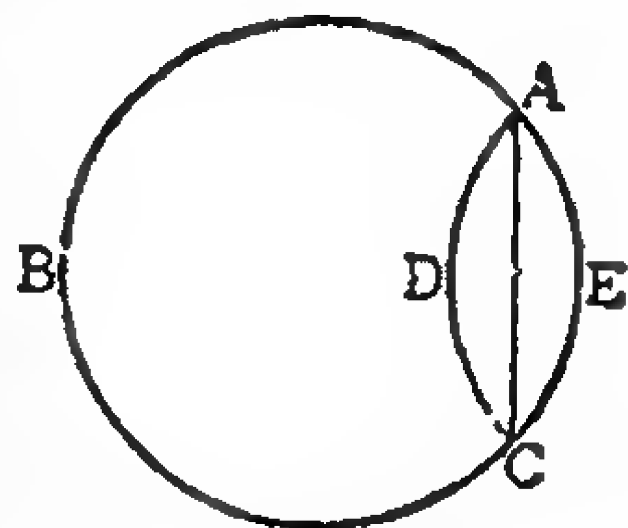
2829．在已知圆内，求有最大面积的内接三角形．

解 圆内接最大面积的三角形是正三角形．其理由是，若边不相等，则顶点在它所在的弧上移动到弧的中点时，面积随之增大．所以三边都相等时，即正三角形的面积最大．

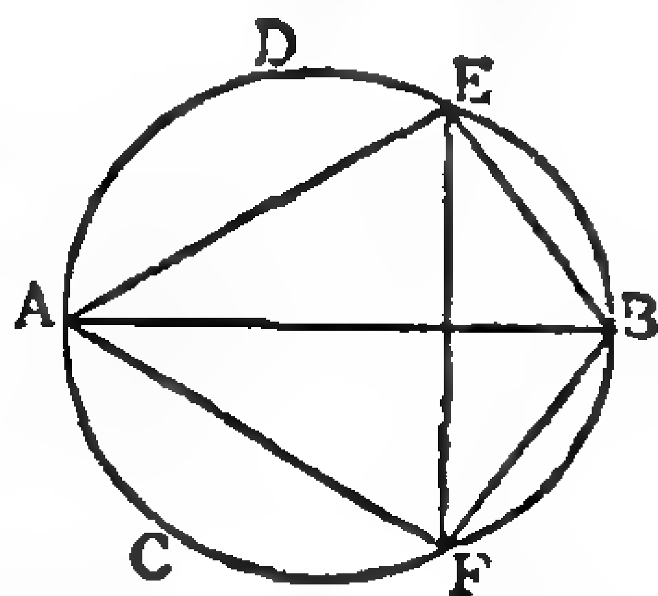


2830．在等周长的平面图形中，面积最大的是圆．

解 等周长的且面积最大的图形必须是凸图形．其理由是，若$AbCD$为凹图形，设以AC为轴将图形ADC向外折迭的图形为AEC，则折迭前后图形的周长不变，但图形$ABCD$的面积小于图形$ABCE$的面积，所以在周长一定的图形中，凹图形的面积不可能最大．



其次，设$AFBEA$为周长一定的最大面积的图形，在其上取两点A、B，设周长被二等分，则直线AB把图形的面积也二等分．其理由是，如果面积不被二等分，则以AB为轴，将面积大的部分折迭过来，周长不变而面积增加，所以与假设图形面积最大矛盾．故直线AB必把图形的面积二等分．由此知两部分AEB、AFB是关于AB为对称的图形．



设E、F是关于AB的对称点，则EF垂直于AB且被AB所平分．且

$$\angle AEB=\angle AFB=\angle R.$$

如果$\angle AEB$、$\angle AFB$不是直角，则AE、AF、BF、BE及其外部的图形不变，当$\angle AEB=\angle AFB=\angle R$时，$\triangle ABE+\triangle AFB$的面积随之增大，从而全图形的面积也增大．由于$E$、$F$是各周界上的任意点，因此$\overset{\frown}{AFB}$、$\overset{\frown}{AEB}$都是半圆周．故图形$AEBFA$是圆．即在周长一定的图形中，面积最大的图形是圆．

第五编　计 算 问 题

1. 角、对角线

2831. 边数为n的凸多边形内角的和等于多少?它的外角之和等于多少?正n边形的一个角有多大?

解 (内角和)$=(2n-4)\angle R$,

(外角和)$=4\angle R$,

(正n边形的一个角)$=\dfrac{2n-4}{n}\angle R$.

2832. 弧长等于半径的圆心角为几度几分几秒?取$\pi=\dfrac{355}{113}$.

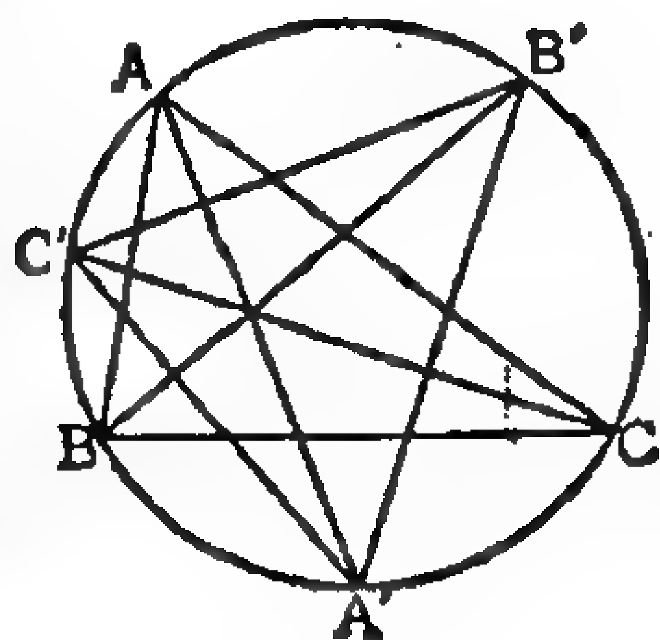
解 设半径为r,则圆周长是$2\pi r$,设弧长等于半径的圆心角为$x°$,则

$$\frac{r}{2\pi r}=\frac{x°}{360°},\quad \therefore\ x°=\frac{180°}{\pi}.$$

$$x°=180°\div\frac{355}{113}=57°17'44.7''\cdots.$$

注 称为一弧度(弪)。

2833. 设$\triangle ABC$($\angle A=60°$, $\angle B=80°$, $\angle C=40°$)各角的平分线和外接圆的交点分别为A'、B'、C',求$\triangle A'B'C'$各角的大小。



解 $\angle A'=\angle AA'B'+\angle AA'C'$

$=\angle ABB'+\angle ACC'$

$=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

$=\dfrac{1}{2}(80°+40°)=60°$.

同样, $\angle B'=\dfrac{1}{2}(\angle C+\angle A)$

$=\dfrac{1}{2}(40°+60°)=50°$,

$\angle C'=\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B)$

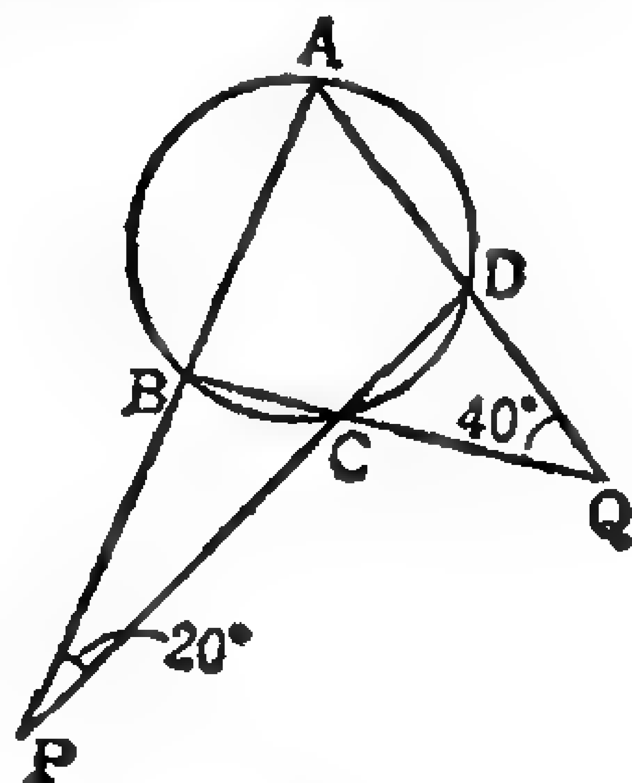
$=\dfrac{1}{2}(60°+80°)=70°$.

2834. 已知$ABCD$为圆内接四边形,延长AB、DC相交于点P,延长AD、BC相交于点Q。设

$\angle APD=20°$,

$\angle CQD=40°$,

求这个四边形的各角。



解 因

$$\angle A+20°+\angle A+40°$$
$$=360°-(\angle D+\angle B)$$
$$=360°-180°=180°,$$

$\therefore\ 2\angle A=180°-(20°+40°)=120°$.

因而 $\angle A=60°$,

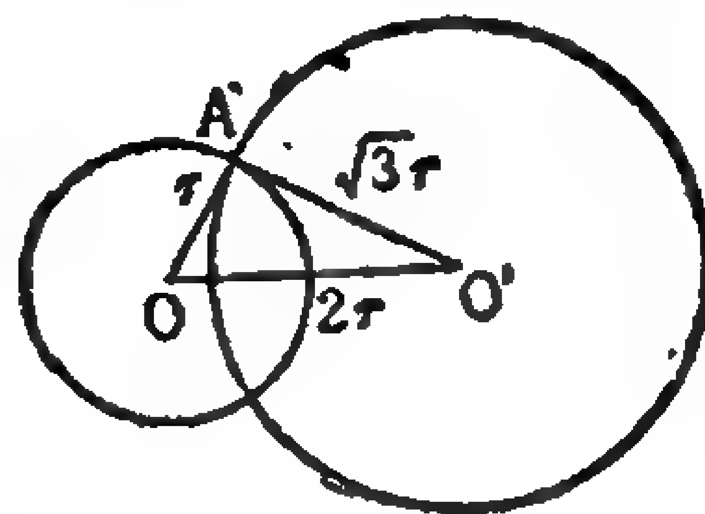
$\angle C=180°-60°=120°$.

$\angle B=180°-(\angle A+\angle Q)$

$=180°-(60°+40°)=80°$.

$\therefore\ \angle D=180°-80°=100°$.

2835. 已知在平面上有两个圆O和O'。一圆的半径为r,另一圆的半径为$\sqrt{3}r$。设两圆的圆心距是$2r$,求两圆的半径在两圆的交点A处构成的角,及$\angle AOO'$、$\angle AO'O$。



解 因为

$$AO:OO':AO'=1:2:\sqrt{3},$$

所以 $\angle A=90°$, $\angle O=60°$, $\angle O'=30°$.

2836. 在凸n边形中能作多少条对角线?又有104条对角线的凸多边形有多少条边?

解 $\dfrac{1}{2}n(n-3)$ (条),

因为 $\dfrac{1}{2}n(n-3)=104$,

$\therefore\ n=16$ (边).

2837. 已知一圆的周长为75 cm,求和此圆等积的正方形对角线的长度。

解　当圆的周长为 75 cm 时，此圆的半径为 $\frac{75}{2\pi}$ cm，所以圆的面积为 $\pi\cdot\left(\frac{75}{2\pi}\right)^2$ cm^2. 与圆等积的正方形一边的长度为 $\frac{75}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ cm．由于对角线的长是正方形一边之长的 $\sqrt{2}$ 倍，所以对角线长为 $\frac{75}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ cm.

注　近似值约为 29.9 cm.

2838.　已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长为 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，求对角线 AC 的长．

解　由 A 作 BC、CD 的垂线 AE、AF．设 $AC=x$，$BE=z$，$DF=y$，由问题 **847**，得

$$x^2=a^2+b^2-2bz, \qquad ①$$

$$x^2=c^2+d^2+2cy. \qquad ②$$

因为 $\triangle ABE\backsim\triangle ADF$，

$$\therefore\quad \frac{z}{y}=\frac{a}{d}. \qquad ③$$

由①、②，得

$$a^2+b^2-2bz=c^2+d^2+2cy. \qquad ④$$

由③得

$$y=\frac{dz}{a}, \qquad ⑤$$

把⑤代入④，得

$$z=\frac{a^3+ab^2-ac^2-ad^2}{2(ab+cd)}. \qquad ⑥$$

把⑥代入①，得

$$x^2=a^2+b^2-\frac{a^3b+ab^3-abc^2-abd^2}{ab+cd}$$

$$=\frac{a^2cd+b^2cd+abc^2+abd^2}{ab+cd}$$

$$=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

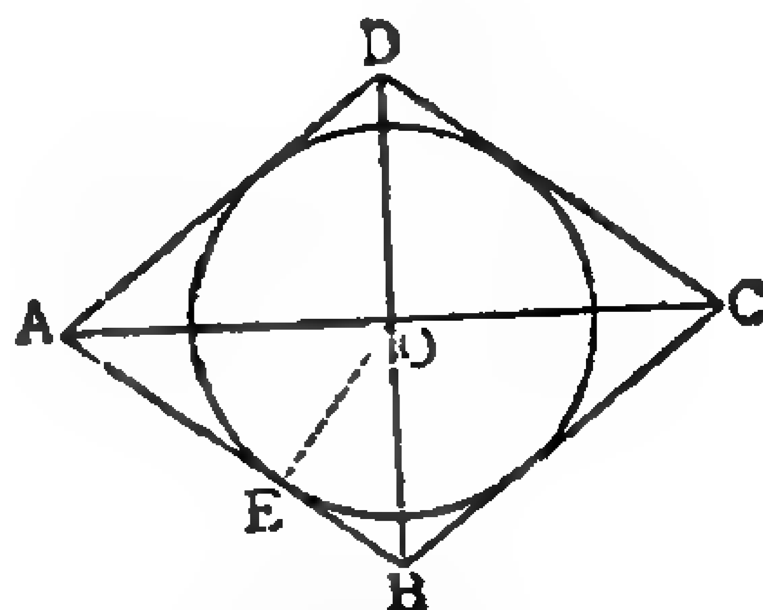
$$\therefore\quad x=\sqrt{\frac{(ac+bd)\cdot(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

注　把②中的 y 代入⑥得到 z，然后把 z 代入⑥中得到一样的结果．

2839.　在菱形 $ABCD$ 中，已知 $AC+BD=70$ cm，内切圆的半径 $OE=12$ cm，求它的一边及对角线的长．

解　设 $OA=x$，$OB=y$，则

$$x+y=35. \qquad ①$$



因 $AB=\sqrt{x^2+y^2}$，所以

$$12\sqrt{x^2+y^2}=xy. \qquad ②$$

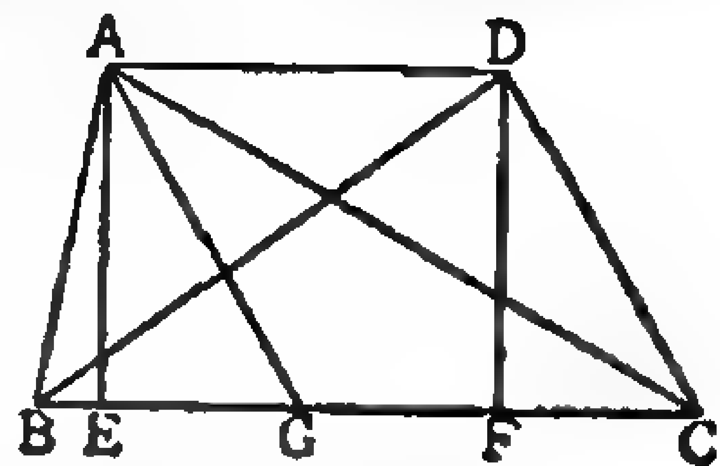
解①、②，得

$$x=20,\quad y=15.$$

所以 $\quad AB=\sqrt{20^2+15^2}=25$ (cm)，

$$AC=40\ (\text{cm}),\quad BD=30\ (\text{cm}).$$

2840.　在梯形 $ABCD$ 中，已知 $BC\parallel AD$，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，求对角线 AC、BD 的长．



解　如果从点 A 作 BC 的垂线 AE，再从点 A 作 DC 的平行线 AG，因 $AB=a$，$BG=b-d$，$AG=c$，所以由 $\triangle ABC$、$\triangle ABG$，得

$$AC^2=AB^2+BC^2-2BC\cdot BE,$$

$$AG^2=AB^2+BG^2-2BG\cdot BE.$$

$$\therefore\quad \begin{cases} AC^2=a^2+b^2-2b\cdot BE, \\ c^2=a^2+(b-d)^2-2(b-d)\cdot BE. \end{cases}$$

因而

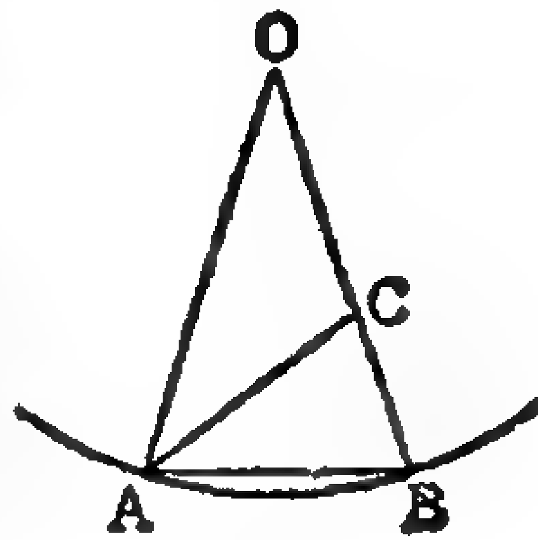
$$AC^2=a^2+b^2-b\cdot\frac{a^2+(b-d)^2-c^2}{b-d}$$

$$=\frac{c^2b+b^2d-bd^2-a^2d}{b-d},$$

$$\therefore\quad AC=\sqrt{\frac{c^2b+b^2d-bd^2-a^2d}{b-d}}.$$

同样，$\quad BD=\sqrt{\frac{a^2b+b^2d-bd^2-c^2d}{b-d}}.$

2841.　求半径为 r 的圆内接正十边形的一边的长，正五边形的对角线之长和它的一边的长．



解　设半径为 r 的圆的圆心为 O，内接正十边形的一边为 AB，则 $\angle AOB=36°$，

$$\therefore\quad \angle OAB=\angle OBA=72°.$$

设 $\angle OAB$ 的平分线和 OB 交于点 C, 则

$$\angle BAC=\angle OAC=36^\circ.$$

$$\therefore\ OC=AC=AB.$$

而且 $\angle BAC=\angle AOC$, 所以 BA 在点 A 处切于圆 OAC。

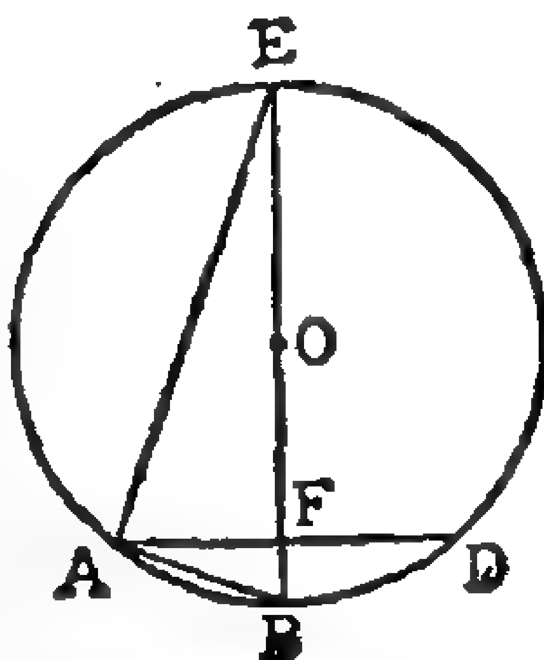
$$\therefore\ BA^2=BO\cdot BC.$$

设 $AB=OC=x$, 则 $x^2=r(r-x)$,

$$\therefore\ x^2+rx-r^2=0,$$

$$\therefore\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r,$$

即 $AB=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}r$。



其次，设圆 O 的内接正五边形的一边为 AD, 劣弧 AD 的中点为 B, 则 AB 是正十边形的一边。若过点 B 的直径为 BE, 则 AE 是正五边形的对角线，$\angle BAE$ 是直径上的圆周角，所以为直角。

$$\therefore\ AE^2=BE^2-AB^2$$

$$=(2r)^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right)^2$$

$$=\frac{10+2\sqrt{5}}{4}r^2,$$

因而 $AE=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}r$。

再次，设 AD 和 BE 的交点为 F, 则 F 是 AD 的中点，$AF\perp BE$。

$$\therefore\ BE\cdot AF=AB\cdot AE.$$

但是 $BE\cdot AF=2r\cdot AF=r\cdot AD$,

$$\therefore\ r\cdot AD=AB\cdot AE$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}r$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(10+2\sqrt{5})}}{4}r^2$$

$$=\frac{\sqrt{40-8\sqrt{5}}}{4}r^2$$

$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}r^2.$$

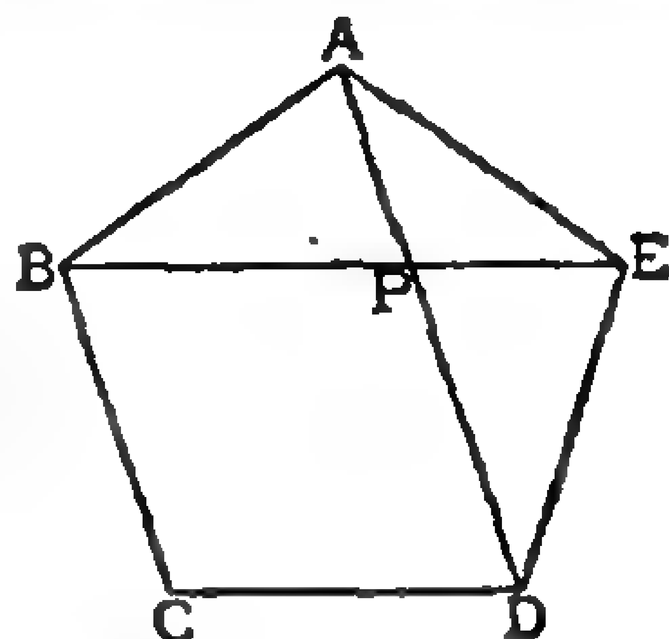
因而 $AD=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}r$。

故　正十边形的一边 $=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}r$,

正五边形的对角线 $=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}r$,

正五边形的一边 $=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}r$。

2842. 已知边长为 a 的正五边形，求其对角线的长。



解　设边长为 a 的正五边形为 $ABCDE$, 两条对角线 AD 和 BE 的交点为 P, 则

$$\angle ABP=\angle EAP=36^\circ,$$

所以，EA 和圆 ABP 相切于点 A,

$$EA^2=EP\cdot EB.$$

设 $BE=x$, 因为

$$\angle BAP=\angle BPA=72^\circ,$$

$$\therefore\ BP=AB=EA=a.$$

从而　$a^2=(x-a)x$,

即　$x^2-ax-a^2=0$。

取方程的正根，得

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a.$$

2. 边数

2843. (1) 如果一个正多边形的一个角等于边数为其两倍的正多边形一个角的 $\frac{4}{5}$, 求前一个正多边形的边数。

(2) 如果正多边形的一个外角等于正十边形一内角的 $\frac{5}{12}$, 求其边数。

解　(1) 设所求的边数为 x, 则由

$$\frac{2x-4}{x}\angle R=\frac{4x-4}{2x}\cdot\frac{4}{5}\angle R,$$

解之得　$x=6$。

(2) 由　$\dfrac{4}{n}\angle R=\dfrac{8}{5}\angle R\times\dfrac{5}{12}$,

解之得　$n=6$。

2844. 已知凸多边形的内角成等差数列，其中最大角是 177°, 公差 -3°。求此多边形的边数。

解　设所求的边数为 n, 则

$$90(2n-4)=\frac{n[2\times177+(n-1)(-3)]}{2},$$

$$\therefore\ n^2+n-240=0,$$

取方程的正根 $n=15$。

2845. 已知两个凸多边形的边数之和为12，其对角线的和是19，求这两个凸多边形的边数。

解　设两凸多边形的边数分别为 x、y，解方程组：

$$\begin{cases} x+y=12, \\ \dfrac{x\cdot(x-3)}{2}+\dfrac{y\cdot(y-3)}{2}=19. \end{cases}$$

得 $x=5$，$y=7$，或者 $x=7$，$y=5$。

2846. 已知两个正多边形的外角之差是1°，边数之差是12，分别求出两个正多边形的边数。

解　设两正多边形的边数分别为 x、y，依题意得

$$x-y=12,\quad \frac{360}{y}-\frac{360}{x}=1.$$

解之得，　$x=72$，　$y=60$。

3. 线段的长

2847. 若把 10 cm 的线段分成中外比，求其各部分的长。

解　设在 AB 的中外比中，内分点及外分点分别为 P、P'，则

$$AP^2=AB\cdot BP, \qquad ①$$

$$AP'^2=BA\cdot BP'. \qquad ②$$

设 $AP=x_1$，$AP'=x_2$，且 $AB=10$。由①得

$$x_1^2=10(10-x_1),$$

$$\therefore\ x_1^2+10x_1-100=0.$$

取方程的正根

$$x_1=-5+\sqrt{5^2+100}=5\sqrt{5}-5$$

$$=5(\sqrt{5}-1).$$

又由②，　$x_2^2=10(10+x_2)$，

$$\therefore\ x_2^2-10x_2-100=0,$$

取方程的正根

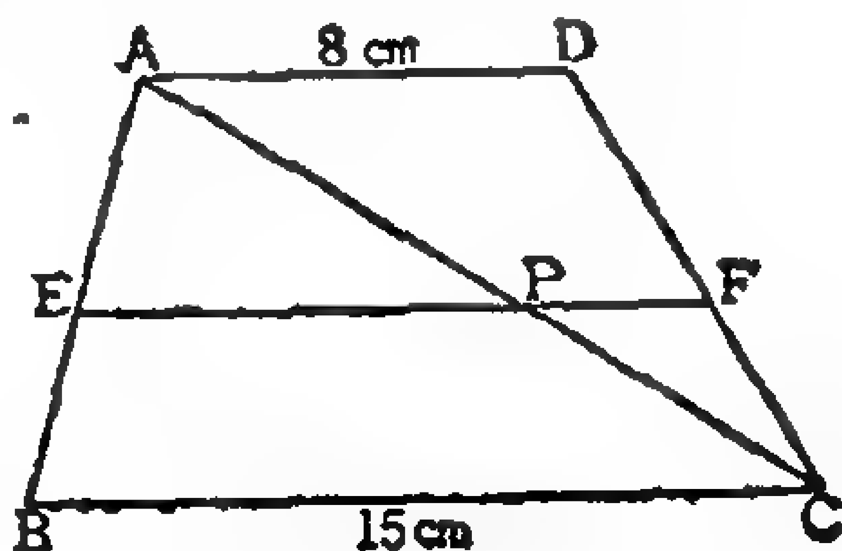
$$x_2=5+\sqrt{5^2+100}=5\sqrt{5}+5$$

$$=5(\sqrt{5}+1).$$

2848. 已知梯形 $ABCD$ 的上底 $AD=8$ cm，下底 $BC=15$ cm，在边 AB、CD 上分别取 E、F，使 $AE:EB=DF:FC=3:2$，求 EF 的长。

解　设 AC 和 EF 的交点为 P，因 $BC\parallel EP$，所以

$$BC:EP=AB:AE.$$



即　　$15:EP=(3+2):3$，

$$\therefore\ EP=\frac{15\times3}{3+2}=9.$$

又因　　$AD:PF=DC:FC$，

$$\therefore\ 8:PF=(3+2):2,$$

因而　　$PF=\dfrac{8\times2}{3+2}=3\dfrac{1}{5}$，

$$\therefore\ EF=EP+PF=9+3\frac{1}{5}=12\frac{1}{5}.$$

2849. 设梯形 $ABCD$ 的上底 AD、下底 BC，分别为 a cm、b cm，求过对角线交点 O 和底边平行的线段 EF 的长。

解　因

$$EO:BC=AO:AC=a:a+b,$$

$$EO:b=a:a+b,$$

$$\therefore\ EO=\frac{ab}{a+b}.$$

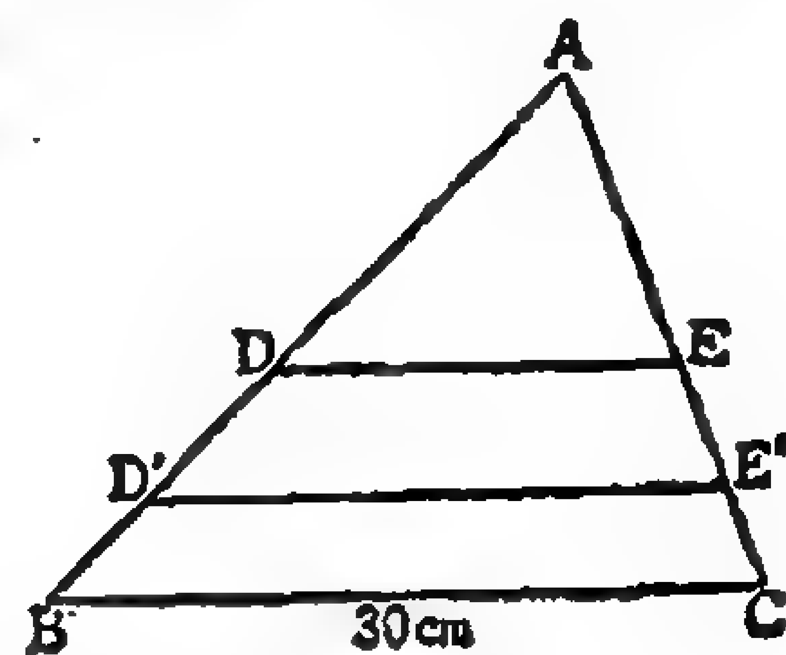
同样　　$FO=\dfrac{ab}{a+b}$。

所以

$$EF=EO+OF$$

$$=\frac{ab}{a+b}+\frac{ab}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}.$$

2850. 已知 $\triangle ABC$ 被平行于 BC 的两直线 DE 和 $D'E'$ 三等分，求这两条线段的长。其中 $BC=30$ cm。



解

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{3}.$$

因　　$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

所以　　$\dfrac{DE^2}{BC^2}=\dfrac{1}{3}$。

因而　　$DE^2=\dfrac{1}{3}BC^2$，

故

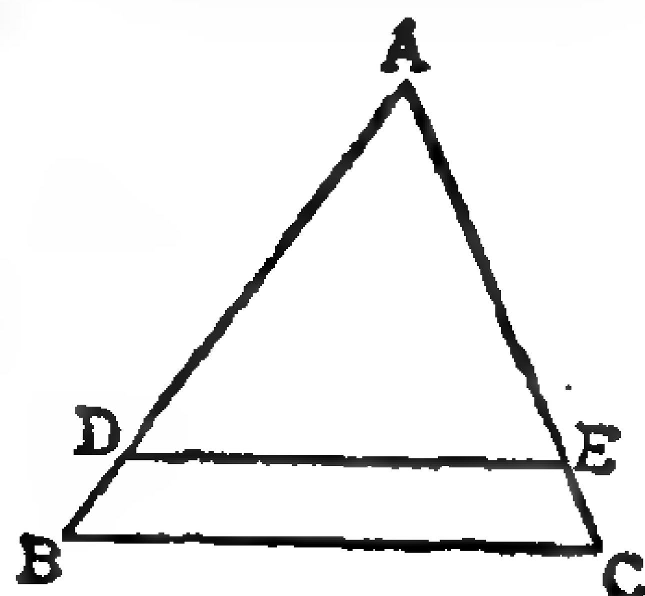
$$DE=\frac{1}{\sqrt{3}}BC=\frac{30}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$$
$$\approx 17.32\ (\text{cm}).$$

又因
$$\frac{S_{\triangle AD'E'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2}{3},$$
$$\therefore\ \frac{D'E'^2}{BC^2}=\frac{2}{3}.$$

故

$$D'E'=\sqrt{\frac{2}{3}}\,BC=10\sqrt{6}\approx 24.49\ (\text{cm}).$$

2851. 在 $\triangle ABC$ 内作平行于 BC 的直线 DE，使四边形 $DBCE$ 为 $\triangle ABC$ 的 n 分之一。求 DE 的长度，其中 $BC=a$。



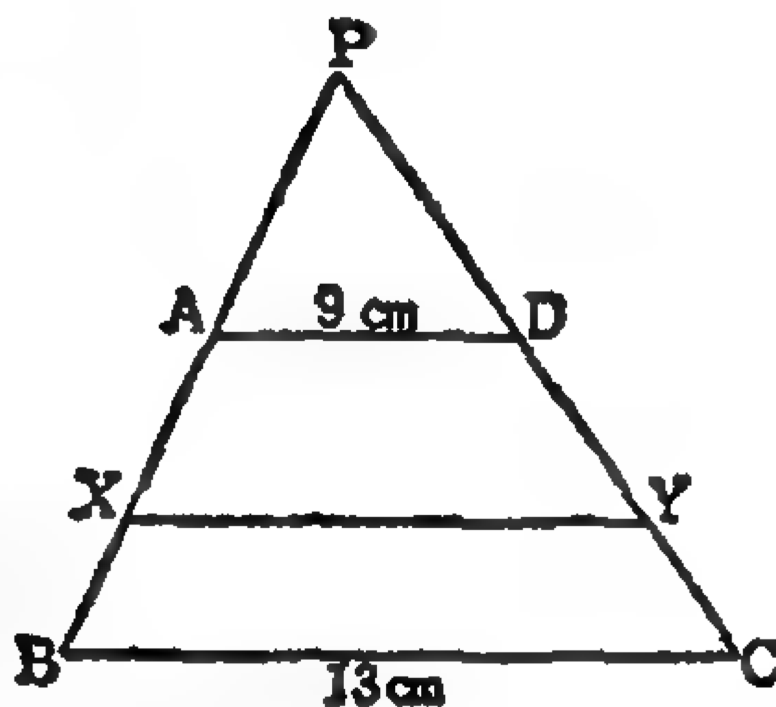
解 若

$$\frac{\text{四边形}BDCE\text{面积}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{n},$$

则
$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{n-1}{n}.$$
$$\therefore\ \frac{DE^2}{BC^2}=\frac{n-1}{n},$$

故
$$DE=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\,a.$$

2852. 已知梯形的两底边分别为 9 cm、13 cm。求平行于底边且平分梯形面积的线段的长。



解 因为 XY 平分梯形，所以

$$S_{\triangle PXY}-S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PBC}-S_{\triangle PXY}$$

（P 是 BA、CD 的交点），因而

$$2S_{\triangle PXY}=S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PBC}.\qquad ①$$

但是 $AD\parallel XY\parallel BC$，所以

$$\triangle PXY\backsim\triangle PAD\backsim\triangle PBC,$$
$$\therefore\ S_{\triangle PXY}:S_{\triangle PAD}:S_{\triangle PBC}$$
$$=XY^2:AD^2:BC^2.$$

根据题意，$AD=9$ cm，$BC=13$ cm。设

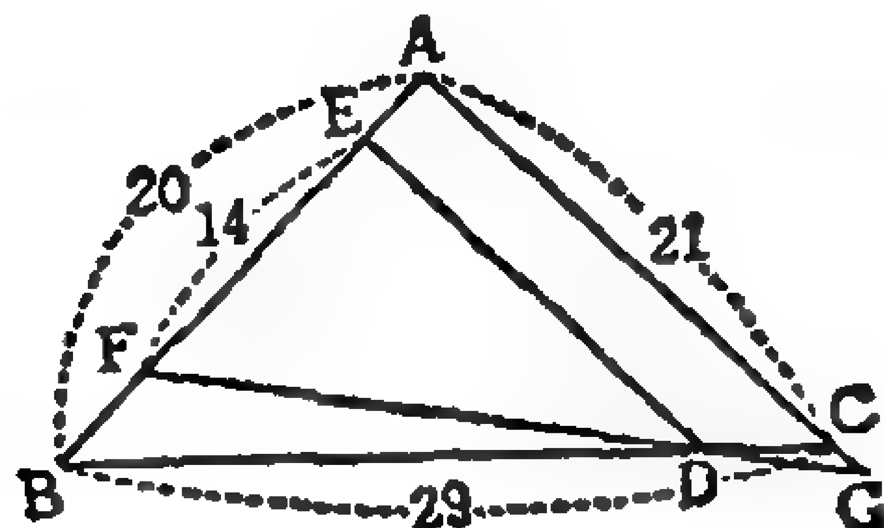
$$XY=x\ \text{cm},$$

则
$$S_{\triangle PXY}:S_{\triangle PAD}:S_{\triangle PBC}=x^2:9^2:13^2.$$

由①，
$$2x^2=9^2+13^2=250,$$

$$\therefore\ x=\sqrt{125}=11.18\ (\text{cm}).$$

2853. 在直角三角形 ABC 中，从斜边 BC 上一点 D 所作 AB 的垂线为 DE，$AB=20$ m，$BC=29$ m，$AE=2$ m。如果在线段 BE 上取一点 F，设 $BF=4$ m，AC、FD 的交点为 G，求 FG 的长。（计算到小数第二位）



解 在直角三角形 ABC 中，$AB=20$，$BC=29$，

$$AC=\sqrt{29^2-20^2}=21.$$

但是 $AC\parallel ED$，所以 $\triangle ABC\backsim\triangle EBD$。

于是
$$\frac{ED}{AC}=\frac{BE}{AB},$$

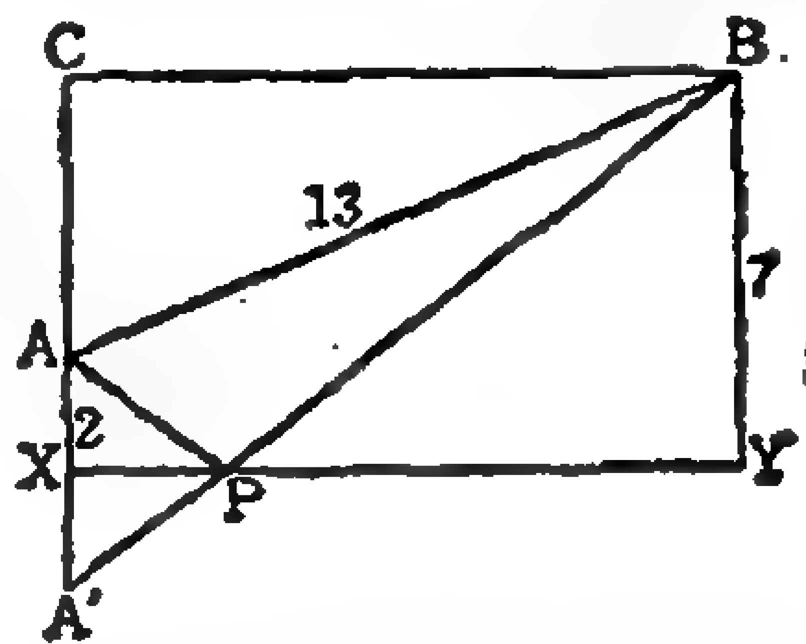
故
$$ED=21\times\frac{18}{20}=\frac{189}{10}.$$

又因 $EF=14$，所以在 $\triangle DEF$ 中，

$$FD=\sqrt{\frac{189^2}{10^2}+14^2}=\sqrt{553.21}$$
$$=23.52.$$

又因为
$$\triangle GAF\backsim\triangle DEF.$$
$$\therefore\ FG=FD\times\frac{FA}{FE}=23.52\times\frac{16}{14}$$
$$=26.88\ (\text{m}).$$

2854. 在定直线 XY 的同侧有两定点 A、B，$AB=13$ cm，A、B 到 XY 的距离分别为 2 cm、7 cm。由 A、B 向在 XY 上一点 P 作线段 AP、BP，求 AP、BP 之和为最小的长。



解 由 A 向 XY 作垂线 AX，且在其延长线上取 $XA'=XA$。连结 BA'，设 BA' 和 XY 的交点为 P，则 $AP+BP=A'B$ 就是所求的长。

从点 B 向 XY 所作垂线 BY，再从 B 向 XA 的延长线作垂线 BC，因

$$AB=13,\quad AX=2,$$

从而　　　$CX=BY=7$.

所以　　　$AC=7-2=5$,

$$BC^2=AB^2-AC^2=13^2-5^2=144.$$

又因　$A'C=CX+XA'=7+2=9$,

所以

$$A'B=\sqrt{BC^2+A'C^2}=\sqrt{144+81}=15.$$

2855. 以 O 为圆心、半径为 1 的圆的直径为 AOB, 弦 AC 等于半径, 设由 O 作 AC 的垂线和圆 O 过点 A 的切线交于点 D, 在切线 DA 上截取 DE 等于半径的 3 倍, 计算 BE 的长 (到小数第五位).

解 因 $\triangle AOC$ 是正三角形,

$$\angle AOC=60°,$$

$$\therefore\ \angle AOD=30°;$$

因　　$\angle DAO=\angle E$,

$$\therefore\ AD:DO:AO=1:2:\sqrt{3}.$$

但是　　$AO=1$,

$$\therefore\ AD=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$AE=3-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

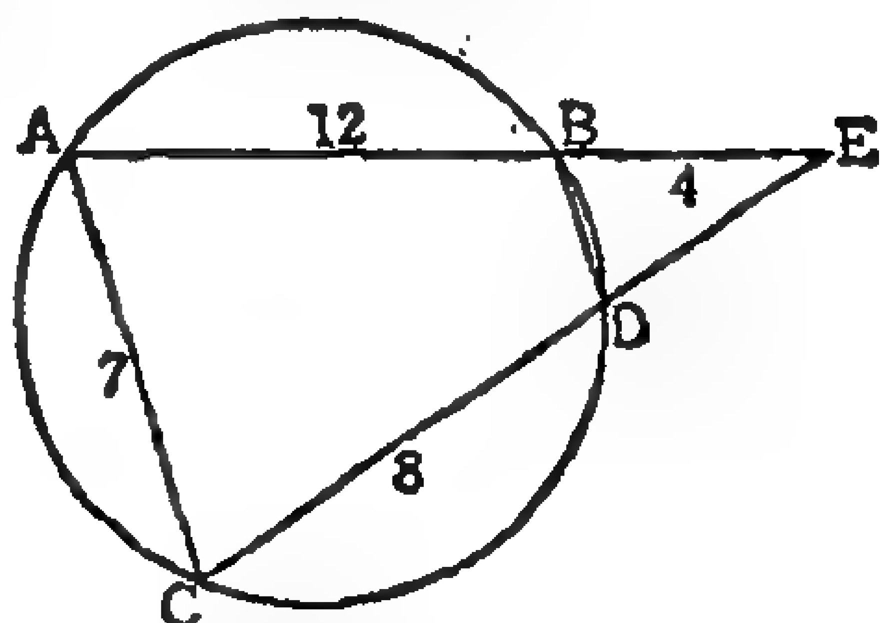
从而

$$BE^2=AB^2+AE^2=2^2+\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=4+\frac{28-6\sqrt{3}}{3}=\frac{40}{3}-2\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ BE=3.14159\cdots.$$

2856. 已知圆的两弦 AB、CD 的延长线相交于 E, 且 $EB=4$, $EA=12$, $EC=8$, $AC=7$, 求 ED、DB 的长.



解 因为　$\triangle EAC\backsim\triangle EDB$,

$$\therefore\ AC:DB=EC:EB.$$

因　　$AC=7$,　$EC=8$,

$$EB=4.$$

所以　　$7:DB=8:4$.

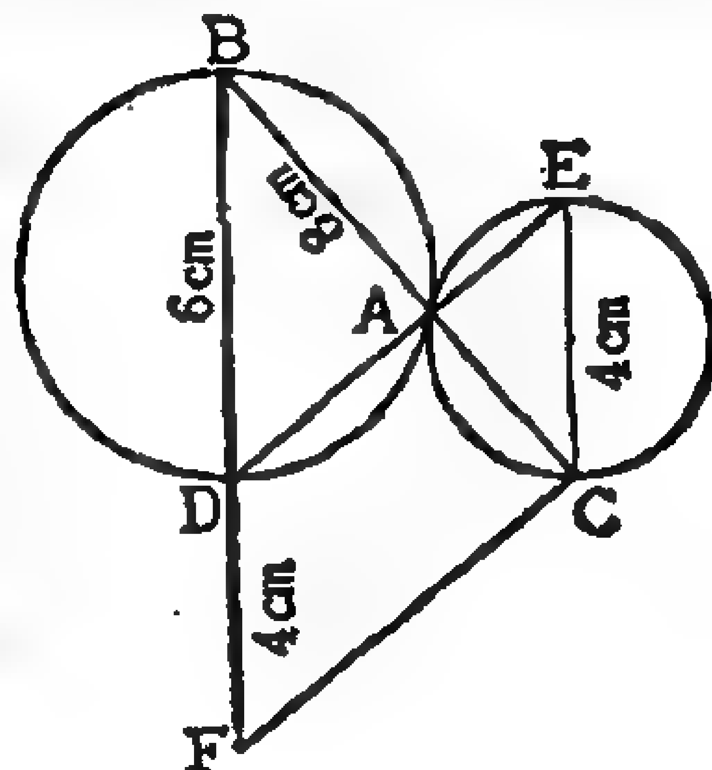
$$DB=\frac{7\times4}{8}=3.5.$$

又　　$AC:DB=EA:ED$,

$$AC=7,\quad DB=3.5,\quad EA=12.$$

$$\therefore\ ED=\frac{12\times3.5}{7}=6.$$

2857. 已知半径分别为 3 cm 和 2 cm 的两个圆在点 A 处外切, 设过点 A 的直线和两圆的交点分别为 B、C, 过点 A 所作 BC 的垂线和两圆的交点分别为 D、E, 当 BC 的长为 8 cm 时, 求 DE 的长.



解 由 C 作 ED 的平行线和 BD 的延长线交于点 F, 则 $DFCE$ 是平行四边形.

$$\therefore\ DE=FC,\quad DF=CE.$$

从而　　$BF=6+4=10$,

$$BC=8.$$

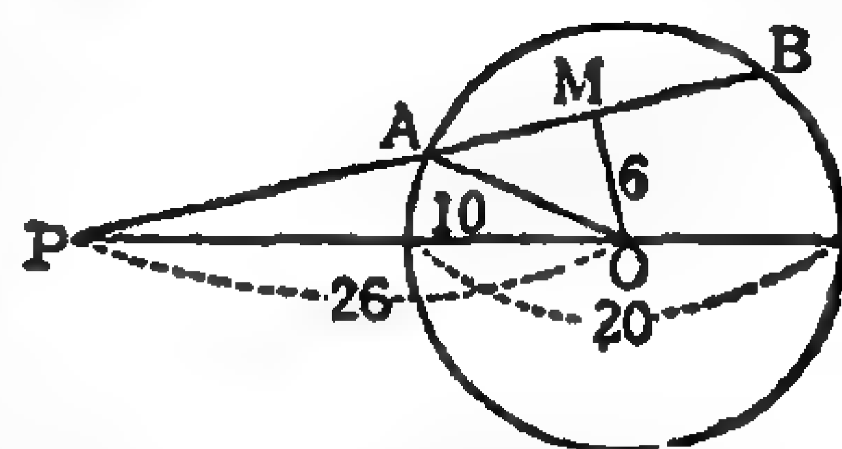
而　　$\angle BCF=\angle R$,

$$\therefore\ BC^2+FC^2=BF^2,$$

$$FC^2=BF^2-BC^2=10^2-8^2=36,$$

$$FC=6.\quad\therefore\ DE=6(\text{cm}).$$

2858. 已知从直径为 20 cm 的圆的圆心 O 到一定点 P 的距离为 26 cm, 再从点 P 作圆 O 的割线 PAB, 如果从圆心 O 到 AB 的距离是 6 cm, 求割线在圆外的部分 PA 的长. (精确到一位小数)



解 设 AB 的中点为 M, 则

$$OM=6,\quad OA=10.$$

$$\therefore\ AM=8. \qquad ①$$

又因 $\triangle MOP$ 是直角三角形, 所以

$$PM=\sqrt{OP^2-OM^2}=\sqrt{26^2-6^2}$$

$$=\sqrt{32\times20}=\sqrt{640}. \qquad ②$$

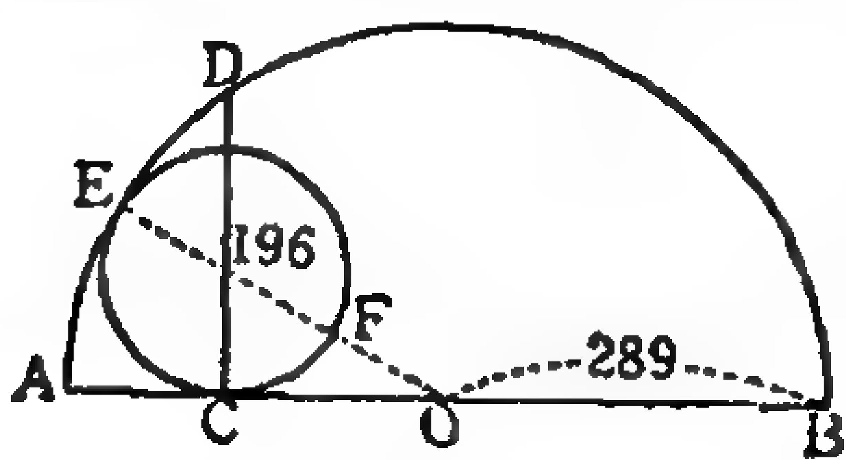
由 ①, ② 知,

$$PA=PM-AM$$

$$=\sqrt{640}-8\approx25.3-8=17.3(\text{cm}).$$

2859. 已知半圆的直径 $AB=578$ m, 直

径为196 m的圆，既切AB于点C，又内切于半圆弧．设在点C作AB的垂线CD和半圆弧的交点为D，求线段CD之长．



解 设两圆的切点为E，AB的中点为O，EO和内切圆的交点为F，则

$$OC^2=OE\cdot OF.$$

其中 $OE=289$，$OF=289-196=93$．

所以 $$OC^2=289\times 93,$$

$$OC=17\sqrt{93}.$$

又因ADB是半圆，$CD\perp AB$，所以

$$CD^2=AC\cdot CB.$$

其中 $$AC=289-17\sqrt{93},$$

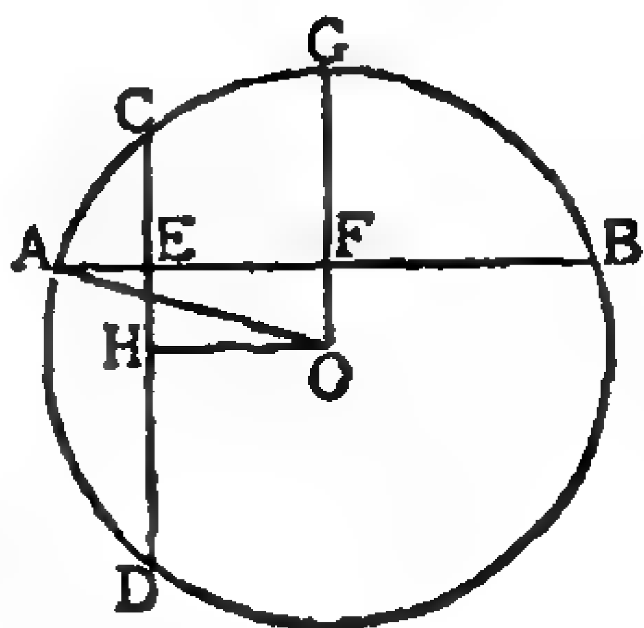
$$CB=289+17\sqrt{93}.$$

所以

$$CD^2=(289-17\sqrt{93})(289+17\sqrt{93})$$
$$=289^2-17^2\times 93,$$

故 $$CD=\sqrt{289^2-17^2\times 93}=238\ (\text{m}).$$

2860. 设AB、CD是圆O内过点E的互相垂直的弦，$AB=80$ cm，$AE=10$ cm，$CE=20$ cm，问此圆的半径长多少？再从圆心O向AB作垂线OF，延长OF和圆相交于点G，问FG长多少？(其中不足毫米的应四舍五入)



解 因AB、CD相交于E，所以

$$AE\cdot EB=CE\cdot ED,$$

$$AE=10\text{cm},\quad EB=70\text{cm},\quad CE=20\text{cm},$$

设$ED=x$ cm，则上式可写成

$$10\times 70=20\times x,$$

$$\therefore\quad x=35.$$

又从O向CD作垂线OH，则$CH=HD$，且

$$CD=55\text{cm},$$

$$\therefore\quad CH=27.5\text{cm},$$

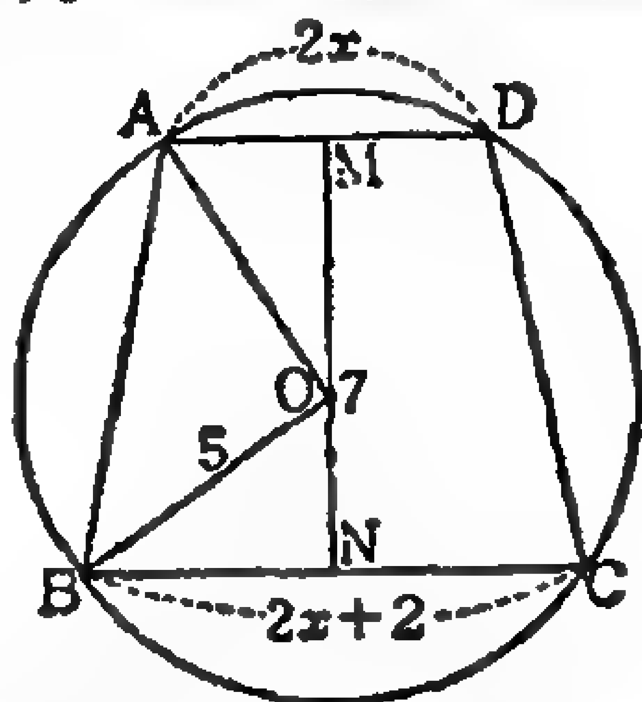
$$EH=27.5-20=7.5\text{cm}.$$

在直角三角形FOA中，$AF=40$ cm，$OF=HE=7.5$ cm．所以，

$$AO=\sqrt{40^2+7.5^2}\approx 40.7\text{cm},$$

$$FG=OG-OF=40.7-7.5=33.2\text{cm}.$$

2861. 已知在半径为5 cm的圆内接梯形中，高为7 cm，两底边的差为2 cm．求圆心到梯形两底边的距离．



解 设

$$AD=2x\text{cm},$$

$$BC=(2x+2)\text{cm},$$

圆心为O，M、N分别为AD、BC的中点，则

$$AO=BO=5\text{cm}.$$

所以

$$MO=\sqrt{5^2-x^2}, \qquad ①$$

$$NO=\sqrt{5^2-(x+1)^2}. \qquad ②$$

又因$MO+NO=7$，所以

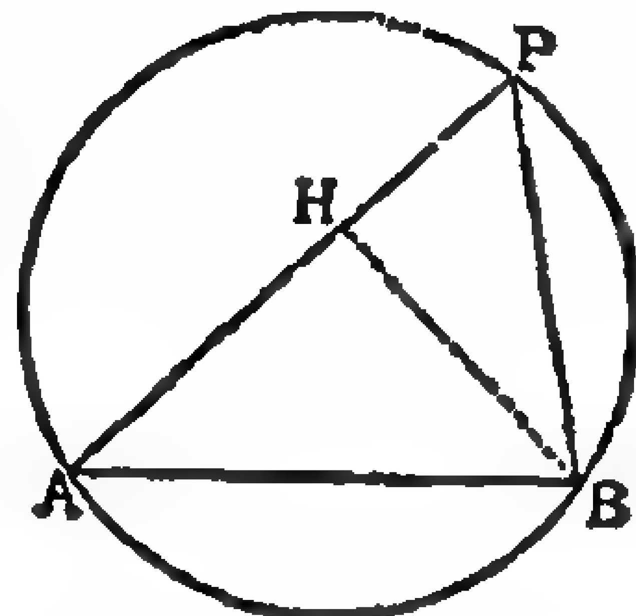
$$\sqrt{5^2-x^2}+\sqrt{5^2-(x+1)^2}=7$$

解之得$x=3$或$x=-4$．但是-4不合条件，所以当$x=3$时，

$$OM=\sqrt{5^2-3^2}=4\ (\text{cm}),$$

$$ON=\sqrt{5^2-4^2}=3\ (\text{cm}).$$

2862. 已知圆的半径为10 cm，在它的三分之二的优弧APB上有一点P，当$PA+PB$为$2l$ cm时，求弦AB、PA、PB的长．其中$PA>PB$．



解 因AB等于圆内接正三角形的一边，所以$AB=10\sqrt{3}$ cm，由B作PA的垂线，其垂足为H．因$\angle BPH=60°$，设$PB=x$ cm，

则 $$PA=2l-x,\quad BH=\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$PH=\frac{x}{2},$$

$$\therefore\quad HA=2l-x-\frac{x}{2}=2l-\frac{3}{2}x,$$

因 $$\angle AHB=\angle R.$$

$$\therefore\quad BH^2+HA^2=AB^2,$$

即 $$\frac{3}{4}x^2+\left(2l-\frac{3}{2}x\right)^2=(10\sqrt{3})^2,$$

$$3x^2-6lx+4l^2-300=0,$$

因而 $$x=\frac{3l-\sqrt{900-3l^2}}{3}\quad(\because\ x<l),$$

$$PA=2l-x=\frac{3l+\sqrt{900-3l^2}}{3}.$$

因此　　$AB=10\sqrt{3}$ cm,

$$PB=\frac{3l-\sqrt{900-3l^2}}{3}\text{ cm},$$

$$PA=\frac{3l+\sqrt{900-3l^2}}{3}\text{ cm}.$$

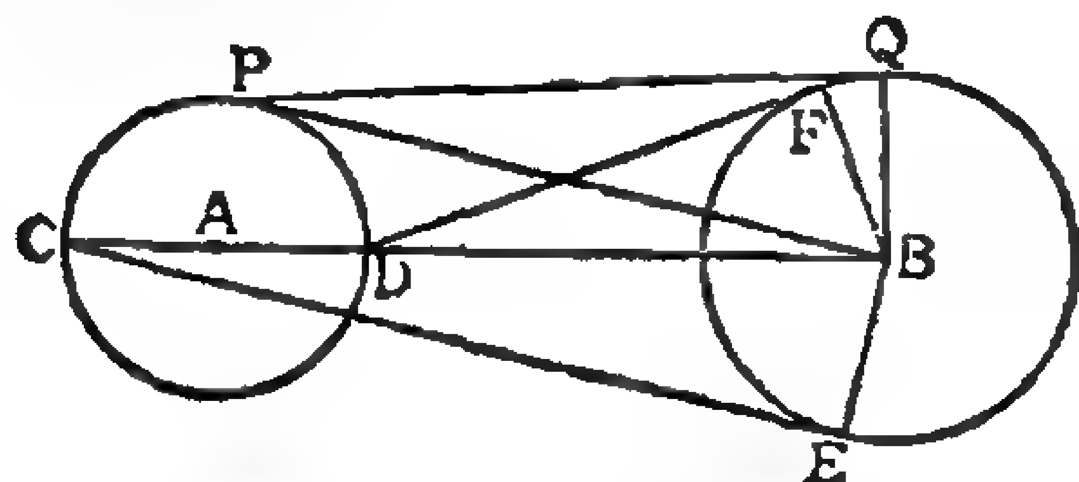
2863. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=13$，$BC=15$，$AC=14$，求外心 O 和内心 I 的距离。

解 设三角形的外接圆，内切圆的半径分别为 R、r，由问题 **1365** 知，$OI^2=R^2-2Rr$。又由问题 **2974** 知，$R=\frac{65}{8}$，$r=4$。所以

$$OI^2=\left(\frac{65}{8}\right)^2-2\left(\frac{65}{8}\right)\times4=1.015625.$$

$$\therefore\quad OI\approx1.007.$$

2864. 已知 A、B 两圆。从圆 A 上的动点 P 作圆 B 的切线，其中最长的和最短的各为多少？其中圆 A、圆 B 的半径分别为 3 cm，4 cm；圆心距为 11 cm。



解 设任意切线为 PQ，连结 PB，QB，则

$$PQ=\sqrt{PB^2-QB^2}.$$

因为 QB 是圆 B 的半径，是定值，所以当 PB 为最长或最短时，可确定 PQ 的最长或者最短。

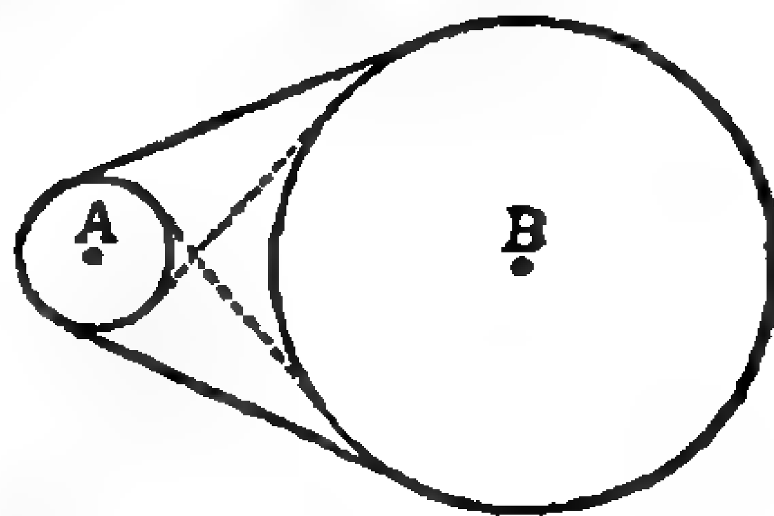
又从点 B 到圆 A 上所有的线段中，若连心线 AB 和圆 A 的交点为 D，则 BD 最短。如果延长 BA 和圆 A 的交点为 C 时，则 BC 最长。所以从 C 及 D 作圆 B 的切线 CE、DF，则 CE 最长，DF 最短。其 $BE=BF=4$ cm，$BC=11+3=14$ cm，$BD=11-3=8$ cm。

$$\therefore\quad CE=\sqrt{CB^2-BE^2}=\sqrt{14^2-4^2}=6\sqrt{5}\text{ cm},$$

$$DF=\sqrt{DB^2-BF^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}\text{ cm}.$$

因此最长 $6\sqrt{5}$ cm，最短 $4\sqrt{3}$ cm。

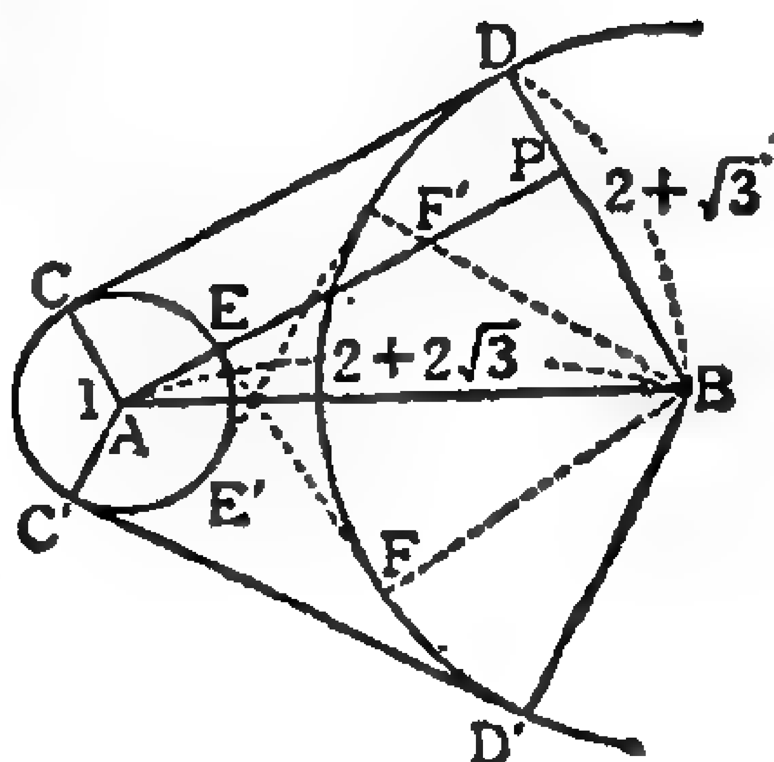
2865. 在平面上，已知圆 A 的半径为 1，圆 B 的半径为 $2+\sqrt{3}$，圆心距为 $2+2\sqrt{3}$。用线把两圆的外侧绕紧：



(1) 求线的长。

(2) 求线围绕部分的面积。

(3) 如图中虚线，用线交叉绕两圆时，其长是多少？



解 (1) 设线在圆 A、B 的切点分别为 C、C'，D、D'。如果从点 A 作平行于 CD 的直线和 BD 的交点为 P，则

$$BP=(2+\sqrt{3})-1=1+\sqrt{3}.$$

所以 $AB=2BP$。又 $\angle APB=90°$，从而

$$\angle ABD=60°,$$

$$AP=\sqrt{3}BP=3+\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad C'D'=CD=3+\sqrt{3},$$

$$\angle CAC'=2\angle DBA=120°,$$

优角 $DBD'=240°$，

故所求 l 长为

$$l=2\pi\times1\times\frac{1}{3}+(3+\sqrt{3})\times2+2\pi\times(2+\sqrt{3})\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2(5+2\sqrt{3})\pi}{3}+2(3+\sqrt{3}).$$

(2) 设所求面积为 S，则

$$S=\pi\times1^2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}[1+(2+\sqrt{3})]\times(3+\sqrt{3})\times2+\pi(2+\sqrt{3})^2\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{(15+8\sqrt{3})\pi}{3}+6(2+\sqrt{3}).$$

(3) 设线离开圆 A、B 的点分别为 E、F，E'、F'。和 (1) 一样，$\angle F'BA=30°$。所以 $\angle EAE'=\angle FBF'=60°$。

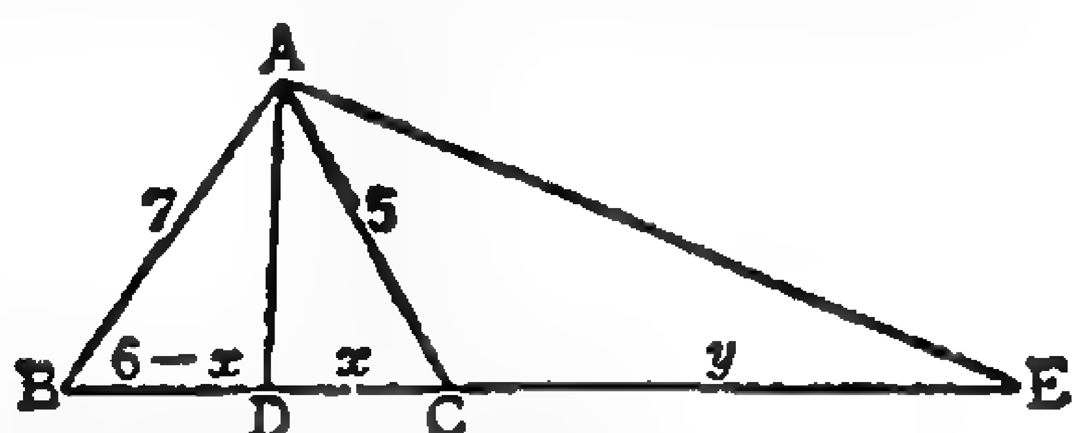
又因　　$E'F'=EF=1+\sqrt{3}$，

故所求 l 的长为

$$l=2\pi\times1\times\frac{5}{6}+2(1+\sqrt{3})$$
$$+2\pi(2+\sqrt{3})\times\frac{5}{6}$$
$$=\frac{5(3+\sqrt{3})\pi}{3}+2(1+\sqrt{3}).$$

4. 三角形的角平分线、中线、高

2866. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=7$, $AC=5$, $BC=6$, 设 $\angle A$ 的平分线为 AD, $\angle A$ 的外角平分线为 AE, 求 DC、CE 的长。



解 设 $DC=x$, 则 $BD=6-x$, 由

$$AB:AC=BD:DC,$$

知 $$7:5=(6-x):x$$

即 $$7x=5(6-x),$$

$$\therefore\quad x=\frac{5}{2}.$$

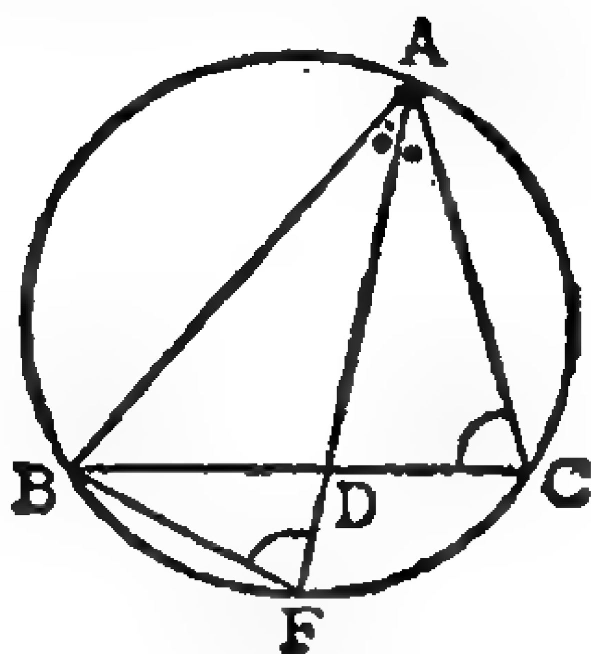
又设 $CE=y$, 则 $BE=y+6$. 由 $AB:AC=BE:CE$, 知

$$7:5=(y+6):y,\quad 7y=5(y+6).$$

$$\therefore\quad y=15.$$

即 $$DC=\frac{5}{2},\quad CE=15.$$

2867. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 求 $\angle A$ 的平分线 AD 的长及 $\angle A$ 的外角平分线 AE 的长。



解 设 $BD=x$, 则 $DC=a-x$.

$$\therefore\quad c:b=x:(a-x),$$

$$x=\frac{ac}{b+c}.$$

所以 $$DC=a-\frac{ac}{b+c}=\frac{ab}{b+c}.$$

设延长 AD 和 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点为 F, 则 $\triangle ABF\backsim\triangle ADC$.

$$\therefore\quad AD\cdot AF=AB\cdot AC,$$
$$AD\cdot(AD+DF)=AB\cdot AC.$$

即
$$AD^2=AB\cdot AC-AD\cdot DF$$
$$=AC\cdot AB-BD\cdot DC$$
$$=bc-\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}$$
$$=\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}$$
$$=\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2},$$

故 $$AD=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}.$$

其次，假定 $b<c$. 设 $BE=y$, 则 $CE=y-a$.

$$\therefore\quad c:b=y:(y-a),$$
$$y=\frac{ac}{c-b}.$$

于是 $$CE=\frac{ac}{c-b}-a=\frac{ab}{c-b}.$$

如果延长 EA 和 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 G, 则 $\triangle BGE\backsim\triangle ACE$.

$$\therefore\quad BE:AE=GE:CE,$$

$$BE\cdot CE=AE\cdot GE=AE\cdot(AE+AG),$$
$$AE^2=BE\cdot CE-AE\cdot AG.$$

因为 $\triangle ABG\backsim\triangle AEC$, 所以

$$AE\cdot AG=AB\cdot AC=AC\cdot AB.$$

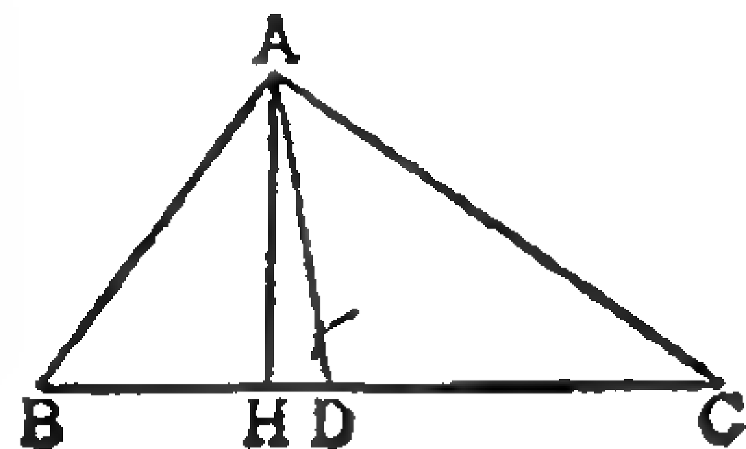
从而
$$AE^2=BE\cdot CE-AC\cdot AB$$
$$=\frac{ac}{c-b}\cdot\frac{ab}{c-b}-bc$$
$$=\frac{bc[a^2-(c-b)^2]}{(c-b)^2}$$
$$=\frac{bc(c+a-b)(a+b-c)}{(c-b)^2},$$

故 $$AE=\frac{\sqrt{bc(c+a-b)(a+b-c)}}{c-b}.$$

同样，当 $b>c$ 时，可得

$$AE=\frac{\sqrt{bc(c+a-b)(a+b-c)}}{b-c}.$$

2868. 已知直角三角形 ABC 的两直角边长分别为 a、b, 从直角顶点 A 作斜边 BC 的垂线 AH



及直角的平分线AD．求AH，AD的长。

解 $$BC=\sqrt{a^2+b^2},$$
$$AB\cdot AC=BC\cdot AH.$$
$$\therefore\quad AH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

另外，把上题公式中的b、c、a分别换成a、b、$\sqrt{a^2+b^2}$，得
$$AD=\frac{\sqrt{2}\,ab}{a+b}.$$

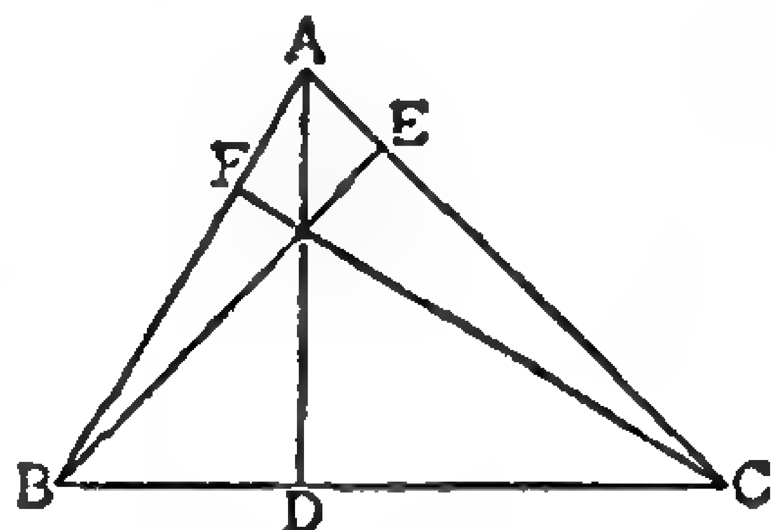
2869. 在$\triangle ABC$中，$AB=8\,\text{cm}$，$AC=6\,\text{cm}$，$BC=6\,\text{cm}$，求中线AD的长。

解 在公式
$$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$$
（帕普斯定理）中，已知$AB=8$，$AC=6$，$BC=6$，$BD=3$，设$AD=x$，则
$$8^2+6^2=2(x^2+3^2),$$
即
$$x^2=41.$$
$$\therefore\quad x=\sqrt{41}\approx 6.403\,\text{cm}.$$

2870. 已知三角形的三边分别为13cm，14cm，15cm，求此三角形各边上的高。

解 已知三边$a=13$，$b=14$，$c=15$．设面积为S，根据海伦公式得
$$S=\sqrt{21\times 8\times 7\times 6}=84.$$
设各边上的高分别为h_a，h_b，h_c，则
$$\frac{1}{2}h_a a=S.$$
$$\therefore\quad h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\times 84}{13}=\frac{168}{13}\ (\text{cm}).$$
同样，
$$h_b=\frac{2S}{b}=\frac{2\times 84}{14}=12\ (\text{cm}),$$
$$h_c=\frac{2S}{c}=\frac{2\times 84}{15}=\frac{56}{5}\ (\text{cm}).$$

2871. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$分别为75°、60°、45°，$AB=a$，求从各顶点作对边的垂线AD、BE、CF的长。

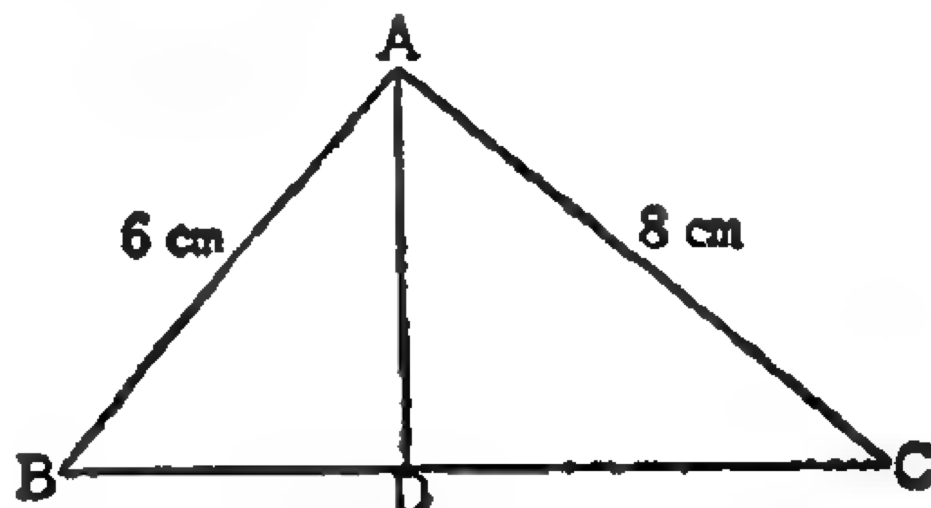


解 在直角三角形ABD中，$\angle B=60°$．

所以 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$BD=\frac{1}{2}a$．

又因$\triangle ACD$是等腰直角三角形，
$$CD=AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$
$$\therefore\quad BC=BD+CD=\frac{\sqrt{3}+1}{2}a.$$
又因$\triangle EBC$也是等腰直角三角形，
$$BE=\frac{1}{\sqrt{2}}BC=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}a.$$
其次，
$$AB\cdot CF=2S_{\triangle ABC}=AD\cdot BC,$$
所以
$$CF=\frac{AD\cdot BC}{AB}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}a.$$

2872. 在直角三角形ABC中，两直角边的长分别为6cm及8cm．求从点A向斜边BC所作垂线AD及BD、DC的长。



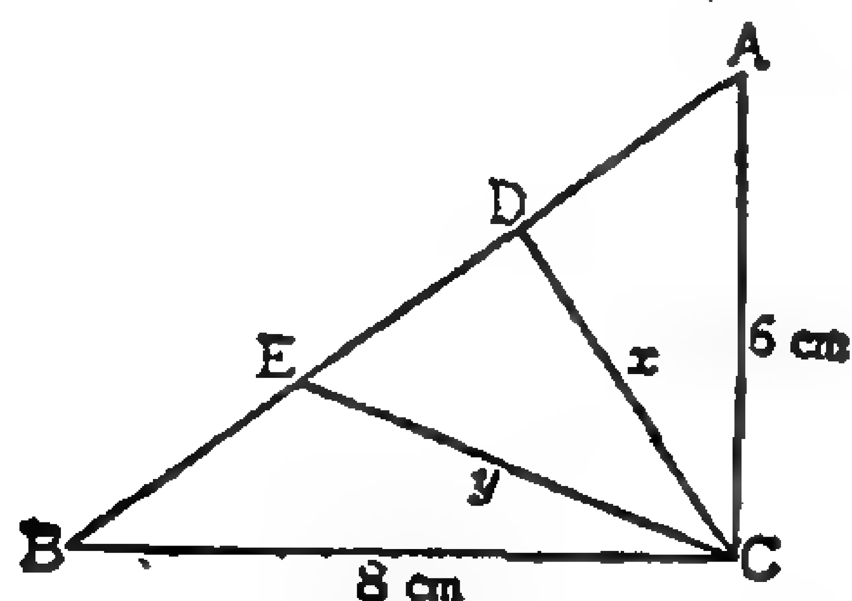
解
$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10\ (\text{cm}),$$
$$AD=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{6\times 8}{10}=4.8\ (\text{cm}),$$
$$\therefore\quad BD=\frac{AB^2}{BC}=\frac{36}{10}=3.6\ (\text{cm}),$$
$$CD=\frac{AC^2}{BC}=\frac{64}{10}=6.4\ (\text{cm}).$$

2873. 在半径为15cm的圆中，内接$\triangle ABC$的两边AB、AC的长分别为20cm、16cm，求从A向BC所作垂线AH的长。

解 设直径为AE，则$\triangle ABE\backsim\triangle AHC$，
$$\therefore\quad AE\cdot AH=AB\cdot AC,$$
因而
$$30\cdot AH=20\times 16,$$
$$AH=\frac{20\times 16}{30}=\frac{32}{3}\ (\text{cm}).$$

2874. 已知直角三角形ABC中的两直角边AC、BC的长分别为6cm及8cm．当点D、E三等分斜边时，求CD、CE的长。

解 $AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$．设$CD=x$，$CE=y$，则



$$AD=DE=EB=\frac{10}{3}.$$

根据帕普斯定理，

$$AC^2+CE^2=2(CD^2+AD^2),$$
$$CD^2+CB^2=2(CE^2+BE^2).$$

所以 $\begin{cases}6^2+y^2=2x^2+\dfrac{200}{9},\\ 8^2+x^2=2y^2+\dfrac{200}{9}\end{cases}$

即 $\begin{cases}18x^2-9y^2=124, & ①\\ 9x^2-18y^2=-376. & ②\end{cases}$

解之得 $x^2=\dfrac{208}{9}$，$y^2=\dfrac{292}{9}$.

所以其正根为

$$x=\frac{4}{3}\sqrt{13},\quad y=\frac{2}{3}\sqrt{73},$$

即 $CD=\dfrac{4}{3}\sqrt{13}$ (cm)，

$CE=\dfrac{2}{3}\sqrt{73}$ (cm).

5. 三角形的边长

2875. 已知直角三角形的三边之长为连续的正整数，求三边之长(单位为 m).

解 设三边之长为$(x-1)$，x，$(x+1)$. 根据勾股定理得

$$(x+1)^2=(x-1)^2+x^2,$$

化简得 $x^2-4x=0$，

即 $x(x-4)=0$.

$x=0$ 不合题意. 所以 $x=4$. 故三边为 3 m，4 m，5 m.

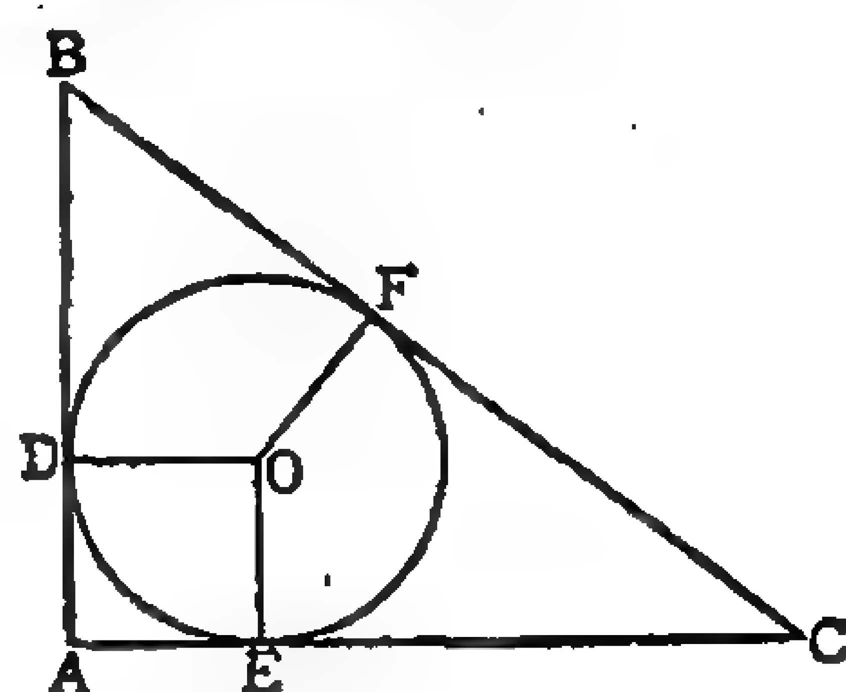
2876. 已知直角三角形的三边成等差数列，且其面积为 24 cm²，求直角三角形的各边.

解 设直角三角形的边分别为 x，y，z $(x<y<z)$，则

$$\frac{xy}{2}=24,\quad 2y=x+z,\quad x^2+y^2=z^2.$$

解之得 $x=6$ cm，$y=8$ cm，$z=10$ cm.

2877. 已知直角三角形 ABC（$\angle A$ 为直角）的周长为 $2s$，内切圆半径为 r，设 $AB<AC$，求直角三角形的各边.



解 设

$AB=x$，

$AC=y$，

$BC=z$，

则

$$x+y+z=2s, \quad ①$$
$$x^2+y^2=z^2. \quad ②$$

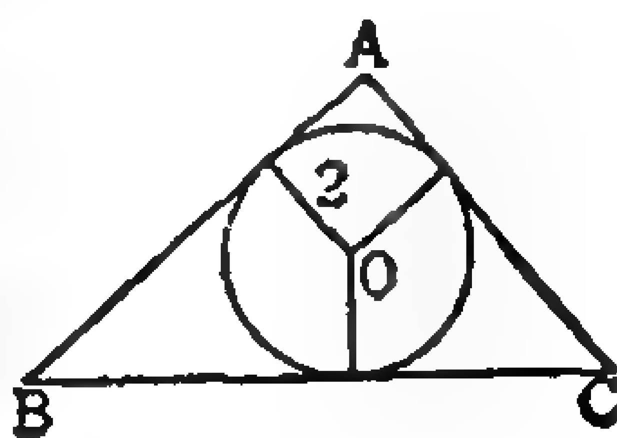
又因 $ADOE$ 是正方形，$AD=AE=r$.

$$\therefore\quad x+y-z=2r. \quad ③$$

由 ①、②、③ 可求出 x，y，z，得

$$AB=\frac{s+r-\sqrt{(s+r)^2-8sr}}{2},$$
$$AC=\frac{s+r+\sqrt{(s+r)^2-8sr}}{2},$$
$$BC=s-r.$$

2878. 已知直角三角形 ABC 的内接圆半径为 5 cm，由 A 向斜边所作垂线 $AH=12$ cm，求直角三角形的三边之长.



解 设 $AB=x$，$BC=z$，$AC=y$，则

$$x^2+y^2=z^2. \quad ①$$

设内接圆半径为 r，面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)\cdot r=\frac{1}{2}BC\cdot AH.$$

$$\therefore\quad 5(x+y+z)=12z. \quad ②$$

又因 $S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=\dfrac{1}{2}BC\cdot AH$.

$$\therefore\quad xy=12z. \quad ③$$

假定 $x>y$，解之，得

$$x=20,\quad y=15,\quad z=25$$

(当 $x<y$ 时，解之得 $x=15$，$y=20$，$z=25$).

所以三边分别是 15 cm，20 cm，25 cm.

2879. 已知直角三角形的面积为 25 cm²，内切圆半径为 2 cm，求两直角边的长.(精确到小数第二位)

解　设直角三角形的一直角边为 x，则另一直角边为 $\frac{50}{x}$. 由于这两边之和等于斜边和内切圆的直径之和. 所以

$$x+\frac{50}{x}=4+\sqrt{x^2+\frac{2500}{x^2}}. \qquad ①$$

设 $x+\frac{50}{x}=y$，则

$$y^2=x^2+\frac{2500}{x^2}+100.$$

由①　　$y=4+\sqrt{y^2-100}$

即　　$y-4=\sqrt{y^2-100}$.

$$\therefore\quad y^2-8y+16=y^2-100,$$

$$y=14.5.$$

即两边之和为 14.5，积是 50. 所以这两边是下列方程的根:

$$t^2-14.5t+50=0.$$

$$\therefore\quad t=\frac{14.5\pm\sqrt{14.5^2-200}}{2}$$

$$=\frac{14.5\pm3.201\cdots}{2}$$

$$t=8.850\cdots,\quad 5.649\cdots.$$

即两直角边长为 8.85 cm, 5.65 cm.

2880.　已知等腰三角形 ABC 的顶角 A 为 36°，底边 BC 为 10 cm，求腰长.

解　因 $\angle A=36°$，所以 BC 是以 A 为圆心，AB 为半径的圆内接正十边形的一边，由问题 **2841**，若 $AB=a$，则

$$BC=\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}a.$$

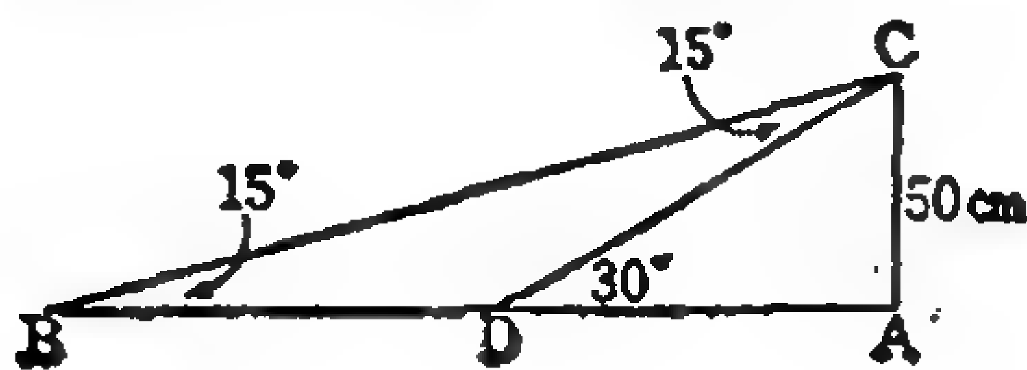
由题设 $BC=10$，由上式知

$$10=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)a.$$

$$\therefore\quad a=\frac{20}{\sqrt{5}-1}=5(\sqrt{5}+1).$$

即腰为 $5(\sqrt{5}+1)$ cm.

2881.　直角三角形的一锐角为 15°，其对边的长为 50 cm，求斜边的长.



解　因为 $\angle B=15°$，所以 $\angle C=75°$. 作直线 CD 使 $\angle BCD=15°$，和 AB 的交点为 D，则 $\angle DCA=60°$.

$$\therefore\quad \angle CDA=30°,$$

$$BD=CD=2AC=100,$$

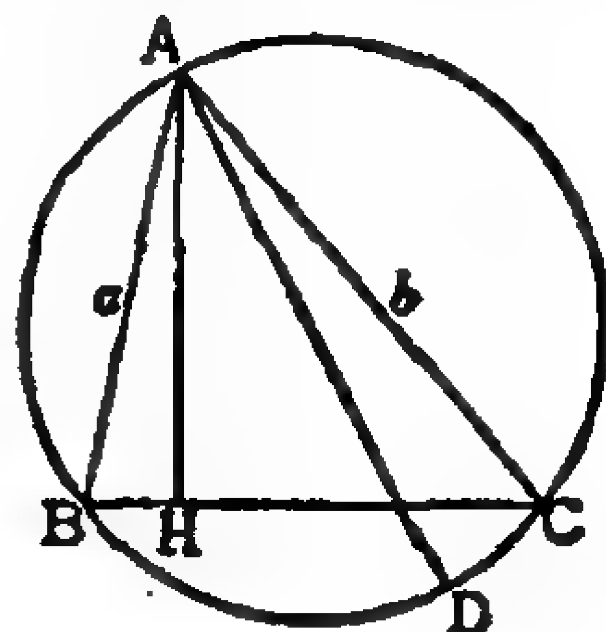
因此 $AD=50\sqrt{3}$. 设 $BC=x$，则

$$x^2=AB^2+AC^2=(100+50\sqrt{3})^2+50^2,$$

$$\therefore\quad x=50\sqrt{8+4\sqrt{3}}\ \text{(cm)}.$$

近似值为 193 (cm).

2882.　在半径为 R 的圆 O 中，作内接三角形 ABC，如果 $AB=a$，$AC=b$，求 BC 的长.



解　设直径为 AD，高为 AH，由问题 **1318** 知

$$AB\cdot AC=AD\cdot AH.$$

$$\therefore\quad AH=\frac{ab}{2R},$$

$$BC=BH\pm HC$$

$$=\sqrt{AB^2-AH^2}\pm\sqrt{AC^2-AH^2}$$

$$=\frac{1}{2R}(a\sqrt{4R^2-b^2}\pm b\sqrt{4R^2-a^2}).$$

注　当 H 在 BC 的延长线上或者在 CB 的延长线上时，取 ～ 符号.

2883.　已知三角形的周长为 60 cm，三个内角的比为 1:2:3，问三边之长各为多少 cm?

解　因三内角的比为 1:2:3，所以一角为

$$\frac{180°}{1+2+3}=30°.$$

另外两角分别为

$$30°\times2=60°,\quad 30°\times3=90°.$$

因此所求的三角形是有一个角为 60° 的直角三角形，其三边的比为 $1:\sqrt{3}:2$. 故所求三边之长分别为

$$\frac{60}{1+\sqrt{3}+2}=\frac{60(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

$$=10(3-\sqrt{3})\ \text{(cm)},$$

$$10(3-\sqrt{3})\times\sqrt{3}=30(\sqrt{3}-1)\ \text{(cm)},$$

$$10(3-\sqrt{3})\times2=20(3-\sqrt{3})\ \text{(cm)}.$$

2884.　已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$ m²，周长为 20 m，且 $\angle A=60°$，求三边之长.

解 从C向AB作垂线CD，$\angle A=60°$，所以

$AC:CD$

$=2:\sqrt{3}$。

设$CA=x$，$CB=y$，则

$$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

设$\triangle ABC$的面积为S，则$2S=AB\cdot CD$，

$$\therefore\quad 20\sqrt{3}=AB\times\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

由此得，$\qquad AB=\dfrac{40}{x}$。

所以

$$x+y+\frac{40}{x}=20. \qquad ①$$

又 $\qquad BD=AB-AD$，

因为 $\qquad \angle A=60°$，

所以 $\qquad AD=\dfrac{1}{2}x$。

从而 $\qquad BD=\dfrac{40}{x}-\dfrac{1}{2}x$。

因此，由$BC^2=CD^2+DB^2$得

$$y^2=\frac{3}{4}x^2+\left(\frac{40}{x}-\frac{1}{2}x\right)^2,$$

即

$$y^2=\left(\frac{40}{x}\right)^2+x^2-40. \qquad ②$$

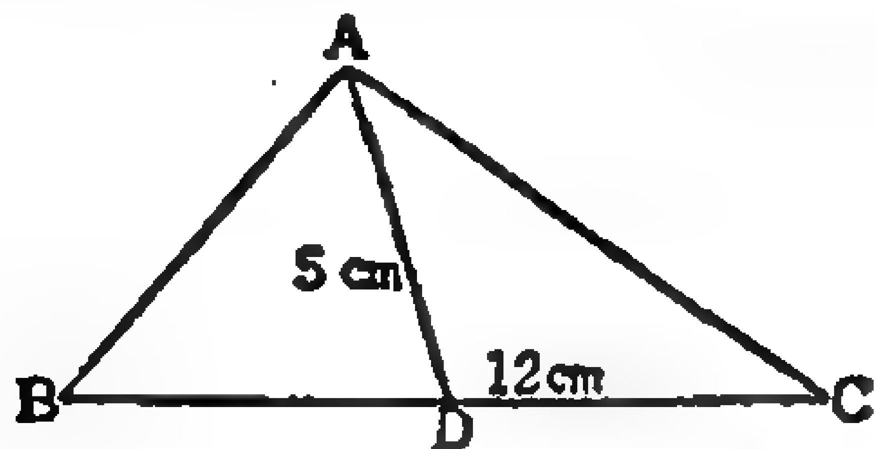
由①，得 $\qquad y=20-\dfrac{40}{x}-x$，

代入②，得 $\quad x^2-13x+40=0$。

解之得$x=5$，或者 $x=8$。

当$x=5$时，由①得$y=7$，$AB=8$；当$x=8$时，由①得$y=7$，$AB=5$。故所求三边之长为5m，7m，8m。

2885. 已知$\triangle ABC$中，$BC=12$cm，中线$AD=5$cm，两边AB、AC之差是1cm。求两边之长。其中$AB<AC$。



解 设$AB=x$，$AC=y$。由帕普斯定理，得

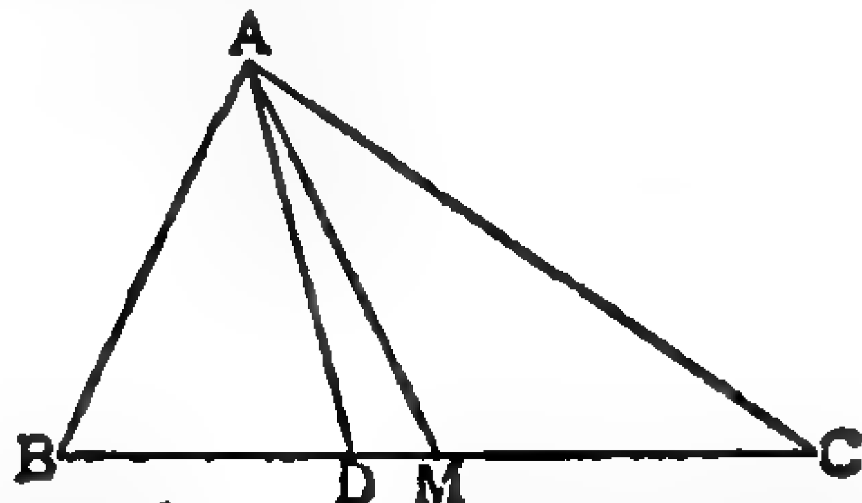
$$x^2+y^2=2\times5^2+2\times6^2.$$

又 $\qquad y-x=1$，

解此两式得

$$x=\frac{9\sqrt{3}-1}{2}\text{ (cm)},\quad y=\frac{9\sqrt{3}+1}{2}\text{ (cm)}.$$

2886. 已知$\triangle ABC$中，BC为6cm，中线AM为4cm，$\angle A$的平分线把BC分成2cm、4cm两部分，求AB、AC之长。



解 设AD为$\angle A$的平分线，则

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

再设$AB=x$，则$AC=2x$，AM是中线，由帕普斯定理，得

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2).$$

$$\therefore\quad x^2+4x^2=2\left[4^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2\right],$$

解之得 $\qquad x=\sqrt{10}\approx3.16$。

所以 $\qquad AC=2\sqrt{10}\approx6.32$。

即 $AB=\sqrt{10}$ cm，$\quad AC=2\sqrt{10}$ cm。

2887. 已知$\triangle ABC$中的两中线BE、CF相交成直角，另一中线AD之长为43.5m，以两边AB、AC所成矩形的面积为2088m²。求此三角形三边的长。（算到两位小数）

解 设$\triangle ABC$的重心为G，则

$$GD=\frac{1}{3}AD.$$

所以 $\qquad GD=43.5\times\dfrac{1}{3}=14.5$。

又因 $\qquad \angle BGC=\angle R$，

$\qquad\therefore\quad BD=GD=14.5$。

于是 $\qquad BC=29$。

设$AB=x$，$AC=y$，由题意知

$$xy=2088, \qquad ①$$

$$x^2+y^2=2(AD^2+BD^2)=4205. \qquad ②$$

由②+①×2得

$$(x+y)^2=8381.\quad\therefore\quad x+y=\sqrt{8381}.$$

因此 x、y 是下面方程的根：

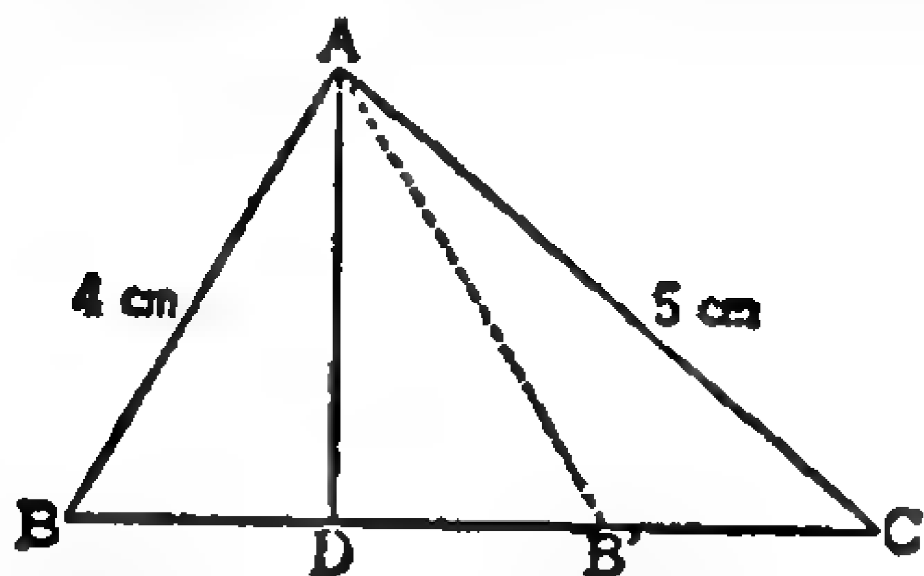
$$t^2-\sqrt{8381}\,t+2088=0.$$

由此得

$$t=\frac{1}{2}[\sqrt{8381}\pm\sqrt{8381-8352}]$$
$$=\frac{1}{2}[\sqrt{8381}\pm\sqrt{29}]$$
$$=\frac{1}{2}[91.547\cdots\pm5.385\cdots]$$
$$=48.46\cdots \text{ 或者 } 43.08\cdots.$$

所以，三边之长分别为 43.08 m, 48.46 m, 29 m。

2888. 已知 $\triangle ABC$ 中，AB 为 4 cm，AC 为 5 cm，从 A 向 BC 所作垂线把 BC 分成 BD、CD 两部分的积等于 $\frac{135}{16}$ cm²，求 BC 之长.



解 设 $BD=x$, $CD=y$, 则

$$xy=\frac{135}{16}, \qquad ①$$

$$y^2-x^2=AC^2-AB^2=5^2-4^2=9. \qquad ②$$

解①、②，得

$$x=\frac{9}{4}, \quad y=\frac{15}{4}.$$

若 $\angle B$ 是锐角时，则

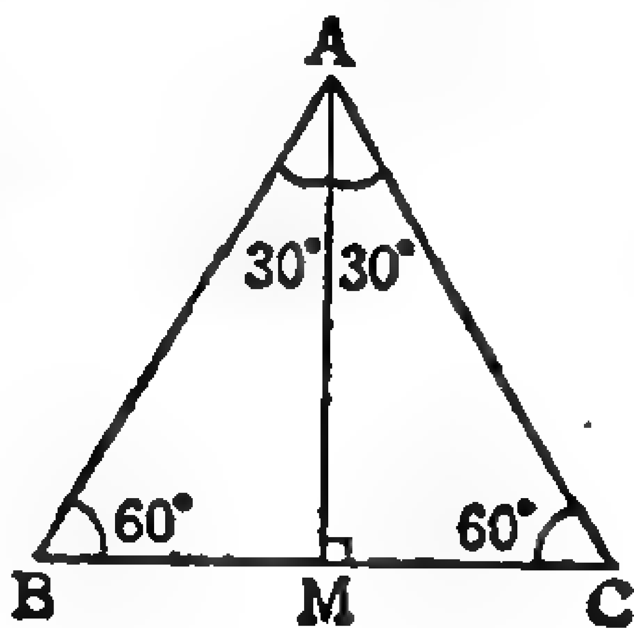
$$BC=CD+BD=\frac{15}{4}+\frac{9}{4}=6 \text{ (cm)}.$$

若 B 在 B' 的位置，$\angle B$ 是钝角，则

$$B'C=\frac{15}{4}-\frac{9}{4}=\frac{3}{2} \text{ (cm)}.$$

6. 三角形的面积

2889. 求边长为 16 cm 的正三角形的高及其面积.



解 设 $\triangle ABC$ 为正三角形，若 M 为 BC 的中点，则

$$AM\perp BC,$$
$$AB:BM:MA=2:1:\sqrt{3}.$$

因此

$$\text{高}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times16=8\sqrt{3}\approx13.85 \text{ (cm)},$$

$$\text{面积}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times16^2=64\sqrt{3}$$
$$\approx110.84 \text{ (cm)}.$$

2890. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=30$ m，$CA=28$ m，$AB=26$ m，求 $\triangle ABC$ 的面积.

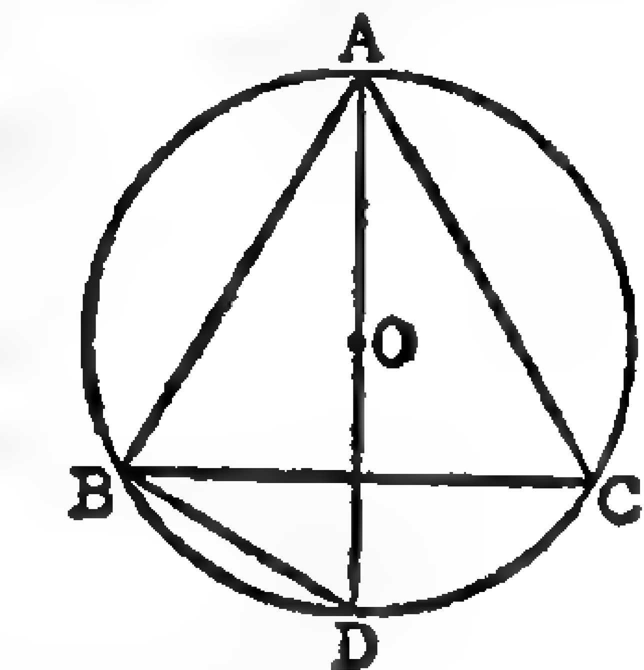
解 设此三角形的周长为 $2p$，则

$$p=\frac{1}{2}(30+28+26)=42.$$

设三角形的面积为 S，根据海伦公式

$$S=\sqrt{42\cdot(42-30)\cdot(42-28)\cdot(42-26)}$$
$$=\sqrt{42\cdot12\cdot14\cdot16}$$
$$=\sqrt{6\times7\times2\times6\times2\times7\times2\times8}$$
$$=\sqrt{6^2\cdot7^2\cdot8^2}=6\cdot7\cdot8=336 \text{ (m}^2\text{)}.$$

2891. 在半径为 5 cm 的圆中内接一正三角形，求此三角形的周长及面积。其中小数第三位的数四舍五入.



解 设 $\triangle ABC$ 为圆 O 的内接正三角形，如果作直径 AD，则

$$BD=DO=5 \text{ cm},$$
$$\angle ABD=\angle R.$$
$$\therefore\quad AB^2=AD^2-BD^2=10^2-5^2=75,$$
$$AB=5\sqrt{3}.$$

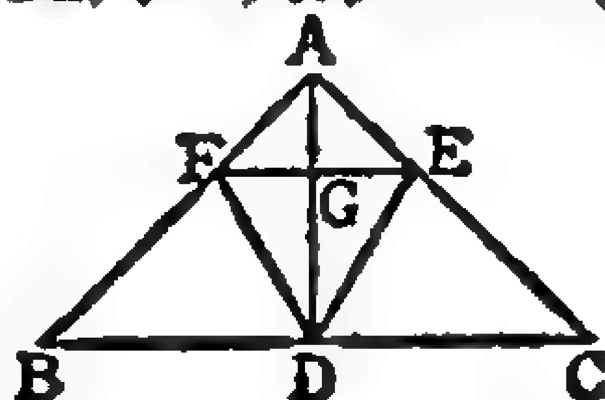
故

$$AB+BC+CA=3\times5\sqrt{3}=25.98 \text{ (cm)},$$

又

$$\triangle ABC\text{ 面积}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times75$$
$$=32.48 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2892. 已知在等腰直角三角形 ABC（设夹直角 A 的两边都是 a）的内接正三角形 DEF 中，D、E、F 分别在 BC、AC、AB 上，并且 $EF\parallel BC$，求 $\triangle DEF$ 的面积.



解 设 AD、EF 的交点为 G，$\triangle DEF$ 的面积为 S，EF 为 x，则 $DG=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，又因

$$AG=GE=\frac{1}{2}x,$$

$$AD=AG+DG.$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)x,$$

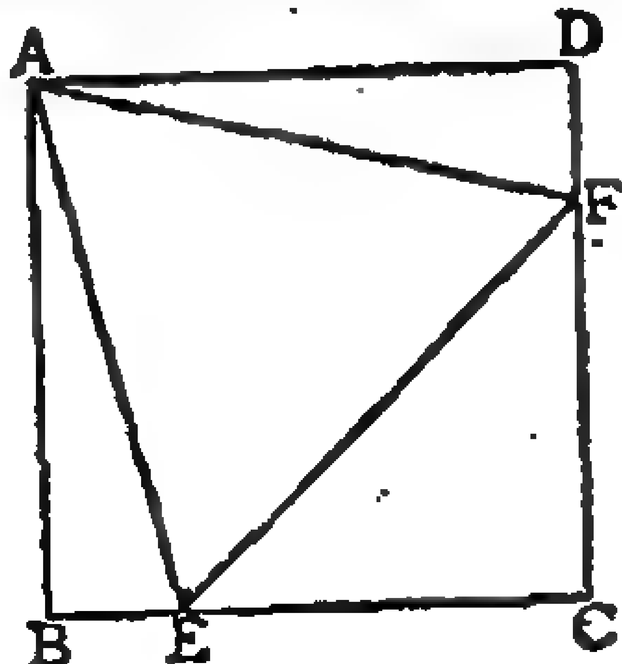
从而　$x=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}a.$

因此，所求的面积 S 为

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}a\right]^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(2-\sqrt{3})a^2.$$

2893. 已知在边长为 a cm 的正方形中，其内接正三角形有一个顶点与正方形的顶点重合，求此正三角形的边长及其面积。



解 设正方形为 $ABCD$，正三角形为 AEF，$EC=CF$，$EF=x$，则 $CE=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$。所以

$$BE=\left(a-\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

在 $\triangle ABE$ 中，

$$AE^2=AB^2+BE^2,$$

$$\therefore\ x^2=a^2+\left(a-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

解之，得　$x=(-\sqrt{2}\pm\sqrt{6})a.$

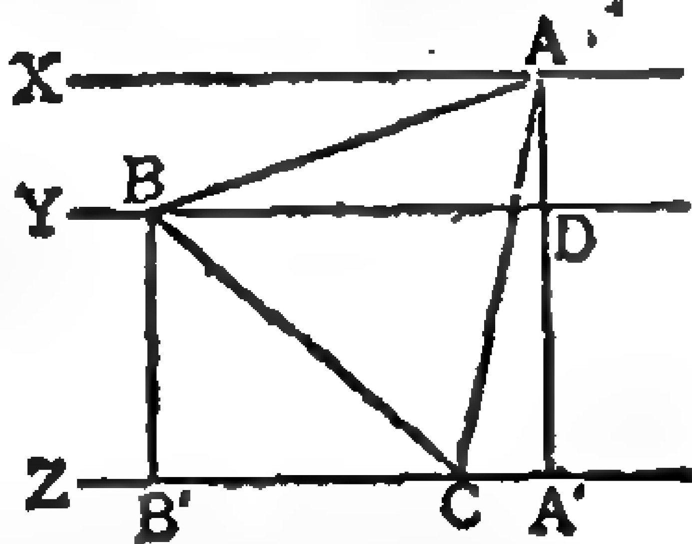
取正值，　$x=(\sqrt{6}-\sqrt{2})a.$

又因边长为 a 的正三角形的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，所以

$$\triangle AEF\text{ 的面积}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2a^2$$

$$=(2\sqrt{3}-3)a^2\ (\text{cm}^2).$$

2894. 在三条平行线 X、Y、Z 中，设 Y 在 X 和 Z 之间，且 Y 和 X 的距离为 1m，Y 和 Z 的距离为 2m。若正三角形 ABC 的顶点 A、B、C 分别在 X、Y、Z 上，求此正三角形的面积。



解 从 A、B 分别向 Z 作垂线 AA'、BB'，AA' 和 Y 的交点为 D，若在 $\triangle ADB$、$\triangle BB'C$、$\triangle AA'C$ 中，设

$$AB=BC=CA=x,$$

则　$BD^2=AB^2-AD^2=x^2-1^2,$　①

$$B'C^2=BC^2-BB'^2=x^2-2^2,\quad ②$$

$$A'C^2=CA^2-AA'^2=x^2-3^2.\quad ③$$

而且 $B'C+A'C=BD$，所以把①、②、③代入得

$$\sqrt{x^2-2^2}+\sqrt{x^2-3^2}=\sqrt{x^2-1^2}.\quad ④$$

两边平方，得

$$x^2-4+x^2-9+2\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x^2-9}$$
$$=x^2-1,$$

$$\therefore\ 2\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-9}=12-x^2.$$

两边再平方，得

$$4(x^2-4)(x^2-9)=(12-x^2)^2,$$

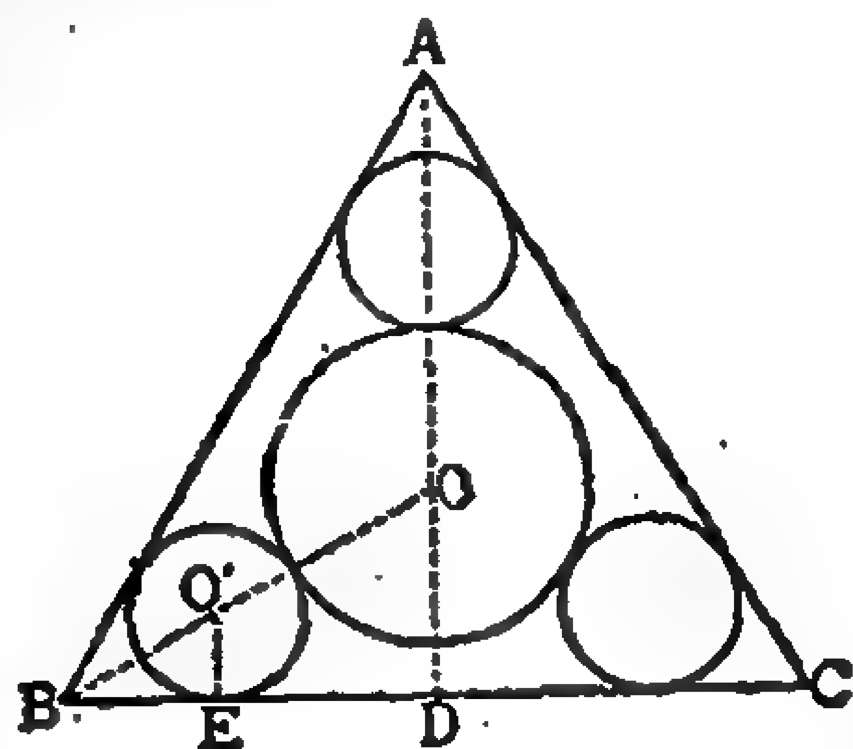
即　$x^2(3x^2-28)=0,$

$$\therefore\ x^2=\frac{28}{3}.$$

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{28}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$\approx 4.04\ (\text{m}^2).$$

2895. 已知正三角形 ABC 中，有一半径为 2cm 的圆 O，此外在圆 O 与每个角之间可以画和该圆及两边都相切且半径为 1 cm 的三个等圆。求正三角形 ABC 的面积 S。



解 如图，设和圆 O 与 AB、BC 相切的圆的圆心为 O'，BC 和圆 O' 的切点为 E，则

$$\angle O'BE=30^\circ,\quad \angle E=\angle R,$$

所以　$BO'=2O'E=2.$

又因　$OO'=3,$

于是　$BO=BO'+OO'=2+3=5;$

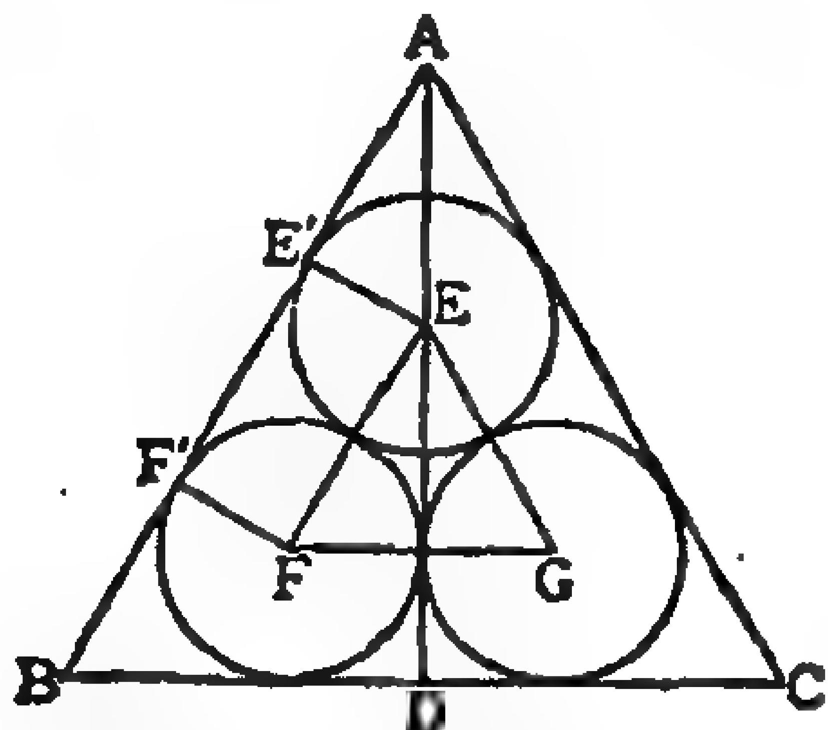
从而　$BD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BO=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}.$

$$\therefore\ BC=5\sqrt{3},$$

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(5\sqrt{3})^2=\frac{75}{4}\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

2896. 已知半径为 5 cm 的三个等圆互相外切。作它们的外切正三角形 ABC，求这个三角形的面积。

解 设 E、F、G 分别为三个等圆的圆心，



两圆 E、F 和 AB 的切点分别为 E'、F'，则

$$E'F'=EF=10.$$

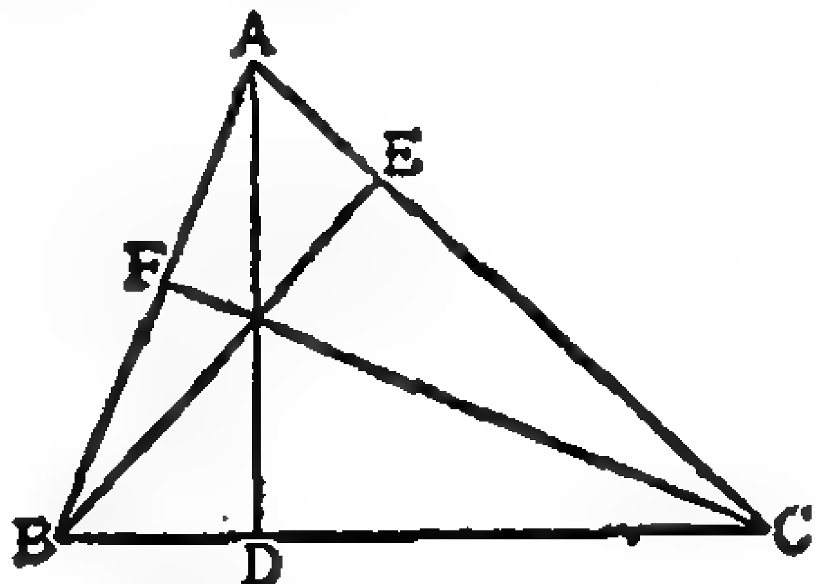
又因　$AE'=BF'=5\sqrt{3}$，

所以　$AB=10+5\sqrt{3}\times2=10(1+\sqrt{3})$。

故

$$\triangle ABC\text{ 的面积}=\frac{\sqrt{3}}{4}[10(1+\sqrt{3})]^2$$
$$=50(3+2\sqrt{3})$$
$$\approx323.2\ (\text{cm}^2).$$

2897. 已知在半径为 R 的圆 O 中，内接三角形的三边之长的乘积一定，求此三角形的面积。



解　设半径为 R 的圆 O 的内接三角形为 $\triangle ABC$，且

$$AB\cdot BC\cdot CA=k\ (\text{一定}).$$

设从 A 作 BC 的垂线，其垂足为 D。再从顶点 A 作圆 O 的直径 AE，则

$$\triangle ABE\backsim\triangle ADC,$$

所以　$AB:AD=AE:AC$。

因而　$AD\cdot AE=AB\cdot AC$，

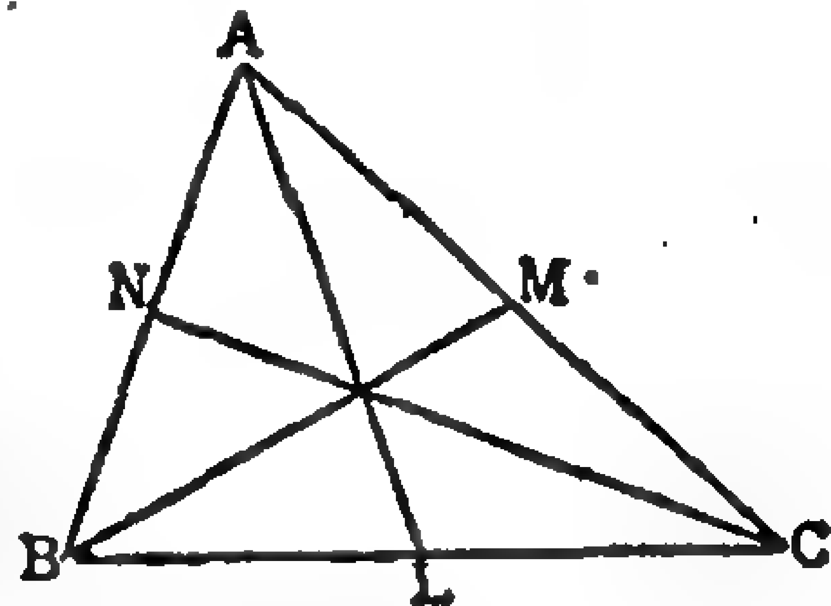
$$AE\cdot AD\cdot BC=AB\cdot AC\cdot BC.$$

设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，则 $AD\cdot BC=2S$。又

$$AE=2R,\quad AB\cdot AC\cdot BC=k.$$

$$\therefore\quad 2R\cdot2S=k,\quad S=\frac{k}{4R}.$$

2898. 已知 $\triangle ABC$ 的三条垂线 $AD=h$，$BE=k$，$CF=l$，求 $\triangle ABC$ 的面积 S。



解　设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，

则　$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}bk=\frac{1}{2}cl$.

$$\therefore\quad p=\frac{1}{2}(a+b+c)=S\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}\right).$$

同样，$p-a=S\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{l}-\frac{1}{h}\right)$，等等。

将以上各式代入

$$S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

中，则

$$S=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{h}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k}+\frac{1}{l}-\frac{1}{h}}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{l}+\frac{1}{h}-\frac{1}{k}}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{h}+\frac{1}{k}-\frac{1}{l}}}.$$

2899. 在 $\triangle ABC$ 中，已知由 A、B、C 所作的三条中线之长分别为 l、m、n，求其面积。

解　设以 l、m、n 为三边作成的三角形的面积为 S'，则

$$S=\frac{4}{3}S'\ (\text{问题 758}).$$

再根据海伦公式，可知

$$S=\frac{4}{3}\sqrt{l+m+n}\cdot\sqrt{m+n-l}\cdot\sqrt{n+l-m}\cdot\sqrt{l+m-n}.$$

2900. 用 $\triangle ABC$ 的三条中线为边作成第二个三角形，再以第二个三角形的三条中线为边作成第三个三角形。如此无限继续进行下去，求 $\triangle ABC$ 和这些三角形的面积之和 S。

解　因 $\triangle ABC$ 的三条中线 AD，BE，CF 为边作成的 $\triangle HCF$ 面积等于原 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{3}{4}$（问题 758）。依此类推，

$$\therefore\quad S=S_{\triangle ABC}+\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}+\left(\frac{3}{4}\right)^2S_{\triangle ABC}+\cdots$$
$$=S_{\triangle ABC}\cdot\left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots\right]$$
$$=S_{\triangle ABC}\times\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4S_{\triangle ABC}.$$

2901. 已知半径分别为 3cm、4cm、4

cm 的三个圆 A、B、C 互相外切，求以切点 D、E、F 为顶点的 $\triangle DEF$ 的面积。

解　若 AD、EF 的交点为 H，则

$AD:DH=AB:BF$，①

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{7^2-4^2}=\sqrt{33},$$

$$AB=7,\quad BF=4.$$

由①知　$\sqrt{33}:DH=7:4$。

于是

$$DH=\frac{4\sqrt{33}}{7}. \qquad ②$$

因为 $FE\parallel BC$，所以

$$EF:BC=AF:AB.$$

即　$EF:8=3:7$，

$$\therefore\quad EF=\frac{24}{7}. \qquad ③$$

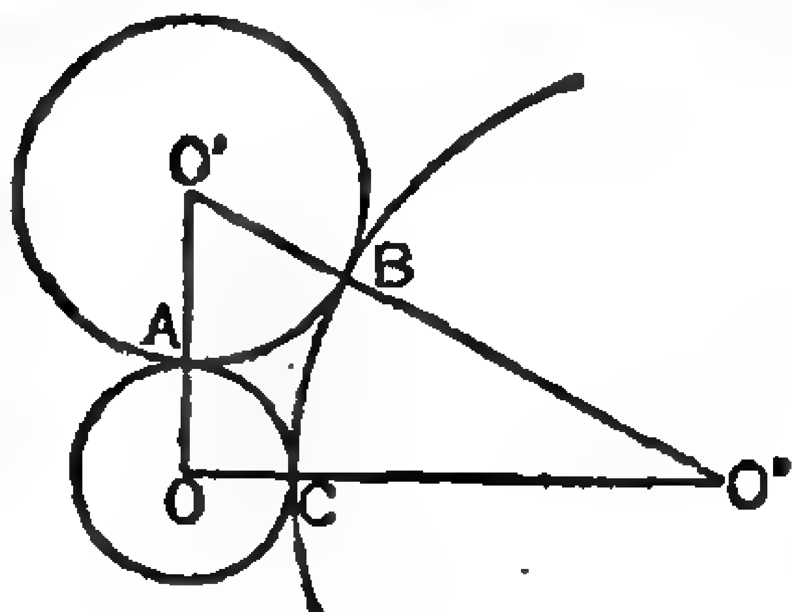
由②、③可得

$$\triangle DEF \text{ 面积}=\frac{1}{2}EF\cdot DH$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{7}\cdot\frac{4\sqrt{33}}{7}$$

$$=\frac{48}{49}\sqrt{33}\approx 5.63\ (\text{cm}^2).$$

2902.　已知三圆 O、O'、O''（半径分别为 $\sqrt{3}-1, 3-\sqrt{3}, \sqrt{3}+1$）中每两圆互相外切，求由这三个圆周间所夹的弧围成的图形 ABC 的面积 S。



解　因为 $OO'=2$，$OO''=2\sqrt{3}$，$O'O''=4$。所以

$$OO'^2+OO''^2=4+12=16=O'O''^2.$$

于是 $\angle O'OO''=\angle R$。又由 $O'O''=2OO'$，知

$$\angle O''=30^\circ,\quad \angle O'=60^\circ.$$

$$\therefore\quad \text{扇形 } OAC \text{ 面积}=\frac{1}{4}\pi OA^2$$

$$=\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})\cdot\pi,$$

$$\text{扇形 } O'AB \text{ 面积}=\frac{1}{6}\pi O'B^2=(2-\sqrt{3})\cdot\pi,$$

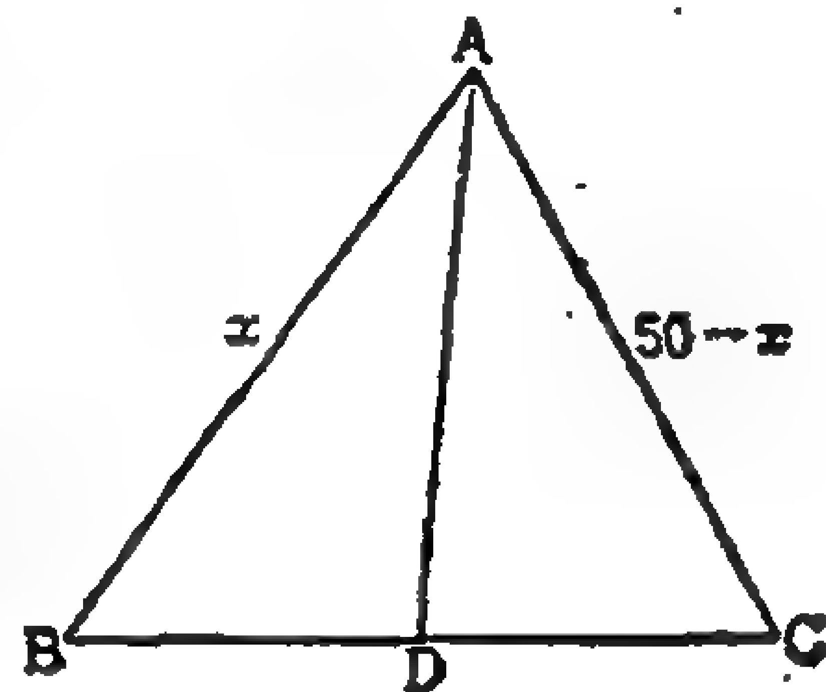
$$\text{扇形 } O''BC \text{ 面积}=\frac{1}{12}\pi O''C^2$$

$$=\frac{1}{6}\times(2+\sqrt{3})\cdot\pi.$$

$$\therefore\quad S=2\sqrt{3}-\left[\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\frac{1}{6}(2+\sqrt{3})\right]\pi$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\times(5-2\sqrt{3})\pi.$$

2903.　已知三角形的底边之长为 20 cm，另两边之和为 50 cm。当底边上的中线最小时，这个三角形的面积为多少 cm²？



解　在 $\triangle ABC$ 中，底边 $BC=20$ cm，设

$$AB=x,$$

则　$AC=(50-x)$。

再设中线 AD 为 y，则由

$$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2),$$

得　$x^2+(50-x)^2=2(y^2+10^2)$。

$$\therefore\quad y^2=x^2-50x+1150$$

$$=(x-25)^2+525.$$

因此当 $x=25$，即 $AB=AC=25$ 时，

$$y=AD=5\sqrt{21}$$

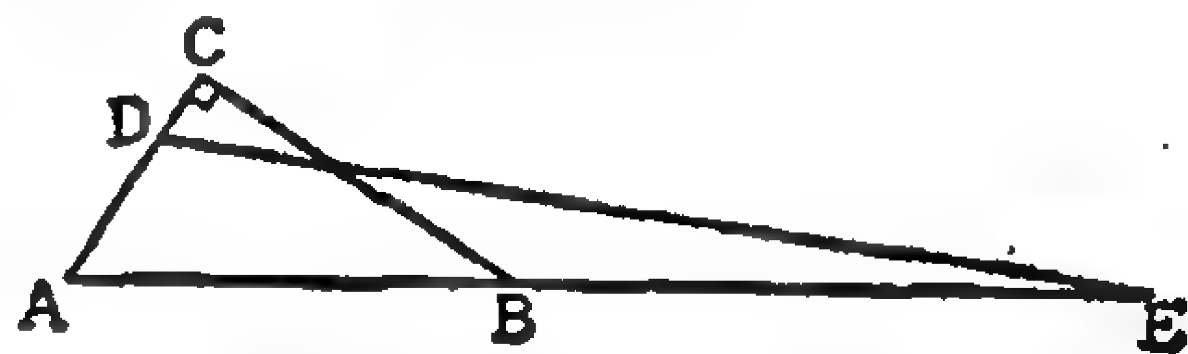
为最小。

设所求的三角形的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 20\times 5\sqrt{21}$$

$$=223.13\ (\text{cm}^2).$$

2904.　已知 C 为直角的 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 之长分别为 11 cm、6 cm，边 AB 上的外分点为 E，使 $AE:BE=5:3$，边 AC 上的内分点为 D，使 $AD:DC=2:1$，求 $\triangle ADE$ 的面积。小数第二位四舍五入。



解　有一角相等的两个三角形的面积的比等于夹此角的两边乘积的比。所以

$$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=AD\cdot AE:AB\cdot AC$$

$$=\frac{2}{3}AC\cdot\frac{5}{5-3}AB:AB\cdot AC$$

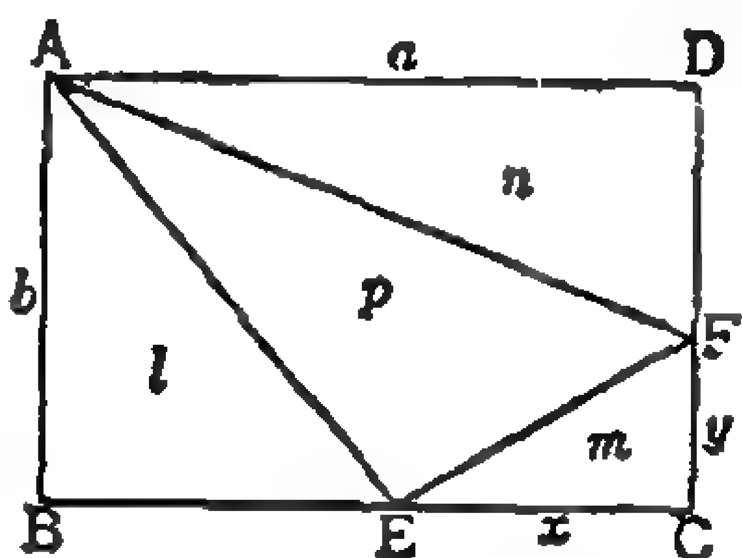
$$=\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}:1=5:3.$$

但是　$S_{\triangle ABC}=\frac{6}{2}\sqrt{11^2-6^2}=3\sqrt{85}$，

所以

$$S_{\triangle ADE}=5\sqrt{85}=5\times 9.219$$
$$\approx 46.10\text{cm}^2.$$

2905. 在矩形 $ABCD$ 中，已知内接 $\triangle AEF$ 的两顶点 E、F 分别在边 BC、CD 上，三个直角三角形 ABE、EFC、ADF 的面积分别为 l、m、n，求三角形 AEF 的面积。



解　设矩形的两边 AD、AB 分别为 a、b，$EC=x$，$FC=y$。则

$$b(a-x)=2l,$$

即

$$bx=ab-2l. \quad ①$$

$$a(b-y)=2n,$$

即

$$ay=ab-2n. \quad ②$$

$$xy=2m. \quad ③$$

又设 $S_{\triangle AEF}=p$，则

$$ab=p+(l+m+n). \quad ④$$

将④代入①中，

$$bx=p+(m+n-l). \quad ⑤$$

将④代入②中，

$$ay=p+(l+m-n). \quad ⑥$$

⑤、⑥两边分别相乘得

$$abxy=p^2+2m\cdot p+(m+n-l)\cdot(l+m-n).$$

将③、④代入上式，

$$2m\cdot p+2m\cdot(l+m+n)=p^2+2m\cdot p+(m+n-l)\cdot(l+m-n),$$

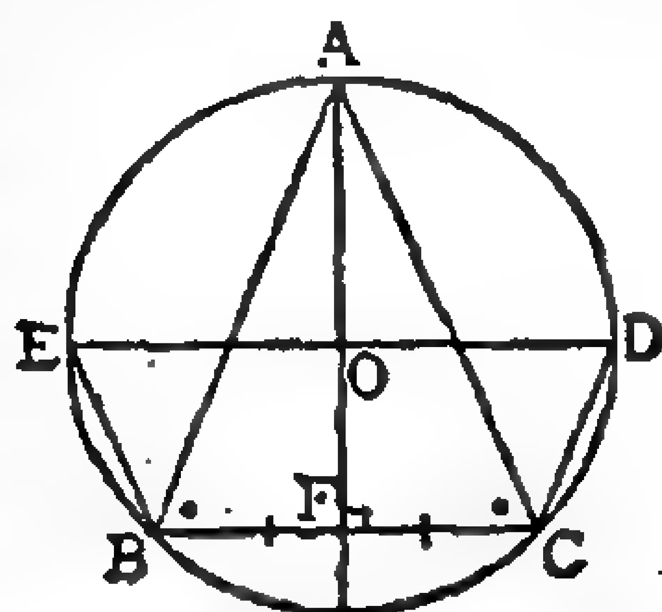
即

$$p^2=2m\cdot(l+m+n)-(m+n-l)\cdot(l+m-n)$$
$$=l^2+m^2+n^2+2l\cdot m+2m\cdot n-2n\cdot l,$$

所以

$$p=\sqrt{l^2+m^2+n^2+2l\cdot m+2m\cdot n-2n\cdot l}.$$

2906. 已知在半径为 r 的圆 O 中，内接等腰三角形 ABC 的面积，等于底边 BC 和平行于 BC 的直径为两底的梯形 $BCDE$ 的面积，求此三角形的面积。其中等腰三角形的高 AF 大于 AO。



解　设 F 为 BC 的中点。若 $OF=x$，则

$$BF=\sqrt{r^2-x^2}.$$

$\therefore$　$S_{\triangle ABC}=AF\cdot BF=(r+x)\cdot\sqrt{r^2-x^2}$，

梯形 $BCDE=x\cdot(r+\sqrt{r^2-x^2})$。

根据题意，得方程式

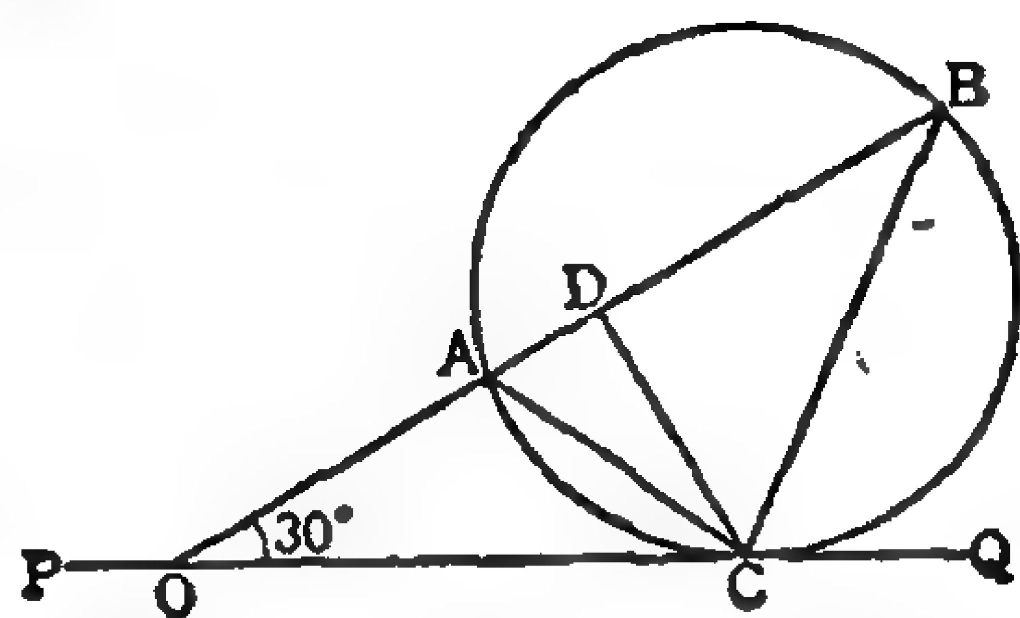
$$(r+x)\cdot\sqrt{r^2-x^2}=x(r+\sqrt{r^2-x^2}).$$

解之，得　$x=\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

所以

$$S_{\triangle ABC}=\left(r+\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)\cdot\sqrt{r^2-\frac{1}{2}r^2}$$
$$=\frac{1+\sqrt{2}}{2}r^2.$$

2907. 过直线 PQ 上的一点 O 作直线 OAB，与 PQ 成 $30°$ 角。在直线 OAB 上取 $OA=4$，$OB=9$，设过两点 A、B 的圆与直线 PQ 相切于 C，求由 C、A、B 为顶点的 $\triangle ABC$ 的面积。



解　设切点为 C，由 C 向 OB 作垂线 CD。因 OC 是切线，所以

$$OC^2=OA\cdot OB.$$

因而　$OC^2=4\times 9$，　$\therefore$　$OC=6$.

又 $\triangle OCD$ 是直角三角形，

$$\angle DOC=30°,$$

所以　$CD=\frac{1}{2}OC=3$.

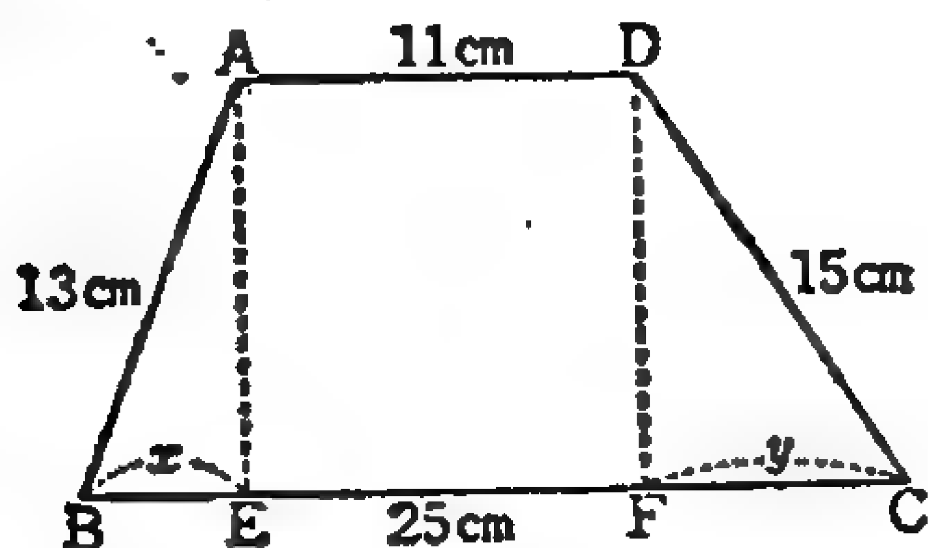
设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}CD\cdot AB,$$

$$S=\frac{1}{2}\times3\times(9-4)=7.5.$$

7. 四边形（或其他多边形）的边长和面积

2908. 已知梯形的底边长分别为 11cm、25cm，另两边的长分别为 13cm、15cm，求其面积。



解 设在梯形 $ABCD$ 中，$AD=11$cm，$BC=25$cm，$AB=13$cm，$CD=15$cm。若从 A、D 向 BC 所作垂线的垂足分别为 E、F。

设 $BE=x$，$CF=y$，则

$$x+y=25-11=14. \quad ①$$

根据勾股定理，

$$13^2-x^2=AE^2,\quad 15^2-y^2=DF^2.$$

但是 $AE=DF$，所以

$$13^2-x^2=15^2-y^2.$$

$$\therefore\quad y^2-x^2=56. \quad ②$$

由②、①得

$$y-x=4. \quad ③$$

由①、③得 $x=5$，$y=9$。

梯形的高 DF 为

$$\sqrt{15^2-9^2}=12.$$

因此，所求梯形的面积为

$$\frac{12}{2}(11+25)=216\ (\text{cm}^2).$$

2909. 求$\triangle ABC$ ($BC=a$, $CA=b$, $AB=c$) 的内接正方形 $DEFG$ 的边长。其中一条边 EF 在 BC 上。

解 设此三角形的面积为 S，根据海伦公式

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

如图，设 $AK\perp BC$，$EF=x$，则

$$AH:AK=DG:BC.$$

$$\therefore\quad \frac{AK-x}{AK}=\frac{x}{a}.$$

由此得

$$x=\frac{a\cdot AK}{a+AK}. \quad ①$$

但是
$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AK,$$

$$\therefore\quad 2S=a\cdot AK,$$

$$AK=\frac{2S}{a}. \quad ②$$

由①、②，得

$$x=\frac{2aS}{a^2+2S}.$$

2910. 已知$\triangle ABC$的底边 BC 为28cm，高 AK 为22cm。求此三角形的内接正方形$DEFG$的边长。

解 设 $EF=x$，AK 和 DG 的交点为 H，则

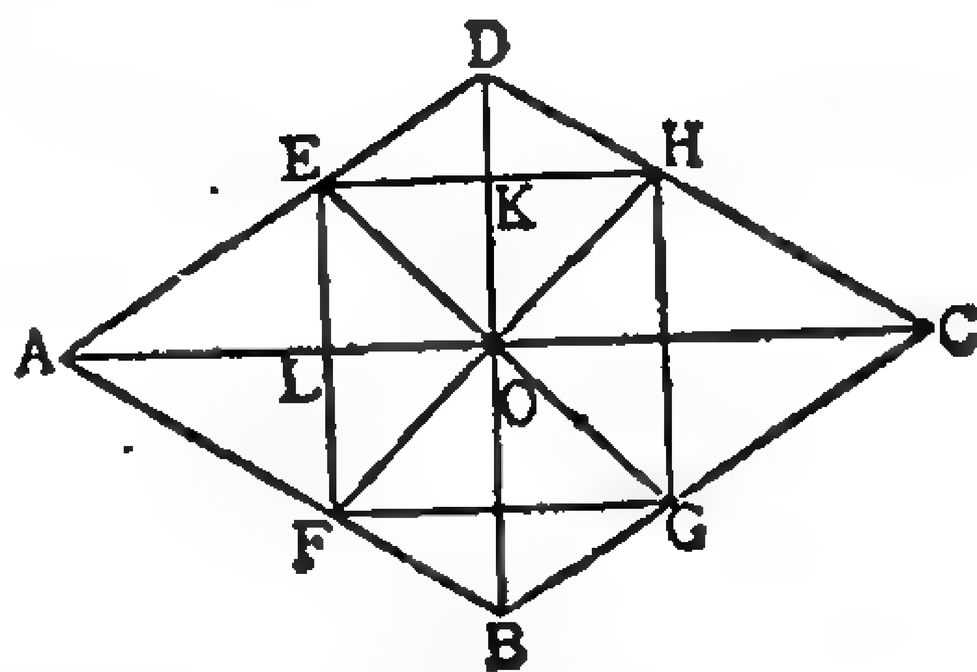
$$BC:DG=AK:AH.$$

$$\therefore\quad 28:x=22:(22-x)$$

即
$$22x=28(22-x).$$

解之，得
$$x=12.32\ (\text{cm}).$$

2911. 求菱形 $ABCD$ ($AC=2a$, $BD=2b$) 中的内接正方形 $EFGH$ 的边长。



解 如图，设 $OL=x$，则

$$\triangle ALE\backsim\triangle AOD.$$

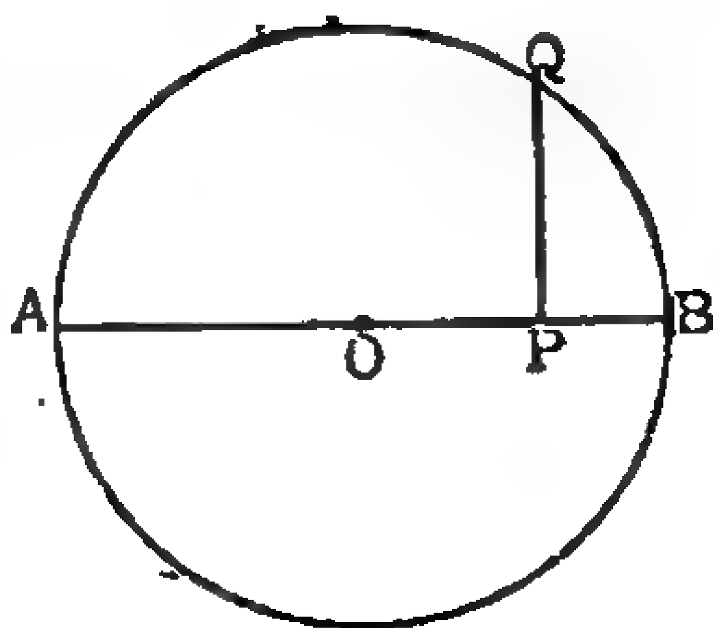
$$\therefore\quad \frac{AL}{EL}=\frac{AO}{DO},$$

即
$$\frac{a-x}{x}=\frac{a}{b}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{ab}{a+b}.$$

因此所求的边长为 $\dfrac{2ab}{a+b}$。

2912. 在圆O的直径AB上距圆心O为3cm有一点P，直径AB上的垂线PQ和圆交于点Q。且PQ比直径短6cm，求此圆的半径和内接正方形的边长。



解 设

$$AO=OB=x,$$

则 $AP=x+3,\quad PB=x-3,$

$$PQ=2x-6.$$

根据圆幂定理$PQ^2=AP\cdot PB$，

$$\therefore\quad (2x-6)^2=(x+3)(x-3).$$

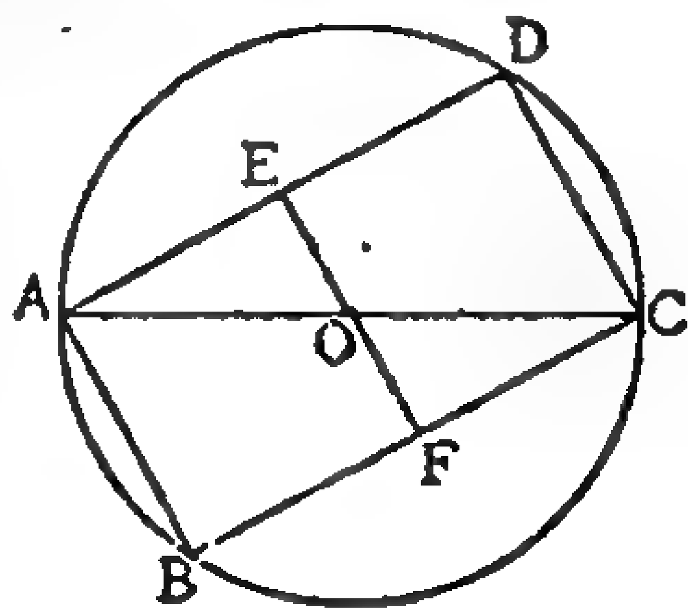
解之，得 $x=3$ 或 $x=5$。

已知$OP=3$，且$OB>OP$，所以$x=3$不适合条件，故

$$x=5.$$

因此圆O的半径是5cm，其内接正方形的边长为$5\sqrt{2}\approx7.071$(cm)。

2913. 已知在半径为r的圆O中(如图)，内接一个矩形(两个相等的正方形)，求矩形短边的长。



解 设$AE=x$，

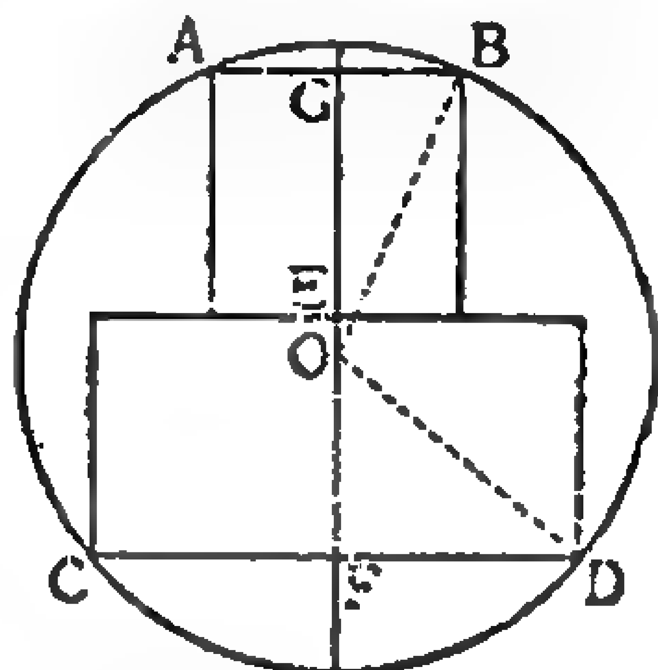
则 $OE=\frac{1}{2}x$.

因为$AE^2+OE^2=AO^2$，所以

$$\sqrt{x^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=r.$$

解之，得 $x=\frac{2}{\sqrt{5}}r.$

2914. 在半径为r的圆O中(如图)，内接三个成品字形的相等的正方形，求正方形的边长。



解 在图中，设

$AB=x,\ OF=y,$

则在$\triangle OFD$中

$$y^2+x^2=r^2. \quad ①$$

因为 $GO=GF-OF=2x-y,$

$$GB=\frac{x}{2},\quad OB=r.$$

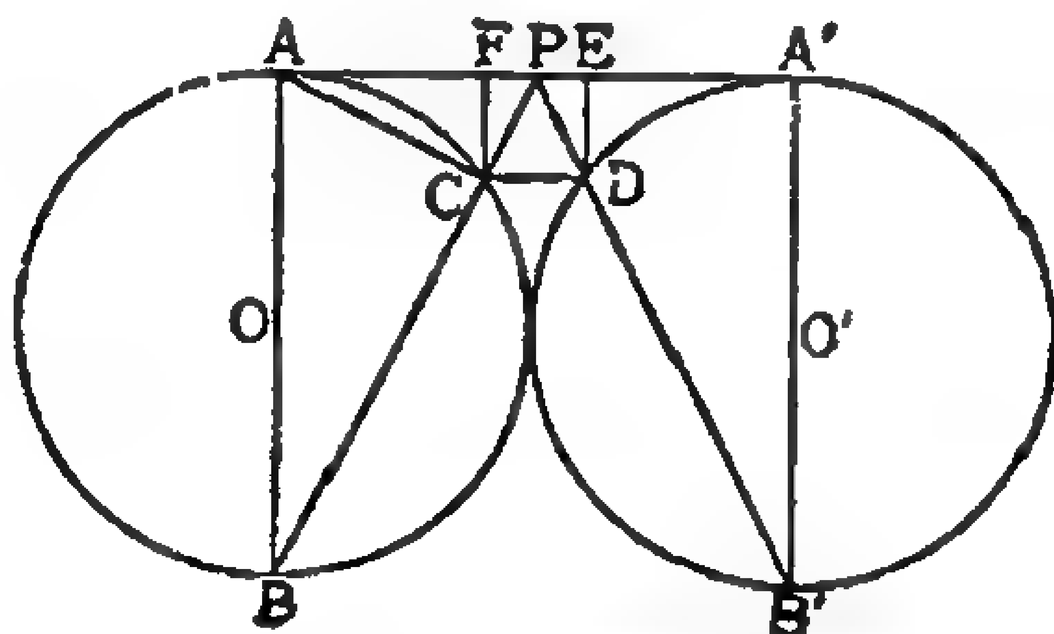
在$\triangle OBG$中，

$$(2x-y)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=r^2. \quad ②$$

解①、②两式，得

$$x=\frac{16}{5\sqrt{17}}r.$$

2915. 已知直径为10cm的两等圆O、O'外切，在这两个圆和外公切线AA'间作一正方形，使正方形的两顶点在两圆的圆周上，且另外两顶点在公切线AA'上，求正方形的边长。



解 设过点A、A'的两圆的直径分别为AB、$A'B'$，AA'的中点为P，PB、PB'和两圆的交点分别为C，D。分别从C，D作AA'的垂线CF、DE，于是$CDEF$就是所求的正方形。

设$BA=10$，则$AP=\frac{1}{2}AA'=5$。所以

$$PB=\sqrt{AB^2+AP^2}=\sqrt{10^2+5^2}$$
$$=5\sqrt{5}.$$

其次，设$PC=x$，则

$$AP^2=PC\cdot PB.$$

$$\therefore\quad 5^2=x\cdot5\sqrt{5},$$

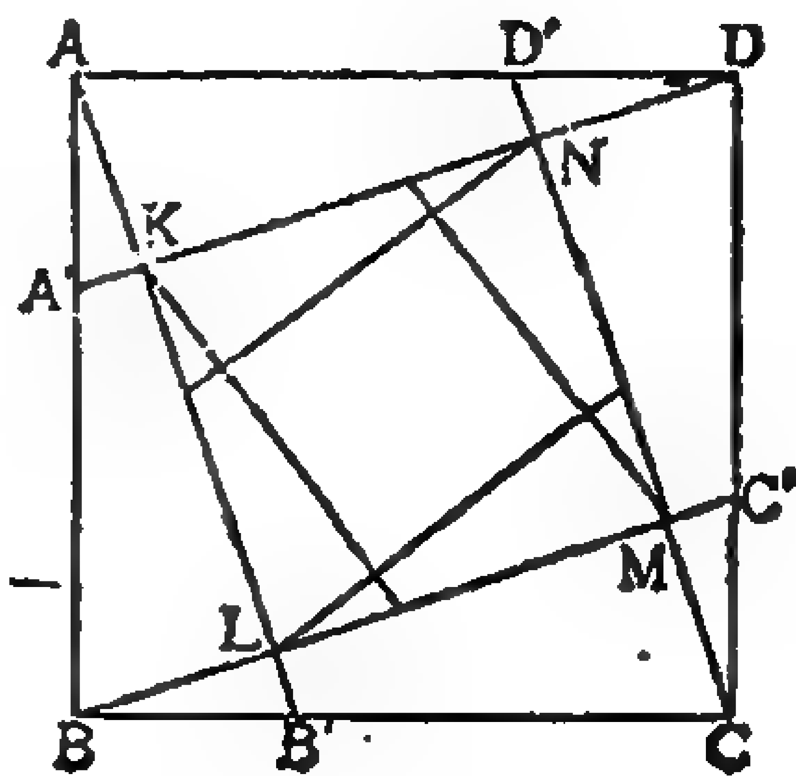
$$x=\sqrt{5}.$$

又因 $CF:AB=PC:PB,$

$$\therefore\quad CF:10=\sqrt{5}:5\sqrt{5},$$

从而 $CF=2$(cm)。

2916. 已知边长为a的正方形$ABCD$。在各边AB、BC、CD、DA上分别取点A'、B'、C'、D'，使



$$AA'=\frac{1}{3}AB,$$

$$BB'=\frac{1}{3}BC,$$

$$CC'=\frac{1}{3}CD,$$

$$DD'=\frac{1}{3}DA.$$

连结 AB', BC', CD', DA' 作成第二个正方形。在这个正方形内用同样的方法作第三个正方形,并依次作第四、第五及无限多个正方形时,求所有正方形的面积的总和。

解 设各正方形的面积分别为 S_1, S_2, S_3, …,则

$$BC'=\sqrt{BC^2+CC'^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}a.$$

在直角三角形 $C'BC$ 中,

$$CM\perp BC'.$$

$$\therefore\ BM\cdot BC'=BC^2,$$

即 $$\frac{\sqrt{10}}{3}a\times BM=a^2,$$

所以 $$BM=\frac{3}{\sqrt{10}}a.$$

但是

$$LM=\frac{2}{3}BM=\frac{2}{3}\times\frac{3}{\sqrt{10}}a=\frac{2}{\sqrt{10}}a,$$

$$\therefore\ S_2=\left(\frac{2}{\sqrt{10}}a\right)^2=\frac{2}{5}a^2.$$

即第二个正方形是第一个正方形的 $\frac{2}{5}$ 倍. 同样

$$S_3=\frac{2}{5}S_2=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}a^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2a^2,$$

$$S_4=\frac{2}{5}S_3=\left(\frac{2}{5}\right)^3a^2.$$

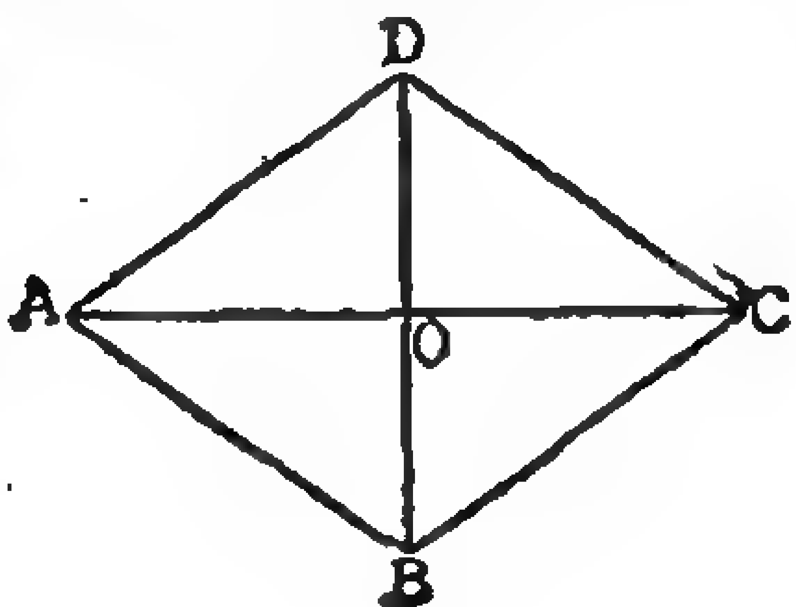
设这些正方形的面积的总和为 S. 则

$$S=a^2+\frac{2}{5}a^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2a^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3a^2+\cdots$$

此式右边是第一项为 a^2, 公比为 $\frac{2}{5}$ 的无穷等比级数的和。

$$\therefore\ S=\frac{a^2}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}a^2.$$

2917. 已知菱形 $ABCD$ 的各边为15cm, 对角线的差为 6 cm, 求它的面积 S。



解 设 $OA=x$, $OB=y$, 则在直角三角形 AOB 中, 有

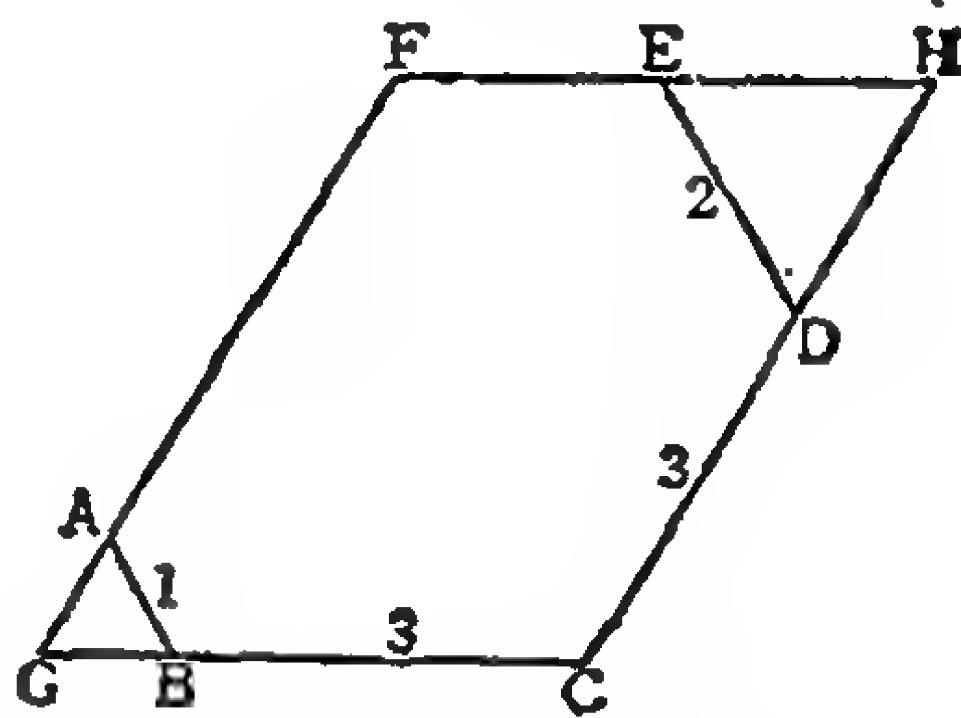
$$x^2+y^2=15^2,\quad x-y=3.$$

解之,得 $$x=12,\quad y=9.$$

所以

$$S=2xy=2\times12\times9=216\ (\text{cm}^2).$$

2918. 已知矩形地面的两对角线的和与周长之比为 5:7, 其面积为 768 m², 求其长与宽。



解 设矩形为 $ABCD$, 则

$$AC:(AB+BC)=5:7.\quad ①$$

又设

$$AB=x,\quad BC=y,$$

则 $$AC=\sqrt{x^2+y^2}.$$

将此式代入 ① 中,得

$$\sqrt{x^2+y^2}:(x+y)=5:7.$$

因为 $xy=768$, 解此两式,得

$$x=32,\quad y=24;$$

或 $$x=24,\quad y=32.$$

即矩形的边为 32 m 和 24 m。

2919. 已知等角六边形连续的四条边长顺次为 1 m, 3 m, 3 m, 2 m。求另外两边之长。

解 等角六边形的各个内角都为120°, 所以在图中, $\triangle GAB$、$\triangle HED$ 都是正三角形, 而 $FGCH$ 是平行四边形。

设 $AB=1$, $BC=3$, $CD=3$, $DE=2$, 则 $GC=1+3=4$, $CH=3+2=5$. 所以

$$FH=GC=4,\quad GF=CH=5.$$

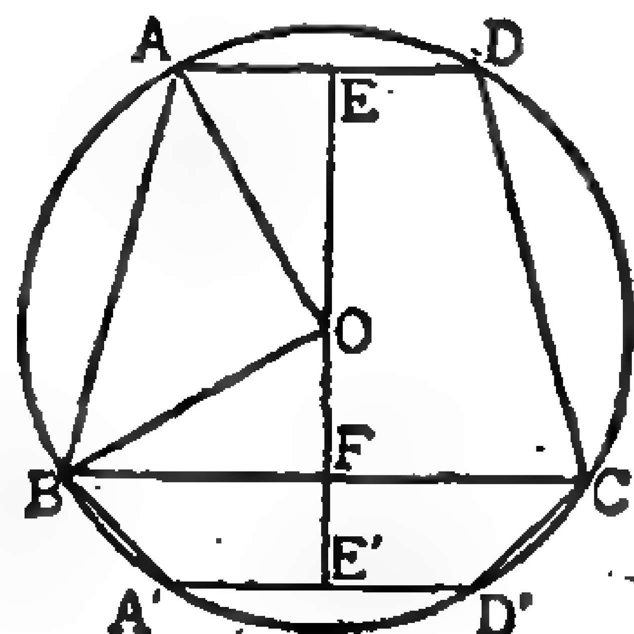
因此 $$EF=2\text{m},\quad AF=4\text{m}.$$

2920. 在半径为 r 的圆 O 中,内接梯形 $ABCD$ 的两平行边 AD、BC 分别等于此圆内接正六边形及正三角形的一边, 求这个梯形的面积。

解 依题意 $BC=\sqrt{3}r$, $AD=r$. 设 AD、BC 的中点分别为 E、F, 则

$$OE=\sqrt{AO^2-AE^2}=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}r^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}r}{2},$$



$$OF=\sqrt{OB^2-BF^2}$$

$$=\sqrt{r^2-\frac{3}{4}r^2}$$

$$=\frac{1}{2}r.$$

$$\therefore\quad EF=\frac{1+\sqrt{3}}{2}r.$$

从而

梯形 $ABCD$ 面积

$$=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot EF$$

$$=\frac{1}{2}(r+\sqrt{3}r)\times\frac{1+\sqrt{3}}{2}r$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2}r^2.$$

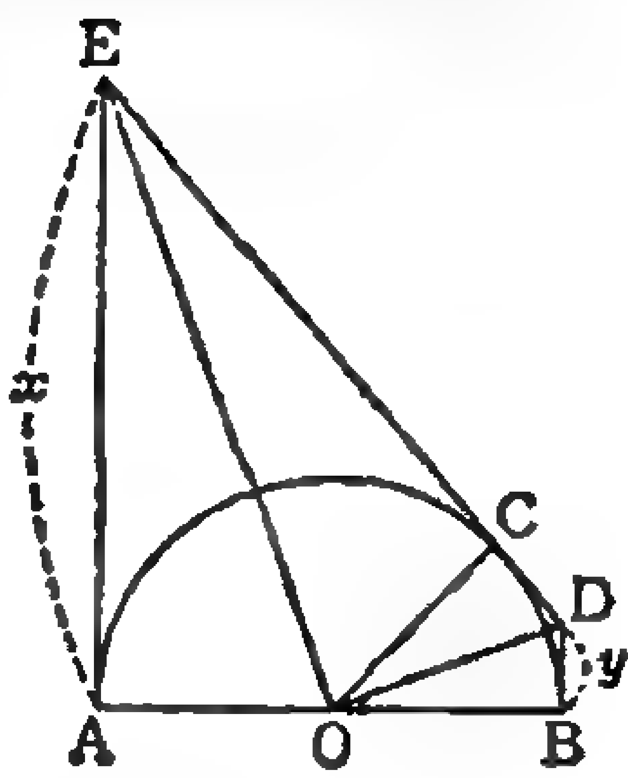
又设 $AD\perp\!\!\!\!\!=A'D'$，则

梯形 $A'BCD'$ 面积

$$=\frac{1}{2}(A'D'+BC)(OE'-OF)$$

$$=\frac{r}{2}(1+\sqrt{3})\cdot\frac{r}{2}(\sqrt{3}-1)=\frac{1}{2}r^2.$$

2921. 已知半圆 ACB 的半径为 7 cm，它的直径 AB 两端点的切线 AE、BD，和圆上一点 C 的切线分别交于 E、D。如果梯形 $ABDE$ 的面积等于半圆面积的两倍，那么 AE、BD 应该多长。取圆周率为 $\frac{22}{7}$，毫米单位四舍五入。



解 设 $AE=x$，$BD=y$，则

$$梯形面积=\frac{14}{2}(x+y)=7(x+y).$$

$$圆的面积=7^2\times\frac{22}{7}=154.$$

依题意，得方程

$$7(x+y)=154,$$

$$\therefore\quad x+y=22. \qquad ①$$

因为 $OC\perp ED$，$\angle EOD=\angle R$，

$$\therefore\quad EC\cdot CD=OC^2,$$

即

$$xy=7^2=49. \qquad ②$$

由①、②知，x、y 为方程

$$t^2-22t+49=0$$

的根，解之，得 $t=11\pm6\sqrt{2}$。

$$\therefore\quad \begin{cases}x=11+6\sqrt{2}\approx19.48,\\ y=11-6\sqrt{2}\approx2.51\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x\approx2.51,\\ y\approx19.48.\end{cases}$$

即 AE 为 19.5 cm，BD 为 2.5 cm。

2922. 已知圆的直径为 10 m，它的内接矩形的面积为 36 m²，求矩形各边的长。计算到米以下三位数。

解 设 $AC=x$，$BC=y$，则

$$xy=36, \qquad ①$$

$$x^2+y^2=10^2=100. \qquad ②$$

②+①×2，得

$$(x+y)^2=172.$$

$$\therefore\quad x+y=2\sqrt{43}. \qquad ③$$

由①、③，知 x、y 是下面方程的根：

$$t^2-2\sqrt{43}t+36=0,$$

$$\therefore\quad t=\sqrt{43}\pm\sqrt{43-36}$$

$$=\sqrt{43}\pm\sqrt{7};$$

$$\sqrt{43}+\sqrt{7}\approx6.5574\cdots+2.6457\cdots$$

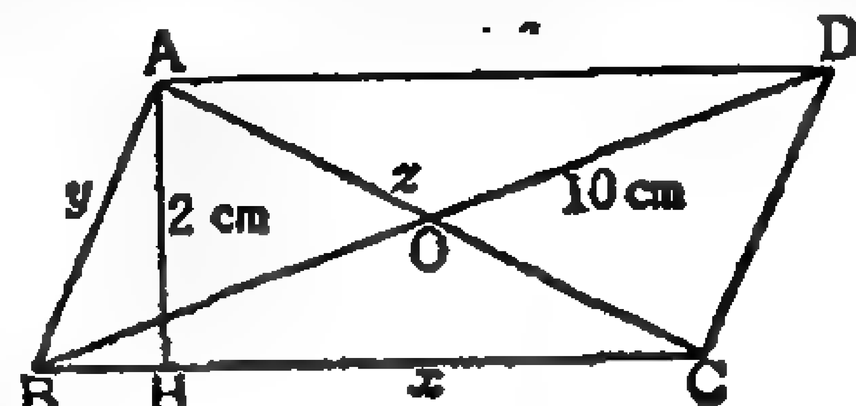
$$\approx9.2031,$$

$$\sqrt{43}-\sqrt{7}\approx6.5574\cdots-2.6457\cdots$$

$$\approx3.9117.$$

即 BC 为 9.203 m，AC 为 3.911 m。

2923. 已知平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 BD 的长为 10 cm，两边 AD、BC 之间的距离为 2 cm，$\angle BAC$ 为直角，求边 BC 的长，精确到两位小数。



解 设 $BC=x$，$AB=y$，$AC=z$。因为

$$\angle BAC=\angle R,$$

所以 $$AB\cdot AC=AH\cdot BC.$$

从而

$$yz=2x. \quad ①$$

又

$$y^2+z^2=x^2. \quad ②$$

由中线的性质，

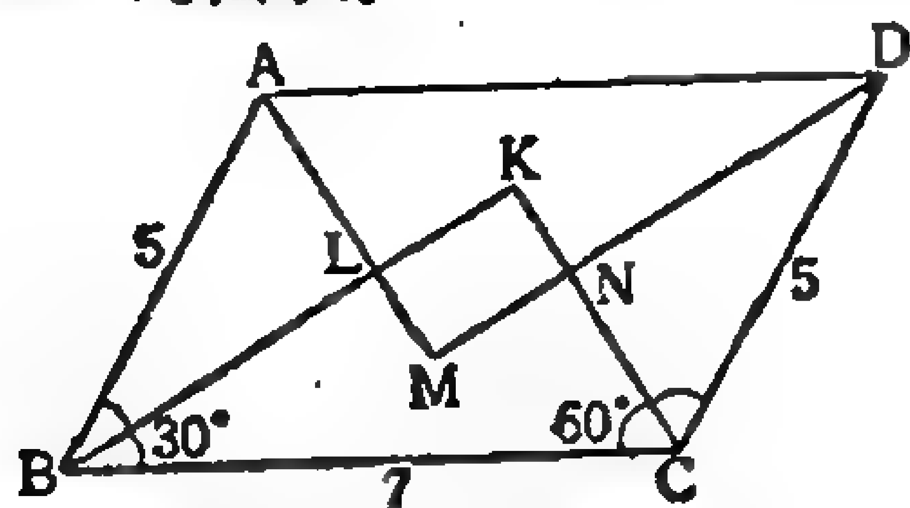
$$AB^2+BC^2=2AO^2+2BO^2$$

(帕普斯定理)，

$$\therefore\ x^2+y^2=2\left[\left(\frac{z}{2}\right)^2+5^2\right]. \quad ③$$

由 ①、②、③ 消去 y、z，可求出 x 为 9.34 cm，或者 5.34 cm。

2924. 已知平行四边形 $ABCD$ 中，相邻两边之长分别为 7 cm 和 5 cm，其夹角为 60°，求它的四个角的平分线所作成的四边形 $KLMN$ 的面积。



解 显然，$KLMN$ 构成矩形。因为

$$\angle ABC=60°,$$

所以 $$\angle KBC=30°.$$

又因 $$\angle K=\angle R,$$

所以 $$KC=\frac{1}{2}BC=\frac{7}{2}.$$

同样，$$\angle NDC=30°,$$

$$\therefore\ NC=\frac{1}{2}CD=\frac{5}{2},$$

$$KN=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=1.$$

其次，$$BK=\sqrt{7^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

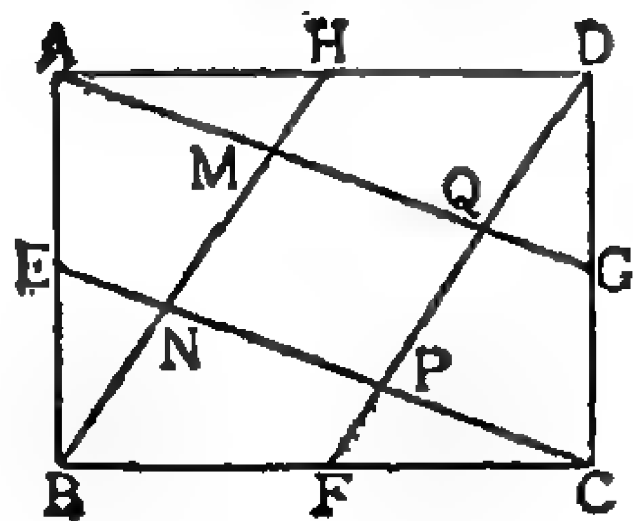
又 $$AL=\frac{5}{2},$$

$$BL=\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

从而 $$KL=\frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},$$

故 $KLMN$ 的面积 $=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\ \text{cm}^2$。

2925. 已知矩形 $ABCD$ 两条边的长分别为 a m、b m，各边 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 E、F、G、H，求由 AG、BH、CE、DF 构成的四边形 $MNPQ$ 的面积。



解 因 $AECG$ 为平行四边形，所以 $AG\parallel CE$。又 E 是 AB 的中点，所以 $MN=NB$。同理，$MN=QD$。又因 $QD\parallel MH$，且 H 是 AD 的中点，所以 $MH=\frac{1}{2}QD$，

$$\therefore\ MH=\frac{1}{2}MN,\quad MN=\frac{2}{5}BH,$$

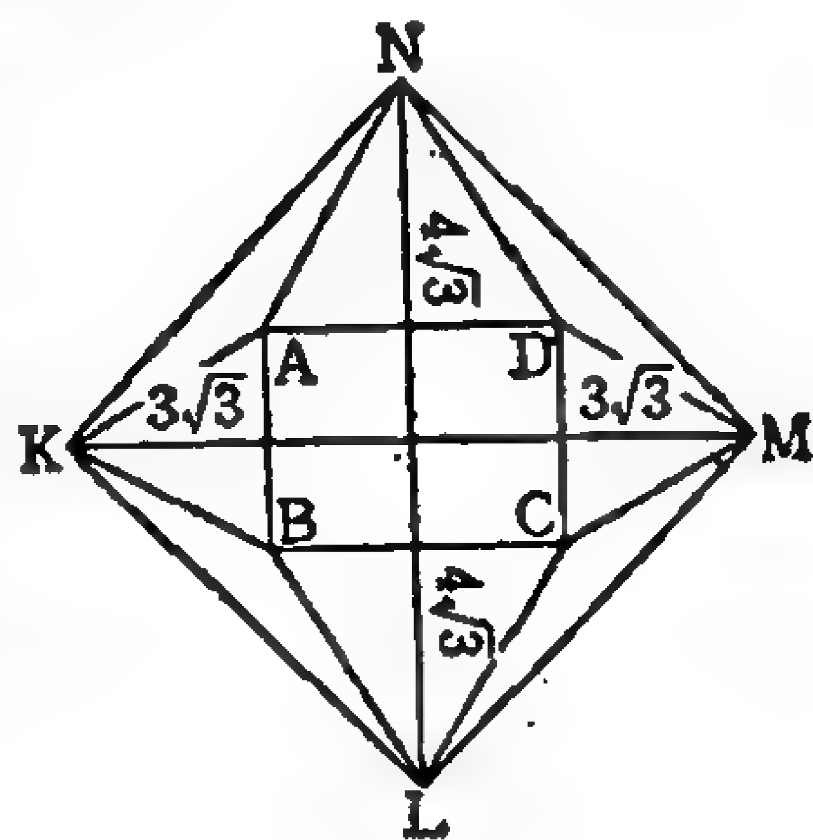
▱$HBFD$ 和 ▱$MNPQ$ 在平行线 BH、FD 上有一对边 $MN=\frac{2}{5}BH$，所以

▱$MNPQ$ 面积

$=\frac{2}{5}$ ▱$HBFD$ 面积

$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}$ ▱$ABCD$ 面积 $=\frac{1}{5}ab\ (\text{m}^2)$.

2926. 以矩形 $ABCD$($AB=6$ cm, $BC=8$ cm) 的各边为一边，向它的外侧作四个正三角形。求顺次连结各三角形的顶点所成四边形 $KLMN$ 的面积 S。



解 由题意知，四边形 $KLMN$ 为菱形。

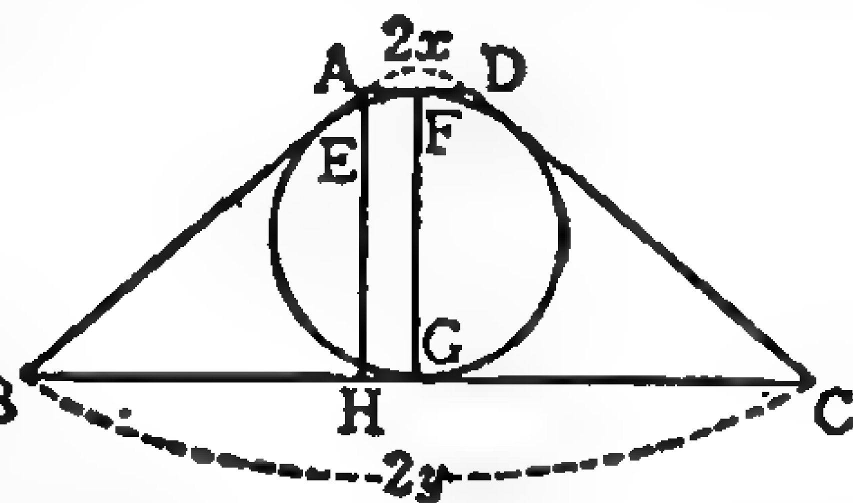
$$KM=6\sqrt{3}+8,\quad LN=8\sqrt{3}+6.$$

因此所求面积 S 为

$$S=\frac{1}{2}(6\sqrt{3}+8)(8\sqrt{3}+6)$$

$$=96+50\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

2927. 已知圆的半径为 r，它的外切等腰梯形 $ABCD$ 的面积，等于以圆的直径为一边的正方形面积的 2 倍。求梯形各边的长。



解 设 $AD\parallel BC$，AB、BC、AD 和圆的切点分别为 E、G、F。又设 $AD=2x$，$BC=2y$，高 $FG=2r$，所以它的面积为

$$\frac{1}{2}(2x+2y)\cdot 2r \quad 即 \quad 2(x+y)\cdot r.$$

根据题意有

$$2(x+y)r=8r^2,$$

即

$$x+y=4r. \quad ①$$

又从 A 向 BC 作垂线 AH，在直角三角形 AHB 中，

$$AB=AE+EB=AF+BG=x+y,$$
$$BH=BG-HG=GB-AF=y-x,$$
$$AH=2r.$$

把以上各式代入 $AH^2+BH^2=AB^2$，得

$$4r^2+(y-x)^2=(x+y)^2. \quad ②$$

由①、②，得

$$y=r(2+\sqrt{3}),\quad x=r(2-\sqrt{3}).$$

所以 $\qquad AD=2r(2-\sqrt{3}),$

$$BC=2r(2+\sqrt{3}),\quad AB=DC=4r.$$

2928. 设四边形的边顺次为 a、b、c、d，对角线为 m，n，面积为 S。证明

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)}\cdot\sqrt{2mn-a^2+b^2-c^2+d^2}.$$

设四边形是圆内接四边形，且

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d),$$

则 $\quad S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$

设四边形外切于圆又内接于一圆，则

$$S=\sqrt{abcd}.$$

解 由问题 982 得

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)}\cdot\sqrt{(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)}.$$

若四边形为圆内接四边形，根据托勒密定理，$mn=ac+bd$，因此把上式根号中的式子变形：

$$[2(ac+bd)+(a^2+c^2)-(b^2+d^2)]\cdot[2(ac+bd)+(b^2+d^2)-(a^2+c^2)]$$
$$=[(a+c)^2-(b-d)^2]\cdot[(b+d)^2-(a-c)^2]$$
$$=(a+c+b-d)(a+c-b+d)\cdot(b+d+a-c)(b+d-a+c)$$
$$=(2p-2d)(2p-2b)\cdot(2p-2c)(2p-2a)$$
$$=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

所以

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$
$$=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \quad ①$$

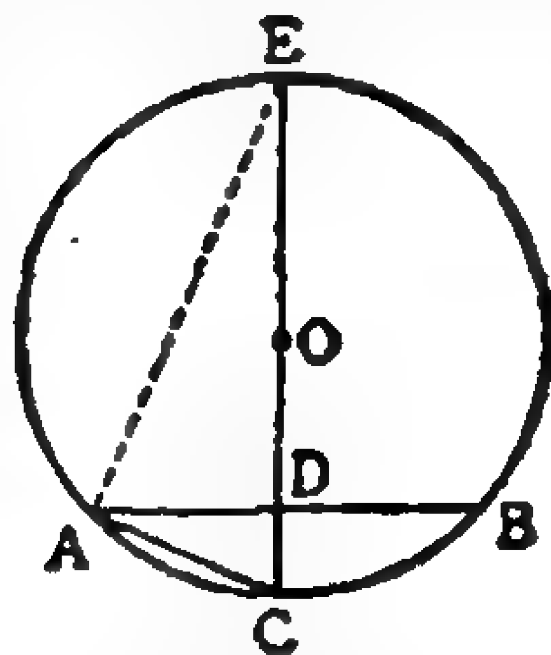
因为这个四边形外切于圆又内接于一圆，由问题 558 知，$a+c=b+d$，从而 $p=a+c=b+d$。所以

$$p-a=c,\quad p-b=d,$$
$$p-c=a,\quad p-d=b.$$

由①得 $\qquad S=\sqrt{abcd}.$

8. 正多边形

2929. 已知圆 O 的半径为 R，它的内接正 n 边形一边的长为 a，试计算在同一圆中的内接正 $2n$ 边形一边 a' 的长。又已知此圆的外切正 n 边形一边的长为 b，求其外切正 $2n$ 边形一边 b' 的长。



解 设 AB 为内接正 n 边形的一边，AC 为内接正 $2n$ 边形的一边 ($AB=a$，$AC=a'$)，CE 为直径，AB 和 CD 的交点为 D。设圆心为 O，则 $AB\perp CE$，于是

$$AD^2=CD\cdot DE,$$
$$\therefore \left(\frac{a}{2}\right)^2=(R-OD)(R+OD)$$
$$=R^2-OD^2.$$
$$OD^2=R^2-\frac{a^2}{4}=\frac{1}{4}(4R^2-a^2),$$

于是 $\qquad OD=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}.$

$$\therefore\ CD=R-OD=\frac{2R-\sqrt{4R^2-a^2}}{2}.$$

因为 $\angle CAE=\angle R$，所以

$$AC^2=CD\cdot CE=\frac{2R-\sqrt{4R^2-a^2}}{2}\cdot 2R$$
$$=2R^2-\sqrt{4R^4-a^2R^2}.$$
$$\therefore\ a'=AC=\sqrt{2R^2-\sqrt{4R^4-a^2R^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2R^2+aR}-\sqrt{2R^2-aR}).$$

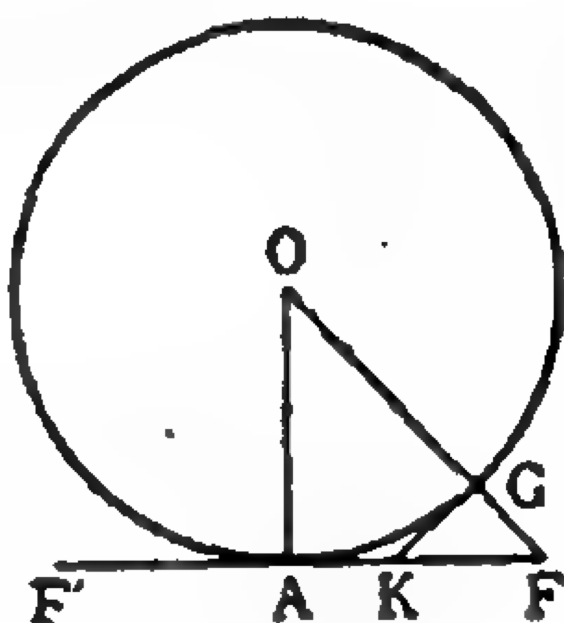
其次，设 FF' 为外切正 n 边形的一边，它和圆切于点 A，线段 FO 和圆周的交点为 G，过点 G 作圆的切线和 AF 的交点为 K，则 GK 为外切正 $2n$ 边形的一边之长的一半。又

$$\angle OAF=\angle KGF=\angle R,$$

所以

$$FO^2=OA^2+AF^2=R^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(4R^2+b^2).$$



$$FO=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2+b^2},$$

$$\therefore\quad GF=FO-OG$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2+b^2}-R.$$

这时，　$\triangle OAF\backsim\triangle KGF$，

于是　$OA:AF=KG:GF$。

$$\therefore\quad R:\frac{b}{2}=\frac{b'}{2}:\left(\frac{1}{2}\sqrt{4R^2+b^2}-R\right),$$

$$\therefore\quad b'=\frac{2R}{b}(\sqrt{4R^2+b^2}-2R)$$

$$=\frac{2bR}{\sqrt{4R^2+b^2}+2R}.$$

2930. 已知半径为 R 的圆内接正 n 边形的一边为 a，求此圆的外切正 n 边形的一边 a' 之长。

解 根据问题 1561 可求出 a' 为

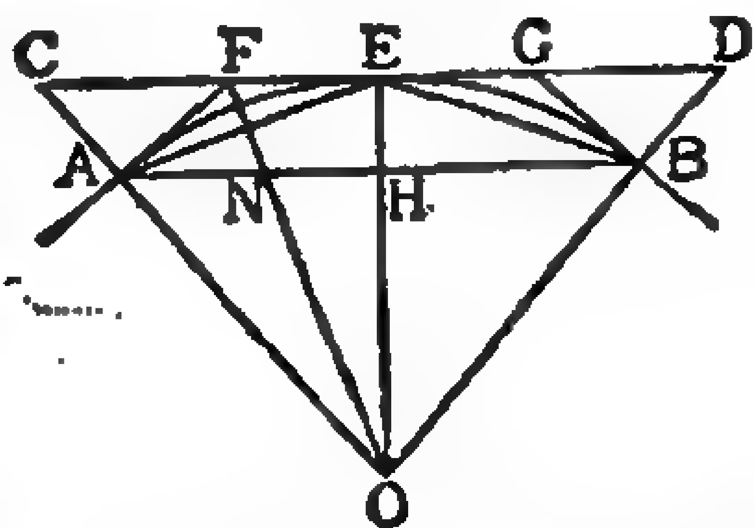
$$\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}.$$

2931. 已知半径为 R 的圆外切正 n 边形的一边之长为 a'，求此圆内接正 n 边形的一边 a 之长。

解 根据问题 1561 可求出 a 为

$$\frac{2a'R}{\sqrt{4R^2+a'^2}}.$$

2932. 已知圆的内接正 n 边形的周长为 p，外切正 n 边形的周长为 P，求同一圆的外切和内接正 $2n$ 边形的周长。



解 在图中，设 AB 为内接正 n 边形的一条边，EA 为内接正 $2n$ 边形的一条边，CD 为外切正 n 边形的一条边，FG 为外切正 $2n$ 边形的一条边，则 $P=n\cdot CD$，$p=n\cdot AB$。所以

$$\frac{P}{p}=\frac{CD}{AB}=\frac{OC}{OA}=\frac{OC}{OE}.$$

因为 OF 平分 $\angle COE$，所以

$$\frac{OC}{OE}=\frac{CF}{FE},\quad\therefore\quad\frac{P}{p}=\frac{CF}{FE}.$$

从而　$$\frac{P+p}{2p}=\frac{CF+FE}{2FE}=\frac{CE}{FG}.$$

由 FG 是周长为 P'（外切正 $2n$ 边形的周长）的正多边形的一边，CE 包含在 P 中，FG 包含在 P' 中，所以

$$\frac{CE}{FG}=\frac{P}{P'},\quad\therefore\quad\frac{P+p}{2p}=\frac{P}{P'}.$$

因此　$$P'=\frac{2pP}{P+p}.$$

因为 $\triangle AEH\backsim\triangle EFN$，所以

$$\frac{AH}{AE}=\frac{EN}{EF}.$$

因为 AH 和 AE 分别在 p 及 p'（内接正 $2n$ 边形的周长）中所占的份数相同，

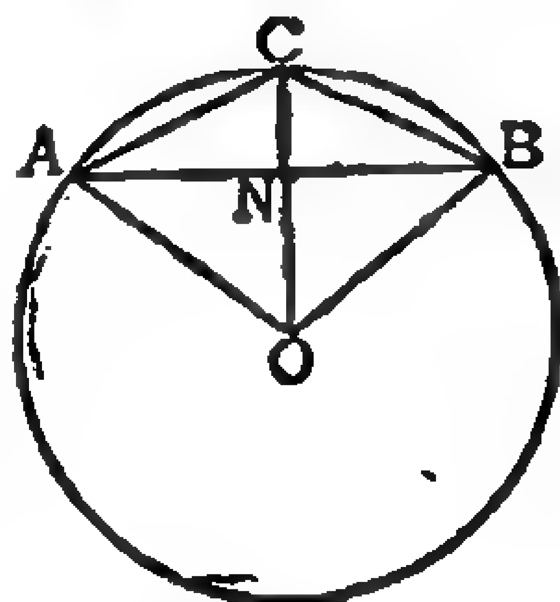
$$\therefore\quad\frac{AH}{AE}=\frac{p}{p'}.$$

又 EN 和 EF 分别在 p' 及 P' 中所占的份数相同，

$$\frac{EN}{EF}=\frac{p'}{P'},\quad\therefore\quad\frac{p}{p'}=\frac{p'}{P'}.$$

因此　$$p'=\sqrt{p\times P'}.$$

2933. 已知半径为 r 的圆内接正 m 边形的一边为 a，求这个圆内接正 $2m$ 边形的面积 S。



解 设 AB 为圆 O 的内接正 m 边形的一边，C 为弧 AB 的中点，则 AC 是此圆内接正 $2m$ 边形的一边。设圆内接正 $2m$ 边形的面积为 S，则

$$S=S_{\triangle OAC}\times 2m.\qquad①$$

由于　$$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{4}AB\cdot OC=\frac{1}{4}a\cdot r,$$

由 ① 知　$$S=\frac{1}{2}amr.$$

设 $2m=n$，则 $S=\frac{1}{4}anr$。

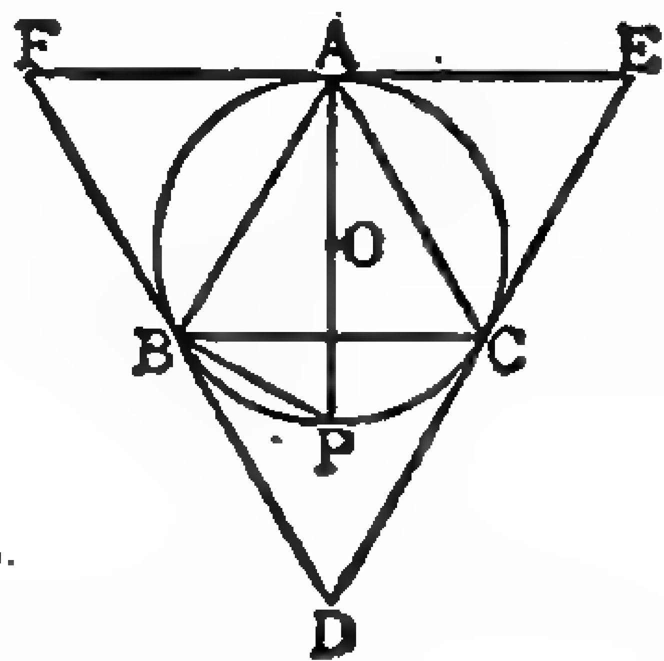
2934. 求半径为 r 的圆的内接、外切正三角形的面积。

解 设 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 分别为圆 O 的内接和外切正三角形。如果 AP 为圆 O 的直径，那么 $AP=2r$，于是

$$BP=r,\quad AB=\sqrt{3}r.$$

$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}r)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2.$

又，因为

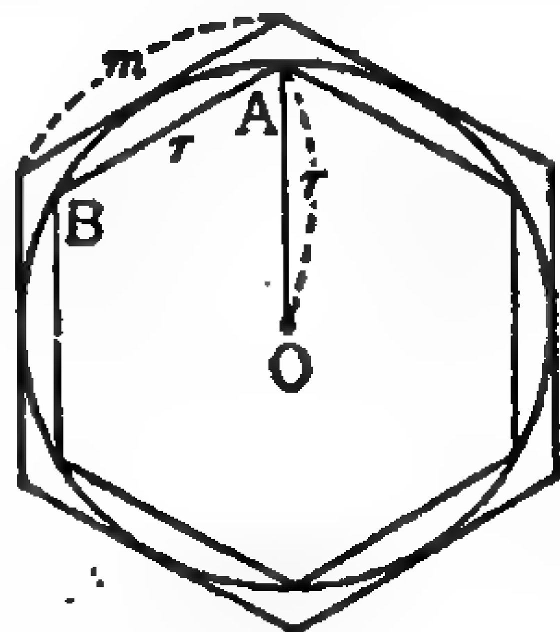


$S_{\triangle DEF}=4S_{\triangle ABC},$

所以

$$S_{\triangle DEF}=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2\times 4=3\sqrt{3}r^2.$$

2935. 圆O的半径为r，求它的内接与外切正六边形的周长及面积。



解　圆内接正六边形的一边等于半径，所以周长是$6r$。若其一边为AB，则正六边形的面积为

$$S_{\triangle AOB}\times 6=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2.$$

设圆外切正六边形的一边为m，则由问题**1561**，得

$$m=\frac{2r^2}{\sqrt{4r^2-r^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}r.$$

所以其周长为$\frac{12}{\sqrt{3}}r$，即$4\sqrt{3}r$。其面积为$2\sqrt{3}r^2$。

2936. 求半径为r的圆内接正12边形的周长与面积。

解　因为内接正六边形的一边的长为r，设内接正12边形的一边为m，根据问题**2929**，得

$$m=\frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{2r^2+r^2}-\sqrt{2r^2-r^2}]=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)r.$$

其周长为

$$\frac{12}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)r=6\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)r.$$

设此正多边形的面积为S，由问题**1564**得

$$S=3r^2.$$

2937. 求半径为r的圆外切正12边形的周长与面积。

解　由上题知，内接正12边形的一边a为

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)r.$$

根据问题**2930**得外切正12边形的一边a'为

$$a'=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)r}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)r}{\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)}r=(\sqrt{3}-1)^2r$$

$$=2(2-\sqrt{3})r.$$

所以其周长为$24(2-\sqrt{3})r$，面积为

$$S=12(2-\sqrt{3})r^2.$$

2938. 圆的半径为r，求它的内接正方形，正八边形，正十六边形，正三十二边形，正六十四边形，……的周长P_n与面积S_n。

解　因圆内接正方形的一边为$\sqrt{2}r$，设此正方形的周长为P_4，面积为S_4，则

$$P_4=4\sqrt{2}r,\quad S_4=2r^2.$$

设正八边形的一边为a_8，由问题**2929**得，

$$a_4=\sqrt{2}r,$$

所以

$$a_8^2=r\cdot(2r-\sqrt{4r^2-2r^2})=(2-\sqrt{2})r^2.$$

因此，$\quad a_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}r,$

$$\therefore\quad P_8=8\sqrt{2-\sqrt{2}}r.$$

又在问题**2934**的公式$S=\frac{1}{4}anr$中，已知

$$a=\sqrt{2}r,\quad n=8.$$

则$\quad S_8=\frac{1}{4}\sqrt{2}r\times 8r=2\sqrt{2}r^2.$

假定正十六边形的一边为a_{16}，和上面一样。

$$a_{16}^2=r[2r-\sqrt{4r^2-(2-\sqrt{2})r^2}]$$

$$=(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})r^2.$$

$$\therefore\quad a_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}r,$$

$$P_{16}=16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}r.$$

于是

$$S_{16}=\frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}r\times 16r=4\sqrt{2-\sqrt{2}}r^2.$$

反复应用这一方法，可以求出正三十二边形，正六十四边形，……的周长与面积。

2939. 圆的半径为r，求它的外切正方形，正八边形，正十六边形，正三十二边形，正六十四边形的周长P_n和面积S_n。

解　设在半径为 r 的圆中，外切正 n 边形的一边为 a_n，周长为 P_n，面积为 S_n，则

$$a_4=2r, \quad ①$$
$$P_4=8r, \quad ②$$
$$S_4=4r^2. \quad ③$$

由问题 **2929**，得

$$a_8=\frac{2a_4r}{\sqrt{4r^2+a_4^2}+2r}=\frac{2\times2r\times r}{\sqrt{4r^2+(2r)^2}+2r}$$
$$=\frac{2r}{\sqrt{2}+1}=\frac{2(\sqrt{2}-1)r}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$=2(\sqrt{2}-1)r.$$
$$\therefore\quad P_8=8a_8=16(\sqrt{2}-1)r,$$
$$S_8=\frac{1}{2}P_8r=8(\sqrt{2}-1)r^2.$$

同理，

$$a_{16}=\frac{2a_8r}{\sqrt{4r^2+a_8^2}+2r}$$
$$=\frac{2\times2(\sqrt{2}-1)r\times r}{\sqrt{4r^2+[2(\sqrt{2}-1)r]^2}+2r}$$
$$=\frac{4(\sqrt{2}-1)r^2}{2\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}r+2r}$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}-1)r}{\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}+1}$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}-1)[\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}-1]r}{1+(\sqrt{2}-1)^2-1}$$
$$=\frac{2[\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}-1]r}{\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}+1)[\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}-1]r}{2-1}$$
$$=2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{4-2\sqrt{2}}-1)r.$$
$$\therefore\quad P_{16}=16a_{16}$$
$$=32(\sqrt{2}+1)(\sqrt{4-2\sqrt{2}}-1)r,$$
$$S_{16}=\frac{1}{2}P_{16}r$$
$$=16(\sqrt{2}+1)(\sqrt{4-2\sqrt{2}}-1)r^2.$$

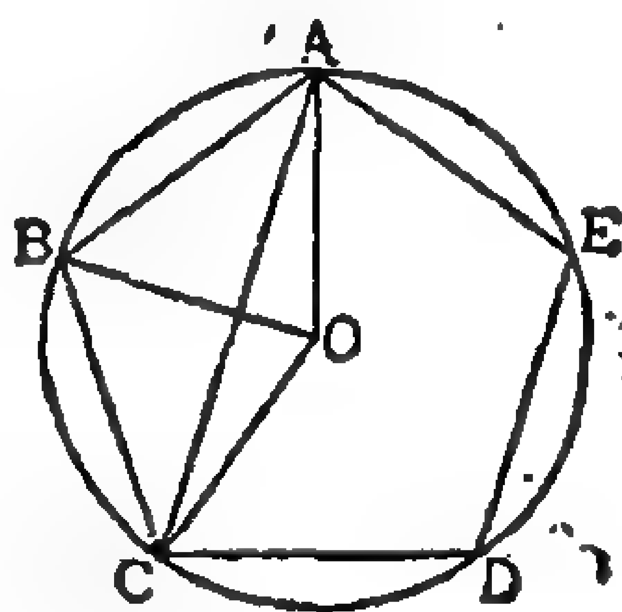
依次反复应用这一方法，可算出正三十二边形，正六十四边形，……的一边之长，周长和面积。

2940.　圆 O 的半径为 r 求它的内接正五边形一边的长和面积。

解　由问题 **2841** 知，正五边形一边的长为

$$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,r.$$

又圆 O 的内接正五边形 $ABCDE$ 的对角线 AC 之长为



$$\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,r.$$

因为 $OB\perp AC$，

所以

$$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}AC\cdot OB=\frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,r^2,$$

故　$ABCDE$ 的面积 $=\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,r^2.$

2941.　求半径为 r 的圆的外切正五边形的周长及面积。

解　由上题知，内接正五边形的一边之长为 $\frac{r}{2}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}$。设外切正五边形一边的长为 a'，则由问题 **2930** 知，当

$$a=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

时，

$$a'=\frac{r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{4r^2-\frac{r^2}{4}\cdot(10-2\sqrt{5})}}$$
$$=\frac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,r}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}=\frac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,r}{\sqrt{5}+1}.$$

因此周长为 $\frac{10\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,r}{\sqrt{5}+1}$，面积为

$$S=\frac{r}{2}\times\frac{10\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}r$$
$$=\frac{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}r^2.$$

2942.　求半径为 r 的圆的内接正十边形，正二十边形，正四十边形，……的周长及面积。

解　设内接正 n 边形的一边为 a_n，周长为 P_n，面积为 S_n，由问题 **2841** 得

$$a_{10}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)r,$$

所以　$$P_{10}=5(\sqrt{5}-1)r,$$

又由问题 **2841**，

$$a_5=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,r,$$

与问题 2933，得

$$S_{10}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,r\times10r$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,r^2.$$

其次，设正二十边形的一边为 a_{20}，由问题 2929 得

$$a_{20}^2=r\cdot[2r-\sqrt{4r^2-a_{10}^2}]$$

$$=r\cdot\left[2r-\sqrt{4r^2-\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})r^2}\right]$$

$$=\left(2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)r^2.$$

$$\therefore\quad a_{20}=\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}\,r,$$

$$P_{20}=20\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}\,r.$$

由 $a_{10}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)r$ 和问题 2933，得

$$S_{20}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)r\times20r$$

$$=\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)r^2.$$

反复应用上述方法，可求出正四十边形，正八十边形，……的周长及面积。

2943. 试述求半径为 r 的圆的外切正十边形，正二十边形，正四十边形，……的周长及面积的方法。

解 由问题 2841 知，内接正十边形的一边为 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)r$，设外切正十边形的一边为 a_{10}，则由问题 2930，得

$$a_{10}=\frac{(\sqrt{5}-1)r^2}{\sqrt{4r^2-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2r^2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{10}-\sqrt{2})r}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}.$$

$$\text{周长 } P_{10}=\frac{10(\sqrt{10}-\sqrt{2})r}{\sqrt{5+\sqrt{5}}},$$

$$\text{面积 } S_{10}=\frac{5(\sqrt{10}-\sqrt{2})r^2}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}.$$

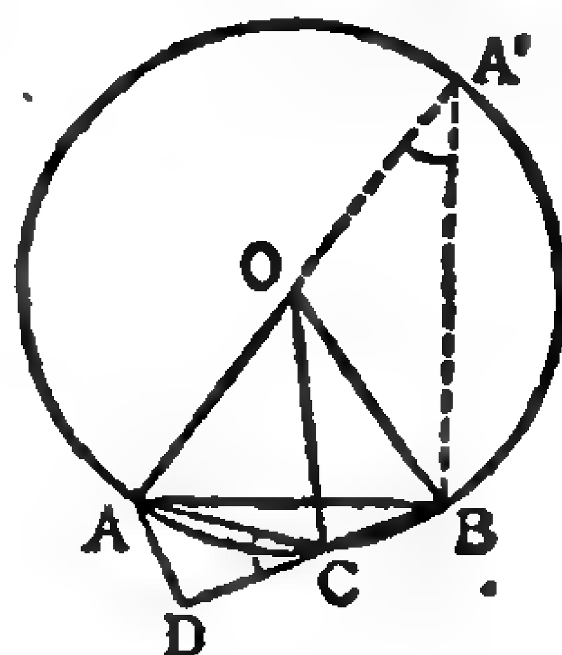
由上题知，内接正二十边形的一边为

$$\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}\,r,$$

用和上面同样的方法，可以计算外切正二十边形一边的长。设外切正二十边形一边的长为 a_{20}，周长为 P_{20}，则 $S_{20}=\frac{r}{2}P_{20}$，所以可直接求出 S_{20}。

关于 P_{40}，P_{80}，…；S_{40}，S_{80}，… 也可以用同样方法求出。

2944. 求半径为 r 的圆的内接正十五边形一边的长。



解 设半径为 r 的圆的圆心为 O，内接正六边形的一边为 AB，内接正十边形的一边为 AC，则

$$\angle BOC=\angle AOB-\angle AOC$$

$$=\frac{360^\circ}{6}-\frac{360^\circ}{10}=\frac{360^\circ}{15},$$

所以 BC 为内接正 15 边形的一边。由 A 向 BC 的延长线引垂线，设其垂足为 D，则

$$\angle ACD=30^\circ,\quad \angle ADC=90^\circ.$$

所以 $AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)r,$

$$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{5}-1)r,$$

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}$$

$$=\sqrt{r^2-\left[\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)r\right]^2}$$

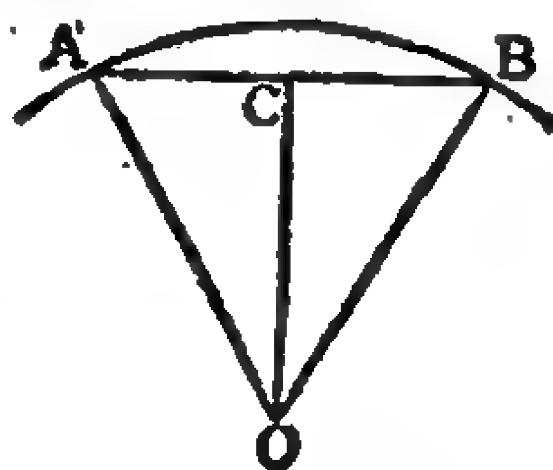
$$=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,r.$$

$$\therefore\quad BC=BD-CD$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,r-\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{5}-1)r$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15})r.$$

2945. 已知半径为 r 的圆 O 的内接正五边形，正六边形，正八边形，正十边形，求圆心 O 到它的一边 AB 的距离 OC。



解 在 $\triangle OAC$ 中，

$$OC=\sqrt{OA^2-AC^2}.$$

所以在正六边形中，$OC=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r$。在正八边形中，

$$OC=\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}r}{2}\right)^2}\text{（问题 2938）}$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}r.$$

在正五边形中，由问题 **2940** 知

$$OC=\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}r\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{4}r.$$

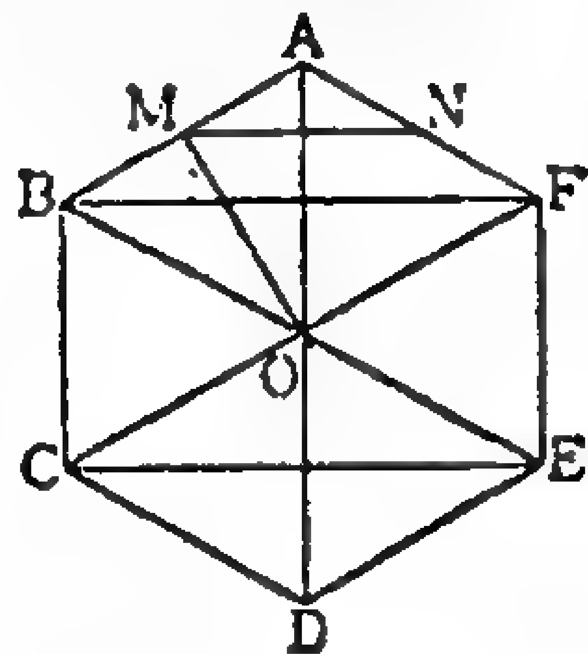
在正十边形中，由问题 **2942** 知

$$OC=\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}r.$$

2946. 正六边形的面积为 36 cm²，求连结它各边中点所成的正六边形的面积。

解 设原正六边形的一边为 a，面积为 S，则



$$S=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

$$\therefore\ 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=36,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=6. \qquad ①$$

设所求正六边形的面积为 S'，一边 MN 为 x，则

$$S'=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2. \qquad ②$$

连结 AB、AF 的中点 M、N，因为 $\triangle AOB$ 是正三角形，$AB=a$，所以

$$OM=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad \text{且}\quad MN=OM,$$

$$\therefore\ x=MN=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

代入 ②，得

$$S'=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4}a^2=\frac{9}{8}\sqrt{3}\,a^2.$$

由 ① 得 $$a^2=\frac{24}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore\ S'=\frac{9\sqrt{3}}{8}\times\frac{24}{\sqrt{3}}=27(\text{cm}^2).$$

2947. 已知正三角形的面积为 20 cm²，它的一边长和正六边形的一边长之比为 5:2，求正六边形的面积。

解 当正三角形的一边是 a 时，其面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=20$。设正六边形的一边为 b，则

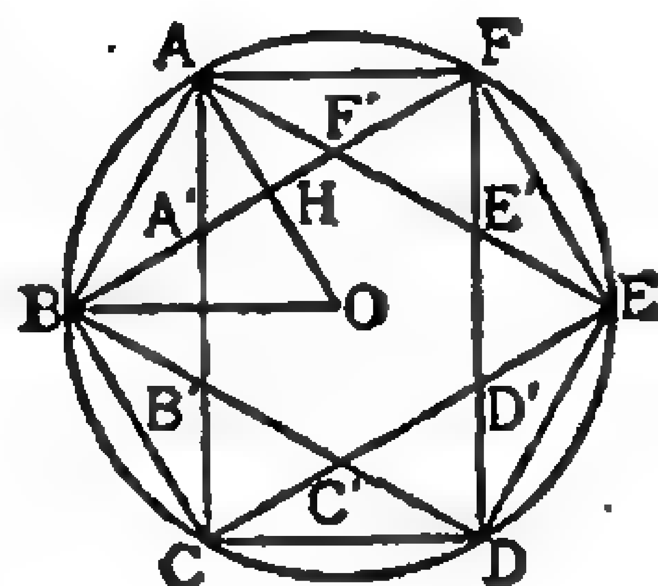
$$a:b=5:2.$$

所以，$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{5}{2}b\right)^2=20,$$

从而 $$\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=20\times\frac{4}{25}=\frac{16}{5}.$$

因此，所求面积是这个值的六倍，即 19.2 (cm²)。

2948. 已知正六边形一边的长等于 a。在这个正六边形的顶点中，每隔一顶点连结一线段，由这六条线段的交点作成第二个正六边形。再在这个正六边形的顶点，每隔一顶点连结一线段，又由这六条线段的交点作成第三个正六边形。如此依次作下去，求原来的正六边形的面积和所有这些正六边形的面积的总和。



解 设正六边形 $ABCDEF$ 的外心为 O，则 OAB 是一边为 a 的正三角形，其面积是 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。设正六边形的面积为 S，则

$$S=S_{\triangle OAB}\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2. \qquad ①$$

在图中，设第二个正六边形为 $A'B'C'D'E'F'$，AO 和 $A'F'$ 的交点为 H，则

$$AH=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}a,$$

$$A'F':AH=2:\sqrt{3},$$

$$\therefore\ A'F'=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot AH=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}a$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}a.$$

设正六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 的面积为 S_1，和 ① 一样，得

$$S_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot(A'F')^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{a^2}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

所以　　$S_1=\frac{1}{3}S$。

同样，设第三、第四个正六边形的面积分别为 S_2、S_3，则

$$S_2=\frac{1}{3}S_1=\frac{1}{3^2}S,$$

$$S_3=\frac{1}{3}S_2=\frac{1}{3^2}S_1=\frac{1}{3^3}S.$$

设所求面积的总和为 P，则

$$\begin{aligned}P&=S+S_1+S_2+S_3+\cdots\\&=S+\frac{1}{3}S+\frac{1}{3^2}S+\frac{1}{3^3}S+\cdots\\&=S\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)\\&=S\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{2}S.\end{aligned}$$

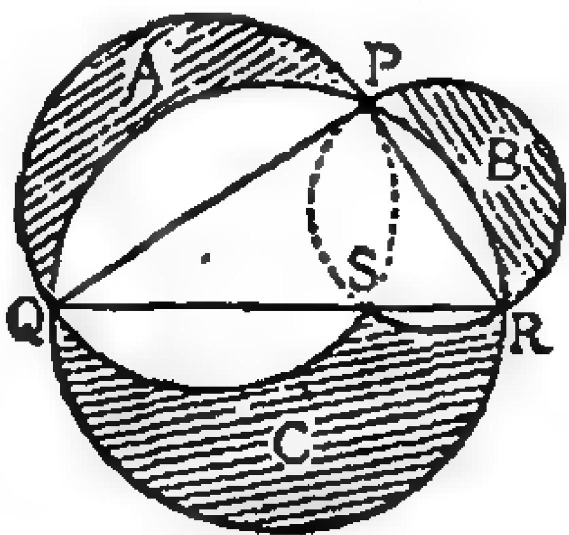
其中 $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$，所以

$$P=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\times\frac{3}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}a^2.$$

9. 扇形、弓形、弧、弦

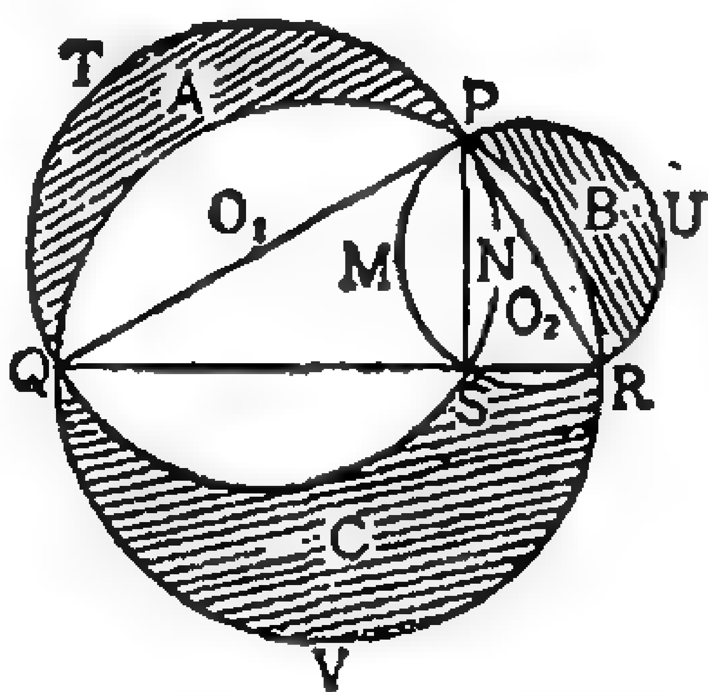
2949. 已知直径为 QR 的圆周上一点 P. 设以线段 PQ、PR 为直径画圆，相交于 P 及 QR 上一点 S，图中斜线部分的面积分别用 A、B、C 表示，求证

$$A+B<C.$$



如果 $QR=2r$，$\angle PQR=30°$，求 $C-A-B$.

解　设 $PS\perp QR$，则以 PQ、PR 为直径的圆 O_1、O_2 都过点 S. 在右图中，



$$\begin{aligned}A+B&=\text{半圆 } PTQ\text{面积}+\text{半圆 } PUR\text{面积}\\&\quad+\triangle PQR\text{面积}-\text{半圆 } QPR\text{面积}\\&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{PQ}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}\left(\frac{PR}{2}\right)^2\\&\quad+S_{\triangle PQR}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{QR}{2}\right)^2\\&=S_{\triangle PQR}+\frac{\pi}{8}(PQ^2+PR^2-QR^2).\quad①\end{aligned}$$

其中 $\angle QPR=90°$，所以

$$PQ^2+PR^2-QR^2=0.$$

由①式得

$$A+B=S_{\triangle PQR}.\quad②$$

又，

$$\begin{aligned}C&=\text{半圆 } QVR\text{ 面积}+\triangle PQR\text{ 面积}\\&\quad+\text{月形 } PMSNP\text{ 面积}\\&\quad-\text{半圆 } PSQ\text{ 面积}-\text{半圆 } PSR\text{ 面积}\\&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{QR}{2}\right)^2+S_{\triangle PQR}\\&\quad+\text{月形 } PMSNP\text{ 面积}\\&\quad-\frac{\pi}{2}\left(\frac{PQ}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{PR}{2}\right)^2\\&=S_{\triangle PQR}+\text{月形 } PMSNP\text{ 面积}\\&\quad-\frac{\pi}{8}(QR^2-PQ^2-PR^2).\end{aligned}$$

$\therefore$　$C=S_{\triangle PQR}+$月形 $PMSNP$ 面积.　③

由②和③，得 $A+B<C$.

其次，设 PQ、PR 的中点分别为 O_1、O_2，$\angle Q=30°$，$QR=2r$，则 $PR=r$，$PQ=\sqrt{3}r$. 又因 $\angle PO_1S=60°$，$\angle PO_2S=120°$. 所以

$$\text{扇形 } O_1PS\text{ 面积}=\frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=\frac{\pi}{8}r^2,$$

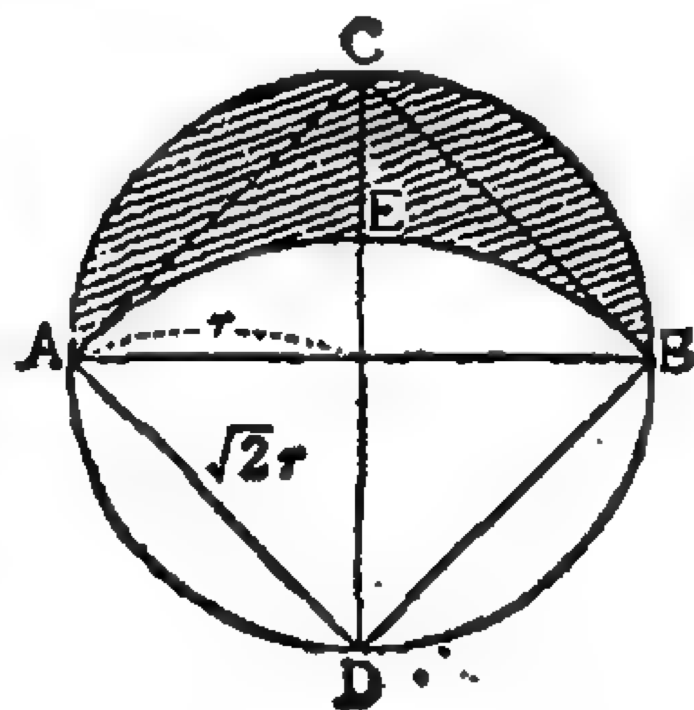
$$\text{扇形 } O_2PS\text{ 面积}=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}r\right)^2=\frac{\pi}{12}r^2,$$

四边形 O_1PO_2S 面积

$$=\frac{1}{2}S_{\triangle PQR}=\frac{1}{4}PQ\cdot PR=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad C-A-B&=\text{月形 } PMSNP\text{ 面积}\\&=\text{扇形 } O_1PS\text{ 面积}+\text{扇形 } O_2PS\text{ 面积}\\&\quad-\text{四边形 } O_1PO_2S\text{ 面积}\\&=\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)r^2.\end{aligned}$$

2950. 已知圆的互相垂直的直径为 AB、CD，以 D 为圆心，AD 为半径的圆和 CD 的交点为 E，证明两圆弧 ACB、AEB 所围成的月形面积等于 $\triangle ABC$ 的面积。



解　设月形 $ACBEA$ 的面积为 S. 则

$S=$半圆 ACB 面积$-$弓形 AEB 面积，①

半圆 ACB 面积$=\frac{\pi}{2}r^2$ (r 为半径)，

弓形 AEB 面积

$=$扇形 DAB 面积$-S_{\triangle DAB}$

$=\frac{1}{4}(\sqrt{2}r)^2\pi-\frac{1}{2}(\sqrt{2}r)^2$

$=\frac{\pi}{2}r^2-r^2.$

将这些值代入①中，则

$$S=\frac{\pi}{2}r^2-\left(\frac{\pi}{2}r^2-r^2\right)=r^2=S_{\triangle ABC}.$$

2951.　已知圆的半径为 10cm，它的内接等腰三角形的顶角为 30°，求平行于底边被腰三等分的弦长。

解　设 $\triangle ABC$ 为圆 O 的内接等腰三角形，$\angle A=30°$，则 $\angle BOC=60°$. 所以 $\triangle OBC$ 是正三角形，其高

$$OH=\frac{\sqrt{3}}{2}OB.$$

$$\therefore\quad OH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 10=5\sqrt{3},\qquad ①$$

又

$$CH=\frac{1}{2}OB=5.\qquad ②$$

设所求弦 KN 和 AB、AC、AH 的交点分别为 L、M、D，则

$$LK=LM=MN,\quad DM=DL,$$

且　$DM\parallel HC$,

所以　$\frac{DM}{HC}=\frac{AD}{AH}.$

设 $DM=x$, $AD=y$，则上式可写成

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{10+5\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad y=(2+\sqrt{3})x.\qquad ③$$

又在 $AD\cdot DA'=KD\cdot DN=DN^2$ 中，$AD=y$, $DA'=20-y$, $DN=3DM=3x$，所以有

$$y(20-y)=9x^2.\qquad ④$$

由③、④，消去 y 得

$$(2+\sqrt{3})x[20-(2+\sqrt{3})x]=9x^2.$$

由此得　$x=\frac{5(2+\sqrt{3})}{4+\sqrt{3}}.$

把分母有理化，

$$x=\frac{5(2+\sqrt{3})\cdot(4-\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})\cdot(4-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{5\cdot(5+2\sqrt{3})}{13},$$

$$\therefore\quad KN=6x=\frac{30(5+2\sqrt{3})}{13}$$

$$\approx 19.53\ (\text{cm}).$$

2952.　已知半径为 7cm 及 5cm 的两圆。它们的圆心距为 3cm，求公共弦的长。

解　设底边为 3cm，另两边之长分别为 7cm、5cm 的三角形，则所求公共弦之长为此三角形的高的 2 倍。先求此三角形的面积。

$$p=(7+5+3)\div 2=7.5,$$

$$S=\sqrt{7.5\times(7.5-7)(7.5-5)(7.5-3)}$$

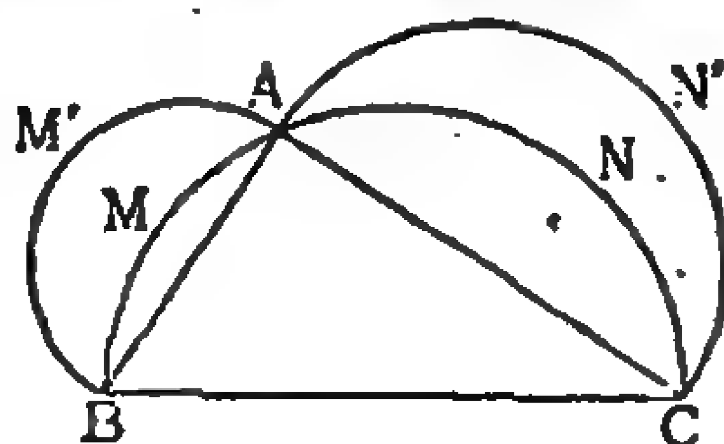
$$=\frac{15}{4}\sqrt{3}.$$

故所求公共弦长为

$$\left(\frac{15}{4}\sqrt{3}\times 2\div 3\right)\times 2=5\sqrt{3}$$

$$\approx 8.7\ (\text{cm}).$$

2953.　在 $\triangle ABC$ 中 A 为直角，设两直角边分别为 a、b. 作其外接半圆。又以 AB、AC 为直径，在三角形的外侧作半圆，试计算两新月形的面积之和。



解　设 $\triangle ABC$ 外接半圆为 $BMANC$，以 AB、AC 为直径的半圆分别为 $AM'B$、$AN'C$，则

新月形 $AMBM'$ 面积

$+$新月形 $ANCN'$ 面积

$=$半圆 $AM'B$ 面积$+$半圆 $AN'C$ 面积

$+\triangle ABC$ 面积$-$半圆 BAC 面积，

即

$$\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{AC}{2}\right)^2+S_{\triangle ABC}$$

$$-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{BC}{2}\right)^2.$$

但是 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以在上式中

$$\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{AC}{2}\right)^2$$

$$-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{BC}{2}\right)^2=0.$$

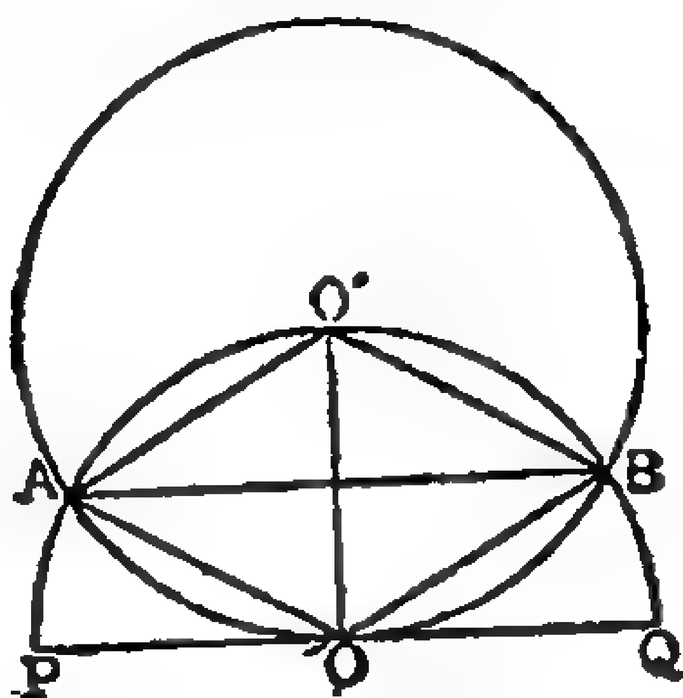
于是

新月形 $AMBM'$ 面积

$+$新月形 $ANCN'$ 面积

$=\triangle ABC$ 面积 $=\frac{1}{2}ab$。

2954. 半径为 6 的圆在半径为 6 的半圆直径上滚动。当半圆和圆的公共部分为最大时，求其公共部分的面积。



解 设半圆的直径为 PQ，圆心为 O，滚动的圆的圆心为 O'。圆 O' 在 PQ 上滚动，其圆心的轨迹是平行于 PQ 的直线。由于圆心距愈小，两圆的公共部分就愈大。所以当 $O'O\perp PQ$ 时，公共部分的面积最大。设此时的公共弦为 AB，则 $\triangle OO'A$ 是正三角形，$\triangle OO'B$ 也是正三角形。所以

$$\angle AOB=120°,\quad \angle AO'B=120°.$$

$$\therefore\ 扇形(O\text{-}AO'B)面积=\frac{1}{3}\cdot(\pi\times 6^2)=12\pi.$$

同样，扇形 $(O'\text{-}AOB)$ 面积 $=12\pi$。

其次，菱形 $AOBO'$ 的面积为

$$\frac{1}{2}AB\cdot OO'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\times 6)\times 6=18\sqrt{3},$$

故所求面积为

扇形 $(O\text{-}AO'B)$ 面积

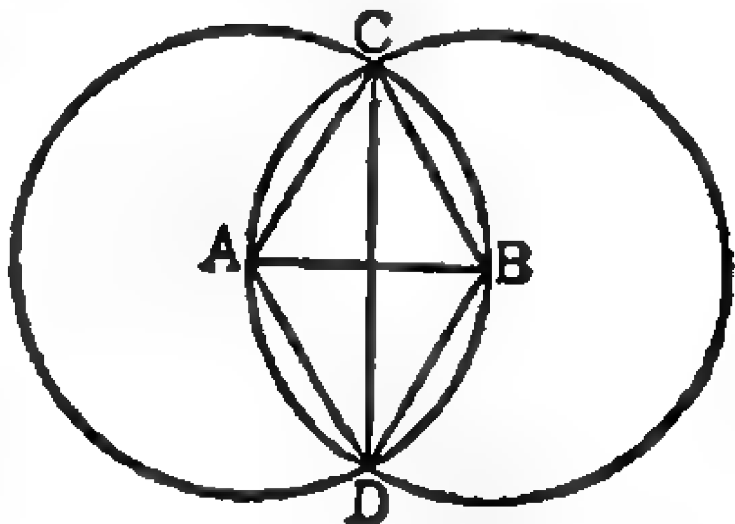
$+$扇形 $(O'\text{-}AOB)$ 面积

$-$菱形 $AOBO'$ 面积

$=12\pi+12\pi-18\sqrt{3}$

$=24\pi-18\sqrt{3}\approx 64.94$。

2955. 已知半径为 25 cm 的两等圆相交，且各圆分别通过另一圆的圆心。求此两圆的公共部分的面积。



解 设两等圆的圆心分别为 A、B，公共弦为 CD，则 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 都是一边为 25 cm 的正三角形。所以

$$\angle CAD=120°,$$

$$S_{\triangle CAD}=S_{\triangle CAB}.$$

于是所求面积

$S=2$ (弓形 CBD 面积)

$=2$ [(扇形 $A\text{-}CBD$ 面积) $-S_{\triangle CAD}$]

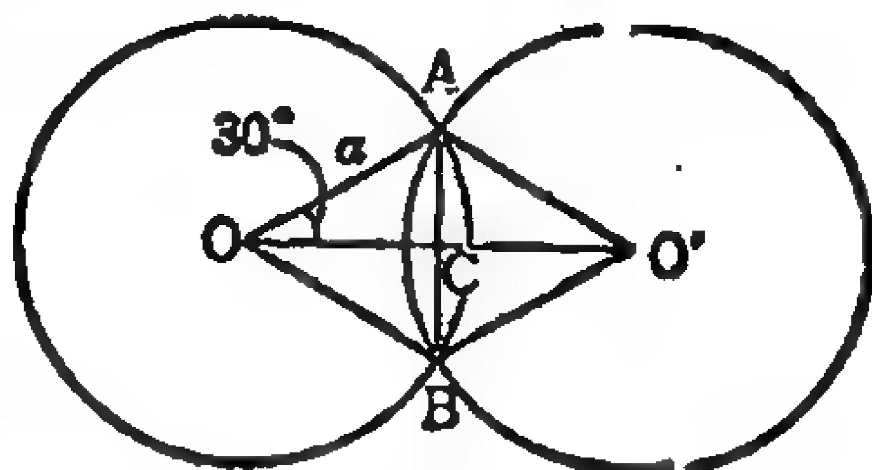
$=2\left(\frac{1}{3}\cdot\pi\times 25^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 25^2\right)$

$=2\times 25^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$=1250\times\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}$

$\approx 1250\times(1.05-0.43)=775\ (\text{cm}^2)$。

2956. 已知两相交圆的半径都是 a，设圆心距为 $\sqrt{3}a$，求两圆公共部分的面积。



解 因 O、O' 都是半径为 a 的圆，所以

$$\triangle OAB\cong\triangle O'AB,$$

扇形 $OAB\cong$ 扇形 $O'AB$，故所求面积

$$S=2(扇形 OAB 面积-S_{\triangle OAB}).\quad ①$$

因为 AB、OO' 是互相平分，

所以　$AC=\frac{1}{2}AB,\ OC=\frac{1}{2}OO'$。

在直角三角形 AOC 中，

$$AO:OC=a:\frac{\sqrt{3}}{2}a=2:\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ \angle AOC=30°,\quad \angle AOB=60°.$$

$$扇形 OAB 面积=\frac{1}{6}\cdot(圆 O)=\frac{1}{6}\pi a^2.$$

因 $\triangle OAB$ 是正三角形，所以

$$S_{\triangle OAB}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

将这些代入 ①，得

$$S=2\left[\frac{1}{6}\pi a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right]=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2.$$

2957. 求半径为 r，圆心角为 $\alpha°$ 的扇形的弧长及其面积。

解 因半径为 r 的圆周长是 $2\pi r$，弧长和圆周长的比等于圆心角和周角之比。所以

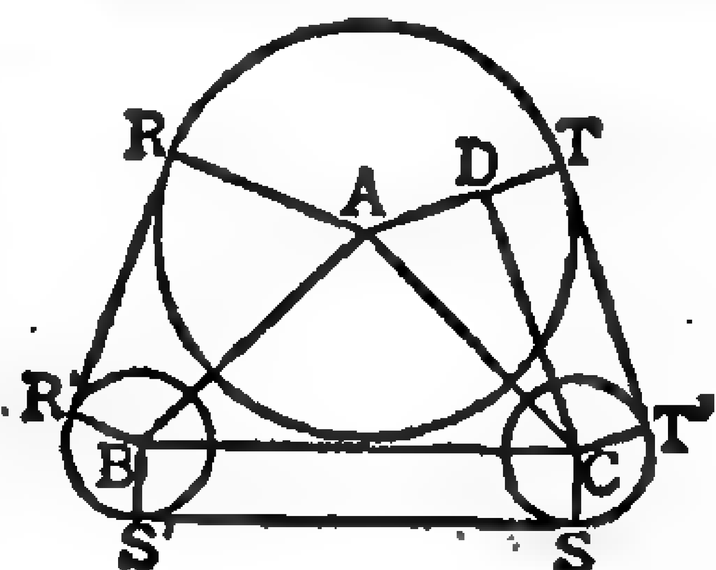
$$弧 AB:2\pi r=\alpha:360,$$

$$弧 AB=\frac{2\pi r\alpha}{360}=\frac{\pi r\alpha}{180}.$$

又圆的面积为 πr^2, 和上面一样, 扇形的面积 S 和圆的面积 πr^2 之比等于圆心角 $\alpha°:360°$. 所以

$$S:\pi r^2=\alpha:360,\quad S=\frac{\pi r^2\alpha}{360}.$$

2958. 设等腰直角三角形 ABC 的直角边长为 120 cm. 以直角顶点 A 为圆心, 半径为 80 cm 画圆, 再以 B、C 为圆心, 分别以半径为 20 cm 画圆, 求由三条公切线和与切线相连的圆弧所围成的图形的周长及面积.



解 因 $AC=120$, $AD=80-20=60$, 所以

$$\angle DAC=60°,\quad \angle RAB=60°,$$
$$\angle BAC=90°.$$
$$\therefore\ \angle RAT\ (劣角)=150°,$$

又因 $\angle ACD=30°$, $\angle ACB=45°$,

可知 $\angle SCT'=105°$, 可按照上题求劣弧 RT、ST'、$R'S'$ 的长. 其次求出 BC、DC, 就可以计算 RR'、SS'、TT'.

$$\widehat{RT}=\frac{150}{360}\times160\pi=\frac{200}{3}\pi,$$
$$\widehat{ST'}=\frac{105}{360}\times40\pi=\frac{35}{3}\pi,$$
$$\widehat{R'S'}=\widehat{ST'}=\frac{35}{3}\pi,$$
$$TT'=\frac{\sqrt{3}}{2}\times120=60\sqrt{3},$$
$$RR'=60\sqrt{3},$$
$$SS'=BC=120\sqrt{2}.$$

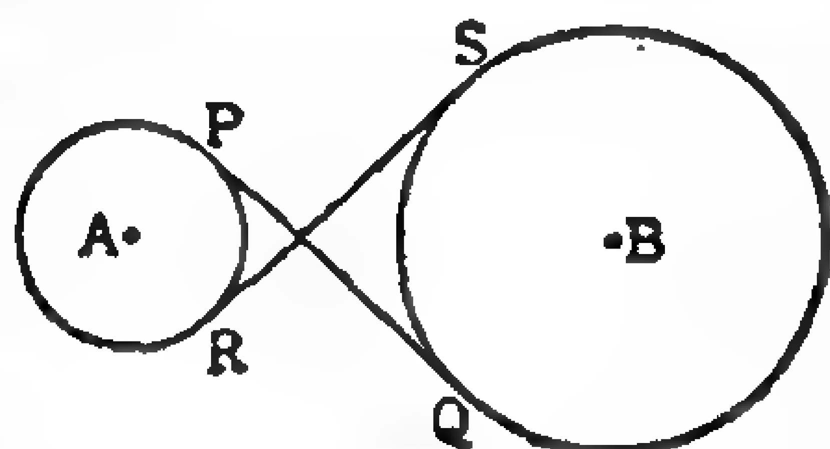
$$\therefore\ 周长=\frac{200}{3}\pi+\frac{35}{3}\pi\times2+60\sqrt{3}\times2+120\sqrt{2}=90\pi+120(\sqrt{3}+\sqrt{2})\ (\text{cm}).$$

先求各部分面积:

$$扇形\ ART\ 面积=\frac{150}{360}\times80^2\pi=\frac{8000}{3}\pi,$$
$$扇形\ CST'\ 面积=\frac{105}{360}\times20^2\pi=\frac{350}{3}\pi$$
$$=扇形\ BR'S'\ 面积,$$
$$\triangle ABC\ 面积=120^2\div2=7200,$$
$$矩形\ BS'SC\ 面积=120\sqrt{2}\times20=2400\sqrt{2},$$
$$梯形\ ATT'C\ 面积=\frac{(20+80)\times60\sqrt{3}}{2}=3000\sqrt{3},$$
$$梯形\ ABR'R\ 面积=3000\sqrt{3},$$

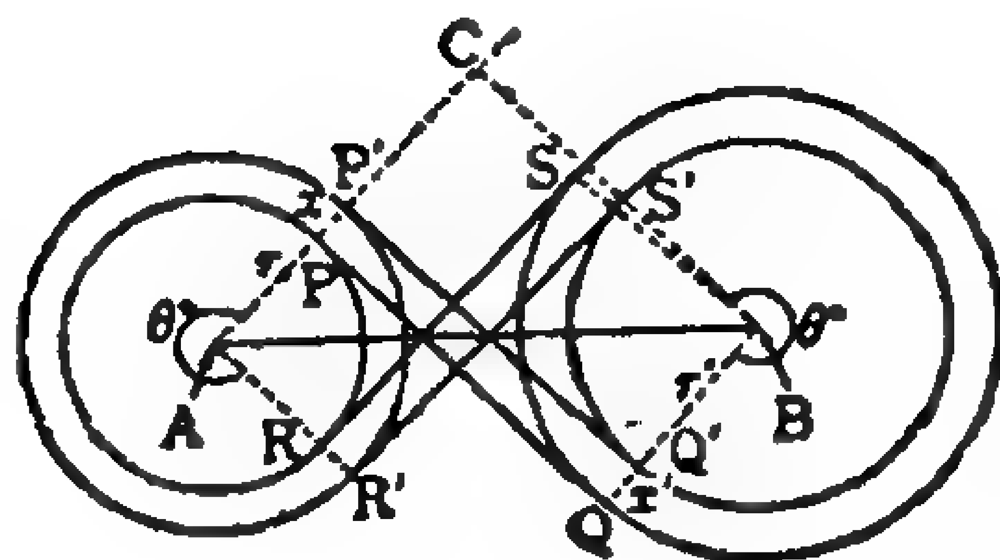
$$\therefore\ 面积=\frac{8000}{3}\pi+\frac{350}{3}\pi\times2+7200+2400\sqrt{2}+3000\sqrt{3}\times2=2900\pi+1200(5\sqrt{3}+2\sqrt{2})\ (\text{cm}^2).$$

2959. 如图. A、B 两滑轮有皮带系连. 问怎样调整两滑轮的半径, 使该皮带仍能恰好系连它们, 并述其理由.



解 设滑轮 A、B 的半径分别为 r、r', 在 A 滑轮的半径为 $r+x$, B 滑轮的半径为 $r'-x$ 时, 皮带的位置如图 $P'Q'S'R'P'$, PQ、RS、$P'Q'$、$R'S'$ 是内公切线. 由 B 作 AP 的垂线, 垂足为 C, 则

$$PC=QB=r'.$$
$$\therefore\ \cos\angle BAP=\frac{r+r'}{AB}.$$



同样

$$\cos\angle BAP'=\frac{(r+x)+(r'-x)}{AB}=\frac{r+r'}{AB}.$$

所以 $\angle BAP=\angle BAP'$, 从而 A、P、P' 在一直线上.

同样, A、R、R', B、Q、Q', B、S、S' 分别在一直线上. 因此

$$PQ=P'Q',\quad RS=R'S'.$$

又设 优角 PAR=优角 $QBS=\theta°$ 时, 则

$$优弧\ PR=2\pi r\times\frac{\theta}{360},$$

优弧 $P'R'=2\pi(r+x)\times\frac{\theta}{360}$,

优弧 $QS=2\pi r'\times\frac{\theta}{360}$,

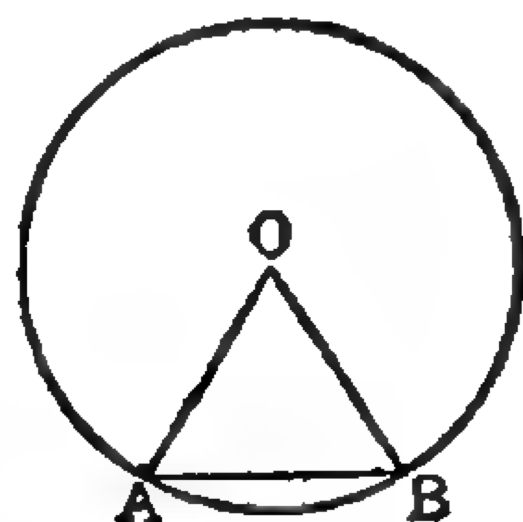
优弧 $Q'S'=2\pi(r'-x)\times\frac{\theta}{360}$,

∴ 优弧 PR+优弧 QS

=优弧 $P'R'$+优弧 $Q'S'$.

两边分别加上 $PQ+RS=P'Q'+R'S'$ 时，显然皮带长相等，因此皮带长仍旧是原长。

2960. 已知一直径为 4m 的圆被长为 2m 的弦分成两部分，求这两部分的面积。



解 因半径

$OA=OB=2$,

$AB=2$,

所以 $\triangle OAB$ 是正三角形，由问题 **2957** 知，扇形 OAB 的面积为

$$\frac{60}{360}\times 2^2\pi=\frac{2}{3}\pi,$$

$$\triangle OAB\text{面积}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}.$$

所以小弓形的面积为

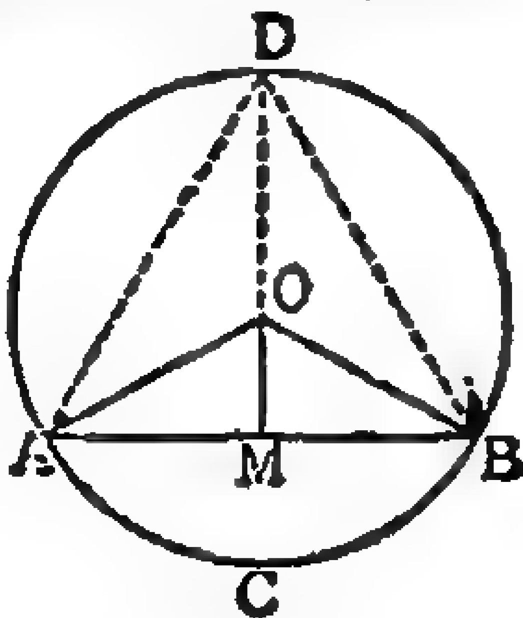
$$\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\approx 0.362\ (\text{m}^2),$$

大弓形的面积为

$$\pi\cdot 2^2-\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{10}{3}\pi+\sqrt{3}\approx 12.204\ (\text{m}^2).$$

2961. 半径为 r 的圆内接正三角形的一边把圆分成两部分，求这两部分的面积。



解 在圆 O 中，设 AB 为内接正三角形的一边，则圆心角 AOB 是 120°，所以

$$\text{扇形}(O\text{-}ACB)\text{面积}=\frac{120}{360}\cdot\pi r^2=\frac{\pi}{3}r^2.$$

设 AB 的中点为 M，则 $\angle A=30°$,

$$\therefore\quad OM=\frac{1}{2}OA,\quad AM=\frac{\sqrt{3}}{2}OA.$$

从而

$$S_{\triangle AOB}=OM\cdot AM$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}OA^2=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2,$$

∴ 弓形 ACB 面积

$$=\frac{\pi}{3}r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$$

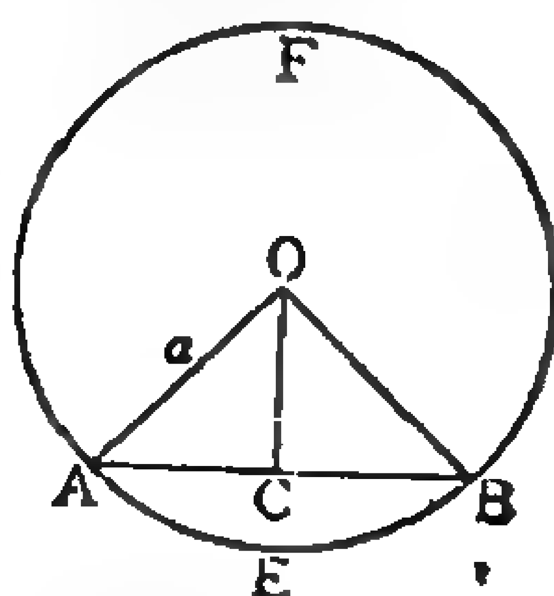
$$=\frac{r^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3}),$$

弓形 ADB 面积

$$=\pi r^2-\frac{r^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3})$$

$$=\frac{r^2}{12}(8\pi+3\sqrt{3}).$$

2962. 已知圆 O 的半径是 a，圆心和一弦 AB 的距离是 $\frac{a}{\sqrt{2}}$，求这个圆被弦 AB 分成的两个弓形的面积。



解 由 O 向 AB 作垂线 OC，则 $OC=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $OA=a$。所以 $\angle AOC=45°$。因而

$$\angle AOB=\angle R,$$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}a^2,$$

$$\text{扇形}OAEB\text{面积}=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

∴ 弓形 AEB 面积

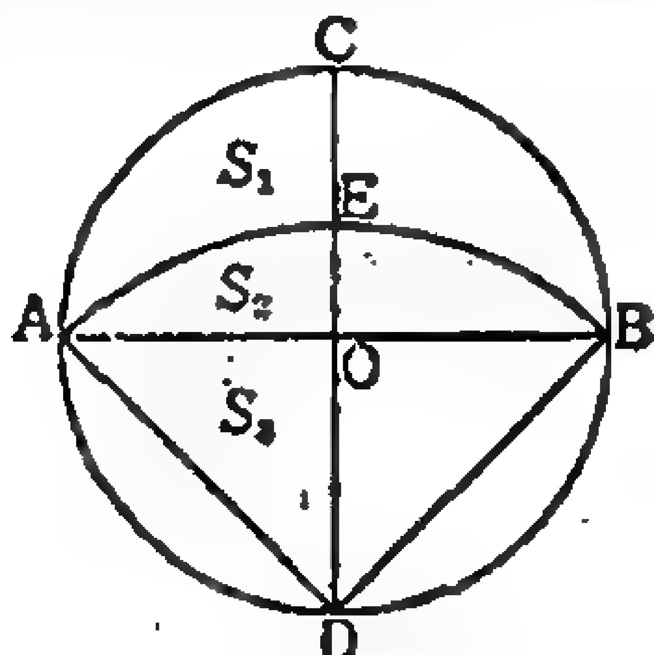
=扇形 $OAEB$ 面积−$\triangle OAB$ 面积

$$=\frac{1}{4}\pi a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}(\pi-2),$$

弓形 $AFBC$ 面积

$$=\pi a^2-\frac{a^2}{4}(\pi-2)=\frac{a^2}{4}(3\pi+2).$$

2963. 设 AB、CD 为圆 O 的互相垂直的直径，以 D 为圆心，DA 为半径的圆弧和 OC 的交点为 E，证明两圆弧 AEB、ACB 所围成的面积等于 $\triangle ABD$ 的面积。



解 设

$ACBEA$ 的面积 $=S_1$,

$AEBA$ 的面积 $=S_2$,

$\triangle ABD$ 的面积 $=S_3$.

因为 S_1+S_2 是半圆，设圆的半径为 r，则

$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\pi r^2.\qquad ①$$

又因 S_2+S_3 是以 D 为圆心、AD 为半径的扇形，且圆心角 ADB 为直角，所以它是以 AD 为半径的圆的 $\frac{1}{4}$，即

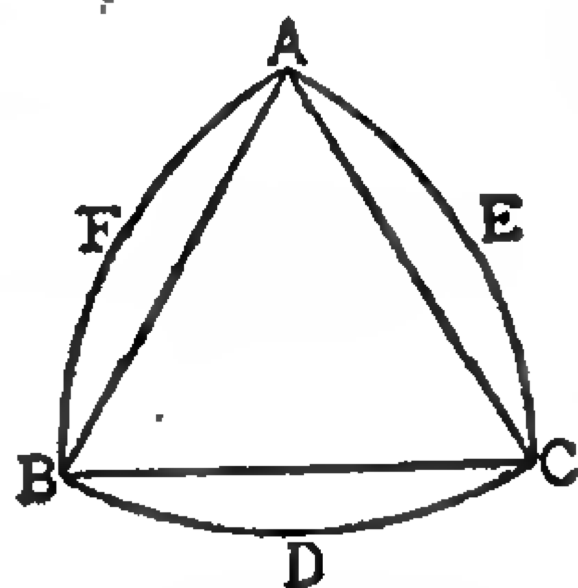
$$S_2+S_3=\frac{1}{4}\pi\cdot AD^2.$$

但是 $AD^2=2r^2$，所以

$$S_2+S_3=\frac{1}{2}\pi r^2. \qquad ②$$

由①，②两式得 $S_1=S_3$。

2964. 在边长为 a 的正三角形 ABC 上，以各顶点为圆心，a 为半径画三个圆，求三个圆的公共部分的面积。



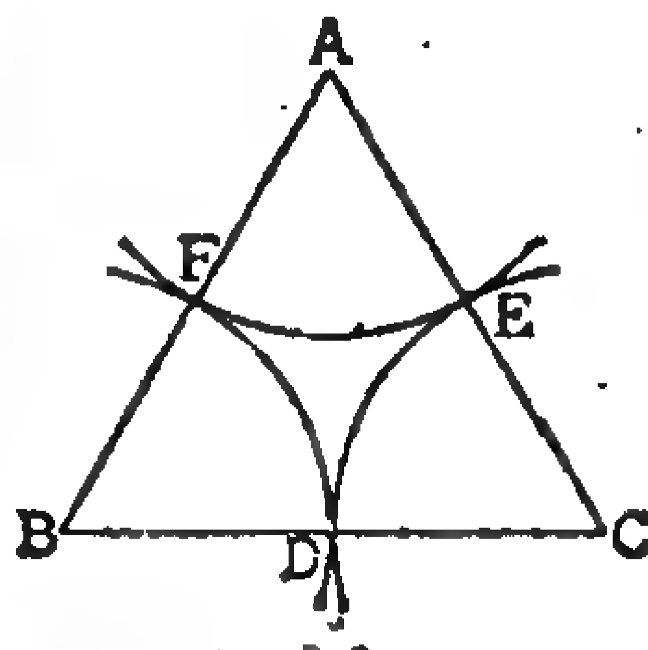
解 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S_1，三个扇形的面积都为 S_2。因为扇形 $ABDC$ 的半径为 a，其面积是圆面积的 $\frac{1}{6}$，所以

$$S_2=\frac{\pi}{6}a^2.$$

又因为正三角形 ABC 的一边为 a，所以 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。故所求的面积

$$\begin{aligned}S&=\text{扇形 }ABDC\text{ 的面积}\times 3-2\triangle ABC\text{ 的面积}\\&=3\times\frac{\pi\cdot a^2}{6}-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\\&=\frac{a^2}{2}(\pi-\sqrt{3}).\end{aligned}$$

2965. 若三个等圆 A、B、C（半径都是 r）在点 D、E、F 互相外切，求这三个圆弧所围成的图形 DEF 的面积。



解 因

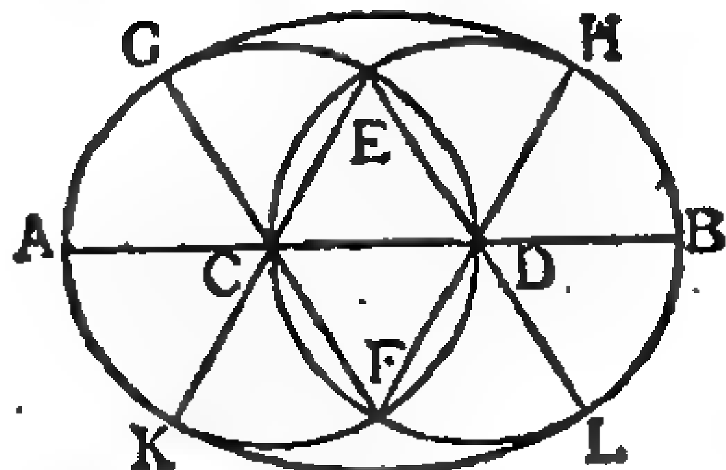
$$\begin{aligned}&\text{扇形 }AEF\text{ 面积}\\&=\text{扇形 }BDF\text{ 面积}\\&=\text{扇形 }CDE\text{ 面积}\\&=\frac{1}{6}\pi r^2,\end{aligned}$$

又 $\qquad S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\sqrt{3}\,r^2,$

故所求的面积

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{3}\,r^2-\frac{1}{6}\pi r^2\times 3\\&=\frac{r^2}{2}(2\sqrt{3}-\pi).\end{aligned}$$

2966. 已知 C、D 三等分长为 a 的线段 AB，设以 C、D 为圆心，CD 为半径画两个等圆 C、D，再以其交点 E、F 为圆心，各圆的直径为半径画弧。求类似于椭圆的面积。



解 因为 $\angle CED=60°$，$\angle GCK=120°$，

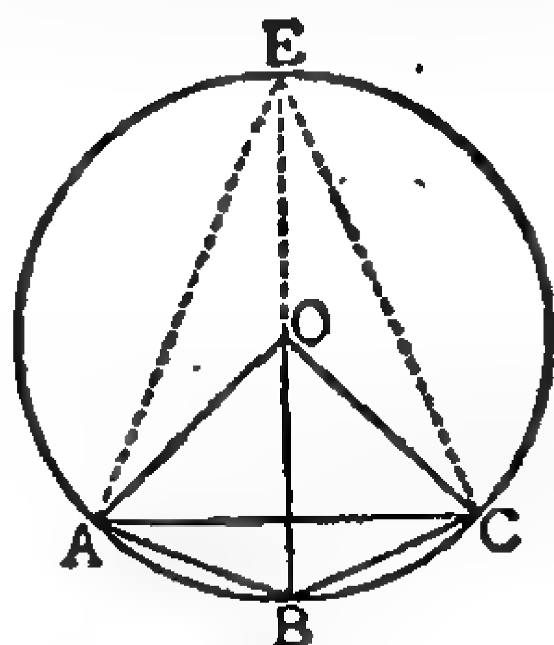
$$\begin{aligned}&\text{扇形 }EKL\text{ 面积}\\&=\text{扇形 }FGH\text{ 面积}=\frac{2}{27}\pi a^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{扇形 }CKG\text{ 面积}\\&=\text{扇形 }DHL\text{ 面积}=\frac{1}{27}\pi a^2,\end{aligned}$$

又 $\qquad$ 四边形 $ECFD$ 面积 $=\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad S&=2\left(\frac{2}{27}\pi a^2+\frac{1}{27}\pi a^2\right)-\frac{\sqrt{3}}{18}a^2\\&=\frac{a^2}{18}(4\pi-\sqrt{3}).\end{aligned}$$

2967. 已知 ABC 是弦 AC 上的弓形。弦 AC 长 20 cm，弓形角 $\angle ABC=135°$，求弓形 ABC 的面积。



解 因为

$$\begin{aligned}&\angle ABC=135°,\\\therefore\quad&\angle AEC\\&=180°-135°\\&=45°,\\&\angle AOC=90°,\end{aligned}$$

因此扇形 $OABC$ 的面积是圆面积的四分之一，即 $\frac{1}{4}\pi r^2$。

在 $\triangle OAC$ 中，$\angle O=\angle R$，所以它的面积为

$$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}AO\cdot OC=\frac{1}{2}r^2;$$

而 $\qquad AC=20$。 于是 $\quad r=\sqrt{200}$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad&\text{弓形 }ABC\text{ 面积}\\&=\frac{1}{4}\pi r^2-\frac{1}{2}r^2=\frac{r^2}{4}(\pi-2)\\&=50(\pi-2)\ (\text{cm}^2).\end{aligned}$$

2968. 在边长为 a cm 的正方形中，以各边为直径在其内画四个半圆，求每两个圆重合部分的面积。

解　设以正方形 $ABCD$ 的各边为直径，则在正方形内所作的半圆都过同一点。因为四个半圆的和是正方形的一边为直径的圆的两倍，所以四个叶形的面积之和（所求的面积）为

$$2\left(\frac{1}{2}a\right)^2\pi-a^2=\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)a^2.$$

2969. 在半径为 R 的圆中作内接正方形，然后在此正方形中作内切圆，再在内切圆中作内接正方形，如此无限地继续作下去，求这些圆的面积的和。

解　设圆的圆心为 O，此圆内接正方形为 $ABCD$。再设此正方形的内切圆的切点为 A'、B'、C'、D'，则第二个圆的内接正方形为 $A'B'C'D'$。以下按同样方法作下去。因 $OA=R$，设 $AB=x$，则 $x=\sqrt{2}R$。因为 x 是第二个圆的直径，所以它的半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}R$。

同样，第三个圆的半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}R\times\frac{1}{\sqrt{2}}$。

所以各圆的面积依次为

$$\pi R^2,\quad \frac{\pi R^2}{2},\quad \frac{\pi R^2}{4},\quad \cdots.$$

设各圆面积的总和为 S，则

$$S=\pi R^2+\frac{\pi R^2}{2}+\frac{\pi R^2}{4}+\cdots.$$

此式的右边是公比为 $\frac{1}{2}$ 的无穷等比级数，所以

$$S=\frac{\pi R^2}{1-\frac{1}{2}}=2\pi R^2.$$

10. 直径、半径

2970. 从距圆心 O 为 10 cm 的一点 A，作圆 O 的割线 ABC，已知 $AB\cdot AC=64$ (cm²)，求此圆的半径。

解　从 A 作切线 AT，则

$$TA^2=AB\cdot AC=64,$$

而且 $\triangle OTA$ 是直角三角形。

$$AO=10,$$

$$AT^2=64,\quad 设\ OT=x,$$

由 $$AO^2=OT^2+AT^2,$$

得 $$100=x^2+64,$$

即 $$x^2=36,$$

$$\therefore\ x=6\ (\text{cm}).$$

2971. 已知从圆心 O 到点 P 的距离为 3 cm，过点 P 的弦 AB，使 $AP\cdot PB=36$ (cm²)。求此圆的半径。

解　作过点 P 的直径 EF，设半径为 x，则

$$PE=x-3,$$

$$PF=x+3,$$

而且 $$PE\cdot PF=PA\cdot PB.$$

所以 $$(x-3)(x+3)=36,$$

$$x^2-9=36,$$

$$x=\sqrt{45}=3\sqrt{5}\approx 6.708\ (\text{cm}).$$

2972. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB\ (=a)$，$AC\ (=b)$，$\angle A(=60°)$。求外接圆的半径。

解　设 $CD\perp AB$，则

$$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}b,$$

$$AD=\frac{1}{2}b,$$

$$BD=a-\frac{1}{2}b.$$

$$\therefore\ BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{a^2-ab+b^2}.$$

又因 $AC\cdot BC=2R\cdot CD$（问题 **1318**），

$$\therefore\ R=\sqrt{\frac{a^2-ab+b^2}{3}}.$$

2973. 求边长为 a 的正八边形 $ABCD\cdots$ 的内切圆及外接圆的半径 r、R。

解　设正八边形 $ABCD\cdots$ 的一边为 a，内切圆及外接圆半径分别为 r 及 R，则 a 是半径为 r 的圆的外切正八边形的一边，由问题 **2939** 得

$$a=2(\sqrt{2}-1)r,$$

$$\therefore \quad r=\frac{a}{2(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}a$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{2}a.$$

又 a 是半径为 R 的圆的内接正八边形的一边，由问题 **2938** 得

$$a=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,R.$$

$$\therefore \quad R=\frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}}a$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}a.$$

2974. 已知三角形三边之长分别为 a、b、c，求其外接圆半径及内切圆半径。

解 设 $BC\,(=a)$ 边上的高为 AH，$\triangle ABC$ 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}a\cdot AH=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$。所以

$$AH=\frac{2}{a}\times\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

设外接圆的直径为 $AD(=2R)$，则

$$\triangle ABD \backsim \triangle AHC,$$

$$\therefore \quad AB\cdot AC=AH\cdot AD,$$

从而

$$bc=AD\times\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$AD=\frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

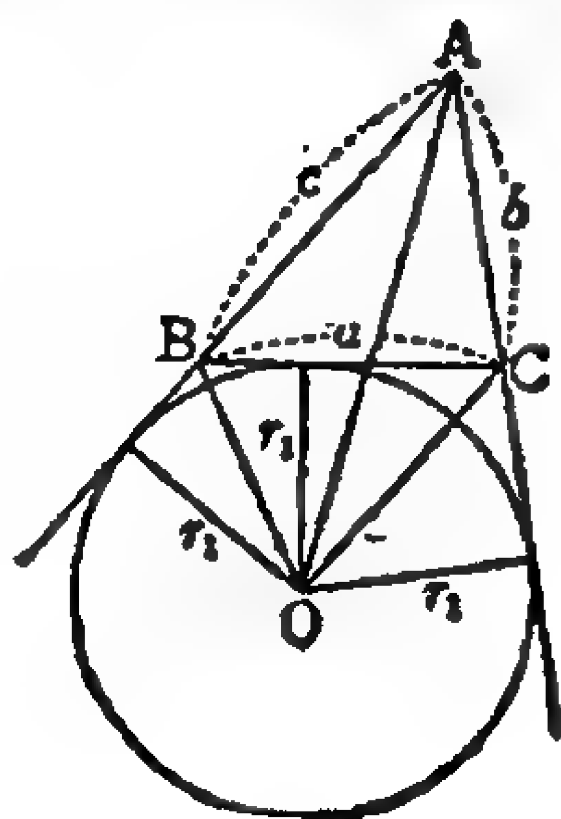
设内切圆半径为 r，则

$$S=pr,$$

$$\therefore \quad r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}.$$

2975. 已知三角形三边之长分别为 a、b、c，求其旁切圆的半径。

解 设 O 为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 内的旁心，半径为 r_1，



$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OAB}-S_{\triangle OBC}$$

$$=\frac{1}{2}br_1+\frac{1}{2}cr_1-\frac{1}{2}ar_1.$$

因为当 $\frac{a+b+c}{2}=p$ 时，

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

所以

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{r_1}{2}(b+c-a)=(p-a)r_1,$$

故

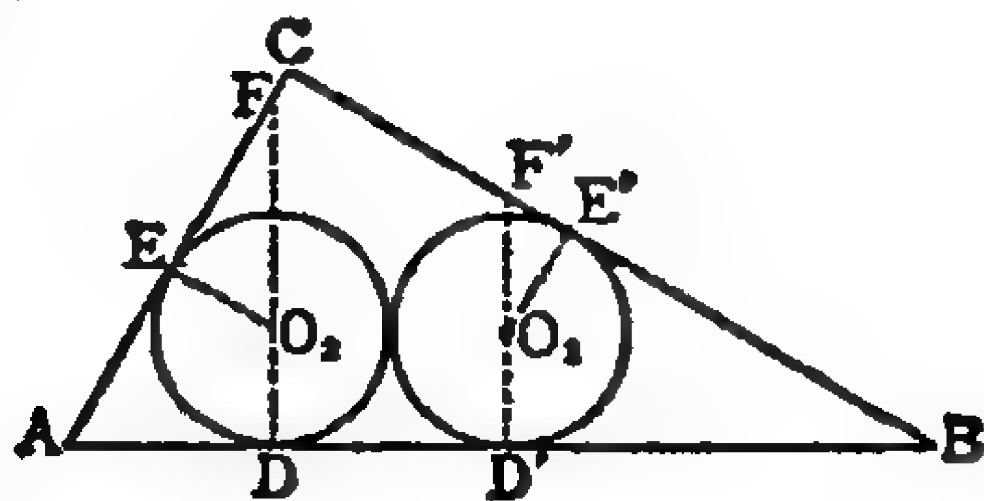
$$r_1=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}.$$

同样，设 $\angle B$、$\angle C$ 内的旁切圆的半径为 r_2、r_3，则

$$r_2=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-b},$$

$$r_3=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-c}.$$

2976. 在直角三角形 ABC 中，已知 $CA=5\mathrm{m}$，$BC=12\mathrm{m}$，$AB=13\mathrm{m}$。在三角形中作互相外切的等圆 O_1、O_2，圆 O_1 切于边 AB、BC，圆 O_2 切于边 AB、CA，求这两个等圆的半径。



解 设圆 O_2 切于 AC、AB 的切点为 E、D，AC 和 DO_2 的延长线的交点为 F，则

$$\triangle EO_2F \backsim \triangle CAB.$$

如果所求圆的半径为 x（即 $O_2D=O_2E=x$），则 $\quad O_2F:O_2E=AB:AC=13:5.$

$$\therefore \quad O_2F=\frac{13}{5}x,$$

从而 $\quad FD=\frac{18}{5}x.$

又因为 $\triangle ADF \backsim \triangle ACB$，所以

$$AD=\frac{DF\cdot AC}{BC}=\frac{18}{5}x\cdot\frac{5}{12}=\frac{3}{2}x.$$

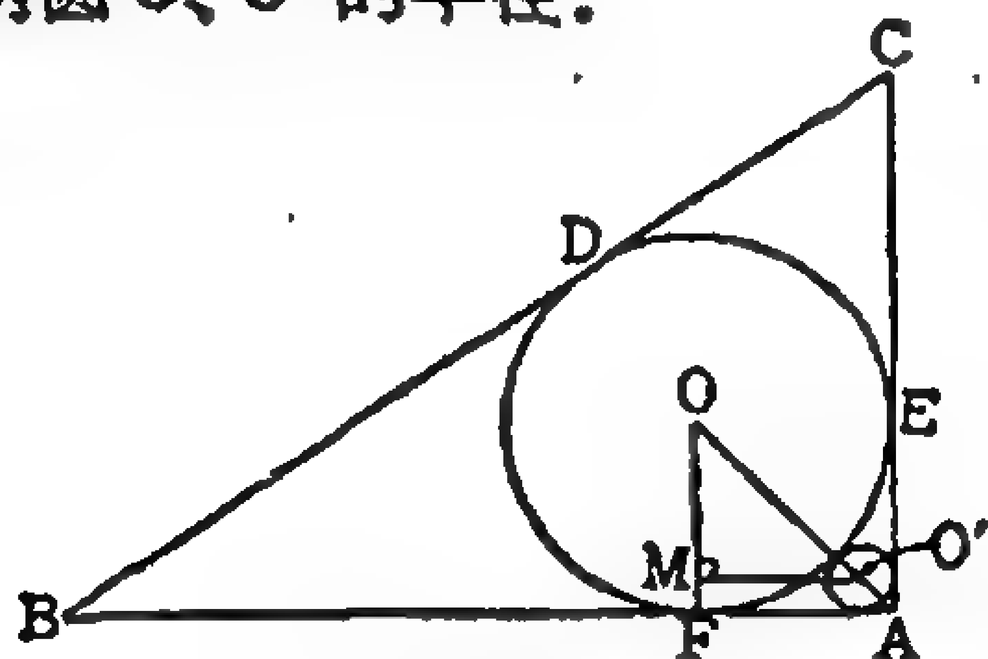
设圆O_1切于AB、BC的切点分别为D'、E'，延长$D'O_1$和BC的交点为F'，同样可得

$$BD'=F'D'\times\frac{12}{5}=\frac{25}{12}x\cdot\frac{12}{5}=5x.$$

$$\therefore\quad \frac{3}{2}x+2x+5x=13,$$

$$\therefore\quad x=\frac{26}{17}\ (\text{m}).$$

2977. 设直角三角形ABC的三边AB、BC、CA的长分别为15 cm, 17 cm, 8 cm. 其内切圆O在三边BC、CA、AB上的切点分别为D、E、F. 另外，在内切圆的弧EF和两边CA、AB之间再作一与它们相切的圆O'，求两圆O、O'的半径.



解　$\triangle ABC$的面积是60 (cm²). 设圆O的半径为r，$\triangle ABC$的面积为S，周长一半为p，则

$$pr=S.$$

$$\therefore\quad \frac{15+17+8}{2}r=60,$$

$$r=3\ (\text{cm}).$$

其次，设切于圆O和边AF、AE的圆的圆心为O'，其半径为r'，因圆O的半径为3 cm，所以$OO'=3+r'$. 又因$\angle A=\angle B$，所以$AF=FO$. 因此，由O'向OF作垂线$O'M$，则$O'M=OM$，并且

$$OM=OF-FM=3-r',$$

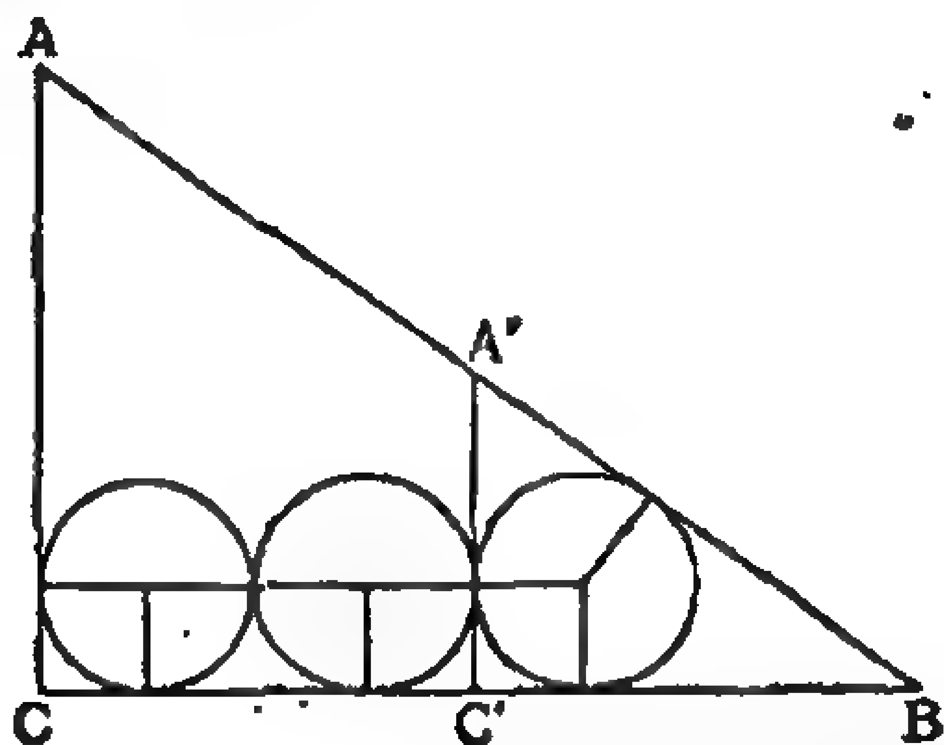
$$\therefore\quad OO'^2=O'M^2+OM^2=2OM^2,$$

$$(3+r')^2=2(3-r')^2,$$

$$r'=9-6\sqrt{2}\approx0.51\ (\text{cm}).$$

2978. 在直角三角形ABC中，两直角边BC、CA的长分别为40 cm及30 cm. 在三角形内作一排三个等圆都切于BC，并且一端的圆切于AB，另一端的圆切于AC，中间的圆切于两端的圆，求等圆的半径.

解　设$A'C'$是两圆的公切线，它垂直于



BC，所以$A'C'\parallel AC$. 设所求半径为x，则

$$BC'=40-4x=4(10-x),$$

而且$\triangle A'C'B\backsim\triangle ACB$，所以

$$A'C'=\frac{4(10-x)}{40}\times30=3(10-x).$$

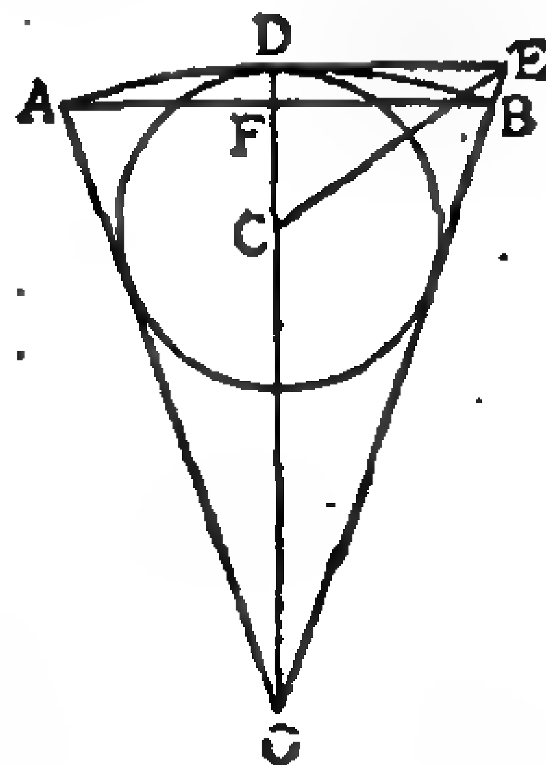
因而　　$A'B=5(10-x)$.

但是　　$A'C'+BC'-A'B=2x$,

$$\therefore\quad (3+4-5)(10-x)=2x,$$

即　　$20-2x=2x,\quad x=5\ (\text{cm})$.

2979. 求扇形OAB（半径$OA=3$cm，弦$AB=2$cm）的内切圆C的半径r.



解　设OC、AB的交点为F，则由$\triangle OBF$可知

$$OF=\sqrt{3^2-1^2}$$

$$=2\sqrt{2}.$$

由点D引平行于FB的直线，和OB的延长线相交于E，则

$$\frac{DE}{FB}=\frac{OD}{OF}.$$

$$\therefore\quad DE=\frac{FB\cdot OD}{OF}=\frac{1\times3}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}},$$

从而

$$OE=\sqrt{DE^2+OD^2}=\sqrt{\frac{9}{8}+9}$$

$$=\frac{9}{2\sqrt{2}}.$$

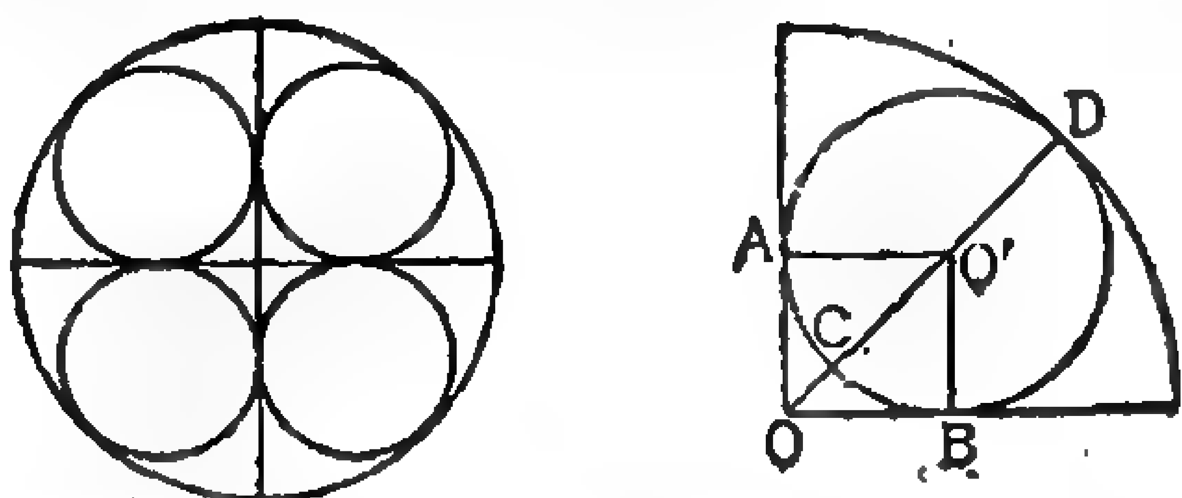
其次，在$\triangle EOD$中，EC平分$\angle DEO$. 所以

$$\frac{DC}{OC}=\frac{DE}{OE},$$

从而
$$\frac{r}{3-r}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}}{\frac{9}{2\sqrt{2}}}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore\quad r=\frac{3}{4}\ (\text{cm}).$$

2980. 在半径为5cm的圆中有四个内切的等圆，其中每两个圆都互相外切，求圆的半径。



解 设所求内切圆的半径为$x$cm，则

$$OA^2=OD\cdot OC.$$

即

$$x^2=5(5-2x),$$

$$x^2+10x-25=0.$$

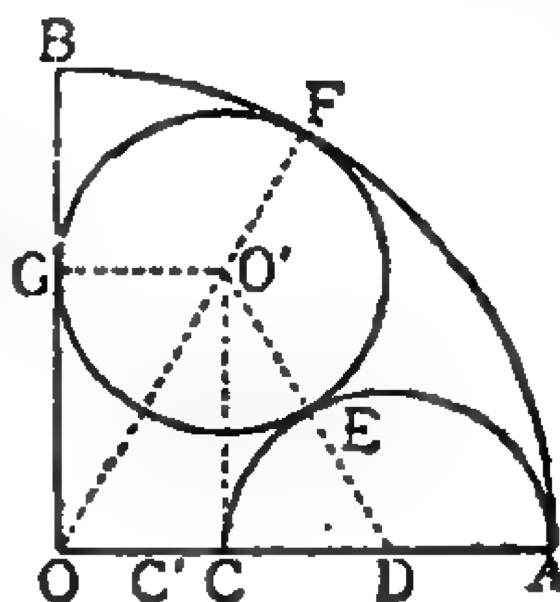
由此得

$$x=-5\pm\sqrt{5^2+25}=-5\pm5\sqrt{2}.$$

因$x=-5-5\sqrt{2}$不适合，

$$\therefore\quad x=-5+5\sqrt{2}\approx-5+5\times1.4142$$
$$=2.0710\text{ (cm)}.$$

2981. 已知四分之一圆OAB的半径$OA=a$的三等分点为C、D。设以D为圆心，在内侧作半圆AC。再作一圆O'与半圆、四分之一圆的弧AB及半径OB相切。求圆O'的半径。



解 设圆O'切于半圆、四分之一圆的弧及OB的切点分别为E、F、G，则O'、E、D，O、O'、F各在一直线上，且$GO'\parallel OA$。由O'作OA的垂线$O'C'$等于OG。设所求半径为x，则得

$$OO'^2-O'G^2=OG^2=O'C'^2=O'D^2-C'D^2,$$

即

$$(a-x)^2-x^2=\left(\frac{a}{3}+x\right)^2-\left(\frac{2}{3}a-x\right)^2.$$

$$\therefore\quad a^2-2ax=\frac{a^2}{9}+\frac{2}{3}ax-\frac{4}{9}a^2$$
$$+\frac{4}{3}ax,$$

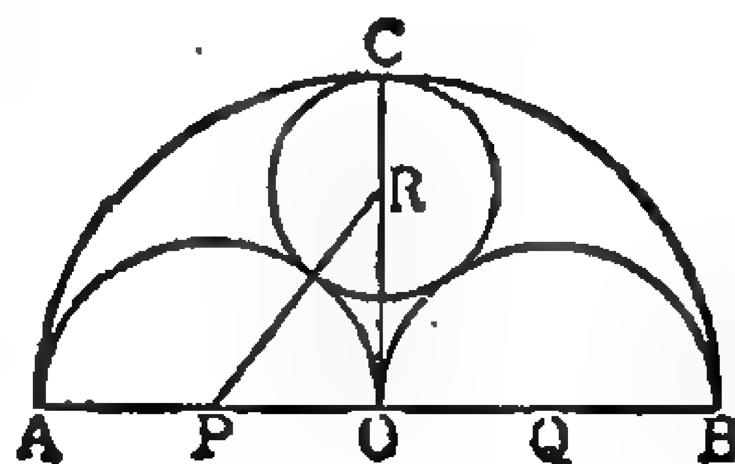
$$4ax=\frac{4}{3}a^2,\quad x=\frac{1}{3}a.$$

2982. 在圆心为O，半径为r的半圆ACB内，以OA、OB为直径在半圆内作半圆P、Q。有一圆R既内切于半圆ACB，又外切于半圆P、Q，求圆R的半径。

解 设所求圆的半径为x（圆心为R）。在$\triangle OPR$中，

$$OR^2+OP^2=PR^2,$$

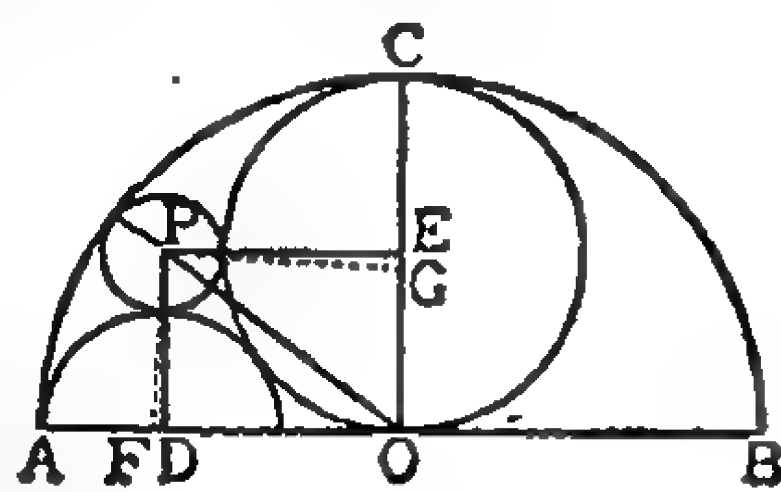
即



$$(r-x)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2=\left(x+\frac{r}{2}\right)^2.$$

解之，得 $x=\frac{1}{3}r.$

2983. 已知半圆ACB（半径r）的内切圆E的半径为$\frac{r}{2}$，半圆D切于圆E和圆O的弧且圆心在AB上，求外切于两圆E、D，且内切于圆O的圆P的半径。



解 设圆D的半径为m，在$\triangle OED$中，有

$$\left(\frac{1}{2}r\right)^2+(r-m)^2=\left(\frac{1}{2}r+m\right)^2.$$

解之，得 $m=\frac{1}{3}r.$

因此 $OD=\frac{2}{3}r.$

由P向OA、OC作垂线分别为PF、PG，圆P的半径为x，$PF=y$，$PG=z$，在$\triangle PFO$中

$$PF^2+FO^2=PO^2,$$

即

$$y^2+z^2=(r-x)^2.\qquad ①$$

又因 $PE=\frac{r}{2}+x$，$EG=\frac{r}{2}-y$，

$$PO^2-PE^2=GO^2-GE^2.$$

所以 $(r-x)^2-\left(\frac{r}{2}+x\right)^2=y^2-\left(\frac{r}{2}-y\right)^2,$

$$\therefore\quad y=r-3x.\qquad ②$$

又因 $PO^2-PD^2=OF^2-DF^2,$

$$\therefore\quad (r-x)^2-\left(\frac{r}{3}+x\right)^2=z^2-\left(z-\frac{2}{3}r\right)^2,$$

$$\therefore\quad z=r-2x.\qquad ③$$

将②、③代入①，得

$$(r-3x)^2+(r-2x)^2=(r-x)^2.$$

解之，得 $x=\frac{r}{2}$ 或 $x=\frac{r}{6}.$

但 $x=\frac{r}{2}$ 不合题意，故所求的半径 $x=\frac{1}{6}r$。

2984. 在半径为 r 的半圆形纸片中，首先切取最大的圆 P，再在剩余的部分切取最大圆 Q，求圆 Q 的半径。

解 设半圆形的纸片为 ACB，则圆 P 内切于半圆弧，圆 Q 切于圆 P、半圆弧及弦 OB。设圆 Q 的半径 QF 为 x，则 $PQ=\frac{1}{2}r+x$。又 $QO=OF-QF=r-x$。由 Q 向 OC 作垂线 QD，则

$$QP^2-OQ^2=PD^2-DO^2,$$

即

$$\left(\frac{1}{2}r+x\right)^2-(r-x)^2=\left(\frac{1}{2}r-x\right)^2-x^2.$$

解之，得 $$x=\frac{1}{4}r.$$

2985. 设圆 O（半径为 r）的直径为 AB，以 AO 为直径作圆 O'，求切于两圆 O、O' 和直径 AB 的第三个圆 C 的半径。

解 设圆 C 切于两圆 O、O' 及 AB 的切点分别为 D、E、F，则 O、C、D 及 O'、E、C 分别在一直线上。设圆 C 的半径为 x，$OF=y$，在 $\triangle OCF$ 中，有

$$x^2+y^2=(r-x)^2. \quad ①$$

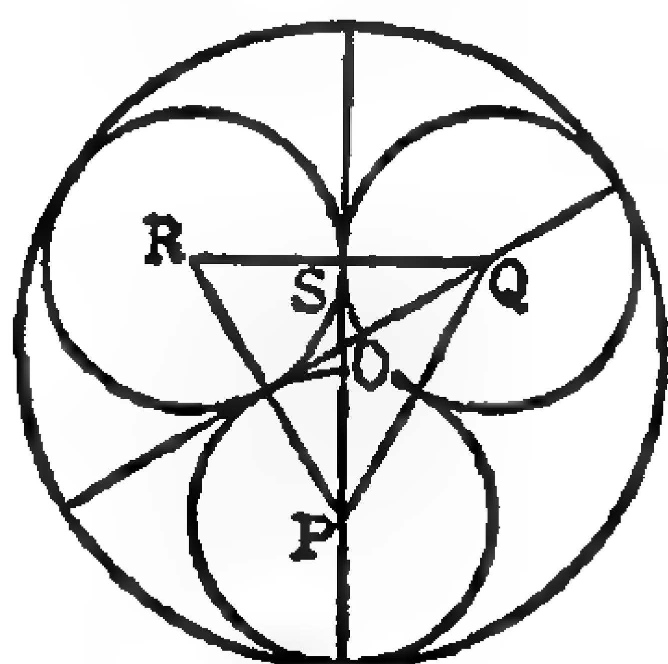
在 $\triangle O'CF$ 中，有

$$x^2+\left(\frac{r}{2}+y\right)^2=\left(\frac{r}{2}+x\right)^2, \quad ②$$

由①、②求得 x，

$$x=\frac{4}{9}r.$$

2986. 在半径为 10 cm 的圆中，有三个相等的小圆内切于该圆，并且互相外切，求小圆的半径。



解 设三个小圆的圆心分别为 P、Q、R，半径为 x。如果两圆 Q、R 的切点为 S，则 $\triangle PQR$ 是一边为 $2x$ 的正三角形，PS 是它的高，所以 $PS=\sqrt{3}x$。

又 O 是 $\triangle PQR$ 的重心，$OS=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，在 $\triangle OQS$ 中，有

$$x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2=(10-x)^2.$$

$$\therefore\ \frac{4}{3}x^2=(10-x)^2,$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}x=\pm(10-x).$$

解之，得 $$x=\frac{10\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

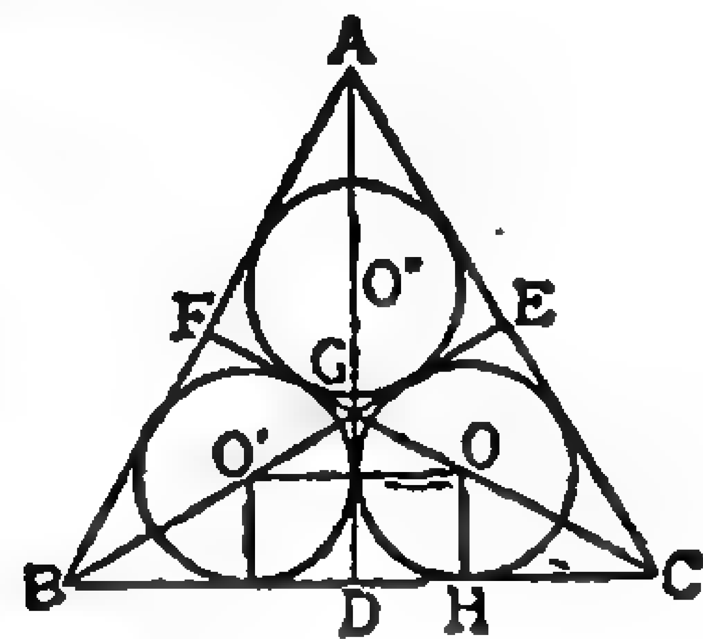
或 $$\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}.$$

x 不能是负的，所以取正值

$$x=\frac{10\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=10\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{1200}-30\approx 4.6\ (\text{cm}).$$

2987. 已知正三角形的边长为 a，三个等圆分别切于它的两边，且互相外切。求等圆的半径 x。



解 图中四边形 $GDCE$ 是 $\triangle ABC$ 的 $\frac{1}{3}$，所以

$$GDCE\text{面积}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2. \quad ①$$

又因 $$DC=CE=\frac{1}{2}a,$$

$$GD=GE=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\left(\because\ AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a\right),$$

四边形 $GDCE$ 面积

$$=\frac{1}{2}x(GD+DC+CE+EG).$$

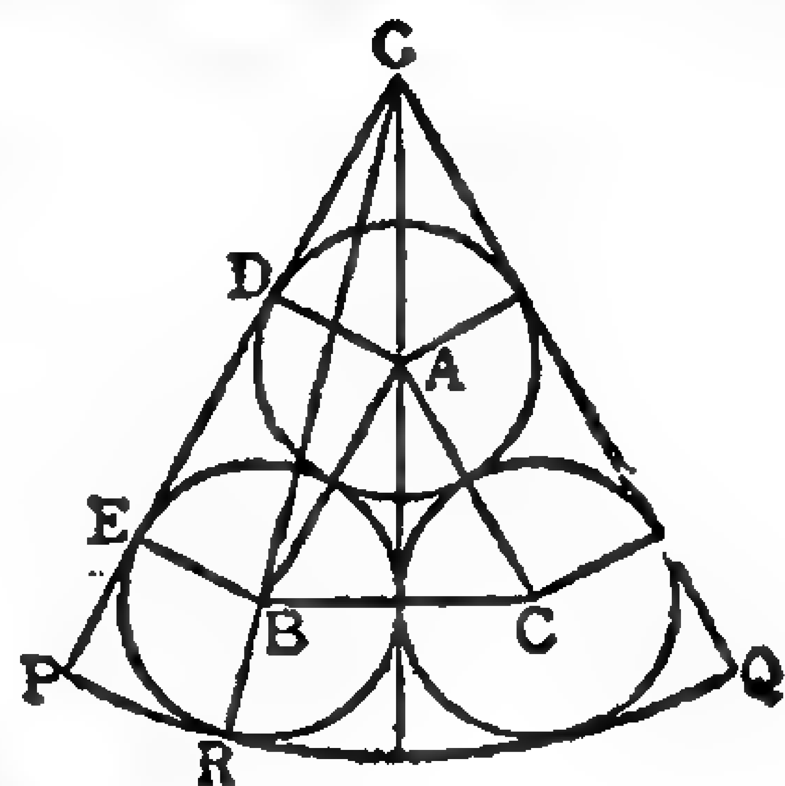
由①得

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}a\right)\times 2,$$

$$\therefore\ x=\frac{\sqrt{3}-1}{4}a.$$

2988. 半径为a的三个圆互相外切，并内切于扇形，其中一圆切于两条半径，另两圆切于一条半径和一弧。求扇形的圆心角和半径。



解 设A、B、C为三等圆的圆心，扇形为OPQ，则$\triangle ABC$是正三角形，所以

$$\angle POQ=\angle BAC=60°.$$

延长OB和扇形弧交于点R，则

$$OP=OR=OB+BR.$$

为了得到OP，只要计算OB的长。设在OP上的切点分别为D、E，则$\angle DOA=30°$，所以

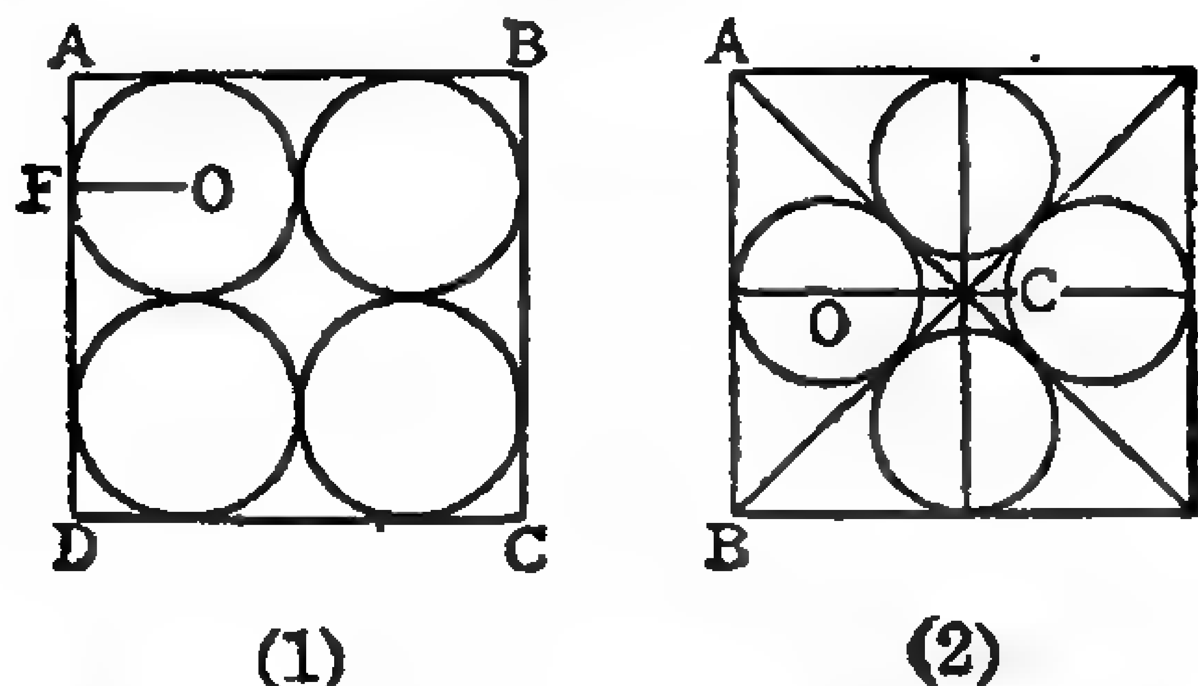
$$OD=\sqrt{3}DA=\sqrt{3}a,$$

又 $$DE=AB=2a.$$

$$\therefore\quad OB=\sqrt{OE^2+BE^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2a^2+a^2}$$
$$=\sqrt{8+2\sqrt{12}}\,a$$
$$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})a,$$

$$\therefore\quad OP=OR=(\sqrt{6}+\sqrt{2})a+a$$
$$=(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)a.$$

2989. 在边长为a的正方形中，有内接该正方形且互相外切的四个等圆，求这些圆的半径。



(1) (2)

解 如图 (1) 四个圆都切于正方形的两边的情况：

显然 $$4OE=AB,$$

所以 $$r=\frac{1}{4}a.$$

在图 (2) 的情况：

$$CA=CB=\frac{1}{\sqrt{2}}AB=\frac{a}{\sqrt{2}},$$

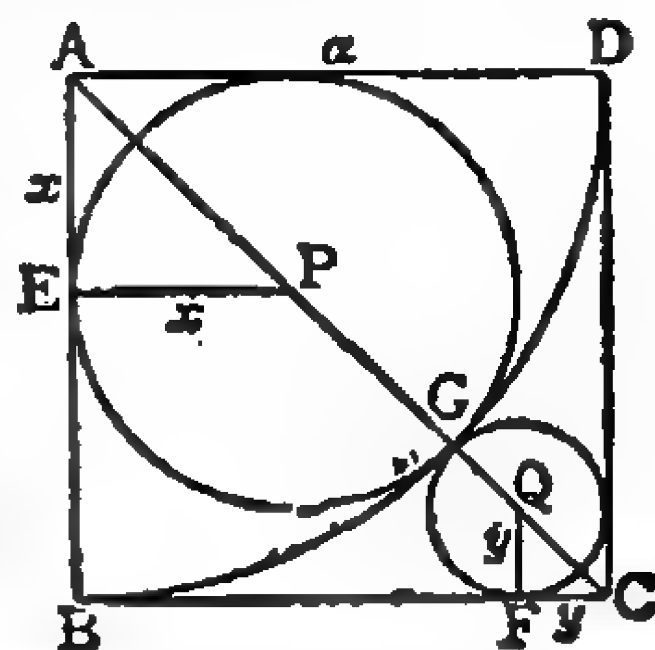
设圆O的半径为r，考虑$\triangle CAB$的面积，则

$$r\left(a+2\times\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

即 $$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}ar=\frac{1}{2}a^2.$$

$$\therefore\quad r=\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}a$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2(2-1)}a=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)a.$$

2990. 在边长为a的正方形$ABCD$中，以A为圆心、a为半径的四分圆把正方形分为两部分，在这两部分中分别作内切圆，求这两个内切圆的半径。



解 设在正方形$ABCD$中的四分圆内部的内切圆的圆心为P，外部的内切圆的圆心为Q，圆P、Q的切点为G，它们的半径分别为x、y，则

$$AE=PE=x,$$
$$AP=AG-PG=a-x,$$

而且 $$AP^2=AE^2+EP^2,$$

$$\therefore\quad (a-x)^2=2x^2.$$

由于$a-x$、x都是正数，所以

$$a-x=\sqrt{2}x,$$

故 $$x=\frac{a}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)a.$$

又在直角三角形CFQ中，

$$AC=\sqrt{2}a,\quad AG=a,\quad GQ=y.$$

所以

$$CQ=AC-(AG+GQ)$$
$$=\sqrt{2}a-(a+y)=(\sqrt{2}-1)a-y,$$

而且 $$CQ^2=QF^2+FC^2=2QF^2,$$

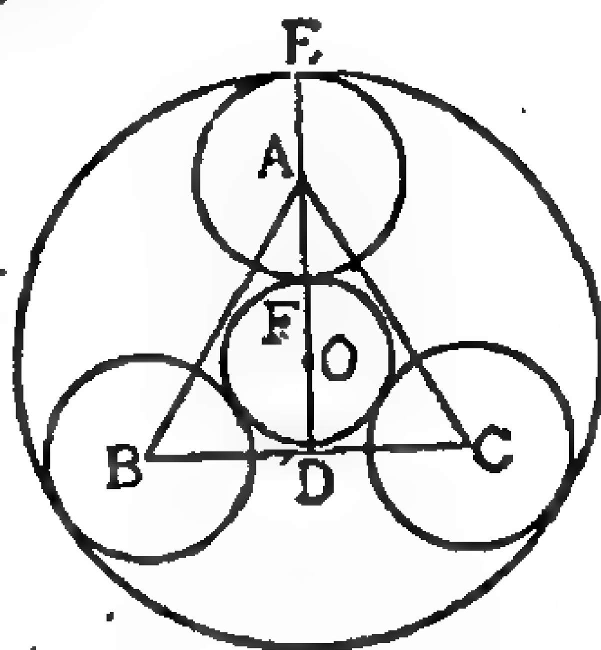
从而 $$[(\sqrt{2}-1)a-y]^2=2y^2.$$

和上面一样，解这个方程取正根

$$(\sqrt{2}-1)a-y=\sqrt{2}y,$$
$$(\sqrt{2}+1)y=(\sqrt{2}-1)a,$$
$$\therefore\quad y=(3-2\sqrt{2})a.$$

2991. 三个等圆A、B、C（半径为r）的圆心是正三角形ABC（边长为a）的各个顶点，求和这三个等圆分别内切或者分别外切的圆的半径。

解　设$\triangle ABC$的高为AD，则三圆A、B、C内切圆或外切的圆的圆心O是$\triangle ABC$的垂心、且在AD上。因为



$$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

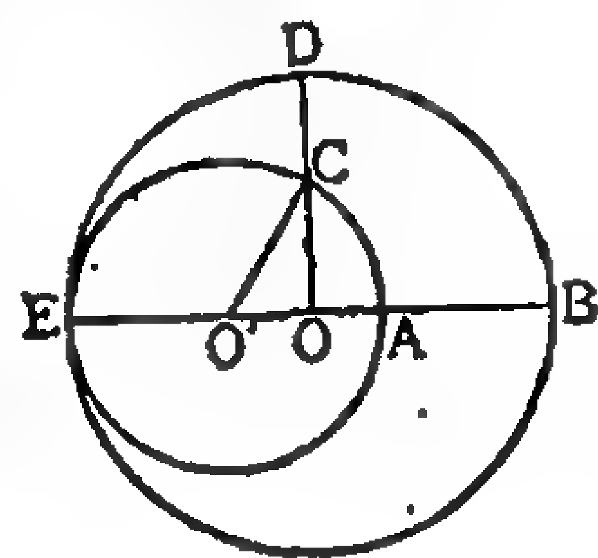
$$\therefore\quad AO=\frac{2}{3}AD=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

因此内切圆的半径

$$OE=OA+AE=\frac{\sqrt{3}}{3}a+r=\frac{1}{3}(\sqrt{3}a+3r),$$

$$\text{外切圆半径}=OA-AF=\frac{1}{3}(\sqrt{3}a-3r).$$

2992.　已知在点E内切的两圆O、O'，$AB\perp CD$，$AB=9$ cm，$CD=5$ cm，求两圆的半径。



解　设大圆的半径为x，小圆的半径为y，则

$$OO'=x-y,$$

$$OC=x-5.$$

在$\triangle COO'$中

$$(x-5)^2+(x-y)^2=y^2.\qquad ①$$

又因

$$O'B=OO'+OB=x-y+x=2x-y,$$

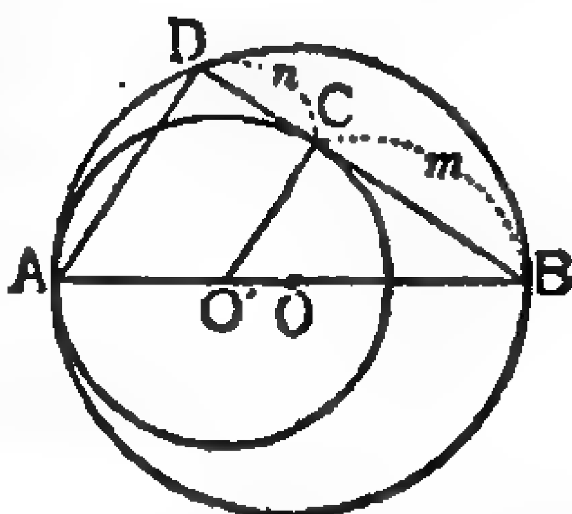
$$O'B=O'A+AB=y+9,$$

$$\therefore\quad 2x-y=y+9.\qquad ②$$

由①、②得

$$x=25\ (\text{cm}),\quad y=20.5\ (\text{cm}).$$

2993.　已知两圆O、O'内切于点A，A为大圆O的直径AB的一端点，由B作大圆的弦BD切于小圆O'，切点C将BD分为两部分BC、CD之长分别为m、n，求两圆的半径。



解　设圆O、O'的半径分别为x、y。在直角三角形BCO'中，$O'C=y$，

$$BO'=AB-AO'=2x-y,$$

$$\therefore\quad (2x-y)^2=y^2+m^2.\qquad ①$$

又因$AD\parallel O'C$，所以

$$BO':BA=BC:BD.$$

$$\therefore\quad (2x-y):2x=m:(m+n),$$

即　　$2mx=(m+n)(2x-y)$，

化简得

$$2nx=(m+n)y.\qquad ②$$

由①得　　$4x^2-4xy=m^2$，

将②代入此式得

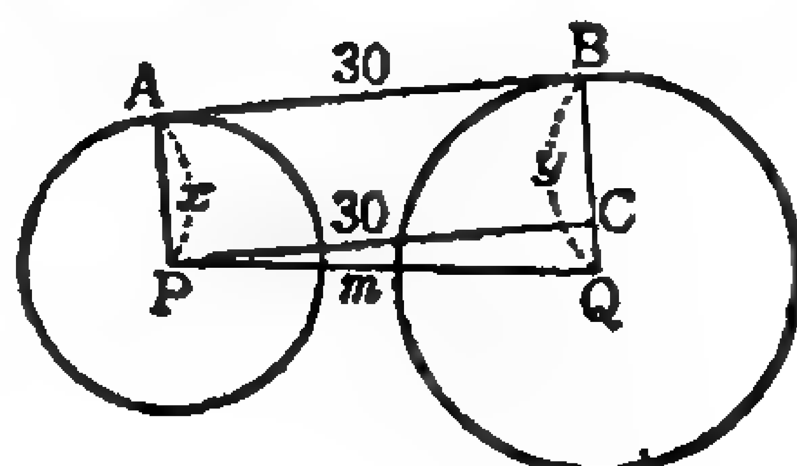
$$4x^2-\frac{8nx^2}{m+n}=m^2,$$

即　　$4(m-n)x^2=m^2(m+n)$.

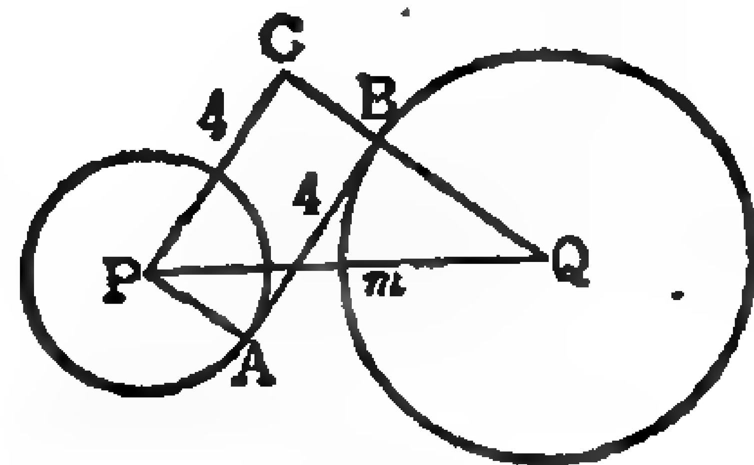
$$\therefore\quad x=\frac{m(m+n)}{2\sqrt{m^2-n^2}},$$

由②得　　$y=\dfrac{mn}{\sqrt{m^2-n^2}}$.

2994.　已知三个圆。它们的内公切线、外公切线的长在圆P、圆Q间分别为4 cm、30 cm。在圆Q、圆O间分别为6 cm、40 cm。在圆O、圆P间分别为10 cm、36 cm，求各圆的半径。



(1)



(2)

解　首先考察圆P及圆Q。设它们的半径分别为x、y，$PQ=m$。把外公切线AB的切点分别和圆心P、Q连结，从P作AB的平行线和QB交于C，在图(1)中

$$PC=AB=30,$$

$$QC=(y-x).$$

在直角三角形PQC中

$$PQ^2=PC^2+QC^2,$$

因而　　$m^2=30^2+(y-x)^2$.

同样，关于内公切线(图2)

$$m^2=4^2+(x+y)^2,$$

$$\therefore\quad 4^2+(x+y)^2=30^2+(y-x)^2,$$

$$(x+y)^2-(y-x)^2=30^2-4^2,$$

$$4xy=34\times 26,$$

故

$$xy=17\times 13.\qquad ①$$

其次，关于圆Q和圆O，设圆O的半径为z，同样可得

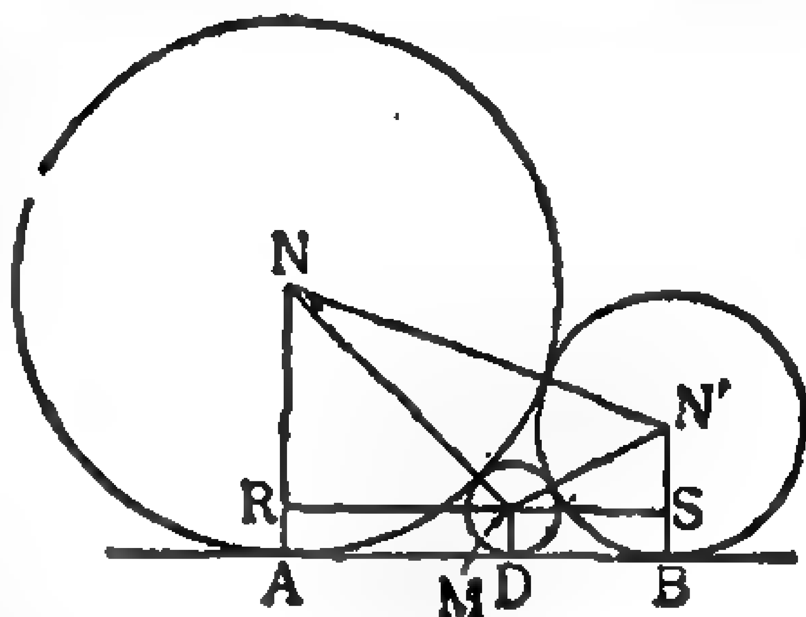
$$6^2+(y+z)^2=40^2+(z-y)^2,$$

$$(y+z)^2-(z-y)^2=40^2-6^2,$$
$$4yz=46\times34,$$
$$\therefore\quad yz=23\times17. \qquad ②$$

再次，关于圆 O 和圆 P，有
$$10^2+(z+x)^2=36^2+(z-x)^2,$$
$$(z+x)^2-(z-x)^2=36^2-10^2,$$
$$\therefore\quad 4xz=46\times26,$$
$$xz=23\times13. \qquad ③$$

但是 $x>0$，$y>0$，$z>0$，解 ①、②、③ 只取正根
$$x=13\,\text{cm},\quad y=17\,\text{cm},\quad z=23\,\text{cm}.$$

2995. 在直线 AB 的同侧有互相外切、半径分别为 9 cm 和 4 cm 的两个圆 N、N'。它们切直线 AB 于 A、B。在点 A、B 间作切于 AB 且外切于两圆的圆，求它的半径。



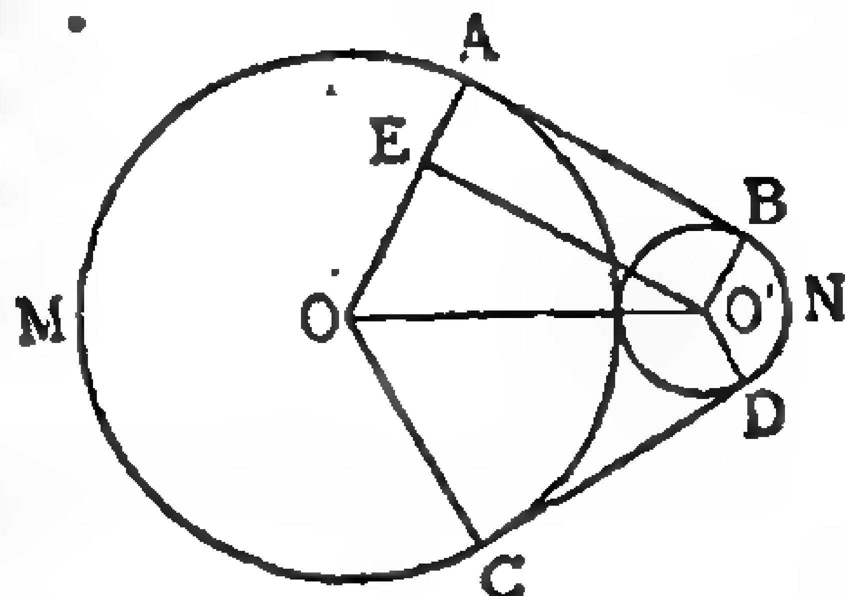
解 设切于已知两圆及 AB 的圆的圆心为 M，从 M 引 AB 的平行线和 AN、BN' 的交点分别为 R、S。设圆 M 的半径为 x，则
$$RN=9-x,\quad MN=9+x,$$
而且 $$SN'=4-x,\quad N'M=4+x,$$
$$AB=\sqrt{(9+4)^2-(9-4)^2}=12,$$
又 $$AB=RS=MR+MS.$$
得下面的方程式
$$\sqrt{(9+x)^2-(9-x)^2}+\sqrt{(4+x)^2-(4-x)^2}=12,$$
即 $$\sqrt{36x}+\sqrt{16x}=12.$$
$$\therefore\quad 6\sqrt{x}+4\sqrt{x}=12,$$
即 $$10\sqrt{x}=12.$$
故 $$x=\frac{144}{100}=1.44\,(\text{cm}).$$

11. 其他

2996. 在圆内接 $\triangle ABC$ 中，设
$$AB=AC=15\,\text{cm},$$
延长弦 AQ 和底边 BC 的延长线交于 P，且
$$AQ:QP=3:2,$$
求 AP 的长。

解 因
$$\angle APC+\angle CAQ=\angle ACB=\angle ABC,$$
$$\angle ACQ+\angle CAQ=\angle PQC=\angle ABC,$$
$$\therefore\quad \angle APC=\angle ACQ.$$
所以 AC 在点 C 切于圆 PQC，
$$\therefore\quad AQ\cdot AP=AC^2.$$
设 $AP=x$，则由 $AQ:QP=3:2$，知
$$AQ=\frac{3x}{5}.$$
$$\therefore\quad \left(\frac{3x}{5}\right)x=15^2,$$
$$x^2=375=3\times5^3,$$
$$\therefore\quad x\approx19.364\,\text{cm}.$$

2997. 把直径 3 cm 及 1 cm 的两根圆柱，用钢丝绳捆在一起，绕一周需用多长的钢丝绳？计算到厘米的三位小数。



解 设两圆的圆心为 O、O'，公切线为 AB、CD，则所求的钢丝绳长为
$$\overset{\frown}{AMC}+AB+\overset{\frown}{BND}+DC,$$
连结 OO'，从 O' 作 $O'E$ 平行于 AB、和 AO 的交点为 E，则
$$O'E=\sqrt{OO'^2-OE^2},$$
且 $$O'E=AB=CD,$$
因为 $$OE=1.5-0.5=1,$$
$$OO'=1.5+0.5=2,$$
$$\therefore\quad O'E=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$$
其次，因 $$OE=1,\quad OO'=2,$$
$$\angle O'EO=\angle R,$$
$$\therefore\quad \angle O'OE=60^\circ,$$
$$\angle AOC=120^\circ.$$
故 $\overset{\frown}{AMC}$ 的圆心角是 240°。但是圆心角和弧是成比例的，所以
$$\overset{\frown}{AMC}=\frac{2}{3}\times2\pi r=\frac{4}{3}\pi\times1.5=2\pi.$$
同样，
$$\overset{\frown}{BND}=\frac{1}{3}\times2\pi r'=\frac{2}{3}\pi\times0.5=\frac{1}{3}\pi.$$

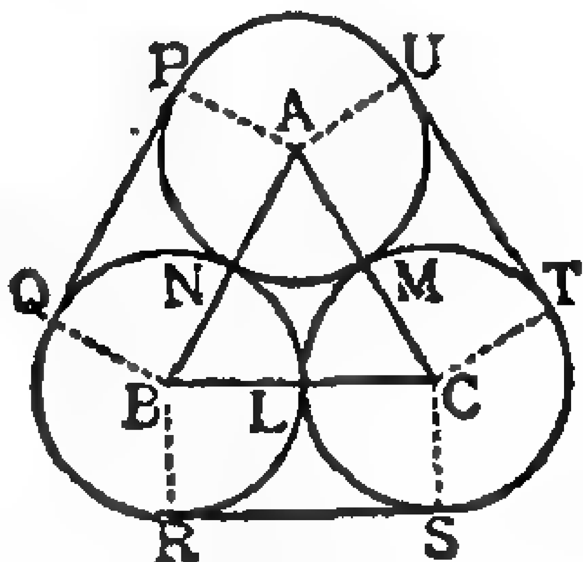
因此，所求钢丝绳的长为

$$2\pi+\frac{1}{3}\pi+\sqrt{3}\times 2$$

$$=2\sqrt{3}+\frac{7}{3}\pi\approx 2\times 1.732+\frac{7}{3}\times\frac{22}{7}$$

$$=3.464+7.333=10.797\ (\text{cm}).$$

2998. 半径 50 cm 的三个圆柱，用钢丝捆在一起，绕一周需要多长的钢丝？计算到毫米为止，其中连结的空隙不计算在内。



解 设三个等圆的圆心分别为 A、B、C，各圆的公切线的切点顺次为 P、Q、R、S、T、U，则所求长 l 为

$$PQ+\overset{\frown}{QR}+RS+\overset{\frown}{ST}+TU+\overset{\frown}{UP}.$$

因为 $$PQ=RS=TU=AB,$$

$$\overset{\frown}{QR}=\overset{\frown}{ST}=\overset{\frown}{UP},$$

$$AB=2AN=2\times 50=100,$$

且 $$PA\perp AB,\quad UA\perp AC,$$

$$\angle BAC=60^\circ.$$

$$\therefore\quad \angle PAU=120^\circ,$$

$$\overset{\frown}{PU}=(\text{全圆周})\div 3=\frac{100}{3}\pi.$$

故 $$l=3\times 100+3\times\frac{100}{3}\pi$$

$$\approx 300+100\times 3.1416\cdots$$

$$\approx 614.2\ (\text{cm}).$$

2999. 从远洋返航的轮船甲板的水平线上，可看见高为 100 m 的灯塔的光，求该船到灯塔的距离。设地球的半径为 7320 km。

解 设船的位置为 A，灯塔的塔基为 C，塔顶为 B，直线 BC 过地球中心另一点为 D，则 $AB^2=BC\cdot BD$。已知

$$BC=0.1,$$

$$BD=7320\times 2+0.1=14640.1,$$

$$\therefore\quad AB^2=0.1\times 14640.1=1464.01,$$

$$AB=\sqrt{1464.01}\approx 38.26\cdots.$$

故所求的距离约 38.3 km。

3000. 已知两山的高都为 1350 m，在山顶恰可互相看见，求这两山最远的距离。

解 设两山的高为 CA、DB，假定两山顶可以互相看见的最远距离为 AB，则 AB 应切于地平面，且其切点是线段 AB 的中点，设为 E。其次，AC 必过球心 O，设延长 ACO 和地球表面的另一交点为 C'，则

$$AE^2=AC\cdot AC',$$

且 $$AB=2AE,$$

但是 $$AC=BD=1.35\ (\text{km}),$$

$$CC'=2CO=7320\times 2$$

$$=14640\ (\text{km})\ (\text{上题}).$$

因此

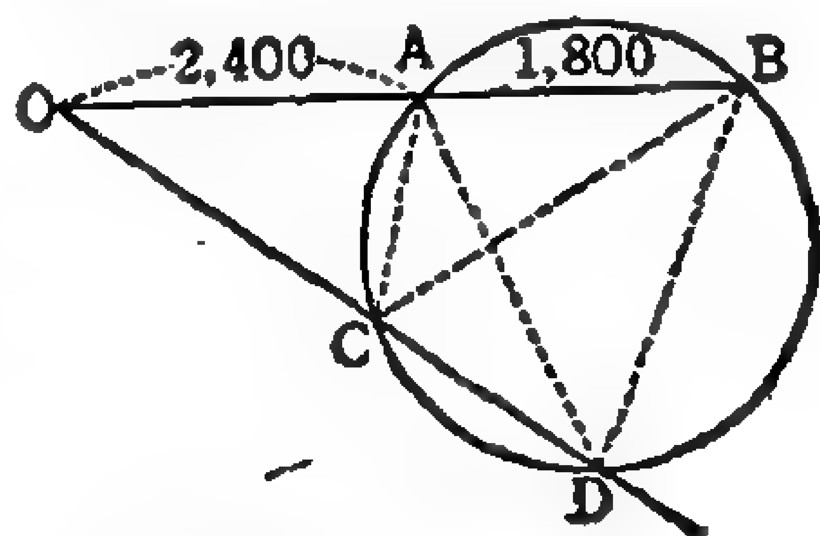
$$AE=\sqrt{1.35(14640+1.35)}$$

$$=\sqrt{1.35\times 14641.35}$$

$$=\sqrt{19765.8225}=140.59\cdots,$$

$$\therefore\quad AB=281.18\cdots\approx 281\ (\text{km}).$$

3001. 已知在海上依次排列三点 O、A、B 在一直线上，$OA=2400$ m，$AB=1800$ m，船过点 O 后按一定方向和一定速度航行，当船过点 O 后 7 分钟时测得线段 AB 的视角为 α，又过 5 分钟再测又得 α，求船的速度。



解 设船过点 O 7 分钟时的位置为 C，再过 5 分钟时的位置为 D。再设船速每分钟为 x m，则因 $\angle ACB=\angle ADB=\alpha$，所以四点 A、C、D、B 共圆，因此

$$OC\cdot OD=OA\cdot OB,$$

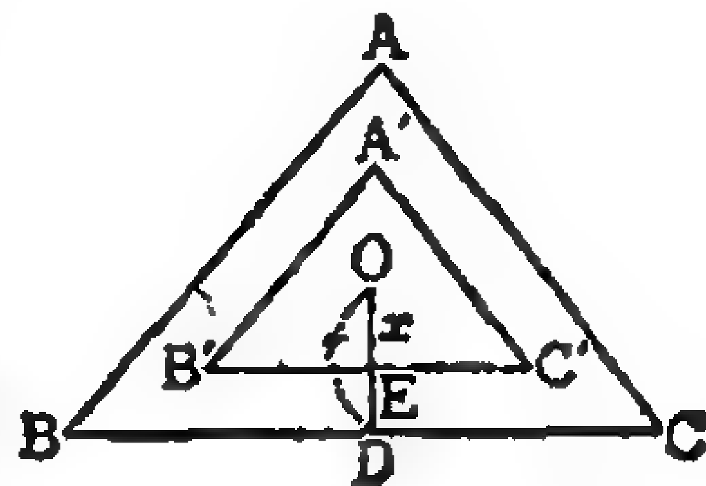
$$\therefore\quad 7x\cdot 12x=2400\times 4200,$$

$$x^2=120000,\quad \text{其中}\quad x>0,$$

故 $$x=200\sqrt{3}\approx 346.$$

即船速为每分钟 346 m。

3002. 已知三角形地面的三边之长分别为 a、b、c，要在沿三角形地面的内侧铺设一定宽度的路面，使路面的面积为全面积的 $\frac{1}{k}$，求路面的宽度。



解　设铺设的道路夹在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中间，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似，而且两个三角形的内心重合。设从内心 O 向 BC 作垂线 OD 和 $B'C'$ 的交点为 E，$OD=r$，$OE=x$，则所求的路宽就是 DE 的长。

因为 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，所以

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{OE^2}{OD^2}=\frac{x^2}{r^2}.$$

由题设条件知

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{k-1}{k},$$

$$\therefore\quad \frac{k-1}{k}=\frac{x^2}{r^2},$$

即　$x^2=\dfrac{(k-1)r^2}{k}$，　$\therefore\quad x=\sqrt{\dfrac{k-1}{k}}\,r$.

故　$DE=r-x=\left(1-\sqrt{\dfrac{k-1}{k}}\right)r$.

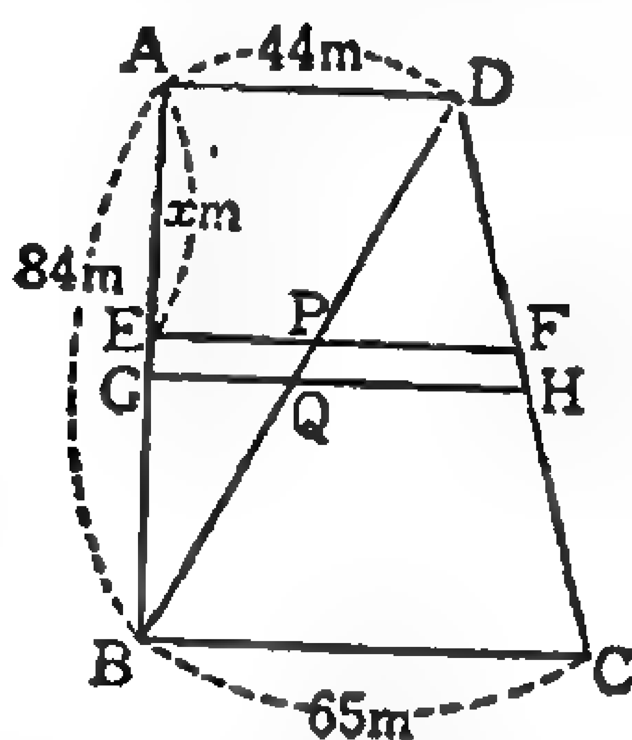
又 r 是 $\triangle ABC$ 的内切圆半径，所以

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}.$$

其中　$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，

$$\therefore\quad DE=\left(1-\sqrt{\frac{k-1}{k}}\right)\times\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}.$$

3003.　已知一梯形地面，其一边是南北方向，长 84m，其两邻边都是东西方向，长分别为 44m 及 65m，要求沿东西方向铺设一条宽 4m 的道路将此地面分成等积的两部分，求道路的位置。



解　在梯形 $ABCD$ 中，设 $AD=44\,\text{m}$，$BC=65\,\text{m}$，$AB=84\,\text{m}$。在图中 $EGHF$ 为宽 4m 的道路，设 $AE=x\,\text{m}$，$BG=(80-x)\,\text{m}$，BD 和 EF、GH 的交点分别为 P、Q，则

$$\frac{EP}{AD}=\frac{EB}{AB},$$

$$\therefore\quad EP=44\times\frac{84-x}{84}=\frac{11(84-x)}{21}.$$

又因　$\dfrac{PF}{BC}=\dfrac{AE}{AB}$，　$\therefore\quad PF=65\times\dfrac{x}{84}$.

于是

$$EF=EP+PF=\frac{11(84-x)}{21}+\frac{65x}{84}.$$

同样，

$$GH=GQ+QH=44\times\frac{80-x}{84}+65\times\frac{x+4}{84}=\frac{11(80-x)}{21}+\frac{65(x+4)}{84}.$$

依题意得

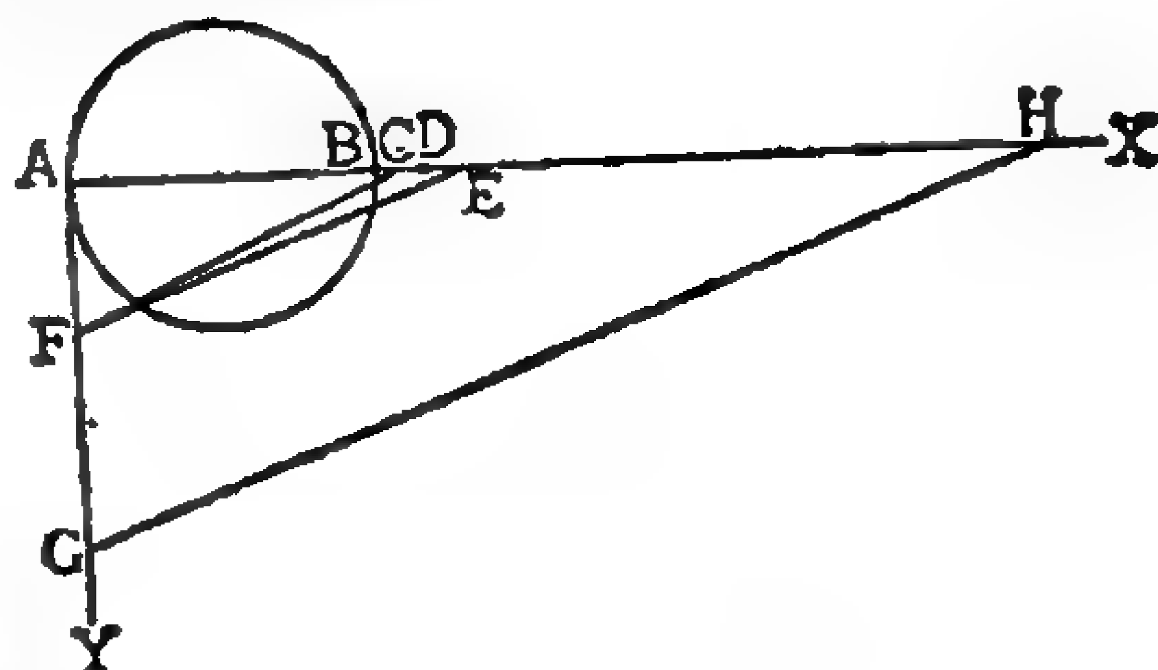
$$\frac{x}{2}\cdot\left[44+\frac{11(84-x)}{21}+\frac{65x}{84}\right]=\frac{80-x}{2}\cdot\left[65+\frac{11(80-x)}{21}+\frac{65(x+4)}{84}\right],$$

化简得　$x^2+365x-17600=0$.

取方程的正根，　$x=44$.

所以，应在 AE 为 44m 处铺设道路。

3004.　在圆直径 AB（半径为 r）的延长线 BX 上取三点 C、D、E，使 $BC=CD=DE=\dfrac{1}{5}r$。在点 A 的切线 AY 上取点 F、G，使 $AF=r$，$AG=CF$，过点 G 作 EF 的平行线 GH 和 BX 的交点为 H，则 AH 近似于半径为 r 的圆周。



解　因 $FE\parallel GH$，所以

$$AG:AH=AF:AE.$$

因为

$$AG=CF,$$

$$CF^2=AF^2+AC^2,\quad AF=r,$$

$$AC=2r+\frac{1}{5}r=\frac{11}{5}r,$$

$$\therefore\quad CF^2=r^2+\frac{121}{25}r^2,$$

$$\therefore\quad CF=\frac{\sqrt{146}}{5}r.$$

又因　$AE=2r+\dfrac{3}{5}r=\dfrac{13}{5}r$，

得 $\frac{\sqrt{146}}{5}r : AH = r : \frac{13}{5}r$.

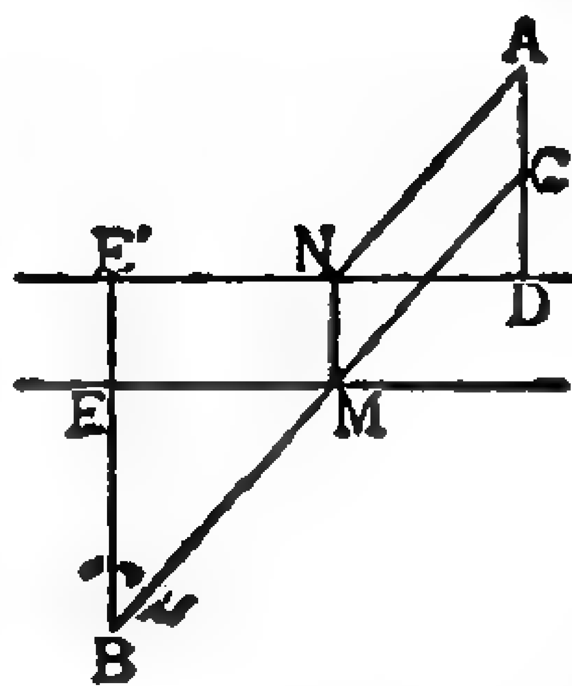
$\therefore\ AH = \frac{13}{5} \cdot \frac{\sqrt{146}}{5}r = \frac{13\sqrt{146}}{50} \cdot 2r$.

由于

$$\frac{13\sqrt{146}}{50} = \frac{13}{50} \times 12.0830459$$
$$= 3.1415919\cdots,$$

它和π值的差小于0.000001，即小于百万分之一。因此AH的长近似于原来的圆的圆周。

3005. 已知一条河宽30m，且两河岸平行。在距离河岸120m处有一家A，在往下游400米处的对岸，距离河岸180m处有一家B，现在想从A到B修一条路，架一座桥(桥垂直于两岸)。问最少需费多少？设修路一米需费$2a$元，修桥一米需费$10a$元。



解 因河宽都相等，所以不论在哪里架桥，其费用都是一样的。所以选择从A到B的最短路径所需的费用最少。因为河宽都相等，因此，只须使从A到桥，从B到桥的距离最短就是最短路径。由A向河作垂线AD，在其上取AC等于河宽，连结BC和B侧河岸的交点于M，由点M架桥MN垂直于两岸，则$AN+BM$为最短(问题**2741**)。

延长AC和河岸交于点D，又从B作河岸的垂线BE，并延长和对岸交于点E'，则$AD=120$ m，$BE=180$ m，$DE'=400$ m。设$DN=x$ m，则$E'N=EM=(400-x)$ m。

$$\because\ \triangle ADN \backsim \triangle BEM,$$
$$\therefore\ AD:DN = BE:EM.$$

即

$$120:x = 180:(400-x),$$
$$2:x = 3:(400-x),$$
$$800-2x = 3x,$$
$$\therefore\ x = 160.$$

因而 $EM = 400 - x = 240$.

故道路之长为

$$\sqrt{120^2+160^2} + \sqrt{180^2+240^2}$$
$$= 200 + 300 = 500\ (\text{m}),$$

最低费用为

$$2a \times 500 + 10a \times 30$$
$$= 1000a + 300a = 1300a(\text{元}).$$

第六编　立体几何学

第一章　直线和平面

1．直线和平面(1)

3006． 叙述直线和平面的公理，以及确定平面的条件。

解　关于直线和平面的公理：

(1) 不同的两点仅可确定一条直线；

(2) 过不在同一直线上的三点只有一个平面；

(3) 连接平面上两点的直线包含在这个平面内；

(4) 如果两个平面有一个公共点，那么必然还有另一公共点。

在下列情况下，所确定的平面有且仅有一个：

(1) 过不在同一直线上的三点的平面；

(2) 过一直线和不在此直线上的一点的平面；

(3) 包含两相交直线的平面；

(4) 包含两平行直线的平面。

3007． 叙述下列概念的定义：

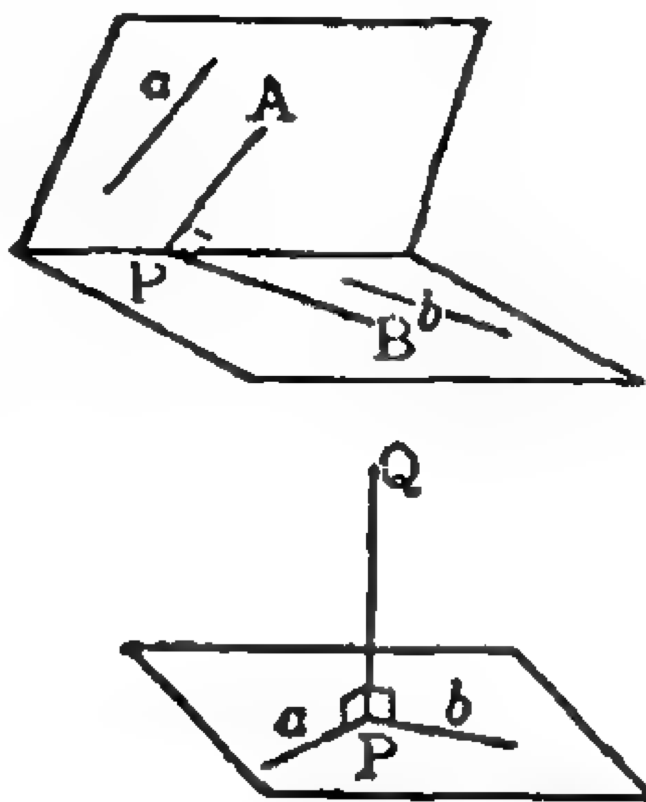
(1) 空间两直线平行；

(2) 直线和平面平行；

(3) 空间两直线垂直；

(4) 直线和平面垂直。

解　(1) 在空间里，若两条直线在同一平面内且没有公共点，则称这两条直线平行。



(2) 若直线和平面没有公共点，则称这条直线和这个平面平行。

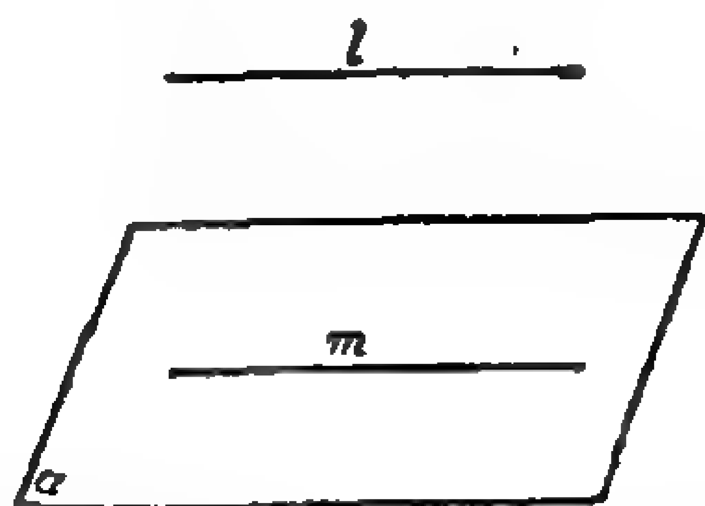
(3) 过空间任意一点作与两已知直线分别平行的两条直线，若所作两直线的交角为直角，则称空间两已知直线垂直。

(4) 若一直线和一平面相交且垂直于这个平面内的所有直线，则称这条直线和这个平面垂直。

3008． 过两平行线中的一条直线且不包含另一条平行线的平面，与另一条直线平行。

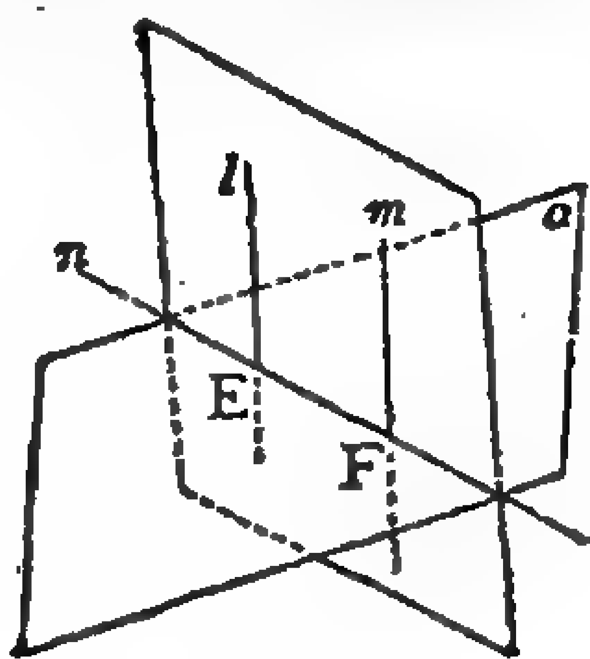
解　设l、m为两平行直线，含m但不含l的平面为α。

若平面α与直线l不平行，则α与l必相交。由于$l/\!/m$，所以l、m在同一平面内，因此当α与l相交时，其交点一定在直线m上。但是已知$l/\!/m$，l和m没有公共点。这个矛盾说明α必与l平行。



3009． 如果一平面与两平行线中的一条直线相交，则该平面也与另一条直线相交。

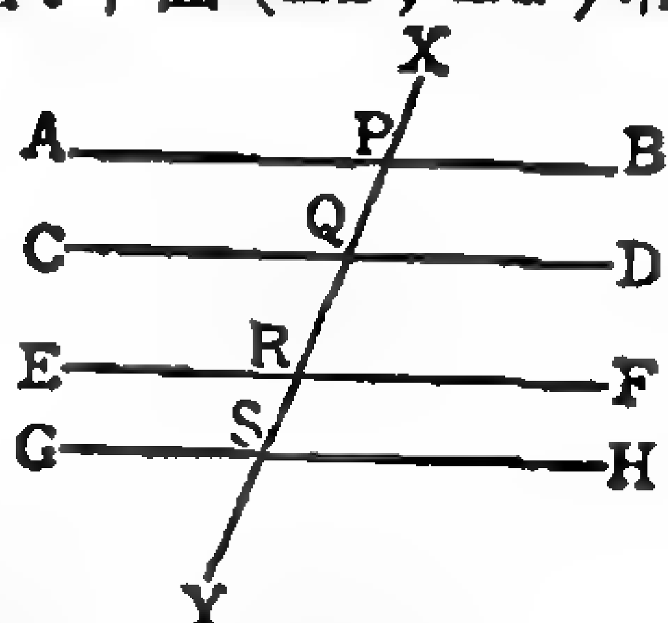
解　设l、m为两平行直线，平面α与直线l相交于点E，则平面(l, m)和平面α有公共点E，所以它们相交于过点E的直线n。已知在平面(l, m)内与平行线l、m中的l相交的直线n必与m相交，设其交点为F，则F既是平面α内的点，又是直线m上的点，所以平面α也与直线m相交。



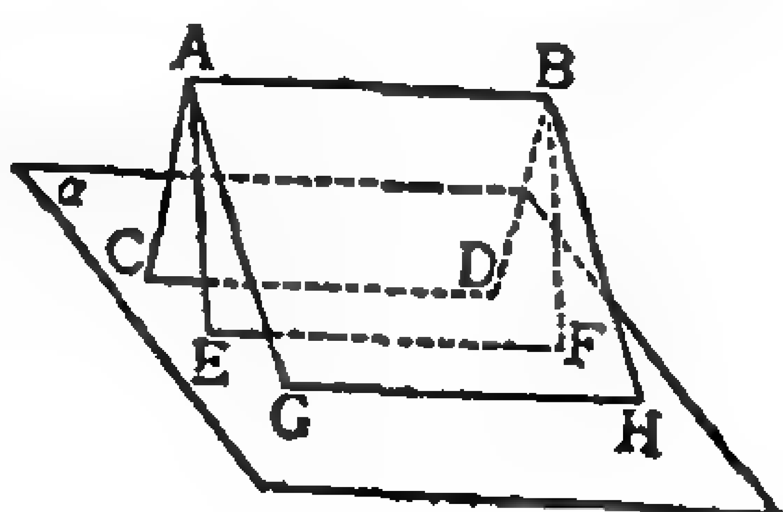
3010． 如果相互平行的直线都和另一条直线相交，则这些平行直线都在同一平面上。

解　设AB、CD、EF、GH、… 为相互平行且和直线XY分别交于P、Q、R、S、…的直线，则平面(AB, CD)和平面(AB, PQ)

即平面 (AB, XY) 重合. 平面 (AB, EF) 和平面 (AB, PE) 即平面 (AB, XY) 重合. 平面 (AB, GH) 和平面 (AB, PS) 即平面 (AB, XY) 重合, …. 因此, AB、CD、EF、GH、…及 XY 都在平面 (AB, XY) 上.



3011. 已知一条直线和一个平面平行, 则过这条直线的许多平面与已知平面的交线都和已知直线平行, 并且这些交线也相互平行.



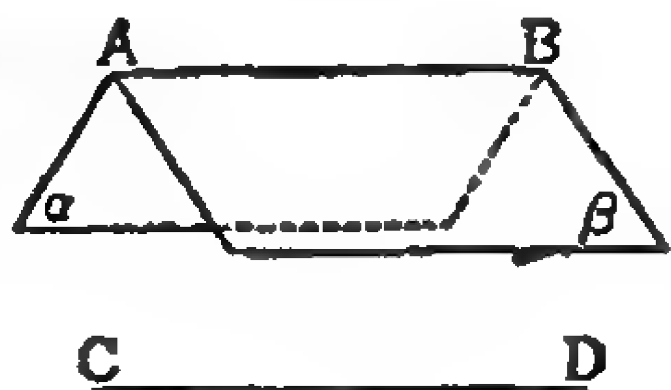
解 设直线 AB 和平面 α 平行, 过 AB 的平面与平面 α 的交线分别为 CD、EF、GH、…等. 因为 $AB \parallel \alpha$, 所以 α 和 AB 不相交, 而 CD 又在平面 α 内, 因此 AB 和 CD 不相交. 又因为 AB、CD 在同一平面内, 故 $AB \parallel CD$.

同理, 可知 EF、GH 等都平行于 AB.

其次, 如 CD 和 EF 相交, 则其交点和直线 AB 就在两个不同的平面内, 这是不合理的, 所以 $CD \parallel EF$.

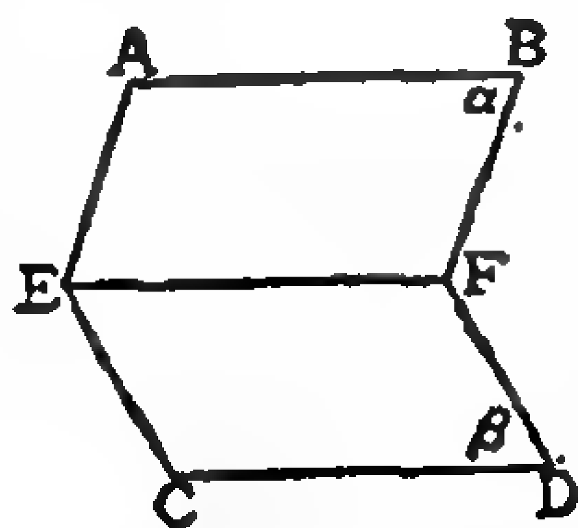
同理, $CD \parallel GH$ 等, 故各交线 CD、EF、GH、… 互相平行.

3012. 如果两个相交平面都平行于同一直线, 则这两个平面的交线也和这条直线平行.



解 设平面 α、β 都和直线 CD 平行, 平面 α、β 的交线为 AB. 过 AB 上的任意点 A 作 CD 的平行线, 则这条直线既在平面 α 内又在平面 β 内, 所以这条直线就是平面 α 和 β 的交线 AB. 因此 $AB \parallel CD$.

3013. 分别过两已知平行线中一条直线的两个平面的交线, 必平行于两已知平行直线.



解 设 AB、CD 为互相平行的两条直线, α、β 分别为过 AB、CD 的两个平面, 它们的交线为 EF.

因为平面 β 过与 AB 平行的直线 CD,

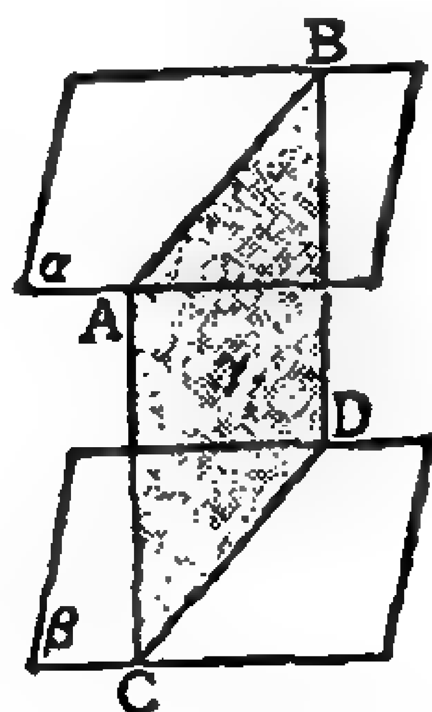
$$\therefore\ AB \parallel \beta.$$

又平面 α 过与平面 β 平行的直线 AB, 所以平面 α 和 β 的交线 EF 与 AB 平行, 即

$$EF \parallel AB.$$

同理, $\qquad EF \parallel CD.$

3014. 如果两个平行平面和第三个平面相交, 则它们的交线平行.



解 设 α、β 为两个平行平面, 第三个平面 γ 和 α、β 的交线分别为 AB、CD. 因为 $\alpha \parallel \beta$, 所以 AB、CD 不相交. 又因 AB、CD 在同一平面 γ 内, 故 $AB \parallel CD$.

3015. 与两平行平面中一个平面相交的直线, 必与其中另一平面相交.

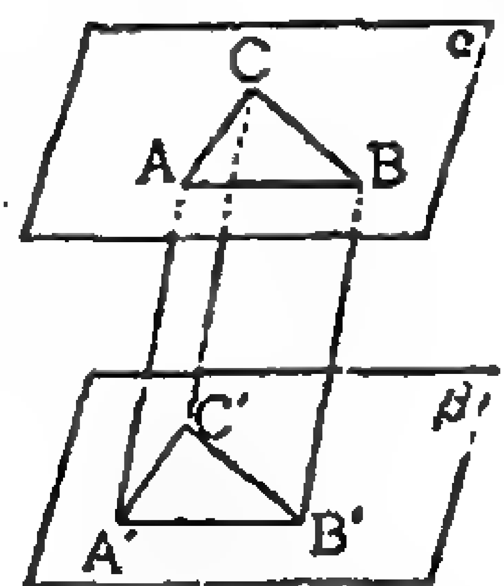
解 设直线 l 和两平行平面 α、β 中的 α 相交于点 A.





若直线 l 和平面 β 不相交, 则有 $l \parallel \beta$. 由 $\alpha \parallel \beta$ 可知, 过 α 上的点 A 且与 β 平行的直线 l 必在 α 上, 这就与 l 和 α 相交的假定相矛盾, 所以 l 与 β 不平行, 即 l 必与 β 相交.

3016. 如果不在同一平面上的三条平行线段等长, 则过这三条线段端点的两个平面平行.



解 设 $AA' \perp\!\!\!\!\!= BB' \perp\!\!\!\!\!= CC'$, 则 $AA'B'B$ 是平行四边形,

$$\therefore\ AB \parallel A'B'.$$

同理, $BC \parallel B'C'$.

又 AB、BC 相交于 B, $A'B'$、$B'C'$ 相交于 B', 因此, 包含三条线段一端 A、B、C 的平面 α 和包含三条线段另一端 A'、B'、C' 的平面 β 平行.

3017. 如果不在同一平面上的两个角的对应边同向平行, 那么每个角的两条边所确定的两平面平行.

解 在平面 α、β 上分别作 $\angle ABC$、$\angle A'B'C'$, 设 $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$. 在 $B'A'$

上取A''，使

$$BA=B'A''.$$

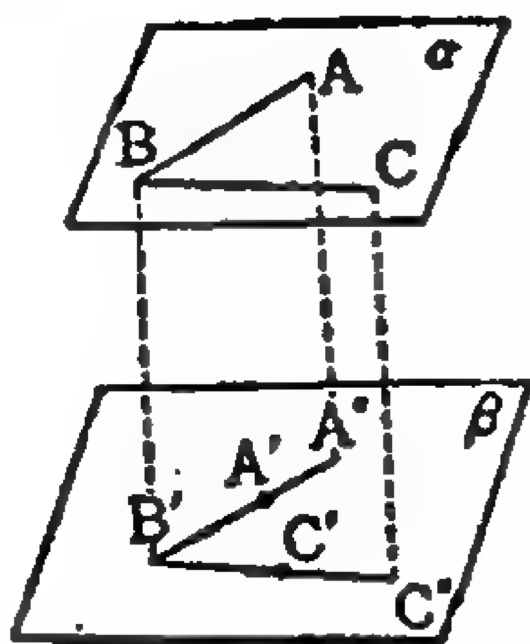
在$B'C'$上取C''，使

$$BC=B'C'',$$

则$ABB'A''$、$CBB'C''$都是平行四边形，所以

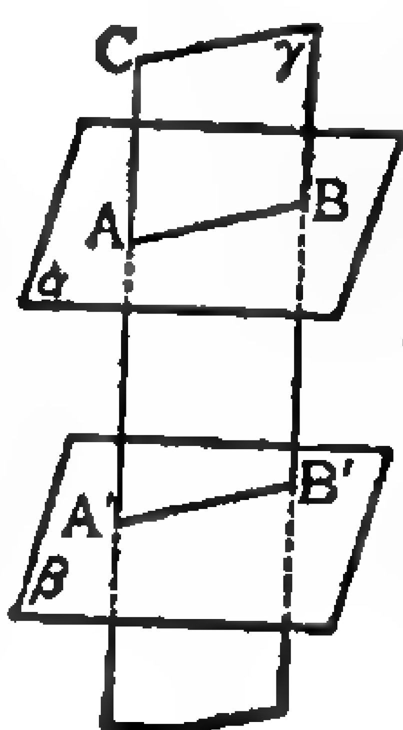
$$AA''\perp\!\!\!\!= BB'\perp\!\!\!\!= CC''.$$

因此，由上题知$\alpha /\!/ \beta$。



3018. 与两平行平面中一个平面相交的平面，必与其中另一个平面相交。

解 设α、β为两个平行平面，第三个平面γ与α相交于AB。如图，在平面γ内引直线AC，由$\alpha /\!/ \beta$可知，如AC与α相交于A，则AC也和β相交(问题3015)。设这个交点为A'，过A'作AB的平行线$A'B'$，则$A'B'$在平面β内，从而平面$(CA', A'B')$与平面γ重合，故平面γ和平面β相交于直线$A'B'$。



3019. 若三个平面α、β、γ互相平行，两条直线与这三个平面分别交于A、B、C，A'、B'、C'，则

$$AB:BC=A'B':B'C'.$$

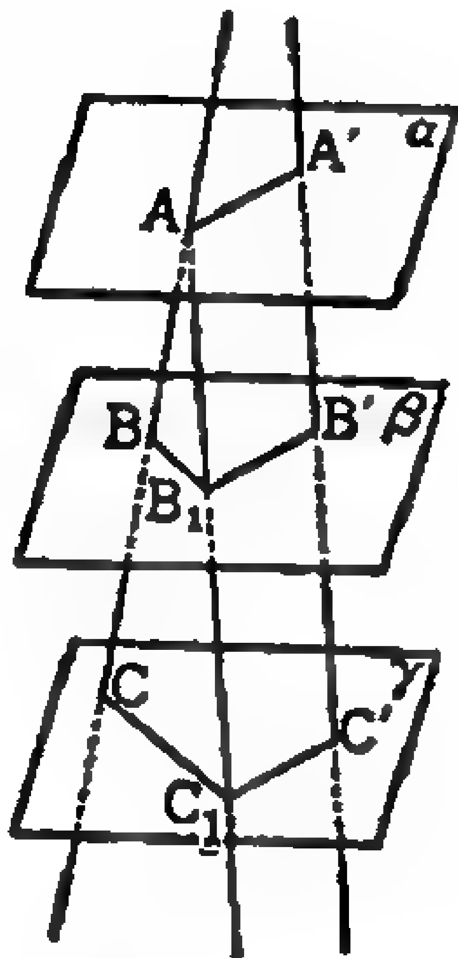
解 过A引直线$A'B'C'$的平行线，设它和平面β及γ的交点分别为B_1、C_1，则AA'、B_1B'、C_1C'分别是平面$(A'C', AC_1)$和平面α、β、γ的交线，所以

$$AA' /\!/ B_1B' /\!/ C_1C'.$$

$\because$ $AB_1C_1 /\!/ A'B'C'$,

$\therefore$ $AB_1=A'B'$,

$B_1C_1=B'C'$.



又BB_1、CC_1分别是平面(AC, AC_1)和平面β、γ的交线，所以

$$BB_1 /\!/ CC_1,$$

从而 $AB:BC=AB_1:B_1C_1=A'B':B'C'$.

3020. 如果两条直线在两相交平面的每个平面内的射影都平行，则这两条直线平行。

解 设两条直线l、m，在两相交平面α、β内的射影分别为l'、m'，l''、m''，且$l' /\!/ m'$，$l'' /\!/ m''$。则由于l和l'在同一平面内，m和m'在同一平面内，且$l' /\!/ m'$，所以

平面(l, l')

$/\!/$平面(m, m')，

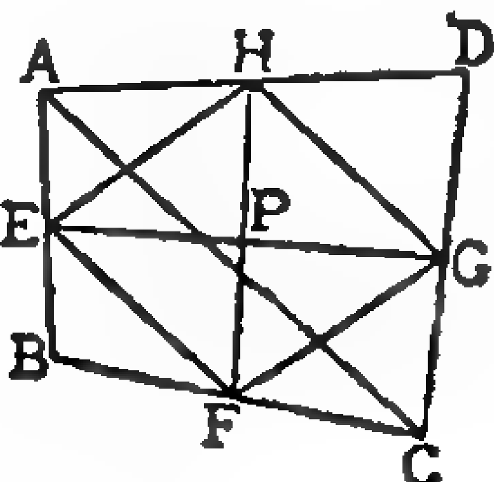
从而

直线$l /\!/$平面(m,m')。

同理，

直线l

$/\!/$平面(m', m'')。



故直线l和两平面(m, m')、(m, m'')的交线m平行。

注 如果l、m与α、β的交线垂直，则$l /\!/ m$。

3021. 设A、B、C、D为空间的四点，E、F、G、H分别为线段AB、BC、CD、DA的中点，则

(1) 直线EG和FH相交；

(2) 设EG和FH的交点为P，则P是到A、B、C、D的距离平方和为最小的点。

A H D E P G B F C

解 (1) $EF\perp\!\!\!\!= \dfrac{1}{2}AC$, $HG\perp\!\!\!\!= \dfrac{1}{2}AC$,

$\therefore$ $EF\perp\!\!\!\!= HG$.

于是$EFGH$是平行四边形，其对角线EG和FH互相平分。因此线段EG和FH在其中点P处相交。

(2) 取点P以外的任意点P'，则

$$AP'^2+BP'^2=2(AE^2+EP'^2),$$

$$CP'^2+DP'^2=2(CG^2+GP'^2).$$

$$\therefore\ AP'^2+BP'^2+CP'^2+DP'^2$$

$$=2(AE^2+CG^2)+2(EP'^2+GP'^2)$$

$$=\frac{1}{2}(AB^2+CD^2)+2[2(EP^2+PP'^2)]$$

$$=\frac{1}{2}(AB^2+CD^2)+EG^2+4PP'^2.$$

由于AB^2、CD^2、EG^2是定值，所以当$PP'=0$，即点P和P'重合时，点P'到A、B、C、D的距离的平方和为最小。即P是到A、B、C、D的距离的平方和为最小的点。

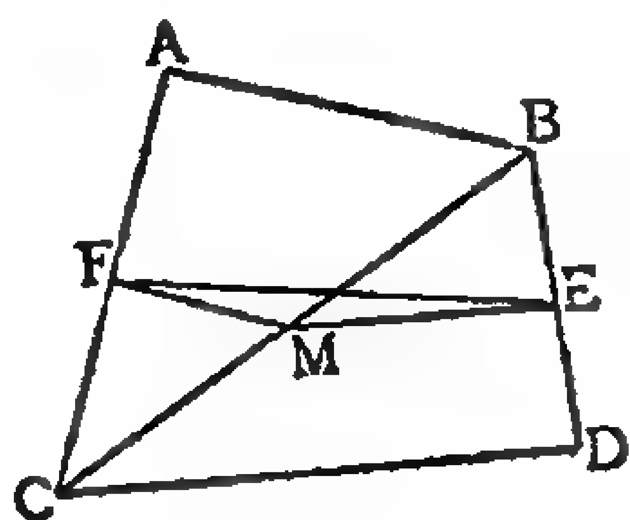
3022. 已知空间两线段 AB、CD，设线段 BD、AC 的中点分别为 E、F，

(1) 如果点 E 和 F 重合，问 AB、CD 有什么关系？

(2) 在 $AB+CD\geqslant 2EF\geqslant AB\sim CD$ 中，如果等号成立，问 AB、CD 的位置怎样？

(3) 设 P 为 AB 上的任意一点，Q 为 CD 上的任意一点，问线段 PQ 中点的轨迹是什么？

解 (1) 当点 E 和 F 重合时，AB、CD 在同一平面内，且四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，所以 $ABCD$ 是平行四边形。从而

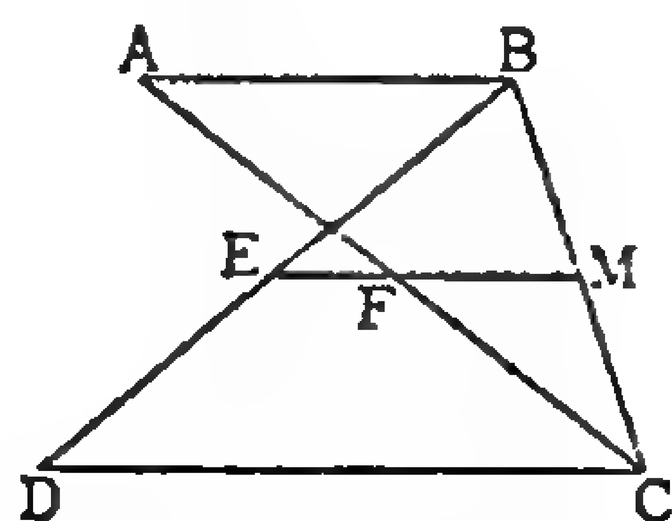


$$AB\parallel DC.$$

(2) 设 BC 的中点为 M，则

$$MF=\frac{1}{2}AB,\ ME=\frac{1}{2}CD.$$

如果 M、E、F 不在同一直线上，则



$$ME+MF>EF>ME\sim MF,$$

从而

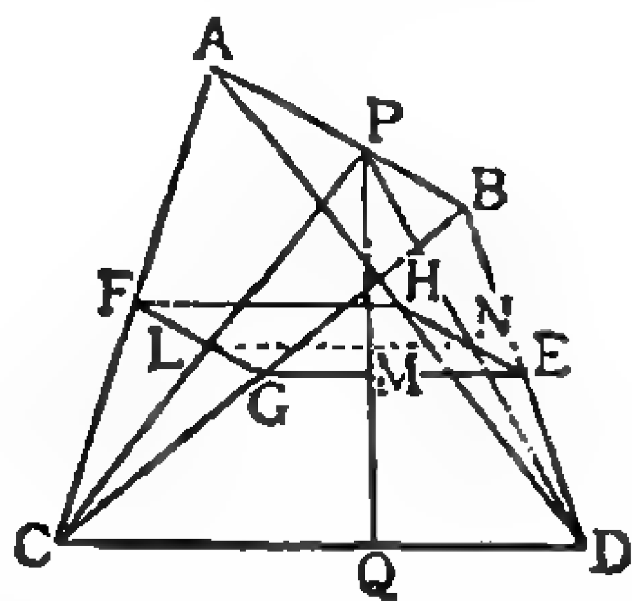
$$AB+CD>2EF>AB\sim CD.$$

如果上式中有等号成立，只须 FME 成一直线，即

$$AB\parallel CD.$$

注 特别地，当 $2EF$ 和 $AB\sim CD$ 相等，则 AB、CD 的位置关系如上图。

(3) 如图，设 E、F、G、H 分别为 DB、CA、CB、AD 的中点，则



$$GE=FH=\frac{1}{2}CD,$$

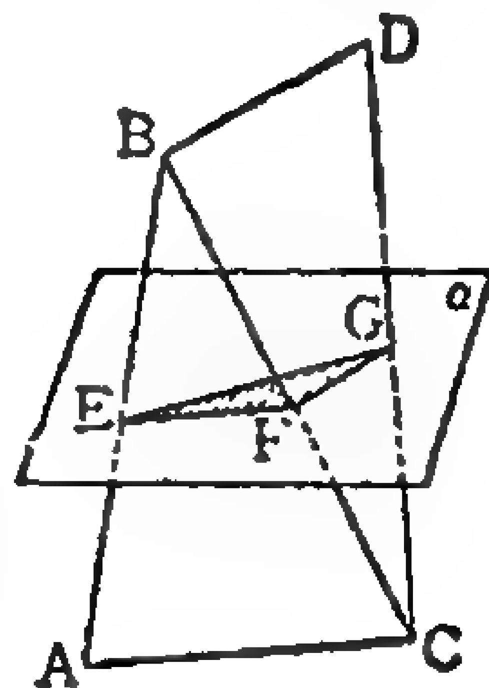
$$GF=EH=\frac{1}{2}AB,$$

$\therefore$ $FGEH$ 是平行四边形。

设 CP 和 FG 的交点为 L，DP 和 EH 的交点为 N，则 L、N 分别是 PC、PD 的中点，所以 PQ 的中点 M 在 LN 上。从而 M 在平行四边形 $FGEH$ 上。因此，点 M 的轨迹是平行四边形 $FGEH$。

3023. 设 AB、BC、CD 是不在同一平面的三条线段，则过这三条线段中点的平面平行于 AC 和 BD。

解 设三线段 AB、BC、CD 的中点分别为 E、F、G，则



$$EF\parallel AC,$$

$$FG\parallel BD.$$

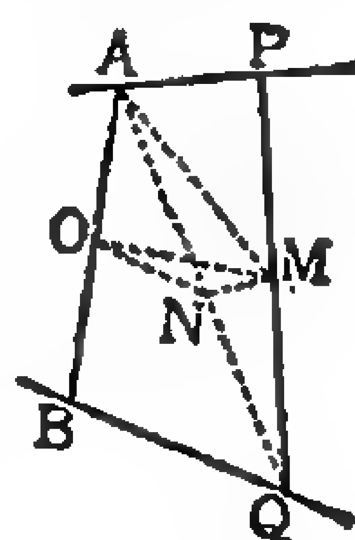
设包含 EF、FG 的平面为 α，则

$$\alpha\parallel AC,\quad ①$$

$$\alpha\parallel BD.\quad ②$$

从①、②，可知 α 平行于 AC 和 BD。

3024. 已知不在同一平面的两个三角形 ABC 和 DEF，设连结对应顶点 A 和 D、B 和 E、C 和 F 所得的三直线相交于一点 O，对应边 AB 和 DE、BC 和 EF、CA 和 FD 的交点分别为 X、Y、Z，则 X、Y、Z 在同一直线上。反过来，也成立。[笛沙格定理]



解 设平面 ABC 和 DEF 的交线为 l，则 AB 和 DE 的交点 X 在直线 l 上。同理，Y、Z 都在直线 l 上，所以 X、Y、Z 在同一直线 l 上。

反之，若 DE、AB 交于点 X，则 $DABE$ 为一平面。同理，$EBCF$、$FCAD$ 都是平面，因为它们不平行，所以它们有公共点 O。

3025. 设互相垂直的两条异面直线的距离为 a，两端点分别在这两条异面直线上的动线段 PQ 的长为 $l(l>a)$，PQ 的中点为 M，则

(i) M 在定平面上；(ii) M 在定曲线上。

解 (i) 如图，设两异面直线的公垂线为 AB，AB、AQ 的中点分别为 O、N，则

A
P
O
M
N
B
Q

$$ON\parallel BQ,\ NM\parallel AP,$$

$$\therefore\ AO\perp ON,\ AO\perp NM,$$

从而　　$AO\perp$ 平面 OMN。

因此点 M 在过点 O 且垂直于 AO 的平面 π

内。

(ii) $\because$ $AP\perp AB$, $AP\perp BQ$,

$AP\perp$平面 ABQ。

$\therefore$ $\angle PAQ=\angle R$,

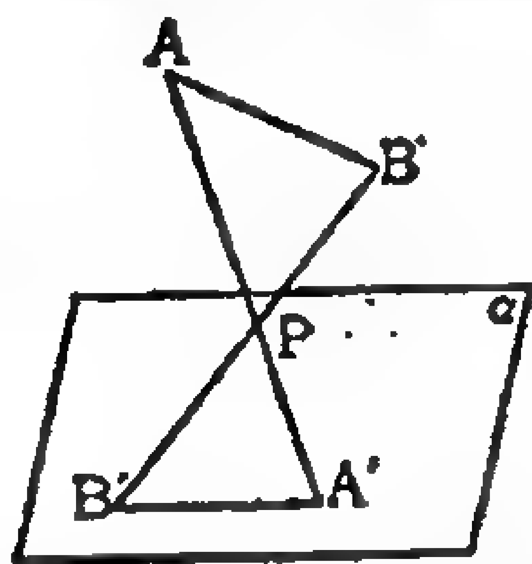
从而 $AM=\frac{1}{2}PQ=\frac{l}{2}$。

又由 $AO\perp$平面 OMN, 知 $AO\perp OM$,

$\therefore$ $OM=\sqrt{AM^2-AO^2}=\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{2}$.

因此, M 是在平面 π 上以 O 为圆心, 以 $\frac{1}{2}\sqrt{l^2-a^2}$ 为半径的定圆上。

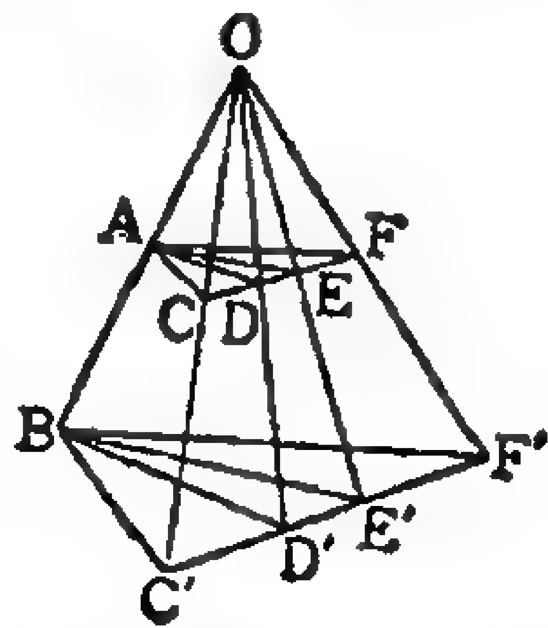
3026. 已知平面 α 和与它不平行的线段 AB, 任取一点 P, 设 AP、BP 或其延长线和 α 的交点分别为 A'、B', 则无论 P 的位置怎样, 直线 $A'B'$ 总过一定点。



解 APA'、BPB' 是相交于点 P 的两直线, 它们可以确定一个平面。因为 AB 不与 α 平行, 所以 $A'B'$ 也不与 AB 平行, 即它们必相交。设这个交点为 S, 则 S 就是直线 AB 和 α 的交点, 它是一个定点。所以不论 P 的位置怎样, $A'B'$ 总通过定点 S。

3027. 如果一条直线和一个平面相交, 则过这条直线的平面和已知平面的交线都通过已知直线和已知平面的交点。如果一条直线和一个平面平行, 则通过已知直线的平面和已知平面的交线都平行于已知直线, 并且这些交线也相互平行。

解 设过已知直线 AB 的若干平面为 AC' (平面 $ABC'C$), AD'、AE'、… 都和已知平面 CF' (平面 $CC'F'F$) 相交, 其交线分别为 CC'、DD'、EE'、FF'、…。



(i) 如果直线 AB 和平面 CF' 相交于点 O, 则交线 CC'、DD'、… 都过点 O。

点 O 既在直线 AB 上, 又在平面 AC' 和 CF' 上, 所以点 O 在两平面 AC' 和 CF' 的交线 CC' 上, 因此 CC' 必过点 O。

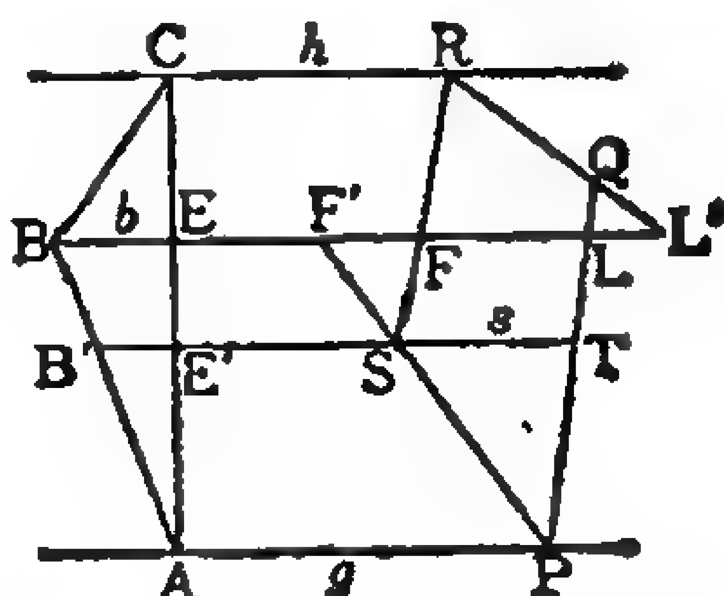
同理, 其他交线 DD'、EE'、… 也都过点 O。

(ii) 如果 $AB\parallel$平面 CF', 则由问题 **3011**, 知 $CC'\parallel DD'\parallel EE'\parallel\cdots\parallel AB$。

3028. 设 $\triangle ABC$ 和四边形 $PQRS$ 在同一平面上, 通过 A、P 的直线 g 和通过 C、R 的直线 h 平行。如果与 g 平行的直线被这两个图形所截取的线段总是相等的。

(i) 问 B、Q、S 的位置关系怎样?

(ii) 证明这两个图形的面积相等。(卡瓦埃利原理)



解 (i) 设过 B、S 且与 h、g 平行的两直线分别为 b、s。b、s 和 $\triangle ABC$、四边形 $PQRS$ 或其延长线的交点, 如图中所记的字母, 则依题意得

$$\left.\begin{array}{l}BE=FL,\\ B'E'=ST.\end{array}\right\}\qquad ①$$

因为 $b\parallel s\parallel g$, 所以

$$\frac{B'E'}{BE}=\frac{AE'}{AE}=\frac{PS}{PF'}=\frac{ST}{F'L'},\qquad ②$$

于是由 ① $ST=B'E'$, 可知 $BE=F'L$。又由 ① $BE=FL$, 可知 $FL=F'L$, 因而 F 与 F' 必重合。

同理, 如上图, L 与 L' 重合。

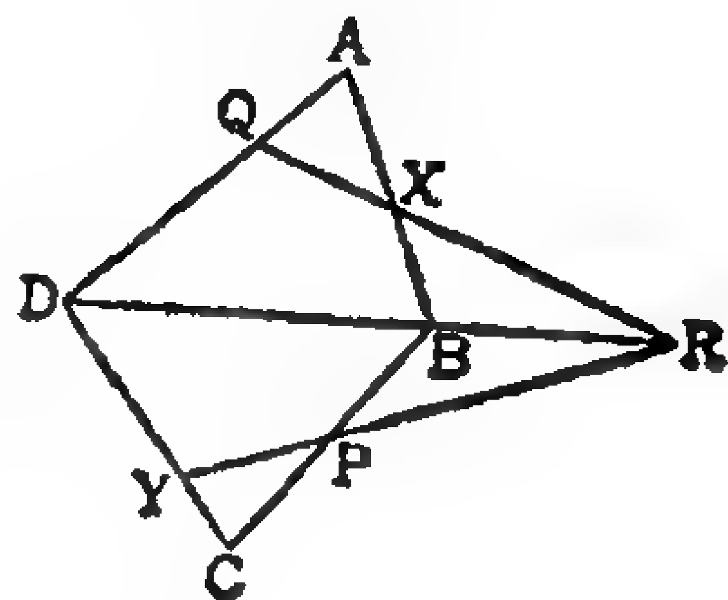
这样, S、F、F' 三点重合于一点。Q、L、L' 三点重合于一点, 故 B、S、Q 在同一直线上。

(ii) 如上图, 三点 B、S、Q 在一直线上且 $BSQ\parallel g$, 同时 BSQ 就是被已知两图形所截取的线段。由于 BSQ 分别被 $\triangle ABC$ 和四边形 $PQRS$ 所截取的两个部分总相等, 所以这两个图形的面积也相等。

3029. 设四边形 $ABCD$ 的四条边不在同一平面内, 在边 AB、BC、CD、DA 上, 分别取点 X、Y、P、Q, 使

$AX:XB=DY:YC$, $BP:PC=AQ:QD$,

则 XY、PQ 在同一平面内。



解

$\because$ $AX:XB=DY:YC$,

$BP:PC=AQ:QD$.

所以, 当 $AX:XB=AQ:QD$ 时, 则

$$BP:PC=DY:YC,$$

且 $QX \parallel DB \parallel YP$，所以两直线 QX 和 YP 在同一平面内，从而 XY 和 PQ 也在同一平面内。

当 $AX:XB \neq AQ:QD$ 时，则 QX 和 DB 不平行，它们必相交。设其交点为 R，可以证明 YP 的延长线也通过 R。

在 $\triangle ADB$ 的横截线 QXR 上使用美奈劳斯定理，得

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1. \qquad ①$$

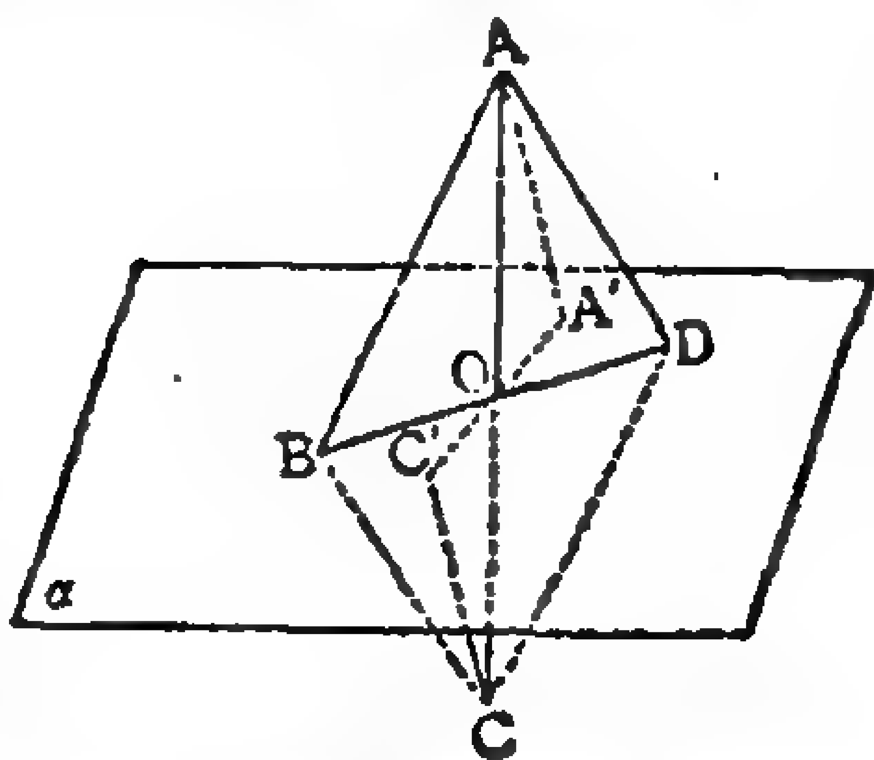
把 $\frac{AX}{XB}=\frac{DY}{YC}$、$\frac{DQ}{QA}=\frac{CP}{PB}$ 代入上式，则得

$$\frac{DY}{YC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BR}{RD}=1.$$

因此，R、P、Y 在同一直线上，从而 QX 和 PY 在同一平面内，并相交于 R。

注　本题的四边形叫做空间四边形。

3030. 平行四边形的一条对角线的两端点到过另一条对角线的平面的距离相等。

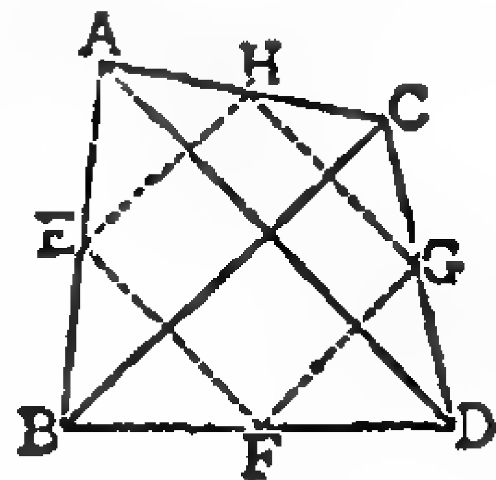


解　设 ▱$ABCD$ 的两条对角线的交点为 O，过其对角线 BD 的平面为 α。从 A、C 向平面 α 引垂线，其垂足分别为 A'、C'，则

$$AO=CO,\ \angle AOA'=\angle COC',$$
$$\angle A'=\angle C'=\angle R,$$
$$\therefore\ \triangle AOA' \cong \triangle COC'.$$

故　　$AA'=CC'$.

3031. 四面体 $ABCD$ 被与对棱 AD、BC 平行的一平面所截，已知截口为矩形，问四面体 $ABCD$ 具有什么特征。



解　四面体 $ABCD$ 被与其对棱 AD、BC 平行的平面截开，设截口为 $EFGH$（如图），则

$$EH \parallel FG \parallel BC,$$
$$HG \parallel EF \parallel AD.$$

故 $EFGH$ 为平行四边形。今知 $EFGH$ 是矩形，则它的各角须为直角，因此 $AD \perp BC$。

3032. 四面体 $ABCD$ 中，$BC=AC$，$BD=AD$。

(i) 设从 B 引 CD 的垂线的垂足为 E，从 A 引 BE 的垂线的垂足为 H，则 AH 和底面 BCD 垂直。

(ii) 设 BC 的长为 a，CD 的长为 b，$\angle BCD$、AB 和底面 BCD 的交角都是 $60°$，

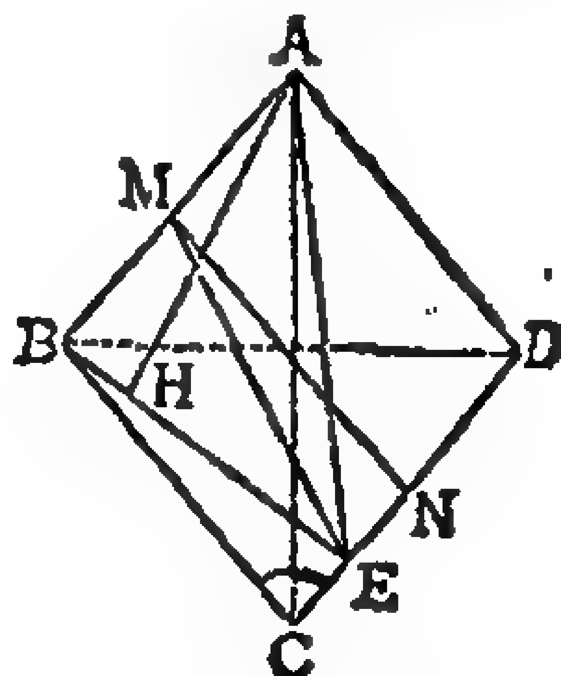
(1) 求 AB 的长；

(2) 设 AB、CD 的中点分别为 M、N，求 $\triangle EMN$ 的面积。

解　(i) $\because$　$CA=CB$，$DA=DB$，

$\therefore$　$\triangle ACD \cong \triangle BCD$　（三边相等）。

因而由 $BE \perp CD$，可知 $AE \perp CD$，于是 AE、BE 都垂直于 CE，



$\therefore$　$CE \perp$ 平面 ABE，

从而　　$AH \perp CE$.

又知　　$AH \perp BE$，

$\therefore$　$AH \perp$ 平面 $(CE,\ BE)$，

即　$AH \perp$ 平面 BCD。

(ii) $\because$　$\angle BCE=60°$，$\angle BEC=\angle R$，

$$BC=a,\quad \therefore\ BE=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

又根据(i)的证明，知

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD,\quad \therefore\ AE=BE.$$

又 $\angle ABE=60°$，所以 $\triangle ABE$ 是正三角形。

(1) $AB=BE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$；

(2) 由(i)的证明，知 $CD \perp$ 平面 AEB，

$$\therefore\ \angle MEN=\angle R.$$

因为 $\triangle AEB$ 是正三角形，M 是 AB 的中点，所以

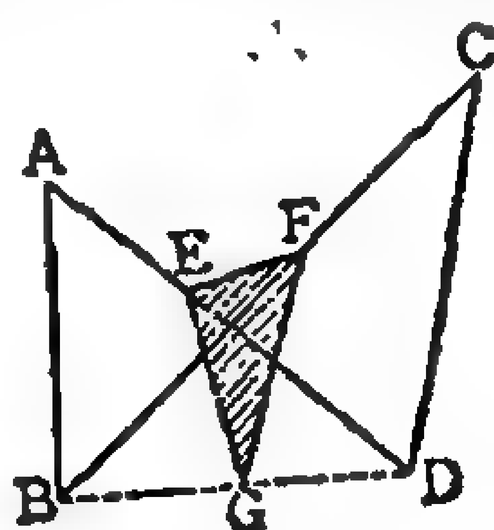
$$ME=\frac{\sqrt{3}}{2}BE,\quad 又\quad BE=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$
$$\therefore\ ME=\frac{3}{4}a.$$

又　　$EN=CN-CE=\dfrac{b-a}{2}$，

$$\therefore\ S_{\triangle MEN}=\frac{1}{2}ME\cdot EN=\frac{3a(b-a)}{16}.$$

3033. 证明与空间四边形的一组对边平行的平面，分另一组对边的比相同。

解 设空间四边形为 $ABCD$，与其一组对边 AB、CD 平行的平面为 α，α 截另一组对边 AD、BC 的截点分别为 E、F，α 和对角线 BD 的交点为 G。连结 EG、FG，则由 $AB\parallel\alpha$，知



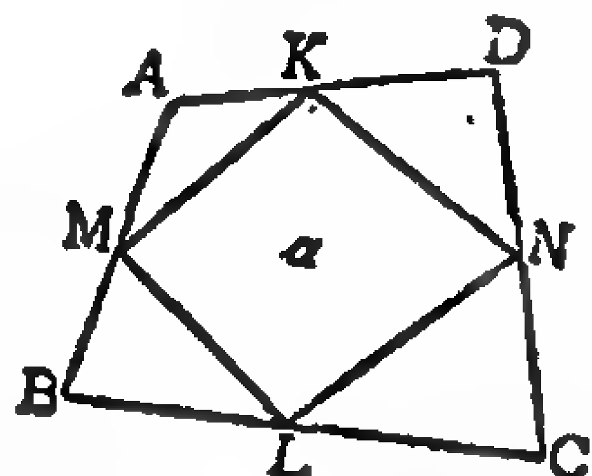
$$AB\parallel EG,\quad 同理\quad CD\parallel FG.$$

$$\therefore\ AE:ED=BG:GD,$$

$$BG:GD=BF:FC.$$

从而 $$AE:ED=BF:FC.$$

3034. 通过空间四边形一组对边中点的任意平面，分另一组对边为等比。



解 设空间四边形 $ABCD$ 的对边 AB、CD 的中点分别为 M、N，通过 MN 的任意平面 α 和这个四边形的另一组对边的交点分别为 L、K。从四边形各顶点向平面 α 所作的垂线分别为 AA'、BB'、CC'、DD'，由于 M、N 分别是 AB、CD 的中点，可知

$$AA'=BB',\ DD'=CC'.$$

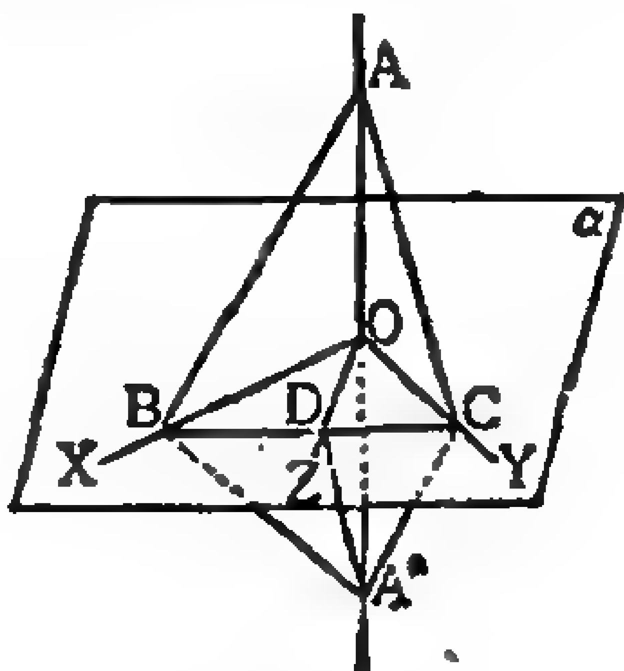
又因 K、A'、D' 在一直线上，L、C'、B' 在一直线上。$AA'\parallel DD'$，$BB'\parallel CC'$，

$$\therefore\ AK:KD=AA':DD',$$

$$BL:LC=BB':CC',$$

于是 $$AK:KD=BL:LC.$$

3035. 直线 AO 和平面 α 相交于点 O，且垂直于 α 内的两直线 OX、OY，则 AO 与平面 α 上过点 O 的任意直线都垂直。



解 在平面 α 内过点 O 作不与 OX、OY 重合的任意直线 OZ，再作与 OX、OY、OZ 分别交于点 B、C、D 的直线 BCD。在 AO 的延长线上取点 A' 使 $OA'=OA$。分别连结 AB、AC、AD、$A'B$、$A'C$、$A'D$，则 OX 是线段 AA' 的垂直平分线，所以

$$AB=A'B.$$

又 OY 也是线段 AA' 的垂直平分线，

$$\therefore\ AC=A'C.$$

$$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle A'BC\quad(三边相等),$$

从而 $$\angle ABC=\angle A'BC.$$

于是 $$\triangle ABD\cong\triangle A'BD\quad(两边夹角相等),$$

$$\therefore\ AD=A'D.$$

故 $$\triangle AOD\cong\triangle A'OD\quad(三边相等),$$

$$\angle AOD=\angle A'OD.$$

$$\therefore\ AO\perp OD\quad 即\quad AO\perp OZ.$$

因此，AO 垂直于平面 α 内过 O 的任意直线。

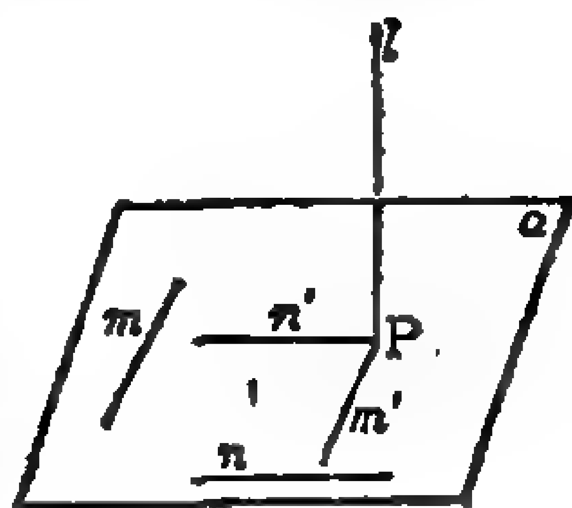
注1 一直线 AO 和平面 α 相交于点 O，且垂直于平面 α 内过点 O 的所有直线，则 AO 叫做平面 α 的垂线。

2 在空间，两直线 a 和 b 相交，过 a 上任一点引 b 的平行线 b'，则 a 和 b' 的夹角叫做 a 和 b 所成的角。

因此，直线 AO 和平面 α 相交于点 O，如果 AO 垂直于 α 内的不是平行的两直线（不一定过点 O），则 AO 垂直于平面 α 内的所有直线（包括不过点 O 的直线）。

如直线 m 垂直于平面 α 上相交的两直线，则 $m\perp\alpha$。反过来，如直线 $m\perp$ 平面 α，则 m 垂直于平面 α 内的任意直线。

3036. 一直线 l 垂直于平面 α 内的两条相交直线 m、n，则 l 垂直于平面 α 上的所有直线，因而 l 和 α 互相垂直。

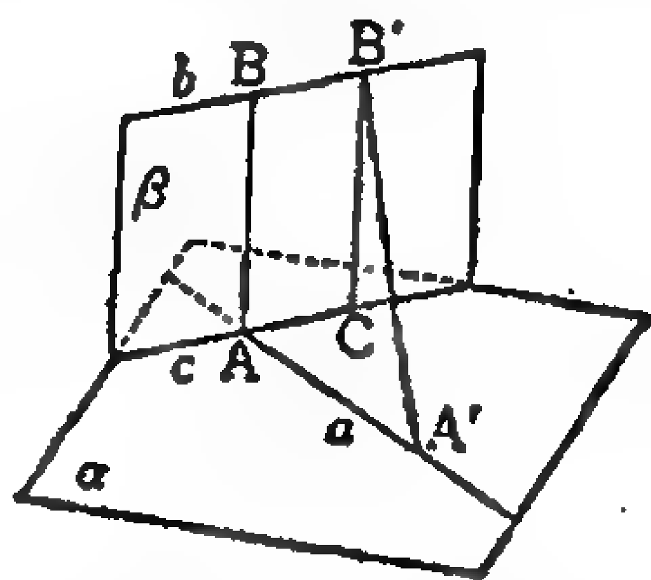


解 过 l 和 α 的交点 P，在 α 内引直线 m、n 的平行线 m'、n'，则

$$l\perp m',\ l\perp n'.$$

所以由问题 **3035**，知 $l\perp\alpha$。

3037. 与两异面直线都垂直相交的直线有且仅有一条。



解 作包含 a 且和 b 平行的平面 α，包含 b 且和 α 垂直的平面 β。设 α、β 的交线为 c，则 c 一定和 a 相交。事实上，已知 $c\parallel b$，如果 $c\parallel a$，则有 $a\parallel b$，这与题设是矛盾的。

设 c 和 a 的交点为 A，在平面 β 上过点 A 作 b 的垂线，它和 b 相交于点 B，则因

$c /\!/ b$, $AB \perp c$.

$\therefore \quad AB \perp b$.

又因 AB 在 β 内且与互相垂直的两平面 α、β 的交线 c 垂直，所以 $AB \perp \alpha$，从而

$$AB \perp a.$$

因此，AB 就是与异面直线 a、b 都垂直相交的直线。

其次，假设 $A'B'$ 为不与 AB 重合，且与异面直线 a、b 都垂直相交的直线，即

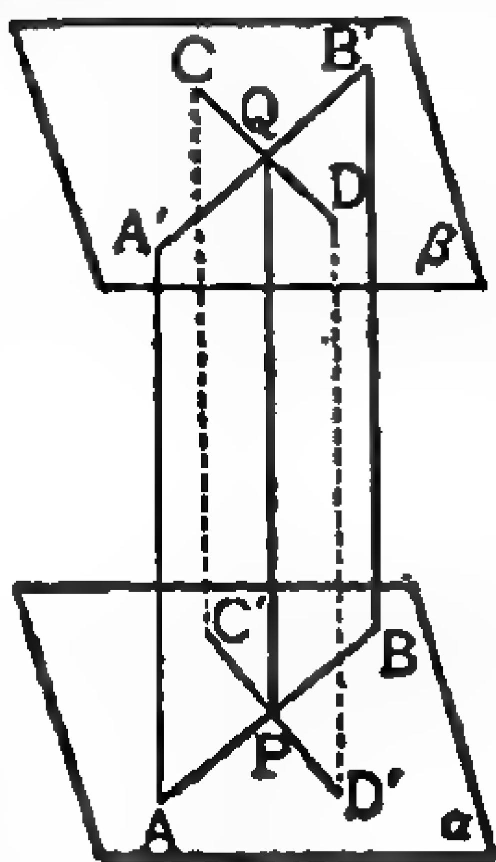
$$A'B' \perp a, \quad A'B' \perp b.$$

由于 $b /\!/ c$，所以 $A'B'$ 和 a、c 都垂直，从而

$$A'B' \perp \alpha.$$

由于 $AB \perp \alpha$，所以 $A'B' /\!/ AB$，$BAA'B'$ 可确定一个平面，这样，b 和 a 就在同一平面内，它与题设矛盾，因此异面直线 a、b 的公垂线有且仅有一条即 AB。

3038. 已知两异面直线 AB、CD. 在过 AB 且与 CD 平行的平面 α 内，CD 的射影和 AB 的交点为 P。在过 CD 且与 AB 平行的平面 β 内，AB 的射影和 CD 的交点为 Q，则 PQ 和 AB、CD 都垂直。



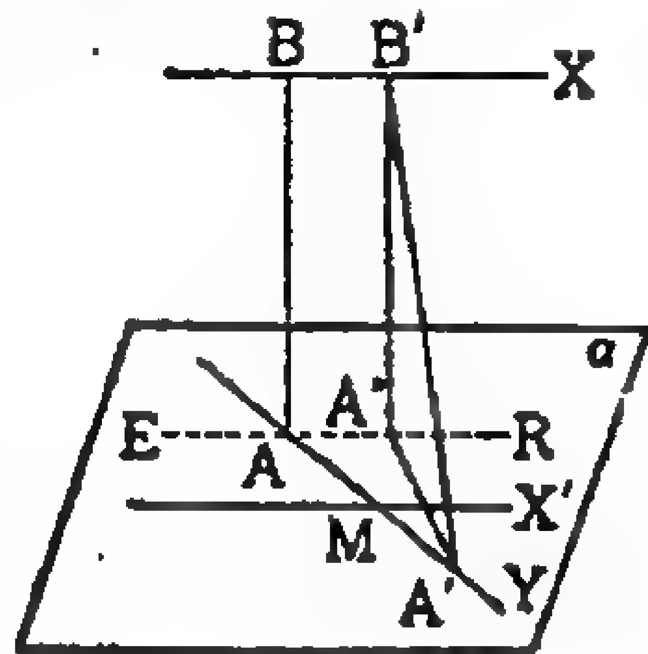
解　如图，$C'D'$ 是直线 CD 在平面 α 内的射影，所以 CC'、DD' 都与 α 垂直，从而平面 $CC'D'D$ 垂直于平面 α。同样，平面 $AA'B'B$ 也垂直于平面 α。因此这两个平面 $CC'D'D$ 和 $AA'B'B$ 的交线 PQ 与平面 α 垂直，于是

$$PQ \perp AB.$$

同理，$\qquad PQ \perp CD.$

所以 PQ 是异面直线 AB、CD 的公垂线。

3039. 作已知两直线的公垂线，并证明它是已知两直线间的最短距离。



解　(i) 设 X、Y 为两条定直线，从 Y 上的一点 M 引 X 的平行线 X'。设 X'、Y 所确定的平面为 α，则 α 与 X 平行。设 X 在平面 α 内的射影为 ER，它和 Y 的交点为 A，从 A 向 X 引垂线 AB，则 AB 就是 X、Y 的公垂线。这是因为：

ER 是直线 X 在平面 α 上的射影，

$\therefore \quad$ 平面$(X, ER) \perp \alpha$，

从而 $\qquad AB \perp \alpha$，

故 $\qquad AB \perp Y$, $AB \perp ER$.

即 $\qquad AB \perp X$ 且 $AB \perp Y$.

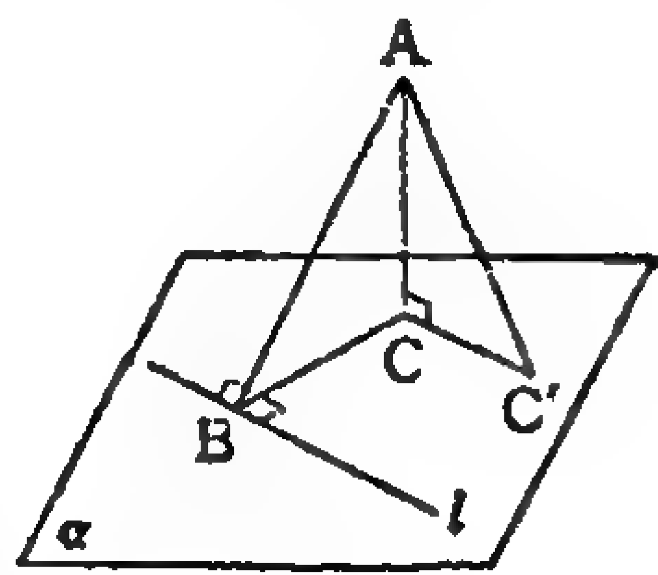
(ii) 现在证明 AB 是 X、Y 间的最短距离。在 X 上取一点 B'，在 Y 上取一点 A'，从 B' 作 ER 的垂线 $B'A''$，则

$$B'A'' \perp \alpha, \quad \therefore \quad B'A'' \perp A'A''.$$

从而 $\qquad B'A' > B'A'' = AB$,

故 AB 是 X、Y 间的最短距离。

3040. 从平面外一点作这个平面的垂线(最短线)，有且仅有一条。

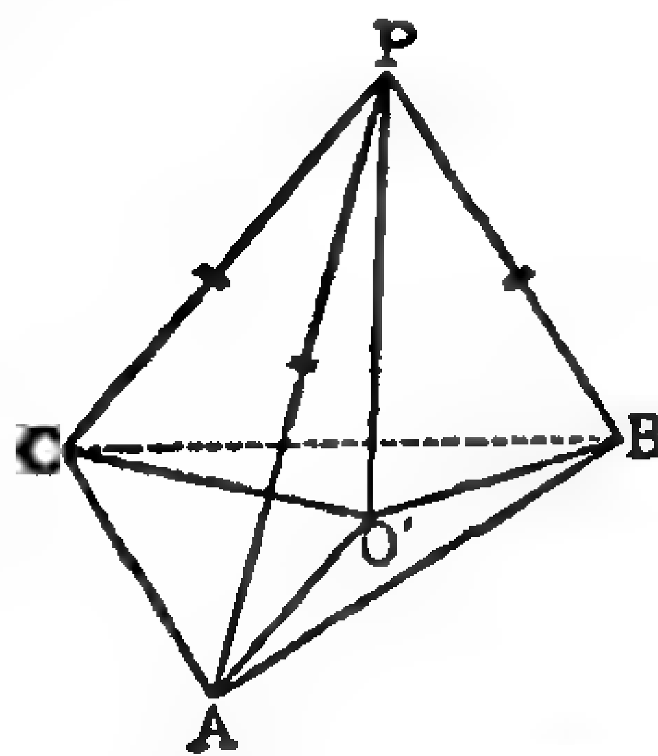


解　从点 A 作平面 α 内的任意直线 l 的垂线 AB，过 B 在 α 内作 l 的垂线 BC，再过 A 作 BC 的垂线 AC，则根据三垂线定理(问题 **3043**)，知

$$AC \perp \alpha.$$

在 α 内取 C 以外的任一点 C'，则由 $AC \perp \alpha$ 知，$\angle ACC' = \angle R$，$AC < AC'$，所以从 A 作 α 的垂线仅有一条。

3041. 与三点 A、B、C 等距离的点 P，必在通过三角形 ABC 的外心 O 且与平面 ABC 垂直的直线上。



解　从点 P 向平面 ABC 引垂线 PO'，垂足为 O'，则由 $PA = PB = PC$，知三个直角三角形 $AO'P$、$BO'P$、$CO'P$ 全等，所以

$$AO' = BO' = CO',$$

即 O' 为 $\triangle ABC$ 的外心。因此点 O' 和 O 是同一点。故点 P 在过 $\triangle ABC$ 的外心 O，且与平面 ABC 垂直的直线 OP 上。

3042. 已知 g 和 h 是两异面直线。

(1) 证明包含 g 且与 h 平行的平面有而且只有一个；

(2) 问包含 g 且与 h 平行的平面和包含 h 且和 g 平行的平面的位置关系怎样？

(3) 已知点 P 在 g 上运动，点 Q 在 h 上运动，问线段 PQ 的中点在什么样的面上运

动。

解　(1) 在g上任取一点A，设点A和直线h所确定的平面为β，在β内过A作h的平行线k。设g、k所确定的平面为α，则α就是包含g且与h平行的平面。

其次，证明唯一性。

设包含g且与h平行的平面，除α外还有一个平面α'，则平面α、α'的交线g平行于h，从而h、g在同一平面内。这与题设矛盾，所以包含g且与h平行的平面只有一个。

(2) 设包含g且与h平行的平面为γ，包含h且和g平行的平面为δ，则$\gamma /\!/ \delta$。事实上，如γ和δ有交线k，则$g /\!/ k$，$h /\!/ k$，从而$h /\!/ g$，这与题设矛盾，故$\gamma /\!/ \delta$（问题**3011**）。

(3) 设g、h上的动点分别为P、Q，g、h的公垂线和g、h的交点分别为A、B，AB的中点为O，PQ的中点为M，AQ的中点为N，则

$$MN /\!/ g,\quad ON /\!/ h。$$

所以平面OMN与g、h都平行。

又知　　$AB \perp g$，$AB \perp h$。

$\therefore$　$AB \perp MN$，$AB \perp ON$，

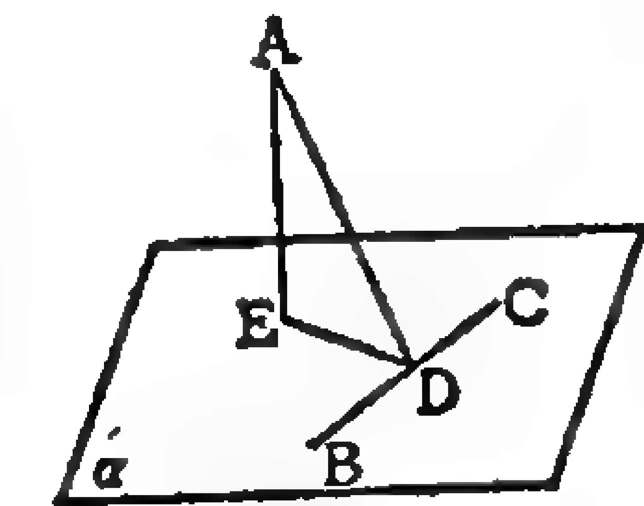
从而　　$AB \perp$ 平面OMN。

因此，PQ的中点M在过g、h的公垂线AB的中点O且垂直于AB的平面上。

3043．(1) 从一点A向不过此点的平面α上的直线BC引垂线，其垂足为D。在平面α上过D引BC的垂线DE，再过A引DE的垂线AE，则AE垂直于平面α。

(2) 若$\alpha \perp AE$，$AD \perp BC$，则$DE \perp BC$。

(3) 若$\alpha \perp AE$，$ED \perp BC$，则$AD \perp BC$。（三垂线定理）



解　(1) 因$AD \perp BC$，$DE \perp BC$，故BC垂直于AD、DE所确定的平面，即

$BC \perp$ 平面(AD, DE)，

即$BC \perp$ 平面ADE，从而$BC \perp AE$。

又由题设知$DE \perp AE$，

$\therefore$　$AE \perp$ 平面(BC, DE)，

但平面(BC, DE)就是平面α，

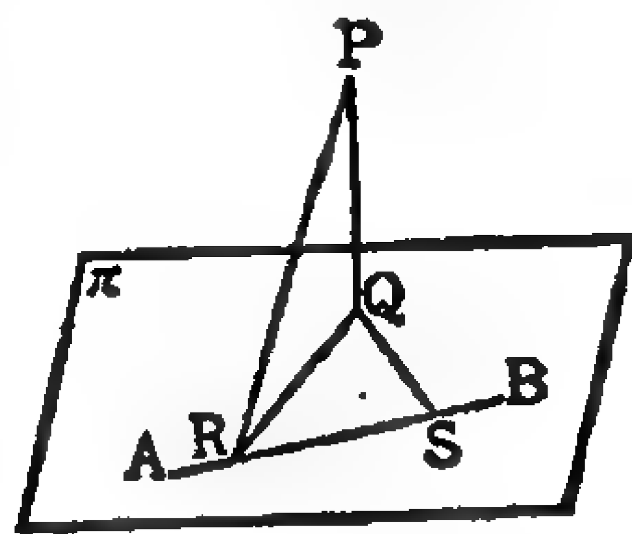
$\therefore$　$AE \perp \alpha$。

(2) 因为$\alpha \perp AE$，所以$BC \perp AE$。又知$BC \perp AD$，所以BC垂直于AD、AE所确定的平面AED，从而$BC \perp DE$。

(3) 因为$\alpha \perp AE$，所以$BC \perp AE$。又因$BC \perp ED$，所以BC垂直于AE、ED所确定的平面AED。故

$$BC \perp AD。$$

3044．已知定点P在平面外，点P在这个平面上的射影为Q。过Q作这个平面内的直线AB的垂线，其垂足为S。R为直线AB上的任意一点，讨论以下问题：



(1) $\angle PQR$的大小；

(2) $\angle PRS$和线段SR的关系（即把$\angle PRS$表示成线段SR的函数）；

(3) 当$PR+RQ$为最小时，点R的位置。

解　设已知平面为π。

(1) 因为$PQ \perp \pi$，QR是π内的直线，所以

$$PQ \perp QR,$$

从而　　$\angle PQR = 90°$。

(2) $\because$　$PQ \perp \pi$，$QS \perp AB$，

$\therefore$　$PS \perp AB$　（三垂线定理），

从而　　$\mathrm{tg}\angle PRS = \dfrac{PS}{RS}$。

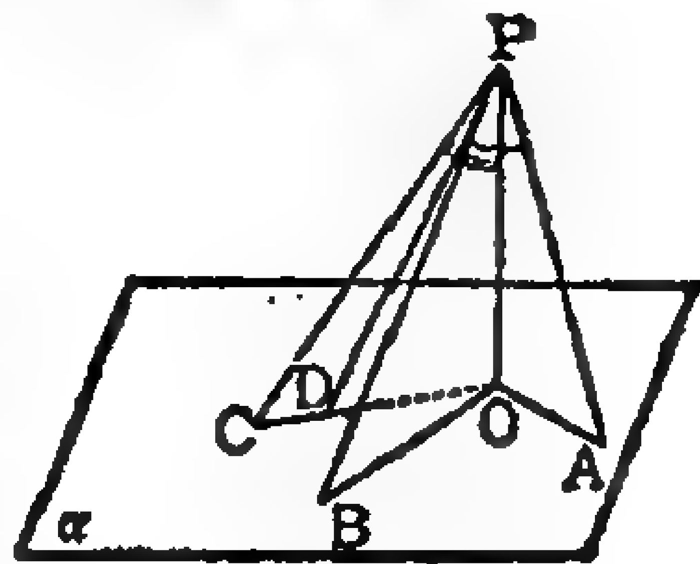
(3) $\because$　$PS \perp AB$，　$\therefore$　$PR \geqq PS$。

又　$\because$　$QS \perp AB$，　$\therefore$　$QR \geqq QS$。

因此　　$PR+QR \geqq PS+QS$，

即当R与S重合时，$PR+QR$最小。

3045．从平面外一点向这个平面引许多斜线，如果斜线和从此点向这个平面所引垂线的夹角相等，则这些斜线相等；如果夹角不等，则大角所对应的斜线较长。



解　设P为平面α外的一点，PO为平面α的垂线，PA、PB、PC为平面α的斜线，$\angle APO = \angle BPO$，$\angle BPO < \angle CPO$。

因为 $PO\perp\alpha$，所以

$$\angle POA=\angle E=\angle POB.$$

又知 $\angle APO=\angle BPO$，PO 公共，

$$\therefore\quad \triangle APO\cong\triangle BPO,$$

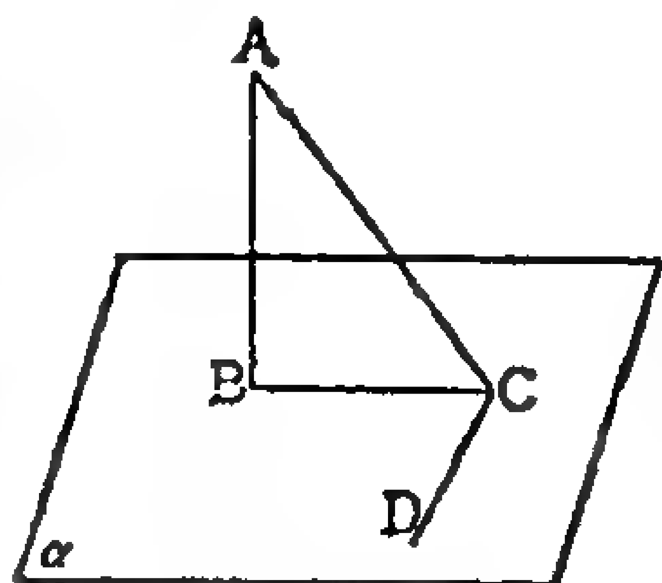
从而 $PA=PB$.

其次，在平面 CPO 上引斜线 PD，使 $\angle DPO=\angle BPO$，设 PD 和 CO 的交点为 D，则由前面所证，可知

$$PB=PD.$$

又由 $\angle CPO>\angle BPO$ 知，$\angle CPO>\angle DPO$，从而 $CP>DP$，即 $CP>BP$.

3046. 已知 AB、BC、CD 三条直线，$\angle ABC$ 及 $\angle BCD$ 都是直角，且直线 AB 垂直于 BC、CD 所确定的平面 α，证明 $CD\perp AC$.



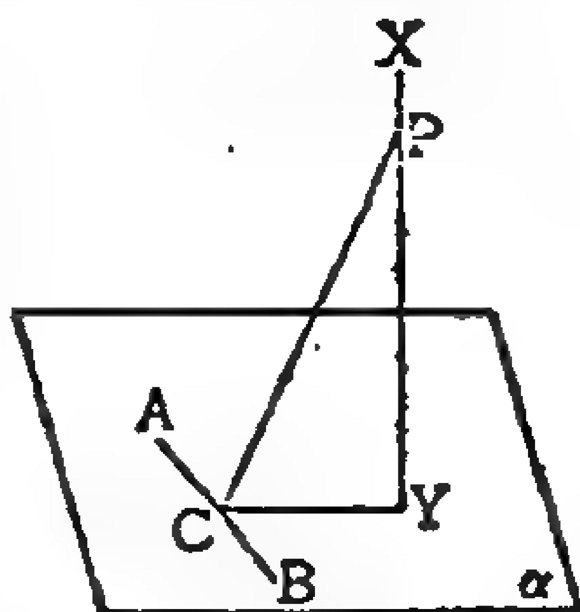
解 $\because\ AB\perp\alpha$，$\therefore\ AB\perp CD$. ①

又由题设知 $BC\perp CD$. ②

从①、②可知 $CD\perp$ 平面(AB, BC)，

$$\therefore\quad CD\perp AC.$$

3047. 已知 AB 是平面 α 上的直线，XY 是 α 的垂线，证明从 XY 上任意一点所引 AB 的垂线都过一定点.



解 从 XY 上任意点 P 引 AB 的垂线 PC，连结 CY，则由三垂线定理知 $CY\perp AB$. 故点 C 是过 Y 所引直线 AB 的垂线足，它是一个定点. 因此，从 XY 上任意点引 AB 的垂线都过定点 C.

3048. 对于两异面直线 a、b，下列四个命题是否正确. 如果正确就记[○]，并述其理由；如果不正确就记[×]，并举出反例.

(1) 通过不在两异面直线 a、b 上的任一点 P，总可作出与这两条直线相交的直线；

(2) 包含 a 且与 b 平行的平面总是存在的；

(3) 不能作出与 a、b 都直交的直线；

(4) 可以作出与 a、b 相交，且平行于第三直线 c 的直线.

解 (1) [×]. 设平面 (P, a)、平面 (P, b) 分别为 α、β，则 α、β 是不同的两个平面. 事实上，如果 α 和 β 重合，则 a、b 就在同一平面上，这与题设矛盾.

如果 α、β 的交线(通过点 P)和 a、b 都相交时，本命题成立.

如果 α、β 的交线与直线 a、b 中的一条直线平行，本命题不成立. 例如当 $\alpha\parallel b$ 时，α、β 的交线过 P 且平行于 b，因此交于 a 的直线都不交于 b.

如果 α、β 的交线与直线 a、b 都平行，这种情况不会发生. 否则就有 $a\parallel b$，这与题设相矛盾.

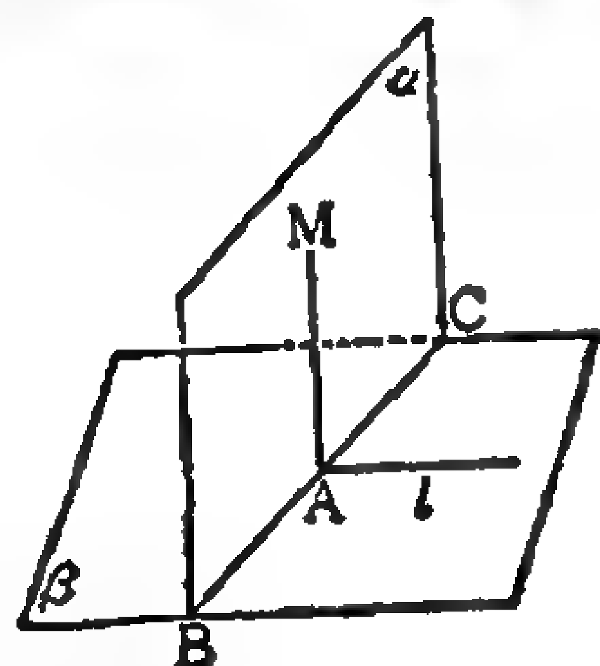
(2) [○]. 在 a 上取任意点 A，在 A 和 b 所确定的平面上，过 A 引 b 的平行线 b'(a, b 是异面直线，所以 b' 和 a 不重合)，则 a、b' 所确定的平面就是包含 a 且与 b 平行的平面.

(3) [×]. 与 a、b 都垂直相交的直线有且仅有一条(参照问题 3037)，所以本命题不正确.

(4) [×]. 当 a 与 c 不平行，且包含 a 且与 c 平行的平面 α 和 b 相交时，过这个交点在平面 α 上引 c 的平行线，则这条直线和 a、b 都相交，所以本命题成立. 但当 $a\parallel c$ 或 $a\parallel b$ 时，本命题不成立.

2. 直线和平面(2)

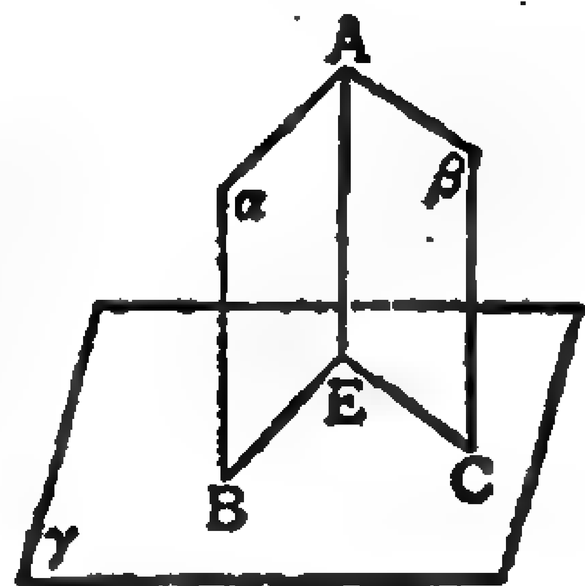
3049. 如果平面 α 与平面 β 上的直线 l 垂直，则 α 垂直于 β.



解 设 l 和 α 的交点为 A，α、β 的交线为 BAC. 在平面 α 上过点 A 作 l 的垂线 AM，则两直线 l、AM 都垂直于 BC，并且 l 和 AM 的夹角是直角，所以

$$\alpha\perp\beta.$$

3050. 已知相交的两平面 α、β 和第三平面 γ，如果 $\alpha\perp\gamma$，且 α、γ 的交线垂直于 α、β 的交线，则 $\beta\perp\gamma$.

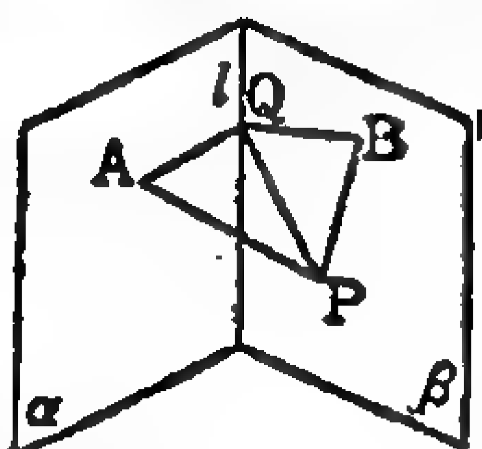


解 设 α、γ 的交线为 BE，β、γ 的交线为 EC. 在 γ 上过 E 作 BE 的垂线 EC'. 根据题设 $BE\perp AE$，所以

$\angle AEC'$ 为平面 α 和 γ 的平面角。又由 $\alpha\perp\gamma$ 知 $AE\perp EB$, $AE\perp EC'$, 所以 $AE\perp\gamma$。

因此，包含平面 γ 的垂线 AE 的平面 β 与平面 γ 垂直。

3051. 过同一点分别作相交两平面的垂线，则这两条垂线所确定的平面与这两个平面的交线垂直。



解 设已知两平面 α、β 的交线为 l, 从点 P 引平面 α、β 的垂线，其垂足分别为 A、B。

从 P 引 l 的垂线 PQ, 得 $PQ\perp l$。

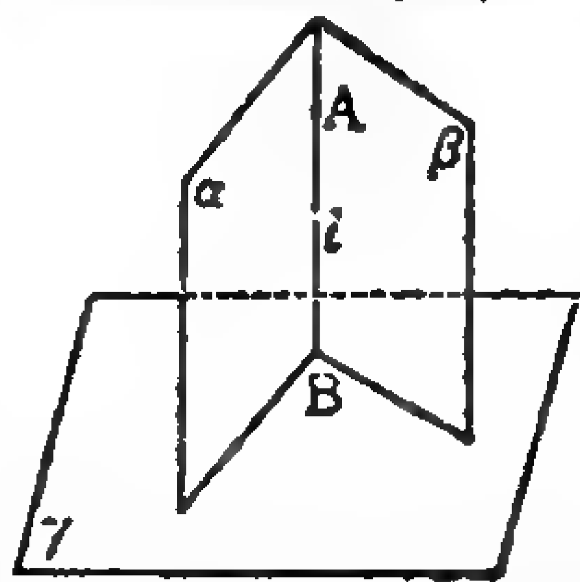
又知 $$PA\perp\alpha,\ PB\perp\beta.$$

$\therefore$ $AQ\perp l$, $BQ\perp l$ (三垂线定理逆定理)。

从而 平面 $APQ\perp l$。同样，平面 $BPQ\perp l$。由于过点 P 且垂直于 l 的平面仅有一个，所以 PA、PB、PQ 在同一平面上。因此

$$l\perp\text{平面}\ (PA,\ PB)。$$

3052. 如果相交的两个平面分别与第三个平面垂直，则这两个平面的交线也与第三个平面垂直。

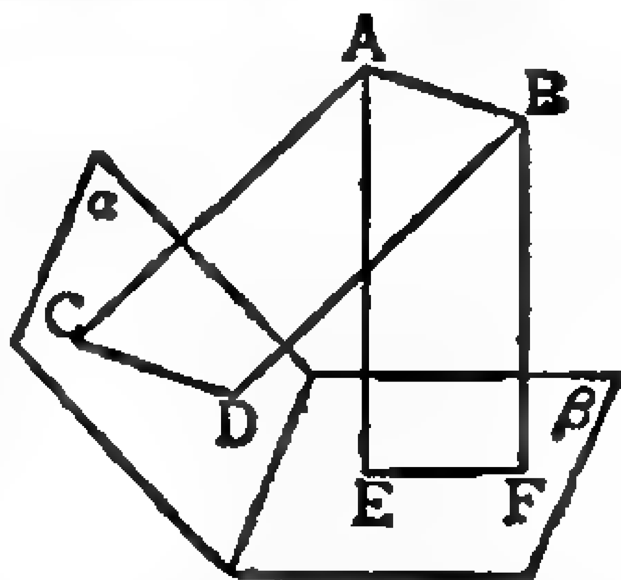


解 设平面 α、β 的交线为 l, 且 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$。从 l 上任意点 A 作平面 γ 的垂线 AB, 则由 $\alpha\perp\gamma$, 知 AB 在平面 α 上。又由 $\beta\perp\gamma$, 知 AB 在平面 β 上，因此 AB 就是平面 α、β 的交线，即 AB 与 l 是同一条直线，

$$\therefore\ l\perp\gamma.$$

3053. 如果一条线在相交两平面 α、β 上的射影都是直线，一般地说该线是一条直线，还有例外的情况吗?

解 设一条线 AB 在相交两平面 α、β 上的射影分别是直线 CD、EF。



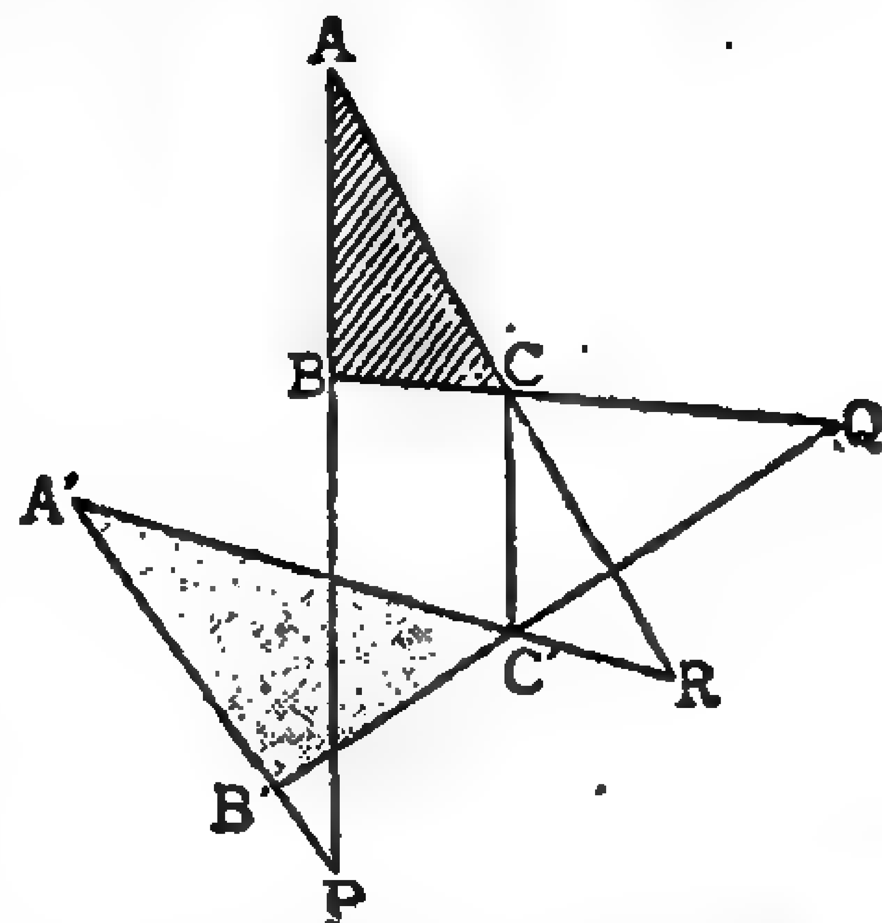
因为线 AB 上所有点在平面 α 上的射影都在直线 CD 上，所以线 AB 在通过直线 CD 且与 α 垂直的平面 γ 上。同理，直线 AB 也在通过直线 EF 且与平面 β 垂直的平面 δ 上。

如果平面 γ 与 δ 不重合，则 AB 是平面 γ 与 δ 的交线，所以 AB 是一条直线。

如果平面 γ 与 δ 重合，则由 $\gamma\perp\alpha$, $\gamma\perp\beta$ 可知 γ 垂直于平面 α、β 的交线。这时即使线 AB 是一条曲线，它在 α、β 上的射影也都是直线。应该注意这个例外情况。

3054. 分别在不同平面上的两个三角形 ABC、$A'B'C'$ 的对应边 AB 和 $A'B'$、BC 和 $B'C'$、CA 和 $C'A'$ 的延长线上分别交于 P、Q、R, 则直线 AA'、BB'、CC' 或者共点或者互相平行。

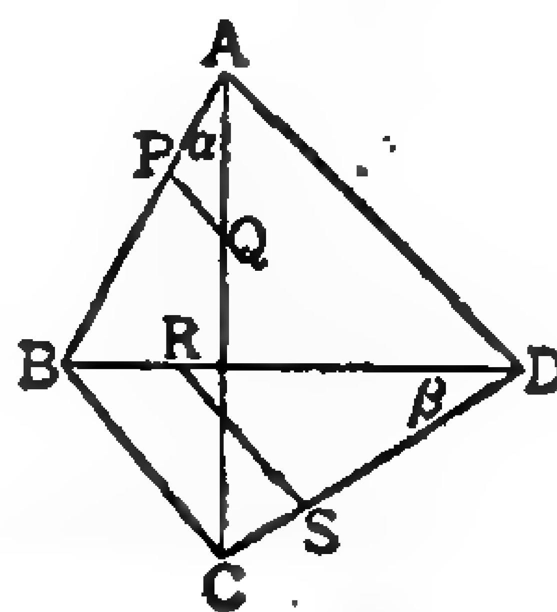
解 因为边 AB 和 $A'B'$ 相交于 P, 它们在同一平面上，所以两直线 AA' 和 BB' 在同一平面上。同理，BB' 和 CC' 在同一平面上，CC' 和 AA' 也在同一平面上。但是由于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 在不同的平面上，所以三条直线 AA'、BB'、CC' 不在同一平面上。由题设知



P 是两平面 ABC 和 $A'B'C'$ 的公共点。同理，Q、R 也是这两个平面的公共点。但两个平面的交线总是直线，所以三点 P、Q、R 都在同一直线上。根据笛沙格定理 (问题 **3024**), 可知三直线 AA', BB', CC' 共点。当此点为无穷远点时，三直线 AA', BB', CC' 平行。

3055. 设 A、B、C、D 为不在同一平面上的四个点，直线 PQ 与直线 AB 交于 P, 与直线 AC 交于 Q, 和 PQ 平行的直线 RS 与 BD 交于 R, 与 CD 交于 S, 则

$$PQ\parallel RS\parallel BC.$$



解 设 $\triangle ABC$ 所确定的平面为 α, $\triangle BDC$ 所确定的平面为 β, 则 PQ、RS 分别在 α、β 上。因为 $PQ\parallel RS$, 所以

$$PQ\parallel\beta,\ RS\parallel\alpha.$$

从而 PQ, RS 都与 α, β 的交线 BC 平行。即

$$PQ\parallel RS\parallel BC.$$

3056. 已知平面 α、β 相交。设过 α 上的

定点A引α的垂线和β交于点B，过B引β的垂线和α交于点C，则直线CA垂直于α、β的交线EF。

解　$\because$　$AB\perp\alpha, EF$在平面α内，

$\therefore$　$AB\perp EF$。　①

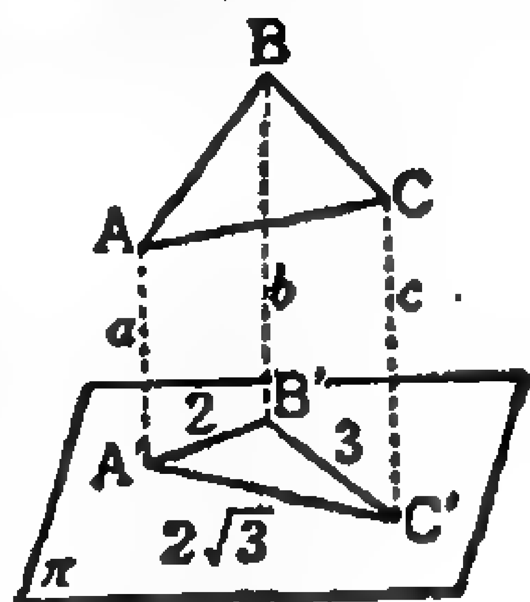
又　$\because$　$BC\perp\beta, EF$在平面β内，

$\therefore$　$BC\perp EF$。　②

从①、②，知$EF\perp$平面(AB, BC)，

$\therefore$　$EF\perp AC$。

3057．在空间，已知正三角形在一个平面上的射影三角形的边长分别为2、3、$2\sqrt{3}$，求这个正三角形的边长。



解　设正三角形ABC的顶点A、B、C在平面π上的射影分别为A'、B'、C'，$A'B'=2$，$B'C'=3$，$C'A'=2\sqrt{3}$。

再设$AA'=a$，$BB'=b$，$CC'=c$，则

$$AB^2=(AA'-BB')^2+A'B'^2$$

即　　$$AB^2=(a-b)^2+2^2.$$

同理，$BC^2=(b-c)^2+3^2$，

$$CA^2=(a-c)^2+(2\sqrt{3})^2.$$

令$a-b=x$，$b-c=y$，则由$AB=BC=CA$，可知　$x^2+4=y^2+9=(x+y)^2+12$。

即　$$\begin{cases}x^2-y^2=5, & ①\\ x^2+2xy=-3. & ②\end{cases}$$

①×3+②×5，

$$8x^2+10xy-3y^2=0,$$

即　　$$(4x-y)(2x+3y)=0.$$

$\therefore$　$4x-y=0$　或　$2x+3y=0$。

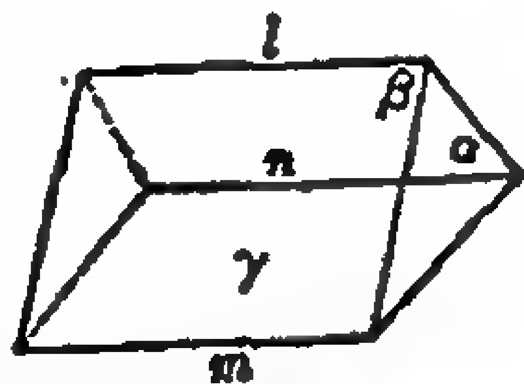
从$4x-y=0$和①求x，可知x为虚数，应舍去。从$2x+3y=0$和①求x、y，可得

$$x=\pm3,\ \ y=\mp2,$$

$$\therefore\ \ AB=\sqrt{x^2+4}=\sqrt{13}.$$

即正三角形的边长为$\sqrt{13}$。

3058．已知两两相交的三个平面α、β、γ．设α和β的交线为l，β和γ的交线为m，γ和α的交线为n，则三直线l、m、n或者平行或者相交于一点。

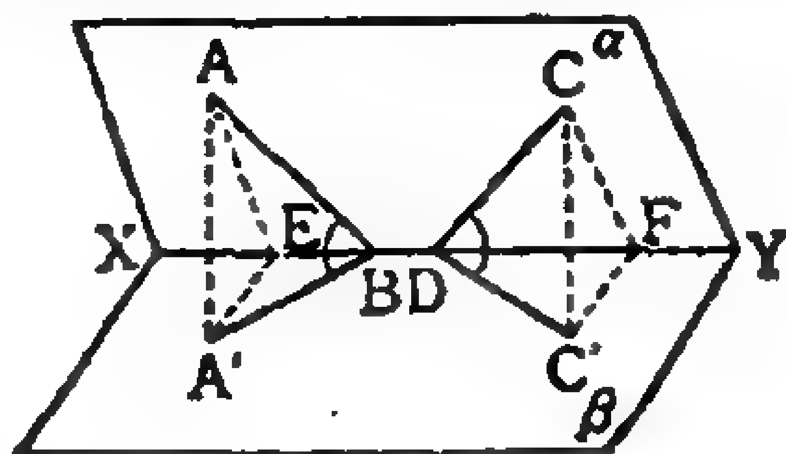


解　如果$l\parallel m$，则包含l的平面α和包含m的平面γ的交线n必平行于l、m，所以

$$l\parallel m\parallel n.$$

如果l、m不平行，设其交点为O，则O是直线l和平面γ的交点。由于l、m不平行，可知l和n、m和n都不平行，因此，O既是l和m的交点，也是两平面α和γ的公共点，从而α、γ的交线n也过这个点O，即三直线l、m、n相交于一点O。

3059．已知平面α上的两条直线l、m分别和平面β所成的角相等，则l、m和这两个平面的交线XY所成的角也相等。



解　从平面α、β的交线XY上任取两点B、D，分别引l、m的平行线BA、DC，使$AB=CD$。再从A、C分别引平面β的垂线AA'、CC'，则$\angle ABA'$、$\angle CDC'$分别是直线l、m和平面β所成的角。由题设知这两个角相等，得

$$\angle ABA'=\angle CDC',$$

又　　$$\angle AA'B=\angle R=\angle CC'D,$$

$$AB=CD,$$

$$\therefore\ \ \triangle AA'B\cong\triangle CC'D,$$

从而　　$$AA'=CC'.$$

从A'、C'分别向XY引垂线$A'E$、$C'F$，则$\angle AEA'$、$\angle CFC'$都是两平面α、β的平面角，所以

$$\angle AEA'=\angle CFC',\ \ 又\ \ AA'=CC',$$

$$\therefore\ \ \triangle AEA'\cong\triangle CFC',$$

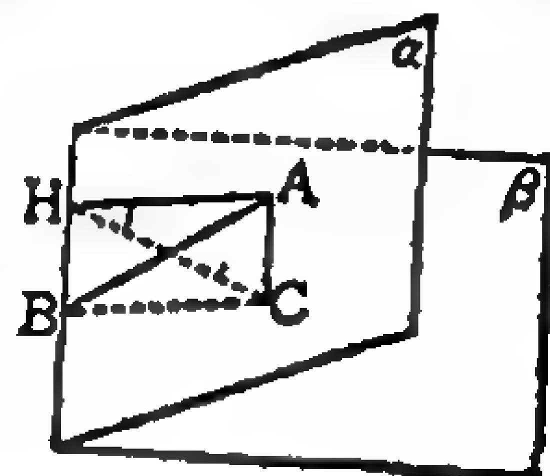
从而　　$$AE=CF.$$

又知　　$$AB=CD,$$

$$\therefore\ \ \triangle AEB\cong\triangle CFD,$$

故　　$$\angle ABE=\angle CDF.$$

3060．一个平面上的任意直线和它在另一平面上的射影所成的锐角中，以分别在这两个平面上且与这两个平面的交线垂直的两直线所成的角（即这两个平面所成二面角的平面角）最大。



解　设平面α上的直线AB在平面β上的射影为BC。

从A引平面α、β的交线的垂线AH，垂足

为H，连结HC，则由三垂线定理的逆定理，知AH、HC垂直于α、β的交线，所以$\angle AHC$为两平面α、β所成二面角的平面角。

在直角三角形AHC和ABC中，AC公共，$HC<BC$，

$$\therefore\quad \angle AHC>\angle ABC.$$

即当AB、BC都垂直于α、β的交线时，$\angle ABC$最大。

注 为了证明$\angle AHC>\angle ABC$，可在CB上取H'，使$CH'=CH$，则$\angle AH'C=\angle AHC$，于是可得$\angle AHC>\angle ABC$。

3061. 分别过点P在相交两平面上的射影作这两个平面交线的垂线，则这两条垂线交于这条交线上的同一点。反过来，过分别在相交两平面上的两点作这两个平面交线的垂线，如果这两条垂线交于这条交线上的同一点，则这两个点就是空间某一点分别在这两个相交平面上的射影。

解 设点P在相交平面α、β上的射影分别为点E、F，从E向α、β的交线AB引垂线EC，垂足为C，则由三垂线定理，知$PC\perp AB$。又由$PF\perp\beta$、$PC\perp AB$，知$FC\perp AB$，即分别从E、F向AB所引的两条垂线相交于AB上的同一点C。

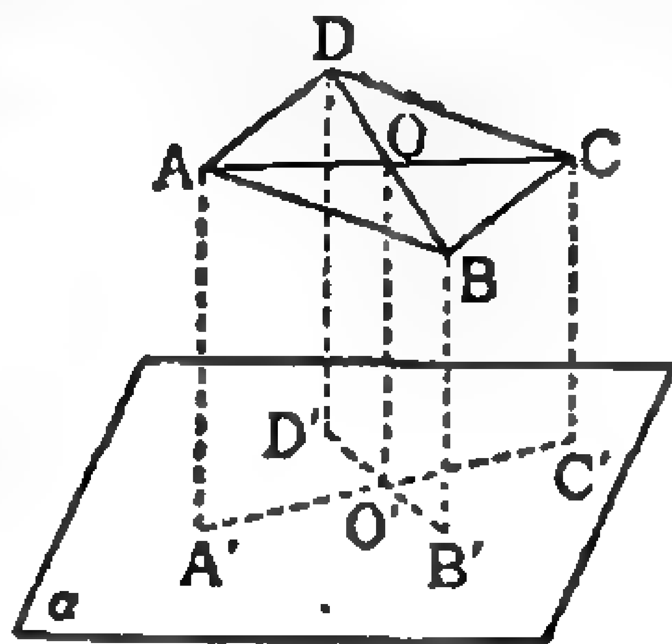
反过来，如果过分别在α、β上的点E、F所作AB的两垂线，它们相交于AB上同一点C，则

$$平面\ CEF\perp AB.$$

从而两平面α、β都与平面CEF垂直。

设平面CEF为γ，在平面γ上过E、F分别引相交两直线CE、CF的垂线，则它们必相交。设这个交点为P，则点E、F就是点P分别在α、β上的射影。

3062. 从平行四边形的四个顶点，分别向不切割这个四边形的平面引垂线，则从两对角线端点所引垂线长的和相等。



解 设▱$ABCD$的对角线的交点为O，从各顶点及O分别向不切割这个四边形的平面α引垂线，设其垂足分别为A'、B'、C'、D'、O'，由于O是AC和BD的中点，所以

$$AA'+CC'=2OO',$$
$$BB'+DD'=2OO',$$
$$\therefore\quad AA'+CC'=BB'+DD'.$$

3063. 如果点A到平面α、β的距离和等于点B到平面α、β的距离和，则线段AB上的任意点到这两个平面的距离和一定。

解 设线段AB在α上的射影为$A'B'$，AB上的任意一点C在α上的射影为C'，则C'在线段$A'B'$上，所以，如果

$$AC:CB=m:n,$$

则
$$mBB'+nAA'=(m+n)CC'.$$

$$\therefore\quad CC'=\frac{mBB'+nAA'}{m+n}. \qquad ①$$

同理，线段AB在另一平面β上作射影，设A、B、C的射影分别为A''、B''、C''，则

$$CC''=\frac{mBB''+nAA''}{m+n}. \qquad ②$$

①+②，得

$$CC'+CC''=\frac{m(BB'+BB'')+n(AA'+AA'')}{m+n}.$$

由题设知$AA'+AA''=BB'+BB''$。

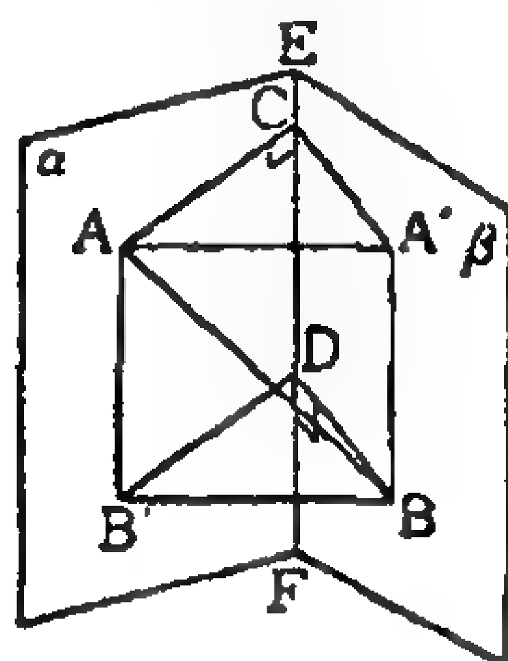
所以上式可写成

$$CC'+CC''=\frac{(m+n)(AA'+AA'')}{m+n}=AA'+AA'',$$

这是一个定值。

3064. 如果直线AB和二面角α-EF-β的两面α、β所成的角相等，则这条直线和两面α、β的交点到EF的距离相等。

解 从A引平面β的垂线AA'，从B引平面α的垂线BB'，从A、B分别引EF的垂线AC、BD，则AB'、BA'分别是AB在平面α、β上的射影。



在直角三角形ABB'、BAA'中，斜边AB公共，又由题设知$\angle BAB'=\angle ABA'$。

$$\therefore\quad \triangle BAB'\cong\triangle ABA',\quad \therefore\quad BB'=AA'.$$

其次，在直角三角形$AA'C$、$BB'D$中，$AA'=BB'$。由于AC、BD都和EF垂直，根据三垂线定理(问题**3043**)知，

$$A'C\perp EF,\quad B'D\perp EF.$$

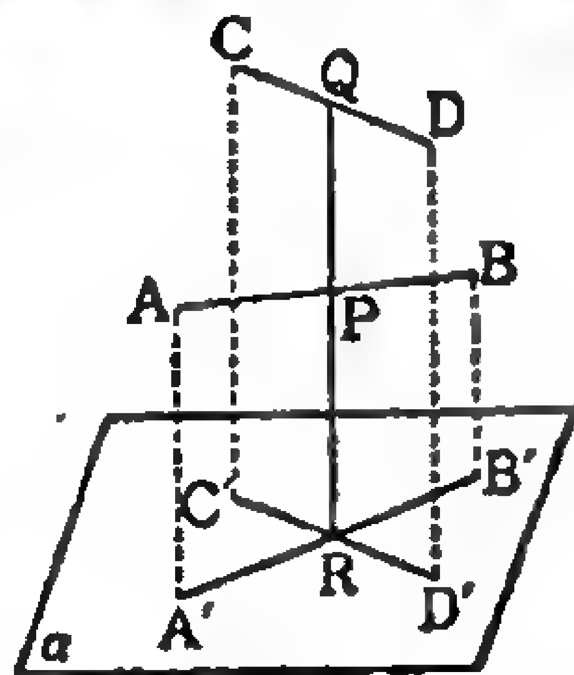
所以$\angle ACA'$、$\angle BDB'$都是二面角$\alpha-EF-\beta$的平面角，因此

$$\angle ACA'=\angle BDB'.$$

故 $$\triangle AA'C\cong\triangle BB'D,$$

$$\therefore\quad AC=BD.$$

3065. 已知线段AB在平面α上的射影为BA'，EF为α上的任意直线，证明AB和EF所成的角大于$\angle ABA'$。



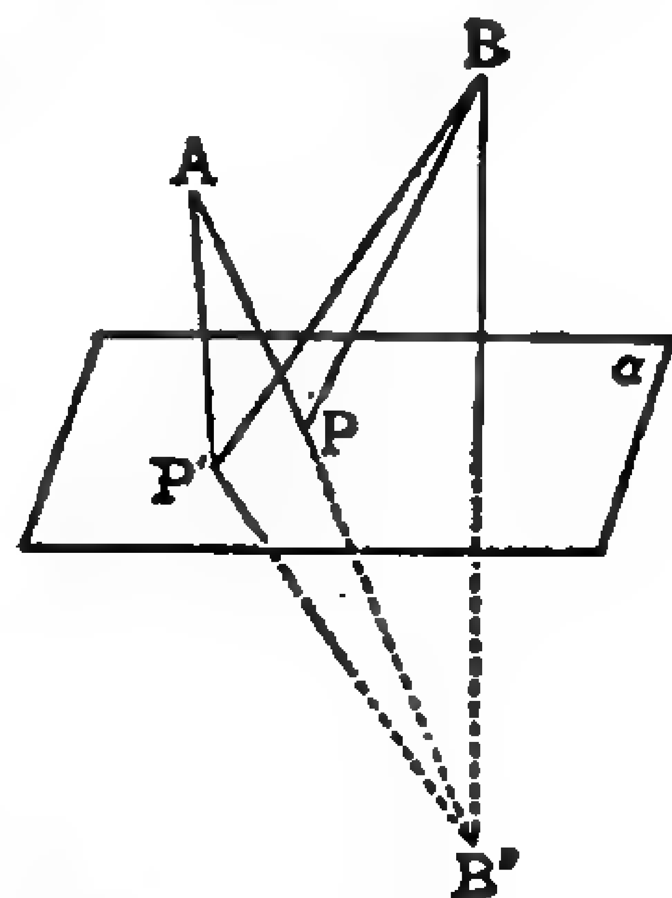
解 过B引EF的平行线BC，取$BC=BA'$，则$AC>AA'$。在$\triangle ABC$，$\triangle ABA'$中，AB公共，

$$BA'=BC,\ AC>AA',$$

$$\therefore\quad \angle ABC>\angle ABA'.$$

3066. 过已知两直线AB、CD在平面α上的射影的交点R，引平面α的垂线，则这条垂线必与直线AB和CD相交。如果AB和CD平行于α，则这条垂线和AB、CD垂直。

解 (i) 由于点R在直线$A'B'$上，所以它是直线AB上某点P在平面α上的射影，因此过R且与α垂直的直线和直线AB相交于P。



同理，R也是直线$C'D'$上的点，所以它是直线CD上某点Q在α上的正投影，因此过R且与α垂直的直线和直线CD相交于Q。

(ii) 如果$AB\parallel\alpha$，则$A'B'\parallel AB$。

又知 $A'B'\perp PQ$， $\therefore$ $AB\perp PQ$。

同理，如果$CD\parallel\alpha$，可知$CD\perp PQ$。故PQ是AB、CD的公垂线。

3067. 已知空间四定点A、B、C、D。如点P满足$PA=PB$，$PC=PD$，试求点P的轨迹。

解 如果AB和CD不平行，也不重合，则所求轨迹是线段AB的垂直平分面和线段CD的垂直平分面的交线。

如果AB和CD平行或重合，则当线段AB的垂直平分面和线段CD的垂直平分面重合时，所求轨迹就是这个重合的平面；当这两条线段AB、CD的垂直平分面平行时，则所求轨迹不存在。

3068. 求到两平面等距离的点的轨迹。

解 设α、β为已知两平面。

(i) $\alpha\parallel\beta$。

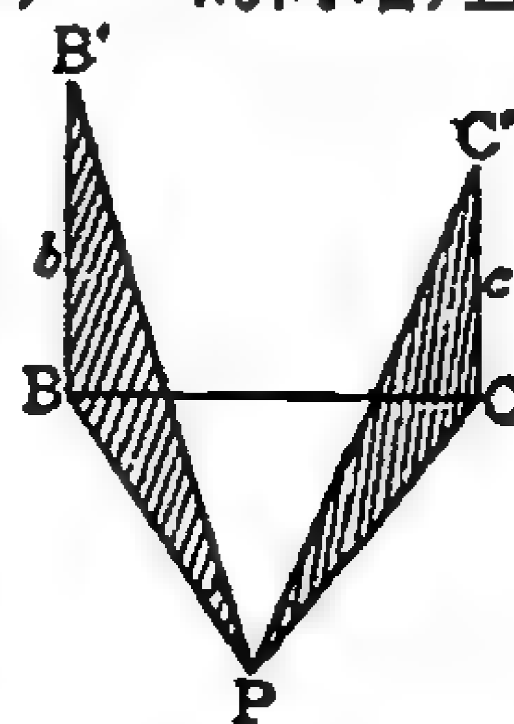
作这两个平面的公垂线，设它和这两个平面的交点分别为A、B，再作通过线段AB的中点且与AB垂直的平面π，则π上的所有点到α、β的距离相等。反过来，也成立。故所求的轨迹是平面π。

(ii) α、β不平行。

设α、β的交线为l，作二面角$\alpha-l-\beta$的二等分面π，及二面角$\alpha-l-\beta$的补二面角的二等分面π'，则π、π'上的所有点距α、β的距离相等。反过来，也成立。故所求的轨迹是平面π和π'。

3069. 已知在平面α的同侧的两点A、B，试在α上取一点P，使$AP+BP$为最小。

解 取点B关于平面α的对称点B'，则连结$B'A$的直线和平面α的交点P就是所求的点。证明如下：



设P'为平面α上除P外的任意一点，则

$$AP'+P'B=AP'+P'B'>AB'$$
$$=AP+BP,$$

故P是适合条件的点。

3070. 已知高分别为bm，cm的两塔，直立于地平面上相距am的两处。如果在这个地平面上，一个人一边走、一边看这两塔的顶端，所得的仰角相等，则此人所走的路线是什么形状？

解 设高为bm，cm的两塔的基点分别为B、C，两塔的顶端分别为B'、C'。

设观察两塔所得仰角相等的点为P，则

$\triangle PBB' \backsim \triangle PCC'$.

$\therefore\ PB:PC=BB':CC'=b:c$.

故知所求轨迹为把线段 BC 内分为 $b:c$ 的点 M 和把线段 AB 外分为 $b:c$ 的点 N 所连线段 MN 为直径的圆(阿波罗尼斯圆)。

如果 $b=c$, 则所求轨迹是 AB 的垂直平分线。

3071. 已知相交于 O 且两两互相垂直的三条直线 OX、OY、OZ, 设连结一点 P 和 O 的直线和 OX、OY、OZ 的夹角分别为 α、β、γ。

(1) 把 P 到平面 (OY, OZ)、平面 (OZ, OX) 及平面 (OX, OY) 的距离分别用 OP、α、β、γ 表示。

(2) 证明 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

解 (1) 从 P 向平面 (OX, OY) 作垂线 PQ, 则 $PQ \parallel OZ$。如右图,

$\angle P=\angle ZOP=\gamma$,

$\therefore\ PQ=OP\cos\gamma$.

同理, 点 P 到另外两个平面的距离分别为 $OP\cos\alpha$、$OP\cos\beta$.

(2) 设 P 到三个平面的距离分别为 PQ、PR、PS, 则

$$PQ^2+PR^2+PS^2=OP^2.$$

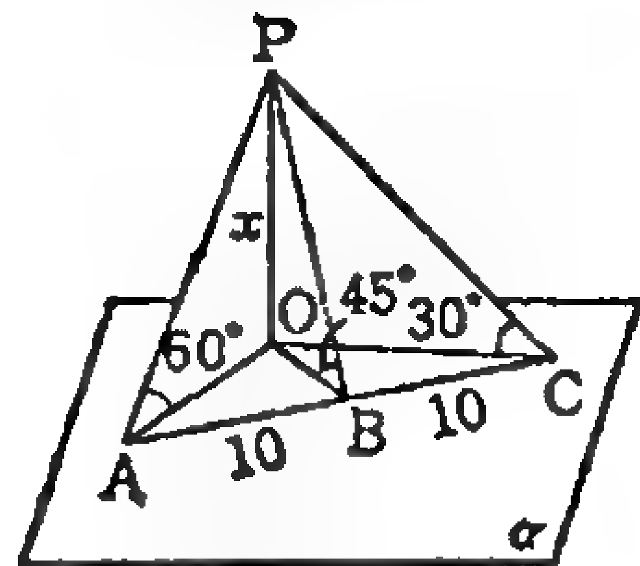
把 $PQ=OP\cos\gamma$, $PR=OP\cos\alpha$, $PS=OP\cos\beta$ 代入上式, 则得

$$OP^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=OP^2,$$

$$\therefore\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

注 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 叫做直线 OP 的方向余弦。

3072. 已知平面 α 上的三条线段 OA、OB、OC, 和垂直于平面 α 的线段 OP, 如果 B 为 AC 的中点, $AB=10$ cm, $\angle OAP=60°$, $\angle OBP=45°$, $\angle OCP=30°$.



(1) 求 OP 的长; (2) 证明 $OA\perp AB$.

解 (1) 设 $OP=x$, 则

$$OA=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad OB=x,\quad OC=\sqrt{3}x.$$

在 $\triangle OAC$ 中,

$$OA^2+OC^2=2(OB^2+AB^2),$$

$$\therefore\ \frac{x^2}{3}+3x^2=2(x^2+10^2),$$

从而 $x=5\sqrt{6}$ (cm).

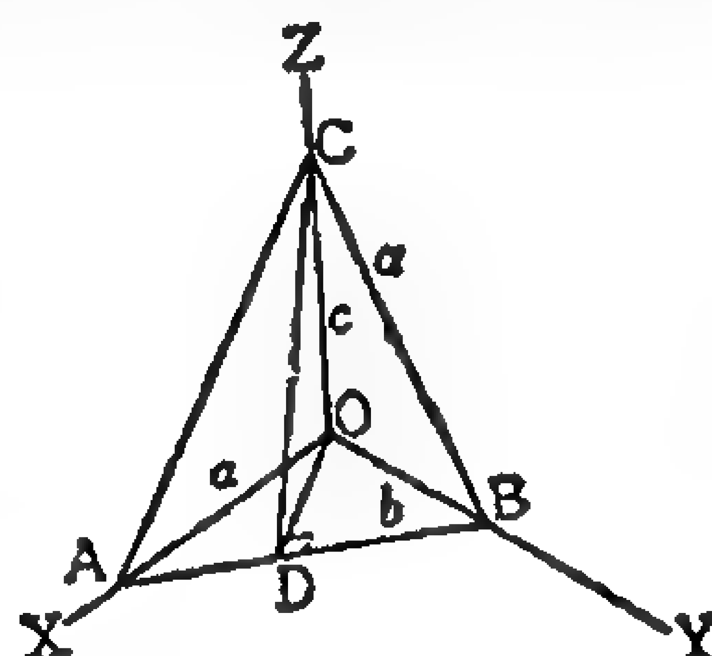
(2) $OA=\dfrac{x}{\sqrt{3}}=5\sqrt{2}$, $OB=x=5\sqrt{6}$,

$$\therefore\ OA^2+AB^2=150,\quad OB^2=150,$$

从而 $OA^2+AB^2=OB^2$,

$$\therefore\ OA\perp AB.$$

3073. 已知过点 O 且两两垂直的三条半直线 OX、OY、OZ 和平面 α 的交点分别为 A、B、C, 且 $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$.



(1) 求线段 AB、BC、CA 的长;

(2) 根据 (1) 证明 $\triangle ABC$ 是锐角三角形;

(3) 求平面 (OX, OY) 和平面 α 所成的角的余弦。

解 (1) 由于 OX、OY、OZ 两两互相垂直, 所以

$$AB=\sqrt{a^2+b^2},\quad BC=\sqrt{b^2+c^2},$$

$$CA=\sqrt{c^2+a^2}.$$

(2) 设 $\triangle ABC$ 的最大边为 AB, 则

$$AB^2=a^2+b^2, \qquad ①$$

$$CA^2+CB^2=c^2+a^2+c^2+b^2=a^2+b^2+2c^2. \qquad ②$$

从 ①, ②, 知

$$AB^2<CA^2+CB^2.$$

所以 $\angle C$ 是锐角, 从而 $\angle A$、$\angle B$ 都是锐角。故 $\triangle ABC$ 是锐角三角形。

(3) 从 O 引 AB 的垂线 OD, 连结 CD, 则 $\angle CDO$ 是平面 α 和平面 XOY 所成的平面角(问题 **3043**)。设 $\angle CDO=\theta$, 则

$$OD\cdot AB=OA\cdot OB.$$

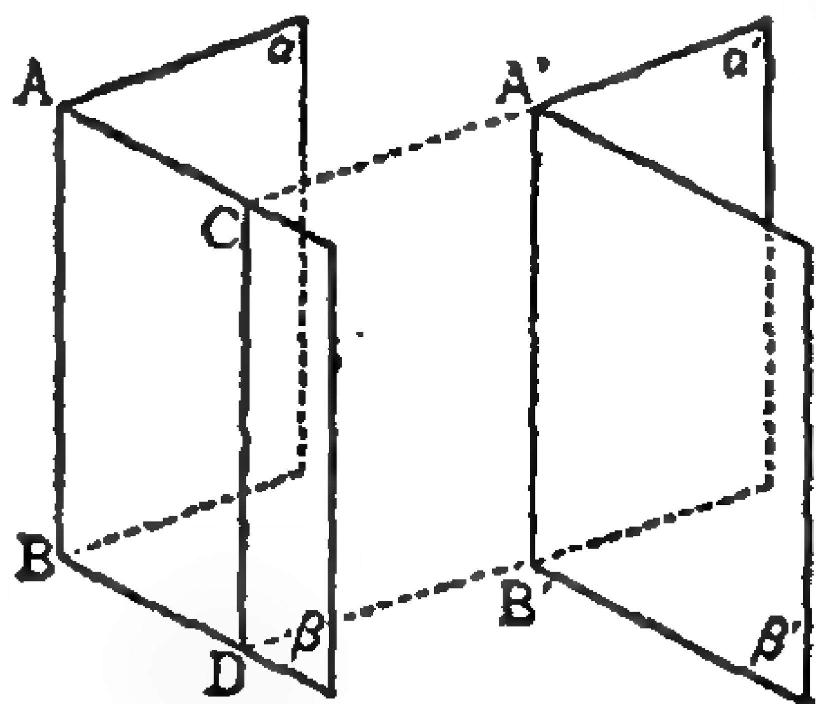
$$\therefore\ OD=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

又 $CD^2=OD^2+OC^2=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}$,

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

第二章　二面角，多面角

3074. 如果一个二面角的两个面分别和另一个二面角的两个面平行，则这两个二面角或者相等或者互为补角。

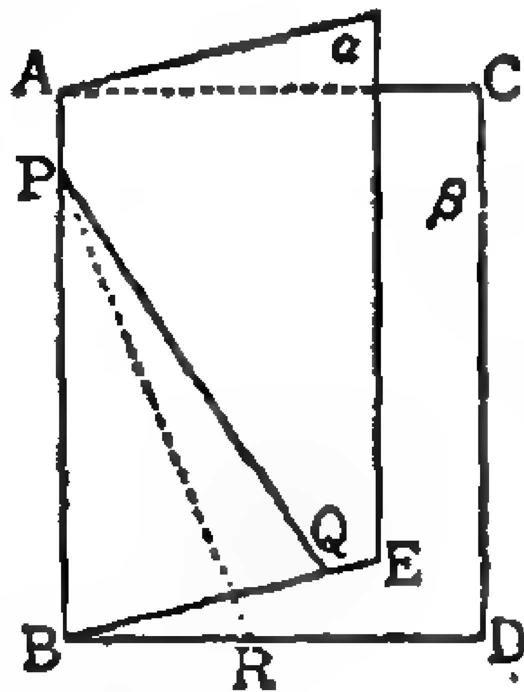


解　设两个二面角 $\alpha-AB-\beta$、$\alpha'-A'B'-\beta'$ 中，$\alpha /\!/ \alpha'$，$\beta /\!/ \beta'$，平面 α' 和 β 的交线为 CD，则 $CD /\!/ AB$，从而同位二面角 $\alpha'-A'B'-\beta$ 和 $\alpha'-CD-\beta'$ 相等。

如果面 α 与 α' 是同向平行的，二面角 $\alpha'-CD-\beta$ 和 $\alpha-AB-\beta$ 相等，从而二面角 $\alpha'-A'B'-\beta'$ 和 $\alpha-AB-\beta$ 相等。

当面 α 与 α' 是反向平行时，二面角 $\alpha'-CD-\beta$ 和 $\alpha-AB-\beta$ 互补，从而二面角 $\alpha'-A'B'-\beta'$ 与 $\alpha-AB-\beta$ 互补。

3075. 从二面角的棱上的一点，分别在其两面上引与该棱成等角的直线，问这两条直线所成的角在什么范围内?



解　过棱 AB 上的一点 P 分别在面 α、β 上作与 AB 成等角的两条直线 PQ 和 PR，再作这个二面角的直截角即平面角 EBD，可分别讨论如下:

(1) 如果 PQ 和 PR 在平面 EBD 的同侧，则在 $\triangle BPQ$ 和 $\triangle BPR$ 中，

$$\angle BPQ=\angle BPR,$$

$$\angle PBQ=\angle PBR=90^\circ, PB\text{ 公共}.$$

$$\therefore\ \triangle BPQ\cong\triangle BPR,$$

从而　　$BQ=BR,\ PQ=PR.$

又 $PQ>BQ$，因而在 $\triangle PQR$ 和 $\triangle BQR$ 中，

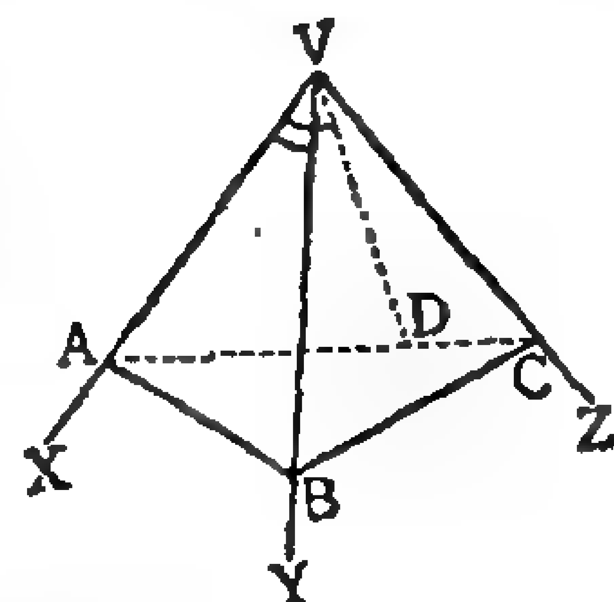
$$\angle QPR<\angle EBD.$$

特别地，当 PQ、PR 都与 AB 重合时，$\angle QPR=0^\circ$。因此 $\angle QPR$ 在 0° 与平面角 EBD 之间。

(2) 如果 PQ、PR 分别在平面 EBD 的两侧，仿上可知 $\angle QPR$ 在平面角 EBD 与 180° 之间。

综上所述 $\angle QPR$ 在 0° 与 180° 之间。

3076. 三面角的任意一个面角小于其他两个面角之和而大于其他两个面角之差。



解　设在三面角 $V-XYZ$ 的三个面角中，面角 XVZ 最大。在 $\angle XVZ$ 内作射线 VD，使 $\angle XVD=\angle XVY$。在 VD 上取一点 D 并过 D 作任意直线和 VX、VZ 分别交于 A、C，在 VY 上取 $VB=VD$，则

$$\triangle AVD\cong\triangle AVB,\quad\therefore\ AD=AB,$$

因而　　$BC>DC$。

在 $\triangle VDC$ 和 $\triangle VBC$ 中，VC 公共，$VD=VB$，$BC>DC$，

$$\therefore\ \angle BVC>\angle DVC,$$

$$\therefore\ \angle XVZ<\angle XVY+\angle YVZ.$$

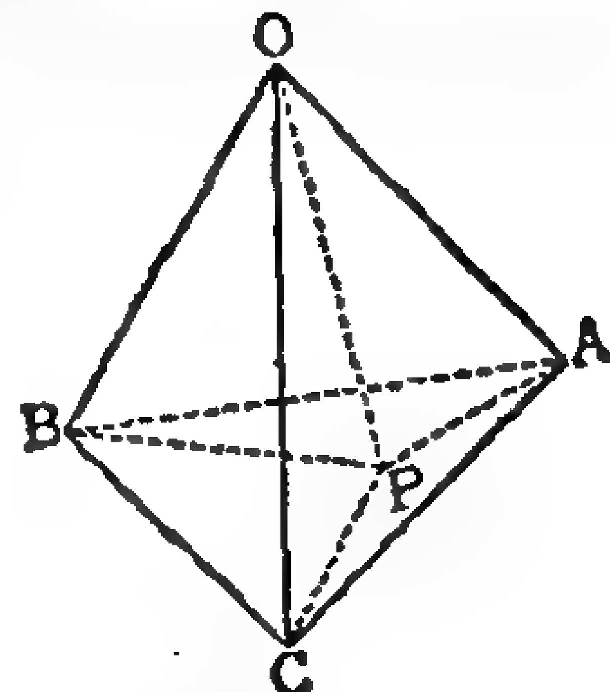
显然还有

$$\angle XVY<\angle XVZ+\angle YVZ,$$

$$\angle YVZ<\angle XVZ+\angle XVY.$$

因此三面角中任意一个面角都小于其他两个面角之和。至于任意一个面角大于其他两个面角之差的问题，可由以上诸式移项得到证明。

3077. 任意凸多面角的所有面角之和小于四直角。



解　为了方便起见，这里只证明凸多面角的底面是 $\triangle ABC$ 的情形。但是，上述证明方法对于底面是任意多边形的凸多面角也是成立的。

设 P 为 $\triangle ABC$ 内的任意一点，则三个三角形 OAB、OBC、OCA 的内角和与 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$ 的内角和相等。又在以

A、B、C为顶点的各三面角

$$A\text{-}OBC,\ B\text{-}OCA,\ C\text{-}OAB$$

中，由上题知

$$\left.\begin{array}{l}\angle OAC+\angle OAB>\angle BAP+\angle CAP,\\ \angle OBA+\angle OBC>\angle ABP+\angle CBP,\\ \angle OCB+\angle OCA>\angle BCP+\angle ACP.\end{array}\right\}$$

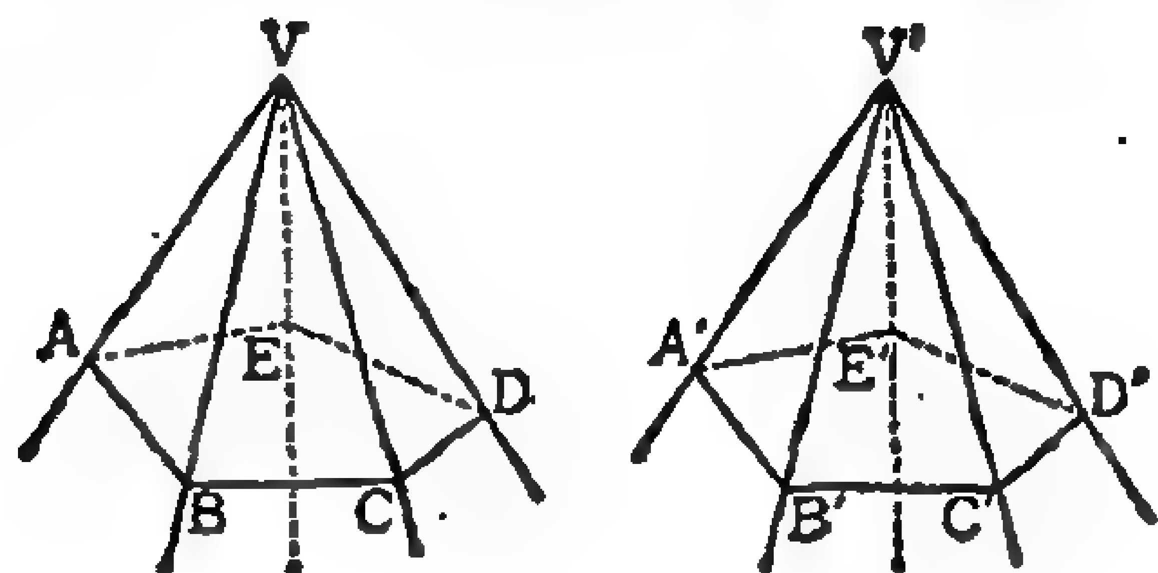
把上述诸式两边分别相加，则左边为以O为顶点的$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCA$的底角和，右边为以P为顶点的$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$的底角和。于是上式可写成

$$6\angle R-(\angle AOB+\angle BOC+\angle COA)>2\angle R.$$

$$\therefore\quad \angle AOB+\angle BOC+\angle COA<4\angle R.$$

3078. 两个多面角的面角及二面角分别同向对应相等，则这两个多面角全等。

解　设两个多面角为$V\text{-}ABCDE$、$V'\text{-}A'B'C'D'E'$的面角及二面角分别同向对应相等。将多面角$V\text{-}ABCDE$的顶点V放在另一个多面角$V'\text{-}A'B'C'D'E'$的顶点V'上，并使面AVB和$A'V'B'$重合，由于$\angle AVB=\angle A'V'B'$，则面AVB和面$A'V'B'$完全重合。在这个重合面的同侧，由于两个多面角在重合的棱VB和$V'B'$的二面角同向相等，所以面VBC和$V'B'C'$完全重合。又由于$\angle BVC=\angle B'V'C'$，所以棱VC和$V'C'$重合。象这样继续下去，可知两个凸多面角的各棱分别重合，从而这两个凸多面角全等。



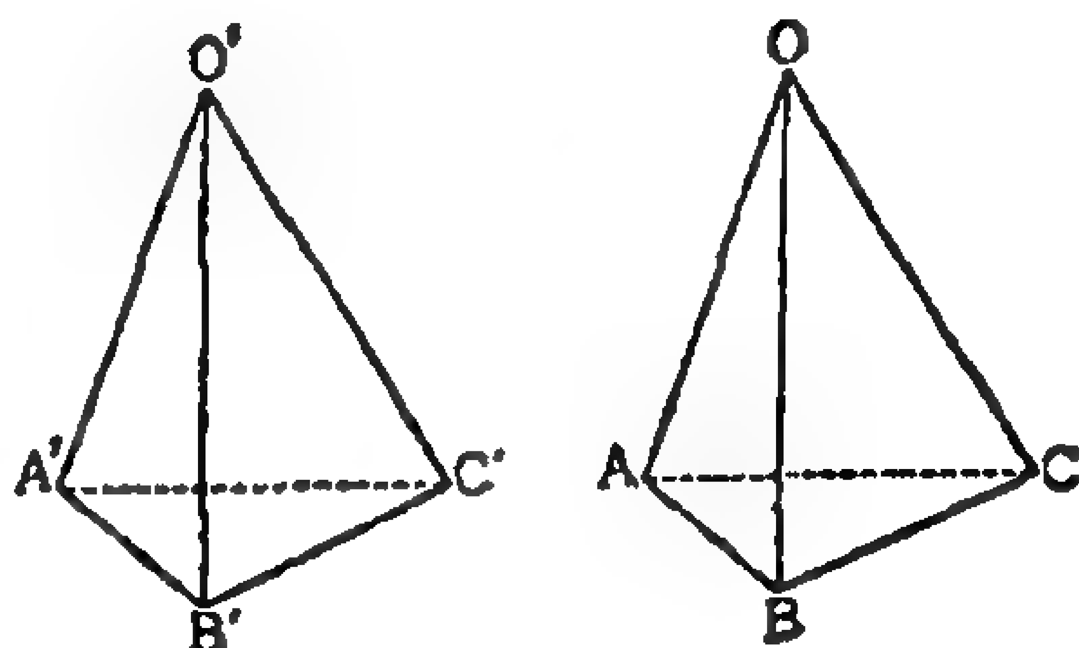
3079. 两个三面角的三个面角对应相等，则这两个三面角全等或对称。

解　如图，在两个三面角的各棱上取相等的线段OA、OB、OC、$O'A'$、OB'、$O'C'$，则可得六个等腰三角形。已知$\angle AOB=\angle A'O'B'$，所以$AB=A'B'$。同理，

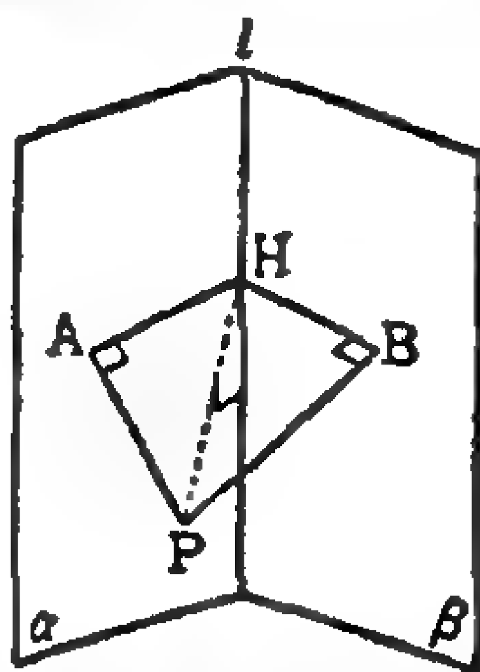
$$BC=B'C',\ CA=C'A'.$$

如果$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的对应边同向相等，则$O\text{-}ABC$和$O'\text{-}A'B'C'$可以完全重合，所以这两个三面角全等。

如果$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的一边AB和$A'B'$重合时，C和C'在AB的异侧，则这两个三角形关于AB对称，从而$O\text{-}ABC$和$O'\text{-}A'B'C'$关于平面OAB对称。

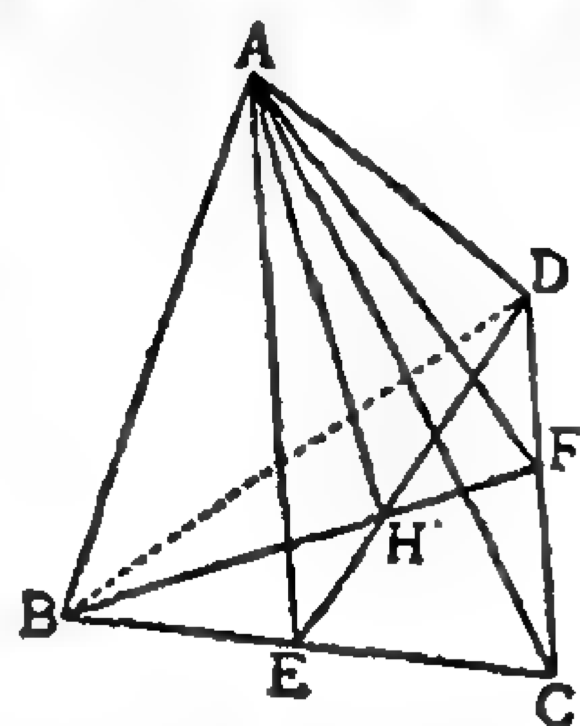


3080. 过二面角内的任意一点，分别作其两面的垂线，则这两条垂线所夹的角等于该二面角的平面角的补角。



解　已知P为二面角$\alpha\text{-}l\text{-}\beta$内的任意一点，从点$P$向$\alpha$、$\beta$所作垂线分别为$PA$、$PB$。再过$P$向棱$l$作垂线$PH$，则$AH\perp l$，$BH\perp l$，所以$\angle AHB$为该二面角的平面角。又由问题**3061**，知$H$、$A$、$P$、$B$在同一平面上，且在四边形$HAPB$中，有$\angle A=\angle B=\angle R$，所以$\angle APB$是$\angle AHB$（这个二面角的平面角）的补角。

3081. 过三面角的各棱且与其对棱垂直的三平面共线。



解　设过棱AD且与其对棱BC垂直的平面和BC交于点E，则平面$AED\perp BC$，所以$DE\perp BC$。

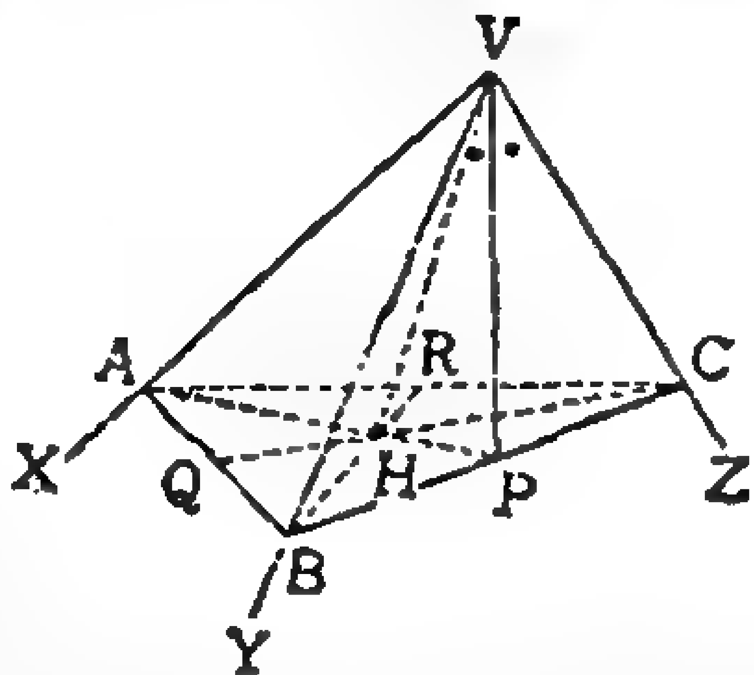
同理，设过棱AB且与DC垂直的平面和DC的交点为F，则$BF\perp DC$。因此BF和DE的交点H为$\triangle BCD$的垂心，从而这两个垂直平面的交线为AH。

同理，过CA且与BD垂直的平面也含有AH，因此上述三个平面都过直线AH。

3082. 过三面角的各棱和它所对面角的平分线的三个平面共线。

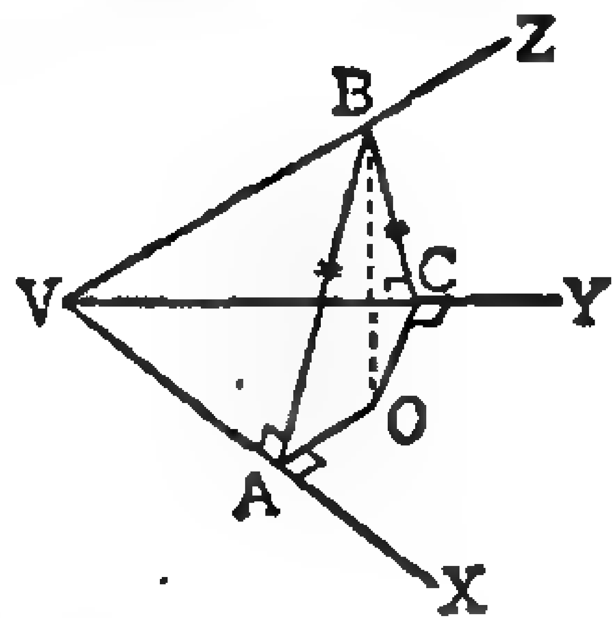
解　在三面角$V\text{-}XYZ$的各棱上分别取相等的线段VA、VB、VC，作$\angle BVC$的平分线

VP，则 $\triangle VBC$ 是等腰三角形，所以 VP 把 BC 垂直平分，即 P 是 BC 的中点。同样，设 $\angle AVB$、$\angle AVC$ 的平分线分别和 AB、AC 的交点为 Q、R，则 Q、R 分别为 AB、AC 的中点。因而 AP、BR、CQ 为 $\triangle ABC$ 的三条中线，它们必相交于一点。设这个点为 H，则面 VAP、VBR、VCQ 的公共直线为 VH。即这三个平面共线。



3083. 如果三面角 $V\text{-}ABC$ 的两个二面角 VA、VC 相等，则面角 BVA、BVC 也相等。

解 从 B 向平面 XVY 引垂线 BO，从 O 向 VX、VY 分别引垂线 OA、OC，则由三垂线定理，知



$AB\perp VX, BC\perp VY$。

所以 $\angle BAO$、$\angle BCO$ 分别是二面角 VX、VY 的平面角，根据题设知

$$\angle BAO=\angle BCO.$$

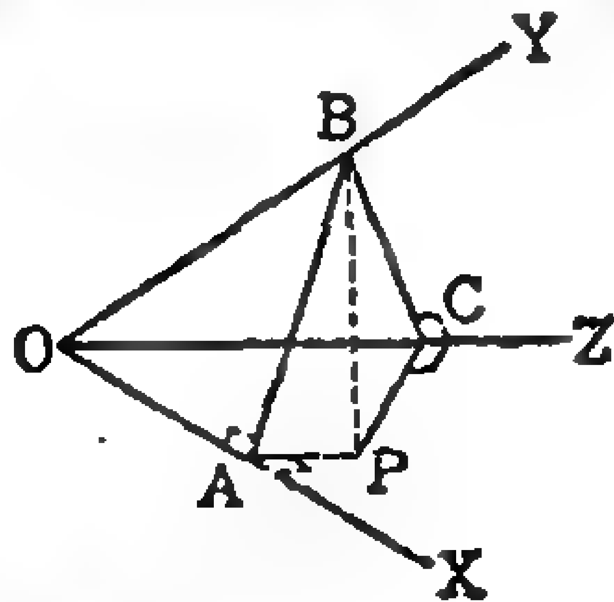
因而在两个直角三角形 BOA、BOC 中，BO 公共，$\angle BOA=\angle R=\angle BOC$，$\angle A=\angle C$，于是

$$\triangle BAO\cong\triangle BOC,\quad \therefore\quad AB=BC.$$

由此可知 $\quad \angle AVB=\angle BVC$.

3084. 在三面角 $O\text{-}XYZ$ 中，如果面角 XOY 比面角 YOZ 小，则二面角 OX 比二面角 OZ 大。反过来也成立。

解 从 OY 上一点 B 向 OX、OZ 分别引垂线 BA、BC，从 B 向平面 AOC 引垂线 BP，根据三垂线定理知



$$PA\perp OX,\ PC\perp OZ.$$

在 $\triangle OAB$、$\triangle OBC$ 中，OB 公共，

$$\angle OAB=\angle R=\angle OCB,$$

又题设 $\quad \angle AOB<\angle BOC,\quad \therefore\ AB<BC$.

因而在 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PBC$ 中，BP 公共，

$$\angle BPA=\angle R=\angle BPC,$$

又 $\qquad BC>AB,$

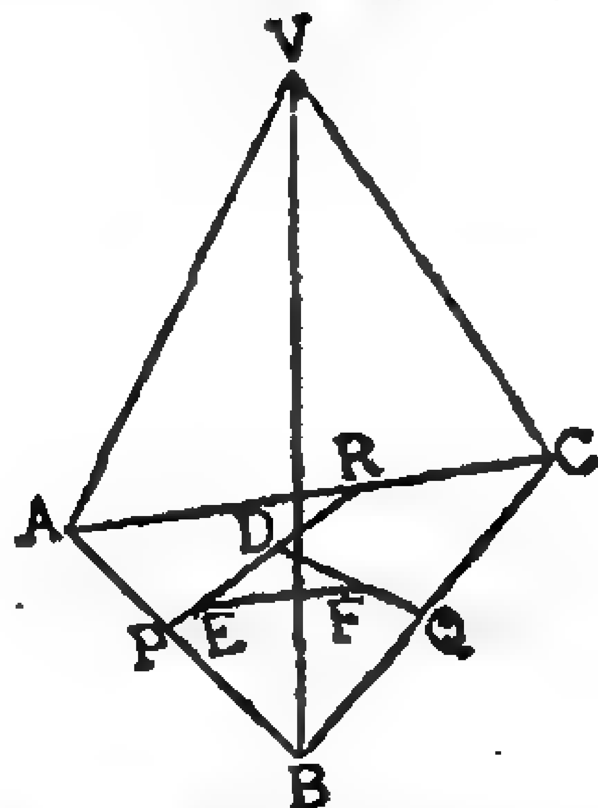
$$\therefore\quad \angle PAB>\angle PCB.$$

即二面角 OX 比二面角 OZ 大。

反过来，如果二面角 $OX>$ 二面角 OZ，则平面角 $XOY>$ 平面角 YOZ。这可由上题和本题的前半部分应用反证法证明。

3085. 在 $\triangle ABC$ 的内部作任意 $\triangle DEF$，再以 $\triangle ABC$ 所在平面外的一点 V 为顶点，作两个三面角 $V\text{-}ABC$ 和 $V\text{-}DEF$，则 $V\text{-}ABC$ 的三个面角之和大于 $V\text{-}DEF$ 的三个面角之和。

解 由问题 **3076** 知，以同一点 V 为顶点而底面 ABC、DEF 不同的两个三面角 $V\text{-}ABC$ 和 $V\text{-}DEF$，它们三个面角之和的大小比较与这两个底面 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 的周长的大小比较相同。因此，我们从底面三角形周长考虑。如图，



$$AR+AP>PE+ED+DR,$$
$$PE+PB+BQ+QF>EF,$$
$$DR+RC+CQ>DF+QF.$$

把上述诸式的两边分别相加并消去两边相同的项，则得

$$AB+BC+CA>DE+EF+FD,$$

因而 $V\text{-}ABC$ 的三个面角之和大于 $V\text{-}DEF$ 的三个面角之和。

注 由问题 **3076**，知上面的不等式

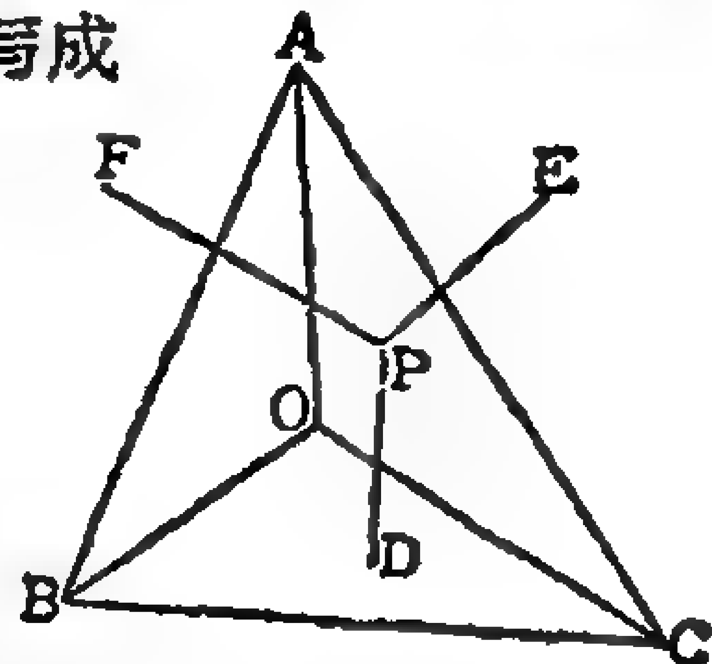
$$AR+AP>PE+ED+DR$$

可以写成

$$\angle AVR+\angle AVP>\angle PVE+\angle EVD+\angle DVR,$$

其余两个不等式也可类似写出。因此最后关于结论的不等式可以写成

$$\angle AVB+\angle BVC+\angle CVA>\angle DVE+\angle EVF+\angle FVD.$$



3086. 三面角的三个二面角之和大于两直角。

解 在三面角 $O\text{-}ABC$ 内，取任意一点 P，

从 P 分别引三个面 BOC、COA、AOB 的垂线 PD、PE、PF，则 $P-DEF$ 是一个三面角. 由问题 **3080**，知面角 EPF 和二面角 OA 互补. 面角 FPD 和二面角 OB 互补. 面角 DPE 和二面角 OC 互补，即

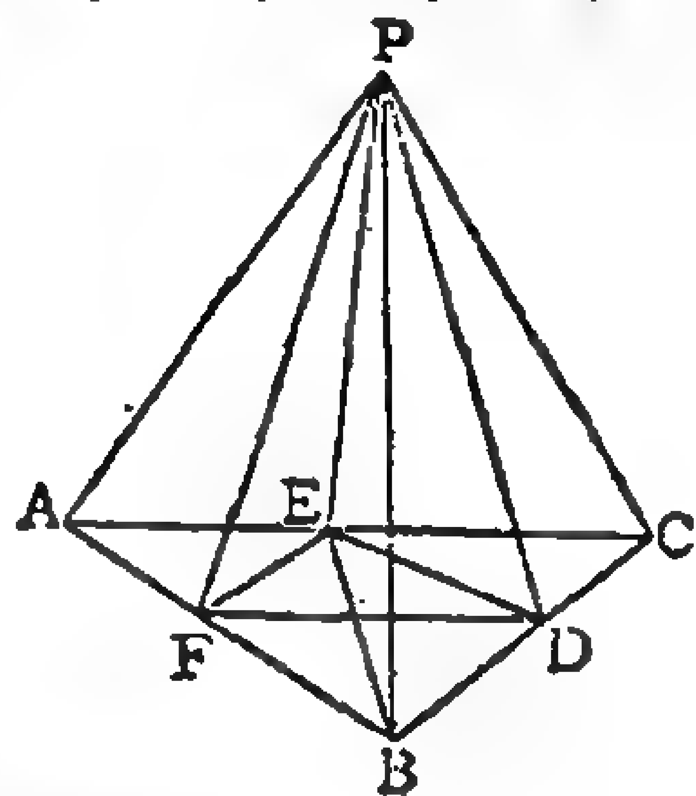
$$二面角\ OA=2\angle R-面角\ FPE,$$
$$二面角\ OB=2\angle R-面角\ DPF,$$
$$二面角\ OC=2\angle R-面角\ DPE.$$

又由问题 **3077**，知

$$面角\ FPE+面角\ DPF+面角\ DPE<4\angle R,$$

$$\therefore\ 二面角\ OA+二面角\ OB+二面角\ OC>6\angle R-4\angle R=2\angle R.$$

3087. 已知从一点 P 分别连结 A、B、C 三点所得的三条直线 PA、PB、PC 中，每一条直线都与另外两条直线垂直. 如果从 P 分别引 BC、CA、AB 的垂线 PD、PE、PF，则 $\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 的垂足三角形.



解　因为由题设知 $PB\perp PA$，$PB\perp PC$，

$$\therefore\ PB\perp 平面APC,$$

因而　$PB\perp AC$.

又　$PE\perp AC$,

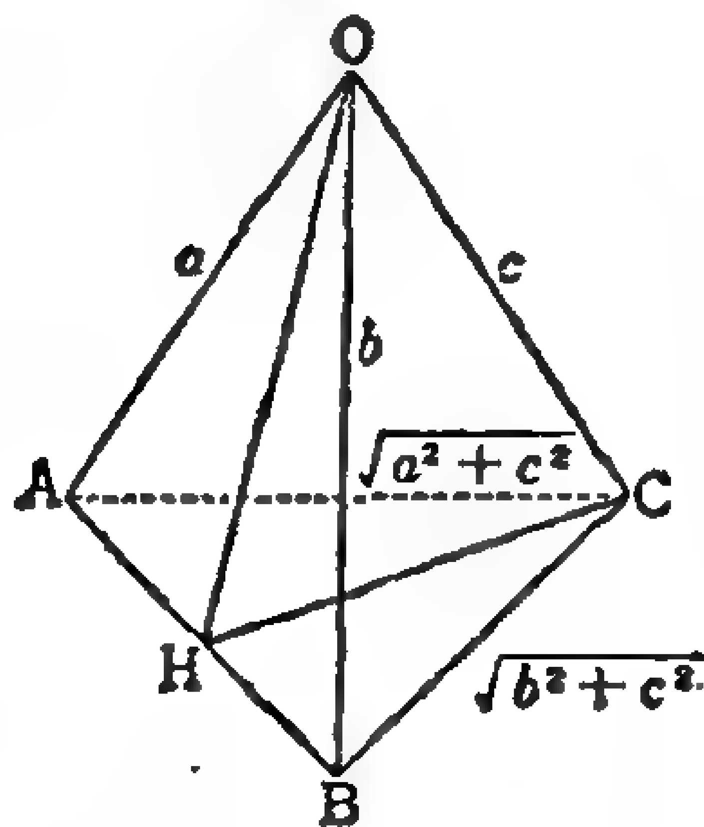
$$\therefore\ AC\perp 平面\ PBE,$$

因而　$AC\perp BE$.

同理，　$AD\perp BC$，$CF\perp AB$，

因此 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形.

3088. 已知三面角的三个面角都是直角. 如果从三条棱上分别取与顶点距离为 a、b、c 的三点 A、B、C，则平面 ABC 截这个三面角的截口面积的平方为 $\frac{1}{4}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$.



解　已知 $\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle AOC$ 都是直角，且 $OA=a$，$OB=b$，$OC=c$，则

$$BC=\sqrt{b^2+c^2},$$
$$CA=\sqrt{c^2+a^2},$$
$$AB=\sqrt{a^2+b^2}.$$

从 C 向 AB 引垂线 CH，则由三垂线定理，知

$$OH\perp AB.$$

设 $AH=x$，则

$$BH=AB-x=\sqrt{a^2+b^2}-x.$$

又由 $AC^2-CB^2=AH^2-HB^2$，知

$$(a^2+c^2)-(b^2+c^2)=x^2-(\sqrt{a^2+b^2}-x)^2,$$

$$\therefore\ x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

从而

$$CH^2=AC^2-AH^2=(a^2+c^2)-\frac{a^4}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}.$$

设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CH,$$

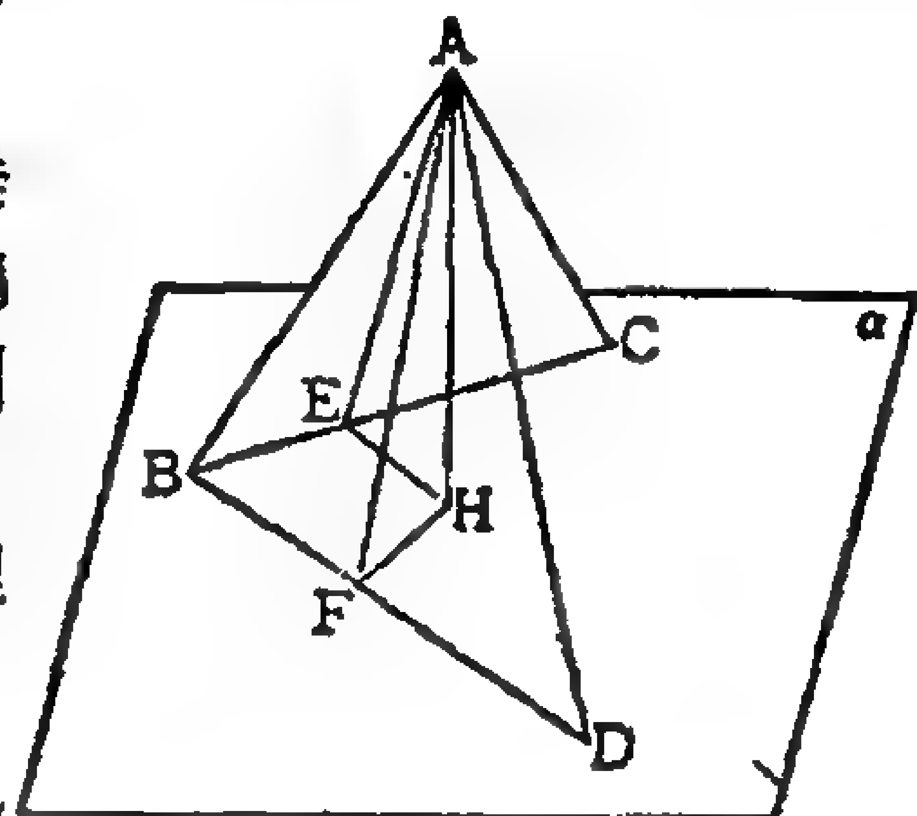
即

$$4S^2=AB^2\cdot CH^2=(a^2+b^2)\cdot\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2)}.$$

$$\therefore\ S^2=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

3089. 已知两个平面和第三个平面所成的二面角相等，则这两个平面的交线和这两个平面与第三个平面的交线所成的角也相等.

解　设平面 ABC、ABD 和第三个平面 α 的交线分别为 BC、BD.



从 A 向 α 引垂线 AH，从 A 向 BC、BD 分别引垂线 AE、AF，则由三垂线定理的逆定理，知

$$HE\perp BC,$$
$$HF\perp BD.$$

所以 $\angle AEH$、$\angle AFH$ 分别为平面 ABC、ABD 和 α 所成二面角的平面角. 由题设知它们是相等的. 因而在 $\triangle AHE$ 和 $\triangle AHF$

中，AH 公共，

$$\angle AHE=\angle R=\angle AHF,$$
$$\angle AEH=\angle AFH,$$
$$\therefore\quad \triangle AEH\cong\triangle AFH,$$

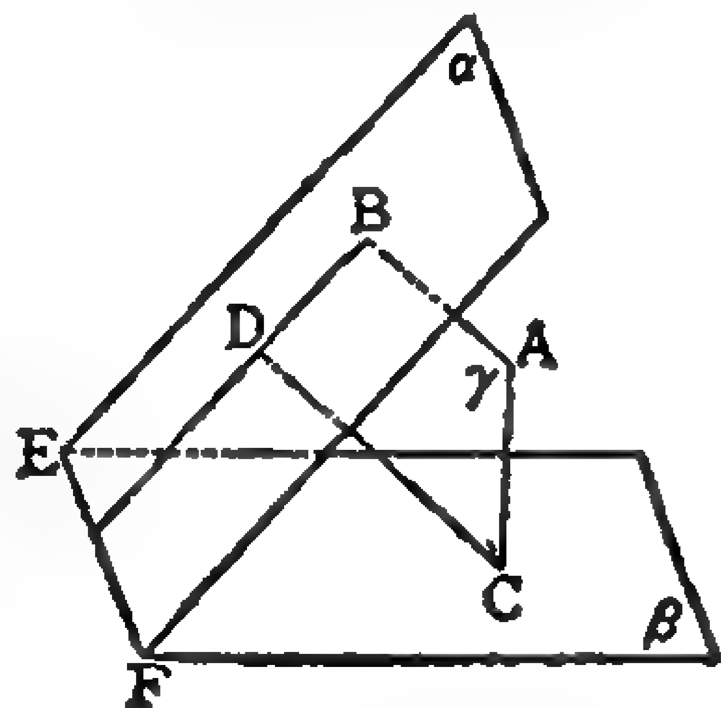
于是 $$AE=AF.$$

由此可知 $\triangle ABE$、$\triangle ABF$ 也是全等三角形，

$$\therefore\quad \angle ABE=\angle ABF.$$

3090. 从已知的一点 A 向相交的两平面 α、β 分别引垂线 AB、AC，又从 C 向平面 α 引垂线 CD，则直线 BD 与平面 α、β 的交线 EF 垂直。

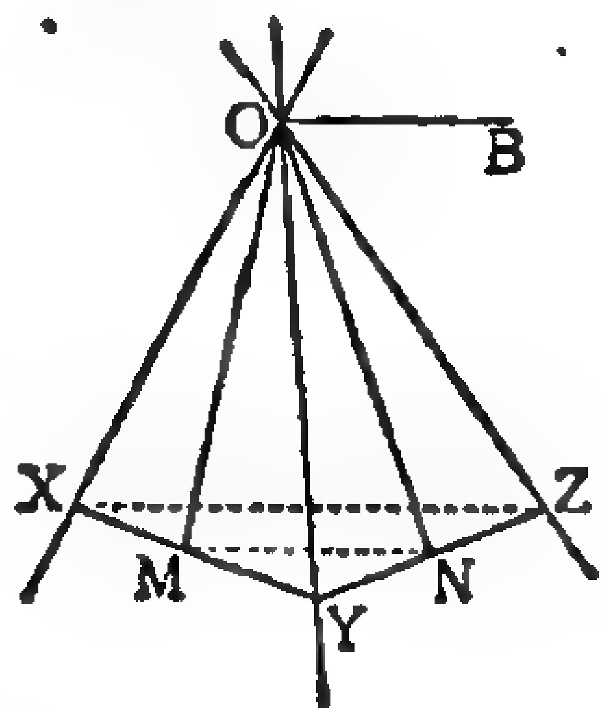
解　设直线 AB 和 AC 所确定的平面为 γ，则 γ 与 α、β 相交，且与 α、β 的交线 EF 垂直。



因为 AB、CD 是同一平面 α 的垂线，所以 $AB\parallel CD$。这就是说，CD 过 γ 上的一点 C 且与该平面上的直线 AB 平行，于是 CD 在平面 γ 上，因而 BD 也在平面 γ 上，所以 $EF\perp BD$。即 BD 与平面 α、β 的交线 EF 垂直。

3091. 设从点 O 出发的半直线为 OX、OY、OZ，则 $\angle XOY$、$\angle YOZ$ 的分角线和 $\angle ZOX$ 的外角分角线在同一平面上。

解　如图，取 X、Y、Z，使 $OX=OY=OZ$。设 $\angle XOY$ 的分角线和 XY 的交点为 M，$\angle YOZ$ 的分角线和 YZ 的交点为 N，则 $MN\parallel XZ$。又设 $\angle ZOX$ 的外角平分线为 OB，因为



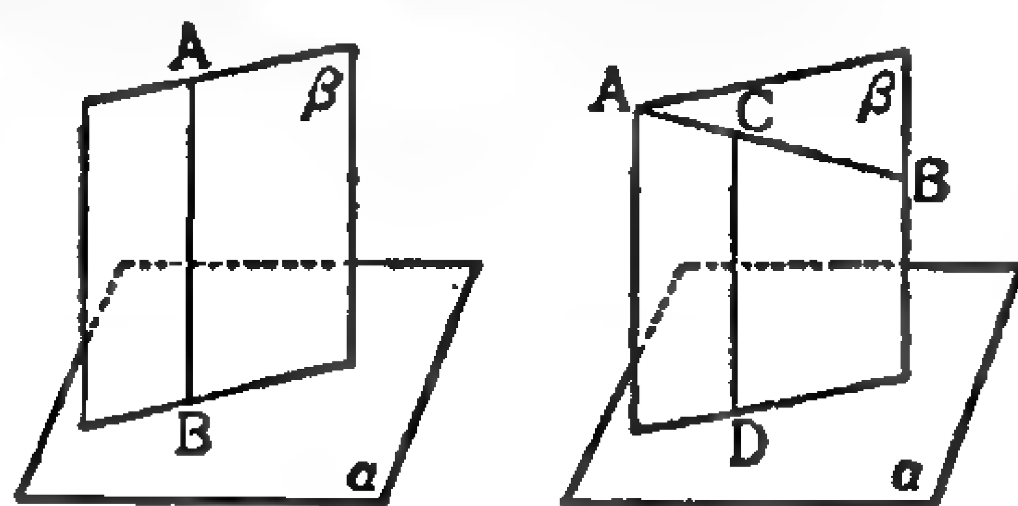
$$\angle OXZ=\angle OZX,$$

所以 $OB\parallel XZ$，于是 $OB\parallel MN$，OB、MN 在同一平面上，因此 OM、ON 和 OB 都在同一平面 OMN 上。

3092. 求作过直线 AB 且与已知平面 α 垂直的平面。

解　当 $AB\perp\alpha$ 时，过 AB 的任意平面 β 都和 α 垂直。这些平面就是所求的平面。

当 AB 与 α 不垂直时，可取 AB 上的任意一点 C，过 C 引 α 的垂线 CD，则 AB、CD 所确定的平面 β 就是所求的平面。



因 β 过与 α 垂直的直线，所以 β 与 α 垂直。又 β 包含 AB，故 β 就是所求的平面。

总上所述，当 AB 与 α 垂直时，有无数多个过 AB 且与 α 垂直的平面。

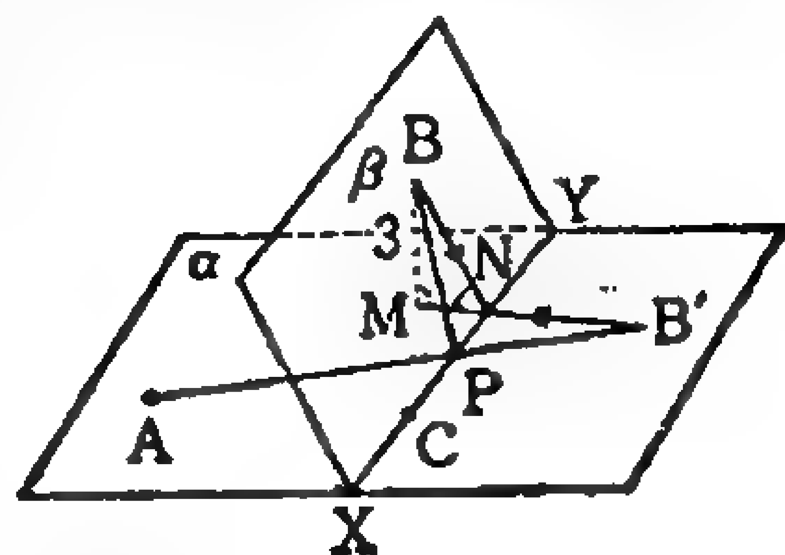
当 AB 与 α 不垂直时，过 AB 且与 α 垂直的平面只有一个。事实上，假定除 β 外，平面 β' 也是过 AB 且与 α 垂直的平面，这时 AB 就是与 α 垂直的两平面 β、β' 的交线，从而 $AB\perp\alpha$。这和 AB 与 α 不垂直的条件是矛盾的。因此当 AB 与 α 不垂直时，过 AB 且与 α 垂直的平面只有一个。

3093. 已知定点 A 在平面 α 上，定点 B 与 α 的距离为 3。

(1) 在 α 上取任意点 C，求作过两点 B、C 且和 α 成 60° 角的平面 β，并根据 C 的不同位置讨论有没有不能作出 β 的情形；

(2) 如能作出平面 β，试在 α、β 的交线上确定一点 P 使 $AP+BP$ 为最小。

解　(1) 假定已作出适合条件的平面 β，设 α 和 β 的交线为 XY，从 B 向平面 α 和交线 XY 分别引垂线 BM、BN，则



$$\angle BNM=60°,$$
$$BM=3,$$
$$\therefore\quad MN=\frac{BM}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

又知 $\angle MNC=\angle R$，于是可得作法如下：

从 B 向 α 引垂线 BM，以 B 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径作圆，再以 MC 为直径作圆，设这两个圆的交点为 N，则三点 N、B、C 所确定的平面就是所求的平面 β。

在作法中，必须 $NM\leq MC$，所以当 $MC<\sqrt{3}$ 时，就不能作出符合条件的平面 β。

(2) 在 MN 的延长线上取点 B'，使 $NB'=NB$。设 AB' 和 XY 的交点为 P，则 PA

$+PB$最小．事实上，

$$\triangle BNP\cong\triangle B'NP,\quad \therefore\quad PB=PB',$$

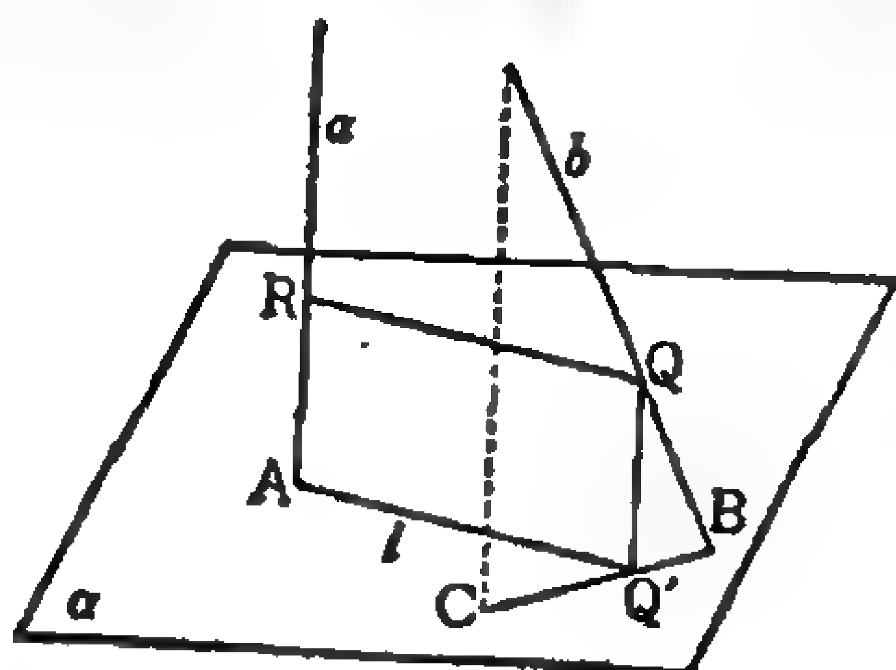
$$\therefore\quad PA+PB=AB'.$$

因此，无论点P'在XY上的位置如何，都有

$$P'A+P'B\geq AB'=PA+PB.$$

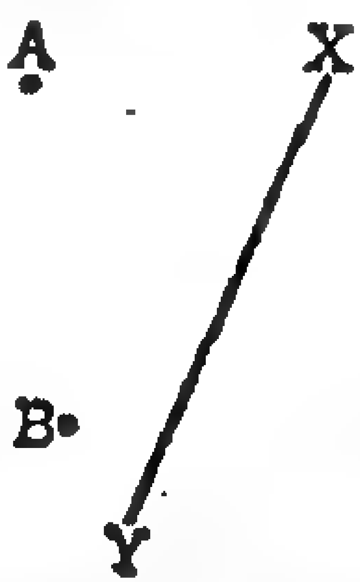
3094．已知和两异面直线a、b都相交的平面α，若直线a和平面α垂直，求作与平面α平行、两端点分别在a、b上，且等于已知长l的线段．

解　如图，设直线a、b和平面α的交点分别为A、B，直线b在α上的射影为BC．

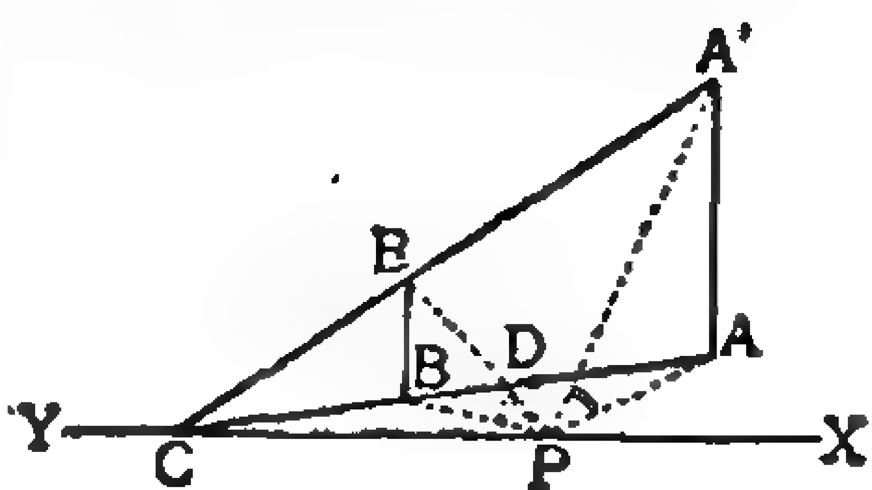


在BC上取点Q'，使$AQ'=l$．从Q'引直线a的平行线$Q'Q$，它和直线b的交点为Q．再从Q引AQ'的平行线QR，它与a交于R，则$QR=AQ'=l$，所以QR就是所求作的线段．

3095．如图．在直线道路XY的同侧有两个和XY在同一水平面上垂直直立的烟筒A、B．已知从XY上的一点C，能看到两烟筒的顶点且这三个点成一条直线．试在XY上求除C外的点P，使从P看两烟筒顶点所成的仰角相等．这里把道路XY看作直线并且不计人眼的高度．



解　设两烟筒A、B的顶点分别为A'、B'，适合条件的点为P，则



$$\triangle AA'P\backsim\triangle BB'P,$$

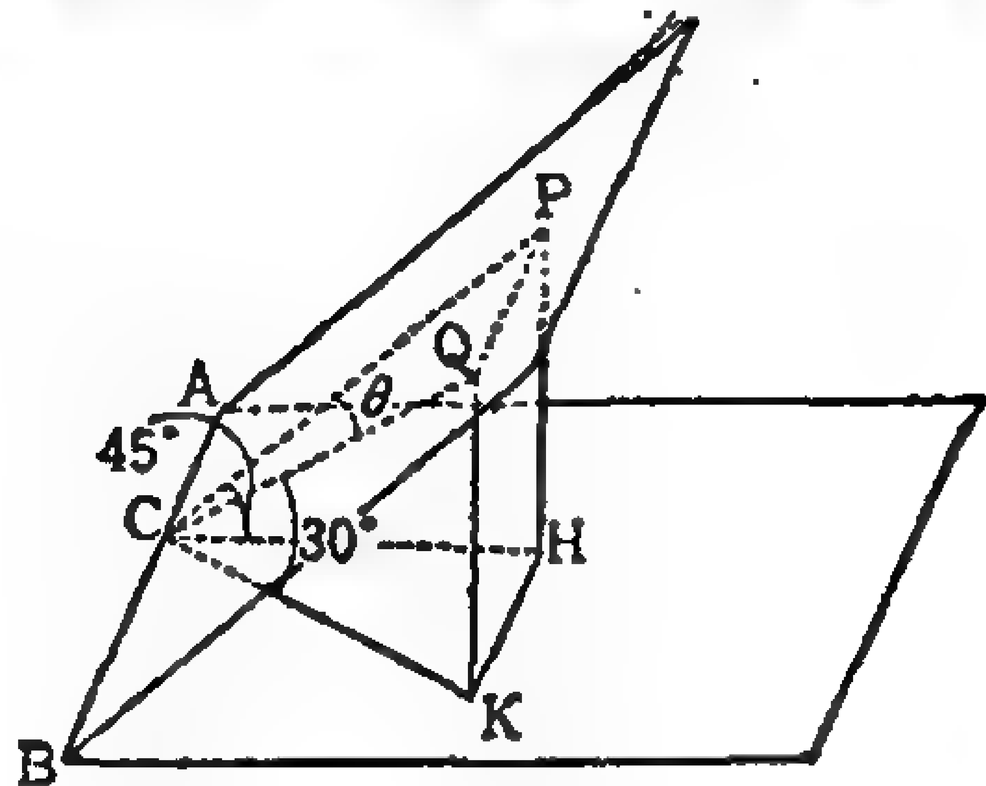
$$\triangle AA'C\backsim\triangle BB'C,$$

$$\therefore\quad CA:CB=AA':BB'=AP:PB.$$

应用阿波罗尼斯轨迹可得作法如下：

设AB的延长线和XY的交点为C，则C是定点．先求点C关于A、B的调和共轭点D，再以CD为直径作圆，它和XY交于P，则点P就是所求的点．

3096．已知一斜面的倾角为45°，为登上这个斜面的某一高度，可选择倾角保持30°的路，也可以选择在这个斜面上笔直到达的路，试求这两条道路间的夹角．



解　如图．设斜面和水平面的交线为AB，在AB上取一点C，过C在斜面上作与AB垂直的直线，并且在这条直线上取一点P．再过C引倾角为30°的直线，在这条直线上取和点P有同一高度的点Q．设P、Q在水平面上的射影分别为H、K，则过C且与AB垂直的直线上的点P与水平面的距离为

$$PH=CP\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}CP.$$

又由C出发，沿倾角为30°的路，到达和点P同一高度的点Q，则Q与水平面的距离为

$$QK=CQ\sin 30^\circ=\frac{1}{2}CQ,$$

由于　$PH=QK$．

所以　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}CP=\dfrac{1}{2}CQ,$

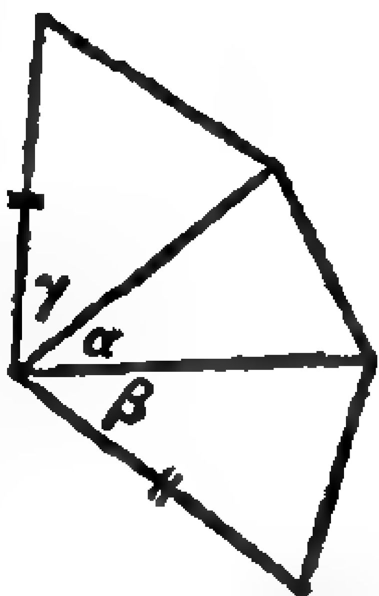
即　$\dfrac{CP}{CQ}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

设$\angle PCQ=\theta$，则由$CP\perp PQ$知

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad\therefore\quad\theta=45^\circ.$$

因此两道路的夹角为45°．

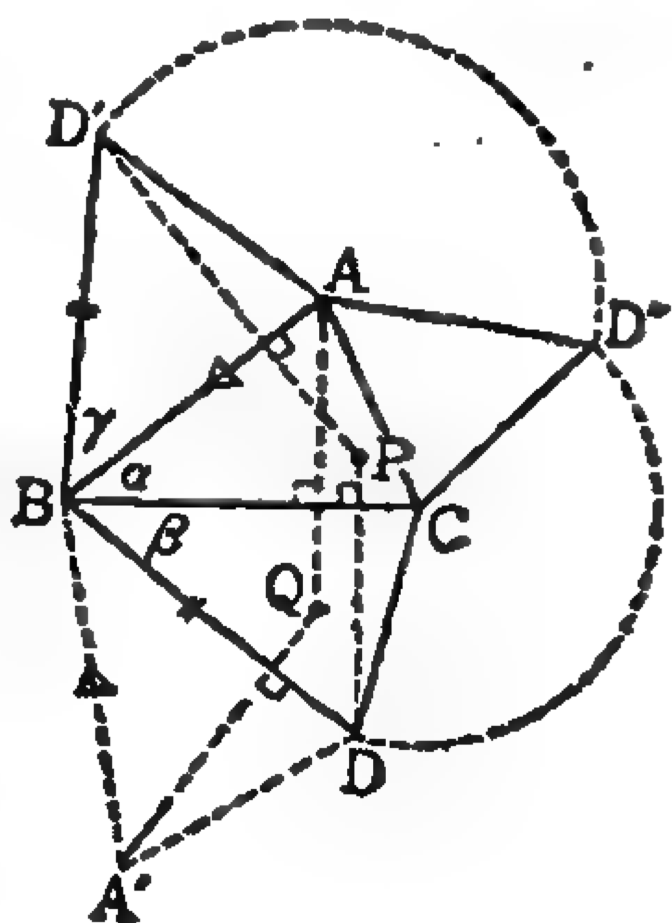
3097．(1) 右图是四面体的α、β、γ三面展开图的一部分，试完成它的全部展开图．



(2) 分别在两面α、β上作出过其所对的顶点向该面所引垂线的垂足．

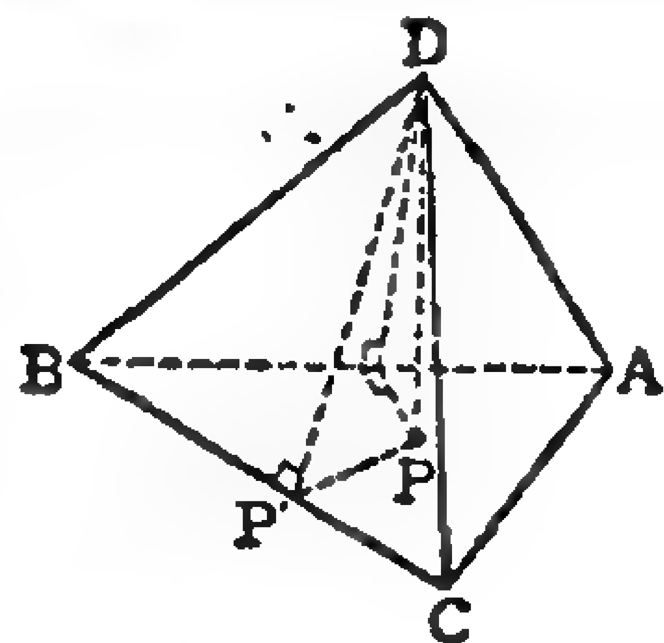
解　(1) 如上图，设γ面为BAD'，α面为BCA，β面为BDC．以A为圆心、AD'为半径的圆弧和以C为圆心、CD为半径的圆弧的交点为D''，则$\triangle ACD''$就是该四面体的第四面的展开图．

因此，把展开图按线段BA、BC、CA分别折迭，则D、D'、D''重合于一点D，于是可得四面体$ABCD$。



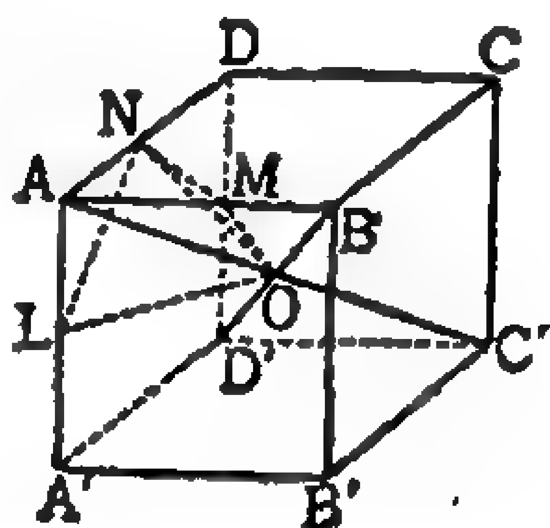
(2) 从四面体$ABCD$的顶点D，向$\triangle ABC$引垂线DP，由D向BC引垂线DP'，由问题**3043**，知$DP'\perp BC$，因而在展开图中，P在由D向BC所作的垂线上。因此，要求点P可以从D'、D分别向BA、BC引垂线，它们的交点就是P。

现在再来求从四面体的顶点A引$\triangle BCD$所在平面的垂线的垂足Q. 如图，在展开图中作$\triangle BAD'\cong\triangle BA'D$，从$A$、$A'$分别向$BC$、$BD$引垂线，设其交点为$Q$，则$Q$就是从顶点$A$向对面$BCD$所引的垂线的垂足。



第三章　棱锥、棱柱、多面体

3098. 已知半径为a的球O和它的外切立方体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$。设三条棱AA'、AB、AD的中点分别为L、M、N，试回答下列问题：



(1) 求四面体$O\text{-}LMN$各棱的长；

(2) 求四面体$O\text{-}LMN$的体积；

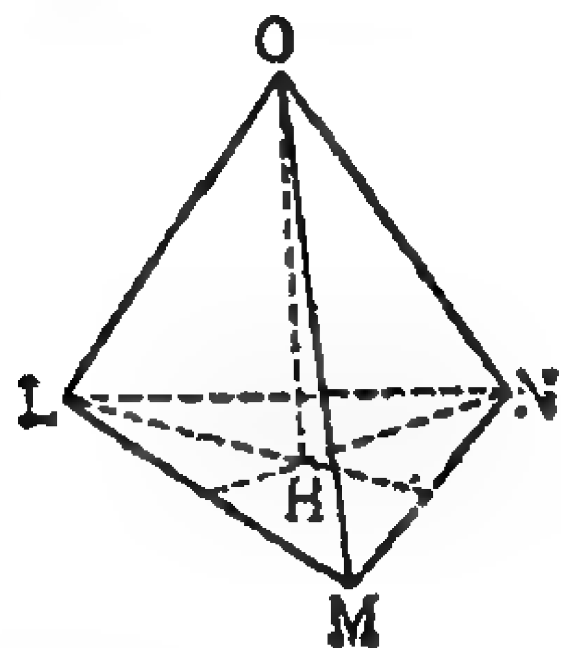
(3) 说明平面LMN和球O是否相交。

解 (1) 由题设知，立方体的棱长为$2a$，于是$OL=\frac{1}{2}A'C'$，而$A'C'=2\sqrt{2}a$，所以$OL=\sqrt{2}a$. 同样，$O\text{-}LMN$的各棱都是$\sqrt{2}a$.

(2) 四面体$O\text{-}LMN$的体积为

$$\frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{2}a)^3=\frac{a^3}{3}$$

(参照问题**3123**)。



(3) 设从O引平面LMN的垂线为OH，则

$$LH=\frac{2}{3}\cdot LM\sin 60^\circ$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}a\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\sqrt{\frac{2}{3}}a,$$

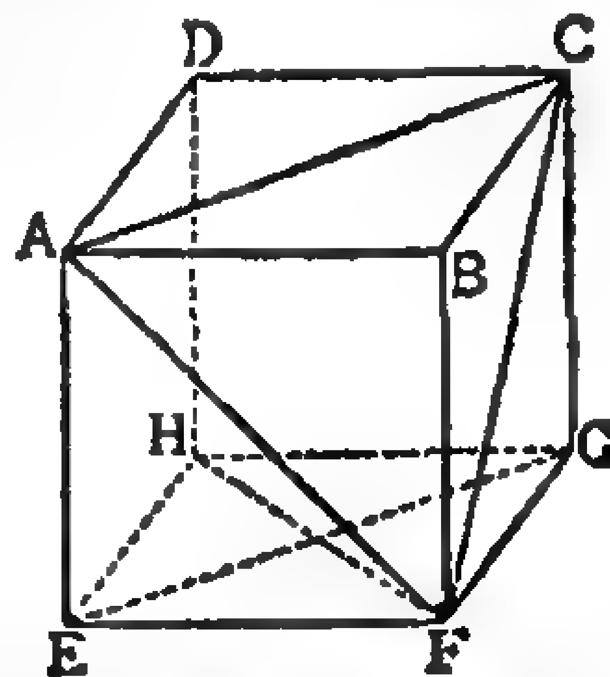
$$\therefore\quad OH=\sqrt{(\sqrt{2}a)^2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2}$$

$$=\sqrt{2a^2-\frac{2}{3}a^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}a>a.$$

因此，球的中心O到平面LMN的距离比球的半径大，从而球O和平面LMN不能相交。

3099. 已知立方体的一个面的对角线为l，讨论其他各面的对角线和l的夹角，并用图表示。

解 设立方体$ABCD\text{-}EFGH$的一个面$ABCD$的对角线为l，则$\triangle ACF$是正三角形，所以l和AF、CF都成60°角。



因为$CF\parallel DE$，$AF\parallel DG$，所以l和DE、DG都成60°角. 又因$AC\parallel EG$（即$l\parallel EG$），$HF\parallel DB$，所以$HF\perp l$.

在$\triangle AHC$中，$AC=AH=HC$，所以AH和l成60°角。又$AH\parallel BG$，所以l和BG也成60°角。

综上所述，各面上的对角线和$l(=AC)$成60°角的有：

AF, DG, CF, DE, BE, CH, BG, AH;

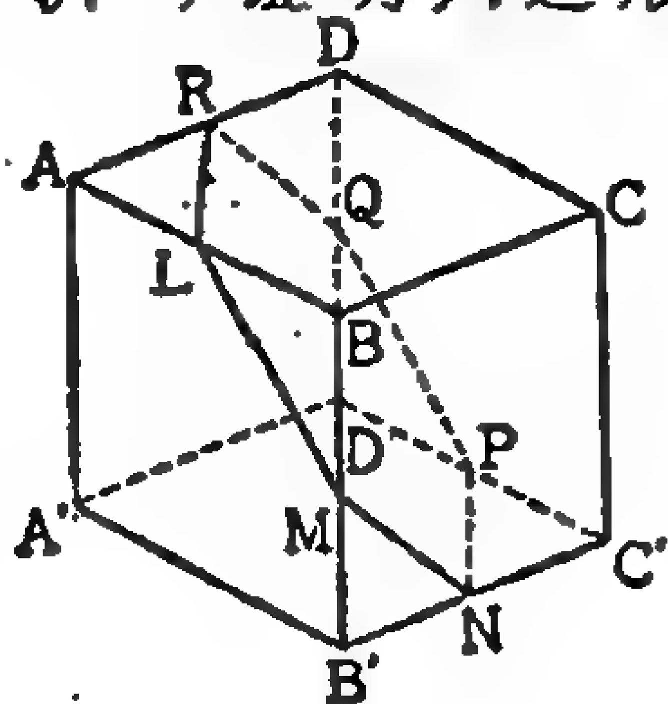
和$l(=AC)$成90°角的有：

DB, HF;

和$l(=AC)$平行的为EG。

3100. 如图已知立方体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$各棱AB、BB'、$B'C'$、$C'D'$、$D'D$、DA的中点

分别为 L、M、N、P、Q、R，证明六边形 $LMNPQR$ 是正六边形。



解　设立方体各面的对角线的长为 l，则由 P、Q 分别是 $C'D'$、$D'D$ 的中点可知

$$PQ=\frac{1}{2}DC'=\frac{1}{2}l.$$

同理，
$$QR=\frac{1}{2}AD'=\frac{1}{2}l,$$

$$RL=\frac{1}{2}DB=\frac{1}{2}l,$$

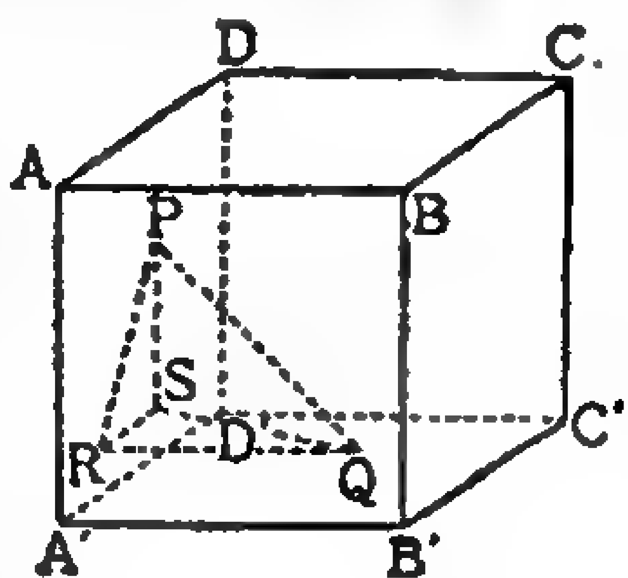
其他各边的长也都是 $\frac{1}{2}l$。因此，六边形 $LMNPQR$ 是等边的。

因为 $RL\parallel DB$，$QM\parallel DB$，所以 R、L、M、Q 在同一平面上。又因 $RN\parallel AB'\parallel LM$，所以 R、L、M、N 也在同一平面上。又因 $PN\parallel D'B'\parallel QM$，所以 P、N、M、Q 也在同一平面上。在上述三个平面中，容易知道它们都有三个点公共，因此这个六边形 $LMNPQR$ 在同一平面上。

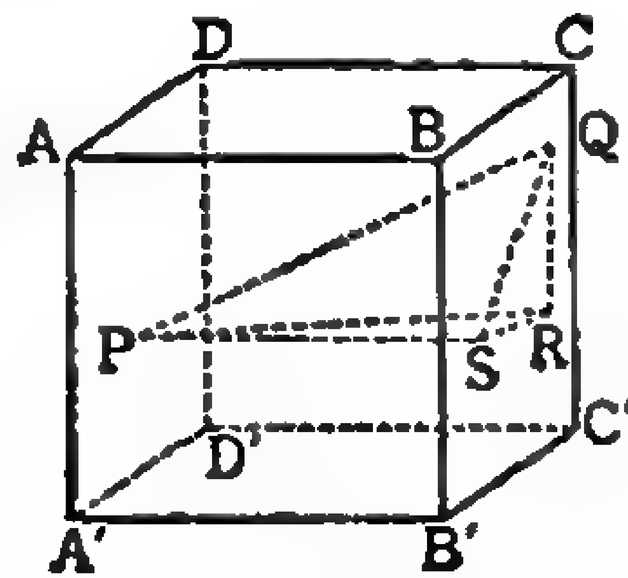
因为 $RL\parallel BD$，$RQ\parallel AD'$，由上题知 BD 和 AD' 成 60° 角，从而 $\angle LRQ=120°$。同理，这个六边形的其他五个顶角也是 120°。

综上所述，可知六边形 $LMNPQR$ 是正六边形。

3101. 在立方体的表面上，怎样的两点间的距离最大，并述其理由。



解　设立方体的边长为 a，可分为点 P 和 Q 在同一面上、分别在相邻的面上、分别在相对的面上三种情况讨论。



(i) 如 P、Q 在同一面上，则 PQ 不会大于该面对角线的长，所以 $PQ\leqq\sqrt{2}a$。

(ii) 设立方体为 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，P、Q 分别在相邻两面 $AA'D'D$、$AA'B'B$ 上(如图)。作 $QR\parallel A'B'$，$RS\parallel A'D'$，$PS\parallel AA'$，则

$$PQ^2=PR^2+QR^2=RS^2+PS^2+QR^2$$
$$\leqq A'D'^2+AA'^2+A'B'^2=B'D^2.$$

$$\therefore\ PQ\leqq B'D\quad 或\quad PQ\leqq A'C,$$

从而
$$PQ\leqq\sqrt{3}a.$$

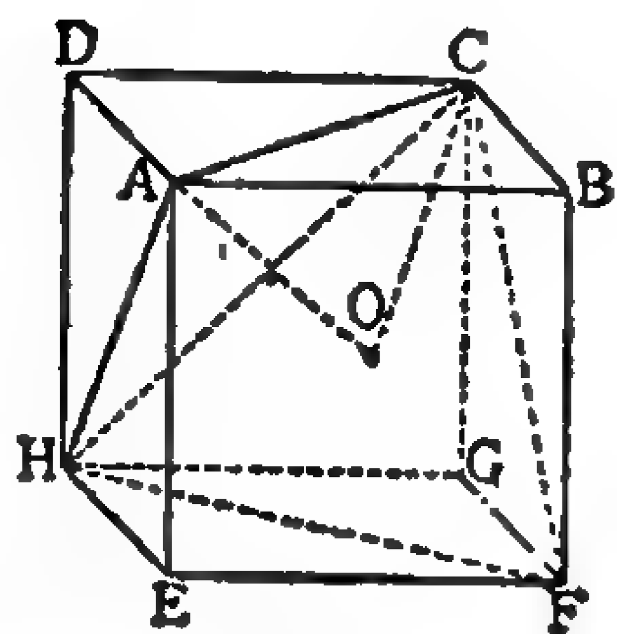
(iii) 设 P、Q 分别在相对两面 $AA'D'D$、$BB'C'C$ 上(如图)。作 $PS\parallel A'B'$，$SR\parallel B'C'$，$QR\parallel BB'$，则

$$PQ^2=PS^2+SQ^2=PS^2+QR^2+RS^2$$
$$\leqq A'B'^2+B'C'^2+C'C^2=A'C^2.$$

$$\therefore\ PQ\leqq A'C\quad 即\quad PQ\leqq\sqrt{3}a.$$

综合 (i)、(ii)、(iii) 三种情况，可知 PQ 为立方体的对角线时最长。

3102. 适当选择边长为 a 的立方体的四个顶点，顺次连结而成正四面体，求这个正四面体的高和底面积。



解　如图，$A\text{-}HFC$ 是正四面体，它的各棱长都是 $\sqrt{2}a$。如把正三角形 HFC 看作底面，并设其面积为 S，则由各边长为 $\sqrt{2}a$，知

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2=\frac{1}{2}\sqrt{3}a^2.$$

设边长为 $\sqrt{2}a$ 的正三角形 HFC 的重心为 O，则

$$CO=\frac{1}{2}\sqrt{3}\times(\sqrt{2}a)\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a.$$

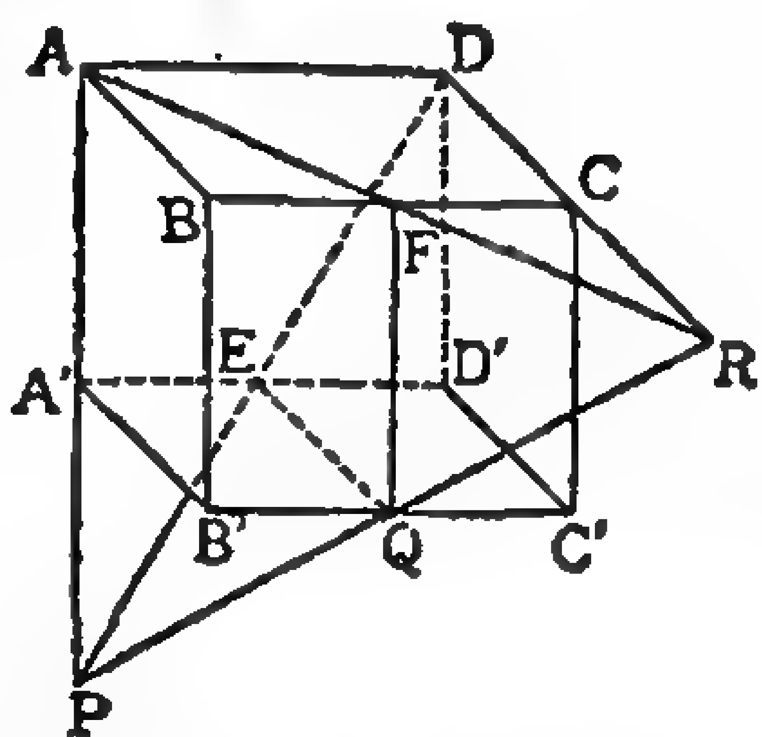
因此，$A\text{-}HFC$ 的高为

$$AO=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{2a^2-\frac{2}{3}a^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

即高为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$，底面积为 $\frac{1}{2}\sqrt{3}a^2$。

3103. 已知一条直线和立方体的三条棱或其延长线分别交于 P、Q、R，若 Q 在 P、R 之间并且是一条棱的中点，证明在与立方体的三条棱或其延长线都相交的线段中以 PR 最短，其长等于这个立方体的棱长的三倍。

解　设直线 PQR 与立方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的三条棱 AA'、$B'C'$、DC 或其延长线分别交于 P、Q、R，Q 为 $B'C'$ 的中点。这个立方体的棱长等于 a。棱 AA' 和点 Q 所决定的平面和平面 BC' 的交线为 QF，则由 $AA'\parallel$ 平面 BC'，可知 $AA'\parallel QF$。



同理，设棱 DC 和点 Q 所决定的平面和平面 $A'C'$ 的交线为 QE，则 $QE\parallel DC$。因为直线 PQR 在两个平面 (Q, AA')、(Q, DC) 上，所以它是这两个平面的交线。三点 P、E、D 都在两个平面 AD' 和 (Q, DC) 上，所以 P、E、D 三点在同一直线上，而且这条直线就是平面 $A'D$ 和 (Q, DC) 的交线。同理三点 A、F、R 也在同一直线上。

已知立方体的棱长为 a，设 $BF:FC=k$，则当 $k=1$ 时 PR 最短。证明如下：

$$\because\quad AB:CR=BF:FC=k,$$
$$A'P:DD'=A'E:ED'=k.$$
$$\therefore\quad CR=\frac{a}{k},\quad A'P=ak,$$
$$AR^2=AD^2+DR^2=a^2+\left(a+\frac{a}{k}\right)^2.$$

又因 $\angle PAR=\angle R$，从而

$$\begin{aligned}PR^2&=AP^2+AR^2\\&=(a+ak)^2+a^2+\left(a+\frac{a}{k}\right)^2\\&=3a^2+a^2\left[2\left(k+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k^2}+k^2\right].\end{aligned}\quad ①$$

从①式可以看出，PR 最小就是 $\left(k+\frac{1}{k}\right)$，$\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)$ 最小。由于 $\left(k,\frac{1}{k}\right)$ 和 $\left(k^2,\frac{1}{k^2}\right)$ 的积都是 1，是一定的，所以当且仅当 $k=\frac{1}{k}$ 且 $k^2=\frac{1}{k^2}$，即 $k=1$ 时，

$$\left(k+\frac{1}{k}\right),\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)$$

最小。这就是说，当 Q 是 $B'C'$ 的中点时 PR 最短。

由①式，可知

$$PR^2=3a^2+a^2[2(1+1)+1^2+1^2]=9a^2,$$
$$\therefore\quad PR=3a.$$

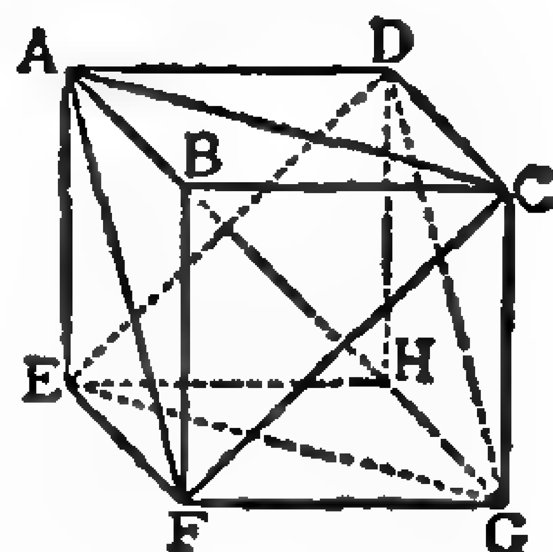
3104. 如图，已知立方体的棱长为 a，

(1) 证明 $AC\perp$ 平面 $BDHF$；

(2) 证明 $AC\perp BH$；

(3) 证明 BH 垂直于平面 ACF 和平面 DEG；

(4) 求平面 ACF 和平面 DEG 的距离。



解　(1) 因 $BF\perp$ 平面 ABC，故 $BF\perp AC$。又 $BD\perp AC$，

$$\therefore\quad AC\perp \text{平面 } BDHF.$$

(2) 由(1)，可知 $AC\perp BH$。

(3) 和(2)同样，$CF\perp BH$，

$$\therefore\quad BH\perp \text{平面 } ACF.$$

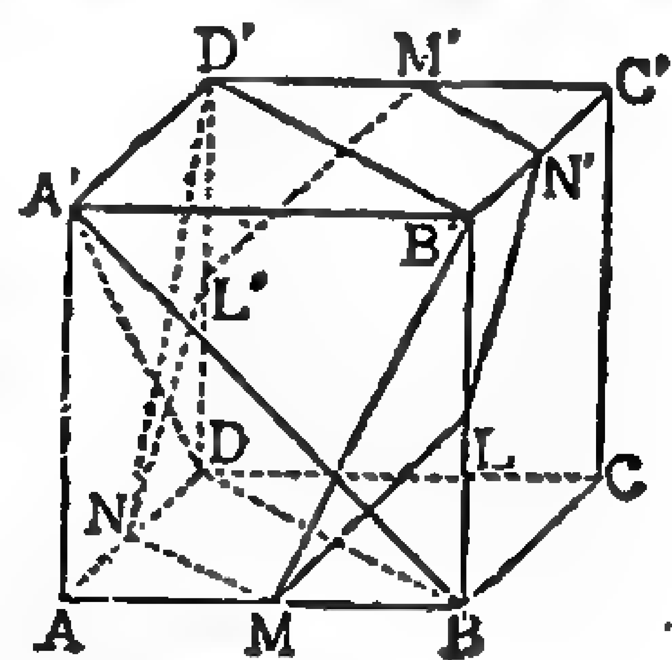
同理，$BH\perp DE$，$BH\perp DG$，

$$\therefore\quad BH\perp \text{平面 } DEG.$$

(4) 因为 AC 和 BD 的交点 X，EG 和 FH 的交点 Y，分别是矩形 $BFHD$ 的边 BD 和 FH 的中点，所以如设 FX、DY 和 BH 的交点分别为 M、N，则 M、N 把 BH 三等分。又 M、N 分别是直线 BH 和平面 ACF、DEG 的交点，BH 又和这两个平面垂直，所以 MN 就是这两个平面的距离。因而所求距离为

$$MN=\frac{1}{3}BH=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

3105. 立方体被一个平面截开，使其截口为下面指出的图形。如果能够作出的，可记作[○]，并述其作法(不证明)；如果不能作出的，可记作[×]，并说明其理由。



(1) 正三角形；

(2) 直角三角形；　(3) 梯形；

(4) 正六边形。

解　设立方体为 $ABCD-A'B'C'D'$。

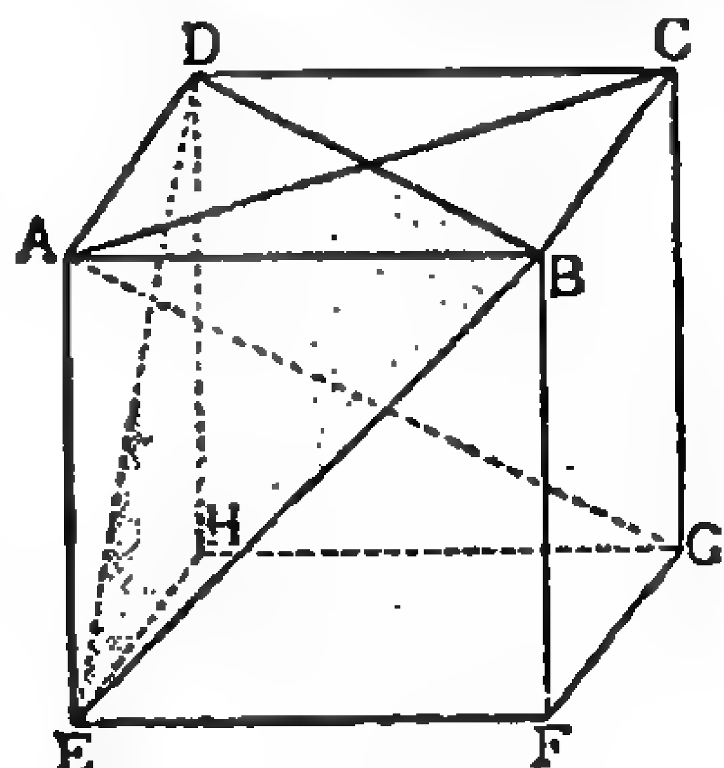
(1) [○]。例如用 A'、B、D 三点所确定的平面截立方体，截面就是正三角形。

(2) [×]。要使截口为直角三角形，就须用与棱垂直的平面去截，但是当用与棱垂直的平面去截立方体所得的截口是正方形，因

此这是不可能的。

(3) [○]. 例如，设 AB、AD 的中点分别为 M、N，则可用 M、N、D'、B' 所确定的平面截开立方体，其截口就是梯形。

(4) [○]. 例如，设不过相对顶点 A'、C 的六条棱 AB、AD、BB'、DD'、$B'C'$、$C'D'$ 的中点分别为 M、N、L、L'、N'、M'，则这些中点所确定的平面去截立方体就得到截口为正六边形（参照问题 **3100**）。



3106. 证明立方体 $ABCD$-$EFGH$ 的对角线 AG 垂直于平面 BDE。

解 如图，因为 $DB\perp AC$，$DB\perp CG$，

所以 $$DB\perp \text{平面 } ACG.$$

从而 $$AG\perp DB.$$

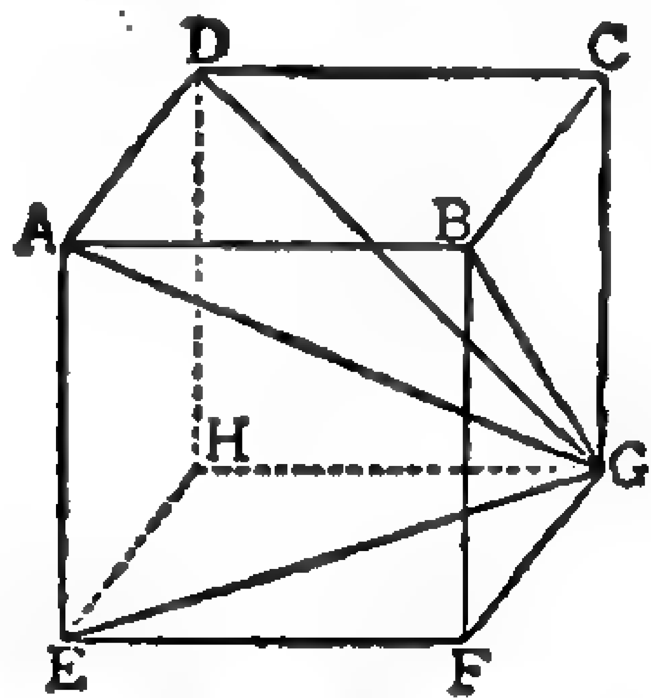
同理， $$AG\perp BE,$$

$$\therefore\ AG\perp \text{平面 } DBE.$$

3107. 已知 AG 为立方体 $ABCD$-$EFGH$ 的一条对角线。

(1) 证明 $\angle BAG=\angle DAG=\angle EAG$；

(2) 当与对角线 AG 垂直的平面由 A 向 G 运动时，它们截开这个立方体所得的截面形状是怎样变化的？



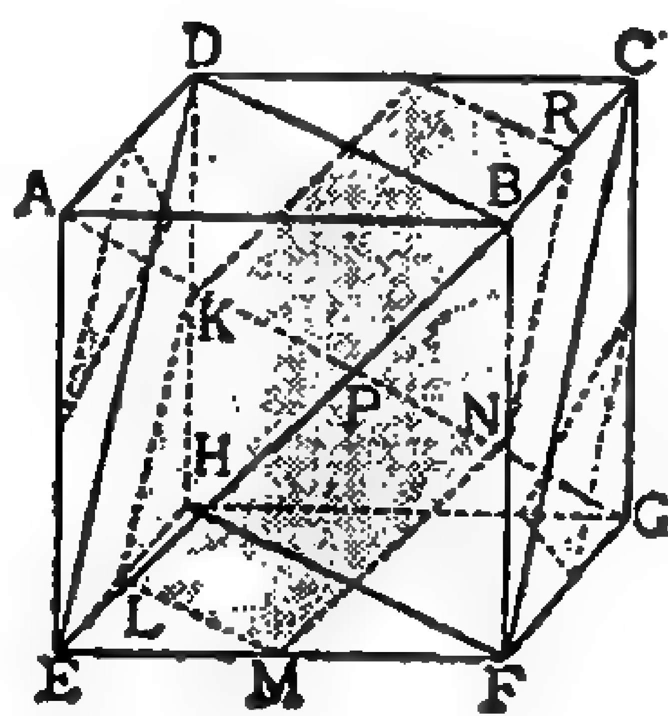
解 (1) 在 $\triangle BAG$、$\triangle DAG$、$\triangle EAG$ 中，

$$AG \text{ 公共},$$
$$AB=AD=AE,$$
$$BG=DG=EG,$$

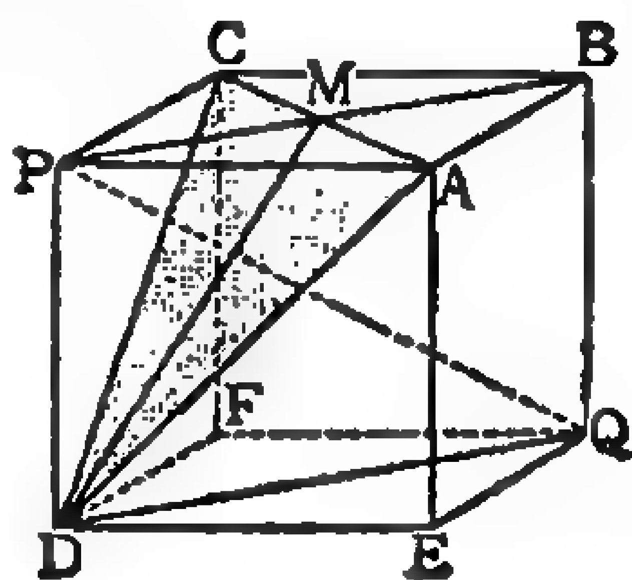
所以这三个三角形全等．从而

$$\angle BAG=\angle DAG=\angle EAG.$$

(2) 根据上题知，与对角线 AG 垂直的平面都平行于平面 DBE，且 $\triangle DBE$ 是正三角形。设与 AG 垂直的平面为 P，则当 P 从 A 开始运动，到与平面 DBE 重合时，其截面都是正三角形。当 P 从平面 DBE 开始运动到与平面 CFH 重合时，则截口为等角六边形，它的各边中，每间隔一个的边长都相等。特别地，当平面 P 在平面 DEB 和 CFH 的正中时，所得截面是正六边形。当 P 从平面 CFH 开始运动到点 G，所得截口又是正三角形。



3108. (1) 已知 PQ 为立方体 $ABCP$-$EQFD$ 的一条对角线，证明过离顶点 P 最近的三个顶点的平面，及过离顶点 Q 最近的三个顶点的平面都和 PQ 垂直。



(2) 用过 PQ 的中点 O 且与 PQ 垂直的平面截立方体，其截口是什么形状，并说明其理由。

解 (1) 设 AC、BP 的交点为 M，则 M 是 AC 的中点，

$$\therefore\ AC\perp DM.$$

又 $$AC\perp PB,$$

$$\therefore\ AC\perp \text{平面}(DM,\ PB).$$

即 $$AC\perp \text{平面 } PDQB,$$

$$\therefore\ PQ\perp AC.$$

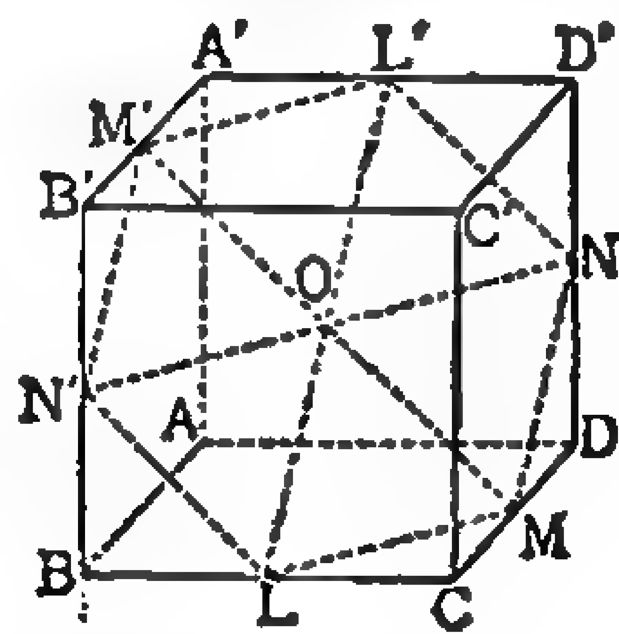
同理， $$PQ\perp AD,$$

$$\therefore\ PQ\perp \text{平面 } ADC.$$

同理， $$PQ\perp \text{平面 } BEF.$$

(2) 用通过对角线 PQ 的中点 O 的垂直平分面截开立方体，则截口为正六边形（参照上题）。

3109. 如把体积为 1 的立方体，用过其对角线的中点且和该对角线垂直的平面去截，所得截口的图形是什么形状，面积是多少。



解 (i) 设立方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的对角线 AC' 的中点为 O，BC 的中点为 L，

在 $\triangle ABL$ 和 $\triangle C'CL$ 中，

$$AB=CC',\ BL=LC,$$
$$\angle ABL=\angle C'CL=\angle R,$$
$$\therefore\ \triangle ABL\cong\triangle C'CL,$$

从而 $$AL=LC'.$$

因此，$\triangle ALC'$ 是等腰三角形。又由于 O 是 AC' 的中点，所以 $AC'\perp OL$，从而 L 在 AC' 的垂直平分面 α 上．同样，设 CD、DD'、$D'A'$、$A'B'$、$B'B$ 的中点分别为 M、N、L'、M'、N'，则这些中点都在 AC' 的垂直平分面 α 上．这时，

$$AO=\frac{1}{2}AC'=\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad OL=\sqrt{AL^2-AO^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

同理，

$$OL=OM=ON=OL'=OM'=ON'=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

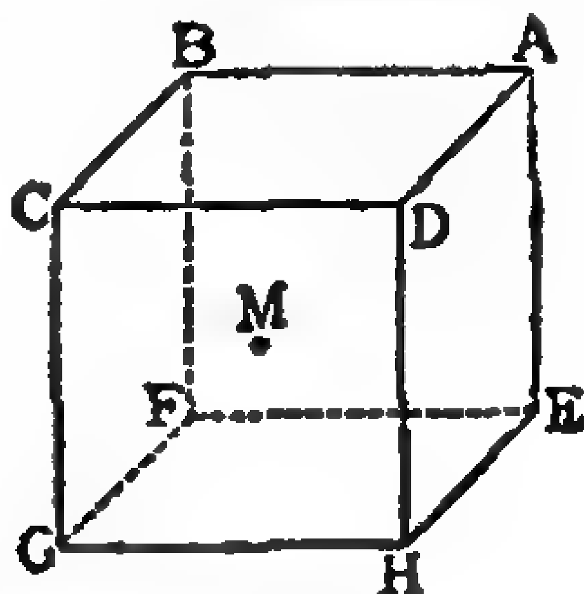
又 $$LM=MN=NL'=L'M'=M'N'=N'L=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故 $LMNL'M'N'$ 是在平面 α 上的正六边形．这就是说，用过对角线 AC' 的中点且和该对角线垂直的平面截开立方体，则所得截口是正六边形。

(ii) 这个正六边形的面积为

$$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

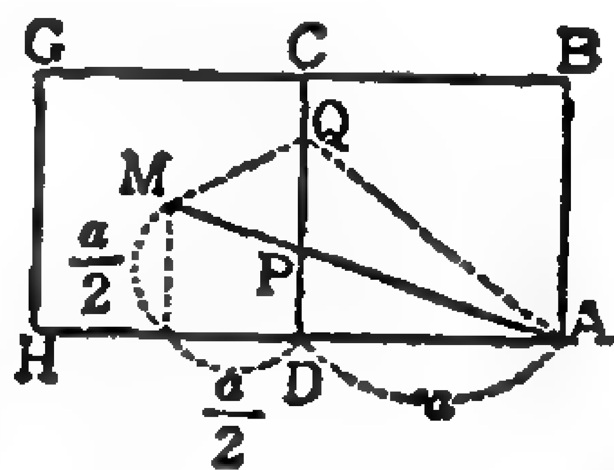
3110．已知棱长为 a 的立方体 $ABCD\text{-}EFGH$（如图）.



(1) 在立方体的表面上，求从顶点 A 到达正方形 $CDHG$ 的中心 M 的最短路线及其长度；

(2) 叙述上述路线最短的道理；

(3) 指出最短的路线共有几条。



解 (1) 设把从点 A 出发，过棱 CD，然后到达点 M 的路线记作 $A\text{-}CD\text{-}M$。在这些路线中最短的是在其展开图中和 AM 重合的路线。设该路线和 CD 的交点为 P，则

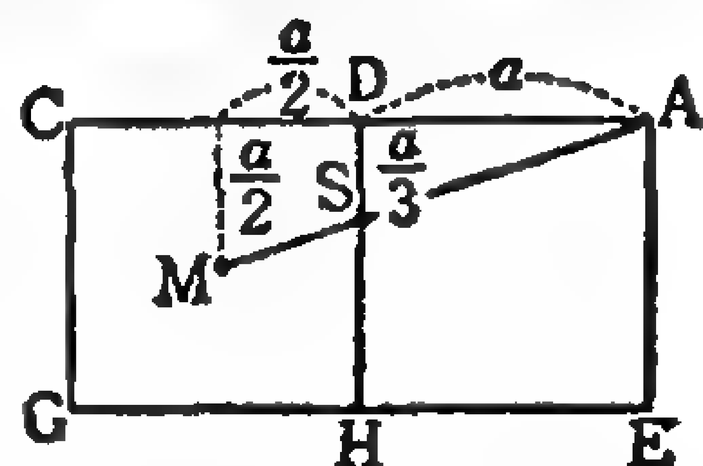
$$DP:\frac{a}{2}=a:\frac{3}{2}a,$$

$$\therefore\quad DP=\frac{a}{3}.$$

即在棱 CD 上取 $DP=\frac{a}{3}$ 的点 P，则折线 APM 就是所求最短的路线。它的长度为

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a+\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}a.$$

(2) 在 $A\text{-}CD\text{-}M$ 的所有路线中，以折线 AMP 最短，这是因为：在棱 CD 上取不是点 P 的任意一点 Q，则在展开图中有



$$AQ+QM>AM=AP+PM.$$

同样，在 $A\text{-}DH\text{-}M$ 的路线中，以在棱 DH 上取 $DS=\frac{a}{3}$ 的点 S 所形成的折线 ASP 最短，且其长为 $\frac{\sqrt{10}}{2}a$.

从点 A 出发，过棱 BC 和 CG，然后到点 M 的路线中，最短路线的长分别是

$$A\text{-}BC\text{-}CG\text{-}M:\ \frac{3\sqrt{2}}{2}a,$$

$$A\text{-}HE\text{-}GH\text{-}M:\ \frac{3\sqrt{2}}{2}a,$$

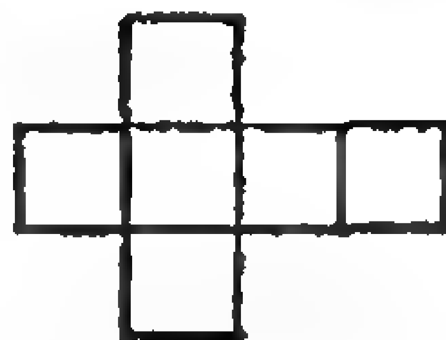
$$A\text{-}BF\text{-}CG\text{-}M:\ \frac{\sqrt{26}}{2}a,$$

$$A\text{-}EF\text{-}GH\text{-}M:\ \frac{\sqrt{26}}{2}a$$

（除此之外，还有其他路线，但都比 $\frac{\sqrt{10}}{2}a$ 长）。

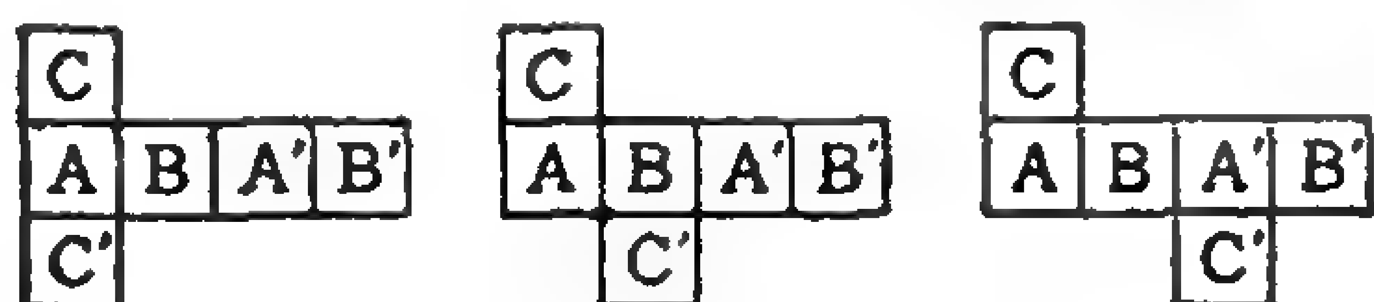
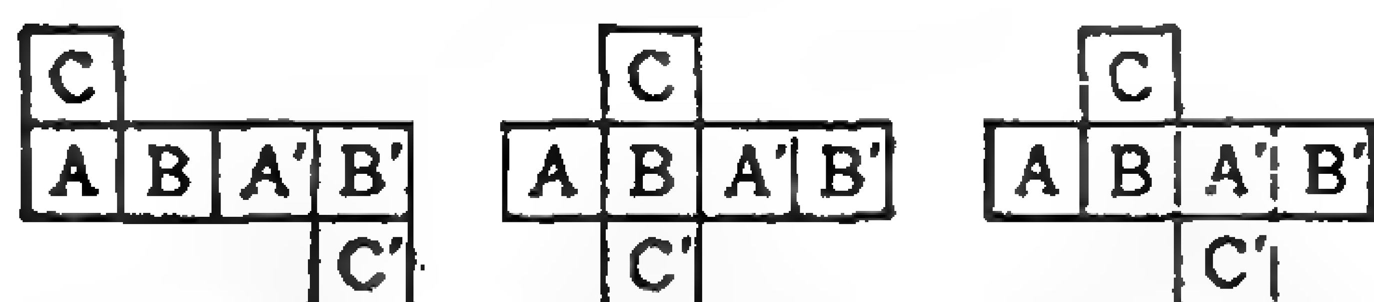
(3) 综上所述，可知在立方体的表面上，从 A 到达 M 的最短路线只有两条，即折线 APM 和 ASM。

3111．立方体的展开图除下图外，还有其他的吗？注意不要漏掉不同形状的展开图。

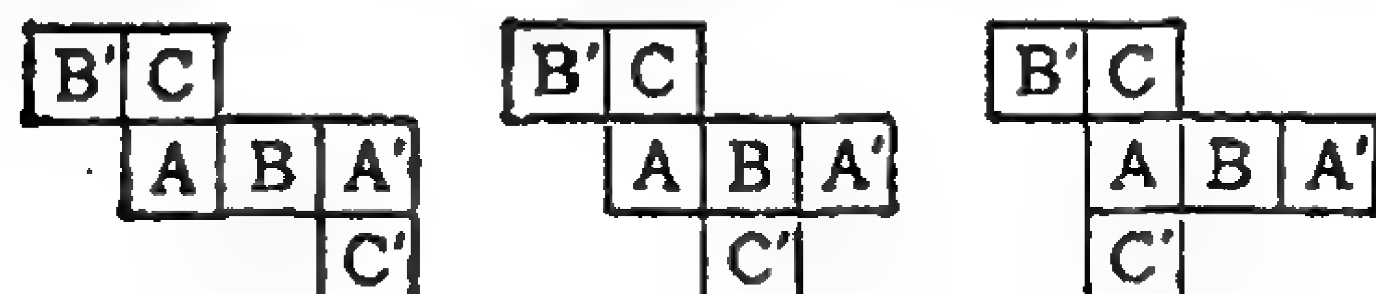
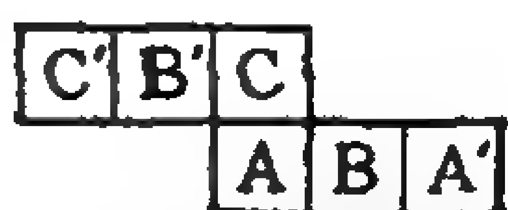


解 在这个立方体中，把三个两两相邻的面分别记作 A、B、C，和它们相对的面分别记作 A'、B'、C'。着眼于对面的排列，而把相邻的面相对地固定，则有以下各种情形。

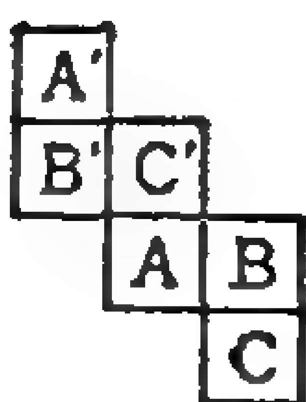
(i) 把四个面 A、B、A'、B' 并列的展开图中，它和面 C、C' 的连接方法不外乎以下六种：

(ii) 把三个面 A、B、A' 并列，并且使 B' 不和它们相邻。这种展开图不外乎以下四种:

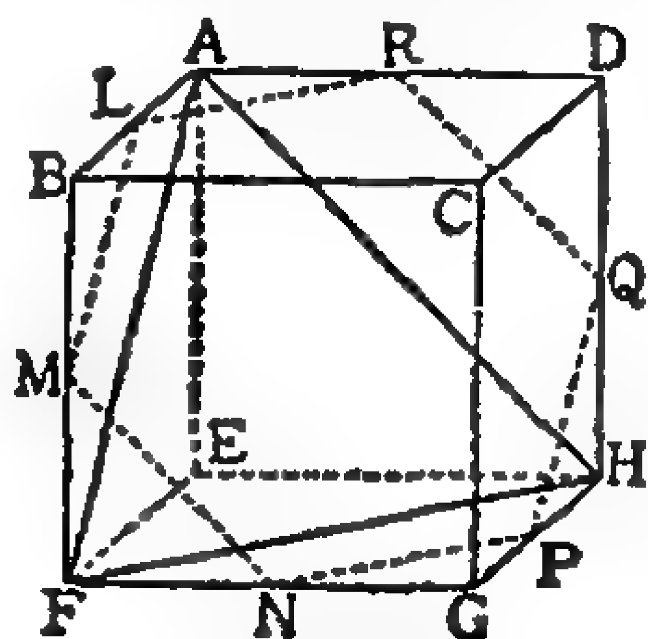



(iii) 把两个面 A、B 并列，并且使 A' 和它们相邻。这种展开图，除和以上重复的外，只有一种。



综合上述，立方体的展开图共有 11 种，除题给的一种外，还有 10 种。

3112. 在长方体 $ABCD$-$EFGH$ 中，设棱 AB、BF、FG、GH、HD、DA 的中点分别为 L、M、N、P、Q、R，则这些中点在同一平面上。再设两两相邻的三个面的对角线所成的三角形的面积为 S，问六边形 $LMNPQR$ 的面积是 S 的几倍?



解 因为 $LM \parallel AF$，$PQ \parallel DG$ 且 $AF \parallel DG$，所以 LM、PQ 都和 AF 平行。同样，LR、NP 都与 FH 平行，RQ、MN 都与 AH 平行。所以，六边形的各边都与平面 AFH 平行，因此这个六边形在同一平面上。

在六边形的内部取一点 O，使 $OR \perp\!\!\!= LM$，则 $LMOR$、$ORQP$、$OMNP$ 都是平行四边形。再从前图知

$$LM \perp\!\!\!= \frac{1}{2}AF,$$

$$LR \perp\!\!\!= PN \perp\!\!\!= \frac{1}{2}FH.$$

所以平行四边形 $LMOR$ 的两边 LM、LR 分别与 $\triangle AFH$ 的两边 AF、FH 平行，且等于它的一半。

$\therefore$ $\square LMOR$ 的面积 $=\frac{1}{2}\triangle AFH$ 的面积

$=\frac{1}{2}S$.

同理，

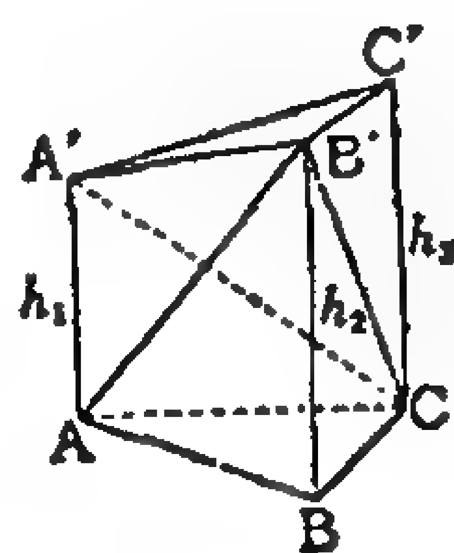
$\square MNPO$ 的面积 $=\square OPQR$ 的面积

$=\frac{1}{2}S$.

$\therefore$ 六边形 $LMNPQR$ 的面积 $=\frac{3}{2}S$.

3113. 把三棱柱用与其侧棱垂直的平面截开，如果截口三角形的面积为 S，截取部分三侧棱的长度分别为 h_1、h_2、h_3，证明这个截取部分的体积 V 可用下式表示:

$$V=\frac{1}{3}(h_1+h_2+h_3)S.$$



解 如图.设三棱柱 ABC-$A'B'C'$ 被与其侧棱垂直的平面所截得的截口为 $\triangle ABC$，且 $AA'=h_1$，$BB'=h_2$，$CC'=h_3$。则截取部分三棱柱的体积为

$V=B'$-ABC 的体积 $+A$-$A'B'C$ 的体积 $+A'$-$B'C'C$ 的体积。但是

A-$A'B'C$ 的体积 $=B$-$AA'B'$ 的体积

$=C$-ABA' 的体积 ($\because$ $AA' \parallel BB'$)

$=A'$-ABC 的体积,

A'-$B'C'C$ 的体积 $=A'$-$B'C'C$ 的体积

$=A$-$B'C'C$ 的体积

($\because$ $AA' \parallel$ 平面 $BCC'B'$)

$=A$-$BC'C$ 的体积 ($\because$ $BB' \parallel CC'$)

$=C'$-ABC 的体积,

B'-ABC 的体积 $=B'$-ABC 的体积,

$\therefore$ $V=B'$-ABC 的体积 $+A'$-ABC 的体积 $+C'$-ABC 的体积

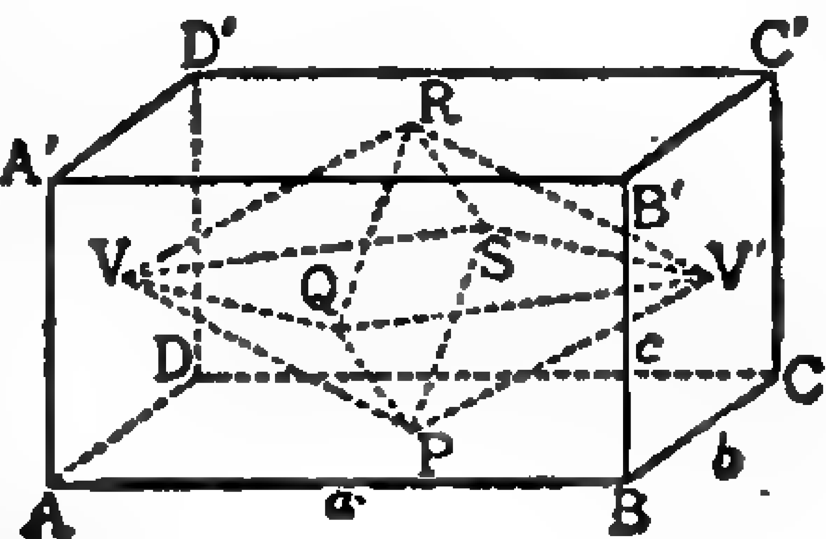
$$=\frac{1}{3}S\cdot BB'+\frac{1}{3}S\cdot AA'+\frac{1}{3}S\cdot CC'$$

$$=\frac{1}{3}S(h_1+h_2+h_3).$$

3114. 已知三度分别为 a、b、c 的长方

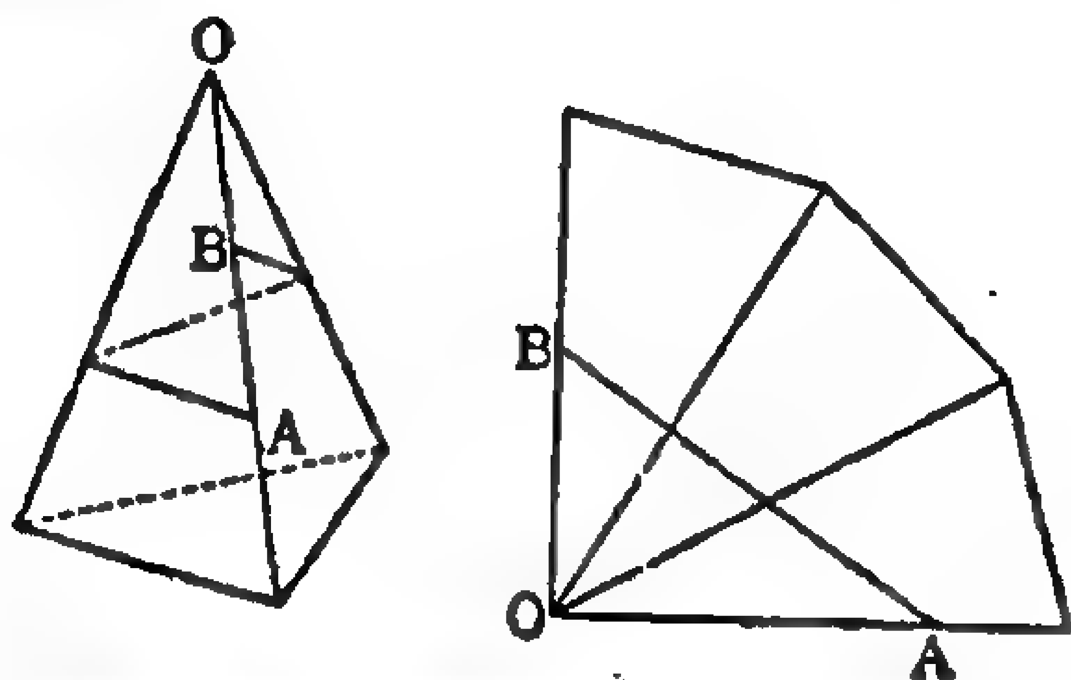
体，试求以它的各面的中心为顶点的八面体的体积。

解 如图，已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的各面 $ABCD$, $ABB'A'$, $A'B'C'D'$, $CC'D'D$, $ADD'A'$, $BCC'B'$ 的中心分别为 P、Q、R、S、V、V', $AB=a$, $BC=b$, $BB'=c$，则面 $PQRS$ 垂直于 VV'，且其面积为 $\frac{1}{2}bc$. 又 $VV'=a$，故八面体 $VPQRSV'$ 的体积为



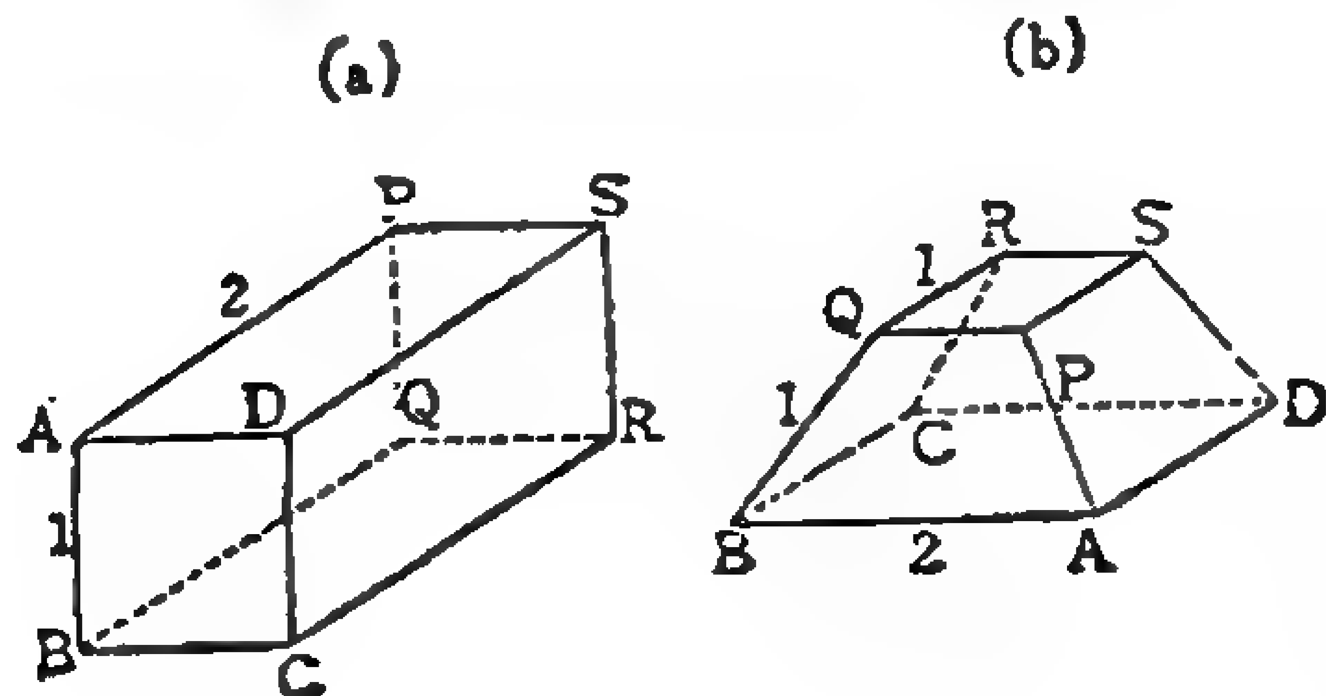
$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}bc\times a=\frac{1}{6}abc.$$

3115. 已知在以 O 为顶点的三棱锥中，过 O 的三条棱每两条都成 30° 角. 如果在一条棱上取两点 A、B，使 $OA=4$ cm, $OB=3$ cm，取一根细线使一端固定在点 A，然后在这个三棱锥的侧面紧绕一圈，最后到达点 B. 求这条线在 A、B 间的长度(设线和侧面之间密合).



解 如图，把三棱锥在 OA 处截开，并作出其侧面的展开图. 在这个展开图上，线段 AB 就是以 $OA=4$ cm, $OB=3$ cm 为直角边的直角三角形的斜边，所以线段 AB 的长度为 5 cm.

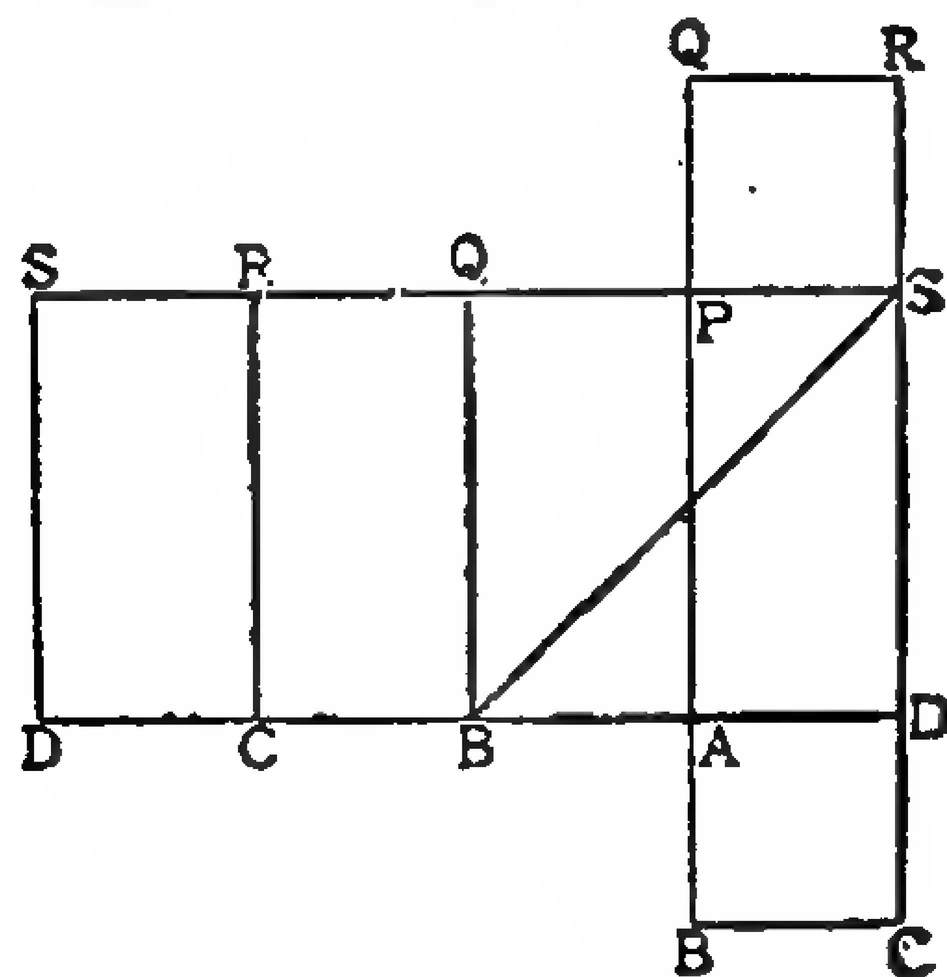
3116. 图(a)是正四棱柱，图(b)是正四棱台，图中的数字表示各该线段的长度。



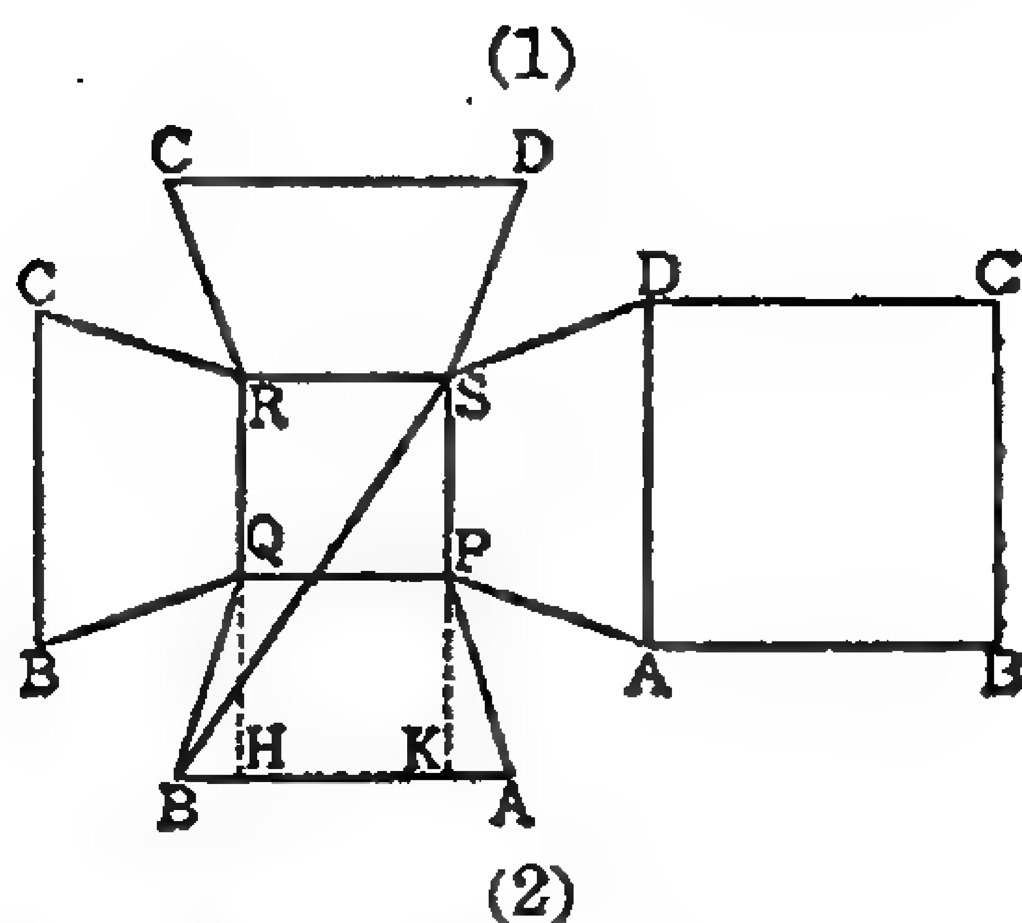
(1) 作它们的展开图. 对图 (a) 要求沿棱 AB、CD、SR、QP 切开。对图 (b) 要求沿棱 AP、BQ、CR、DS、AB、CD 切开。

(2) 不通过立体的内部，求连结两顶点 B、S 的最短路线，并用图表示。

解 (1) 展开图如下图。



(1)



(2)

(2) 关于最短路线:

在图(1)中，$SD=2$, $AB+AD=2$,

$$\therefore\quad BS=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}.$$

在图(2)中，

$$BH=\frac{1}{2},\quad PK=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore\quad BS=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{4+\sqrt{3}}.$$

3117. 求棱长为 a 的正八面体的体积。

解 设棱长为 a 的正八面体为 E-$ABCD$-F，则 $ABCD$ 是正方形，其面积为 a^2. 又这个正八面体的体积是正四棱锥 E-$ABCD$ 的体积的两倍，而正四棱锥的高又是正方形 $AECF$ 的对角线的一半，即

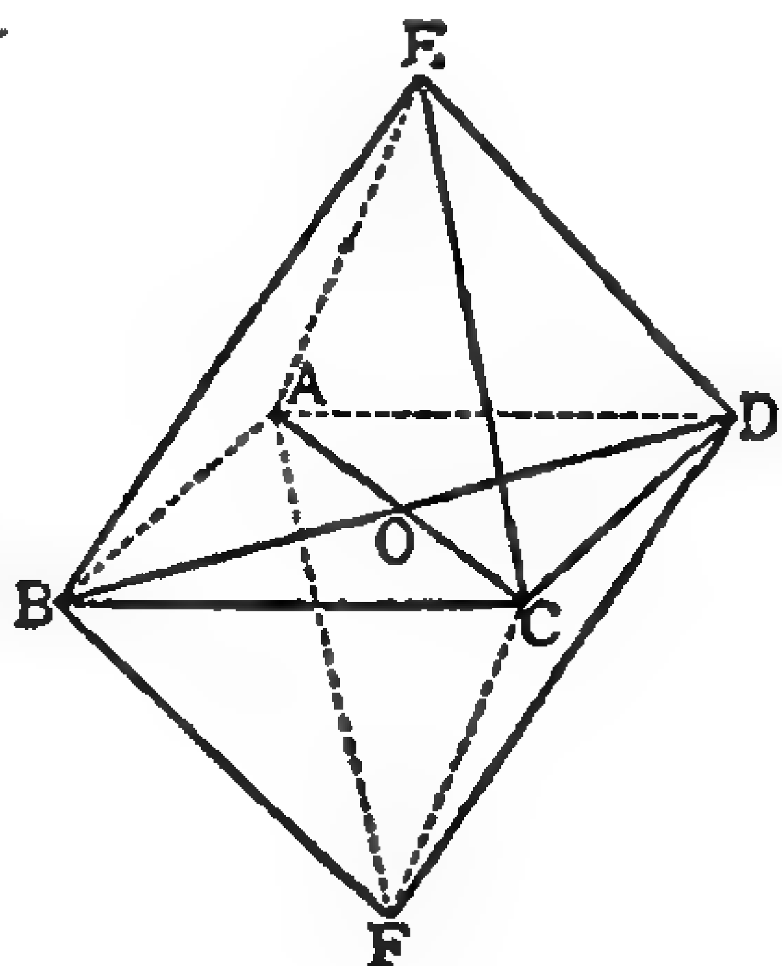
$$EO=\frac{1}{\sqrt{2}}a.$$

因此

$E\text{-}ABCD$ 的体积

$$=\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}a$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}a^3,$$

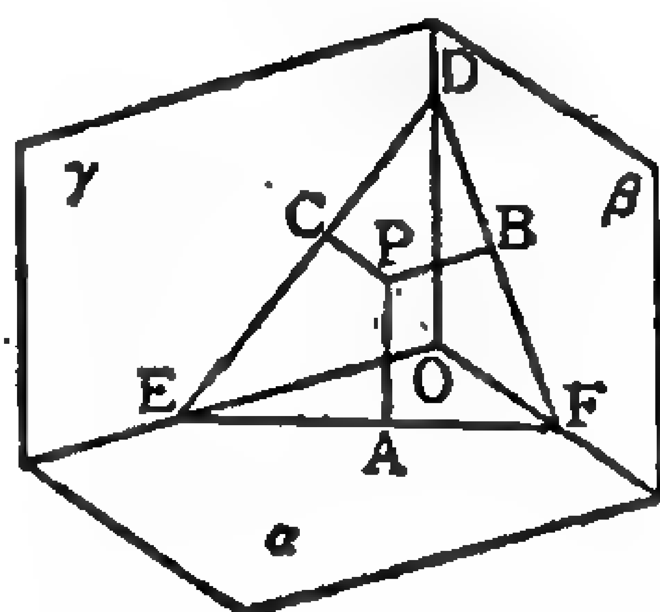


从而正八面体的体积是

$$\frac{a^3}{3\sqrt{2}}\times 2$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$

3118. 已知两两垂直相交的三个平面 α、β、γ，从不在这三个平面上的一点 P 向这三个平面引垂线，其垂足分别为 A、B、C。三点 A、B、C 所确定的平面和每取两个平面 β、γ，γ、α，α、β 的交线的交点分别为 D、E、F。取 $PA=a$，$PB=b$，$PC=c$。



(1) 求 OD、OE、OF 的长；

(2) 求四面体 $ODEF$ 的体积。

解 (1) 由题设条件知，平面 ABC 和 α 的交线 EF 过点 A。同理，FD 过 B，DE 过 C。因为 $PB\parallel OE$，$PC\parallel OF$，所以平面 $PBC\parallel\alpha$。从而这两个平面和平面 DEF 的交线 BC、EF 是平行的。

设从 C 引 OE 的垂线，垂足为 L，从 B 引 OF 的垂线，垂足为 N，则 $LN\parallel EF$。$OLAN$ 是矩形，所以 OA 把 LN 平分，因而

$$EA=AF.$$

同理，　$FB=BD$，$DC=CE$，

因而如设 OD 的中点为 M，则

$$OE=2CM=2PB=2b,$$

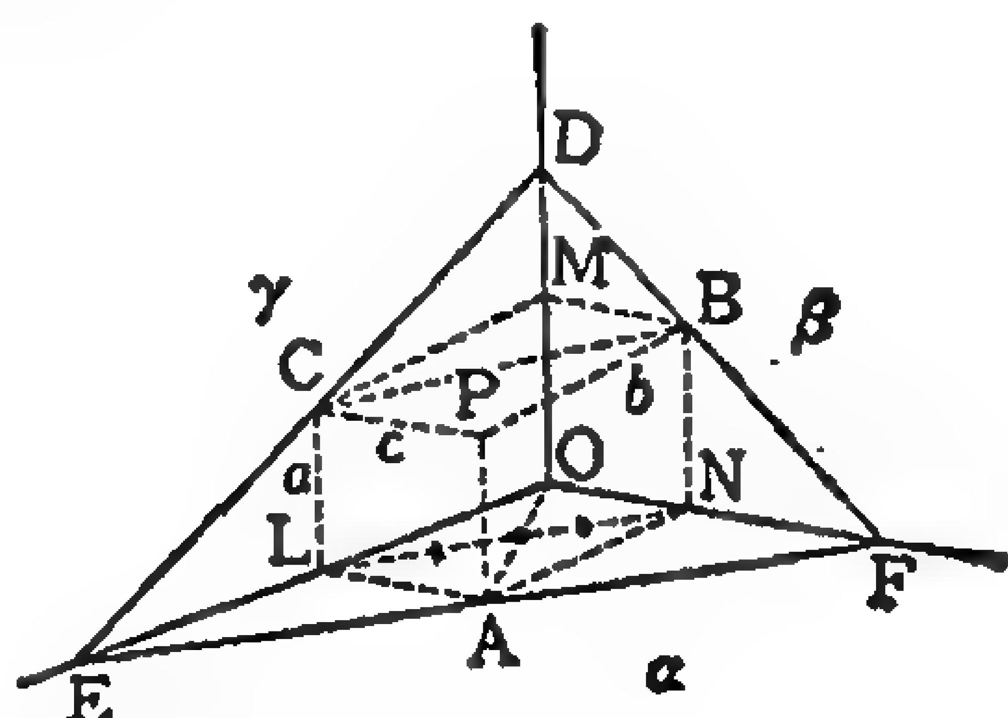
$$OF=2MB=2CP=2c.$$

同理，　$OD=2AP=2a.$

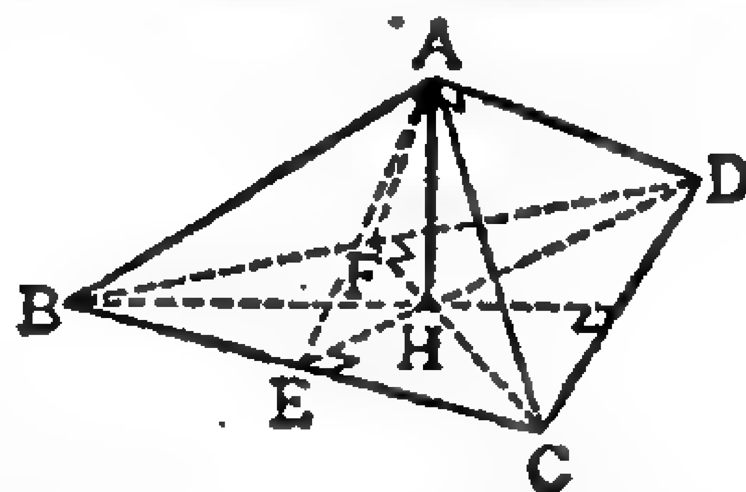
(2) 四面体 $ODEF$ 的体积

$$=\frac{1}{3}\times\frac{OE\cdot OF}{2}\times OD$$

$$=\frac{4abc}{3}.$$



3119. 已知一四棱柱，其底面是邻边长分别为 10 cm，20 cm 的矩形，且侧面与底面垂直。如把这个四棱柱用通过底面一个顶点的平面截开，所得的截口为菱形，且菱形顶点中离底面最高的高度为 30 cm，试求这个菱形两条对角线长度的比。



解 设 $DR=x$ cm，$BP=y$ cm，则由 $AR=AP$ 知

$$x^2+10^2=y^2+20^2,$$

$$\therefore\quad x^2-y^2=20^2-10^2. \qquad ①$$

因为四边形 $APQR$ 是平行四边形，所以从其对角线的端点向下引底面的垂线，可知

$$DR+BP=CQ,$$

$$\therefore\quad x+y=30. \qquad ②$$

①÷②，得　$x-y=10.$　　③

解②、③，得　$x=20$，$y=10$。

$$\therefore\quad AQ=\sqrt{AC^2+CQ^2}$$

$$=\sqrt{(20^2+10^2)+30^2}$$

$$=10\sqrt{14}\text{(cm)},$$

$$PR=\sqrt{BD^2+(DR-BP)^2}$$

$$=\sqrt{(20^2+10^2)+10^2}$$

$$=10\sqrt{6}\text{ (cm)},$$

$$\therefore\quad AQ:PR=\sqrt{7}:\sqrt{3}.$$

3120. 已知四面体 $ABCD$ 中，

$$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAB=90^\circ.$$

设 $\triangle BCD$ 的垂心为 H，则 AH 垂直于 $\triangle BCD$ 所在的平面。

解 设 CH 和 BD 的交点为 F，DH 和 BC 的交点为 E，则由题设条件知 $AD\perp AC$，$AD\perp AB$，

$$\therefore\quad AD\perp\text{平面 }ABC,$$

$\therefore\quad AD\perp BC$.

又 $\qquad DE\perp BC$,

$\therefore\quad BC\perp$平面 ADE,

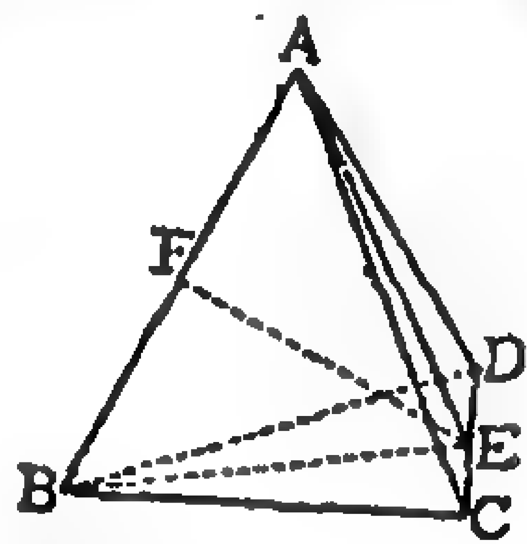
因而包含平面 ADE 的垂线 BC 的平面 DBC $\perp$平面 ADE。

同理， 平面 $DBC\perp$ 平面 ACF,

因此 AH 就是与平面 DBC 垂直的两个平面 ADE、ACF 的交线，故

$AH\perp$平面 BCD。

3121. 已知正四面体的棱长为 a，求它的不相交的两棱所成的角和距离。



解 如图，$ABCD$ 为棱长为 a 的正四面体，棱 CD 的中点为 E，连结 AE、BE，则由 $\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 都是正三角形，可知

$$AE\perp CD,\ BE\perp CD.$$

$$\therefore\quad CD\perp\text{平面 } AEB,$$

$$AB\perp CD.$$

因此，正四面体不相交的两棱所成的角为 90°。

其次，设 AB 的中点为 F。因为

$$AE=BE,$$

所以 $\triangle ABE$ 是等腰三角形，从而

$$EF\perp AB.$$

又 $CD\perp$ 平面 AEB，所以 $EF\perp CD$，因此，EF 是 AB 和 CD 的公垂线，即 EF 是不相交两棱 AB、CD 间最短距离。

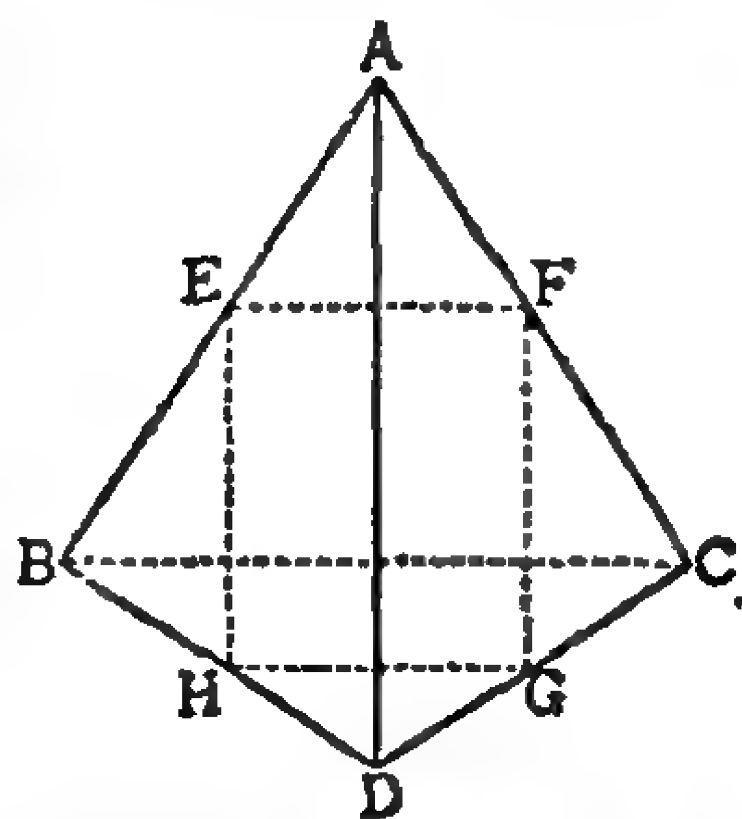
$$\because\quad AE=a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\therefore\quad EF=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

3122. 把正四面体用一个平面截开，其截口能成平行四边形吗？能成正方形吗？如果能，试回答它是在什么情况下出现的。

解 过已知正四面体的一条棱上的任意一点，作与一组对棱平行的平面，连结该平面和四条棱的交点，则得平行四边形。例如，通过 AB 上的一点 E 作 AD、BC 的平行线，它和 BD、AC 的交点分别为 H、F，则平面(EH, EF)是与 AD、BC 平行的平面。过 H 引 BC 的平行线，过 F 引 AD 的平行线，则由于这两条平行线把 CD 分成同一比，所以它们在 CD 上的同一点 G 处相交，从而



$$EH\parallel FG,$$

$$EF\parallel HG,$$

故 $EFGH$ 是平行四边形。这就是说，用过 AB 上的点 E 且与 AD、BC 平行的平面截这个四面体，则截口为平行四边形。

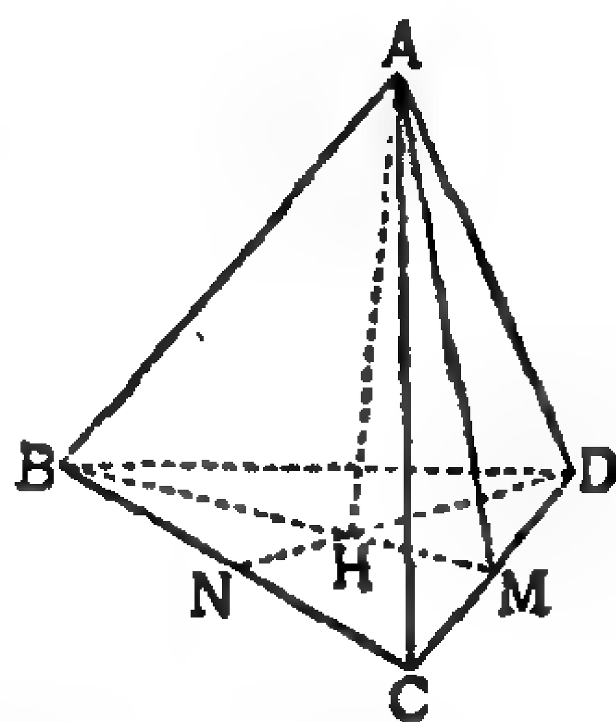
如果 $AD\perp BC$，则 $EH\perp EF$，从而平行四边形 $EFGH$ 为矩形。特别地，当 E 为 AB 的中点时，则矩形 $EFGH$ 的两边相等，所以它是正方形。

3123. 求棱长为 a 的正四面体的体积。

解 因为正四面体 $A\text{-}BCD$ 的底面 BCD 是正三角形。

$$\therefore\quad \triangle BCD\text{的面积}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

设 H 为从 A 向底面所引垂线的垂足，则由 $\triangle BCD$ 是正三角形知 H 是它的重心。因此，如图，



$$BM=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$BH=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}a,$$

$$AH^2=AB^2-BH^2=a^2-\frac{1}{3}a^2=\frac{2}{3}a^2,$$

$$\therefore\quad AH=\sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

从而

$$A\text{-}BCD\text{的体积}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times AH$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

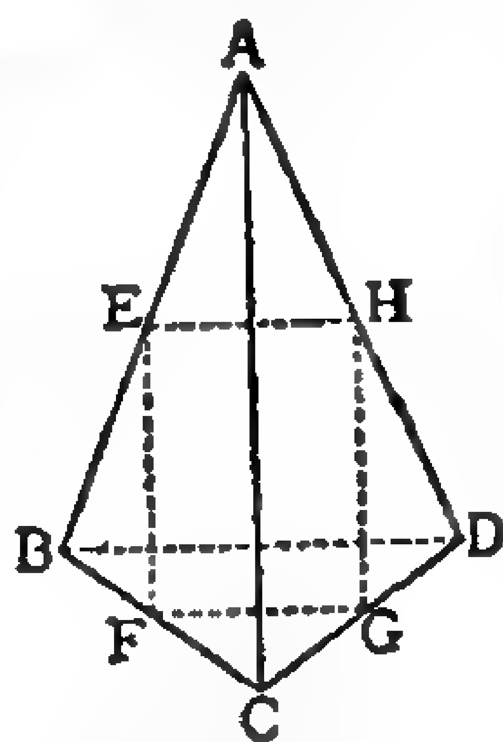
3124. 把四面体 $ABCD$ 用与其对棱 AC、BD 平行的平面截开，设这个平面与四条棱

AB、BC、CD、DA 的交点分别为 E、F、G、H。

(1) 证明 $EFGH$ 是平行四边形；

(2) 为使 $EFGH$ 的面积最大，AB 上的 E 应选在何处？

(3) 如 $AC=BD$，则 $EFGH$ 的周长与截平面的位置有无关系？



解 (1) 由于平面 $EFGH \parallel$ 直线 BD，所以平面 $EFGH$ 和平面 ABD 的交线 EH 与 BD 平行。

同理，　$FG \parallel BD$，　$\therefore$　$EH \parallel FG$。

类似地，又可得 $EF \parallel GH$，所以 $EFGH$ 是平行四边形。

(2) $\square EFGH$ 的面积 $=EF\cdot EH\times\sin\angle FEH$，由于其中 $\angle FEH$ 是 AC 和 BD 所成的角，它是一定的，所以当 $EF\cdot EH$ 最大时，则 $\square EFGH$ 的面积最大。

今知　　$EF:AC=BE:AB$，

$$\therefore\quad EF=\frac{AC}{AB}\cdot BE.$$

又　　$EH:BD=AE:AB$，

$$\therefore\quad EH=\frac{BD}{AB}\ AE,$$

$$\therefore\quad EF\cdot EH=\frac{AC\cdot BD}{AB^2}\cdot AE\cdot BE.$$

由于 $\dfrac{AC\cdot BD}{AB^2}$ 是一定的，所以当 $AE\cdot BE$ 最大时，$EF\cdot EH$ 最大。今知 $AE+EB=AB$（一定），故当 E 为 AB 的中点时，$\square EFGH$ 的面积最大。

(3) 如果 $AC=BD$，则

$$EF+EH=\frac{AC}{AB}\cdot BE+\frac{BD}{AB}\cdot EA$$
$$=\frac{AC}{AB}(BE+EA)$$
$$=\frac{AC}{AB}\cdot AB=AC,$$

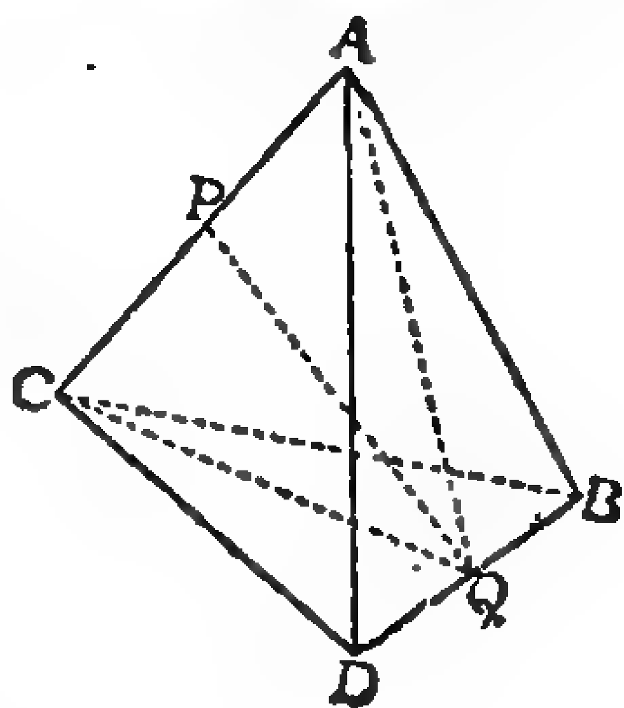
从而 $\square EFGH$ 的周长为 $2AC$，它是一定的，与截平面的位置无关。

3125. 设正四面体的一组对棱 AC、BD 的中点分别为 P、Q。

(1) 求 AC、PQ 所成的角；

(2) 在与 PQ 垂直的平面上，这个正四面体的射影是什么样的图形。

解 (1) $\triangle ABD$、$\triangle BCD$ 是全等的正三角形，AQ、CQ 分别是这两个三角形的高，所以 $AQ=CQ$，从而 $\triangle QAC$ 是等腰三角形且 QP 为其高，



$\therefore$　$PQ\perp AC$。

即 AC、PQ 的夹角为 $90°$。

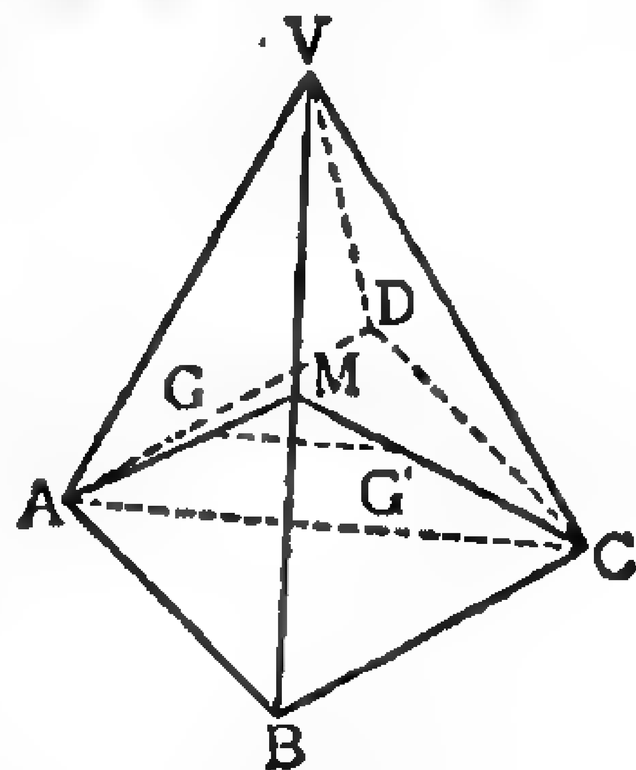
(2) 同理，　$PQ\perp BD$，

又由 $AQ\perp BD$，$CQ\perp BD$ 可得

$$BD\perp\text{平面 }ACQ,$$
$$\therefore\quad BD\perp AC.$$

因为 AC、BD 的长度相等且互相垂直，在它们的中点处又与直线 PQ 垂直，所以在与 PQ 垂直的平面上作这个正四面体的射影，所得射影四边形的对角线等长且互相垂直平分，即投影是一个正方形。

3126. 设四棱锥的底面为正方形，其边长为 a，试用 a 表示四棱锥相邻两侧面的重心所连线段的长。



解 设四棱锥 $V-ABCD$ 中，$\triangle VAB$、$\triangle VBC$ 的重心分别为 G、G'，VB 的中点为 M，则 G、G' 分别把 MA、MC 内分为 1:2。

$$\therefore\quad GG':AC=MG:MA=1:3,$$

即　　$$GG'=\frac{1}{3}AC.$$

但　　$$AC=\sqrt{2}\,a,$$

$$\therefore\quad GG'=\frac{\sqrt{2}}{3}a.$$

3127. (1) 已知四面体 $ABCD$，试在下列（　）中填入适当的词句：

(i) 距两个顶点 A、B 等距离的点的轨迹是（　）；

(ii) 距三个顶点 B、C、D 等距离的点的轨迹是（　）。

(2) 证明

(i) 四面体的外接球只有一个；

(ii) 已知不在同一平面上的六个点，如果通过其中任意的四点作球，剩下的两点至少有一个在球面上，则这六个点必在同一球面上。

解 (1) (i) AB 的垂直平分面，即过 AB 的中点且与 AB 垂直的平面。

(ii) 过 $\triangle BCD$ 的外心 O 且与平面 BCD 垂直的直线。

(2) (i) 设(1)中(i)的平面为 α，(ii)的直线为 g。由于 AB 不在平面 BCD 上，所以 g 与 AB 不垂直，因而 g 与 α 不平行，即 g 与 α 必相交。设 g 与 α 的交点为 P，则

$$PA=PB=PC=PD,$$

所以正四面体只有一个外接球。

(ii) 设题设六点为 A、B、C、D、E、F，且过 A、B、C、D 的球面过 E 或 F。不失一般性，假定过 E(F 也一样)。因为由题设知过 A、B、C、F 的球面过 D 或 E，因而当过 D 时，则过 A、B、C、D 的球面上有 E，F。当过 E 时，则过 A、B、C、E 的球面有 D、F，等等。故题设六点必在同一球面上。

3128. 已知四面体 $ABCD$ 的四条棱 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 K、L、M、N，如果 $AC=BD$，证明 $KM\perp LN$。

解 因为 K、L、M、N 分别是棱 AB、BC、CD、DA 的中点，所以

$$KL=MN=\frac{1}{2}AC,$$

$$LM=KN=\frac{1}{2}BD.$$

又已知 $AC=BD$，

因而四边形 $KLMN$ 的四条边都相等，它是一个菱形，且其对角线 KM 和 LN 互相垂直。

$$\therefore\ KM\perp LN.$$

3129. 已知棱长都等于 a 的正四棱锥 $V-ABCD$，其侧棱 VB、VD 的中点分别为 H、K，若由 A、H、K 三点所确定的平面和棱 VC 的交点为 L。

(1) 证明 L 是 VC 的三等分点。

(2) 求下列各值：

(i) HK 的长； (ii) AL 的长；

(iii) 四边形 $AHLK$ 的面积。

解 (1) 如图，设 AC、BD 的交点为 O，VO 和 HK 的交点为 M，H、K 分别为 VB、VD 的中点，则

$HK\parallel BD$ 且 $MV=MO$。

设过 O 引 ML 的平行线，和 VC 的交点为 N，则

$$VL=LN.$$

又因 $AO=OC$，

$$\therefore\ LN=NC.$$

故 $$VL=\frac{1}{3}VC.$$

(2) (i) $HK=\frac{1}{2}BD$，

由于 $ABCD$ 为边长等于 a 的正方形，所以它的对角线 $BD=\sqrt{2}a$，

$$\therefore\ HK=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

(ii) $\because\ VA=VC=a,\ AC=\sqrt{2}a,$

$$\therefore\ \angle AVC=\angle R,$$

于是

$$AL=\sqrt{VA^2+VL^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}a.$$

(iii) $BD\perp$ 平面 VAC，$BD\parallel HK$，

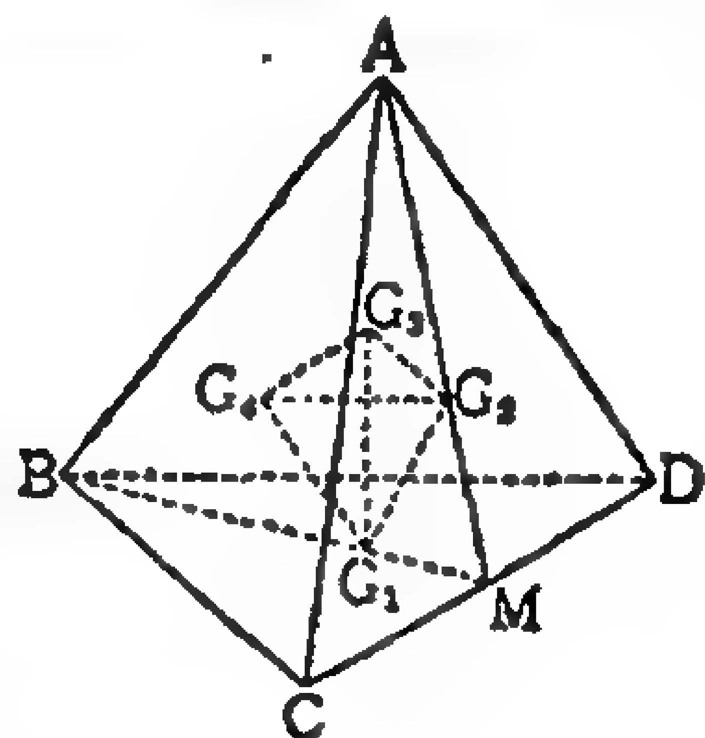
$$\therefore\ HK\perp 平面VAC,$$

从而 HK 垂直于平面 VAC 上的直线 AL。设四边形 $AHLK$ 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}HK\cdot AL$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}a=\frac{\sqrt{5}}{6}a^2.$$

3130. 试求以正四面体的各面的重心为顶点的正四面体的体积是原来正四面体体积的几分之一。



解　设正四面体 $ABCD$ 各面 BCD、ACD、ABD、ABC 的重心分别为 G_1、G_2、G_3、G_4，CD 的中点为 M，则

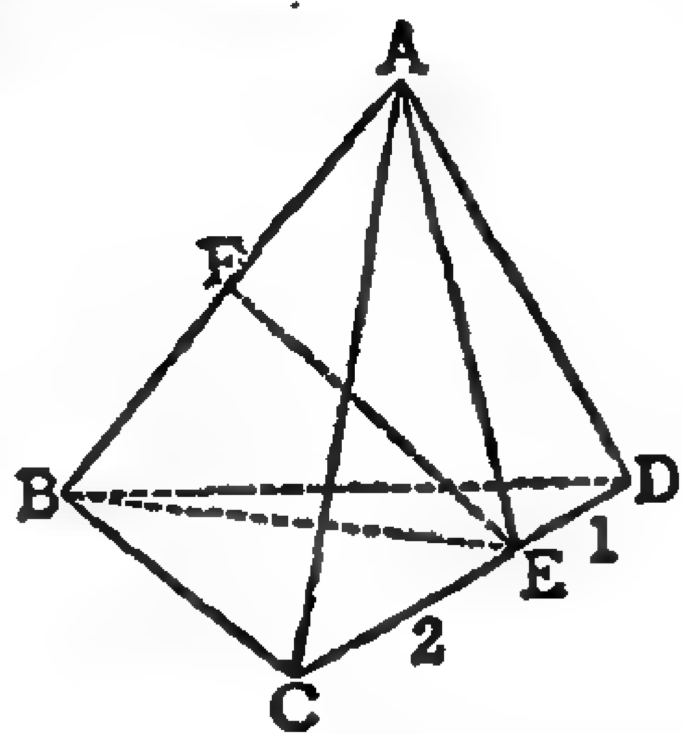
$$MG_1:MB=MG_2:MA=1:3,$$

$$\therefore\quad G_1G_2:AB=1:3,$$

$$G_1G_2=\frac{1}{3}AB.$$

同理可知，四面体 $G_1G_2G_3G_4$ 的其他棱长都是 $\frac{1}{3}AB$。这就是说，$G_1G_2G_3G_4$ 为棱长等于 $\frac{AB}{3}$ 的正四面体，因此其体积为正四面体 $ABCD$ 体积的 $\frac{1}{27}$。

3131. 已知棱长为 a 的正四面体，用过一条棱的两端点和这条棱的对棱被内分为1:2的内分点的平面把正四面体截开，求这个截口的面积。



解　设正四面体棱 AB 的对棱为 CD，其内分点为 E，且 $CE:ED=2:1$，连结 AE、BE，则在 $\triangle BCE$ 中，根据余弦定理，得

$$BE^2=a^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2-2\times a\times\left(\frac{2}{3}\right)a\cos 60^\circ$$

$$=a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}a^2=\frac{7}{9}a^2,$$

同理，

$$AE^2=\frac{7}{9}a^2,\quad\therefore\quad BE^2=AE^2.$$

设 AB 的中点为 F，则 $EF\perp AB$，所以

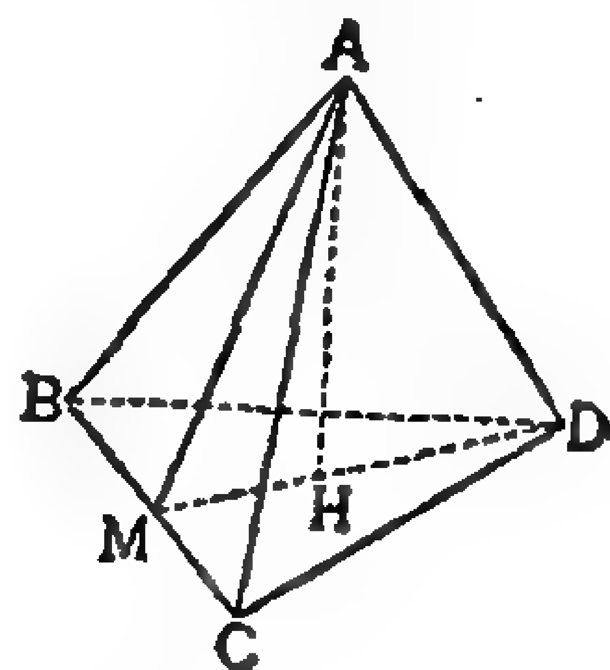
$$EF^2=BE^2-BF^2=\frac{7}{9}a^2-\frac{1}{4}a^2=\frac{19}{36}a^2,$$

$$\therefore\quad EF=\frac{\sqrt{19}}{6}a,$$

从而

$$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{19}}{6}a=\frac{\sqrt{19}}{12}a^2.$$

3132. 求正四面体的二面角的正弦。



解　设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a，棱 BC 的中点为 M，从 A 引 DM 的垂线 AH，则

$$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$MH=DM\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}a\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

$$\therefore\quad AH=\sqrt{AM^2-MH^2}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{12}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a,$$

故

$$\sin\angle AMH=\frac{AH}{AM}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\times\frac{2}{\sqrt{3}a}$$

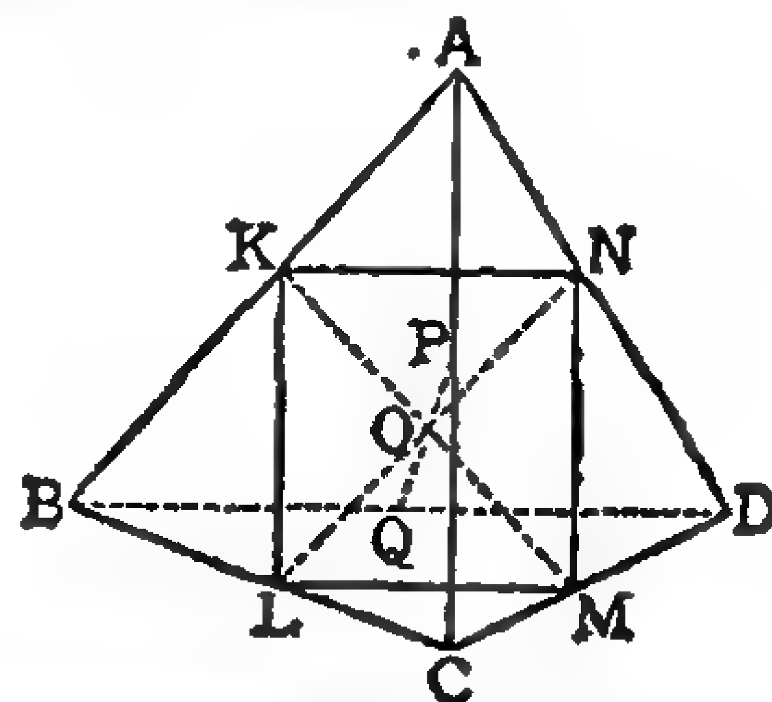
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

3133. 设四面体 $ABCD$ 的各棱 AB、BC、CD、AD、AC、BD 的中点分别为 K、L、M、N、P、Q，

(1) 如果 $KM=LN=PQ$，这个四面体具有什么特征？

(2) 如果 $KM\perp LN$，$LN\perp PQ$，$PQ\perp KM$，这个四面体具有什么特征？

(3) 如果同时满足 (1)、(2) 的条件，这个四面体具有什么特征？



解　(1) 由题设条件知 $KLMN$ 是平行四边形，且其对角线 $KM=LN$，所以 $KLMN$ 又是矩形，从而 $KL\perp LM$。

$$\because\quad KL\parallel AC,\ LM\parallel BD,$$

$\therefore\quad AC\perp BD$.

同理， $BC\perp AD,\ AB\perp CD$,

因此这个四面体是各组对棱互相垂直的四面体。

(2) 因为$KM\perp LN$，所以平行四边形$KLMN$为菱形，从而$AC=BD$。同理，$AB=CD$, $AD=BC$。因此，四面体$ABCD$的三组对棱分别相等。又，在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，

$$AB=CD,\ BC=AD,\ AC\text{ 公共},$$

$$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle ADC.$$

从上可知，四面体$ABCD$的各面都是全等三角形。

(3) $KLMN$是平行四边形，其对角线KM、LN互相平分，同理KM、PQ也互相平分，所以KM、LN、PQ的中点是同一点，设该点为O。

在$\triangle KPO$与$\triangle LPO$中，OP公共，$OK=OL$, $\angle KOP=\angle LOP=\angle R$,

$$\therefore\quad \triangle KOP\cong\triangle LOP,$$

从而 $KP=LP$.

$$\therefore\quad BC=AB.$$

同理， $\triangle MQO\cong\triangle MNO$,

从而 $MQ=MN$,

$$\therefore\quad BC=AC,$$

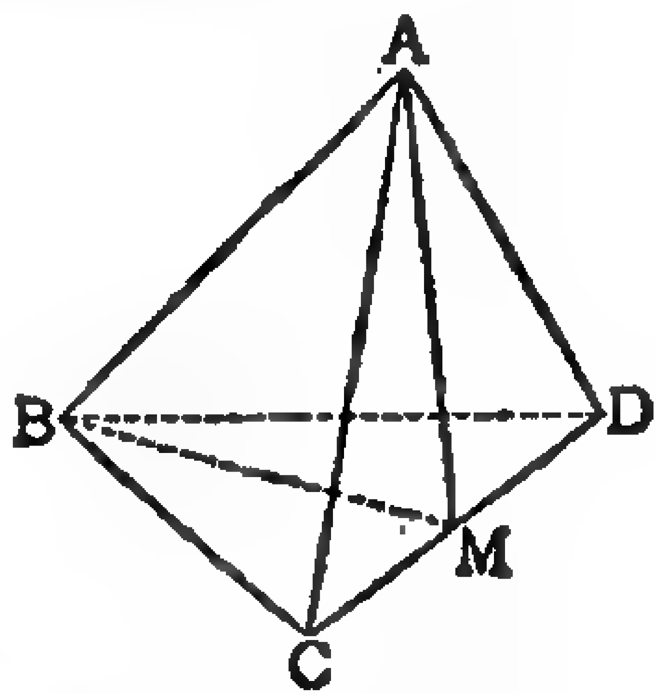
故 $AD=BC=AC=BD$.

这就是说，四面体$ABCD$的六条棱等长，各面都是正三角形，因此它是正四面体。

3134. 已知四面体$ABCD$，设以AB为棱的二面角的平分面和棱CD的交点为M，证明

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ABD}=CM:DM.$$

解 如图，在两个四面体$ABCM$、$ABDM$中，如以$\triangle ABM$为它们的共同底面，则它们的体积之比等于从顶点C、D分别作底面$\triangle ABM$所在平面的垂线长的比。所以



四面体$ABCM$的体积

:四面体$ABDM$的体积$=CM:DM$。①

又因M是以AB为棱的二面角的平分面上的点，所以点M到两平面ABC、平面ABD的距离相等。因此，在四面体$ABCM$和$ABDM$中，如分别以$\triangle ABC$、$\triangle ABD$为底面，则

四面体$ABCM$的体积

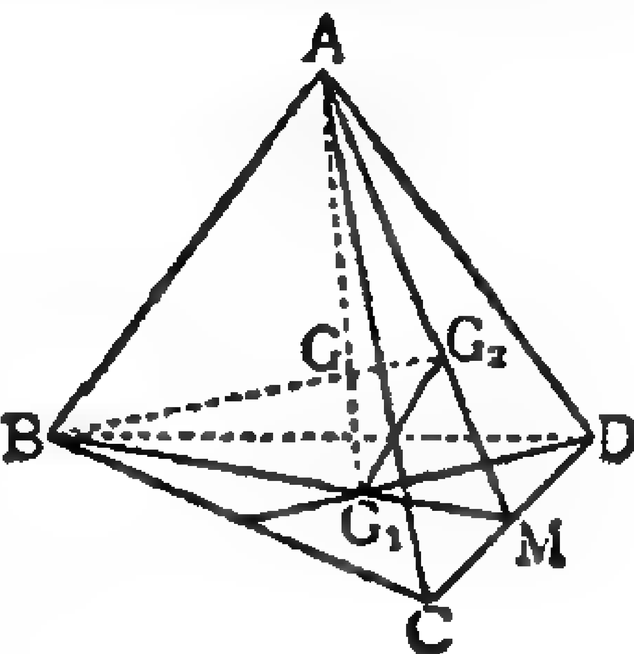
:四面体$ABDM$的体积

$=\triangle ABC$的面积:$\triangle ABD$的面积。②

由①、②，

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ABD}=CM:DM.$$

3135. 证明连结四面体的各顶点与其对面的重心的四条线段共点。并求这点分顶点与其对面重心所连线段的比。



解 设$\triangle BCD$的重心为G_1，$\triangle ACD$的重心为G_2，CD的中点为M，则BG_1和AG_2交于点M，所以

$$MG_1:MB=MG_2:MA=1:3,$$

即 $G_1G_2:AB=1:3$,

且 $AB\parallel G_1G_2$.

设AG_1和BG_2的交点为G，则

$$\triangle ABG\backsim\triangle G_1G_2G,$$

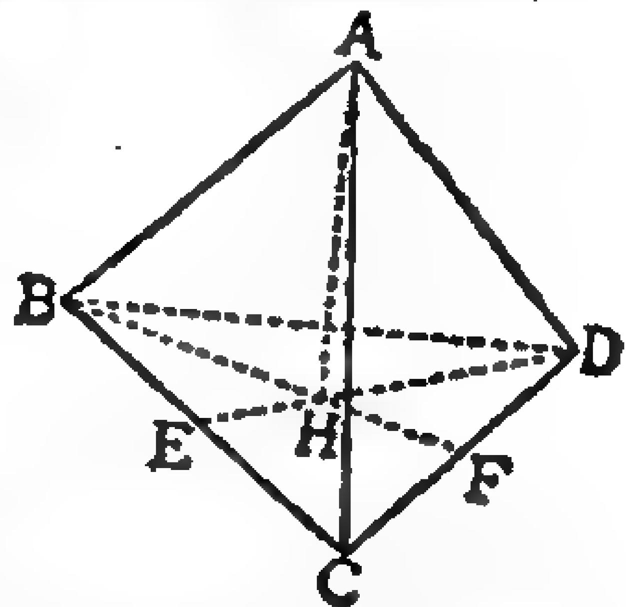
$$\therefore\quad AG:GG_1=BG:GG_2=3:1,$$

故 AG_1和BG_2交于距A、B分别为其$\frac{3}{4}$的点。

同理，设$\triangle ABD$、$\triangle ABC$的重心分别为G_3、G_4，则CG_3、DG_4分别和AG_1交于距C、D为其$\frac{3}{4}$的点。

因此，AG_1、BG_2、CG_3、DG_4交于距A、B、C、D分别为其$\frac{3}{4}$的点G。

3136. 证明从三组对棱都互相垂直的四面体的一个顶点向其对面所引的垂线足就是这个对面的垂心。



解 设四面体$ABCD$中，$AD\perp BC$, $AB\perp CD$, $AC\perp BD$。从A引平面BCD的垂线为AH，DH和BC的交点为E，则$AH\perp BC$。

又知 $AD\perp BC$,

$\because\quad BC\perp$平面ADH，$\therefore\quad BC\perp DE$.

同理，设BH、DC的交点为F，则

$$BF \perp CD.$$

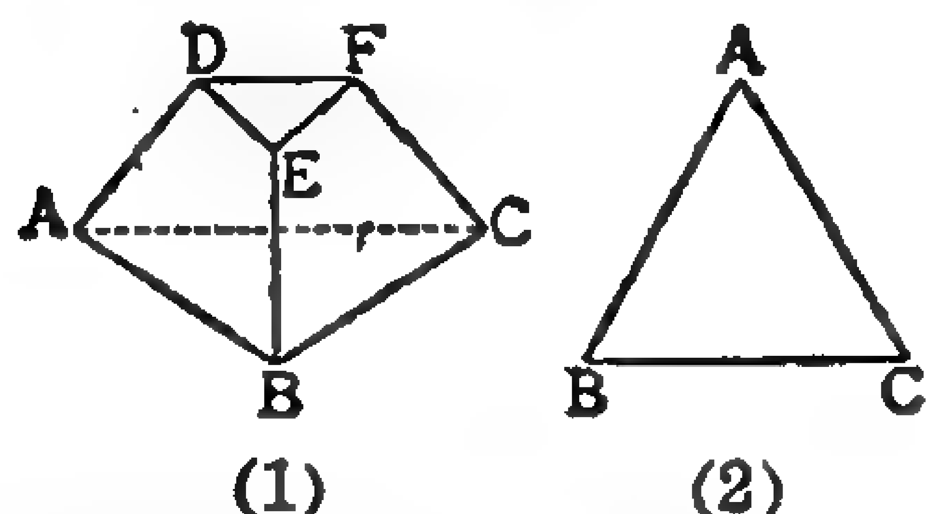
因此，H 是 $\triangle BCD$ 的垂心。

3137. 图(1)是棱长 4cm 的正四面体，被过其一个顶点的三条棱的中点所确定的平面截开而成的三棱台。

(1) 把 $\triangle DEF$ 在底面 ABC 上的投影画在图(2)上，并简单叙述其作法。

(2) 在过点 C 且与底面垂直的直线上，取与 C 的距离等于原来四面体的高的点 P。如在 P 放入光源，试在三点 A、B、C 所确定的平面上，把梯形 $ABDE$ 的投影正确地画入图(2)。

(3) 求(2)中投影的面积.



(1)　　(2)

解 (1) 作 $\triangle ABC$ 的外心 O，设 OA、OB、OC 的中点分别为 A'、B'、C'，则 $\triangle A'B'C'$ 就是所求的投影。

(2) 设 D 的投影为 R，则 D 的高度是 P 的高度的一半，所以

$$CR=2CA'.$$

同理，设 E 的投影为 Q，则

$$CQ=2CB'.$$

所以在投影 $ABQR$ 中，

$$\triangle A'OC \cong \triangle A'AR$$
$$(CA'=A'R,\ AA'=A'O),$$
$$\therefore\ \angle A'AR=\angle A'OC=120°,$$
$$\therefore\ \angle BAR=90°,$$

因此，$ABQR$ 是矩形。

(3) $$AR=OC=\frac{2}{3}\times 4\cos 30°$$

$$=\frac{2}{3}\times 4\times\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$ 矩形 $ABQR$ 的面积$=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ (cm²)。

3138. 把长 3m、高 1.5m 的矩形薄板直立地面，使长边 AB 与地面相接。设 AB 的中点为 M，在 AB 的垂直平分线上取点 C 使 $MC=3$ m，在过 C 且垂直地面的直线上取高度为 2.5m 处挂一电灯，求当电灯亮时，这个矩形薄板在地面上投影的面积.

解 已知薄板的高是 1.5m，电灯和 AB 的距离是 3m。设矩形上侧的影子和 AB 的距离为 x，则有

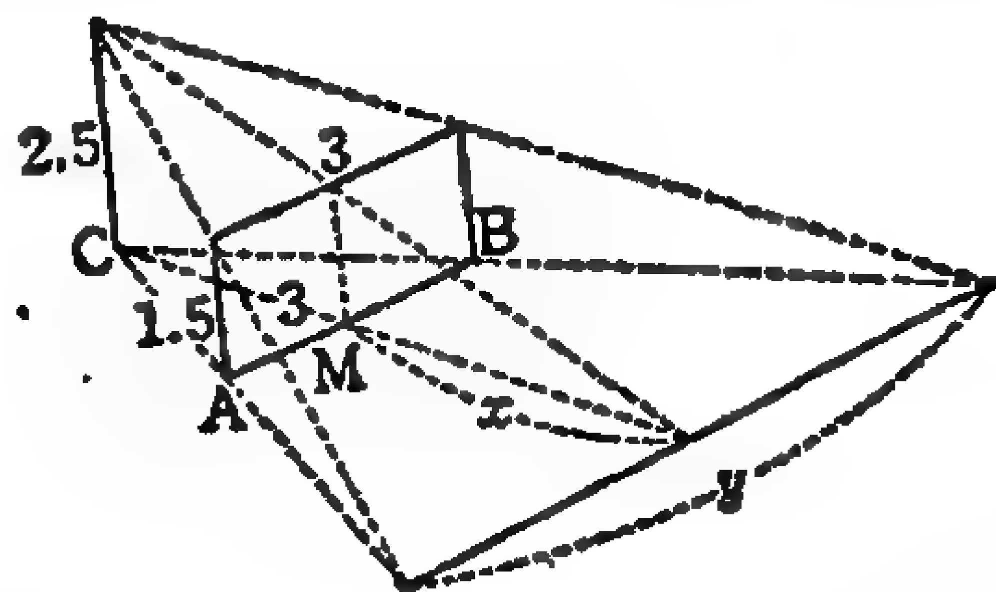
$$x:1.5=(x+3):2.5,$$
$$\therefore\ x=4.5.$$

设矩形上侧的影长为 y，由于这个影子是梯形，其上底为 y，下底为 3，高为 4.5m，所以

$$3:y=3:(3+4.5),$$
$$\therefore\ y=7.5.$$

因此，所求影子的面积为

$$(3+7.5)\times 4.5\div 2=23.625(\text{m}^2).$$

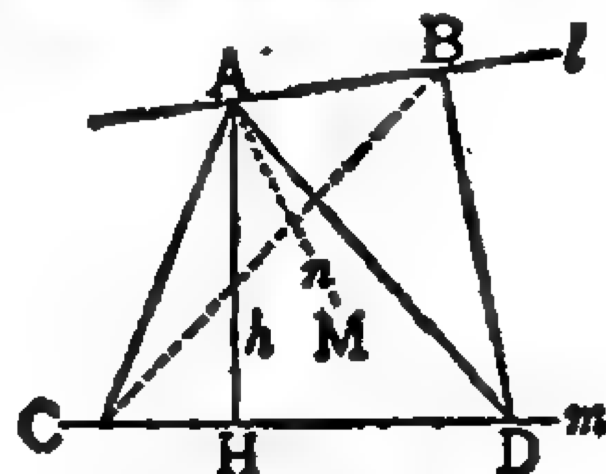


3139. 已知异面两直线 l、m 上，分别有长度一定的两线段 AB、CD，试回答下列问题并说明其理由。

(1) 固定线段 AB 的位置，使线段 CD 在直线 m 上运动，问 $\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 的面积各怎样变化？

(2) 固定线段 AB 的位置，使线段 CD 在直线 m 上运动，则四面体 $ABCD$ 的体积怎样变化？

(3) 两线段 AB、CD 分别在两直线 l、m 上运动，四面体 $ABCD$ 的体积怎样变化？



解 (1) 设从 A 向 CD 作垂线 AH，它的长度为 h，则在 $\triangle ACD$ 中，h 是一定的。又知 CD 是定长，所以当 CD 运动时，$\triangle ACD$ 的面积保持不变。同理，$\triangle BCD$ 的面积也保持不变。

(2) 从四面体 $ABCD$ 的顶点 A，向 $\triangle BCD$ 所在平面作垂线 AM，设其长为 n，则由 (1)

知 $\triangle BCD$ 的面积一定. 又 n 是定长，所以这个四面体的体积保持不变.

(3) 根据上面的结论，当固定 AB 的位置而 CD 运动时，四面体的体积保持不变；当固定 CD 而 AB 运动时，四面体的体积也保持不变，所以 AB、CD 分别在 l、m 上无论怎样运动，四面体 $ABCD$ 的体积都保持不变.

3140. 设凸多面体的棱数为 A，顶点数为 S，面数为 F，则

$$F+S=A+2.\quad (\text{欧拉定理})$$

解 我们讨论的是 F 个面围成的多面体. 如果考虑除去任意一个面的凸多面体，这时虽面数减少一个，但顶点数和棱数都保持不变. 因此在除去一面的凸多面体中，设其面数为 F，顶点数为 S，棱数为 A，如能证明 $F+S=A+1$，则对这个多面体把前面除去的一个面重新添上，就会得到面数和顶点数之和为 $A+2$. 因此证明本定理的关键是证明在除去一个面的多面体中 $F+S=A+1$ 成立. 这里用数学归纳法证明.

在边数为 n 的平面多边形中，面数 $F=1$，顶点数 $S=n$，边数 $A=n$. 很显然，等式 $F+S=A+1$ 成立.

假设对于除去一个面的凸多面体，等式

$$F+S=A+1 \qquad ①$$

成立. 在这个凸多面体上添上边数为 m 的新平面，设这个新平面和原来的多面体的面的交线是 p 条棱，则新产生的多面体(除去一个面)的面数为 $F'=F+1$，新的棱数为

$$A'=A+m-p. \qquad ②$$

由于原来的折线和新面的公共顶点数为 $(p+1)$ 个，所以新的顶点数为

$$S'=S+m-(p+1).$$

因此新的面数和新的顶点数的和为

$$F'+S'=(F+1)+(S+m-p-1)$$
$$=F+S+m-p.$$

从①知 $F+S=A+1$，

$$\therefore\quad F'+S'=A+1+m-p$$
$$=(A+m-p)+1,$$

即 $$F'+S'=A'+1.$$

这就是说，当面数是 F 时①式成立，则当面数是 $F'=F+1$ 时①式也成立.

综上所述，$F=1$ 时①式明显成立. 当 $F=2$ 时由根据已证明的结论，当 $F=1$ 时，①式成立，则 $F=1+1$ 时，①式也成立，…. 因此对于任意自然数 F，①式都成立. 于是定理得证.

3141. 设多面体的顶点数、棱数、面数分别为 t、s、m，则由欧拉定理知 $t+m=s+2$. 设正多面体的各面为正 x 边形，过同一顶点的面数为 y，则有

$$mx=2s,\ ty=2s.$$

对于这个问题，试回答：

(1) 指出等式 $mx=2s$，$ty=2s$ 成立的理由；

(2) 从上面三个等式推出

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{s};$$

(3) 在下表的空圈中添入适当的数目：

x	3	3	○	4	○
y	3	4	5	○	3
m	4	○	○	○	○
t	4	○	○	○	○
s	6	○	○	○	○

(4) 证明正多面体只有五种.

解 (1) 在正 x 边形中有 x 条棱，因而在 m 个面中有 mx 条棱. 但是按照以上计算方法，每条棱在相邻的两面中各算了一次，也就是说每条棱都算了两次，所以

$$mx=2s.$$

同理，各顶点都有 y 条棱，ty 为多面体总棱数的两倍. 所以

$$ty=2s.$$

(2) 已知 $mx=2s$，$ty=2s$，

$$\therefore\quad m=\frac{2s}{x},\quad t=\frac{2s}{y}.$$

代入 $t+m=s+2$ 中，得

$$\frac{2s}{x}+\frac{2s}{y}=s+2.$$

两边除以 $2s$，则

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{s}.$$

(3) 在(2)中 $y\geqq 3$，所以

$$\frac{1}{x}\geqq\frac{1}{s}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}>\frac{1}{6}.$$

因为 $x\geqq 3$，由上式可知 x 只能为 3, 4, 5；还有 $s\geqq 4$.

(a) 当 $x=3$ 时，

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{s}+\frac{1}{6}\quad 即\quad y=6-\frac{36}{6+s}.$$

所以只有以下情况：

$$\therefore\ \begin{cases}s=6,\\ y=3;\end{cases}\quad \begin{cases}s=12,\\ y=4;\end{cases}\quad \begin{cases}s=30,\\ y=5.\end{cases}$$

(b) 当 $x=4$ 时，

$$y=4-\frac{16}{s+4}.$$

所以只有一种情况，即

$$\therefore\ \begin{cases}s=12,\\ y=3.\end{cases}$$

(c) 当 $x=5$ 时，

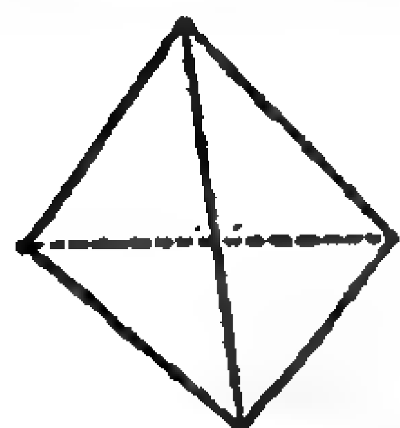
$$y=\frac{10s}{10+3s},$$

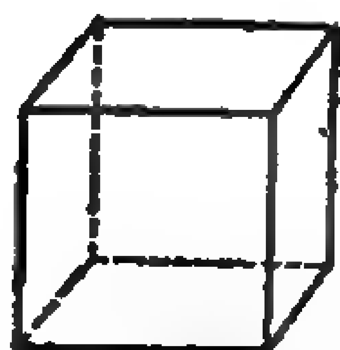
所以只有 $\begin{cases}s=30,\\ y=3.\end{cases}$

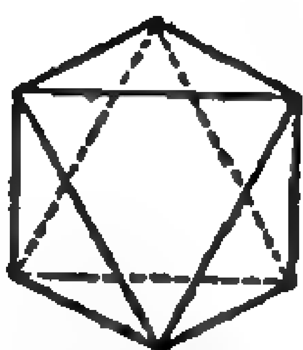
因此上表可以填写如下：

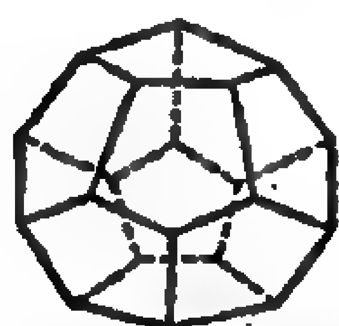
x	3	3	3	4	5
y	3	4	5	3	3
m	4	8	20	6	12
t	4	6	12	8	20
s	6	12	30	12	30

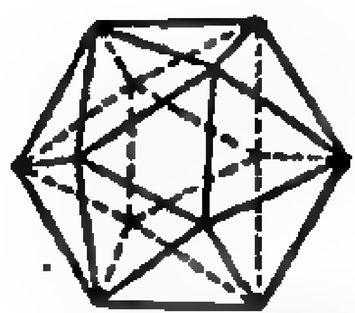
注　由(b)知第二行应填入 3，由 (a)、(c) 知第一行应从左起顺序填入 3，5，因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{s}$，所以第五行从左起应顺序填入 12，30，12，30，因为 $mx=2s$，所以第三行从左起应顺序填入 8，20，6，12，因为 $ty=2s$，所以第四行从左起应顺序填入 6，12，8，20.


正4面体


正6面体


正8面体


正12面体


正20面体

(4) 从以上可以看出正多面体中，各面都是正三角形的有正四面体、正八面体、正二十面体。各面是正方形的有正六面体。各面都是正五边形的有正十二面体。因此正多面体只有五种。

3142. 已知各面都是三角形的正多面体.

(1) 设这个多面体的面数为 F，顶点数为 S，棱数为 A，证明

$$A=\frac{3}{2}F,\ S=\frac{1}{2}F+2.$$

(2) 如果过各顶点的棱数都相等，则这个多面体是几面体？

解　(1) 已知多面体的面数为 F，则各面的边数共为 $3F$，由于各棱都是两个面的交线，所以

$$2A=3F,\quad 即\quad A=\frac{3}{2}F.$$

由欧拉定理，知

$$F+S=A+2.$$

以 $A=\frac{3}{2}F$ 代入上式，则

$$F+S=\frac{3}{2}F+2,$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}F+2.$$

(2) 设过各顶点的棱数都为 P，则

$$PS=2A,$$

以 $S=\frac{1}{2}F+2,\ A=\frac{3}{2}F$ 代入上式，则

$$A=\frac{6P}{6-P}.$$

因此 $6-P>0$，即 $3\leq P<6$，所以 $P=3,\ 4,\ 5$. 由上题知多面体分别是四面体、八面体、二十面体.

3143. 在周长相等的正方形和三角形中，其面积哪个大？在表面积相等的正四面体和立方体中，其体积哪个大？

解　考虑到 3 和 4 的最小公倍数是 12，则周长是 $12l$ 的正三角形的面积是

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(4l)^2=4\sqrt{3}\,l^2. \qquad ①$$

周长是 $12l$ 的正方形的面积是

$$(3l)^2=9l^2. \qquad ②$$

由于 $(3l)^2>4\sqrt{3}\,l^2$，所以正方形的面积较大.

其次，设表面积为 k^2 的正四面体的棱长为 a，则

$$4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=k^2,\quad\therefore\quad a=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}k.$$

由问题 3123，知这个正多面体的体积为

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}k\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{12\sqrt[4]{3^3}}k^3.$$

设表面积为 k^2 的立方体的棱长为 b，则

$$6b^2=k^2,\quad\therefore\quad b=\frac{k}{\sqrt{6}},$$

从而这个立方体的体积是

$$V'=\left(\frac{k}{\sqrt{6}}\right)^3.$$

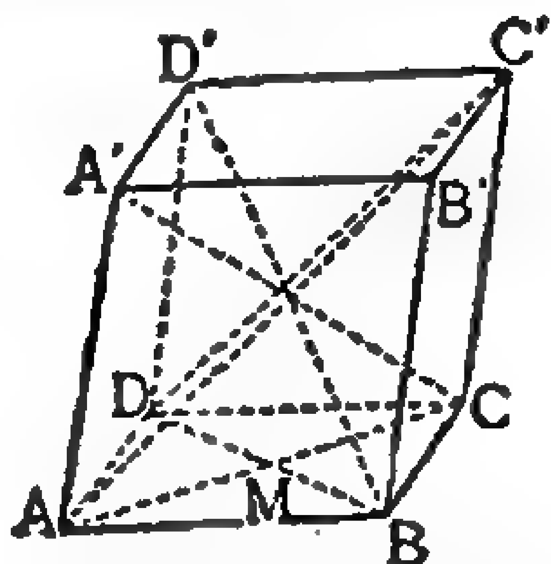
由于
$$\left(\frac{1}{\sqrt{6^3}}\right)^4=\frac{1}{6^6},$$

$$\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}\right)^4=\frac{2^2}{12^4\times3^3}=\frac{1}{6^6\times3},$$

所以 $V^4<V'^4$，从而 $V<V'$。

因此，在表面积相等的正四面体和立方体中，立方体的体积较大。

3144. 证明平行六面体所有棱的平方和等于其所有对角线的平方和。



解　设平行六面体为 $ABCD$-$A'B'C'D'$，AC、BD 的交点为 M，则

$$AD^2+CD^2=2AM^2+2BM^2,$$
$$AB^2+BC^2=2AM^2+2BM^2,$$
$$\therefore\quad AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2.$$

同理，

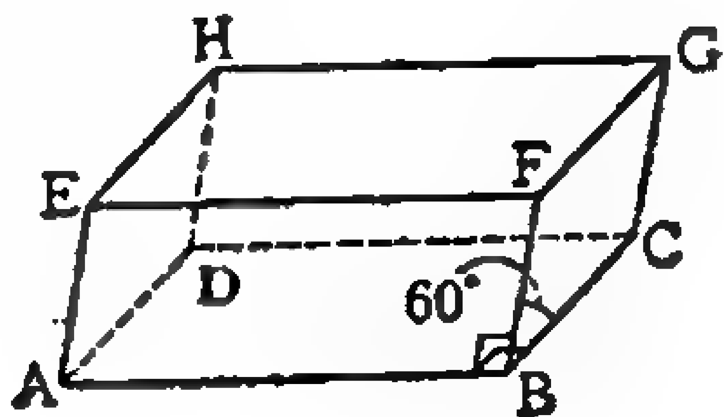
$$A'B'^2+B'C'^2+C'D'^2+D'A'^2=A'C'^2+B'D'^2,$$

又
$$AA'^2+CC'^2+A'C'^2+AC^2=AC'^2+A'C^2,$$
$$BB'^2+DD'^2+BD^2+B'D'^2=B'D^2+BD'^2,$$

$$\therefore\quad AB^2+BC^2+CD^2+DA^2+A'B'^2+B'C'^2+C'D'^2+D'A'^2+AA'^2+BB'^2+CC'^2+DD'^2=AC'^2+A'C^2+BD'^2+B'D^2.$$

3145. 如图，已知平行六面体中，

$AB=6\text{cm}$，
$BC=3\text{cm}$，
$BF=2\text{cm}$，



$\angle ABC=90°$，$\angle ABF=90°$，$\angle CBF=60°$，试回答下列问题：

(1) 求下列各线段的长（单位 cm）：
DB，EB，FC，BG。

(2) 求下列各图形的面积（单位 cm^2）：
$\square ABCD$，$\square ABFE$，$\square BCGF$，
全表面积。

(3) 求下列各立体的体积（单位 cm^3）：
平行六面体　$ABCD-EFGH$，
三棱柱　$EAD-FBC$，
三棱锥　E-ABD。

解　(1) $BD=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}\,(\text{cm})$，

$EB=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}\,(\text{cm})$，

$FC^2=3^2+2^2-2\times3\times2\cos60°=7$，

$\therefore\quad FC=\sqrt{7}\,(\text{cm})$。

$BG^2=3^2+2^2-2\times3\times2\cos120°=19$，

$\therefore\quad BG=\sqrt{19}\,(\text{cm})$。

(2) $\square ABCD$ 的面积 $=6\times3=18\,(\text{cm}^2)$，

$\square ABFE$ 的面积 $=6\times2=12\,(\text{cm}^2)$，

$\square BCGF$ 的面积 $=3\times2\sin60°=3\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$，

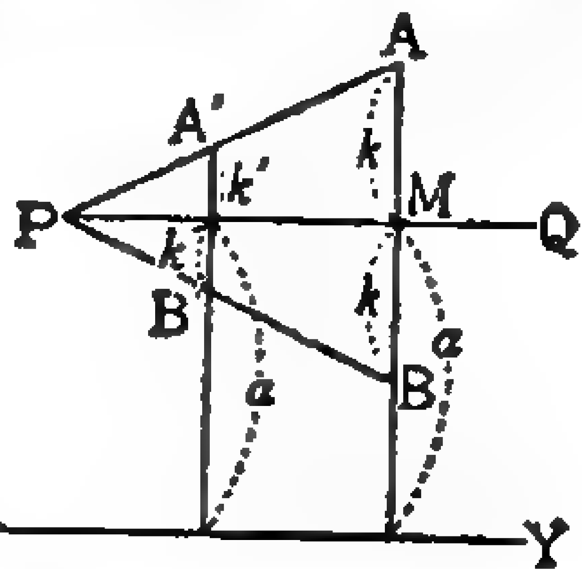
全表面积 $=2(18+12+3\sqrt{3})=60+6\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$。

(3) $ABCD-EFGH$ 的体积 $=18\times2\sin60°=18\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$，

$EAD-FBC$ 的体积 $=\frac{1}{2}\times18\sqrt{3}=9\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$，

$E-ABD$ 的体积 $=\frac{1}{3}\times9\times2\sin60°=3\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$。

3146. 在已知平面上有两条平行线 PQ 和 XY，它们的距离为 a。还有以 PQ 为对称轴且和 XY 不相交的等腰三角形 PAB，它的高为 h，底边 AB 长 $2k$。如果把 $\triangle PAB$ 以 XY 为轴旋转，试求所得旋转体的体积。



解　在 PA、PB 上分别取 A'、B'，使 $A'B'\perp XY$。设 $A'B'=2k'$，则从 A' 到 XY 的距

离为 $a+k'$，从 B' 到 XY 的距离为 $a-k'$。因此线段 $A'B'$ 以 XY 为轴旋转所成的面积为两个圆的面积 $\pi(a+k')^2$，和 $\pi(a-k')^2$ 的差：

$$\pi(a+k')^2-\pi(a-k')^2$$
$$=4\pi ak'=2\pi a\times 2k'.$$

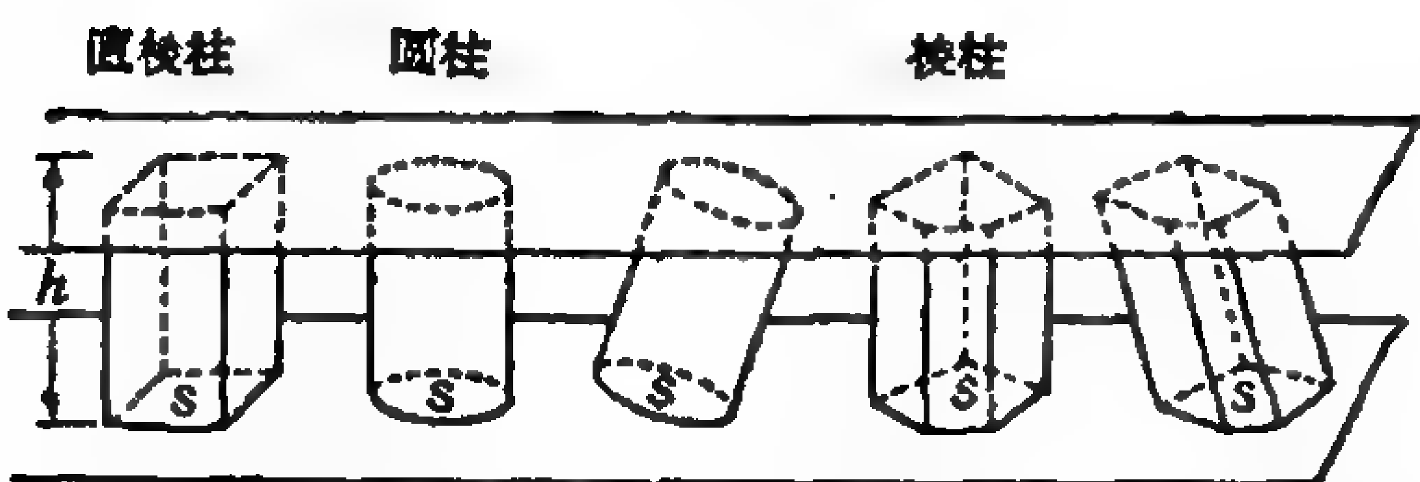
由于这个结论对于 PQ 上从 P 到 AB 的中点 M 的所有点都成立。所以 $\triangle PAB$ 以 XY 为轴旋转所成旋转体的体积等于底面积为 $\triangle PAB$，高为 $2\pi a$ 的直三棱柱的体积。所以所求的体积为

$$hk\times 2\pi a=2\pi ahk.$$

3147. 设底面积为 S，高为 h 的柱体体积为 V，则 $V=Sh$。

解　柱体的体积等于底面积为 S，高为 h 的长方体的体积(参照注)。长方体的体积等于 Sh，

$$\therefore\quad V=Sh.$$



注　在两个平行平面 α、β 之间插入两个立体 (a)、(b)，用平行于 α、β 的任意平面截开这两个立体，如果截口面积总是相等，则立体 (a)、(b) 的体积也相等(卡瓦列利原理)。

设 α、β 间的距离为 h，把 h 分为 n 等分，过各分点分别作与 α、β 平行的平面 r_1、r_2、$\cdots$、r_{n-1}，在平面 r_k 处截开两个立体的截口面积相等，设为 S_k，在平面 β 处截开立体的截口为 S_0，则体积 V 可从

$$V=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}(S_0+S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})$$

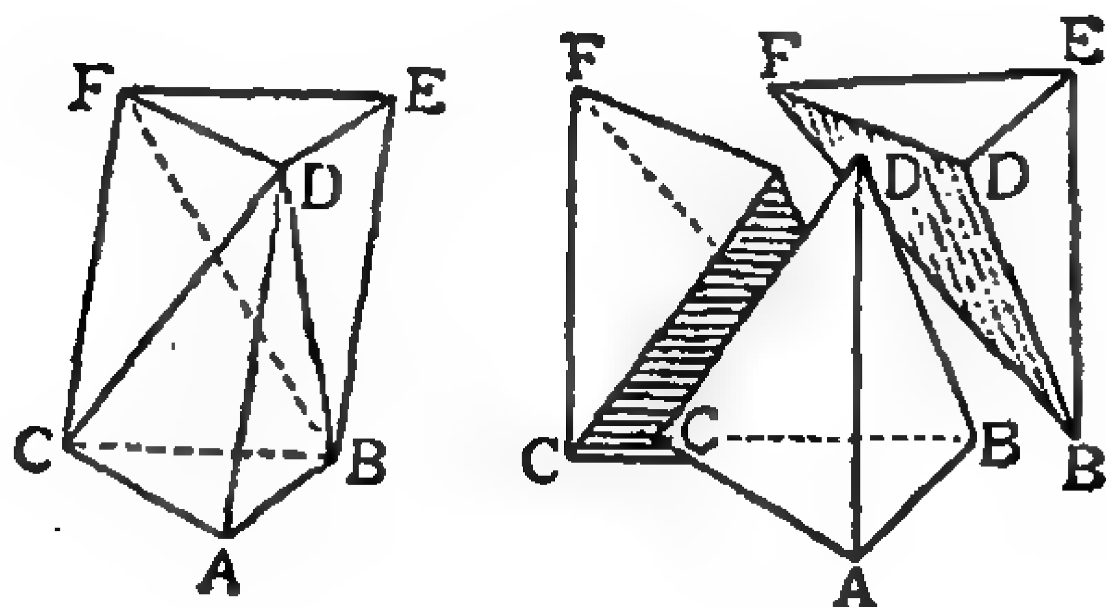
求得。

3148. 设锥体的底面积为 S，高为 h，证明它的体积 V 为

$$V=\frac{1}{3}Sh.$$

解　因为锥体的体积等于底面积和高分别相等的三棱锥的体积。又三棱柱可以分为三个等体积的三棱锥。因此三棱锥的体积等于底面积和高分别相等的三棱柱体积的 $\frac{1}{3}$，从而锥体的体积也等于底面积和高分别相等的三棱柱体积的 $\frac{1}{3}$。设锥体的底面积为 S，高为 h，体积为 V，则

$$V=\frac{1}{3}Sh.$$

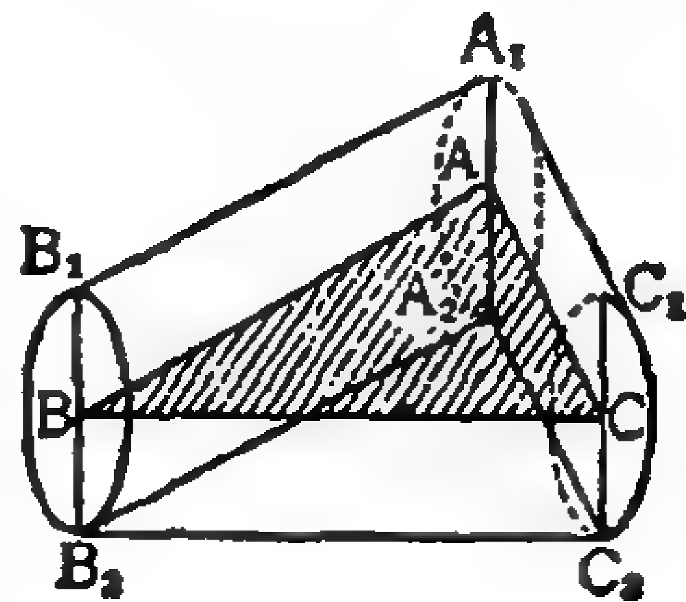


注　如上图。三棱柱 $ABC-DEF$ 能分成三个三棱锥 $D-ABC$，$D-FCB$，$D-EFB$。由于

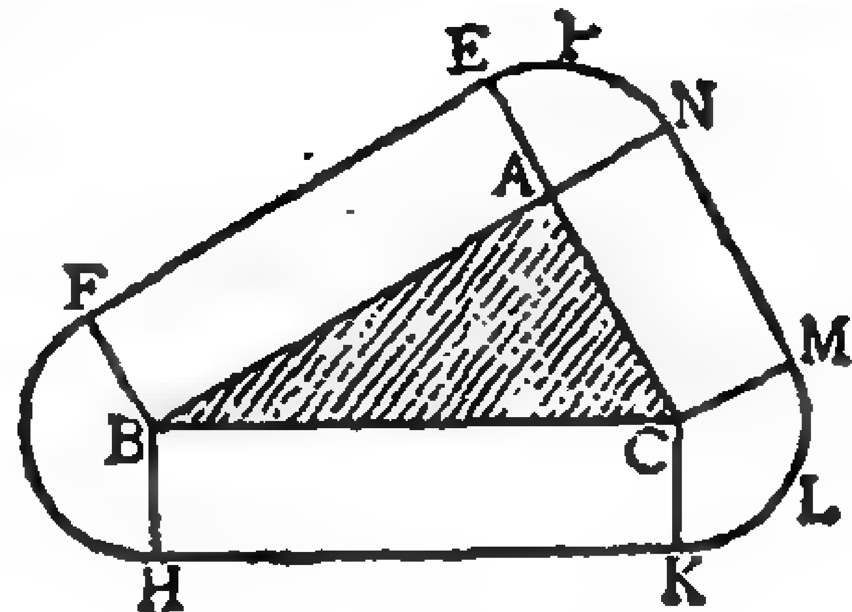
$$\triangle DEF\cong\triangle ABC,$$
$$\therefore\quad D-ABC=B-DEF=D-EFB.$$
又 $$\triangle EFB\cong\triangle BCF.$$
$$\therefore\quad D-BEF=D-CBF,$$

所以　$D-ABC=D-EFB=D-CBF$。

3149. 在空间有三边分别是 a、b、c 的三角形薄板。试求与此板的最短距离不超过实数 r 的所有点组成的立体的体积和表面积。计算时不计板的厚度。



解　设三边分别为 a、b、c 的三角形为 $\triangle ABC$，在它的两侧分别作与平面 ABC 的距离为 r 的且与 $\triangle ABC$ 全等的三角形 $A_1B_1C_1$、$A_2B_2C_2$。假设按给定条件已作出这个立体，如用 $\triangle ABC$ 所在平面截开它，则截面如右图那样是由三个矩形、三个弓形镶在三角形的外侧，所以要作的立体由下面三个部分所组成。(i) 以 $\triangle ABC$ 为底、高为 $2r$ 的三棱柱。(ii) 分别以 AB、BC、CA 为高，底的半



径 r 的三个半圆柱. (iii) 如上图所示的 $\angle EAN$、$\angle MCK$、$\angle FBH$ 为圆心角, r 为半径的三个球缺.

设 S 表示三角形的面积, $2p=a+b+c$, 则有 (i) $2rS$, (ii) πr^2p, (iii) 由于 $\angle EAN+\angle FBH+\angle MCK=360°$, 所以将三个球缺并起来就是一个球, 其体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3$.

设所求的体积为 V, 则

$$V=2rS+\pi r^2p+\frac{4}{3}\pi r^3.$$

设所求表面积为 F, 则

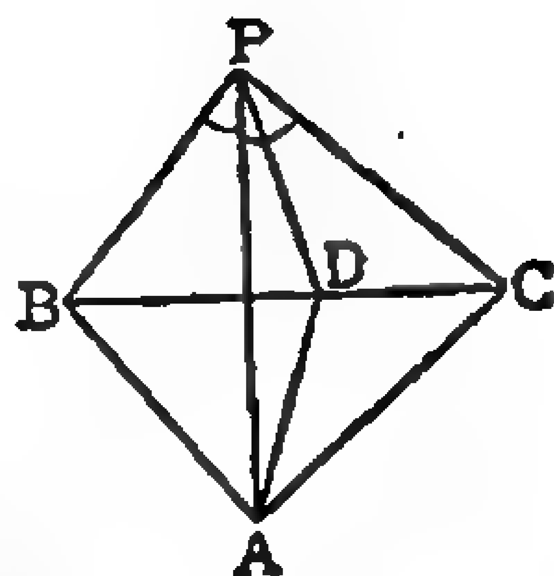
$$F=2S+2\pi rp+4\pi r^2,$$

其中 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

3150. 在空间求 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 的视角都成直角的点的轨迹. 如 $AB=13$, $BC=14$, $CA=15$, 试求出该轨迹的全长.

解 设点 P 为适合条件的点, 则

$$\angle BPA=\angle R,$$
$$\angle APC=\angle R,$$



即 AP 与两直线 PB、PC 垂直, 所以

$$PA\perp\text{平面 }BPC.$$

从点 A 向 BC 引垂线 AD, 由三垂线定理知 $PA\perp PD$, 所以 $\angle APD=\angle R$, 且 $BC\perp$平面APD.

因此, P 在过定点 D 且与 BC 垂直的平面上的以 AD 为直径的圆周上. 这个圆周就是所求的轨迹.

如果 $\triangle ABC$ 的三边分别为 13、14、15, 则其面积为 84, 所以

$$\frac{1}{2}BC\cdot AD=84,$$

$$\frac{1}{2}\times 14\ AD=84,\quad \therefore\quad AD=12.$$

从而轨迹的全长为 12π.

第四章　旋转体的表面积和体积

1. 圆柱

3151. 已知直圆柱的侧面积及体积分别是这个直圆柱的内接或外切正多棱柱的侧面积及体积, 当底面的边数无限增多时的极限. 试根据这个道理, 求直圆柱的侧面积及体积.

解 设直圆柱的侧面积为 S, 体积为 V, 高为 h, 底面半径为 r, 底面的周长为 p, 底面的面积为 F. 直圆柱的内接和外切正多棱柱的侧面积分别是 S_n 和 S'_n, 体积分别是 V_n 和 V'_n, 底面周长分别是 p_n 和 p'_n, 底面面积分别为 F_n 和 F'_n, 则

$$S_n=p_nh,\quad S'_n=p'_nh;$$
$$V_n=F_nh,\quad V'_n=F'_nh.$$

因为当边数 n 无限增多时, p_n 和 p'_n 都无限接近于直圆柱的底面周长 p, F_n 和 F'_n 都无限接近于直圆柱的底面积 F, S_n 和 S'_n 都无限地接近于直圆柱的侧面积 S, V_n 和 V'_n 都无限接近于直圆柱的体积 V, 所以

$$S=ph,\quad V=Fh.$$

又由于 $\qquad p=2\pi r,\ F=\pi r^2,$

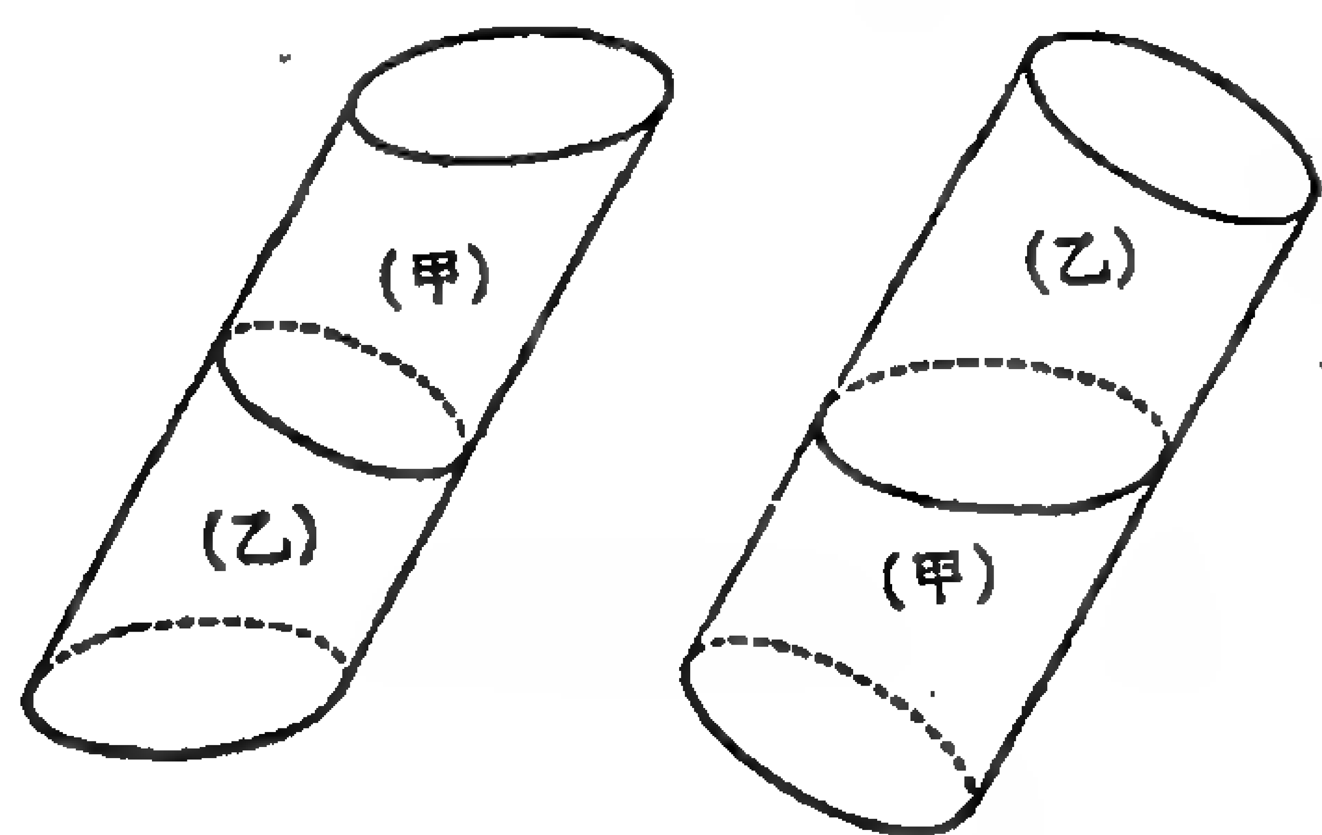
$$\therefore\quad S=2\pi rh,\ V=\pi r^2h.$$

注　直曲线柱(例如底面是椭圆)的侧面积和体积分别是以这个直曲线柱的底面的内接或外切多边形为底面所作这个直曲面柱的内接或外切的直多棱柱的侧面积和体积, 当这两个直多棱柱的底面各边的长度都无限变小时的极限. 设直曲线柱的侧面积为 S, 体积为 V, 高为 h, 底面周长为 p, 底面积为 F, 则

$$S=ph,\ V=Fh.$$

3152. 圆柱的侧面积等于垂直于该圆柱母线的截面周长和母线的乘积. 圆柱的体积等于垂直于该圆柱母线的截面面积和母线的乘积.

解 把圆柱用垂直于其母线的平面截开, 分成甲、乙两个部分. 在甲部分把母线沿截面平行移动而母线的长度保持不变, 便得到以截面为底面、母线为高的直曲线柱(如下图). 因为这个直曲线柱的侧面积和体积与原来的圆柱的侧面积和体积分别相等, 所以原来的圆柱的侧面积等于垂直于其母线的截面周长与母线的乘积. 原来的圆柱的体积等于垂直于其母线的截面面积与母线的乘积(参照上题和它的注).



3153. 设直圆柱的底面半径为 r，高为 h，则其全面积为 $2\pi r(h+r)$。

解　侧面积是 $2\pi rh$，底面积是 πr^2。设全面积为 T，则

$$T=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r(h+r).$$

3154. 如直圆柱的侧面积等于两底面积之和，则其高与底面半径相等。

解　设直圆柱的高为 h，底面半径为 r，则侧面积是 $2\pi rh$，两底面积的和为 $2\pi r^2$，所以

$$2\pi rh=2\pi r^2,\quad \therefore\ r=h.$$

3155. 两个相似直圆柱的侧面积或全面积的比等于其底面半径的平方比或高的平方比；其体积的比等于其底面半径的立方比或高的立方比。

解　设两个相似直圆柱的侧面积为 S 及 S'，表面积为 T 及 T'，体积为 V 及 V'，底面半径为 r 及 r'，高为 h 及 h'，则

$$S=2\pi rh,\quad T=2\pi r(h+r),\quad V=\pi r^2h;$$
$$S'=2\pi r'h',\ T'=2\pi r'(h'+r'),\ V'=\pi r'^2h'.$$

已知两个直圆柱相似，所以

$$\frac{r}{r'}=\frac{h}{h'}.$$

如设 $\frac{r}{r'}=k$，则有 $r=kr'$，$h=kh'$，

$$\therefore\ S=2\pi(kr')(kh')=2\pi k^2r'h',$$
$$T=\pi(kr')(kh'+kr')=2\pi k^2r'(h'+r'),$$
$$V=\pi(kr')^2(kh')=\pi k^3r'^2h'.$$

从而

$$\frac{S}{S'}=\frac{2\pi k^2r'h'}{2\pi r'h'}=k^2=\frac{r^2}{r'^2}=\frac{h^2}{h'^2},$$

$$\frac{T}{T'}=\frac{2\pi k^2r'(h'+r')}{2\pi r'(h'+r')}=k^2=\frac{r^2}{r'^2}=\frac{h^2}{h'^2},$$

$$\frac{V}{V'}=\frac{\pi k^3r'^2h'}{\pi r'^2h'}=k^3=\frac{r^3}{r'^3}=\frac{h^3}{h'^3}.$$

3156. 侧面积相等的两个直圆柱的体积的比等于其底面半径的比。

解　设侧面积相等的两个直圆柱的体积为 V、V'，半径为 r、r'，高为 h、h'，则

$$V=\pi r^2h,\quad V'=\pi r'^2h'.$$

由于它们的侧面积相等，所以

$$2\pi rh=2\pi r'h'\quad 即\quad rh=r'h'.$$

$$\therefore\ \frac{V}{V'}=\frac{\pi r^2h}{\pi r'^2h'}=\frac{r(rh)}{r'(r'h')}=\frac{r}{r'}.$$

注　从 $rh=r'h'$ 可得 $\frac{r}{r'}=\frac{h'}{h}$，因而

$$\frac{V}{V'}=\frac{h'}{h}.$$

这就是说，侧面积相等的两个直圆柱的体积与高成反比。

3157. 体积相等的两个直圆柱的侧面积与底面半径成反比。

解　设体积相等的两个直圆柱的侧面积为 S、S'，底面半径为 r、r'，高为 h、h'，则

$$S=2\pi rh,\quad S'=2\pi r'h'.$$

由于两个直圆柱的体积相等，所以

$$\pi r^2h=\pi r'^2h'\quad 即\quad r^2h=r'^2h',$$

$$\therefore\ \frac{S}{S'}=\frac{2\pi rh}{2\pi r'h'}=\frac{rh}{r'h'}=\frac{r'(r^2h)}{r(r'^2h')}=\frac{r'}{r}.$$

3158. 已知直圆柱的侧面积为 πa^2，体积为 πb^3，求它的底面半径和高。

解　设直圆柱的底面半径为 r，高为 h，则

$$2\pi rh=\pi a^2,\qquad ①$$
$$\pi r^2h=\pi b^3.\qquad ②$$

从①，得

$$h=\frac{a^2}{2r},$$

从②，得

$$h=\frac{b^3}{r^2},$$

所以

$$\frac{a^2}{2r}=\frac{b^3}{r^2}\quad 即\quad r=\frac{2b^3}{a^2}.\qquad ③$$

把③代入 $h=\frac{a^2}{2r}$，则

$$h=\frac{a^4}{4b^3}.$$

2. 圆锥、圆台

3159. 已知直圆锥的侧面积和体积分别是该直圆锥的内接或外切正多棱锥，当底面边数无限增多时其侧面积和体积的极限。试根据这个道理把直圆锥的侧面积和体积用它的底面半径和高表示。

解　设直圆锥的侧面积为 S，体积为 V，侧面母线长为 l，高为 h，底面半径为 r，底面周长为 p，底面面积为 F。直圆锥的内接和外切正 n 棱锥的侧面积为 S_n、S'_n，底面周长为 p_n、p'_n，底面面积为 F_n、F'_n，底面的边长为 d_n、d'_n，从棱锥的顶点到底面一边的垂线长(即斜高)为 L_n 及 L'_n，则

$$S_n=\frac{1}{2}n(d_nL_n)=\frac{1}{2}(nd_n)L_n=\frac{1}{2}p_nL_n,$$

$$S'_n=\frac{1}{2}n(d'_nL'_n)=\frac{1}{2}(nd'_n)L'_n=\frac{1}{2}p'_nL'_n,$$

$$V_n=\frac{1}{3}F_nh,\qquad V'_n=\frac{1}{3}F'_nh'.$$

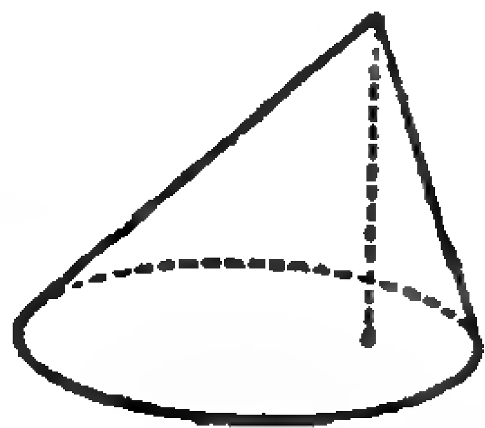
因为当边数 n 无限增多时，p_n 及 p'_n 都无限接近于直圆锥的底面周长 p，L_n 及 L'_n 都无限接近于直圆锥侧面的母线长 l，F_n 及 F'_n 都无限接近于直圆锥的底面面积 F，S_n 及 S'_n 都无限接近于直圆锥的侧面积 S，V_n 及 V'_n 都无限接近于直圆锥的体积 V，所以

$$S=\frac{1}{2}pl,\qquad V=\frac{1}{3}Fh.$$

但是　$p=2\pi r,\quad l=\sqrt{r^2+h^2},\quad F=\pi r^2,$

$$\therefore\quad S=\pi rl=\pi r\sqrt{r^2+h^2},\ V=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

3160. 斜圆锥的体积等于底面积和高的乘积的 $\frac{1}{3}$。



解　以斜圆锥的底面的内接或外切正 n 边形为底面，在斜圆锥内作内接或外切的斜 n 棱锥。设其底面积为 F_n，高为 h (和斜圆锥的高相等)，体积为 V_n，则 $V_n=\frac{1}{3}F_nh$。再设斜圆锥的底面积为 F，体积为 V，则当 n 无限增大时，F_n 无限接近于 F，V_n 无限接近于 V，因此

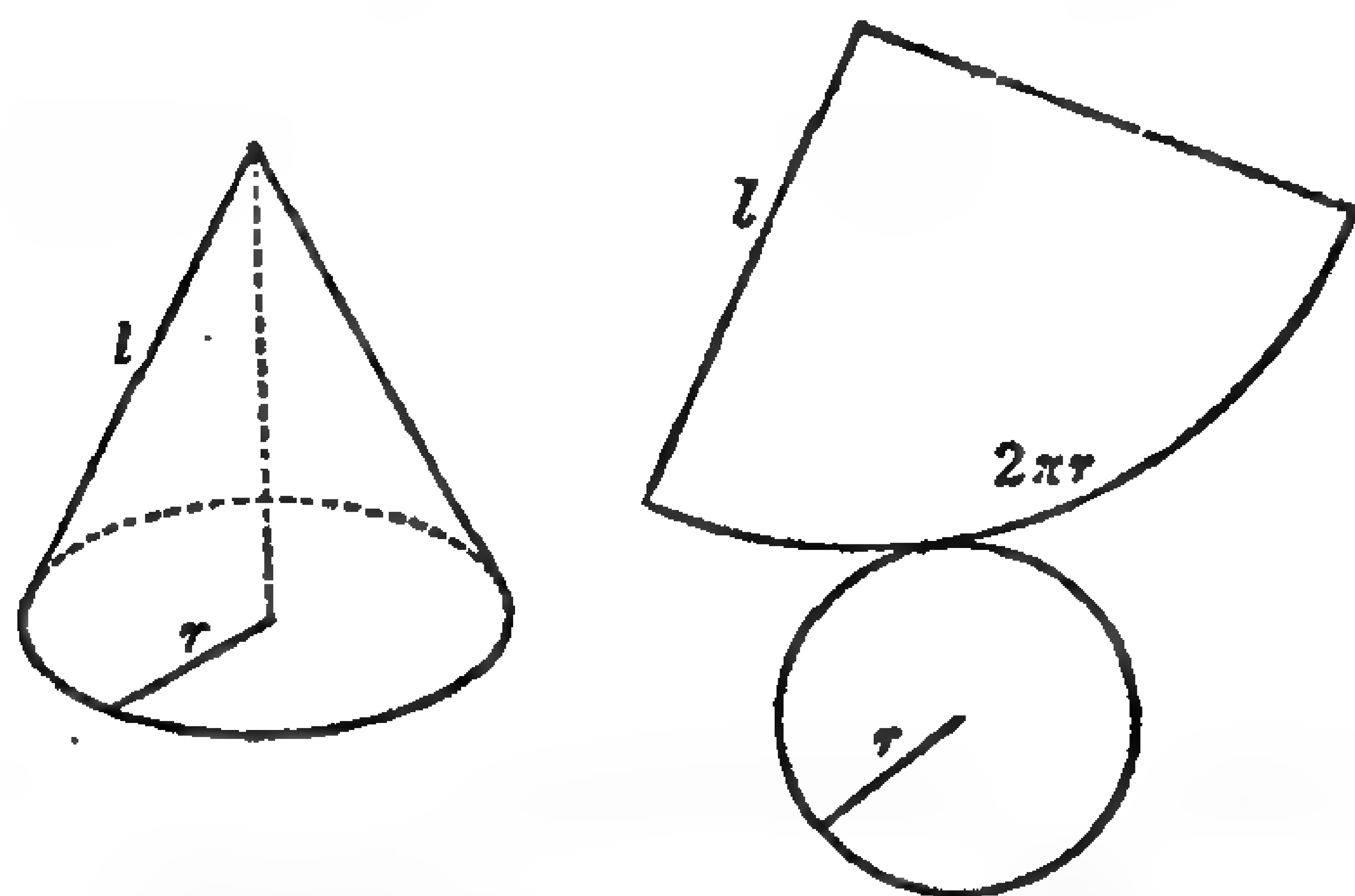
$$V=\frac{1}{3}Fh.$$

3161. 设直圆锥的底面半径为 r，斜高为 l，则全面积可用 $\pi r(l+r)$ 表示。

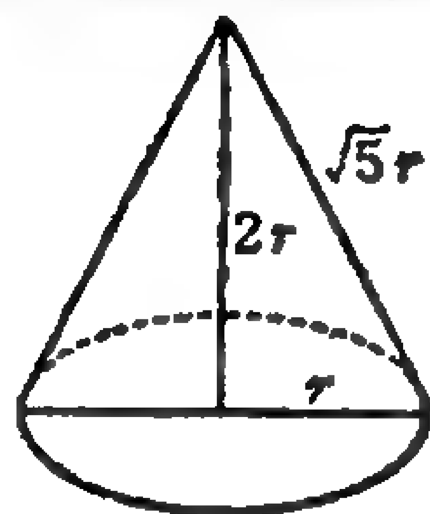
解　根据直圆锥的展开图，可知它的侧面积为

$$\pi l^2\times\frac{2\pi r}{2\pi l}=\pi lr.$$

又底面积为 πr^2，所以它的全面积为 $\pi r(l+r)$。



3162. 如果直圆锥的高等于底面的直径，求它的底面积与侧面积的比。



解　设直圆锥的底面积为 F，侧面积为 S，底面半径为 r，则高为 $2r$，从而

$$F=\pi r^2.$$

又由上题得

$$S=\pi\cdot(\sqrt{5}r)\cdot r=\sqrt{5}\pi r^2,$$

$$\therefore\quad\frac{F}{S}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3163. 证明不存在侧面积等于底面积的直圆锥。

解　假定侧面积等于底面积的直圆锥存在，并设它的底面半径为 r，高为 h，则侧面积为 $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$，底面积为 πr^2，于是得

$$\pi r\sqrt{r^2+h^2}=\pi r^2,$$

即

$$\sqrt{r^2+h^2}=r,$$

$$r^2+h^2=r^2.$$

$$\therefore\quad h^2=0,\quad 从而\quad h=0.$$

因为没有高的直圆锥是不存在的，所以$h=0$是不合理的。由此可知侧面积等于底面积的直圆锥不存在。

3164. 两个相似直圆锥的侧面积的比和全面积的比都等于半径的平方比或者高的平方比或者母线的平方比。体积的比等于半径的立方比或者高的立方比或者母线的立方比。

解　设两个相似直圆锥的侧面积为S及S'，全面积为T及T'，体积为V及V'，底面半径为r及r'，高为h及h'，母线为l及l'，则

$$S=\pi rl,\ T=\pi r(l+r),\quad V=\frac{1}{3}\pi r^2h;$$

$$S'=\pi r'l',\ T'=\pi r'(l'+r'),$$

$$V'=\frac{1}{3}\pi r'^2h'.$$

因为两个直圆锥是相似的，所以

$$\frac{r}{r'}=\frac{h}{h'}=\frac{l}{l'}.$$

令
$$\frac{r}{r'}=k,$$

则
$$r=kr',\ h=kh',\ l=kl',$$

$$\therefore\quad S=\pi(kr')(kl')=\pi k^2r'l',$$

$$T=\pi(kr')(kl'+kr')=\pi k^2r'(l'+r'),$$

$$V=\frac{1}{3}\pi(kr')^2(kh')=\frac{1}{3}\pi k^3r'^2h'.$$

于是

$$\frac{S}{S'}=\frac{\pi k^2r'l'}{\pi r'l'}=k^2=\frac{r^2}{r'^2}=\frac{h^2}{h'^2}=\frac{l^2}{l'^2},$$

$$\frac{T}{T'}=\frac{\pi k^2r'(l'+r')}{\pi r'(l'+r')}=k^2=\frac{r^2}{r'^2}=\frac{h^2}{h'^2}$$

$$=\frac{l^2}{l'^2},$$

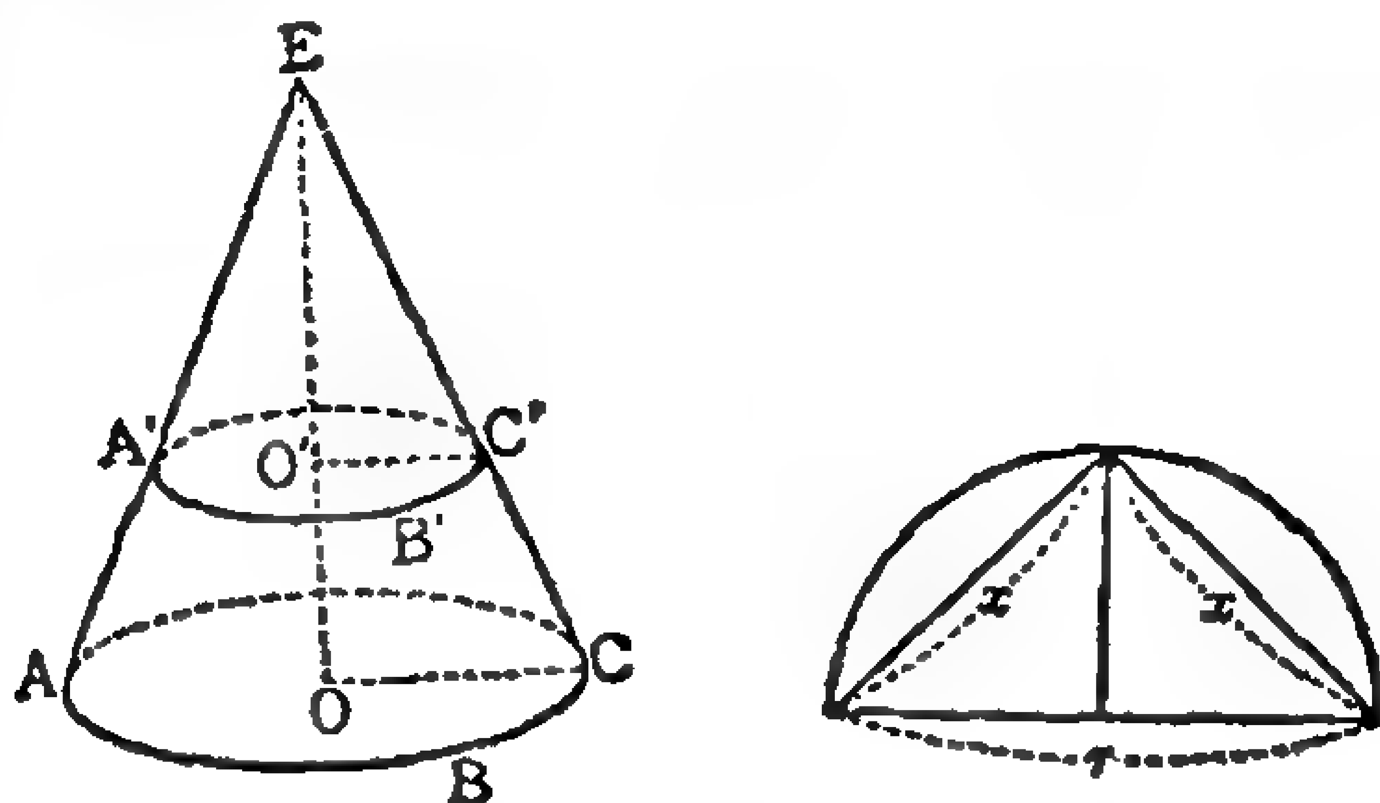
$$\frac{V}{V'}=\frac{\frac{1}{3}\pi k^3r'^2h'}{\frac{1}{3}\pi r'^2h'}=k^3=\frac{r^3}{r'^3}=\frac{h^3}{h'^3}=\frac{l^3}{l'^3}.$$

3165. 已知直圆锥的底面半径为r，用平行于其底面的平面去截这个直圆锥，如果截开的两部分的侧面积相等，试求这个截面的半径。

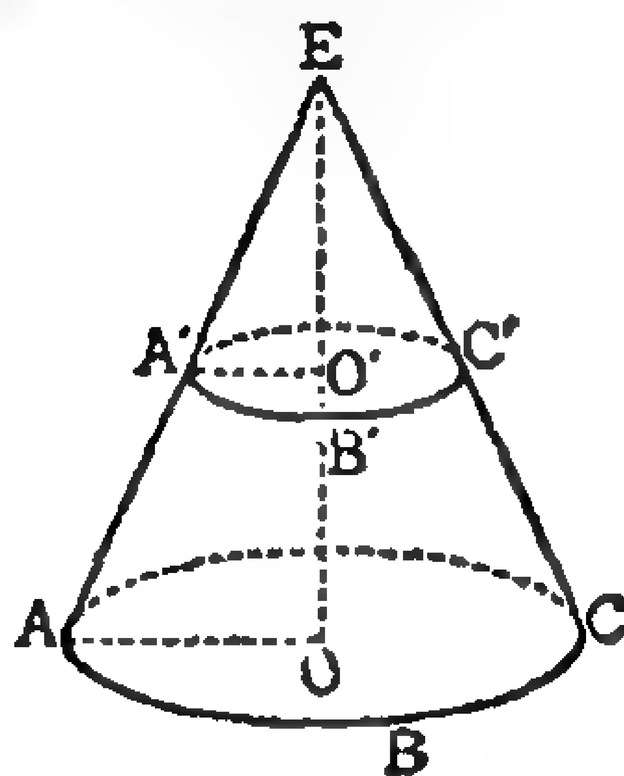
解　设直圆锥的顶点为E，底面圆ABC的半径为r，截面$A'B'C'$的半径为x。由于两个直圆锥$E\text{-}A'B'C'$和$E\text{-}ABC$是相似的，所以它们的侧面积的比等于半径的平方比。又截面$A'B'C'$把直圆锥$E\text{-}ABC$的侧面积分成两等分，因而两个直圆锥$E\text{-}A'B'C'$和$E\text{-}ABC$的侧面积的比为1:2。于是得

$$\frac{x^2}{r^2}=\frac{1}{2},\quad\therefore\quad x=\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

这里，我们还可根据$2x^2=r^2$，把r看成等腰直角三角形的斜边，应用几何作图求出截面的半径(如图)。



3166. 用平行于底面的平面截开底面半径为r的直圆锥，如果截得的两部分的体积相等，试求这个直圆锥截面的半径。

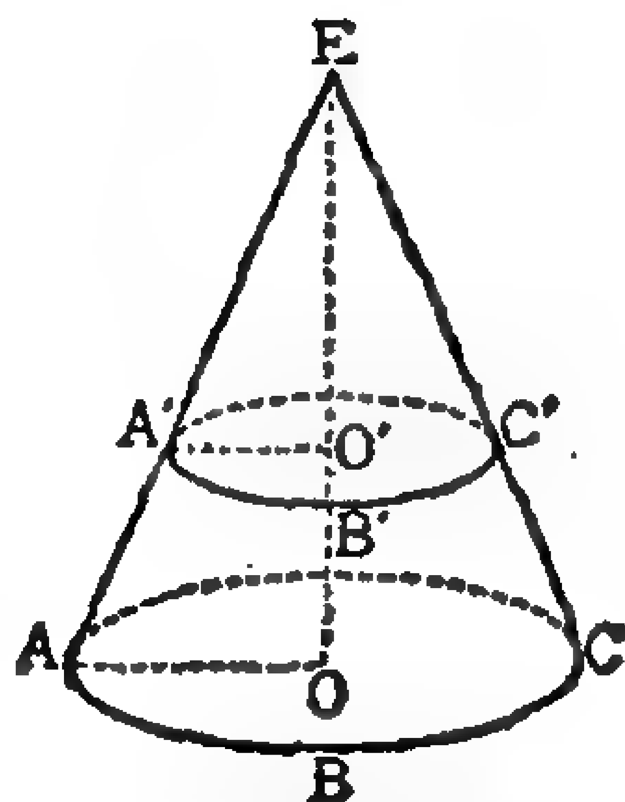


解　把半径为r的直圆锥记为$E\text{-}ABC$，用平行于底面ABC的平面截开这个圆锥，设所得截面$A'B'C'$的半径为x。由于两个直圆锥$E\text{-}A'B'C'$和$E\text{-}ABC$是相似的，根据问题**3164**，知它们的体积之比为$x^3:r^3$，于是得

$$x^3:r^3=1:2,\quad 即\quad 2x^3=r^3,$$

$$\therefore\quad x=\frac{r}{\sqrt[3]{2}}.$$

3167. 直圆台的侧面积等于圆周率、两底面半径之和与母线长三者之积，或者等于两底面周长之和与母线长乘积的一半。



解　设直圆锥$E\text{-}ABC$的一条母线为$EA'A$。用平行于底面

ABC 的平面 $A'B'C'$ 把这个直圆锥分成直圆锥 $E\text{-}A'B'C'$ 和直圆台 $A'B'C'\text{-}ABC$ 两个部分. 对于直圆台 $A'B'C'\text{-}ABC$, 设下底面的圆心为 O, 半径 OA 长为 r, 上底面的圆心为 O', 半径 $O'A'$ 长为 r', 母线 $A'A$ 长为 l. 又设直圆锥 $E\text{-}ABC$ 的母线长为 L, 直圆锥 $E\text{-}A'B'C'$ 的母线长为 L', 则 $l=L-L'$, 直圆锥 $E\text{-}ABC$ 的侧面积为 πrL, 直圆锥 $E\text{-}A'B'C'$ 的侧面积为 $\pi r'L'$. 再设直圆台 $A'B'C'\text{-}ABC$ 的侧面积为 S, 则

$$S=\pi rL-\pi r'L'.$$

又 $\triangle EO'A'\backsim\triangle EOA$,

$$\therefore\quad \frac{O'A'}{OA}=\frac{EA'}{EA},\quad 即\quad \frac{r'}{r}=\frac{L'}{L}.$$

令 $\frac{r'}{r}=k$, 则 $r'=kr$, $L'=kL$.

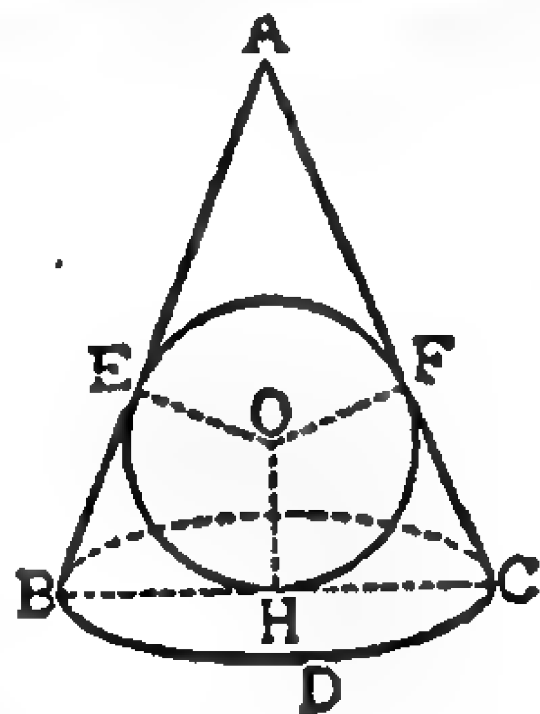
$$\begin{aligned}\therefore\quad S&=\pi rL-\pi(kr)(kL)\\&=\pi(1-k^2)rL\\&=\pi(1+k)(1-k)rL\\&=\pi[(1+k)r][(1-k)L]\\&=\pi(r+kr)(L-kL)\\&=\pi(r+r')(L-L')\\&=\pi(r+r')l.\end{aligned}$$

如设下底面 ABC 的周长为 p, 上底面 $A'B'C'$ 的周长为 p', 则 $p=2\pi r$, $p'=2\pi r'$, 上式又可写成

$$S=\pi(r+r')l=\frac{1}{2}(2\pi r+2\pi r')l$$

$$=\frac{1}{2}(p+p')l.$$

3168. 求半径为 r 的球的外切直圆锥的全面积.



解 设半径为 r 的球的中心为 O, 球 O 的外切直圆锥为 $A\text{-}BDC$. 设这个直圆锥的底面圆心为 H, 用过轴 AH 的平面截这个球和直圆锥, 则其截面为圆 EHF 和等腰三角形 ABC, 且圆 EHF 和 AB 相切于点 E. 由于 $\triangle ABH\backsim\triangle AOE$, 所以

$$\frac{AB}{AO}=\frac{AH}{AE},\quad \frac{BH}{OE}=\frac{AH}{AE}.$$

设 $OE=r$, $AH=h$, 则

$$AO=h-r,$$

$$AE=\sqrt{AO^2-OE^2}=\sqrt{(h-r)^2-r^2}$$
$$=\sqrt{h(h-2r)}.$$

于是上述比例式可以写成

$$\frac{AB}{h-r}=\frac{h}{\sqrt{h(h-2r)}},$$

$$\therefore\quad AB=\frac{(h-r)\sqrt{h}}{\sqrt{h-2r}}.$$

又
$$\frac{BH}{r}=\frac{h}{\sqrt{h(h-2r)}},$$

$$\therefore\quad BH=\frac{r\sqrt{h}}{\sqrt{h-2r}}.$$

由问题 **3161**, 可知直圆锥的全面积为

$$\begin{aligned}S&=\pi\cdot BH(AB+BH)\\&=\pi\cdot\frac{r\sqrt{h}}{\sqrt{h-2r}}\cdot\left[\frac{(h-r)\sqrt{h}}{\sqrt{h-2r}}+\frac{r\sqrt{h}}{\sqrt{h-2r}}\right]\\&=\frac{\pi rh^2}{h-2r}.\end{aligned}$$

3169. 从半径为 12 cm 的马口铁的圆板上截下一个中心角为 120° 的扇形, 用它做成漏斗, 试求这个漏斗的容积.

解 因为漏斗底面的周长与扇形的弧长相等. 设弧长为 l cm, 则

$$l=2\pi\times 12\times\frac{120}{360}=8\pi.$$

又设漏斗的底面半径为 r cm, 则

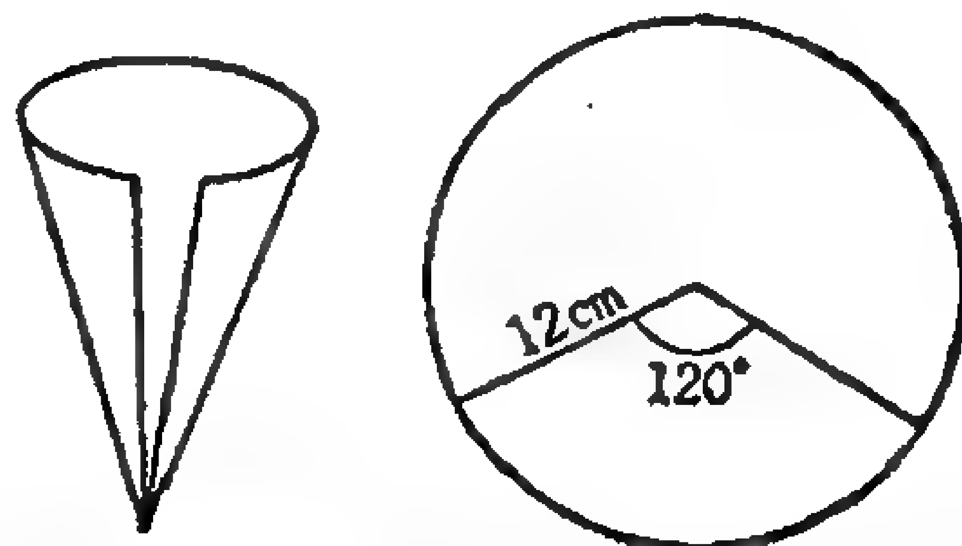
$$r=\frac{8\pi}{2\pi}=4.$$

因为漏斗的母线长为 12 cm, 底面半径为 4 cm, 所以高

$$h=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2},$$

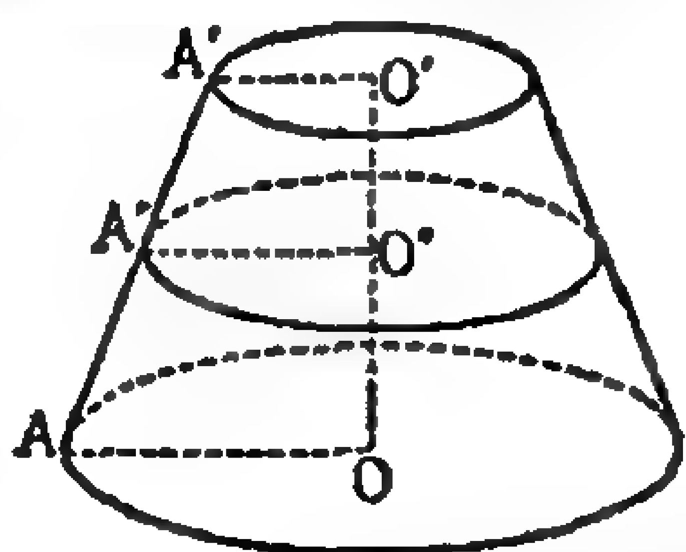
从而漏斗的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\times 4^2\times 8\sqrt{2}=\frac{128\sqrt{2}}{3}\pi\,\text{cm}^3.$$



3170. 直圆台的侧面积等于和两底面等距离的平面所截得的截面周长与母线长的乘积.

解　设直圆台的两底面的圆心分别为 O、O'，与两底面平行的等距离的截面圆心为 O''，则 O、O''、O' 共线. 现在用过直线 OO' 的平面截这个直圆台（如图），则 OA、$O'A'$ 为两底面的半径，$O''A''$ 为与两底面距离相等处的截面半径. 在梯形 $A'AOO'$ 中



$$O'O''=O''O,\ O'A'\parallel O''A''\parallel OA,$$

$$\therefore\quad O''A''=\frac{1}{2}(OA+O'A').$$

设 $OA=r$，$O'A'=r'$，$O''A''=R$，则

$$R=\frac{1}{2}(r+r').$$

设直圆台的母线长为 l，侧面积为 S，由问题 **3167**，得

$$S=\pi(r+r')l=2\pi\left(\frac{1}{2}\right)(r+r')l=2\pi Rl.$$

又设截面圆 O'' 的周长为 p，则

$$p=2\pi R,\ 从而\quad S=pl.$$

3171. 已知直圆台的两底面半径分别为 10 cm 和 5 cm，母线长为 8 cm，求其全面积.

解　设所求的直圆台全面积为 $S\,\text{cm}^2$，根据问题 **3167**，知直圆台的侧面积为 $\pi(10+5)\times 8$，所以

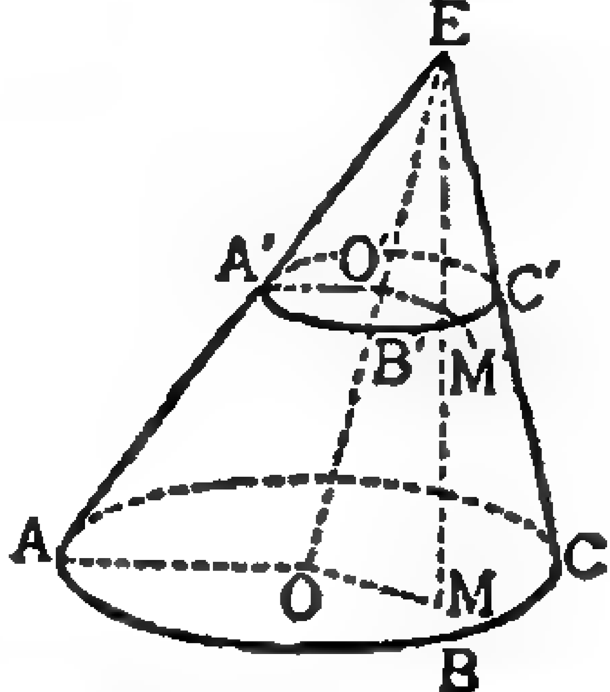
$$S=\pi(10+5)\times 8+\pi\cdot 10^2+\pi\cdot 5^2$$
$$=120\pi+100\pi+25\pi=245\pi\ \text{cm}^2.$$

注　如取 $\pi\approx\frac{22}{7}$，则

$$S\approx 245\times\frac{22}{7}=770\ \text{cm}^2.$$

3172. 将圆台的体积用它的两个底面半径和高表示.

解　设圆锥 $E\text{-}ABC$ 的一条母线为 $EA'A$，用平行于底面 ABC 的平面 $A'B'C'$ 截开这个圆锥，可以得到圆锥 $E\text{-}A'B'C'$ 和圆台 $A'B'C'\text{-}ABC$. 设下底面圆心为 O，半径 OA 长 r，上底面 $A'B'C'$ 的圆心为 O'，半径 OA' 长为 r'. 再设圆锥 $E\text{-}ABC$ 的高为 EM，圆锥 $E\text{-}A'B'C'$ 的高为 EM'，则圆台的高为 MM'，如记 $EM=H$，$EM'=H'$，$MM'=h$，则 $h=H-H'$. 因此



圆锥 $E\text{-}ABC$ 的体积是 $\frac{1}{3}\pi r^2H$，

圆锥 $E\text{-}A'B'C'$ 的体积是 $\frac{1}{3}\pi r'^2H'$，

圆台 $A'B'C'\text{-}ABC$ 的体积是

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2H-\frac{1}{3}\pi r'^2H'$$
$$=\frac{1}{3}\pi(r^2H-r'^2H').$$

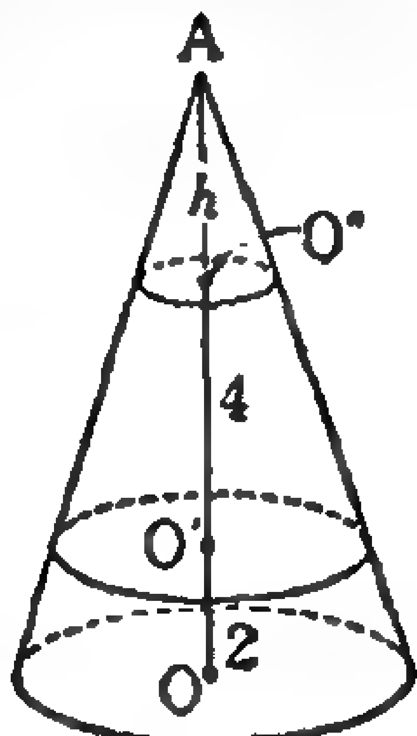
由于这两个圆锥是相似的，

$$\frac{r'}{r}=\frac{H'}{H},\quad\therefore\quad r'H=rH'.$$

所以

$$V=\frac{1}{3}\pi[r^2(H'+h)-r'^2(H-h)]$$
$$=\frac{1}{3}\pi(r^2h+r'^2h+rr'H-rr'H')$$
$$=\frac{1}{3}\pi[r^2h+r'^2h+rr'(H-H')]$$
$$=\frac{1}{3}\pi(r^2+r'^2+rr')h.$$

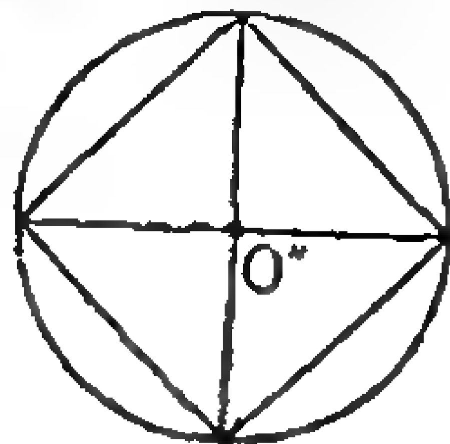
3173. 有一棵根部周长是 1.4 m，离根部 2 m 处的周长是 1.3 m 的树，想得到长为 6 m 的最大方木，试求它的边长（把树看作直圆锥，取 $\pi=\frac{22}{7}$）.



解　设直圆锥的顶点为 A，底面圆心为 O，在高 2 m 处的截面圆心为 O'，在高 6 m 处的截面圆心为 O''. 记 $AO''=h$，圆 O'' 的周长为 p（如图），则

$$\frac{h}{p}=\frac{h+4}{1.3}=\frac{h+6}{1.4},$$

$$\therefore\quad p=1.1.$$



从而圆 O'' 的半径是

$$\frac{1.1}{2\pi}\ (\text{m})=\frac{110}{2}\times\frac{7}{22}\ (\text{cm})=17.5\ (\text{cm}).$$

因此，半径为 17.5 cm 的圆的内接正方形就是最大方木的截面. 该正方形的边就是最大方木的边，其长为

$17.5\times\sqrt{2}\approx25$(cm).

3174. 如果圆木中截面的周长为 p，两端的距离(即圆木的高)为 h，通常用公式

$$V=\frac{p^2h}{4\pi}$$

计算圆木的体积. 问这样的计算结果与实际体积的误差是多少？这里把圆木看作直圆台.

解 设高为 h 的直圆台形的圆木是 $A'B'C'$-ABC，DEF 是中截面. 下底面 ABC、上底面 $A'B'C'$、截面 DEF 的圆心分别为 O、O'、Q，OA、$O'A'$、QD 的长分别为 r、r' 与 R，则 $2R=r+r'$. 根据问题 **3172**，可知

$$V=\frac{1}{3}\pi(r^2+rr'+r'^2)h.$$

又 $p=2\pi R=\pi(r+r')$，设用公式 $V=\dfrac{p^2h}{4\pi}$ 的计算结果与实际体积的误差为 ε，则

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\frac{1}{3}\pi(r^2+rr'+r'^2)h-\frac{p^2h}{4\pi}\\&=\frac{1}{3}\pi(r^2+rr'+r'^2)h-\frac{\pi^2(r+r')^2h}{4\pi}\\&=\frac{\pi^2}{12\pi}[4(r^2+rr'+r'^2)-3(r+r')^2]h\\&=\frac{\pi^2(r-r')^2h}{12\pi}=\frac{(\pi r-\pi r')^2h}{12\pi}\\&=\frac{(2\pi r-2\pi r')^2h}{48\pi}.\end{aligned}$$

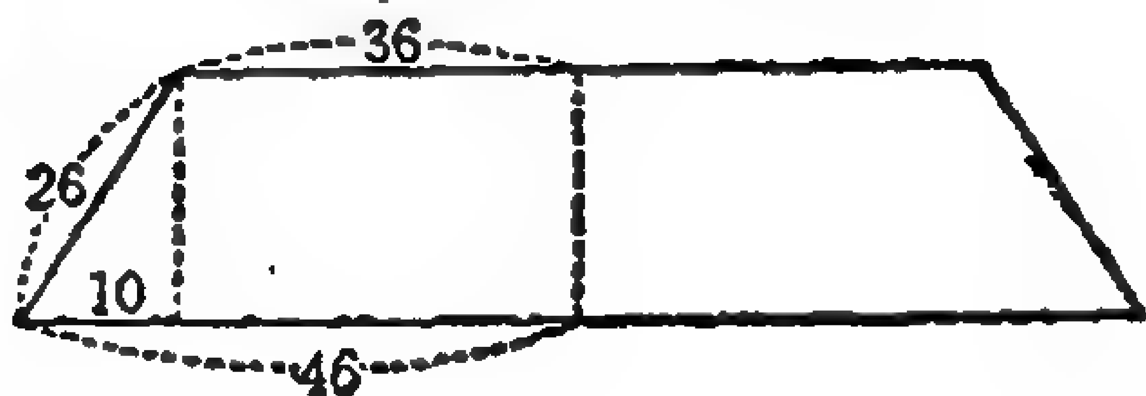
如设下底 ABC 的周长为 S，上底 $A'B'C'$ 的周长为 S'，则

$$S=2\pi r,\ S'=2\pi r',$$

$$\therefore\ \varepsilon=\frac{(S-S')^2h}{48\pi}.$$

3175. 已知直圆台的两个底面半径分别为 36 cm 和 46 cm，母线为 26 cm，求它的体积.

解 设高为 h cm，则



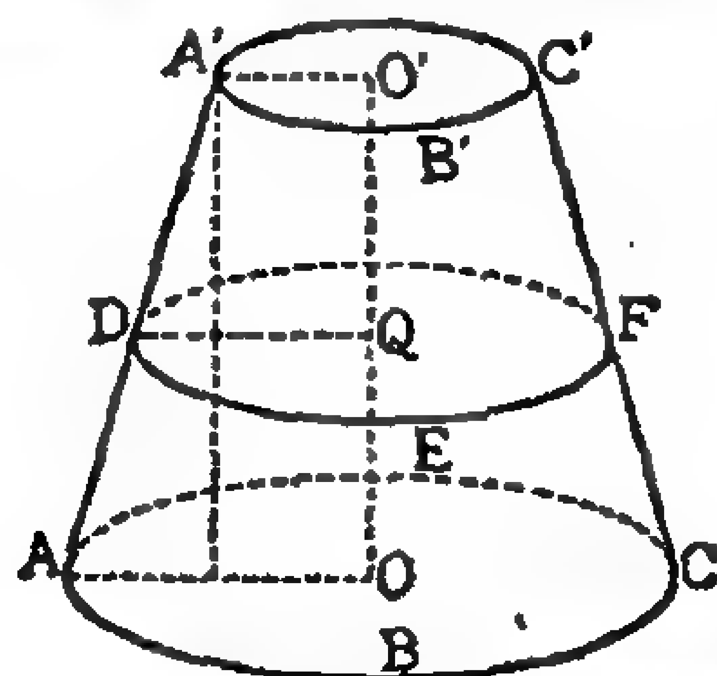
$$h=\sqrt{26^2-(46-36)^2}=24.$$

又设所求的体积为 V cm³，则由问题 **3172**，知

$$V=\frac{1}{3}\pi(36^2+36\times46+46^2)\times24$$
$$=40544\pi(\text{cm}^3).$$

3176. 如果两底面半径分别为 a、b 的直圆台的侧面积被平行于底面的截面分成两等分，则这个截面的半径为

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$



解 设两个底面半径分别为 a、b 的直圆台为 $A'B'C'$-ABC，DEF 为题给的截面. 下底面 ABC、上底面 $A'B'C'$、截面 DEF 的圆心分别为 O、O'、Q，OA、$O'A'$、QD 的长分别为 a、b、x. 再设直圆台 $A'B'C'$-ABC 的母线为 $A'A$，直圆台 $A'B'C'$-DEF 的母线为 $A'D$，且 $AA'=l$，$A'D=l'$，则直圆台 $A'B'C'$-ABC 的侧面积是 $\pi(a+b)l$，直圆台 $A'B'C'$-DEF 的侧面积是 $\pi(x+b)l'$，根据题意可知

$$\pi(x+b)l'=\frac{1}{2}\pi(a+b)l,$$

即 $$\frac{2(x+b)}{a+b}=\frac{l}{l'}.$$

又 $$\frac{A'A}{A'D}=\frac{OA-O'A'}{QD-O'A'},$$

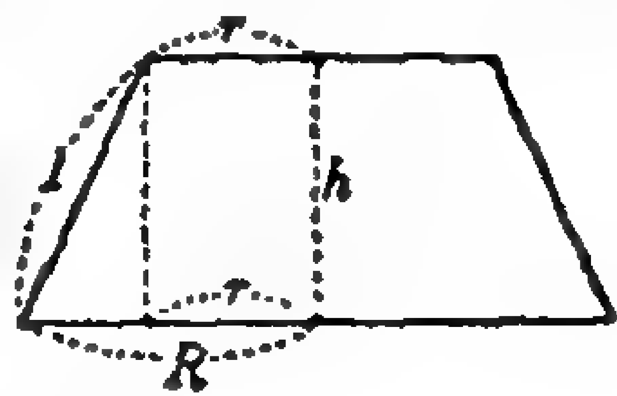
即 $$\frac{l}{l'}=\frac{a-b}{x-b}.$$

$$\therefore\ \frac{2(x+b)}{a+b}=\frac{a-b}{x-b},$$

$$2(x+b)(x-b)=(a+b)(a-b),$$
$$2(x^2-b^2)=a^2-b^2,$$

$$\therefore\ x^2=\frac{a^2+b^2}{2},\quad 即\ x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

3177. 直圆台的高为 h，母线为 l，侧面积为 S，求它的两个底面的半径.



解 设直圆台的上底面半径为 r，下底面半径为 R，则

$$S=\pi(r+R)l.$$

$$\because \quad R=r+\sqrt{l^2-h^2},$$

$$\therefore \quad S=\pi(r+r+\sqrt{l^2-h^2})l$$

$$=\pi(2r+\sqrt{l^2-h^2})l.$$

$$\therefore \quad r=\frac{S}{2\pi l}-\frac{1}{2}\sqrt{l^2-h^2}$$

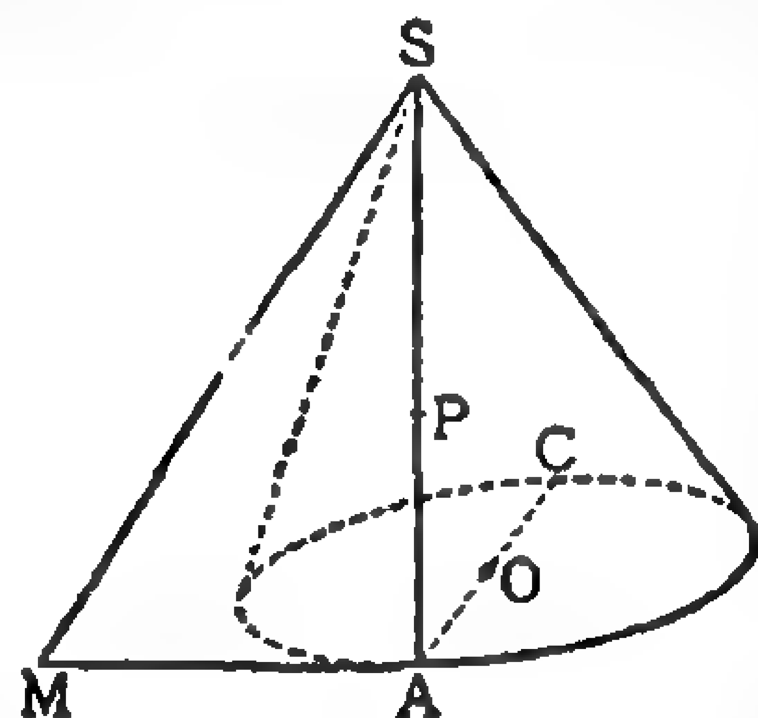
$$=\frac{S-\pi l\sqrt{l^2-h^2}}{2\pi l},$$

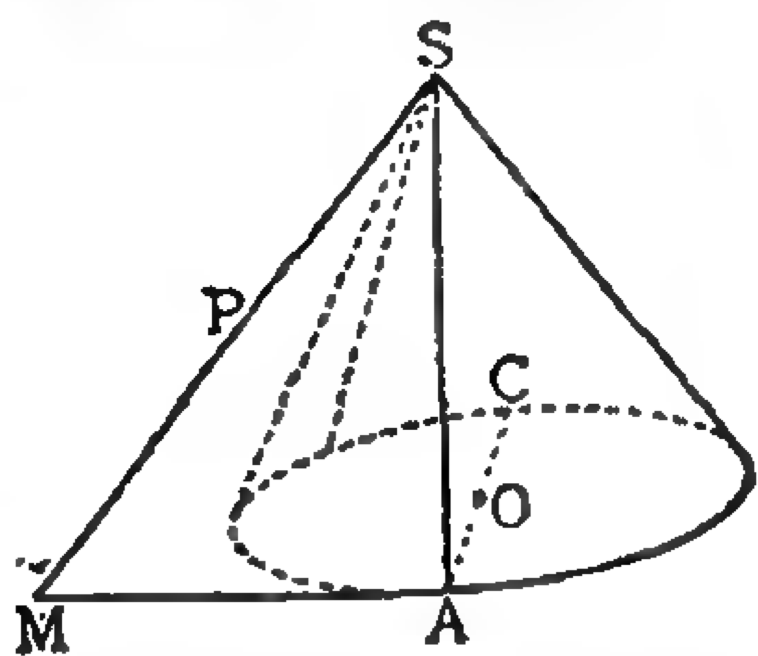
$$R=\frac{S-\pi l\sqrt{l^2-h^2}}{2\pi l}+\sqrt{l^2-h^2}$$

$$=\frac{S+\pi l\sqrt{l^2-h^2}}{2\pi l}.$$

3178. 求作通过定点 P 的圆锥 $S\text{-}AC$ 的切面。

解　(i) 设点 P 在圆锥的曲面上。这时可先作通过点 P 的母线 SA，再过点 A 作底面圆的切线 AM，则两直线 AM、SA 所决定的平面就与这个圆锥相切。事实上，平面 SMA 和圆锥 $S\text{-}AC$ 共有直线 SA，且在直线 SA 外没有其他公共点，所以这个平面 SMA 就是圆锥 $S\text{-}AC$ 的切面。

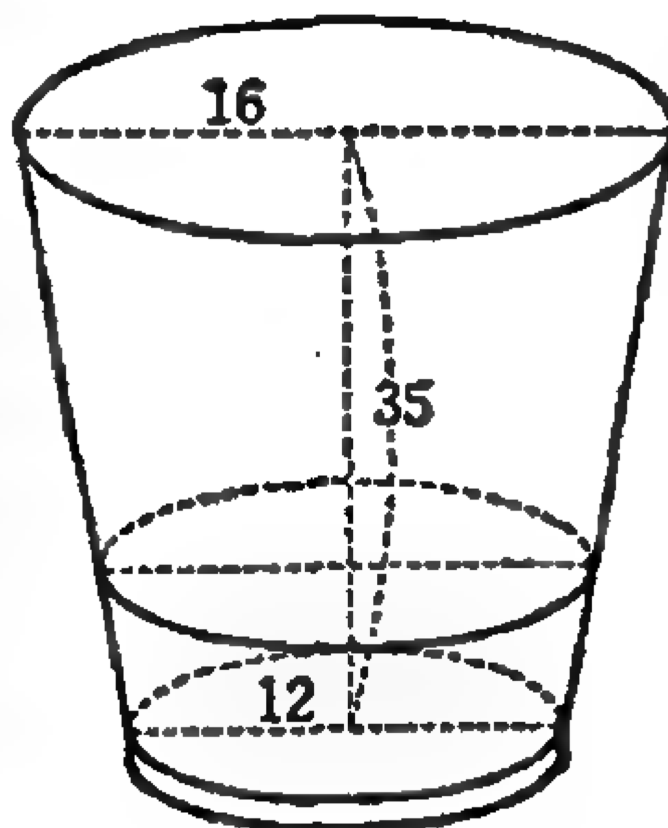




(ii) 设点 P 在圆锥外。连结 PS 的直线和圆锥底面所在平面交于 M，过点 M 作底面圆的切线，设切点为 A，则两直线 SA、SM 所决定的平面就和圆锥 $S\text{-}AC$ 相切(证明同(i))。

(iii) 设点 P 在圆锥内。这时过定点 P 的切面不存在。

3179. 下雨时，用上口直径为 32 cm，底面直径为 24 cm，深为 35 cm 的水桶盛水，如果积水达到桶深 $\frac{1}{4}$ 处，问降雨量是多少 mm？



解　因桶内积水深 $\frac{35}{4}$ cm，水面半径为

$$\left[12+\frac{1}{4}(16-12)\right]\text{cm},$$

即 13 cm。设桶内积水体积为 $V\ \text{cm}^3$，则

$$V=\frac{1}{3}\pi(12^2+12\times13+13^2)\times\frac{35}{4}$$

$$=\frac{16415}{12}\pi.$$

设桶口面积为 $S\ \text{cm}^2$，则

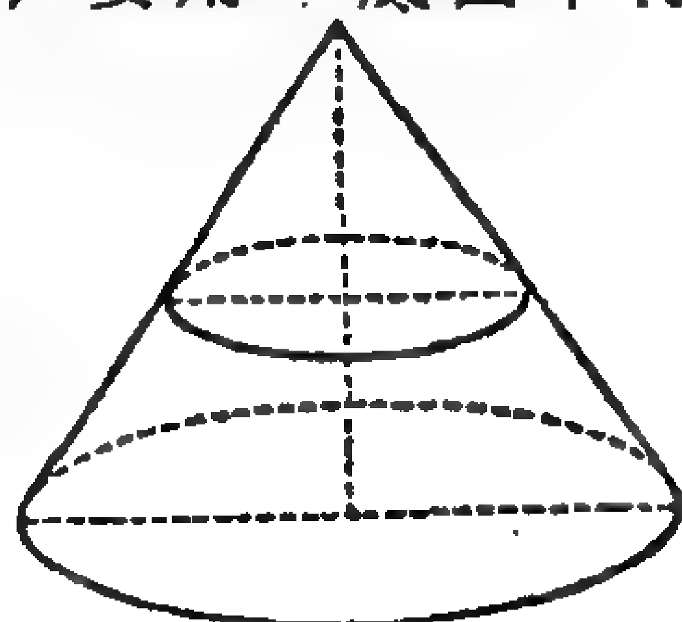
$$S=\pi\times16^2=256\pi.$$

若每 $1\ \text{cm}^2$ 的降雨量为 $v\ \text{cm}^3$，则

$$v=\frac{16415}{12}\pi\div256\pi=\frac{16415}{3072}\approx5.34,$$

故降雨量为 5.34 cm，即 53.4 mm。

3180. 有一个高为 4 cm，底面半径为 3 cm，重 15 g 的圆锥体，要用与底面平行的平面把它截成一个重 5 g 的圆锥和一个重 10 g 的圆台，问应在母线上多少厘米处截取为好(保留两位小数)。



解　设圆锥的母线为 l cm，则

$$l=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

设在圆锥的母线上 x cm 处用平行于底面的平面截取可得重 5 g 的圆锥和重 10 g 的圆台。因为相似圆锥的体积之比等于其母线的立方比，且同一物体的重量之比等于其体积之比，所以

$$\frac{x^3}{5^3}=\frac{5}{15},$$

$$\therefore \quad x=\frac{5}{\sqrt[3]{3}}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{9}.$$

设　$\sqrt[3]{9}=2+h,$

则　$9=8+12h+6h^2+h^3.$

取　$9\approx8+12h$，则

$$h\approx0.08,\quad \therefore \quad \sqrt[3]{9}=2.08.$$

从而　$x\approx\frac{5}{3}\times2.08\approx3.47\ \text{cm}.$

3181. 已知 $\triangle ABC$ 各边 BC、CA、AB 之长分别为 a、b、c，且 $a>b>c$，把 $\triangle ABC$ 以各边为轴旋转所得的各旋转体中哪个体积最大？哪个体积最小？

解　设$\triangle ABC$各边BC、CA、AB上的高分别为l、m、n，则由$a>b>c$可知$l<m<n$。把$\triangle ABC$以BC为轴旋转所得的旋转体的体积为

$$\frac{1}{3}\pi l^2a=\frac{2}{3}\pi l\cdot\frac{1}{2}al=\frac{2}{3}\pi Sl,$$

其中S表示$\triangle ABC$的面积。

同理，把$\triangle ABC$以边AC为轴旋转所得旋转体的体积为$\frac{2}{3}\pi Sm$，以边AB为轴旋转所得旋转体的体积为$\frac{2}{3}\pi Sn$。因此在这三个旋转体中，以边AB为轴旋转而成的旋转体的体积最大，以边BC为轴旋转而成的旋转体的体积最小。

3182. 外接于同一球的多面体的体积与全面积成正比。

解　设外接于同一球的任意一个多面体的体积为V，全面积为S，把球心O和这个多面体的各顶点连结，则这个多面体被分成与其面数相同的许多棱锥。这些棱锥的高都是这个球的半径，这些棱锥的底面和就是这个多面体的全面积S，所以

$$V=\frac{1}{3}Sr.$$

在这个等式中，r是一定的，所以V与S成正比。

3183. (1) 有一底面半径为r、高为h的直圆锥。把直圆锥的轴分成n等分，然后用通过各等分点且与底面平行的平面截开这个圆锥，再以这些截面为底，以$\frac{h}{n}$为高可作n个直圆柱。对表示这些圆柱侧面积的和的式子，当n无限增多时，求它的极限。

(2) 在(1)求极限的过程中，是否要考虑圆锥的侧面积，试说明其理由。

解　(1) 通过轴的各等分点且平行于底面的平面截取直圆锥所得截面圆的半径分别为

$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}r.$$

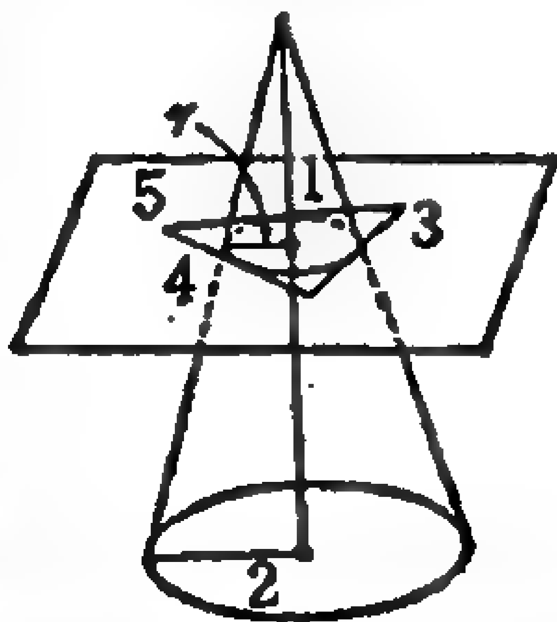
因此，所作n个圆柱侧面积的和S_n为

$$S_n=2\pi\cdot\frac{r}{n}\cdot\frac{h}{n}+2\pi\cdot\frac{2r}{n}\cdot\frac{h}{n}+\cdots$$
$$+2\pi\cdot\frac{(n-1)r}{n}\cdot\frac{h}{n}+2\pi\cdot\frac{nr}{n}\cdot\frac{h}{n}$$
$$=\frac{2\pi rh}{n^2}[1+2+\cdots+(n-1)+n]$$
$$=\frac{2\pi rh}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\pi rh\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

当$n\to\infty$时，$S_n\to\pi rh$。

(2) 当S_n取极限时，不必考虑这个圆锥的侧面积。这是因为当n无限增大时，这些圆柱的侧面积并不是无限接近圆锥的侧面积，所以不必考虑。事实上，圆柱的侧面积为$2\pi rh$，圆锥的侧面积为$2\pi rl$(l为侧面母线长)。

3184. 在一张纸上，剪去两直角边分别为3 cm和4 cm的一个直角三角形，这样在纸面上就有一个洞。再把洞套在底面半径为2 cm、高为10 cm的圆锥上，并使纸面与圆锥底面平行，求穿过纸面部分的圆锥的体积$\left(\text{圆锥的体积等于底面积与高乘积的}\frac{1}{3}\right)$。



解　已知直角三角形的两直角边分别为3 cm和4 cm，所以斜边长为5 cm。当圆锥与这个直角三角形的洞相紧接时，其断面就是直角三角形的内切圆。设内切圆的半径为r，则有

$$(3+4+5)\cdot\frac{r}{2}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4,$$
$$\therefore\quad r=1.$$

因为圆锥的底面半径为2 cm，所以从纸面到圆锥顶点的距离为

$$10\times\frac{1}{2}=5\,\text{cm},$$

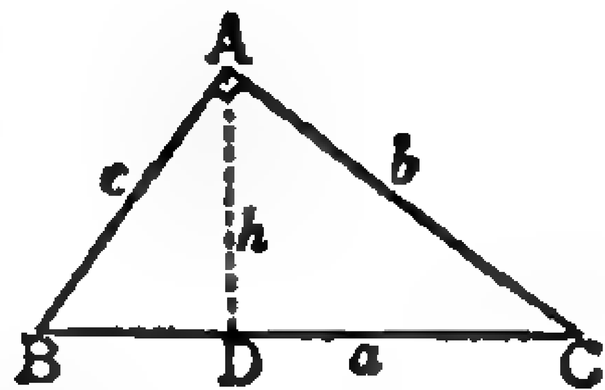
从而纸面以上部分的圆锥体积为

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot1^2\cdot5=\frac{5}{3}\pi(\text{cm}^3).$$

3185. 设直角三角形绕其斜边旋转一周所得旋转体的体积为p，绕两直角边旋转一周所得旋转体的体积分别为q、r，则

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}.$$

解　从直角三角形的直角顶点A向斜边BC引垂线，其垂足为D。设$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$AD=h$，则把$\triangle ABC$分别以BC、CA、AB为轴旋转所得旋转体的体积为



$$p=\frac{1}{3}\pi h^2\cdot BC=\frac{1}{3}\pi h^2\cdot a$$

$$=\frac{\pi a^2h^2}{3}\cdot\frac{1}{a},$$

$$q=\frac{1}{3}\pi bc^2=\frac{\pi b^2c^2}{3}\cdot\frac{1}{b},$$

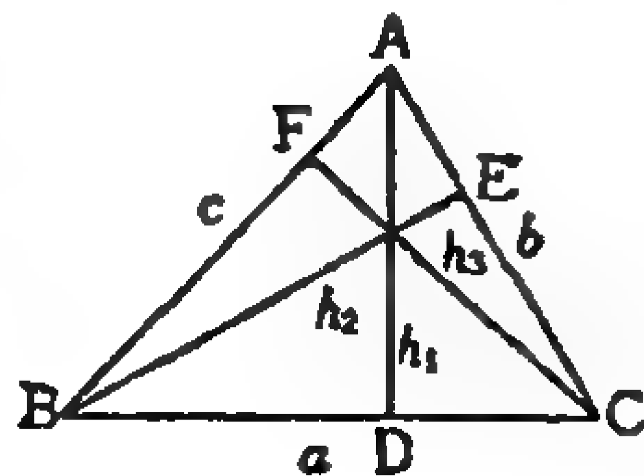
$$r=\frac{1}{3}\pi b^2c=\frac{\pi b^2c^2}{3}\cdot\frac{1}{c}.$$

因为$ah=bc$，故设

$$\frac{\pi a^2h^2}{3}=\frac{\pi b^2c^2}{3}=k,$$

于是　$$\frac{1}{p^2}=\frac{a^2}{k^2}=\frac{b^2+c^2}{k^2}=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}.$$

3186. 分别以三角形的三边BC、CA、AB为轴，把$\triangle ABC$旋转一周所得旋转体的体积分别为V_1、V_2、V_3，在$\triangle ABC$内选择一点P，使点P到各边BC、CA、AB的距离之比为$V_1:V_2:V_3$，试确定点P的位置。



解　从A、B、C分别向其对边引垂线，其垂足各为D、E、F。设BC、CA、AB、AD、BE、CF的长分别为a、b、c、h_1、h_2、h_3，则

$$V_1=\frac{1}{3}\pi h_1^2\cdot BD+\frac{1}{3}\pi h_1^2\cdot DC$$

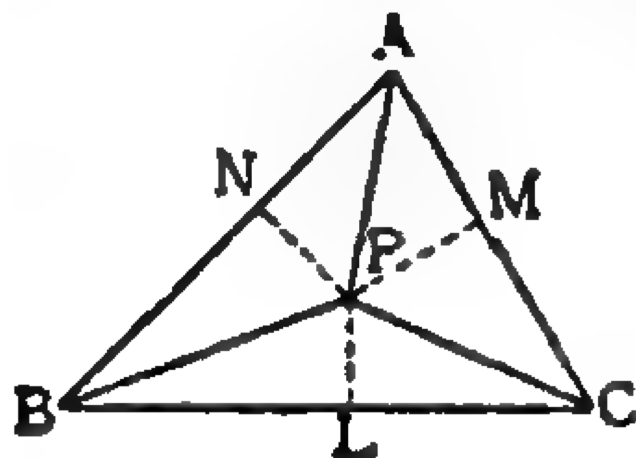
$$=\frac{1}{3}\pi h_1^2(BD+DC)=\frac{1}{3}\pi ah_1^2$$

($\angle B$、$\angle C$为直角或钝角时，都有上述结果)。

同理，　$V_2=\frac{1}{3}\pi bh_2^2$，$V_2=\frac{1}{3}\pi ch_3^2$。

由于$ah_1=bh_2=ch_3$，所以

$$V_1:V_2:V_3=h_1:h_2:h_3.$$



又设点P到各边BC、CA、AB的垂线的垂足分别为L、M、N，则

$$PL:PM:PN=h_1:h_2:h_3.$$

又$ah_1=bh_2=ch_3$，所以

$$a\cdot PL=b\cdot PM=c\cdot PN,$$

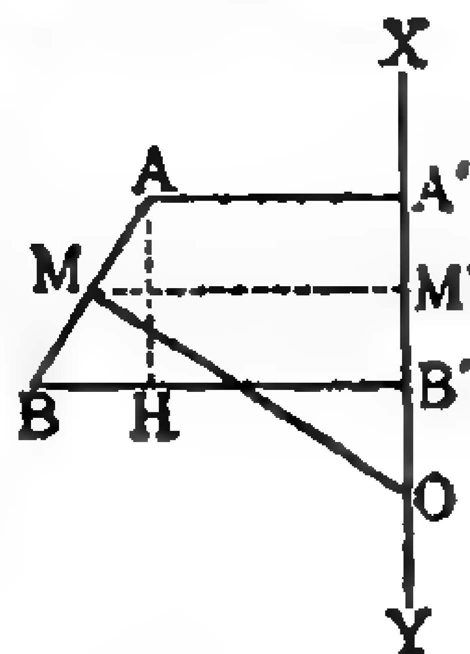
即　$$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCA}=S_{\triangle PAB}.$$

这就是说，点P是$\triangle ABC$的重心。

3. 球

3187. 已知线段AB及与线段AB不相交的直线XY，若AB绕XY旋转所得旋转曲面的表面积为S，线段AB的中垂线MO交XY于点O，线段AB在轴XY上的射影为$A'B'$，则

$$S=2\pi\cdot MO\cdot A'B'.$$



解　设$MM'\perp XY$，则由问题**3170**，可知线段AB以XY为轴旋转所得到的曲面面积S为

$$S=2\pi\cdot MM'\cdot AB.$$

又作　$$AH\perp BB',$$

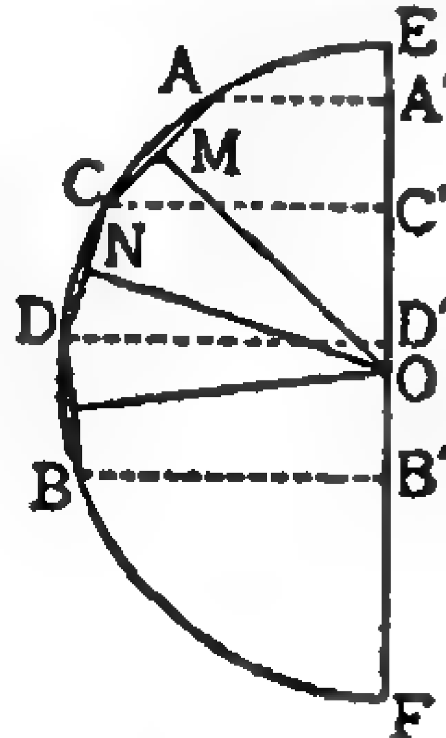
则　$$\triangle MOM'\backsim\triangle ABH.$$

$$\therefore\quad MM':AH=MO:AB,$$

即　$$MM'\cdot AB=MO\cdot AH=MO\cdot A'B',$$

从而　$$S=2\pi\cdot MO\cdot A'B'.$$

3188. 证明：球带的曲面积等于大圆周长与球带的高的乘积。



解　半圆$EABF$以直径EF为轴旋转形成球面，$\overset{\frown}{AB}$绕EF旋转则形成球带。把$\overset{\frown}{AB}$用点C、D、…分成相等的弧$\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{CD}$、…，设这些弧所对的弦绕EF旋转所形成的曲面面积分别为S_1、S_2、…、S_n。各弦AC、CD、…的中点分别为M、N、…，则由上题知

$$S_1=2\pi\cdot OM\cdot A'C',$$

$$S_2=2\pi\cdot ON\cdot C'D',\ \cdots$$

其中A'、C'、D'、…、B'分别是A、C、D、…、B在EF上的射影。因为$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\cdots$，所以$AC=CD=\cdots$，从而$OM=ON=\cdots$，于是

$$S_1+S_2+\cdots+S_n$$

$$=2\pi\cdot OM(A'C'+C'D'+\cdots)$$

$$=2\pi\cdot OM\cdot A'B'.$$

如把弧 AB 分的等分越多，弦 AC、CD、⋯ 就越短，OM 就越接近半径 OA，则 $S_1+S_2+\cdots+S_n$ 就越接近球带 AB 的面积。设球带 AB 的面积为 S，则

$$S=2\pi\cdot OA\cdot A'B',$$

其中 $2\pi\cdot OA$ 为大圆的周长，$A'B'$ 为球带的高。所以

球带面积＝大圆周长×球带的高。

3189. 在两个相等的球中，球带面积的比等于其高的比。

解　设半径为 R 的两个球，其球带面积分别为 S_1、S_2，球带的高分别为 h_1、h_2，则由问题 **3188**，可知

$$S_1=2\pi Rh_1,\quad S_2=2\pi Rh_2,$$

$$\therefore\quad \frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi Rh_1}{2\pi Rh_2}=\frac{h_1}{h_2}.$$

3190. 球带的面积等于以大圆为底，与球带等高的直圆柱的侧面积。

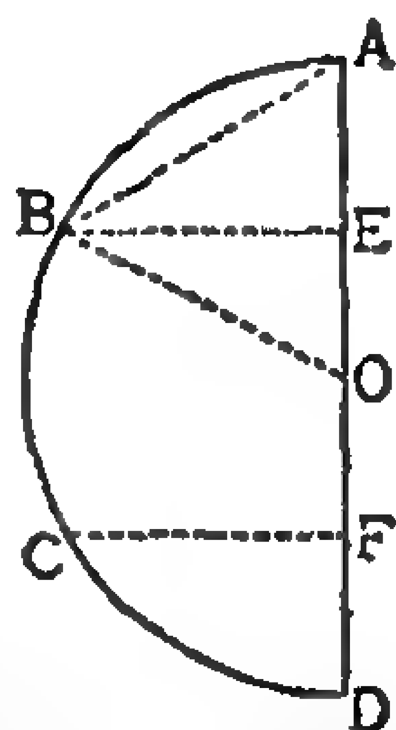
解　设半径为 R 的球的球带的高为 h，面积为 S，则

$$S=2\pi Rh.$$

设与球带等高，以大圆为底的直圆柱的侧面积为 S'，则

$$S'=2\pi Rh,\quad \therefore\quad S=S'.$$

3191. 如果把半圆 $ABCD$ 用 B、C 分成三等分，把各弧都绕直径 AD 旋转，则 $\overset{\frown}{BC}$ 旋转所得球带的面积等于 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 旋转所得球带的面积之和。



解　从 B、C 分别引 AD 的垂线，其垂足分别为 E、F。因为 $\triangle OAB$ 是等边三角形，所以 BE 为其边 OA 上的高，E 为 OA 的中点。同理，F 为 OD 的中点，于是

$$EF=OE+OF=AE+FD.$$

用 R 表示球的半径，则

球带 BC 的面积 $=2\pi R\cdot EF$

$=2\pi R(AE+FD)$

$=2\pi R\cdot AE+2\pi R\cdot FD$

＝球带 AB 的面积＋球带 CD 的面积。

注　$\overset{\frown}{AB}$ 绕直径 AD 旋转所形成的曲面为球冠，可以看成是球带的一种。$\overset{\frown}{CD}$ 绕直径 AD 旋转所形成的曲面和 $\overset{\frown}{AB}$ 的一样，也是球冠。

3192. 球冠（仅有一底的球带）的面积等于以形成该球冠的弧所对的弦为半径的圆面积。

解　以半圆 ABC 上的弧 AB 绕直径 AC 旋转得到球冠。从 B 向 AC 引垂线交 AC 于 D，O 为 AC 的中点。设球冠的面积为 S，则

$$S=2\pi\cdot OA\cdot AD=\pi\cdot AC\cdot AD.$$

因 $\angle ABC=\angle R$，所以 $AC\cdot AD=AB^2$，于是

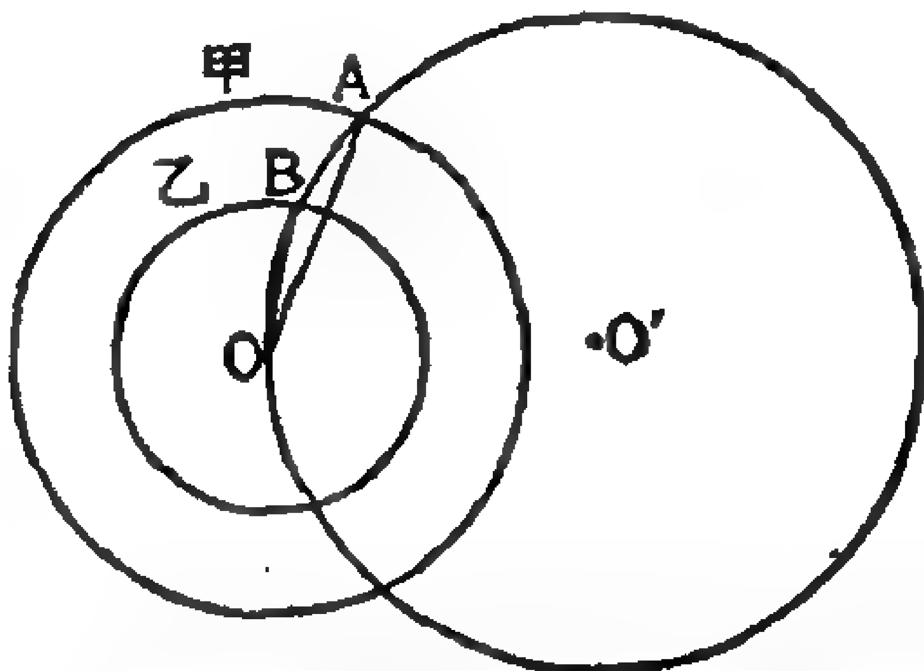
$S=\pi\cdot AB^2=$ 以 AB 为半径的圆面积。

注　在以后的问题中，球冠都看成是球带的一种。

3193. 通过已知球心的任意一球被已知球所截而成的球带面积是一定的。

解　设通过已知球球心 O 的任意一球的球心为 O'，用同一平面去截开两球，则得已知球的大圆 O 和以 O' 为圆心且通过 O 的大圆 O'。设两圆 O、O' 的交点为 A，则两球 O、O' 相交所成球带就是 $\overset{\frown}{AO}$ 绕 OO' 旋转所成的球带，因此它的面积就是以弦 OA 为半径的圆面积，即 $\pi\cdot OA^2$（参照上题）。因为弦 OA 是已知球的半径，是一定值，所以 $\pi\cdot OA^2$ 也是一定的。

3194. 通过已知两同心球的球心的任意一个球在已知两球间所截取的球带面积是一定的。



解　以 O 为球心作已知的两个同心球甲和乙，设甲的半径为 R，乙的半径为 r。再过两个同心球的球心作任意一个球 O'。用过球心 O 和 O' 的连线的平面截开诸球面，则得以 O 为圆心的两个同心圆甲和乙，和以 O' 为圆

心且过点 O 的圆 O'. 设甲、乙两圆和圆 O' 分别交于点 A、B, 则球面 O' 被甲球面所截取的球带面积为 $\pi\cdot OA^2$, 球面 O' 被乙球面所截取的球带面积为 $\pi\cdot OB^2$ (见上题). 设所求球带的面积为 S, 则

$$S=\pi\cdot OA^2-\pi\cdot OB^2=\pi(OA^2-OB^2)$$
$$=\pi(R^2-r^2).$$

因 R、r 都是定值, 故 S 也是一个定值.

3195. 球的半径为 5cm, 球带的高为 1cm, 求这个球带的面积.

解　设所求球带的面积为 $S\,\text{cm}^2$, 则由问题 **3188**, 知 $S=2\pi\times5\times1=10\pi$.

取 $\pi=3.1416$, 则

$$S=10\times3.1416=31.416(\text{cm}^2).$$

3196. 设球的半径为 r, 则这个球面面积为 $4\pi r^2$. [球的表面积]

解　因球面面积可以看作是以直径为高的球带面积, 故设球面面积为 S, 则

$$S=2\pi r\cdot2r=4\pi r^2.$$

3197. 球面面积等于外切这个球的圆柱的侧面积.

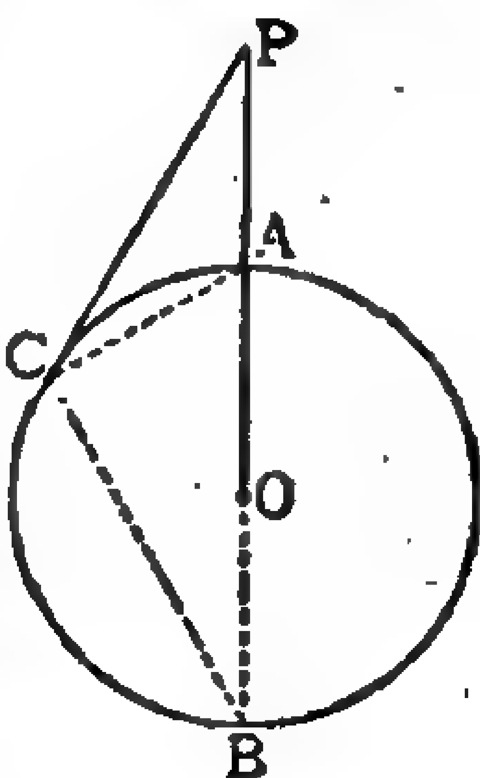
解　设球面面积为 S, 球的半径为 r, 则由上题知 $S=4\pi r^2$.

设外切于这个球的圆柱的侧面积为 S', 则由该圆柱的底面半径为 r, 高为 $2r$, 知

$$S'=2\pi r\cdot2r=4\pi r^2,$$
$$\therefore\quad S=S'.$$

3198. 设飞机飞行的高度为 h, 地球的半径为 R, 则在飞机上能看到的地球表面积为

$$\frac{2\pi R^2h}{R+h}.$$



解　设飞机是在空中的点 P 处, 由点 P 向地面引垂线交地面于点 A. 地球的中心为 O, 以 A 为一端的直径的另一端为 B. 从点 P 向地球表面引一切线 PC, 则从点 P 处能看见的地球表面积就是弧 AC 绕直径 AB 旋转所成的球带面积. 设所求的面积为 S, 则

$$S=\pi\cdot AC^2\quad(\text{问题 }\mathbf{3192}).$$
$$\because\quad\triangle PAC\backsim\triangle PCB,$$
$$\therefore\quad PC:PB=PA:PC,$$
$$\therefore\quad PC^2=PA\cdot PB=h(2R+h).$$

又由 $\triangle PAC\backsim\triangle PCB$, 知

$$\frac{AC}{CB}=\frac{PC}{PB},$$
$$\therefore\quad\frac{AC^2}{CB^2}=\frac{PC^2}{PB^2}=\frac{h(2R+h)}{(2R+h)^2}=\frac{h}{2R+h}.$$

因为　$\angle ACB=\angle R$,

$$CB^2=AB^2-AC^2=(2R)^2-AC^2$$
$$=4R^2-AC^2,$$

所以
$$\frac{AC^2}{4R^2-AC^2}=\frac{h}{2R+h},$$
$$AC^2=\frac{2R^2h}{R+h},$$

从而　$S=\pi\cdot AC^2=\pi\cdot\dfrac{2R^2h}{R+h}=\dfrac{2\pi R^2h}{R+h}.$

3199. 已知地球的半径为 R, 问在海面上达到什么高度才能看见地球表面的 $\frac{1}{3}$?

解　由上题知在高度 h 处能看见地球的表面积为 $\frac{2\pi R^2h}{R+h}$. 由于地球的全面积为 $4\pi R^2$ (问题 **3196**), 所以依题意得

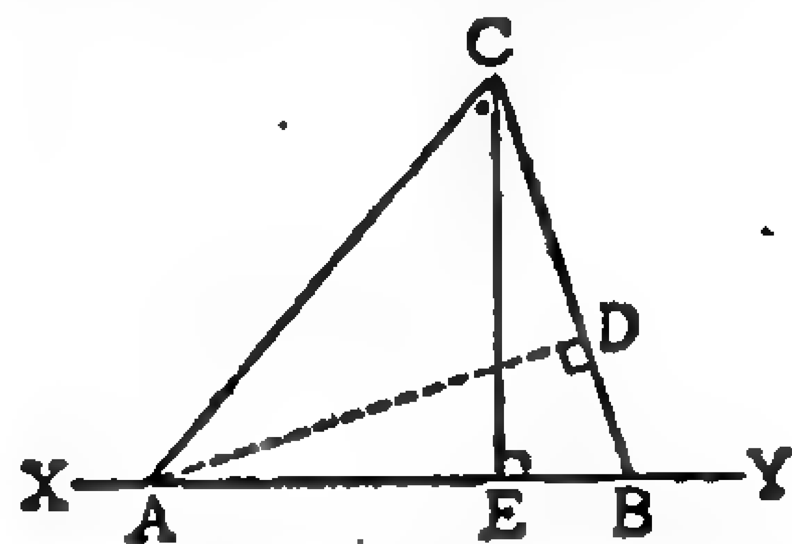
$$\frac{2\pi R^2h}{R+h}=\frac{1}{3}\cdot4\pi R^2,$$

即　$\dfrac{h}{R+h}=\dfrac{2}{3},\quad\therefore\quad h=2R.$

故知当离海面的高度等于地球的直径时, 可以看见地球全面积的 $\frac{1}{3}$.

3200. 在三角形所在的平面内, 通过三角形的一个顶点作一条与这个三角形不相切割的直线. 证明把这个三角形绕该直线旋转所成的旋转体体积, 等于把这个三角形中那个顶点的对边绕该直线旋转所得到的曲面面积和这个三角形的底边上的高的乘积的 $\frac{1}{3}$.

解　通过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 作一条与这个三角形不相交的直线 XY, 并把 $\triangle ABC$ 绕 XY 旋转. 再通过 A 引 BC 的垂线, 其垂足为 D. 现就 XY 与 $\triangle ABC$ 的相关位置分三种情况讨论.



(i) 直线 XY 与 $\triangle ABC$ 的一边 AB 重合．从点 C 向直线 XY 引垂线，垂足为 E．如果点 E 在线段 AB 内(如上图)，则 $\triangle ABC$ 旋转所成的旋转体的体积等于直角三角形 EAC 旋转所成圆锥的体积与直角三角形 EBC 旋转所成圆锥的体积之和．设 $\triangle ABC$ 旋转所成旋转体的体积为 V，则

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot EC^2\cdot AE+\frac{1}{3}\pi\cdot EC^2\cdot BE$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot EC^2\cdot(AE+BE)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot EC^2\cdot AB.$$

由于 $EC\cdot AB=AD\cdot BC$，

$$\therefore\quad V=\frac{1}{3}\pi\cdot EC\cdot BC\cdot AD.$$

设线段 BC 旋转所成的曲面面积为 S，则由问题 **3161**，知

$$S=\pi\cdot EC\cdot BC,$$

$$\therefore\quad V=\frac{1}{3}S\cdot AD.$$

从点 C 向 XY 引垂线，如果垂足 E 在线段 AB 的延长线上(如上图)，则 $\triangle ABC$ 旋转所成旋转体的体积等于直角三角形 EAC 旋转所成的圆锥的体积减去直角 $\triangle EBC$ 旋转所成的圆锥的体积所得的差．因此，

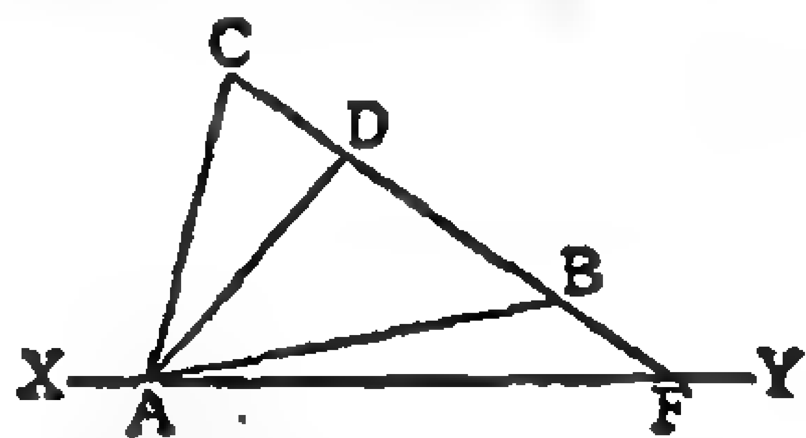
$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot EC^2\cdot AE\sim\frac{1}{3}\pi\cdot EC^2\cdot BE$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot EC^2\cdot(AE\sim BE)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot EC^2\cdot AB$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot EC\cdot BC\cdot AD=\frac{1}{3}S\cdot AD.$$

(ii) $\triangle ABC$ 的底边 BC 的延长线和 XY 相交．设线段 BC 的延长线和 XY 相交于点 F(如图)，$\triangle AFC$ 旋转所成旋转体的体积为 V_1，$\triangle AFB$ 旋转所成旋转体的体积为 V_2，$\triangle ABC$ 旋转所成旋转体的体积为 V，线段 FC 旋转所成曲面的面积为 S_1，线段 FB 旋转所成曲面的面积为 S_2，线段 BC 旋转所成曲面的面积为 S，则

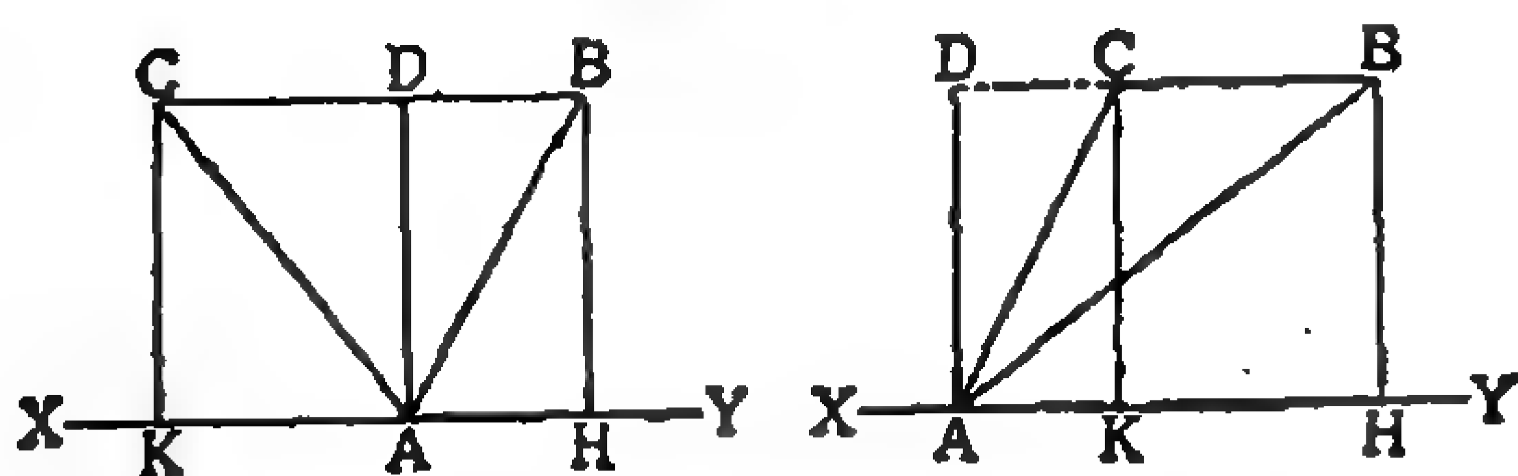


$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}S_2\cdot AD-\frac{1}{3}S_2\cdot AD$$

$$=\frac{1}{3}(S_1-S_2)\cdot AD=\frac{1}{3}S\cdot AD$$

(如果线段 BC 沿 C 的方向延长和 XY 相交，可得出相同的结果)．

(iii) $\triangle ABC$ 的底边 BC 与 XY 平行．由



B、C 分别作 XY 的垂线，其垂足分别为 H、K．则 $\triangle ABC$ 旋转所成旋转体的体积等于直角三角形 DAB 旋转所成旋转体的体积与直角三角形 DAC 旋转所成旋转体的体积的和或差．设直角三角形 DAB 旋转所成旋转体的体积为 V_1，则 V_1 等于矩形 $AHBD$ 旋转所成圆柱的体积减去直角三角形 HAB 旋转而成圆锥的体积所得的差．即

$$V_1=\pi\cdot AD^2\cdot AH-\frac{\pi}{3}\cdot HB^2\cdot AH$$

$$=\frac{2}{3}\pi\cdot AD^2\cdot AH$$

$$(\because\quad AD=HB).$$

同理，直角三角形 DAC 旋转所成旋转体的体积 V_2 为

$$V_2=\frac{2}{3}\pi\cdot AD^2\cdot AK.$$

设 $\triangle ABC$ 旋转而成的旋转体体积为 V，线段 BC 旋转所成的圆柱侧面面积为 S，则

$$V=V_1\pm V_2=\frac{2}{3}\pi\cdot AD^2\cdot AH$$

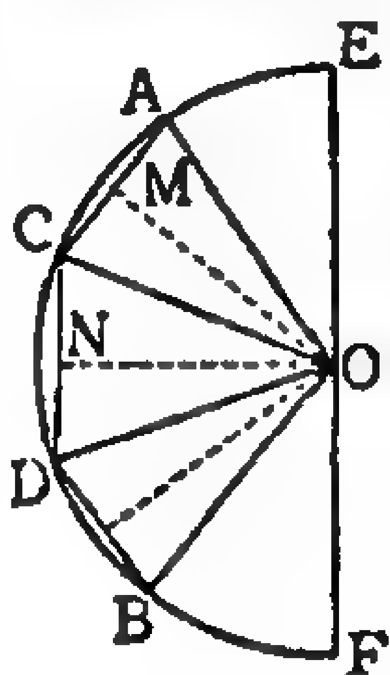
$$\pm\frac{2}{3}\pi\cdot AD^2\cdot AK$$

$$=\frac{2}{3}\pi\cdot AD^2\cdot(AH\pm AK)$$

$$=\frac{2}{3}\pi\cdot AD^2\cdot HK$$

$$=\frac{1}{3}(2\pi\cdot AD\cdot HK)\cdot AD=\frac{1}{3}S\cdot AD.$$

3201. 球扇形的体积等于它的底面积(球带面积)与球的半径的乘积的$\frac{1}{3}$.　[球扇形的体积]



解　半圆 $EABF$ 绕直径 EF 旋转则得球，扇形 OAB 绕直径 EF 旋转则得球扇形. 用 C、D、… 把弧 AB 分成 n 等分. 设 $\triangle OAC$、$\triangle OCD$、… 绕 EF 旋转所成旋转体的体积分别为 V_1、V_2、…、V_n，弦 AC、CD、… 绕 EF 旋转所成曲面的面积分别为 S_1、S_2、…、S_n，由点 O 向 AC、CD、… 引垂线，其垂足分别为 M、N、…. 则由上题知

$$V_1=\frac{1}{3}S_1\cdot OM,\ V_2=\frac{1}{3}S_2\cdot ON,\ \cdots,$$

由于 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\cdots$，所以 $OM=ON=\cdots$. 于是

$$V_1+V_2+\cdots+V_n$$
$$=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\cdots+S_n)\cdot OM.$$

当 n 无限增多时，AC、CD、…就无限地减小，OM 就无限地接近于半径 OA，$V_1+V_2+\cdots+V_n$ 就无限接近于扇形 OAB 绕 EF 旋转所成球扇形的体积，$S_1+S_2+\cdots+S_n$ 就无限地接近于弧 AB 绕 EF 旋转所成球带的面积. 设球的半径 OA 为 r，球扇形 OAB 的体积为 V，球带 AB 的面积为 S，则

$$V=\frac{1}{3}Sr.$$

注　设球带的高为 h，则 $S=2\pi rh$，从而

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2h.$$

3202. 半径为 r 的球的体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3$.

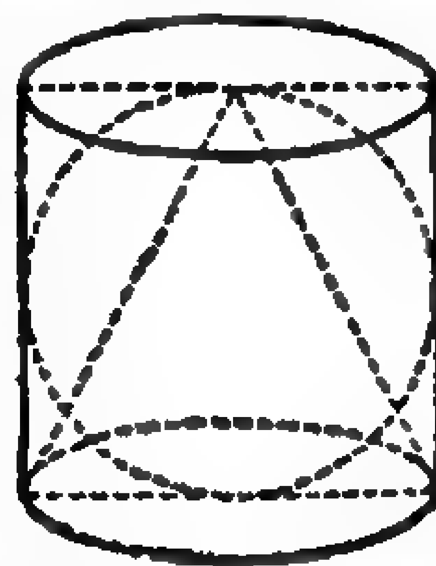
[球的体积]

解　球是由半圆绕其直径旋转而成的旋转体，半圆是扇形的一种特殊形式，因而球也可以看成是球扇形的一种特殊情况. 这样，球的体积就是球面面积与球半径乘积的 $\frac{1}{3}$. 今知半径为 r 的球面面积为 $4\pi r^2$，设半径为 r 的球的体积为 V，则

$$V=\frac{1}{3}\cdot 4\pi r^2\cdot r=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

3203. 一直圆柱外切于一个球，而直圆锥又内接于这个直圆柱. 设直圆锥的体积为 V_1，球的体积为 V_2，直圆柱的体积为 V_3，则

$$V_1:V_2:V_3=1:2:3.$$



解　设球的半径为 r，则直圆柱和直圆锥的底面半径也是 r，它们的高都是 $2r$，所以

$$V_1=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot 2r=\frac{2}{3}\pi r^3,$$

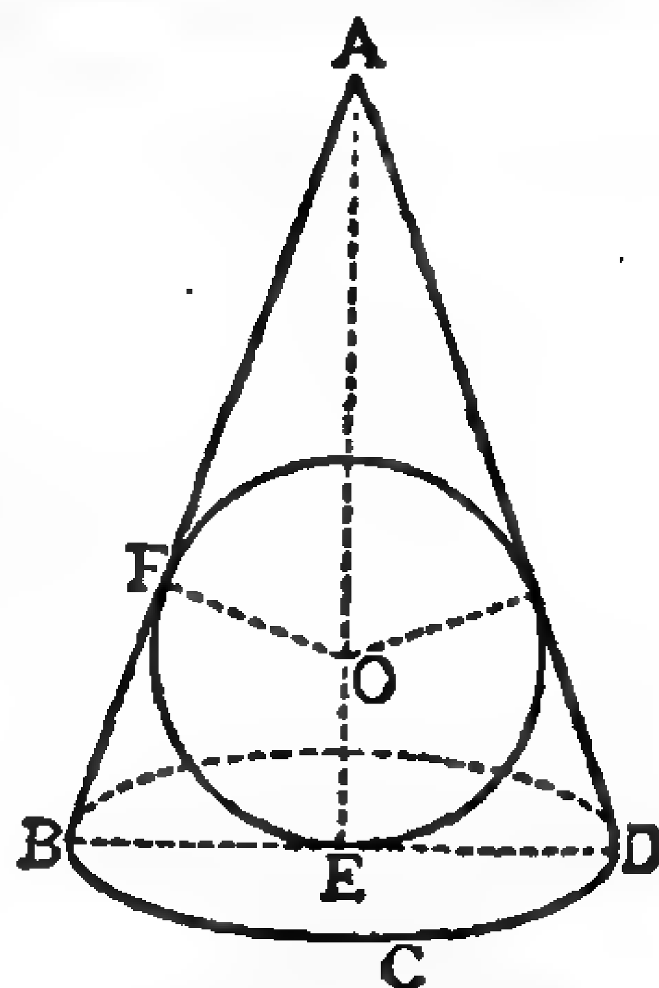
$$V_2=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$V_3=\pi r^2\cdot 2r=2\pi r^3,$$

$$\therefore\ V_1:V_2:V_3=\frac{2}{3}\pi r^3:\frac{4}{3}\pi r^3:2\pi r^3$$

$$=\frac{2}{3}:\frac{4}{3}:2=1:2:3.$$

3204. 设一球的外切直圆锥的高为该球直径的两倍，则球的外切直圆锥的全面积及体积分别为该球的面积和体积的两倍.



解　设球的球心为 O，半径为 r，则该球的外切直圆锥 A-BCD 的高为球的直径的两倍. 设高为 AE，则 AE 通过球心 O 和圆锥的底面圆心 E，且 $AE=4r$. 再取直圆锥侧面和球的切圆上的一点 F，则

$$\triangle AFO\backsim\triangle AEB,$$

$$\therefore\ \frac{FO}{EB}=\frac{AF}{AE},\quad 即\quad \frac{r}{EB}=\frac{AF}{4r},$$

$$\therefore\ EB=\frac{4r^2}{AF}.$$

又　$AF^2=AO^2-OF^2=(3r)^2-r^2=8r^2,$

$$\therefore\ AF=2\sqrt{2}r.$$

从而　$EB=\frac{4r^2}{2\sqrt{2}r}=\sqrt{2}r.$

又　$AB^2=AE^2+EB^2$

$$=(4r)^2+(\sqrt{2}r)^2=18r^2,$$

$$\therefore\ AB=\sqrt{18r^2}=3\sqrt{2}r.$$

设球 O 的表面积为 S，体积为 V. 直圆锥

$A\text{-}BCD$ 的表面积为 S'，体积为 V'，则

$$S=4\pi r^2,\ V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

根据问题 **3161**，知

$$S'=\pi\sqrt{2}r(3\sqrt{2}r+\sqrt{2}r)$$
$$=8\pi r^2=2S,$$
$$V'=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{2}r)^2\cdot 4r=\frac{8}{3}\pi r^3=2V.$$

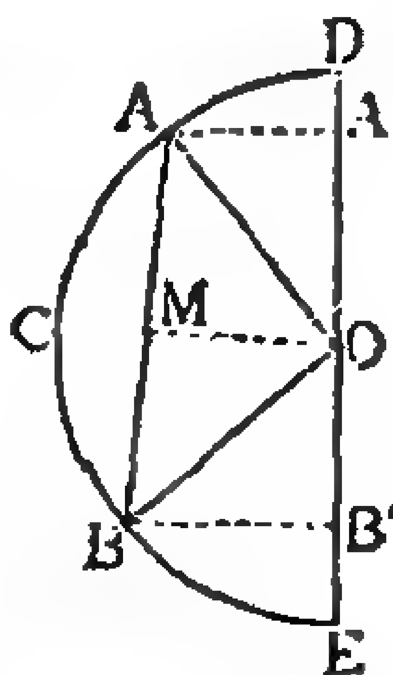
3205. 地球、月球、太阳的直径的比为 11:3:1232，问月球、太阳的表面积和体积分别是地球的表面积和体积的多少倍。

解　设地球、月球、太阳的表面积分别为 S、S_1、S_2，体积分别为 V、V_1、V_2。因为球的面积之比等于其直径的平方比，球的体积之比等于其直径的立方比，所以

$$\frac{S_1}{S}=\frac{3^2}{11^2}\approx 0.0744,$$
$$S_1\approx 0.0744S;$$
$$\frac{S_2}{S}=\frac{1232^2}{11^2}=12544,$$
$$S_2=12544S;$$
$$\frac{V_1}{V}=\frac{3^3}{11^3}\approx 0.0203,$$
$$V_1\approx 0.0203V;$$
$$\frac{V_2}{V}=\frac{1232^3}{11^3}=1404928,$$
$$V_2=1404928V.$$

3206. 弓形绕其直径旋转所得旋转体的体积等于以弓形的弦为底面半径、以弓形的弦在轴上的射影为高的直圆柱的体积的$\frac{1}{6}$。

解　设弓形 ACB 绕直径 DE 旋转所成的旋转体的体积为 V，则 V 等于扇形 OAB 绕 DE 旋转所成的球扇形的体积 V_1 减去 $\triangle OAB$ 绕 DE 旋转所成的旋转体的体积 V_2。又设球带 ACB 的面积为 S_1。由圆心 O 向弦 AB 引垂线，垂足为 M。弦 AB 绕 DE 旋转所成曲面的面积为 S_2，弦 AB 在轴 DE 上的射影为 $A'B'$，则



$$V_1=\frac{1}{3}S_1\cdot OA=\frac{1}{3}(2\pi\cdot OA\cdot A'B')\cdot OA$$
$$=\frac{2}{3}\pi\cdot OA^2\cdot A'B'\ \text{（问题 3201，3188），}$$
$$V_2=\frac{1}{3}S_2\cdot OM=\frac{1}{3}(2\pi\cdot OM\cdot A'B')\cdot OM$$
$$=\frac{2}{3}\pi\cdot OM^2\cdot A'B'$$

（问题 **3200**，**3188**），

$$\therefore\quad V=V_1-V_2=\frac{2}{3}\pi(OA^2-OM^2)\cdot A'B'$$
$$=\frac{2}{3}\pi\cdot AM^2\cdot A'B'$$
$$=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2\cdot A'B'$$
$$=\frac{1}{6}\pi\cdot AB^2\cdot A'B'.$$

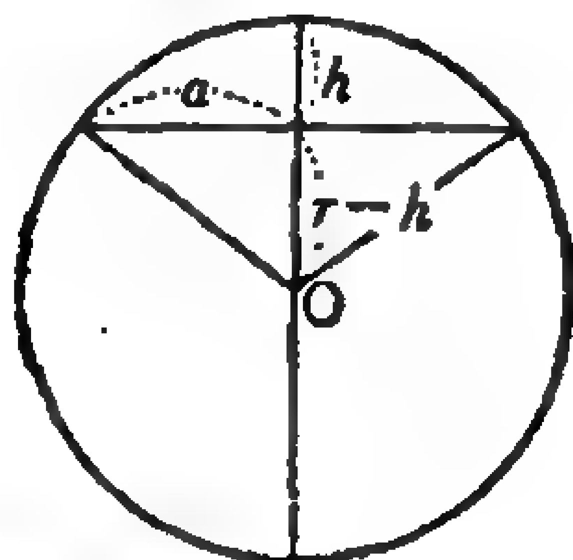
设底面半径为 AB，高为 $A'B'$ 的直圆柱的体积为 V'，则

$$V'=\pi\cdot AB^2\cdot A'B',$$
$$\therefore\quad V=\frac{1}{6}V'.$$

3207. 若在半径为 r 的球中，球缺的高为 h，底面半径为 a，则球缺的体积 V 可用下式表示。

$$V=\pi rh^2-\frac{1}{3}\pi h^3,$$
$$V=\frac{\pi a^2h}{2}+\frac{\pi h^3}{6}.\quad\text{［球缺的体积］}$$

解　设 $h<r$，则球缺的体积等于以其曲面为底的球扇形的体积减去以球缺的底面为底，以球心 O 为顶点的直圆锥(其高为 $r-h$)的体积所得的差。由问题 3201，得



$$V=\frac{2}{3}\pi r^2h-\frac{1}{3}\pi a^2(r-h),$$

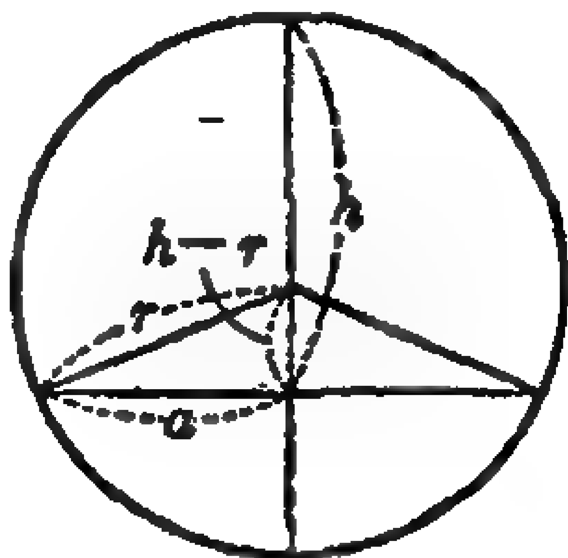
因为 $a^2=h(2r-h)$，

$$\therefore\quad V=\frac{2}{3}\pi r^2h-\frac{1}{3}\pi h(2r-h)(r-h)$$
$$=\frac{1}{3}\pi h[2r^2-(2r-h)(r-h)]$$
$$=\frac{1}{3}\pi h(3rh-h^2)=\pi rh^2-\frac{1}{3}\pi h^3.$$

由 $a^2=h(2r-h)$，知 $rh=\frac{a^2+h^2}{2}$，

$$\therefore\quad V=\pi\cdot\frac{a^2+h^2}{2}\cdot h-\frac{1}{3}\pi h^3$$
$$=\frac{\pi a^2h}{2}+\frac{\pi h^3}{6}.$$

其次，设 $h>r$，则球缺的体积等于以球缺的曲面为底的球扇形体积加上以球缺的底面为底面，以球心 O 为顶点的圆锥（其高为 $h-r$）的体积之和，所以



$$V=\frac{2}{3}\pi r^2h+\frac{1}{3}\pi a^2(h-r),$$

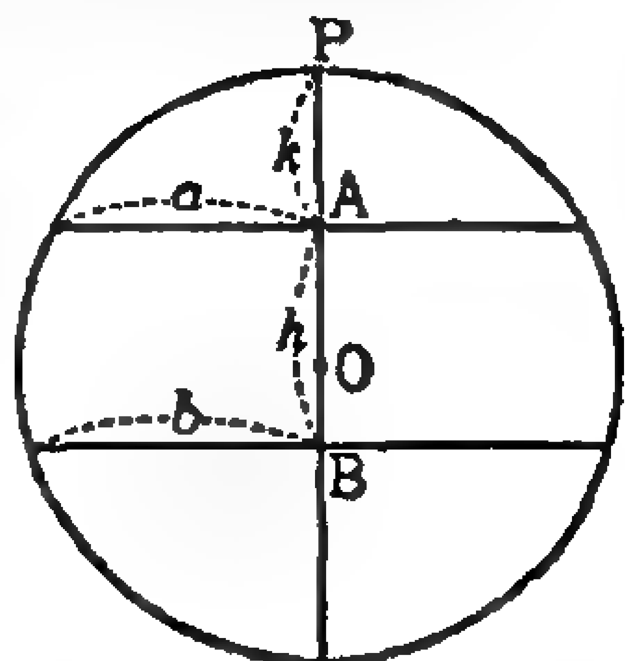
此式变形结果和前面的相同。

3208. 把一个球用互相平行的两平面截开，设在两平面之间的球的部分（叫做球台）的两底半径分别为 a、b，高为 h，则其体积可用下式表示：

$$V=\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)h+\frac{1}{6}\pi h^3.$$

［球台的体积］

解 设球台的上底圆心为 A，下底的圆心为 B，把 AB 沿 A 的方向延长与球相交于点 P。如取



$$PA=k,$$

则球台的体积等于以 PB 即 $h+k$ 为高的球缺的体积减去以 PA 即 k 为高的球缺的体积所得的差。由上题得

$$V=\left[\frac{\pi b^2(h+k)}{2}+\frac{\pi(h+k)^3}{6}\right]$$
$$-\left(\frac{\pi a^2k}{2}+\frac{\pi k^3}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\pi b^2h+\frac{1}{6}\pi h^3$$
$$+\frac{1}{2}\pi k(b^2-a^2+h^2+hk).$$

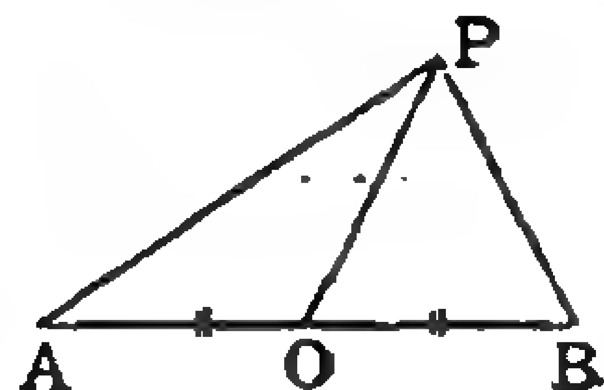
设球的半径为 r，则

$$b^2=(h+k)(2r-h-k),\quad a^2=k(2r-k).$$
$$\therefore\quad b^2-a^2$$
$$=(h+k)(2r-h-k)-k(2r-k)$$
$$=2rh-h^2-2hk,$$
$$b^2-a^2+h^2+hk=2rh-kh=h(2r-k).$$

从而

$$V=\frac{1}{2}\pi b^2h+\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi k\cdot h(2r-k)$$
$$=\frac{1}{2}\pi b^2h+\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi[k(2r-k)]h$$
$$=\frac{1}{2}\pi b^2h+\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi a^2h$$
$$=\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)h+\frac{1}{6}\pi h^3.$$

3209. 求到空间两定点 A、B 的距离的平方和为一定值的点的轨迹。



解 设 A、B 为空间的两个定点，线段 AB 的中点为 O，P 为到 A、B 两点距离的平方和为定值 $2k^2$ 的任意一点，则

$$AP^2+BP^2=2(AO^2+OP^2)=2k^2.$$

如取 $AB=2a$，则

$$(a^2+OP^2)=k^2,$$
$$\therefore\quad OP=\sqrt{k^2-a^2}\quad(k>a).$$

因此 P 在以线段 AB 的中点为球心，以 $\sqrt{k^2-a^2}$ 为半径的球面上。

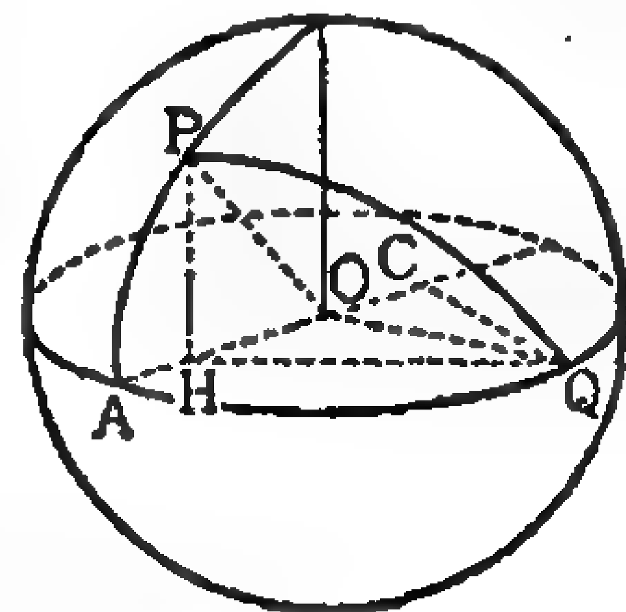
反之，设点 P 为该球面上的任意一点，则

$$AP^2+BP^2=2(AO^2+OP^2)$$
$$=2a^2+2(k^2-a^2)=2k^2.$$

因此该球面上的点都满足题设条件。

综上所述，如 $k>a$，所求的轨迹是以线段 AB 的中点为球心，$\sqrt{k^2-a^2}$ 为半径的球面。如 $k=a$，则所求轨迹是线段 AB 的中点 O。如 $k<a$，则无轨迹。

3210. 把地球看作一个球，其大圆周长为 40000 km。已知经度 0°、北纬 45° 的点 P 和东经 135°、纬度 0° 的点 Q，求点 P、Q 在球面上的距离（即连接 P、Q 所成的弧长，但须小于大圆的周长）。



解 设地球的球心为 O，经度、纬度都是 0° 的点为 A，从点 P 向赤道平面 AOQ 引垂线，垂足为 H 且在 OA 上，再从点 Q 向 OA 引垂线，垂足为 C，则

$$\angle POA=45°,$$

$\angle QOC=180^\circ-\angle AOQ=180^\circ-135^\circ$
$=45^\circ$.

设地球的半径为 r，则

$$PH=HO=\frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$OC=CQ=\frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore\ PQ^2=PH^2+HQ^2=PH^2+HC^2+CQ^2$$
$$=\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\times2\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2=3r^2.$$

设 $\angle POQ=\theta$，在 $\triangle OPQ$ 中应用余弦定理，

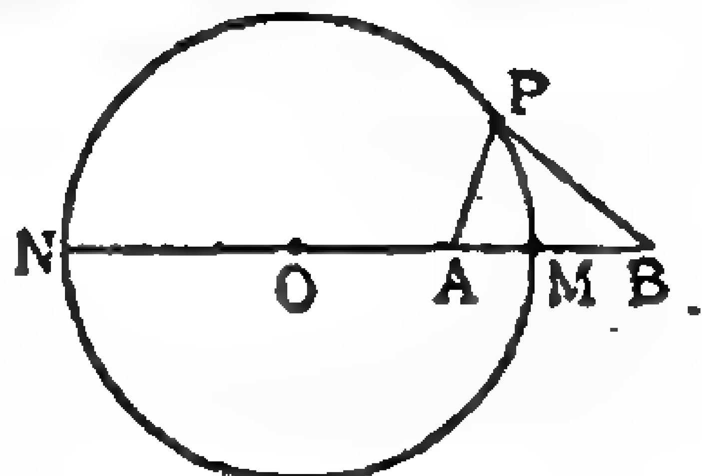
$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2\cdot OP\cdot OQ\cos\theta.$$

即 $$3r^2=r^2+r^2-2r^2\cos\theta,$$

$$\therefore\ \cos\theta=-\frac{1}{2},\quad \theta=120^\circ.$$

从而 $$\widehat{PQ}=2\pi r\times\frac{1}{3}=40000\times\frac{1}{3}\approx13000(\text{km}).$$

3211. 在空间相距为 10 m 的两点 A、B，分别安装 200 瓦和 450 瓦的电灯各一盏，问从两光源 A、B 发出的光照强度相等的点在什么曲面上？该曲面所围的空间部分的体积是多少？(已知电灯光源的瓦数之比与光照强度相等的点到光源距离的平方成反比)



解　设两光源发出的光照强度相等的点为 P，$AP=d$，$BP=d'$，则

$$k\cdot\frac{200}{d^2}=k\cdot\frac{450}{d'^2}\quad(k\text{ 为比例常数}),$$

$$\therefore\ \frac{d^2}{d'^2}=\frac{4}{9},\quad\text{即}\quad d:d'=2:3.$$

由于到 A、B 的距离之比为 2:3 的点都在以分 AB 为 2:3 的内分点 M 和外分点 N 为直径端点的球面(阿波罗尼斯球面)上，

$$\frac{AM}{BM}=\frac{2}{3}=\frac{4}{6},$$

$$\therefore\ \frac{AM}{AB}=\frac{4}{10},\quad AM=4.$$

又 $$\frac{AN}{BN}=\frac{2}{3},\ \therefore\ \frac{AN}{AB}=\frac{2}{1}=\frac{20}{10},$$

$$AN=20,\quad\text{从而}\quad MN=24.$$

设 MN 的中点为 O，则 $AO=8$. 所以点 P 在以 BA 延长线上 8 m 处的点 O 为球心，半径 12 m 的球面上.

反之，设 P 为上述球面上的任意一点，则

$$\frac{AP}{BP}=\frac{2}{3},$$

$$\therefore\ \frac{AP^2}{BP^2}=\frac{4}{9}=\frac{200}{450}.$$

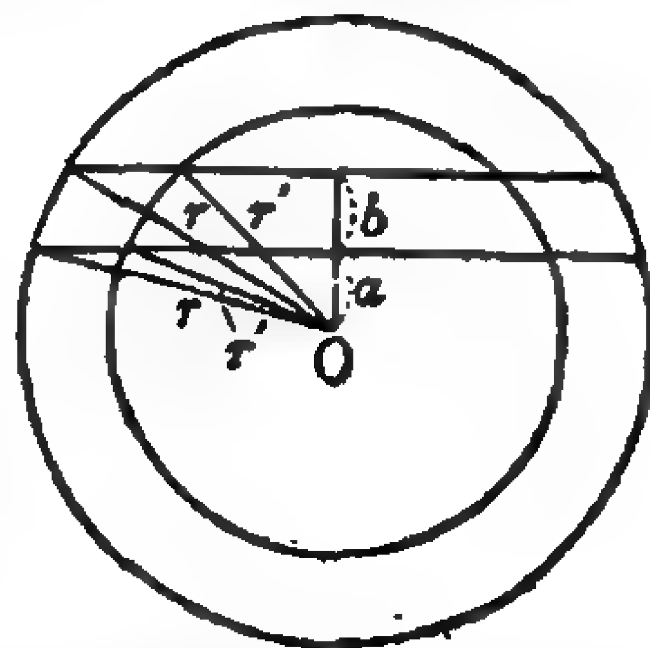
$$\therefore\ k\cdot\frac{200}{AP^2}=k\cdot\frac{450}{BP^2}.$$

因此，上述球面上的任意点都是由 A、B 两光源发出的光照强度相等的点.

综上所述，所求轨迹是以分线段 AB 为 2:3 的内分点 M、外分点 N 所连线段的中点 O 为球心，半径 12 m 的球面. 故其体积为

$$\frac{4}{3}\pi\cdot12^3=2304\pi\approx7235(\text{m}^3).$$

3212. 已知两个半径分别为 r、$r'(r>r')$ 的同心球，被在球心的同侧，且到球心的距离分别为 a 和 $a+b$ 的两个平面所截，求在两平面之间且在两球之间的部分的体积.



解　设所求的体积为 V，则 V 等于以 r 为半径的球台的体积(问题 3208) V_1 减去以 r' 为半径的球台的体积 V_2 所得之差. 今知半径为 r 的球台的两底半径分别为

$$\sqrt{r^2-(a+b)^2}\quad\text{和}\quad\sqrt{r^2-a^2},$$

高为 b；半径为 r' 的球台的两底半径分别为 $\sqrt{r'^2-(a+b)^2}$ 和 $\sqrt{r'^2-a^2}$，高为 b. 于是

$$V_1=\frac{1}{2}\pi[r^2-(a+b)^2+r^2-a^2]b+\frac{1}{6}\pi b^3,$$

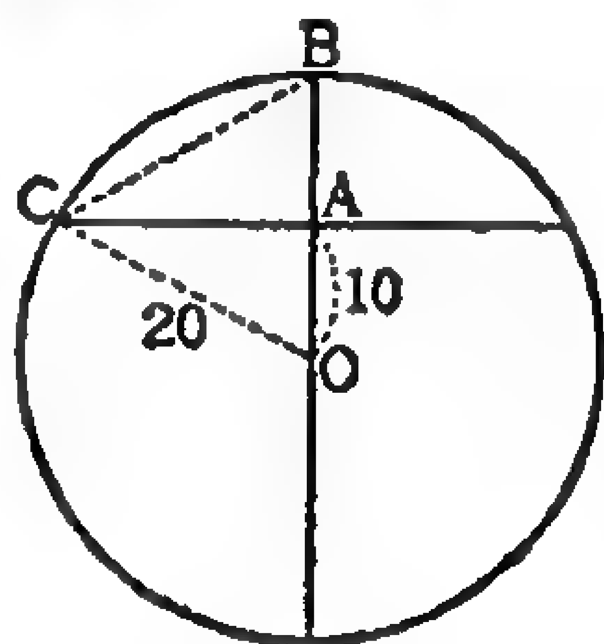
$$V_2=\frac{1}{2}\pi[r'^2-(a+b)^2+r'^2-a^2]b+\frac{1}{6}\pi b^3,$$

$$\therefore\ V=V_1-V_2=\frac{1}{2}\pi(2r^2-2r'^2)b=\pi(r^2-r'^2)b.$$

3213. 已知半径为 20 cm 的球，被距球心

10 cm 的平面所截，试求所截成的劣球缺的全面积和体积。

解　如图中的劣球缺。由问题 **3192**，可知其曲面积为 $\pi\cdot BC^2$，由问题 **3207**，可知其体积是 $\pi r\cdot AB^2-\frac{1}{3}\pi\cdot AB^3$。



这里，

$$BC^2=AB^2+AC^2=AB^2+OC^2-AO^2=400,$$

$$AC=10\sqrt{3}.$$

所以全表面积 $=\pi\cdot400+\pi\cdot300=700\pi(\text{cm}^2)$，

$$\text{体积}=\pi\times20\times10^2-\frac{1}{3}\pi\cdot10^3=\frac{5000}{3}\pi(\text{cm}^3).$$

3214. 球面棱锥的体积等于其底面积和球的半径的乘积的 $\frac{1}{3}$。

解　在球面多棱锥内，作以顶点在球面棱锥的底面上的多边形为底面，以球中心为顶点的 n 个棱锥，并且使这 n 个棱锥恰好填满这个球面棱锥的以球中心为顶点的多面角。设这 n 个棱锥的底面积分别是 S_1、S_2、…、S_n，高分别是 h_1、h_2、…、h_n，体积分别是 V_1、V_2、…、V_n，则

$$V_1+V_2+\cdots+V_n=\frac{1}{3}S_1h_1+\frac{1}{3}S_2h_2+\cdots+\frac{1}{3}S_nh_n.$$

当 n 无限增大时，S_1、S_2、…、S_n 都无限地变小，h_1、h_2、…、h_n 就无限接近于球的半径 r，这时

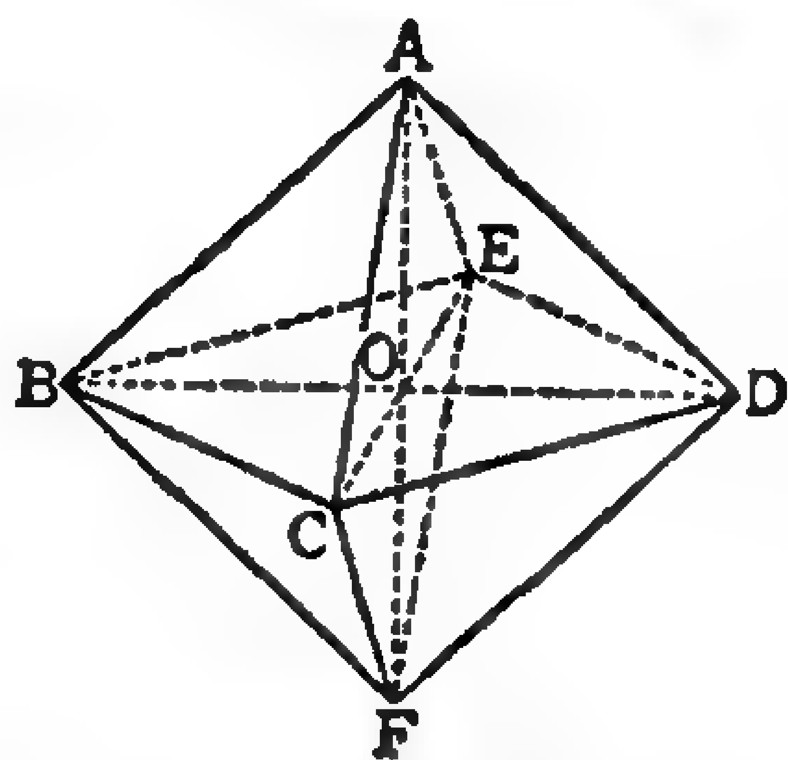
$$V_1+V_2+\cdots+V_n=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\cdots+S_n)r.$$

又知当 n 无限增大，S_1、S_2、…、S_n 无限地变小时，$V_1+V_2+\cdots+V_n$ 无限接近于球面棱锥的体积，$S_1+S_2+\cdots+S_n$ 无限接近于球面棱锥的底面积。因此，如设球面棱锥的体积为 V，底面积为 S，则

$$V=\frac{1}{3}Sr.$$

3215. 求棱长为 a 的正八面体的外接球的体积。

解　如图，棱长为 a 的正八面体是 $ABCDEF$，其中三个四边形 $ABFD$、$ACFE$、$BCDE$ 都是边长为 a 的正方形。



三条对角线 AF、BD、CE 相交于点 O，则 O 到该正八面体各顶点的距离都相等。因此点 O 是该正八面体的外接球的球心，AF 为其直径。

$$AF^2=AB^2+BF^2=a^2+a^2=2a^2,$$

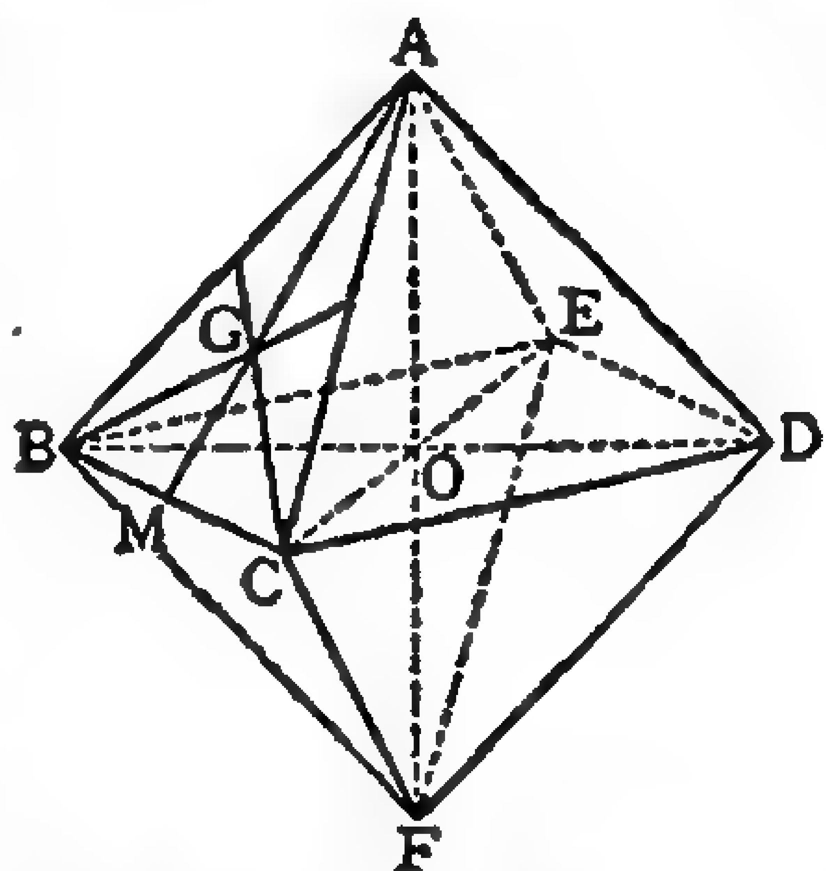
$$\therefore\quad AF=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a.$$

从而所求外接球的体积为

$$V=\frac{1}{6}\pi(\sqrt{2}a)^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3.$$

3216. 求棱长为 a 的正八面体的内切球的体积。

解　如图，棱长为 a 的正八面体为 $ABCDEF$，O 为其中心(即对角线 AF、BD、CE 的交点)，则点 O 到各顶点的距离相等(参照上题)。



从点 O 向平面 ABC 引垂线 OG，则因 $OA=OB=OC$ 可知 G 是 $\triangle ABC$ 的外心。又因 $\triangle ABC$ 是正三角形，其重心和外心是同一点，从而 G 也是 $\triangle ABC$ 的重心。设边 BC 的中点为 M，则

$$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}a,$$

$$\therefore\quad AG=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}a=\frac{1}{3}\sqrt{3}a.$$

又由 $OA^2+OB^2=AB^2$，知 $2\cdot OA^2=a^2$，

$$\therefore\quad OA^2=\frac{a^2}{2},$$

$$\therefore \quad OG^2=OA^2-AG^2=\frac{a^2}{2}-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{6}a^2,$$
$$\therefore \quad OG=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$

同理，从O向各面所作的垂线长都是$\frac{a}{\sqrt{6}}$，所以正八面体的内切球就是以O为球心，半径为$\frac{a}{\sqrt{6}}$的球。其体积V为

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^3=\frac{4}{3\cdot 6\sqrt{6}}\pi a^3$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{27}\pi a^3.$$

3217. 用一平面把半径为r的球截成两个部分。如果其中优球缺的曲面面积是劣球缺的曲面面积和球面面积的比例中项，求球心到这个平面的距离。

解　用一平面把半径为r的球截开，设截口圆周上的一点为A，截口圆的圆心为D，球的球心为O，过点D的直径为BC（如图），球心到截面的距离为x，则因$\triangle ABC$是直角三角形，从而

$$AB^2=BC\cdot BD,\ AC^2=BC\cdot CD.$$

又　$BD=r+x,\ CD=r-x,\ BC=2r,$

$\therefore\ AB^2=2r(r+x),\ AC^2=2r(r-x).$

设优球缺的曲面面积为S_1，劣球缺的曲面面积为S_2，球面面积为S，则

$S_1=\pi\cdot AB^2=2\pi r(r+x)$　（问题**3192**），

$S_2=\pi\cdot AC^2=2\pi r(r-x),$

$S=4\pi r^2.$

由题设$S_2:S_1=S_1:S$，可知

$$2\pi r(r-x):2\pi r(r+x)=2\pi r(r+x):4\pi r^2.$$

即　$(r-x):(r+x)=(r+x):2r,$

$$(r+x)^2=2r(r-x).$$
$$\therefore\ x^2+4rx-r^2=0.$$

由于$x>0$，所以

$$x=-2r+\sqrt{(2r)^2+r^2}=(\sqrt{5}-2)r.$$

4. 杂题

3218. 把正六边形$ABCDEF$绕对角线AD旋转，则线段BC旋转而成的曲面面积是线段AB和CD分别旋转而成的两个曲面面积之和。

解　设AD的中点为O，则点O就是正六边形$ABCDEF$的中心，它到边AB、BC、CD的距离OG、OH、OK都是相等的。再设点B、C在AD上的射影分别为B'、C'，则因$\triangle OAB$是正三角形，点B'就是OA的中点。又$\triangle OCD$是正三角形，点C'就是OD的中点。设线段AB、BC、CD旋转而成的曲面面积分别记为面积AB、面积BC、面积CD，则

面积$AB=2\pi\cdot OG\cdot AB'$,

面积$BC=2\pi\cdot OH\cdot B'C'$,

面积$CD=2\pi\cdot OK\cdot C'D$（参照问题**3187**），

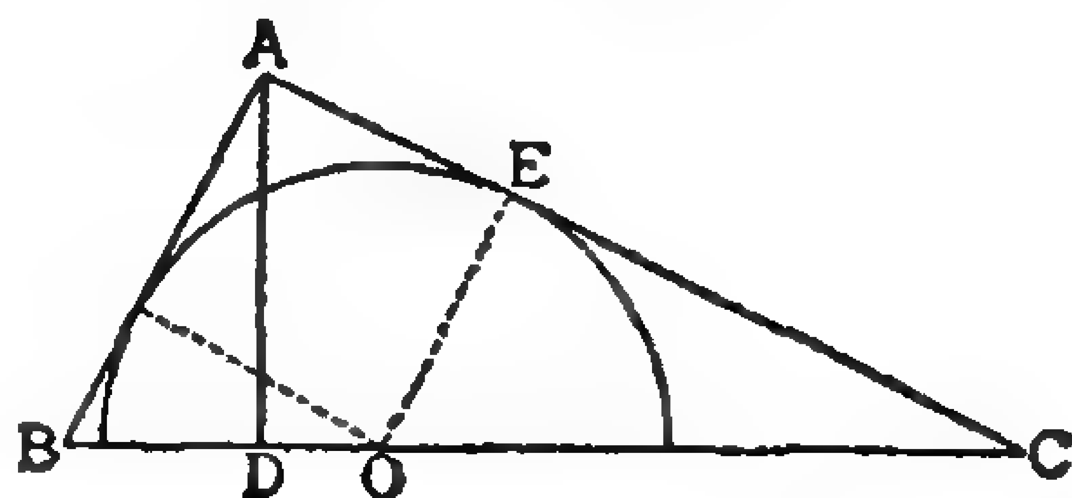
$\therefore$　面积$BC=2\pi\cdot OH\cdot(OB'+OC')$

$=2\pi\cdot OH\cdot OB'+2\pi\cdot OH\cdot OC'$

$=2\pi\cdot OG\cdot AB'+2\pi\cdot OK\cdot C'D$

$=$面积$AB+$面积CD.

3219. 已知以A为直角的直角三角形ABC的两边AB、AC的长分别为8cm、15cm。如果把这个三角形绕斜边BC旋转，试求所成旋转体的体积。一个半圆切于两边AB和AC，且圆心在BC上，试求这个半圆绕BC旋转所成旋转体的体积。



解　$BC^2=AB^2+AC^2=8^2+15^2=289,$

$$\therefore\ BC=\sqrt{289}=17.$$

设由A向BC所引的垂线，其垂足为D，则

$$BC\cdot AD=AB\cdot AC.$$

即　$17\cdot AD=8\times 15,$

$$\therefore\ AD=\frac{120}{17}.$$

设$\triangle ABC$绕BC旋转所成旋转体的体积为$V_1\text{cm}^3$，线段AC绕BC旋转所成曲面的面积用面积AC表示，则

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\text{面积 }AC\cdot AB\quad(\text{问题 }\mathbf{3200})$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot(AD\cdot AC)\cdot AB\quad(\text{问题 }\mathbf{3161})$$
$$=\frac{1}{3}\pi\times\frac{120}{7}\times15\times8=\frac{14400}{51}\pi$$
$$\approx\frac{14400}{51}\times3.1416\approx887.04(\text{cm}^3).$$

其次，设内切于AB和AC，且圆心在BC上的圆的圆心为O，这个圆和AC的切点为E，则$OE\parallel BA$，$AE:EC=BO:OC$。又AO是$\angle A$的平分线，$BO:OC=AB:AC$。

$$\therefore\quad AE:EC=AB:AC=8:15,$$
$$AE=\frac{8}{8+15}\cdot AC=\frac{8}{23}\times15=\frac{120}{23}.$$

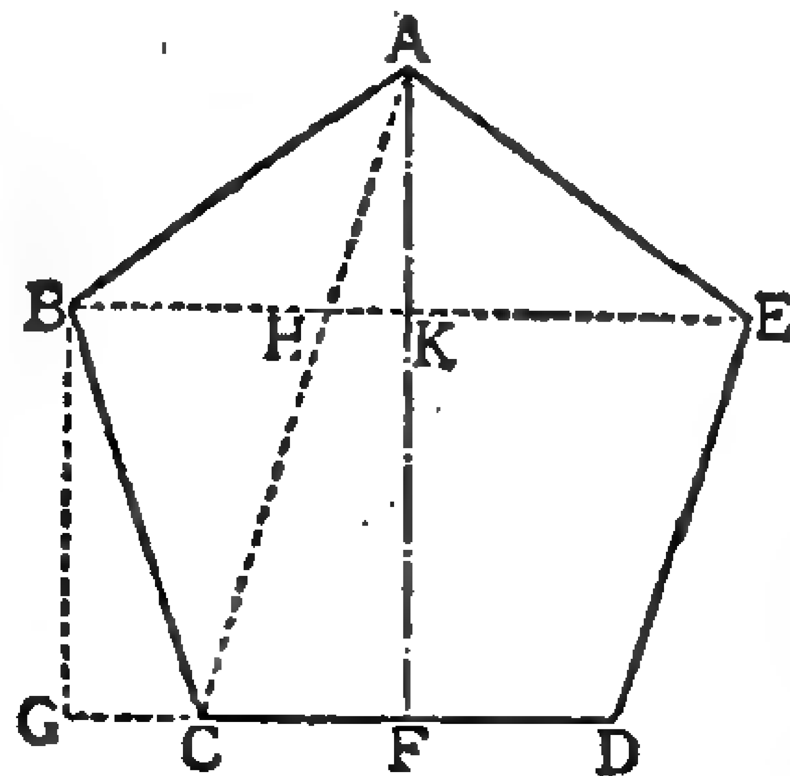
因为$\angle OAE$是45°，$\angle AOE$也是45°，所以$OE=AE$，即

$$OE=\frac{120}{23}.$$

由此可得球O的体积$V_2\text{cm}^3$为

$$V_2=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{120}{23}\right)^3=\frac{6912000}{36501}\pi$$
$$\approx\frac{6912000}{36501}\times3.1416\approx594.91(\text{cm}^3).$$

3220. 边长为a的正五边形以其一边为轴旋转，求这个旋转体的体积。



解　如图，设边长为a的正五边形绕一边CD旋转所成的旋转体的体积为V。现从A、B向CD引垂线，其垂足分别为F、G。对角线AC和BE的交点为H，AF和BE的交点为K，则由$\angle HAB=\angle HBA=36°$，可知

$$HA=HB,\ HC=HE.$$

又由　$\angle EAH=\angle EHA=72°$

可知　$HE=AE.$

所以，　$AE=AE=HE=HC=a.$

设　$HA=HB=x,$

则　$BE=x+a,\ \angle AEB=36°,$

所以　$\triangle HAB\backsim\triangle ABE.$

$$\therefore\quad\frac{HA}{AB}=\frac{AB}{BE},\quad\text{即}\quad\frac{x}{a}=\frac{a}{x+a},$$
$$x(x+a)=a^2,\ x^2+ax-a^2=0,$$
$$\therefore\quad x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$
$$(\because\quad x>0).$$

从而

$$AC=BE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a+a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a,$$
$$AF^2=AC^2-CF^2$$
$$=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}a\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$=\frac{5+2\sqrt{5}}{4}a^2,$$
$$\therefore\quad AF=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a.$$

又由$BE\parallel CD$可知

$$\frac{AK}{KF}=\frac{AH}{HC}=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$
$$\therefore\quad KF=\frac{2}{(\sqrt{5}-1)+2}\cdot AF$$
$$=\frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a$$
$$=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}a$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)a.$$

设四边形$ABCF$绕CD旋转所成旋转体的体积为V_1，梯形$GFAB$绕CD旋转所成旋转体的体积为V_2，直角三角形GCB绕CD旋转所成旋转体的体积为V_3，则所求的体积V是V_1的两倍，而V_1又是V_2减去V_3所得的差。由于

$$GF=BK=\frac{1}{2}BE=\frac{\sqrt{5}+1}{4}a,$$
$$GC=GF-CF=\frac{\sqrt{5}+1}{4}a-\frac{a}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}a,$$

由问题**3172**，知

$$V_2=\frac{1}{3}\pi(AF^2+AF\cdot BG+BG^2)\cdot GF$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left[\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a\right)^2\right.$$

$$+\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a$$

$$\times\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)a}{4}$$

$$\left.+\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)a}{4}\right)^2\right]$$

$$\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}a$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{4}+\frac{5+3\sqrt{5}}{8}\right.$$

$$\left.+\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\right)\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pi a^3$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5+2\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pi a^3$$

$$=\frac{15+7\sqrt{5}}{24}\pi a^3.$$

又由问题 **3159**，知

$$V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot BG^2\cdot GC$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{5}-1)}{4}a\right]^2$$

$$\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}a$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pi a^3$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{24}\pi a^3,$$

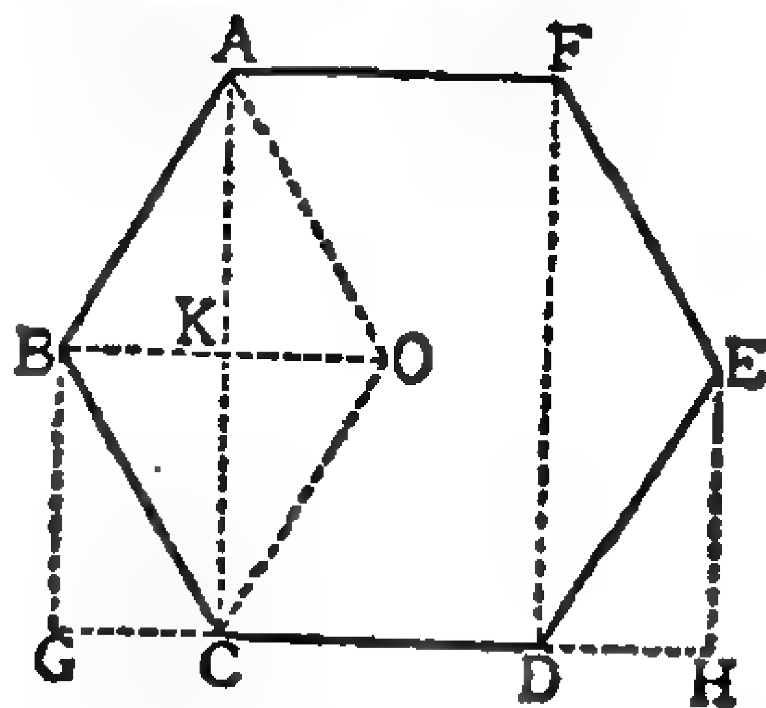
$$V=2V_1=2(V_2-V_3)$$

$$=2\left(\frac{15+7\sqrt{5}}{24}\pi a^3-\frac{\sqrt{5}}{24}\pi a^3\right)$$

$$=\frac{5+2\sqrt{5}}{4}\pi a^3.$$

3221. 求边长为 a 的正六边形以其一边为轴旋转所成旋转体的体积.

解 设边长为 a 的正六边形 $ABCDEF$ 以其一边 CD 为轴旋转所成旋转体的体积为 V，从 B 及 E 向 CD 引垂线，其垂足分别为 G、H. 连结 AC、FD，则 AC、FD 都垂直于 CD. 设这个正六边形的中心为 O，AC 和 OB 的交点为 K，则四边形 $ABCO$ 是菱形，AC 和 OB 互相垂直平分，又因 $\triangle ABO$ 是正三角形，所以



$$BO=AB=a,\quad\therefore\quad BK=\frac{a}{2}.$$

从而 $\quad GC=BK,\ \therefore\ GC=\frac{a}{2}.$

又 $\quad AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\therefore\quad AC=2\cdot AK=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{3}a.$$

又 $\quad BG=KC=AK,\ \therefore\ BG=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$

同理，$DH=\frac{a}{2}$，$FD=\sqrt{3}a$，$EH=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$

设矩形 $ACDF$ 以 CD 为轴旋转所成旋转体的体积用体积 $ACDF$ 表示，$\triangle ABC$ 以 CD 为轴旋转所成旋转体的体积用体积 ABC 表示，余类推，则所求体积为

$$V=\text{体积}\,ACDF+\text{体积}\,ABC+\text{体积}\,DEF.$$

$$\text{体积}\,ACDF=\pi\cdot AC^2\cdot CD=\pi(\sqrt{3}a)^2\cdot a=3\pi a^3,$$

$$\text{体积}\,ABC=\text{体积}\,GCAB-\text{体积}\,GCB$$

$$=\frac{1}{3}\pi(BG^2+BG\cdot AC+AC^2)\cdot GC$$

$$-\frac{1}{3}\pi\cdot BG^2\cdot GC$$

$$=\frac{1}{3}\pi(BG\cdot AC+AC^2)\cdot GC$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\sqrt{3}a+(\sqrt{3}a)^2\right]\cdot\frac{a}{2}$$

$$=\frac{3}{4}\pi a^3$$ （问题 **3172, 3159**），

体积 DEF＝体积 ABC.

$$\therefore\quad V=3\pi a^3+2\times\frac{3}{4}\pi a^3=\frac{a}{2}\pi a^3.$$

3222. 已知边长为 a 的正六边形 $ABCDEF$ 和通过 D 且垂直于 AD 的直线 XY，求这个正六边形以 XY 为轴旋转所成旋转体的体积。

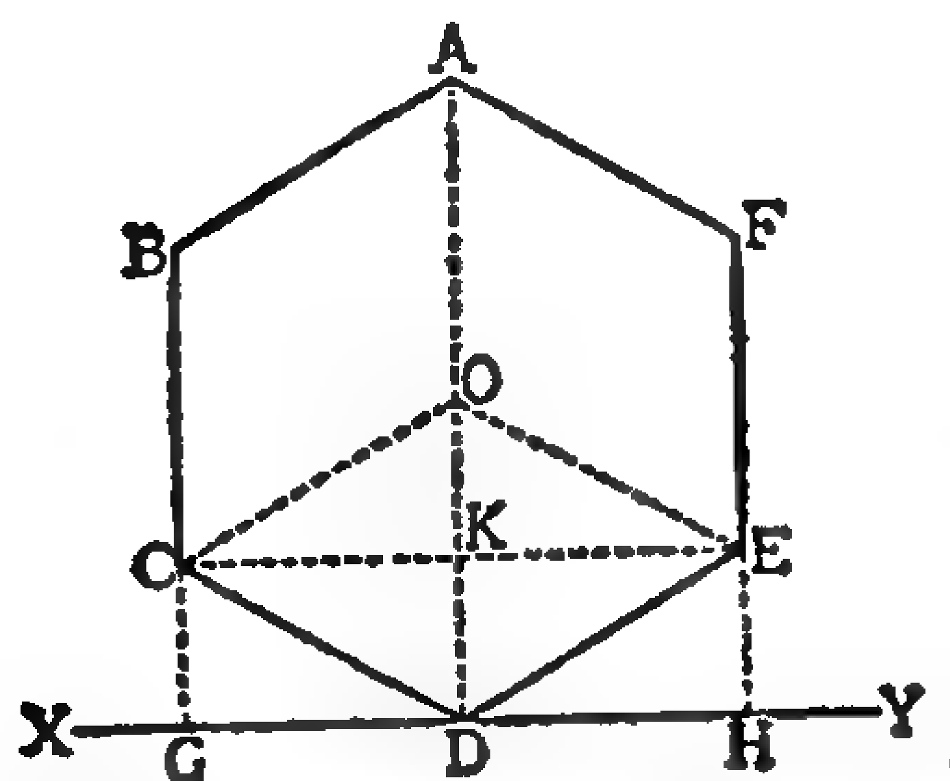
解 作 BC 的延长线交 XY 于 G，FE 的延长线交 XY 于 H，则 BG、FH 都垂直于 XY。设 AD 的中点为 O，OD 和 CE 相交于 K，则因四边形 $OCDE$ 是菱形，知 OD 和 CE 互相垂直平分。又因 $\triangle OCD$ 是正三角形，故有

$$KD=\frac{1}{2}a,\ CK=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\therefore\quad CG=EH=\frac{a}{2},$$

$$BG=FH=a+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2},$$

$$AD=2a,\quad GD=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$



设正六边形 $ABCDEF$ 绕 XY 旋转所成旋转体的体积为 V，并把四边形 $ABCD$ 绕 XY 旋转所成旋转体的体积用体积 $ABCD$ 表示，则

V＝体积 $ABCD$＋体积 $AFED$

＝2·体积 $ABCD$.

体积 $ABCD$＝体积 $ABGD$－体积 CGD

(参照问题 **3159, 3172**)

$$=\frac{1}{3}\pi(BG^2+BG\cdot AD+AD^2)\cdot GD$$

$$-\frac{1}{3}\pi\cdot CG^2\cdot GD$$

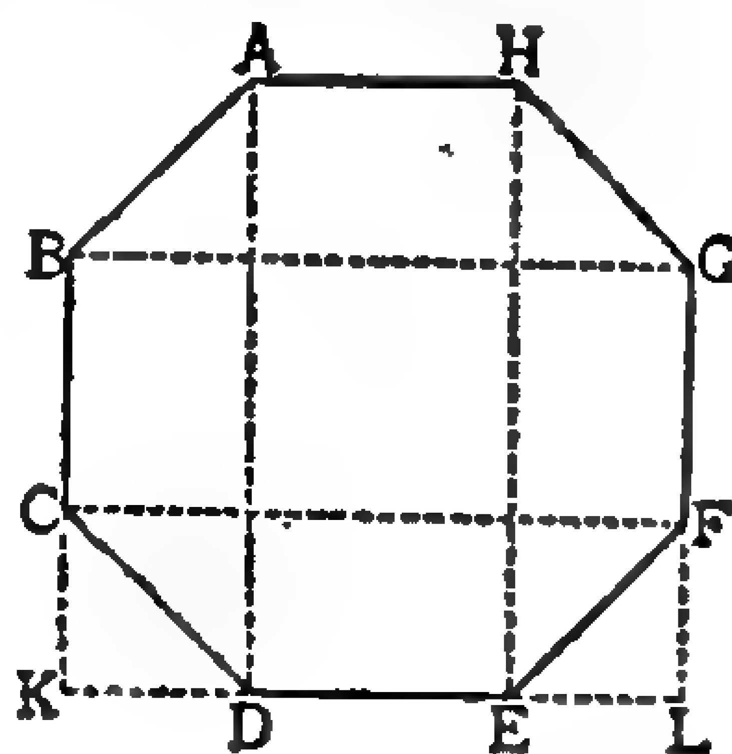
$$=\frac{1}{3}\pi\left[\left(\frac{3}{2}a\right)^2+\left(\frac{3}{2}a\right)(2a)+(2a)^2\right]$$

$$\times\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi a^3,$$

$$\therefore\quad V=2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi a^3=3\sqrt{3}\pi a^3.$$

3223. 求边长为 a 的正八边形以其一边为轴旋转所成旋转体的体积。



解 设正八边形 $ABCDEFGH$ 以边 DE 为轴旋转所成旋转体的体积为 V。延长 BC 交 DE 于点 K，延长 GF 交 DE 于点 L，连结 AD、HE，则 BK、AD、HE、GL 都垂直于 DE。CK、KD 都是以 a 为对角线长的正方形的边，所以

$$CK=KD=\frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$BK=CK+BC=\frac{a}{\sqrt{2}}+a=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}a,$$

且 $$AD=BC+2CK=a+2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$=(1+\sqrt{2})a.$$

若把四边形 $ABCD$ 绕 DE 旋转所成旋转体的体积用体积 $ABCD$ 表示，则

V＝体积 $ADEH$＋体积 $ABCD$

＋体积 $HGFE$

＝体积 $ADEH$＋2·体积 $ABCD$.

体积 $ADEH=\pi\cdot AD^2\cdot DE$

$=\pi[(1+\sqrt{2})a]^2\cdot a=(3+2\sqrt{2})\pi a^3$,

体积 $ABCD$＝体积 $ABKD$－体积 CKD

$$=\frac{1}{3}\pi(BK^2+BK\cdot AD+AD^2)\cdot KD$$

$$-\frac{1}{3}\pi\cdot CK^2\cdot KD$$

(参照问题 **3172, 3159**)

$$=\frac{1}{3}\pi[(BK^2-CK^2)$$

$$+BK\cdot AD+AD^2]\cdot KD$$

$$=\frac{1}{3}\pi[(BK-CK)(BK+CK)$$

$$+BK\cdot AD+AD^2]\cdot KD$$

$$=\frac{1}{3}\pi(BC\cdot AD+BK\cdot AD+AD^2)\cdot KD$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left\{a\cdot(1+\sqrt{2})a+\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}a\right.$$

$$\left.\times(1+\sqrt{2})a+[(1+\sqrt{2})a]^2\right\}$$

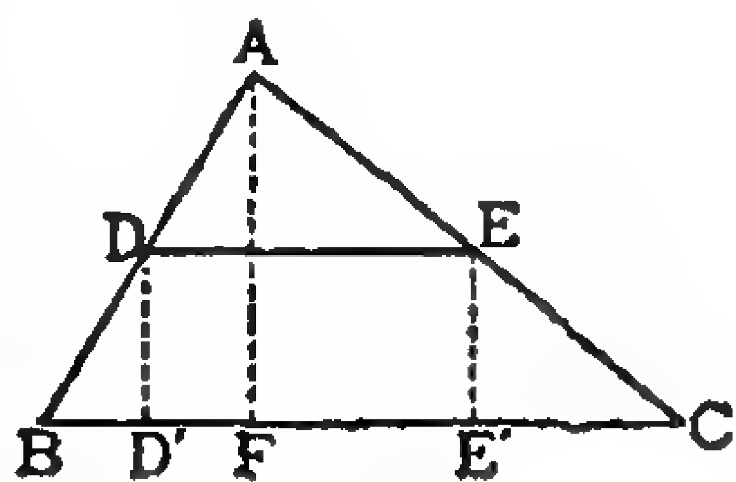
$$\times\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi a^3,$$

$$\therefore\quad V=(3+2\sqrt{2})\pi a^3$$

$$+2\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi a^3$$

$$=2(3+2\sqrt{2})\pi a^3.$$

3224. 已知D、E分别是$\triangle ABC$的两边AB、AC的中点，如把$\triangle ABC$以BC为轴旋转，试求$\triangle ADE$旋转所成的旋转体体积和梯形$DBCE$旋转所成旋转体体积之比。



解 设由A向BC作垂线，其垂足为F，点F在BC上。再由D、E分别向BC作垂线，垂足为D'、E'，于是

$$DD'=EE'=\frac{1}{2}AF,\quad DE=\frac{1}{2}BC,$$

$$BD'=\frac{1}{2}BF,\qquad CE'=\frac{1}{2}CF.$$

如把$\triangle ABC$绕BC旋转所成的旋转体的体积用体积ABC表示，则

体积ABC=体积ABF+体积ACF

$$=\frac{\pi}{3}\cdot AF^2\cdot BF+\frac{\pi}{3}\cdot AF^2\cdot CF$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot AF^2\cdot(BF+CF)$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot AF^2\cdot BC,$$

体积$DBCE$=体积$DD'E'E$+体积DBD'+体积ECE'

$$=\pi\cdot DD'^2\cdot DE+\frac{\pi}{3}\cdot DD'^2\cdot BD'$$

$$+\frac{\pi}{3}\cdot EE'^2\cdot CE'$$

$$=\pi\left(\frac{AF}{2}\right)^2\cdot\frac{BC}{2}+\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{AF}{2}\right)^2\cdot\frac{BF}{2}$$

$$+\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{AF}{2}\right)^2\cdot\frac{CF}{2}$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot AF^2\cdot BC+\frac{\pi}{12}\cdot AF^2\cdot\frac{BF+CF}{2}$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot AF^2\cdot BC+\frac{\pi}{12}\cdot AF^2\cdot\frac{BC}{2}$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot AF^2\cdot BC+\frac{\pi}{24}\cdot AF^2\cdot BC$$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot AF^2\cdot BC,$$

$\therefore$ 体积ADE

=体积$ABC-$体积$DBCE$

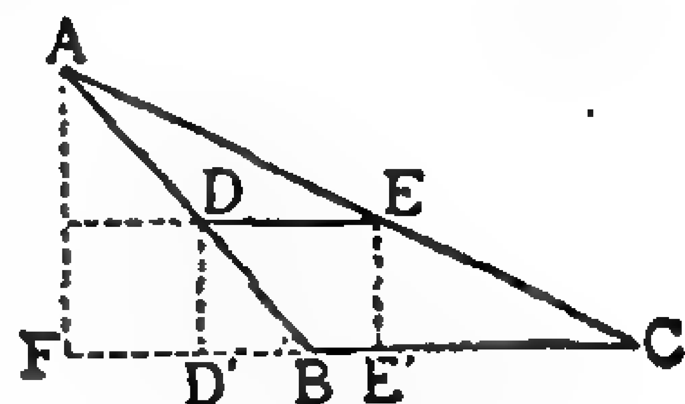
$$=\frac{\pi}{3}\cdot AF^2\cdot BC-\frac{\pi}{6}\cdot AF^2\cdot BC$$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot AF^2\cdot BC,$$

因而 体积ADE:体积$DBCE$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot AF^2\cdot BC:\frac{\pi}{6}\cdot AF^2\cdot BC=1:1.$$

其次，如从A向BC作垂线，其垂足F在边BC的延长线上，则



体积ABC=体积$ABF\sim$体积ACF

$$=\frac{\pi}{3}\cdot AF^2\cdot(BF\sim CF)=\frac{\pi}{3}\cdot AF^2\cdot BC,$$

体积$DBCE$=体积$DD'E'E$

+(体积$DBD'\sim$体积ECE')

$$=\frac{\pi}{8}\cdot AF^2\cdot BC+\frac{\pi}{12}\cdot AF^2\cdot\frac{BF\sim CF}{2}$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot AF^2\cdot BC+\frac{\pi}{24}\cdot AF^2\cdot BC$$

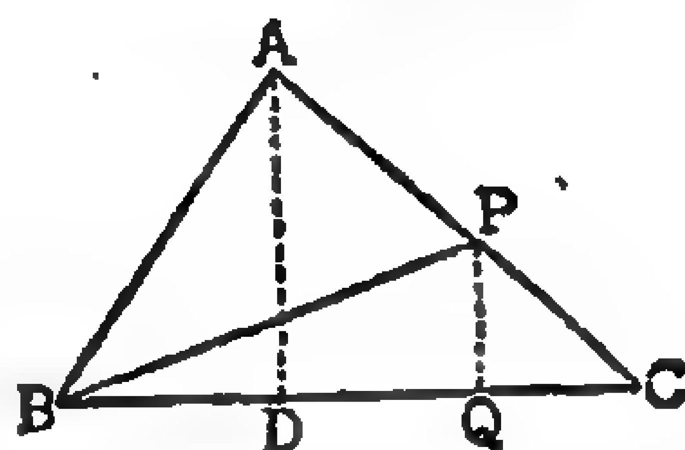
$$=\frac{\pi}{6}\cdot AF^2\cdot BC,$$

$\therefore$ 体积ADE=体积$ABC-$体积$DBCE$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot AF^2\cdot BC.$$

$\therefore$ 体积ADE:体积$DBCE$=1:1.

3225. 已知P是$\triangle ABC$的边AC上的一点。把$\triangle ABC$以BC为轴旋转，如果$\triangle APB$旋转而成的旋转体体积和$\triangle PBC$旋转而成的旋转体体积之比是$m:n$，试求$AP:PC$。



解 由A及P分别向BC作垂线，垂足是D和Q。设$\triangle APB$绕BC旋转所成

旋转体体积用体积 APB 表示，则

$$\text{体积}ABC=\text{体积}ABD+\text{体积}ACD$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot BD+\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot CD$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot(BD+CD)$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot BC,$$

$$\text{体积}PBC=\text{体积}PBQ+\text{体积}PCQ$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot PQ^2\cdot BQ+\frac{1}{3}\pi\cdot PQ^2\cdot CQ$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot PQ^2(BQ+CQ)$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot PQ^2\cdot BC,$$

$$\therefore\quad \text{体积}ABP=\text{体积}ABC-\text{体积}PBC$$
$$=\frac{1}{3}\pi(AD^2-PQ^2)\cdot BC。$$

由于体积 ABP:体积 $PBC=m:n$，所以

$$\frac{1}{3}\pi(AD^2-PQ^2)\cdot BC:\frac{1}{3}\pi\cdot PQ^2\cdot BC=m:n。$$

即
$$(AD^2-PQ^2):PQ^2=m:n,$$
$$\therefore\quad n(AD^2-PQ^2)=m\cdot PQ^2,$$
$$n\cdot AD^2=(m+n)\cdot PQ^2,$$
$$\therefore\quad \frac{AD^2}{PQ^2}=\frac{m+n}{n},$$

即
$$\frac{AD}{PQ}=\frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{n}}。$$

又因 $\dfrac{AC}{PC}=\dfrac{AD}{PQ}$，故有

$$\frac{AC}{PC}=\frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{n}},$$
$$\frac{AC-PC}{PC}=\frac{\sqrt{m+n}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}},$$

即
$$\frac{AP}{PC}=\frac{\sqrt{m+n}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}},$$

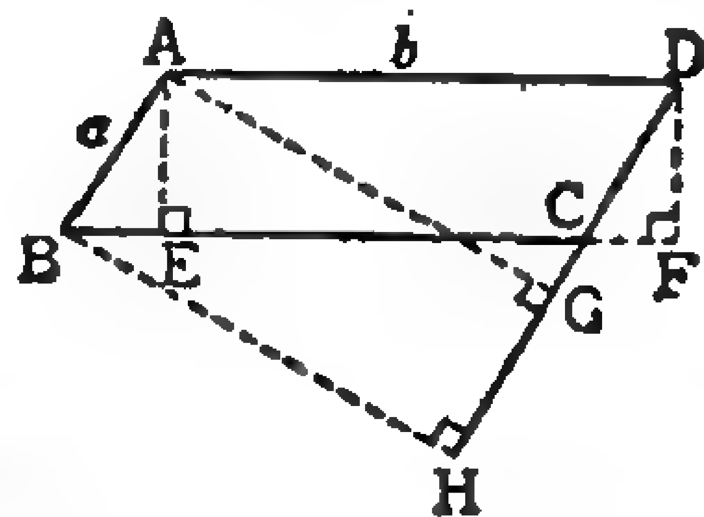
然而

$$\frac{\sqrt{m+n}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$
$$=\frac{(\sqrt{m+n}+\sqrt{n})(\sqrt{m+n}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m+n}+\sqrt{n})\sqrt{n}}$$
$$=\frac{m}{n+\sqrt{(m+n)n}}。$$

$$\therefore\quad \frac{AP}{PC}=\frac{m}{n+\sqrt{(m+n)n}},$$

即　$AP:PC=m:n+\sqrt{(m+n)n}$。

3226. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$。设这个平行四边形绕 BC 旋转所成的旋转体体积为 V_1，绕 CD 旋转所成旋转体体积为 V_2，求 $V_1:V_2$。



解　从 A、D 分别向 BC 作垂线，其垂足为 E、F。又从 A、B 分别向 CD 作垂线，其垂足为 G、H。设 $\triangle ABE$ 绕 BC 旋转所成旋转体体积用 $V_{(BC)}ABE$ 表示，$\triangle ADG$ 绕 CD 旋转所成旋转体体积用 $V_{(CD)}ADG$ 表示，则

$$V_1=V_{(BC)}AEFD+V_{(BC)}ABE-V_{(BC)}DCF。$$

由于
$$\triangle ABE\cong\triangle DCF,$$
$$V_{(BC)}ABE=V_{(BC)}DCF,$$
$$\therefore\quad V_1=V_{(BC)}AEFD=\pi\cdot AE^2\cdot EF$$
$$=\pi\cdot AE^2\cdot BC。$$

又
$$V_2=V_{(CD)}ABHG+V_{(CD)}ADG-V_{(CD)}BCH。$$

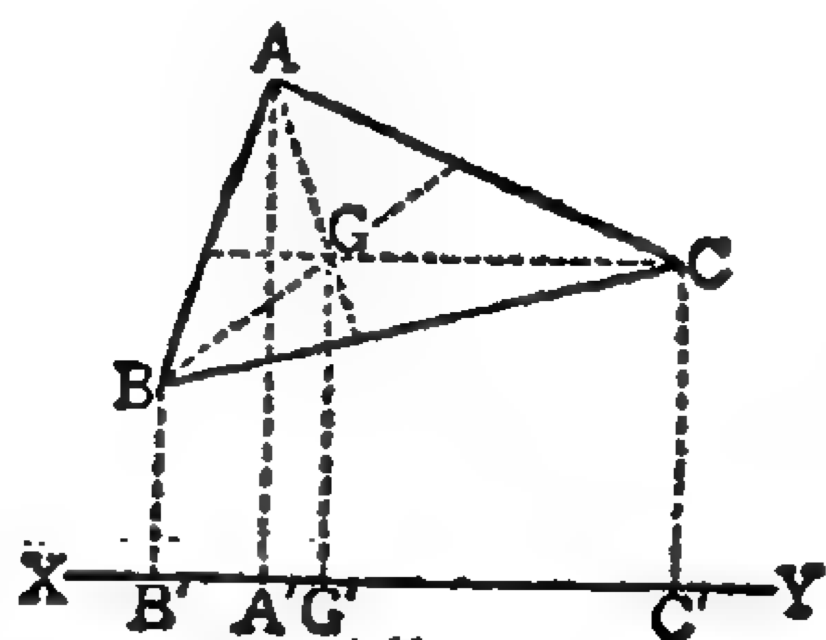
由于
$$\triangle ADG\cong\triangle BCH,$$
$$V_{(CD)}ADG=V_{(CD)}BCH$$
$$\therefore\quad V_2=V_{(CD)}ABHG$$
$$=\pi\cdot AG^2\cdot GH=\pi\cdot AG^2\cdot DC,$$
$$\therefore\quad \frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi\cdot AE^2\cdot BC}{\pi\cdot AG^2\cdot DC}=\left(\frac{AE}{AG}\right)^2\cdot\frac{BC}{DC}。$$

但是
$$BC\cdot AE=DC\cdot AG,$$
$$\therefore\quad \frac{AE}{AG}=\frac{DC}{BC}。$$

于是

$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{DC}{BC}\right)^2\cdot\frac{BC}{DC}=\frac{DC}{BC}=\frac{AB}{BC}=\frac{a}{b},$$
$$\therefore\quad V_1:V_2=a:b。$$

3227. 三角形以其所在平面上(不通过该三角形)的直线为轴旋转所成旋转体的体积，等于这个三角形的重心绕直线旋转所成的圆的周长与这个三角形



面积的乘积。

解　设$\triangle ABC$绕如图所示的直线XY旋转。由顶点A、B、C和重心G分别向直线XY作垂线，垂足为A'、B'、C'、G'。再设$\triangle ABC$绕XY旋转所成旋转体体积用体积ABC表示，且$AA'=a$, $BB'=b$, $CC'=c$, $GG'=g$，则

体积ABC=体积$ABB'A'$+体积$AA'C'C$−体积$BB'C'C$

$$=\frac{1}{3}\pi(a^2+ab+b^2)\cdot A'B'+\frac{1}{3}\pi(a^2+ac+c^2)\cdot A'C'-\frac{1}{3}\pi(b^2+bc+c^2)\cdot B'C'$$

$$=\frac{1}{3}\pi[(a^2+ab+b^2)\cdot A'B'+(a^2+ac+c^2)\cdot A'C'-(b^2+bc+c^2)\cdot(A'B'+A'C')]$$

$$=\frac{1}{3}\pi\{[(a^2+ab+b^2)-(b^2+bc+c^2)]\times A'B'+[(a^2+ac+c^2)-(b^2+bc+c^2)]\cdot A'C'\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi[(a-c)(a+b+c)\cdot A'B'+(a-b)(a+b+c)\cdot A'C']$$

$$=\frac{1}{3}\pi(a+b+c)[(a-c)\cdot A'B'+(a-b)\cdot A'C'].$$

由于$a+b+c=3g$，且

$$(a-c)\cdot A'B'+(a-b)\cdot A'C'$$
$$=[(a+b)-(b+c)]\cdot A'B'+[(a+c)-(b+c)]\cdot A'C'$$
$$=(a+b)\cdot A'B'+(a+c)\cdot A'C'-(b+c)(A'B'+A'C')$$
$$=2\left[\frac{(a+b)\cdot A'B'}{2}+\frac{(a+c)\cdot A'C'}{2}-\frac{(b+c)\cdot B'C'}{2}\right]$$

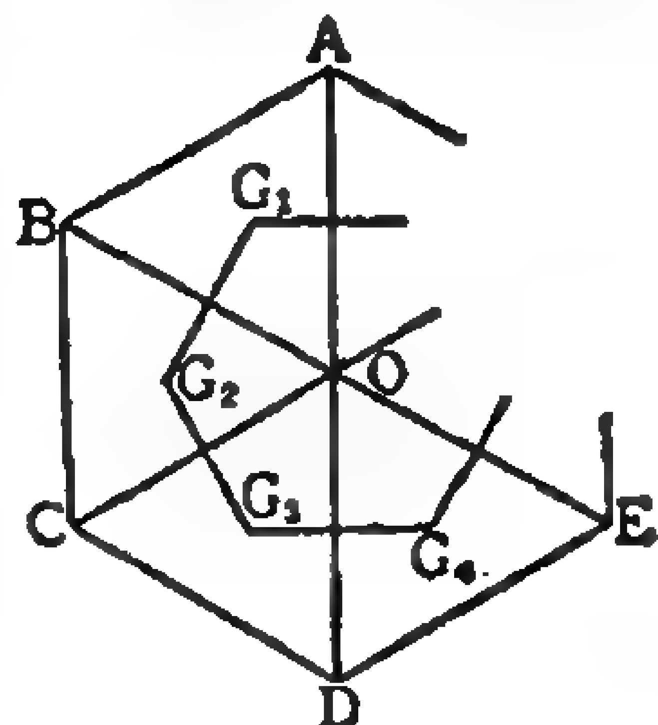
=2［梯形$ABB'A'$的面积+梯形$AA'C'C$的面积−梯形$BB'C'C$的面积］

=2·$\triangle ABC$的面积，

所以

$$体积ABC=\frac{1}{3}\pi\cdot 3g\cdot(2\triangle ABC的面积)$$
$$=2\pi g\cdot\triangle ABC的面积.$$

3228. 正多边形以其所在平面上(不与该多边形相交)的直线为轴旋转所成旋转体的体积，等于正多边形的中心绕直线旋转而成的圆的周长和这个正多边形面积的乘积。



解　设正n边形$ABCDE\cdots$的中心为O, $\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、…的重心分别为G_1、G_2、G_3、…。在这个正n边形所在的平面上且不切割这个正多边形的直线为XY。从G_1、G_2、G_3、…分别向XY所作的垂线长为g_1、g_2、g_3、…，从O向XY所作垂线长为g。如果把$\triangle OAB$绕XY旋转所成旋转体体积用体积ABC表示，则由上题知

体积$ABCDE\cdots$=体积OAB+体积OBC+体积OCD+…

$=2\pi g_1\cdot\triangle OAB$的面积$+2\pi g_2\cdot\triangle OBC$的面积$+2\pi g_3\cdot\triangle OCD$的面积+…

由于多边形$ABCDE\cdots$是正多边形，

$$\triangle OAB\cong\triangle OBC\cong\triangle OCD\cong\cdots$$

所以体积$ABCDE\cdots=2\pi(g_1+g_2+\cdots+g_n)\times\triangle OAB$的面积。

又由于多边形$G_1G_2G_3\cdots$也是正多边形，设其中心为O，则

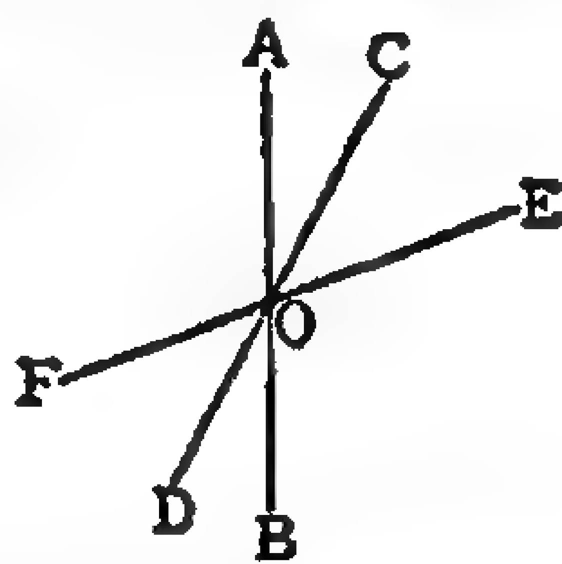
$$g_1+g_2+\cdots=ng,$$

∴　体积$ABCDE\cdots$

$=2\pi(ng)\cdot\triangle OAB$的面积

$=(2\pi g)\cdot n\triangle AOB$的面积$=2\pi g\times$(正$n$边形$ABCDE\cdots$的面积)。

3229. 包含相交于同一点且不在同一平面上的三条直线的圆锥有多少个。

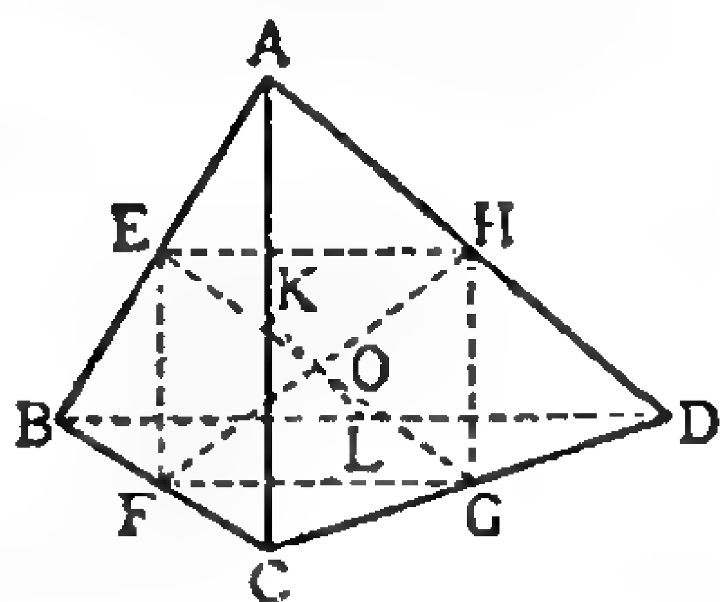


解　如图，AB、CD、EF为相交于点O且不在同一平面上的三条直线。因点O把每条直线都分成两条半直线，所以共有六条半直

线。又由于不在同一平面的三条半直线就可构成一个圆锥，因此可得构成圆锥的方法如下:

首先取OA，再配上除OB外的其他两条半直线，就可得到四组: (OA,OC,OE), (OA,OC,OF), (OA,OD,OE), (OA,OD,OF)，它们共组成四个圆锥。同样，如取OB也可得到四组，组成四个圆锥。因此共可组成8个圆锥。

3230. 如果四面体的三组对边互相垂直，则其六边的中点在同一球面上。



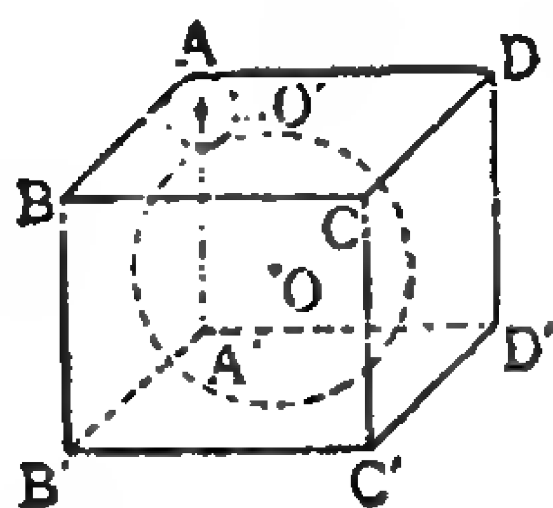
解 设AB和CD为四面体中互相垂直的一组对边，边AB、BC、CD、DA、AC、BD的中点分别为E、F、G、H、K、L，则$EFGH$是平行四边形。又因$EH\parallel BD$, $EF\parallel AC$, $AC\perp BD$，所以$EH\perp EF$，从而$EFGH$是矩形。设这个矩形的对角线的交点为O，则

$$OE=OF=OG=OH.$$

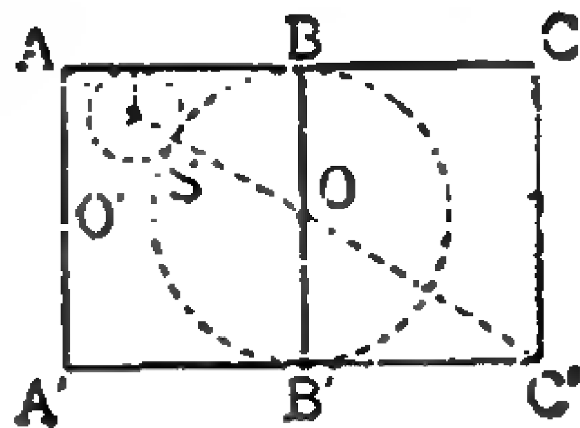
同理，KL也过点O，从而OK、OL和OE等长，所以这6个中点都在以O为球心、OE为半径的球面上。

3231. 一内侧边长为$2a$的立方体容器被水充满，首先把半径为a的球放入其中，再放一个能被水完全淹没的小球。若想使溢出的水量最大，这个小球的半径应该有多大？由于装入两球而溢出的水量约占容器体积的百分之几？

解



(1)



(2)

以立方体容器$ABCD$-$A'B'C'D'$的对角线AC'和CA'所确定的平面把这个容器截开，其截面如图(2)所示。由于被水完全淹没的小球O'和以a为半径的球O相切，并且它们都与容器上底面$ABCD$相切，所以在图(2)中圆O'和圆O外切，并且圆O和圆O'都和边AC相切。设圆O'和圆O的切点为S，则

$$AC'=2\sqrt{3}a,\quad \therefore\quad AO=\sqrt{3}a,$$

$$AS=(\sqrt{3}-1)a.$$

又设小圆O'的半径为r，则

$$AO'=\sqrt{3}r,\quad AS=(\sqrt{3}+1)r,$$

$$\therefore\quad (\sqrt{3}-1)a=(\sqrt{3}+1)r.$$

解之，得

$$r=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}a=(2-\sqrt{3})a,$$

将两球O及O'的体积分别用V、V'表示，则

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3,\quad V'=\frac{4}{3}\pi(2-\sqrt{3})^3a^3.$$

$$\therefore\quad V+V'=\frac{4}{3}\pi[1+(2-\sqrt{3})^3]a^3$$

$$=4\pi(9-5\sqrt{3})a^3,$$

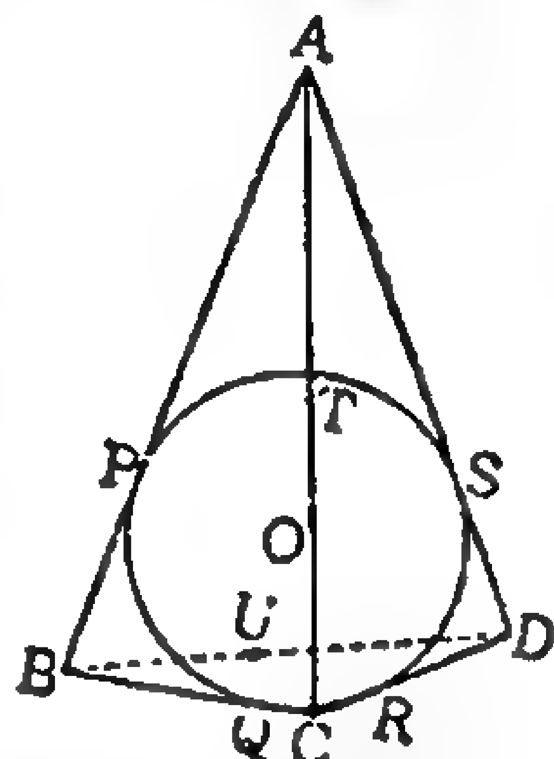
故由于装入两球而溢出的水量和容器中原有水量的比为

$$\frac{4\pi(9-5\sqrt{3})a^3}{(2a)^3}=\frac{\pi}{2}(9-5\sqrt{3})$$

$$\approx 0.55.$$

即小球的半径为$(2-\sqrt{3})a$，溢出水量约占容器内全部水量的55%。

3232. 设四面体的六条棱都和同一球相切，而且切点都在各棱上，则该四面体的不相交的两棱的和之间有什么关系。



解 设四面体的六条棱都和球O相切，切点分别为P、Q、R、S、T、U，球的半径为r，则

$$AP^2=AT^2=AS^2=AO^2-r^2,$$

$$\therefore\quad AP=AT=AS.$$

同理，

$$BP=BQ=BU,$$

$$CR=CQ=CT,$$

$$DR=DU=DS.$$

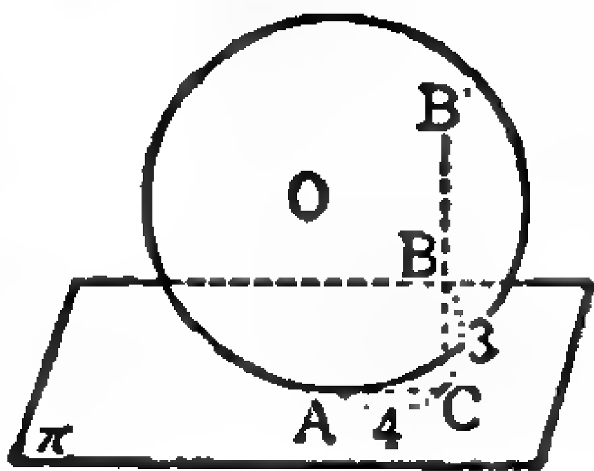
$$\therefore\quad AP+BP+CR+DR$$

$$=AT+CT+BU+DU$$

$$=AS+DS+BQ+CQ,$$

即 $AB+CD=AC+BD=AD+BC$。
因此三组对边之和都是相等的。

3233. 已知一平面和一球面相切于点 A，从球面上的一点 B 作该平面垂线的垂足为 C，$AC=4\text{cm}$，$BC=3\text{cm}$，求该球的半径。



解 设从点 B 所作平面 π 的垂线与球面的另一交点为 B'，则

$$AC^2=CB\cdot CB',$$

由于

$$AC=4,\ CB=3,$$

$$\therefore\quad CB'>CB.$$

设 $BB'=x$，则

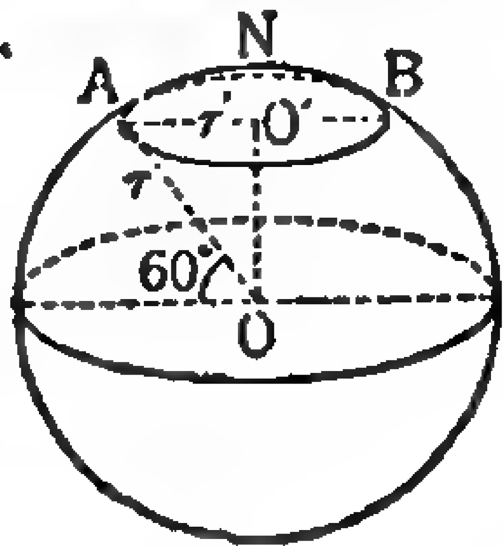
$$4^2=3(3+x),$$

$$\therefore\quad x=\frac{7}{3}.$$

故球的半径为

$$3+\frac{x}{2}=\frac{25}{6}\text{ cm}.$$

3234. 把纬度同是 60°，经度是 180° 的不同两点 A、B 之间沿等圈线(纬度相等的线)相连的长度是 A、B 间最短距离的几倍？



解 在球面上，A、B 两点之间的最短距离是通过这两点的大圆的劣弧长。因此得求法如下：

北纬 60° 的小圆直径为 AB，A、B 是纬度为 60°，经度为 180° 的不同两点。设地球的半径为 r，$AB=2r'$，则

$$r'=r\sin 30°=\frac{r}{2},$$

$$\therefore\quad \widehat{AB}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r'=\pi r'=\frac{\pi r}{2}.$$

即 A、B 两点沿等圈线的长为 $\frac{\pi r}{2}$。

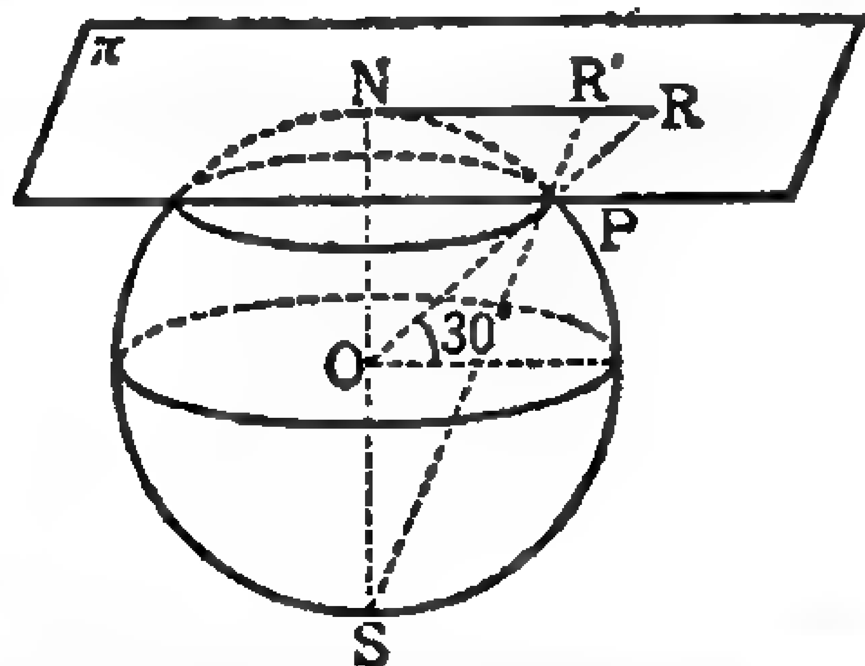
A、B 的最短距离为通过 A、B 的大圆且含有北极 N 的弧长，即

$$\widehat{ANB}=\frac{60}{360}\cdot 2\pi r=\frac{\pi r}{3},$$

$$\therefore\quad \frac{\widehat{AB}}{\widehat{ANB}}=\frac{\frac{\pi r}{2}}{\frac{\pi r}{3}}=\frac{3}{2}.$$

即 A、B 之间沿等圈线的长是 A、B 之间最短距离的 $\frac{3}{2}$ 倍。

3235. 在地球 O 的北极 N 处的切平面上，把北纬 30° 的小圆分别以球心 O 和南极 S 为投影中心作投影，求由此产生的两圆的面积之比。



解 设地球的半径为 r，点 P 表示北纬 30° 的一地点。分别以地球中心 O 和南极 S 为投影中心，点 P 在过北极 N 且和地球相切的平面上的投影分别为 R、R'，

则

$$NR=r\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}r,$$

$$NR'=2r\operatorname{tg}30°=\frac{2}{\sqrt{3}}r,$$

故所求面积之比为

$$\pi(\sqrt{3}r)^2:\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}r\right)^2=9:4.$$

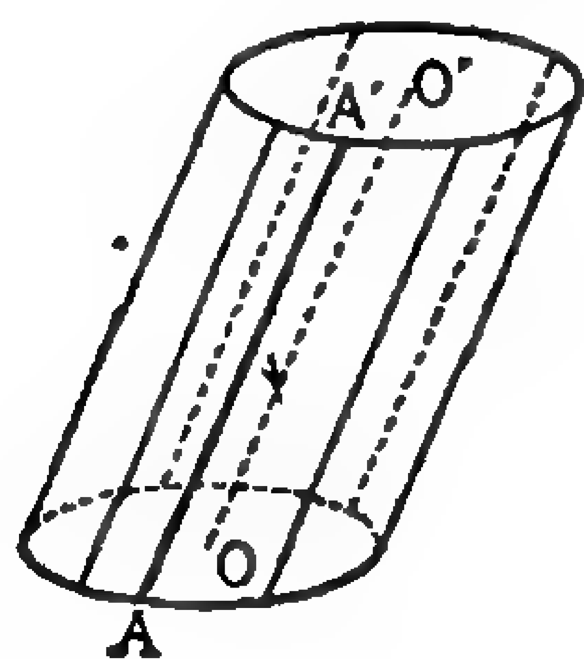
第五章 曲 面 体

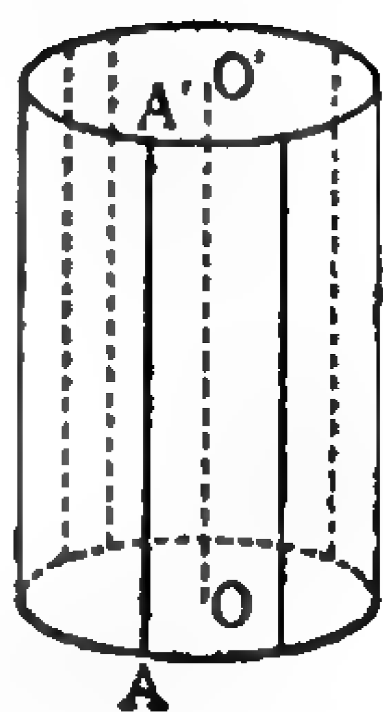
1. 圆柱、圆锥

3236. (定义)通过圆 O 上的一点 A，引一条不含于圆 O 所在平面的线段 AA'，且不改变 AA' 的方向，则当点 A 在这个圆上绕一周时所形成的空间图形叫做圆柱。

如圆和 AA' 垂直时，所形成的圆柱叫做直圆柱。

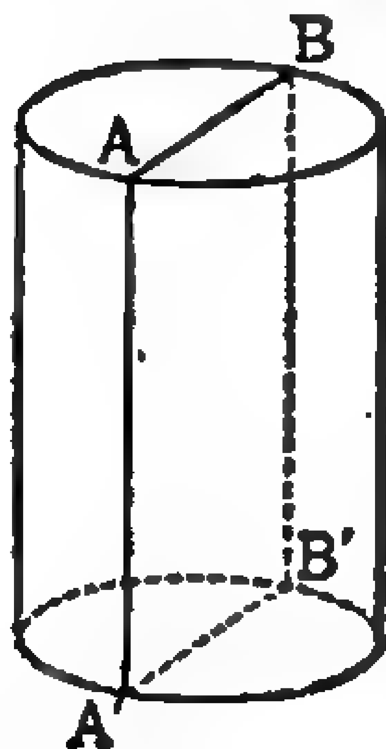
解 从定义可知点 A' 所描出的图形是和圆 O 全等的圆 O'。$OO' \perp\!\!\!= AA'$，OO' 叫做这个圆柱的轴。AA' 叫做这个圆柱的母线。母线形成的曲面叫做这个圆柱的侧面。圆 O 叫做圆柱的下底，圆 O' 叫做圆柱的上底(圆 O ∥ 圆 O')。





3237. 圆柱被过其母线的平面所截，则其截面是平行四边形。

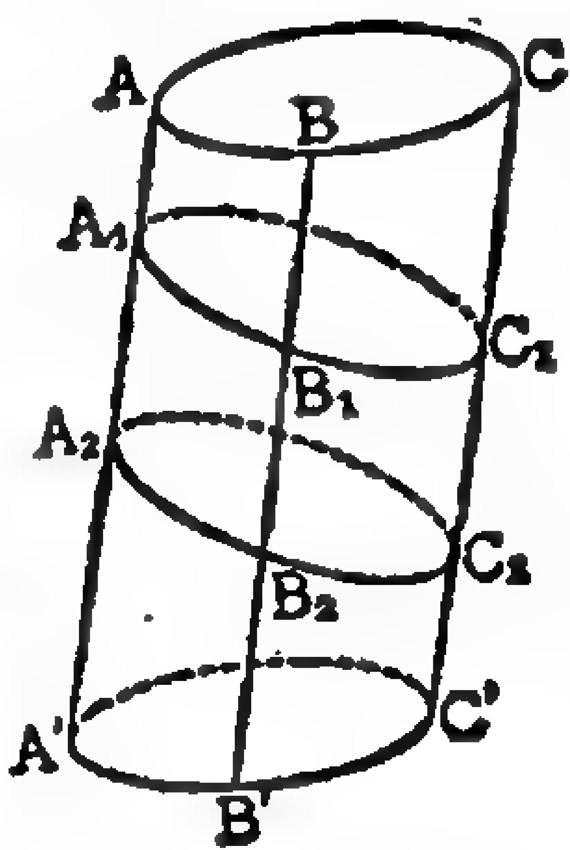
解 取圆柱的一条母线 AA'，用平面 (AA', B) 截这个圆柱. 过 B 引母线 BB'，则 $AA' \parallel BB'$，从而 AA' 和 BB' 可决定一个平面. 由于这个平面和平面 (AA', B) 重合，BB' 就是圆柱的侧面和平面 (AA', B) 的交线，于是截面就成为 $AA'B'B$. 又因为圆柱的两底面是平行的，$AB \parallel A'B'$，所以 $AA'B'B$ 是平行四边形.



注 上面的平面既可以换成与轴平行的平面，又可以换成含有轴的平面。

3238. 用与底面不相交的互相平行的两个平面截圆柱，则这两个截口相等。

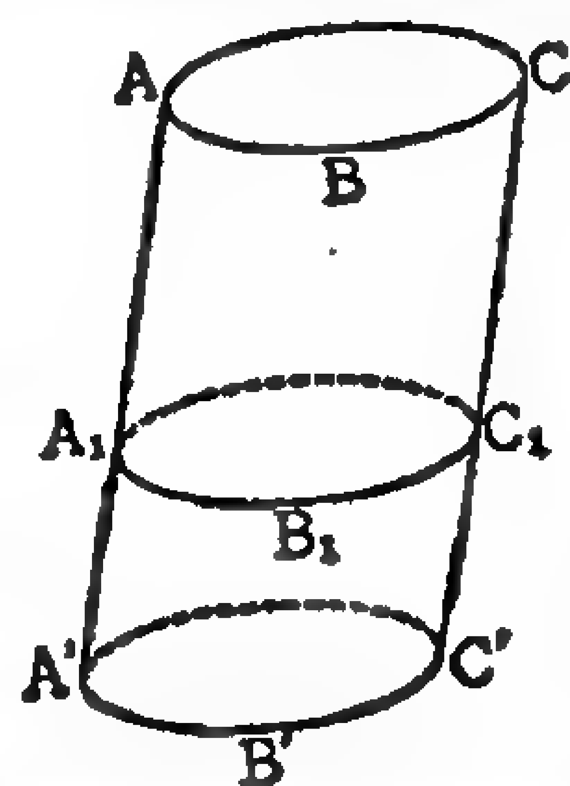
解 因为平行直线被两个平行平面所截长度相等，所以把圆柱 ABC-$A'B'C'$ 用与底面不相交的两个平行平面去截，各母线被这两个平行平面所截取的长度均相等. 如把这个长度记作 l，把两个截口记作 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$，则把截口 $A_1B_1C_1$ 沿母线平行移动 l，就和截口 $A_2B_2C_2$ 重合。



$\therefore$ 截口 $A_1B_1C_1$ $\cong$截口$A_2B_2C_2$.

3239. 圆柱被与底平行的平面所截，则截口和底面全等。

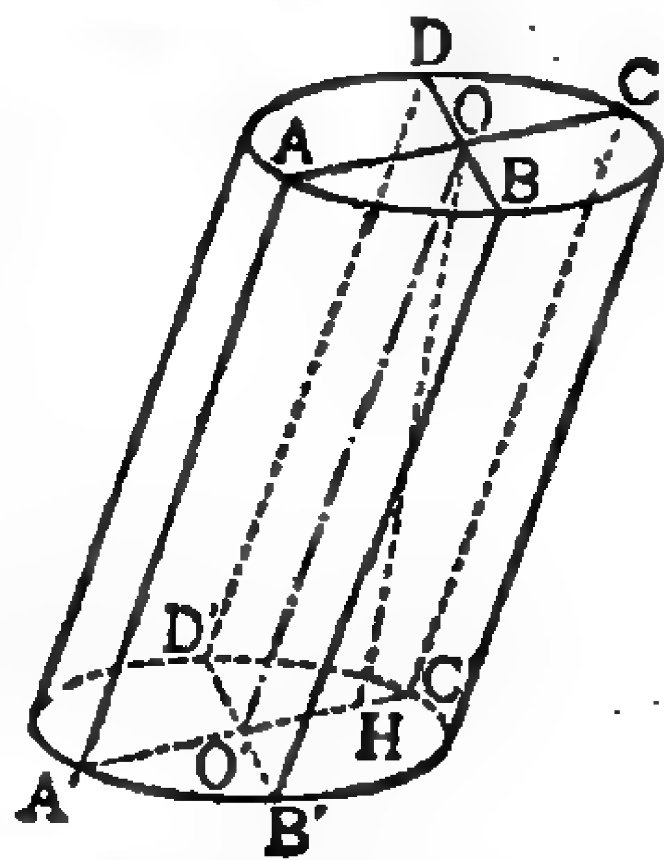
解 如果圆柱 ABC-$A'B'C'$ 被一个平行于底面的平面 $A_1B_1C_1$ 所截，则这个圆柱被分成两个圆柱，即 ABC-$A_1B_1C_1$ 和 $A_1B_1C_1$-$A'B'C'$. 因为圆柱的两个底面是相等的，所以



上底面 $ABC \cong$ 截面$A_1B_1C_1$

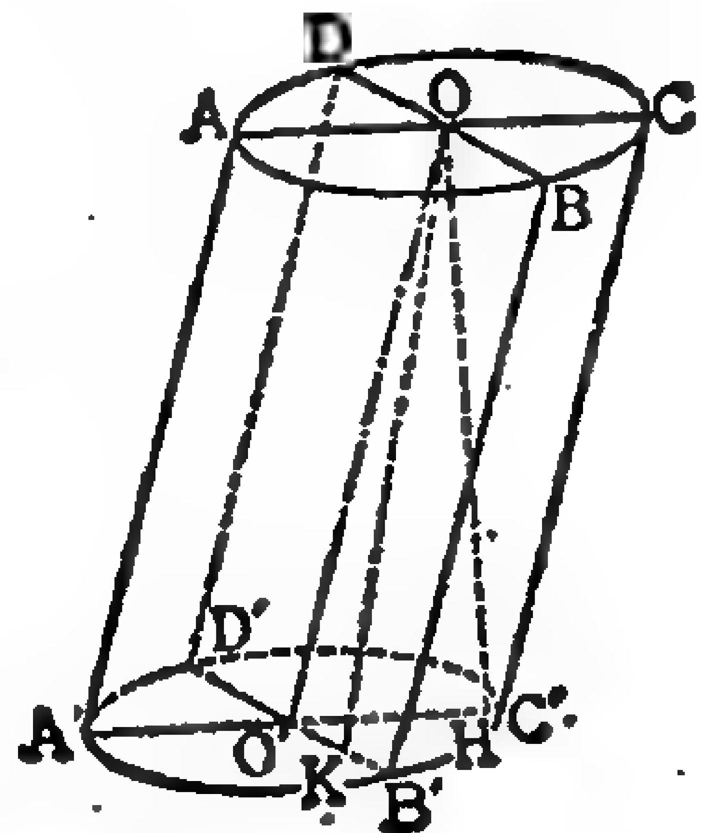
及 截面 $A_1B_1C_1 \cong$下底面 $A'B'C'$.

3240. 如果斜圆柱被含轴的平面所截，则在斜圆柱的轴截面中，最大的截面是矩形。



解 设斜圆柱 ABC-$A'B'C'$ 上底面 ABC 的中心为 O，下底面 $A'B'C'$ 的中心为 O'，OO' 就是这个斜圆柱的轴. 过点 O 作垂直于OO'的直径 BD，作一个含OO'、BD的平面把这个斜圆柱截开，设截面为 $BB'D'D$. 再作一个含有 OO'，但不含 BD 的任意截面，设截面为 $AA'C'C$，则 $BB'D'D$ 和 $AA'C'C$ 都是平行四边形. 因为 BD 在与 OO' 垂直的平面上，所以 $BD \perp OO'$，因而 $BD \perp BB'$，所以平行四边形 $BB'D'D$ 就是矩形，其面积为 $B'D' \cdot OO'$. 另外，AC 与 OO' 不垂直，平行四边形 $AA'C'C$ 不是矩形，如从点 O 作 $A'C'$ 的垂线 OH，则平行四边形 $AA'C'C$ 的面积等于 $A'C' \cdot OH$. 因为 $B'D'$、$A'C'$ 都是底面的直径，它们相等，但是 OO' 比 OH 大，所以 $B'D' \cdot OO' > A'C' \cdot OH$，即截面 $BB'D'D>$ 截面 $AA'C'C$. 所以在含轴的截面中，最大的截面是矩形 $BB'D'D$.

3241. 如果斜圆柱被含轴的平面所截，则在这些截面中，最小的截面是垂直于底面的截面。



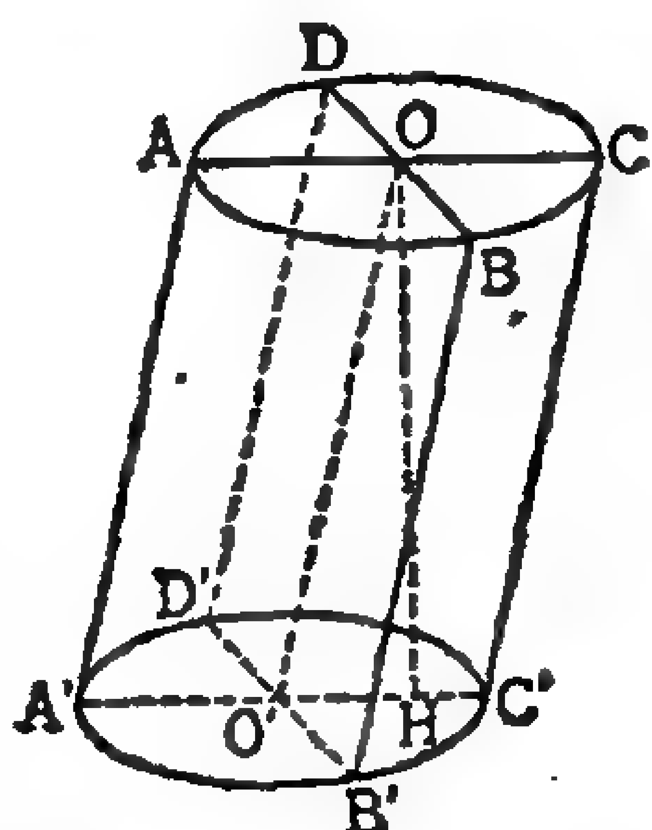
解 设斜圆柱 ABC-$A'B'C'$ 上底面 ABC 的中心为 O，下底面 $A'B'C'$ 的中心为 O'，OO' 是这个圆柱的轴. 从 O 点向下底面 $A'B'C'$ 作垂线 OH，用平面 (OO', OH) 截斜圆柱，则其截面 $AA'C'C$ 是平行四边形且与底面垂直，其面积为 $A'C' \cdot OH$. 再用含有 OO'，但不含 OH 的任意平面截斜圆柱，其截面 $BB'D'D$ 是平行四边形，从

O 作 $B'D'$ 的垂线 OK，则其面积 $=B'D'\cdot OK$。因为 $A'C'$、$B'D'$ 都是底圆的直径，它们相等。又截面 $BB'D'D$ 不和底面垂直，因而有 $OH<OK$，所以 $A'C'\cdot OH<B'D'\cdot OK$。

$\therefore$ 截面 $AA'C'C<$ 截面 $BB'D'D$，

即在用含有轴的平面截斜圆柱所得的截面中，与底面垂直的截面最小。

3242. 在斜圆柱的轴截面中，最大的截面和最小的截面互相垂直。



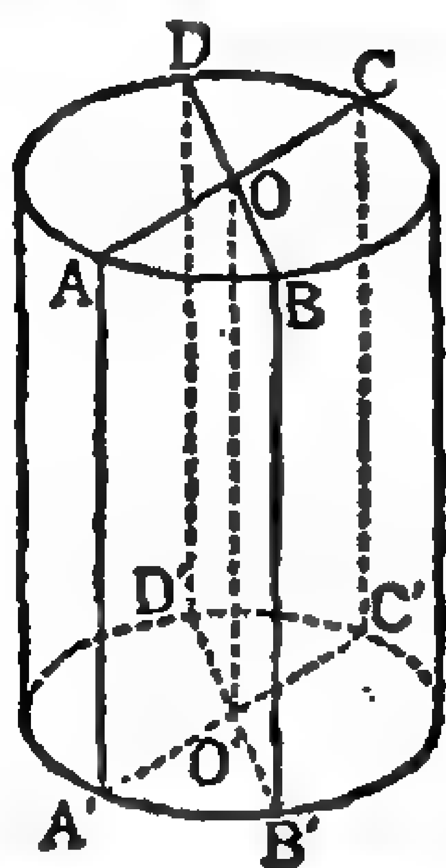
解 设斜圆柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 上底面 ABC 的中心为 O，下底面 $A'B'C'$ 的中心为 O'，OO' 是这个斜圆柱的轴。从点 O 作下底面 $A'B'C'$ 的垂线 OH，用平面 (OO',OH) 截斜圆柱，所得截面 $AA'C'C$，就是这个斜圆柱轴截面中最小的截面(参照上题)。又在下底面 $A'B'C'$ 上，从 O' 引 $A'C'$ 的垂线和下底面圆周相交于 B'、D'，则在平面 $(OO',B'D')$ 截斜圆柱的截面为 $BB'D'D$。由于 $B'D'\perp O'H$，$B'D'\perp OH$，所以 $B'D'\perp(O'H,OH)$，从而 $B'D'\perp OO'$。故截面 $BB'D'D$ 是矩形，是斜圆柱轴截面中最大的截面(问题 **3240**)。因平面 $(O'H,OH)$ 和截面 $AA'C'C$ 是同一平面，

$\therefore$ $B'D'\perp$ 截面 $AA'C'C$。

从而 截面 $BB'D'D\perp$ 截面 $AA'C'C$，

即在斜圆柱的轴截面中，其最大的截面和最小的截面互相垂直。

3243. 如果圆柱的两个轴截面都是矩形，则这个圆柱是直圆柱；否则这个圆柱是斜圆柱。



解 设圆柱的两个轴截面分别为矩形 $AA'C'C$ 和 $BB'D'D$。

因 $AA'\perp AC$，$AA'\parallel OO'$，

$\therefore$ $OO'\perp AC$。

又 $BB'\perp BD$，$BB'\parallel OO'$，

$\therefore$ $OO'\perp BD$，

$\therefore$ $OO'\perp$ 平面 (AC,BD)，

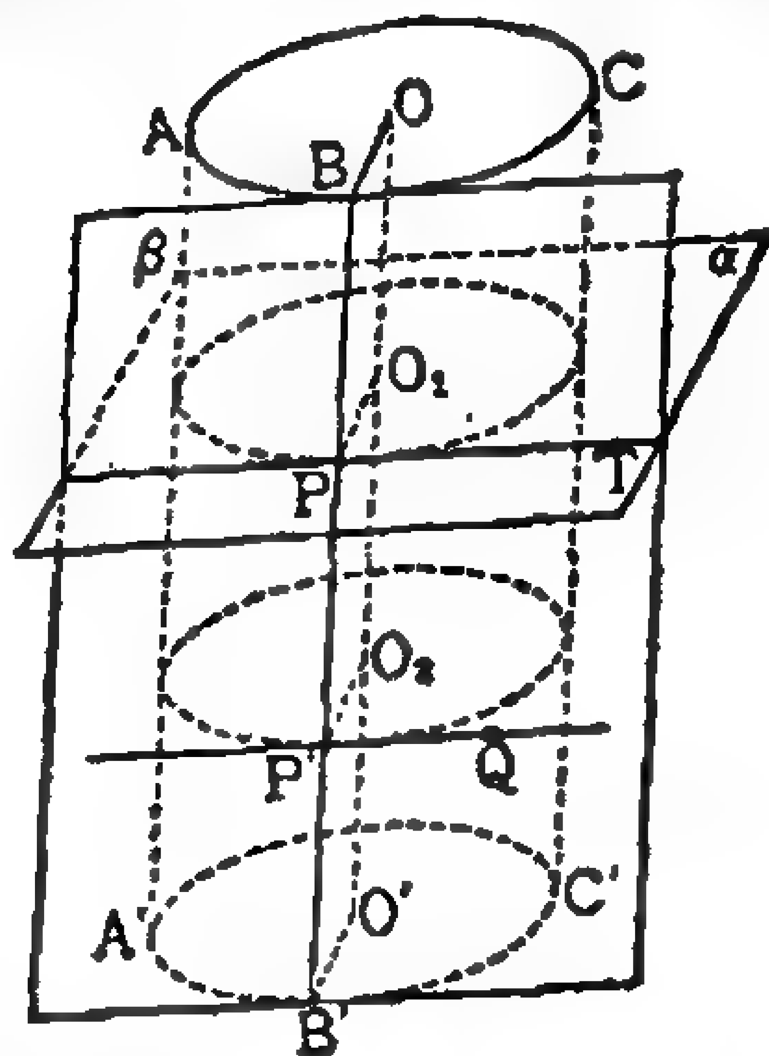
即 $OO'\perp$ 底面 ABC，因此这个圆柱是直圆柱。

如果截面 $AA'C'C$、$BB'D'D$ 中，无论哪一个如 $AA'C'C$ 不是矩形，则 AA' 与 AC 不垂直。从而 OO' 与 AC 不垂直，OO' 与底面 ABC 不垂直，因此这时的圆柱是斜圆柱。

3244. 圆柱的侧面关于轴的中点对称。

解 设圆柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 上底 ABC 的中心为 O，下底面 $A'B'C'$ 的中心为 O'，OO' 是这个圆柱的轴，设 OO' 的中点为 O''，取圆柱侧面上的任意一点 P，过点 P 作这个圆柱的母线 BB'，则平面 (OO',P) 截圆柱的截面 $BB'C'C$ 是平行四边形(问题 **3237**)，O'' 就是 $\square BB'C'C$ 对角线的交点。由于 BB' 上的点 P 关于点 O'' 的对称点 Q 在 CC' 上，因而 Q 在这个圆柱的侧面上，所以圆柱的侧面是关于 OO' 的中点 O'' 对称。

3245. 过圆柱侧面上的一点，作这个圆柱的切面。



解 ［作法］设圆柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 侧面上已知点为 P，过点 P 的母线为 BB'，轴为 OO'。过点 P 作一个与底面平行的平面 α，则截面和底面圆相同，设这个截面和 OO' 的交点为 O_1，则 O_1 就是这个截面的圆心。在平面 α 上，过点 P 引圆 O_1 的切线 PT，设 BB' 和 PT 确定的平面为 β，则 β 是过已知点 P，且和圆柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 相切的平面。

［证明］ 在平面 β 上取不在 BB' 上的任意一点 Q，从点 Q 作 TP 的平行线和 BB' 相交于 P'。再在平面 (BB',OO') 上，从点 P' 作 PO_1 的平行线和 OO' 相交于 O_2。因为 $P'Q\parallel PT$，$P'O_2\parallel PO_1$，所以平面 $(P'Q,P'O_2)\parallel$ 平面 α，从而平面 $(P'Q,P'O_2)$ 截圆柱的截面和

圆 O_1 全等，它的中心是 O_2。因此，由 $PT\perp PO_1$，可知 $P'Q\perp P'O_2$，$P'Q$ 是圆 O_2 的切线。已知点 Q 在圆 O_2 的外部，因而点 Q 也在这个圆柱的外部。这就是说，在平面 β 上而不在直线 BB' 上的所有点都在圆柱的外部，所以平面 β 和圆柱只有一条直线 BB'，即平面 β 就是这个圆柱的切面。

3246. 过圆柱外部的已知一点，作这个圆柱的切面。

解 设点 P 是圆柱 $ABC-A'B'C'$ 外的已知点，这个圆柱的轴为 OO'。过点 P 作与这个圆柱底面平行的平面 α，则平面 α 截开圆柱的截面和底面全等，设截面和 OO' 的交点为 O_1，则 O_1 就是这个截面的中心。在平面 α 上，从点 P 引圆 O_1 的切线 PT_1 及 PT_2，设过 T_1 及 T_2 的圆柱的母线分别为 BB' 和 DD'，则平面 (PT_1, BB') 及 (PT_2, DD') 都过已知点 P，且和这个圆柱相切。事实上，和上题一样可以证明，平面 (PT_1, BB') 和圆柱只有一条公共直线 BB'，平面 (PT_2, DD') 和圆柱只有一条公共直线 DD'。

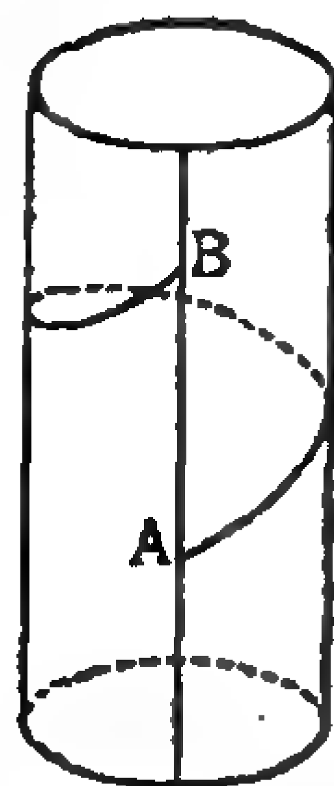
3247. 过圆柱轴截面上的两条母线分别作圆柱的切面，则这两个切面平行。

解 设在圆柱 $ABC-A'B'C'$ 的轴 (OO') 截面上，母线为 BB'、DD'，过 BB' 且切于圆柱的平面为 α，过 DD' 且切于圆柱的平面为 β，则 α 含有从 B 所引上底面圆 O 的切线 BE，β 含有从 D 所引上底面圆 O 的切线 DF（问题 **3245**），于是 BE 和 DF 都垂直于圆 O 的直径 BD，所以 $BE\parallel DF$。又因 BB'、DD' 都是圆柱的母线，$BB'\parallel DD'$，

$\therefore$ 平面 $(BB', BE)\parallel$ 平面 (DD', DF)，

即 平面 $\alpha\parallel$ 平面 β。

3248. 已知在半径为 a cm 的直圆柱侧面上有一点 A，在点 A 铅直向上 b cm 的点 B。如把线的一端系在点 A，沿圆柱卷一周，另一端系在点 B，求该线的最小长度。

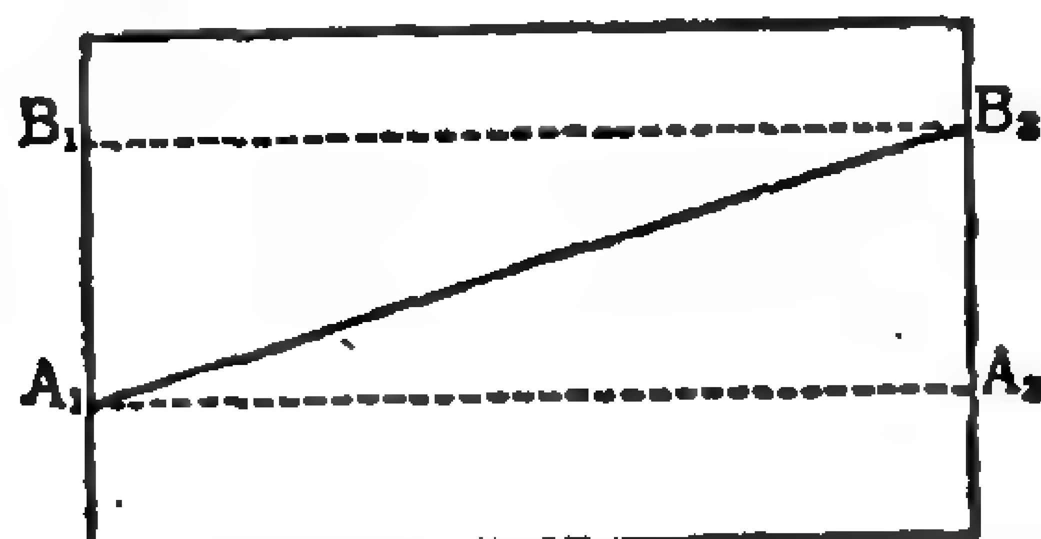


解 过母线 AB，作圆柱的展开图，设点 A 的对应点为 A_1、A_2，点 B 的对应点为 B_1、B_2，则

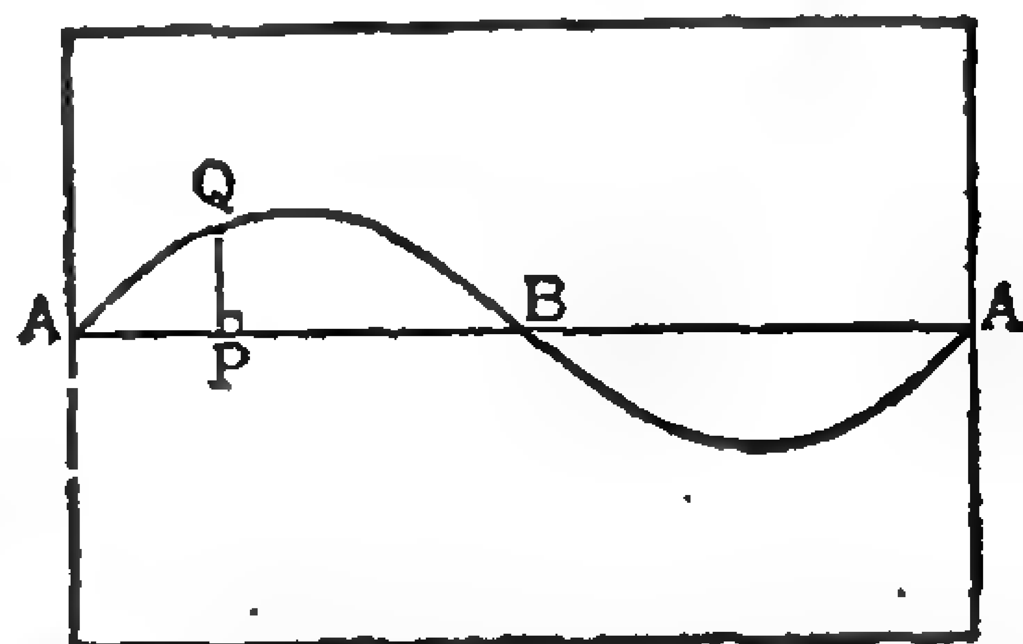
$$A_1A_2=2\pi a,$$
$$A_2B_2=b.$$

$$\therefore\quad A_1B_2=\sqrt{(2\pi a)^2+b^2}=\sqrt{4\pi^2a^2+b^2},$$

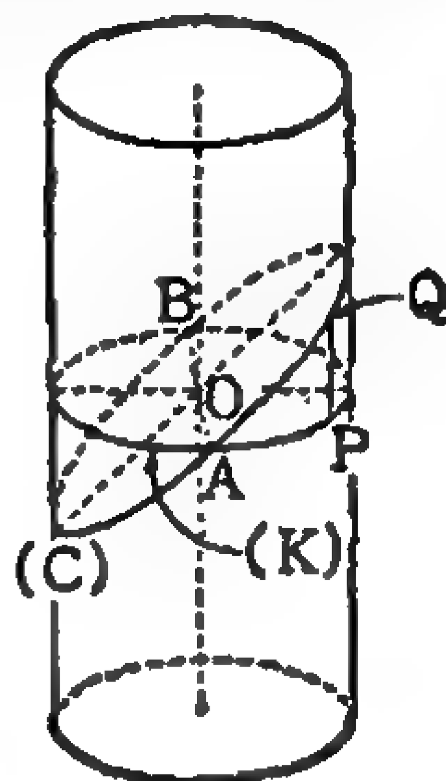
即所求线的最小长度是 $\sqrt{4\pi^2a^2+b^2}$ (cm)。

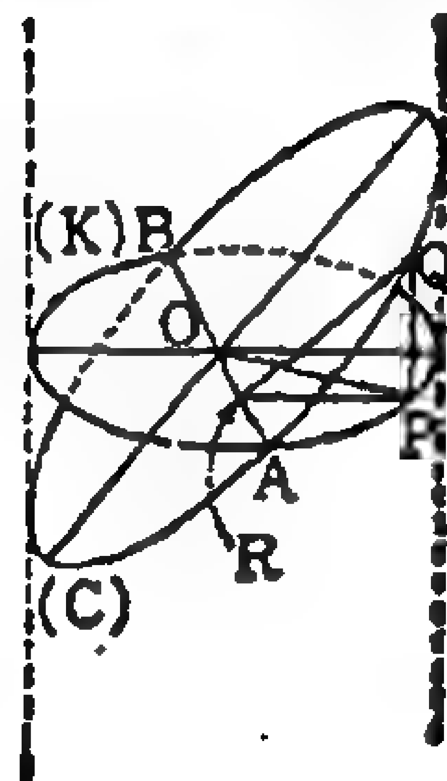


3249. 设直圆柱被过轴上的一点 O，且和轴成 45° 角的平面所截的截口曲线为 C，被过点 O 且平行于底的平面所截的截口曲线为 K，C 和 K 的交点为 A、B。如果过点 A 沿母线把直圆柱的侧面截开，并展开在平面上，问曲线 C 成什么曲线？并画出图形。



解 设 r 为圆 K 的半径，P 为 K 上的一点，和 P 在同一母线上的 Q 为曲线 C 上的一点。从 Q 向直径 AB 引垂线 QR，则 $PR\perp AB$，从而 $\angle PRQ$ 就是这两条曲线 C、K 所在





平面构成的二面角，且 $\angle PRQ=45°$，

$$\therefore \quad PQ=PR。 \qquad ①$$

又设 $\angle POA=x°$，则

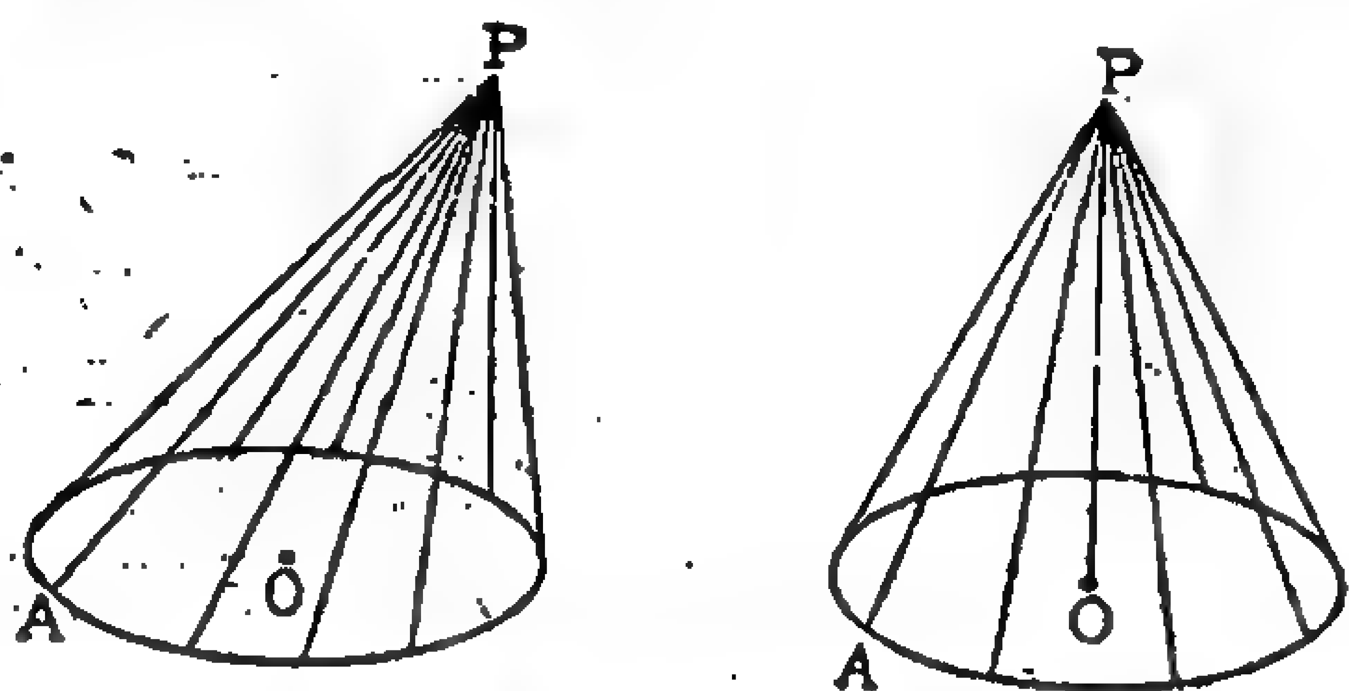
$$PR=PO\sin x°=r\sin x°，$$

$$\therefore \quad PQ=r\sin x°。 \qquad ②$$

当点 P 在圆 K 上运动时，$\angle AOP$ 从 $0°$ 转到 $360°$，点 Q 的展开图就是①、②所表示的正弦曲线。

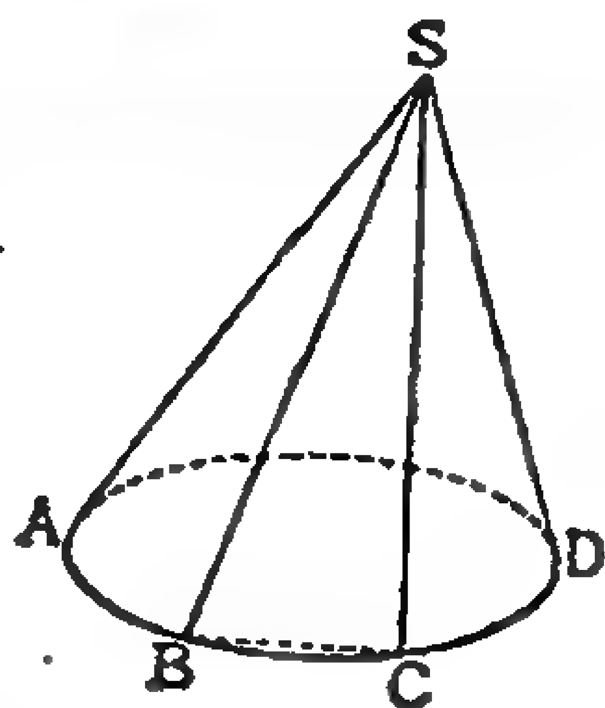
3250．（定义） 一个圆周上的所有点和圆所在平面外的一点 P 连结所构成的空间图形叫圆锥．特别地，当点 P 在过圆心且垂直于这个圆所在平面的直线 PO 上，叫直圆锥．说出圆锥、直圆锥各部分的名称．

解 圆 O 叫做圆锥的底面，点 P 叫做圆锥的顶点，PO 叫做圆锥的轴，PA 叫做圆锥的母线，特别在直圆锥中，PA 也叫做圆锥的斜高。



3251． 通过圆锥顶点且和底面只有两个交点的截面是三角形。

解 设过圆锥 $S-ABC$ 的顶点 S 且和底面圆周 ABC 只有两个交点 B、C 的平面为 α，连接 SB，则 SB 在圆锥的曲面上，同时也在平面 α 上．同样，连接 SC，则 SC 在圆锥的曲面上，同时也在平面 α 上。连接 BC，则 BC 在圆锥的底面上，同时也在平面 α 上．因此，这个圆锥在平面 α 处的截面是 $\triangle SBC$.



3252． 证明平行于圆锥底面的截面是圆，并且截面和轴的交点是截面的圆心。

解 设圆锥 $S-ABC$ 底面 ABC 的圆心为 O，平行于底的截面为 $A'B'C'$，SO 和截面 $A'B'C'$ 的交点为 O'．取截面 $A'B'C'$ 周上任意两点 A'、B'，设过 A' 及 B' 的母线分别为 SA 及 SB，则 $O'A'$ 和 OA 在同一平面 (SA, SO) 上且不相交，因而是平行的．同样，$O'B'$ 和 OB 也在同一平面 (SB, SO) 上且不相交，也是平行的。

$$\therefore \quad \frac{O'A'}{OA}=\frac{SO'}{SO}，$$

$$\frac{O'B'}{OB}=\frac{SO'}{SO}，$$

因而

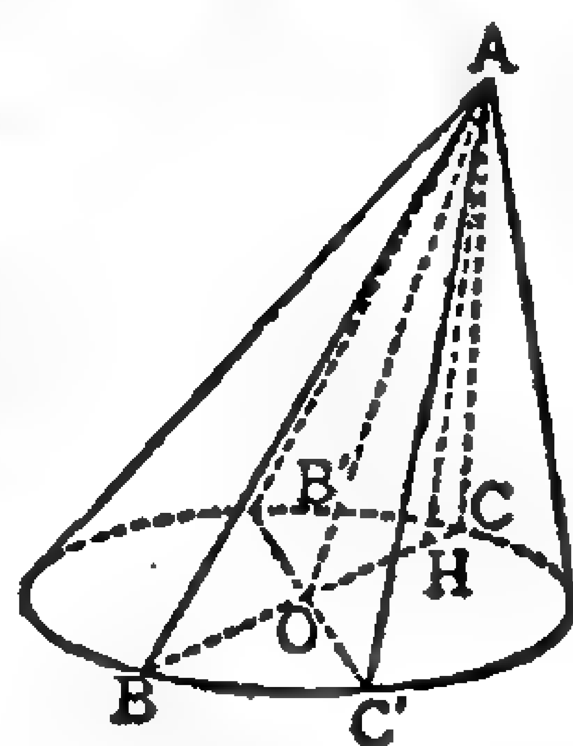
$$\frac{O'A'}{OA}=\frac{O'B'}{OB}。$$

已知 $OA=OB$， $\therefore O'A'=O'B'$．因此 A'、B' 到 O' 的距离相等，即取这个截面 $A'B'C'$ 周上的任意两点到 O' 的距离都相等，所以截面 $A'B'C'$ 是以 O'（截面和轴的交点）为圆心的圆。

3253． 斜圆锥的轴截面的最大面积是等腰三角形。

解 设过斜圆锥的轴 AO 的截面为 ABC，则 ABC 是三角形，AO 为其中线．设从 A 向 BC 所引垂线 AH 的垂足为 H，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AH。$$



因为 BC 是底面圆的直径，是一定的，$AH\leq AO$，所以 $\triangle ABC$ 仅当 AH 和 AO 重合时面积最大。当 AH 与 AO 重合时，$AO\perp B'C'$（直径 $B'C'$），即 AO 是 $B'C'$ 的垂直平分线，从而

$$AB'=AC'.$$

因此圆锥的轴截面中最大的是等腰三角形。

3254． 斜圆锥的轴截面，什么时候面积最小？

解 设斜圆锥的轴为 AO，从顶点 A 向底面所引垂线为 AH，则平面 (AO, AH) 截得的截面面积最小．证明如下。

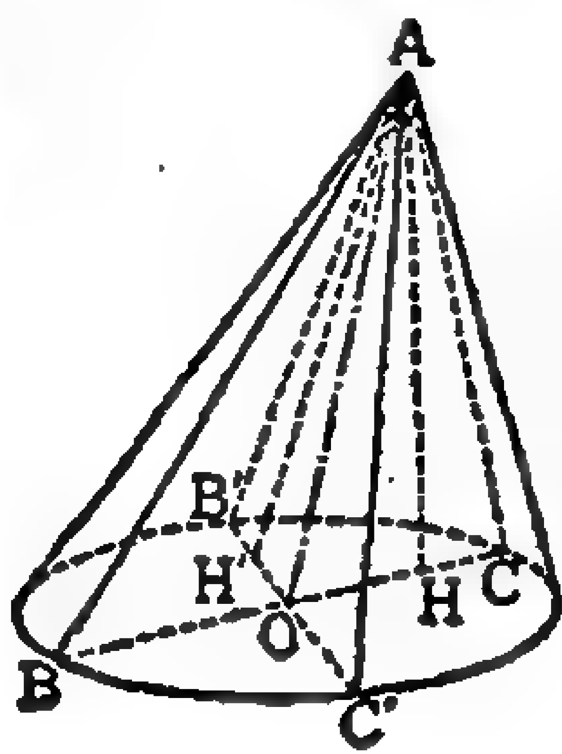
设平面 (AO, AH) 截得的截面为 $\triangle ABC$，AH 是 $\triangle ABC$ 的高，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AH。$$

设过 AO 的其它平面截得的截面为 $\triangle A'B'C'$，如果从 A 向 $B'C'$ 引垂线 AH'，则

$$S_{\triangle AB'C'}=\frac{1}{2}B'C'\cdot AH'。$$

已知BC、$B'C'$都是底的直径，它们是相等的．AH是到底面的垂线，所以$AH<AH'$．



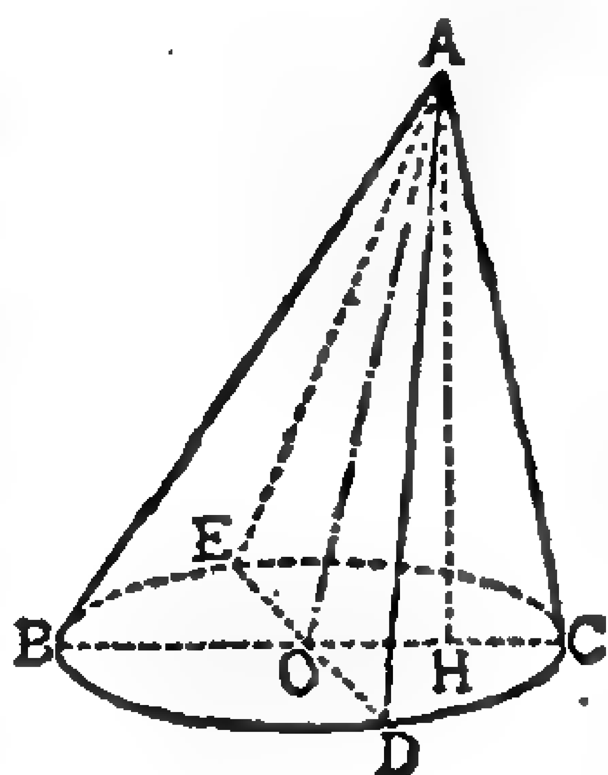
即 $\frac{1}{2}BC\cdot AH$

$<\frac{1}{2}B'C'\cdot AH'$，

从而$S_{\triangle ABC}<S_{\triangle AB'C'}$．因此，在平面$(AO,AH)$处的截面最小．

3255．证明：在斜圆锥的轴截面中，最大截面和最小截面互相垂直．

解 设斜圆锥的轴为AO，从顶点A向底面所引的垂线为AH，则平面$(AO,\ AH)$截斜圆锥的轴截面ABC，是这个圆锥最小的轴截面(参照上题)．从底面的圆心O引BC的垂线和底面圆周相交于D、E，设平面(AO,DE)截斜圆锥的截面为ADE，则由$DE\perp OH$，$DE\perp AH$可知，



$DE\perp$平面$(OH,\ AH)$， $\therefore$ $DE\perp AO$．

因此，截面ADE是等腰三角形，并且是圆锥的轴截面中最大的(参照问题**3253**)．

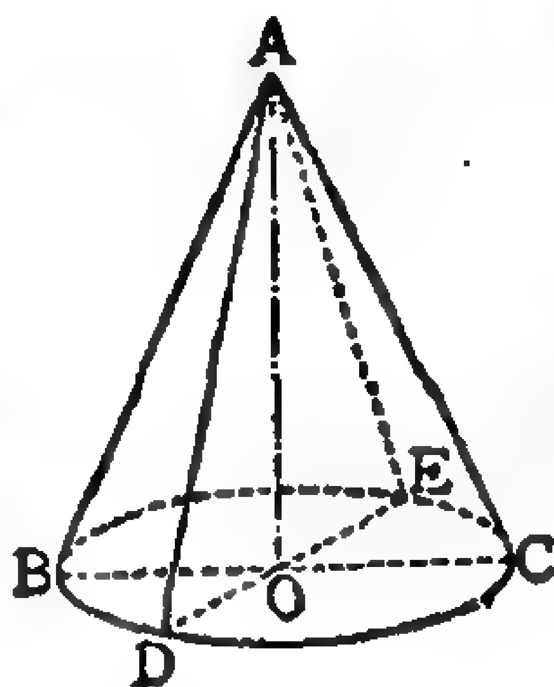
已知平面$(OH,\ AH)$与截面ABC是同一平面，且$DE\perp$截面ABC，

$\therefore$ 截面$ADE\perp$截面ABC．

即斜圆锥的轴截面中，最大的轴截面和最小的轴截面是互相垂直的．

3256．如果圆锥的两个轴截面都是等腰三角形，则该圆锥是直圆锥．否则，它是斜圆锥．

解 设圆锥的轴为AO，它的两个轴截面分别是$\triangle ABC$和$\triangle ADE$．如果$\triangle ABC$和$\triangle ADE$都是以A为顶点的等腰三角形，则AO就是BC及DE的垂直平分线，



$\therefore$ $AO\perp$平面$(BC,\ DE)$，

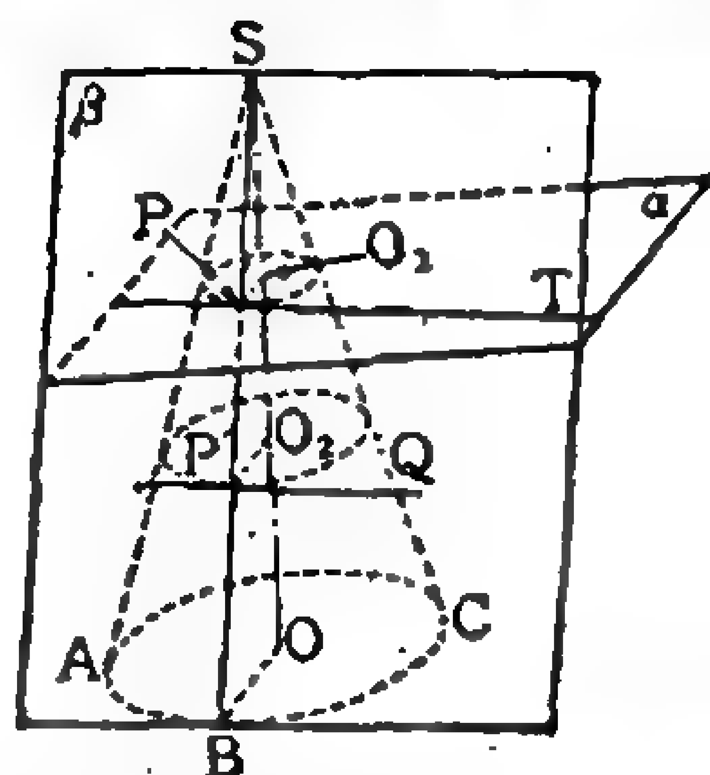
因此这个圆锥是直圆锥．

如果$\triangle ABC$不是等腰三角形，则AD就不是BC的垂直平分线，而O是BC的中点，所以AO不垂直于BC，即AO不垂直于底面．因此，这个圆锥是斜圆锥．

当$\triangle ADE$不是等腰三角形，也可同样证明这个圆锥是斜圆锥．

3257．过圆锥侧面上已知的一点，作这个圆锥的切面．

解 设圆锥S-ABC侧面上已知一点P，过点P的圆锥母线为SB，轴为SO．过点P作与底面平行的平面α截圆锥，则其截面是圆．设这个截面和SO的交点为O_1，O_1就是这个截面圆的圆心(问题**3252**)．在平面α上，从点P引圆O_1的切线PT，设SB和PT决定的平面为β，则β就是过已知点P且和圆锥S-ABC相切的平面．



［证明］ 在平面β上，取不在SB上的任意一点Q，设从Q引直线TP的平行线和SB的交点为P'．在平面$(SB,\ SO)$上，从点P'引PO_1的平行线和SO的交点为O_2．

$\because$ $P'Q\parallel PT$，$P'O_2\parallel PO_1$，

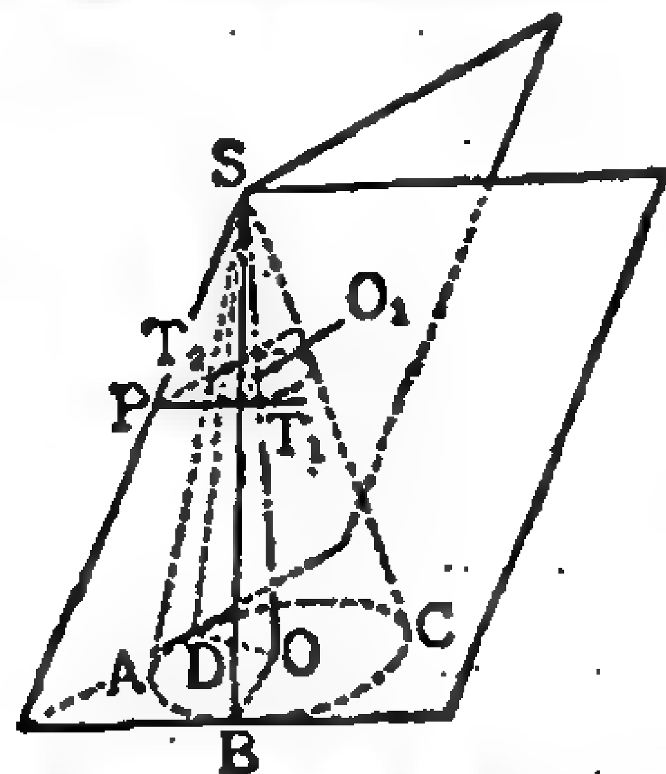
$\therefore$ 平面$(P'Q,\ P'O_2)\parallel$平面$(PT,\ PO_1)$，

即 平面$(P'Q,\ P'O_2)\parallel$平面α．

因此，平面$(P'Q,\ P'O_2)$和底平行．故平面$(P'Q,P'O_2)$截圆锥的截面是圆心为O_2，半径为O_2P'的圆．由于$PT\perp PO_1$，所以$P'Q\perp P'O_2$，从而$P'Q$就是圆O_2的切线，故点Q在截面圆O_2的外部，也在圆锥的外部．因而，在平面β上但不在直线SB上的一切点都在圆锥的外部，即平面β和圆锥只有一条公共的直线SB，因此平面β就是圆锥的切面．

3258．过圆锥外一已知点，作圆锥的切面．

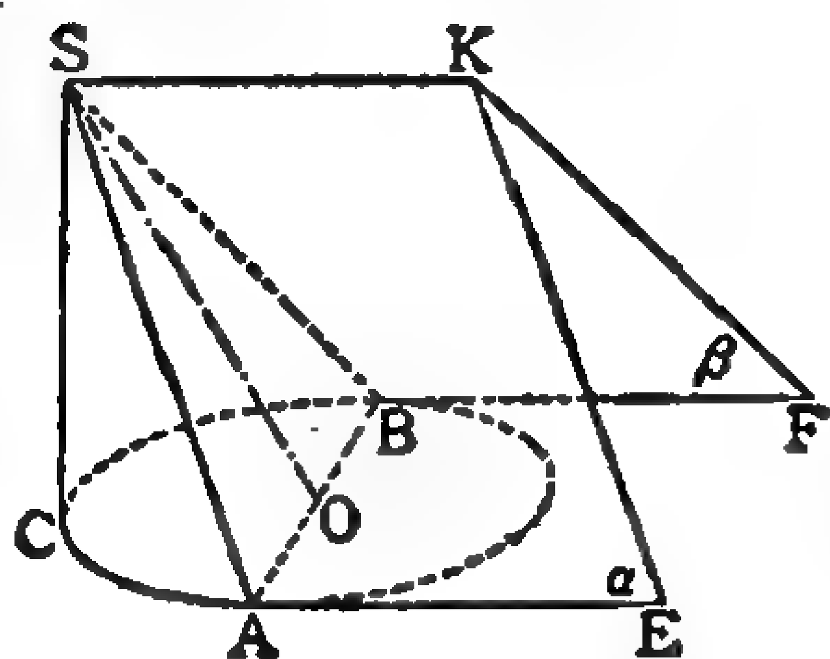
解 设在圆锥S-ABC外的已知点为P，圆锥的轴为SO．如果过点P作一个与圆锥底面平行的平面α截圆锥，则截面是圆．如果这个截面和SO的交点为O_1，则O_1就是这



个截面圆的圆心(问题 3252)。

在平面α上，从P点引圆O_1的切线PT_1和PT_2，设过切点T_1及T_2的圆锥的母线分别为SB和SD，则平面(PT_1, SB)和平面(PT_2, SD)都过已知点P且和这个圆锥相切的平面。因为平面(PT_1, SB)和圆锥只有一条公共直线SB，平面(PT_2, SD)和圆锥只有一条公共直线SD，其证明和上题一样。

3259. 过圆锥轴截面的两条母线分别作这个圆锥的切面，则这两个切面的交线和圆锥的底面平行。



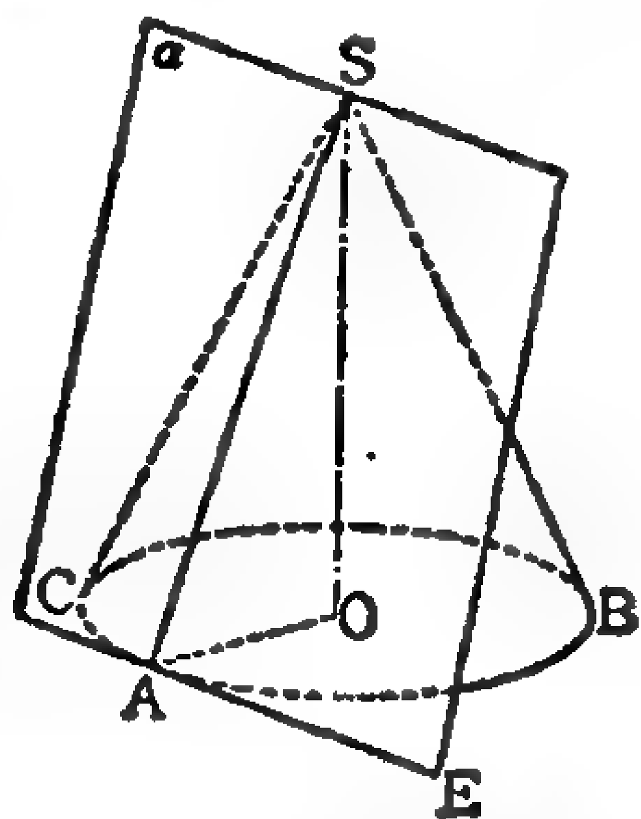
解 设圆锥$S\text{-}ABC$的轴为SO，轴截面为SAB，过母线SA与这个圆锥相切的平面为α，过母线SB与这个圆锥相切的平面为β。设圆锥底面所在的平面和平面α的交线为AE，则AE和底面圆周只有一个公共点A，所以AE是底面圆的切线，A为切点。同样，设圆锥底面所在的平面和平面β的交线为BF，则BF是底面圆的切线，B是切点。已知AB是底面圆的直径，故$AE \parallel BF$。平面α含有一条平行线AE而不含BF；平面β含有另一条平行线BF而不含AE，所以α和β必相交，设其交线为SK，则SK与AE平行，也与BF平行。

$$\therefore \quad SK \parallel \text{平面}(AE, BF).$$

已知平面(AE, BF)和底面是同一平面，

$$\therefore \quad SK \parallel \text{底面 } ABC.$$

3260. 直圆锥的切面与由这个切面上的母线和轴所决定的平面垂直。



解 设直圆锥$S\text{-}ABC$的切面为α，母线SA在切面上，直圆锥的轴为SO(O是底面圆的圆心)。设切面α和底所在的平面的交线为AE，则AE和底面圆周只有一个公共点A。因而AE是底面圆的切线，A是切点。

$$\therefore \quad AE \perp OA.$$

又因 $\quad SO \perp \text{底面 } ABC,$

$$\therefore \quad SO \perp AE,$$

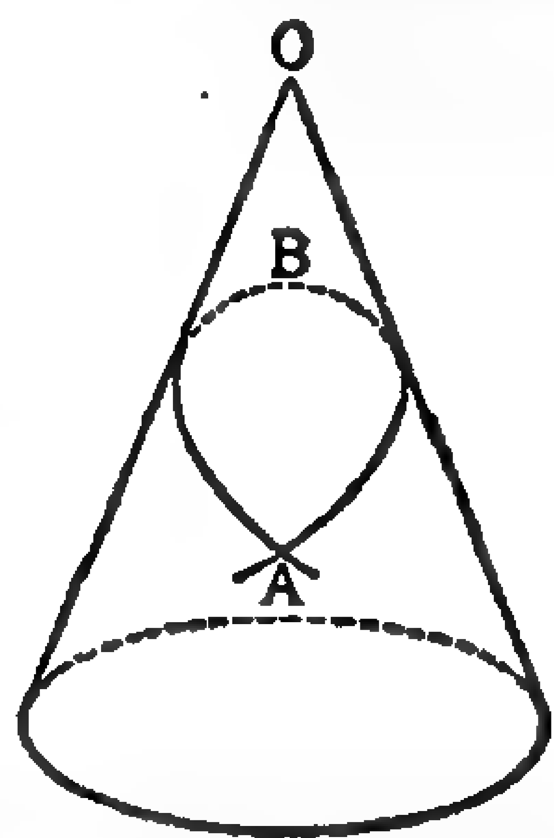
于是 $\quad AE \perp \text{平面}(OA, SO).$

但是平面(OA, SO)和平面(SA, SO)是同一平面，

$$\therefore \quad AE \perp \text{平面}(SA, SO).$$

又因切面α是包含AE的平面，所以切面$\alpha \perp$平面(SA, SO)。

3261. 如图，在直圆锥的侧面系紧一条线，斜绕圆锥表面一周。设从圆锥顶点O到该线的最远点为A，最近点为B，已知$OA = 15\text{cm}$，所绕线的长度为24cm，求OB的长。



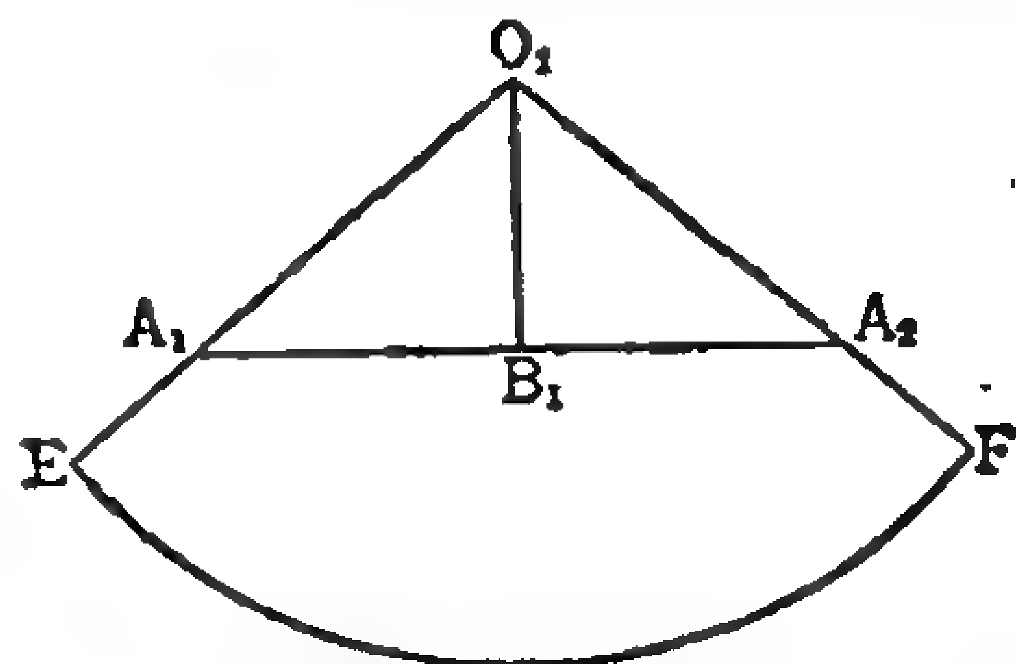
解 设沿母线OA截直圆柱的展开图为O_1EF，在展开图中A的位置为A_1、A_2，B的位置为B_1。由于线是绕紧的，所以$A_1B_1A_2$成为一条直线，B_1成为A_1A_2的中点。已知

$$O_1A_1 = O_1A_2 = OA = 15\text{cm},$$

$$A_1B_1 = B_1A_2 = 24\text{cm} \div 2 = 12\text{cm},$$

$$\therefore \quad OB = O_1B_1 = \sqrt{O_1A_1^2 - A_1B_1^2}$$

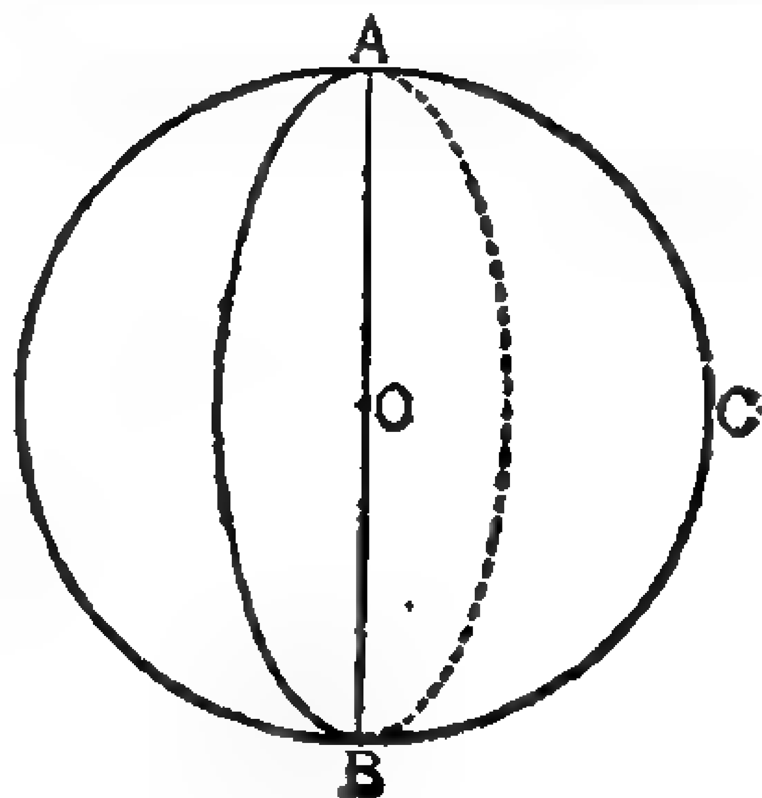
$$= \sqrt{15^2 - 12^2} = 9(\text{cm}).$$



2. 球、球面三角形

(1) 球

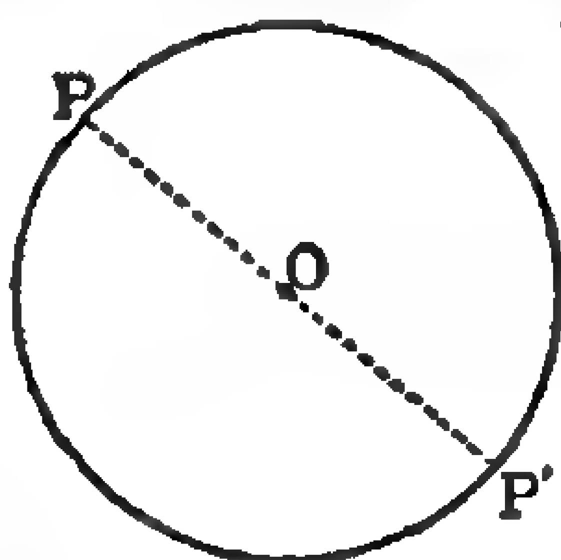
3262. (定义) 把半圆绕其直径为轴旋转所成的空间图形叫做球。



[说明] 把半圆ACB以直径AB为轴旋转，所成旋转体(球)的曲面叫球面，AB的中点叫球的中心(球心)。因

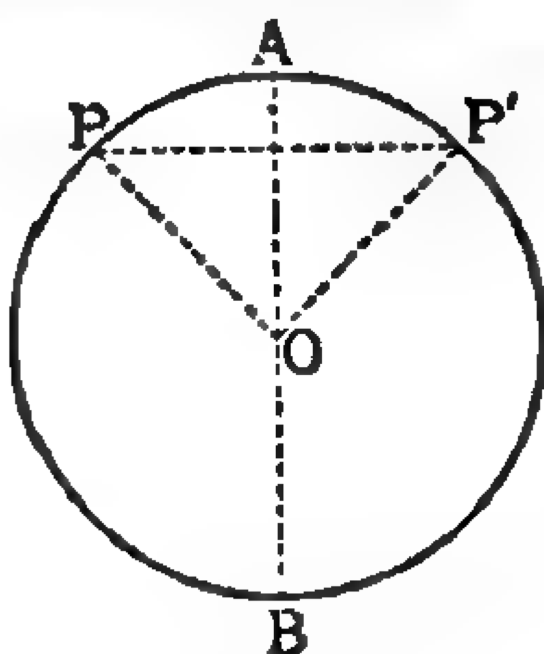
此，球面上的所有点到球心 O 的距离相等。

3263. 球有对称中心，对称轴及对称面。

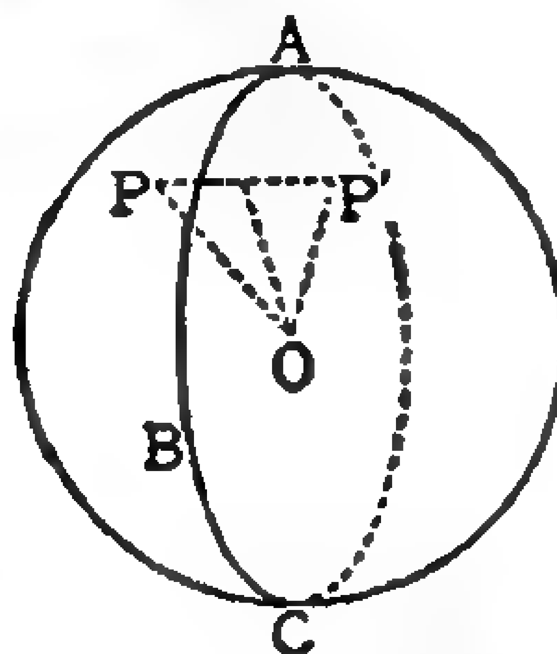


解 设球的中心为 O。

(i) 设 P 为球面上任意一点，把半径 PO 向 O 的方向延长，和球面相交于点 P'，则 $OP=OP'$。因此，点 P 关于 O 的对称点为 P'，故球是关于球心 O 对称的。



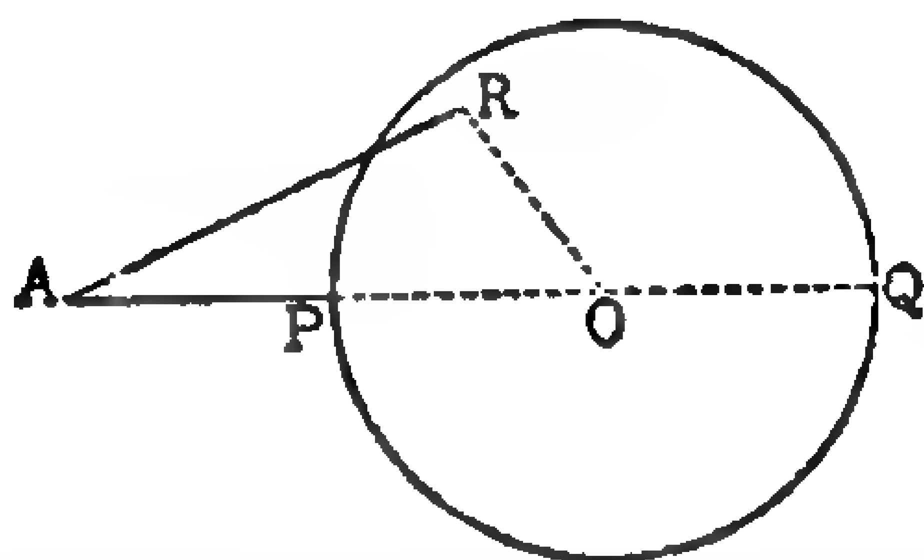
(ii) 设 P 为球面上任意一点，AB 是一条直径，点 P 关于 AB 的对称点为 P'，由于 $OP=OP'$，所以 P' 在球面上，故球是关于直径 AB 对称的。因为球有无数条直径，所以球的对称轴有无数条。



(iii) 设 P 为球面上任意一点，过球心 O 的截面为 ABC，点 P 关于截面 ABC 的对称点为 P'，则由于 $OP=OP'$，所以 P' 在球面上。因此，球是关于包含球心的平面对称的。因为含有球心的平面有无数个，所以球的对称面也有无数个。

3264. 如果点 A 在球 O 外，则从 A 到球 O 上任一点的距离中，以线段 AO 和球 O 的交点 AP 最小；以线段 AO 的延长线和球 O 的交点 AQ 最大。

如果点 A 在球内，则从 A 到球 O 上任一点的距离以线段 AO 向 A 方向延长和球 O 的交点的距离最小；以线段 AO 向 O 方向延长和球 O 的交点的距离最大。



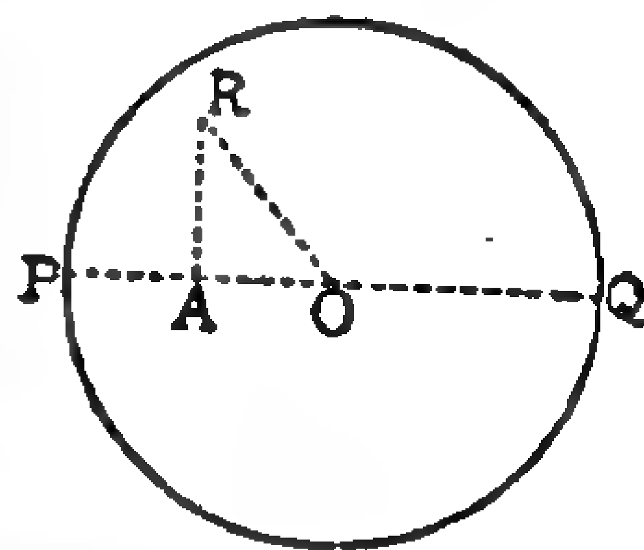
解 (i) 当点 A 在球 O 外时，设线段 AO 和球 O 的交点为 P，线段 AO 的延长线和球 O 的交点为 Q。如在球 O 上取既不是 P 又不是 Q 的任意一点 R，则在 $\triangle AOR$ 中，

$$AO-OR<AR,\quad AO+OR>AR,$$

由于 $\quad AO-OR=AO-OP=AP,$

$$AO+OR=AO+OQ=AQ,$$

$$\therefore\quad AP<AR,\ AQ>AR.$$



(ii) 当点 A 在球内时，设线段 AO 向 A 方向延长和球的交点为 P，线段 AO 向 O 方向延长和球的交点为 Q。如在球上取既不是 P 也不是 Q 的任意一点 R，则在 $\triangle AOR$ 中，

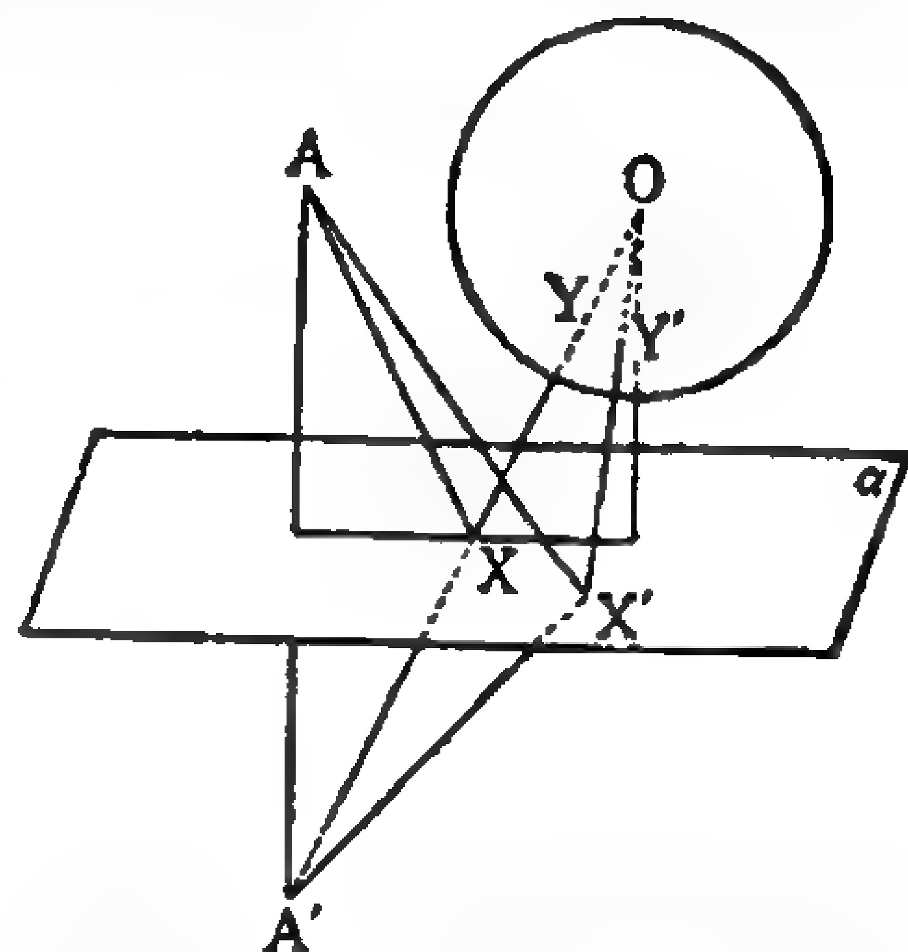
$$OR-OA<AR,\ OR+OA>AR.$$

由于 $\quad OR-OA=OP-OA=AP,$

$$OR+OA=OQ+OA=AQ,$$

$$\therefore\quad AP<AR,\ AQ>AR.$$

3265. 已知在平面 α 的同侧有定点 A 和球 O。在平面 α 上取一点 X，在球 O 上取一点 Y，要使 $AX+XY$ 的值最小，问点 X、Y 应怎样选取。



解 设点 A 关于平面 α 的对称点为 A'，A' 和球心 O 连结的线段和平面 α 的交点为 X，和球 O 的交点为 Y，这时 $AX+XY$ 的值最小。

事实上，在平面 α 上取任意一点 X'，球 O 上取任意一点 Y'，则有

$$AX'+X'Y'=A'X'+X'Y'\geq A'Y',$$

$$AX+XY=A'X+XY=A'Y,$$

由问题 **3264** 知 $A'Y\leq A'Y'$，

$$\therefore\quad AX+XY\leq AX'+X'Y'.$$

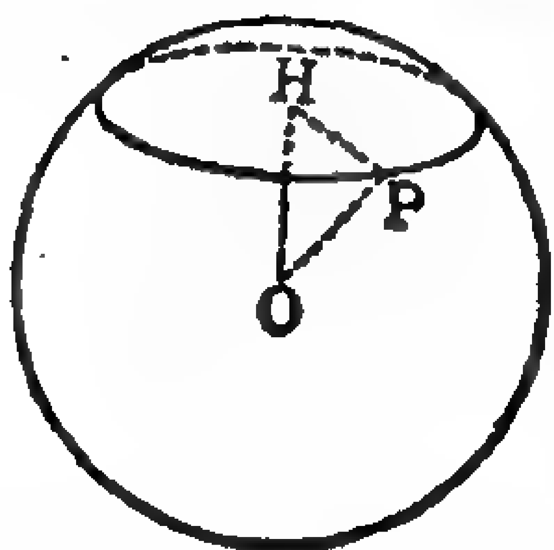
注 当 Y' 与 Y 重合，X' 与 X 重合时，

$$AX+XY=AX'+X'Y'.$$

3266. 球被平面所截，则其截面是圆。

解 设球的球心为 O，半径为 r，从 O 向截平面所引垂线的垂足为 H，截口上的任意一点为 P，则 $OP=r$，$\angle OHP=\angle R$。当 $OH=h$ 时，

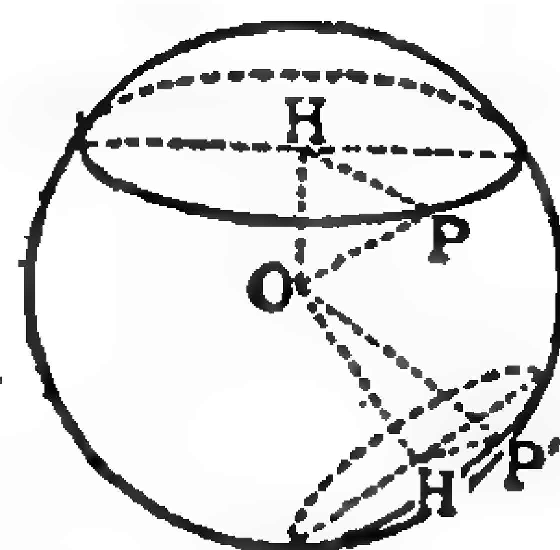
$$HP=\sqrt{OP^2-OH^2}$$
$$=\sqrt{r^2-h^2}$$
$$=(\text{定值}).$$



故截面是以 H 为圆心，以定值$\sqrt{r^2-h^2}$为半径的圆。

注 用球心距相等的平面截球，所得截面圆都相等。

3267. 用两个不同的平面截球，则离球心越近的截面越大。



解 设球的球心为 O，半径为 r，从 O 向两个平面所引垂线的垂足分别为 H、H'，截面的半径分别为 HP、$H'P'$，则

$$HP=\sqrt{r^2-OH^2},$$
$$H'P'=\sqrt{r^2-OH'^2}.$$

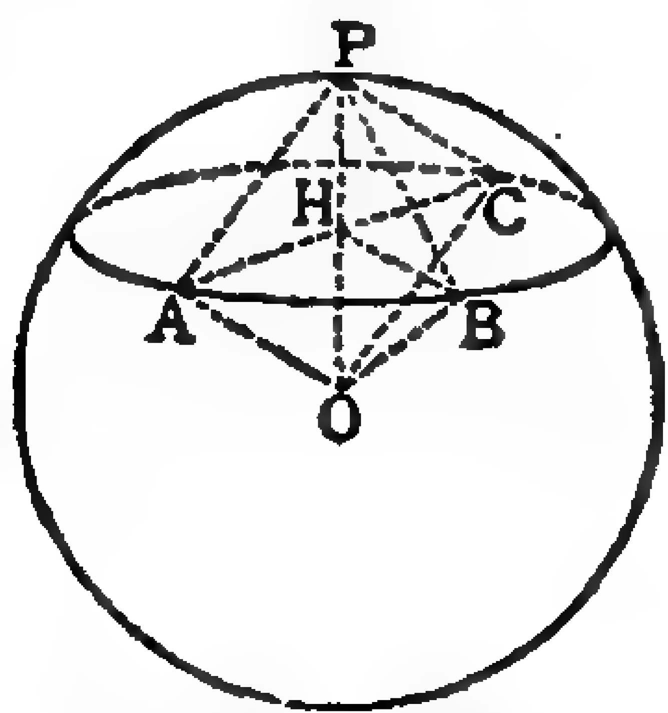
若 $OH<OH'$，则

$$\sqrt{r^2-OH^2}>\sqrt{r^2-OH'^2},$$
$$\therefore\quad HP>H'P'.$$

故球的截平面离球心越近，所得的截面越大。

注 过球心的球截面是以球的半径为半径的圆，它是所有球截面中最大的一个，我们把它叫做球的大圆，不通过球心的球截面，叫做球的小圆。

3268. 设球心为 O 的球被一个平面截得的截面圆为 ABC，P 是球上到截面圆 ABC 上各点等距离的点，则截面 ABC 与球的半径 OP 垂直。



解 设从 P 向截面 ABC 所引的垂线的垂足为 H，截面 ABC 的圆上任意两点为 A、B，则在 $\triangle PHA$、$\triangle PHB$ 中，$PA=PB$，PH 公共，

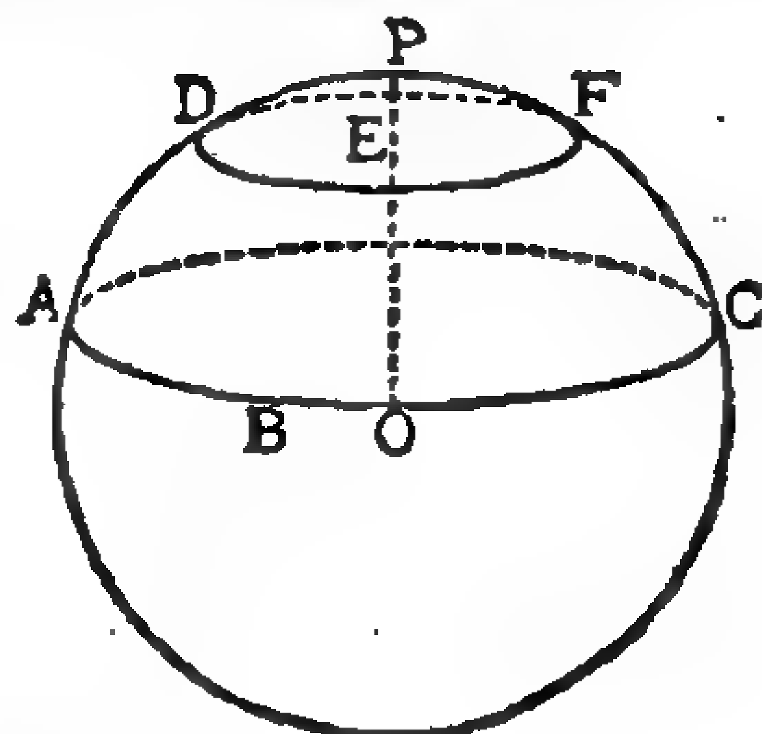
$$\angle PHA=\angle PHB=\angle R,$$
$$\therefore\quad \triangle PHA\cong\triangle PHB,$$

因而 $\qquad HA=HB.$

故 H 到截面圆 ABC 上各点的距离相等，因而 H 是截面圆 ABC 的圆心。同样，如从球心 O 向截面 ABC 所引垂线的垂足为 H'，则 H' 也是截面圆 ABC 的圆心。因此 H 和 H' 是重合的，从而 O、H、P 三点成一直线，且截面 $ABC\perp OP$。

注 球上这样的点 P 叫截面 ABC 的极。

3269. 有相同的极的小圆所在的平面是平行的。

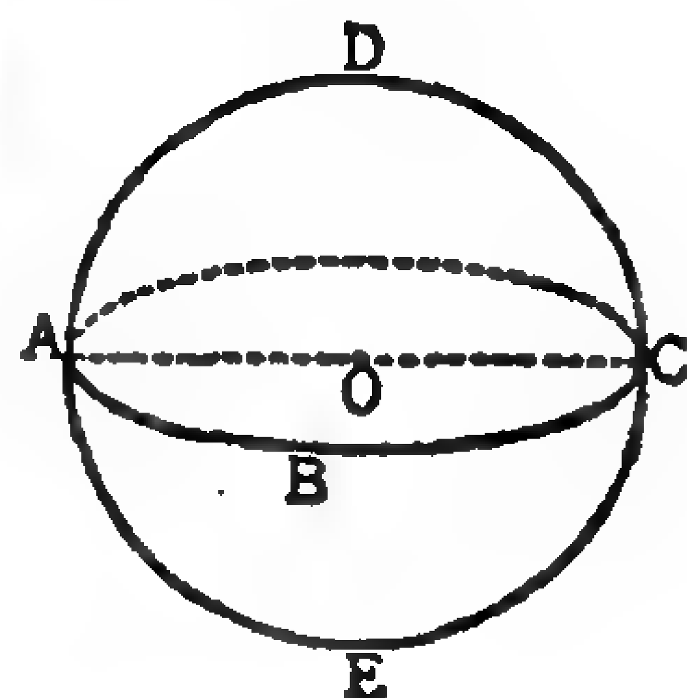


解 设球 O 的两个小圆分别为 ABC、DEF，它们共同的极为 P，则

$$\text{平面 } ABC\perp OP,$$
$$\text{平面 } DEF\perp OP,$$

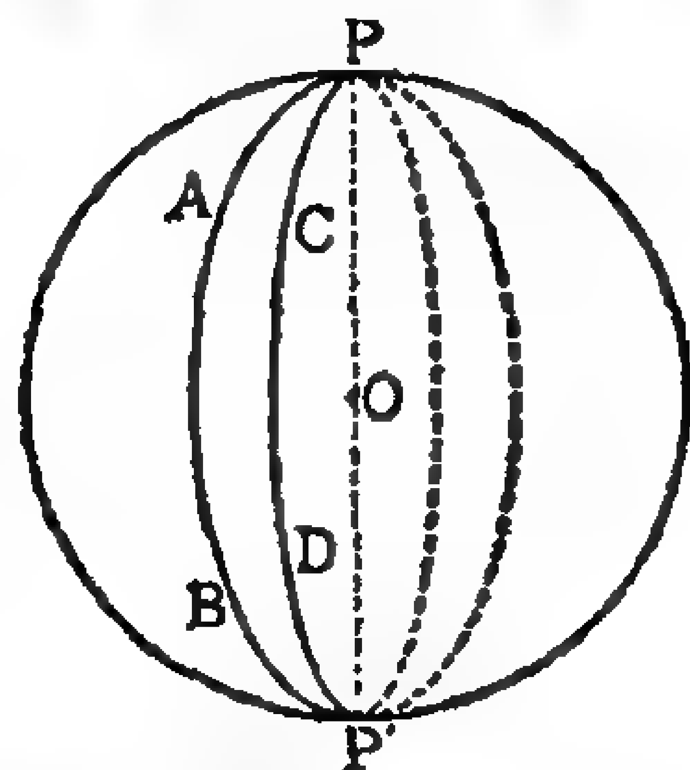
所以 $\qquad$ 平面 $ABC\,/\!/\,$平面 DEF。

3270. 球的大圆把球及球面分成两等分。



解 设球心为 O 球的任意大圆为 ABC，它把球分成的两部分为 D-ABC 和 E-ABC。如果把 D-ABC 的截面和 E-ABC 的截面重合，而且使两部分在截面的同侧迭合，则由两部分曲面上的所有点到球心 O 都是等距离，可知这两个曲面完全重合。故被大圆 ABC 所分开的球及球面的两部分完全相等。即球的大圆把球及球面分成两等分。

3271. 设球的两个大圆相交于点 P，则这两个大圆也在点 P 的相对点（把 P 作为一端的球直径的另一端）P' 处相交。

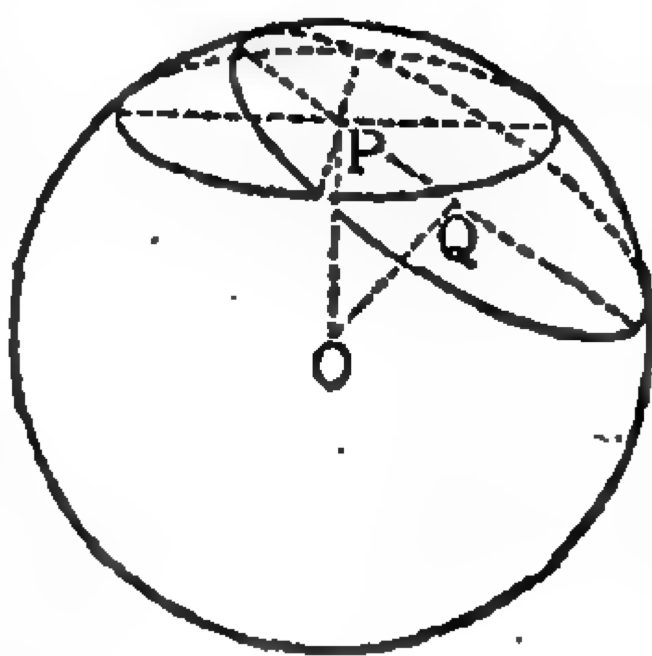


解 设球 O 的两个大圆 PAB、PCD 相交于点 P，P 的相对点为 P'。因为圆 PAB、PCD 都是大圆，所以它们过点 P 的公共直径为 PP'。因此这两个大圆在点 P' 也是相交的。

3272. 在过球内定点 P 的截面中，和 OP

垂直的截面的面积最小。

解　过点 P 作垂直于 PO 的平面 α，则在平面 α 处的截面面积最小。事实上，过点 P 作不与 α 重合的任意平面 β，设从 O 作平面 β 的垂线的垂足为 Q，则

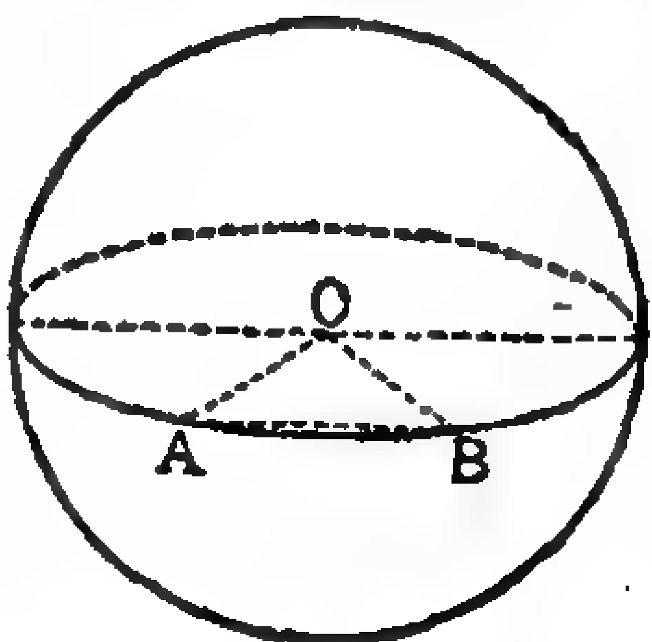


$$\angle PQO=\angle R,$$

$$\therefore\quad OQ<OP.$$

其中 OP 是从 O 到平面 α 的距离，OQ 是从 O 到平面 β 的距离，因此平面 β 的截面比平面 α 的截面大(问题 **3267**)。即平面 α 的截面最小。

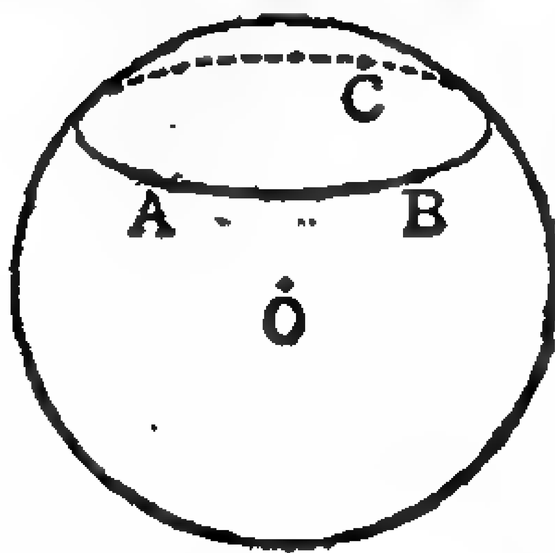
3273. 如果 A、B 为球上任意两点，并且 A、B 不是球直径的两端，则过 A、B 的大圆只有一个。



解　设球的球心为 O，则过球上两点 A B 的大圆，就是球过 A、B、O 三点的平面的截面。当 A、B 不是球直径的两端时，三点 A、B、O 不在同一直线上，它们仅可决定一个平面，因此过 A、B 的大圆只有一个。

注　如果 A、B 是球直径的两端，则 A、B、O 三点共线，因为过直线 AOB 的平面有无数个，所以过 A、B 两点的大圆也有无数个。

3274. 过球上三点且在球上的圆只有一个。



解　设球上的三点分别为 A、B、C，用三点 A、B、C 所确定的平面截球，则所得截面为圆，且其圆周过 A、B、C 三点。故过球上三点 A、B、C 且，在球上的圆是存在的。

又因球上的三点 A、B、C 不在同一直线上，而过不在同一直线上的三点只能确定一个圆，故过球上的三点 A、B、C 且在球上的圆只有一个。

注　平面 ABC 不过球心时，过 A、B、C 三点且在球上的圆是小圆；平面 ABC 过球心时，过 A、B、C 三点且在球面上的圆是大圆。

3275. 含有已知圆上三点的球，包含这个圆的全部。

解　设已知圆上的三点分别为 A、B、C(不在同一直线上)，含有这三点的球的球心为 O (参照上题的图)，如果球不包含已知圆的全部，则在平面 (ABC) 处的截面圆也含有 A、B、C 三点。因此，含有 A、B、C 三点的圆和球上的截面圆共两个。但是过不在一直线上三点的圆只有一个，所以这是不合理的。故含有圆上三点的球必含有圆的全部。

3276. 下面是平面上的有关命题，试写出它们在球面上对应的命题。但在 iv 中，应把正确的数先填在 (iv) 的(　)中。

(i) 在连结两点 A、B 的连线中以线段 AB 最短。

(ii) 过两点的直线有一条，而且只有一条。

(iii) 不同的两条直线相交于一点，或者互相平行。

(iv) 四条直线把平面最多分成(　)部分。

解　(i) 在球面上不同的两点 A、B 的连线中，以过 A、B 大圆中的劣弧 AB 最短。

(ii) 过不是直径两端的不同两点的大圆有一个，而且只有一个。

(iii) 不同的两个大圆一定在直径两端相交。

(iv) 四个大圆把球面最多分成 (14) 个部分。

注　现在考虑 n 条直线把平面最多能分成多少部分。设把最多部分数用 $f(n)$ 表示，如果直线数从 n 条再增加一条，则增加的一条直线和 n 条直线就有 n 个交点，分平面的部分数就增加 $n+1$，即

$$f(n+1)=f(n)+n+1,$$

$$\therefore\quad f(n+1)-f(n)=n+1.$$

已知一条直线把平面分成两个部分，即

$$f(1)=2,$$

$$\therefore\quad f(1)=2,$$

$$f(2)-f(1)=2,$$

$$f(3)-f(2)=3,$$

$$f(4)-f(3)=4,$$

$$\therefore\quad f(4)=2+2+3+4=11.$$

因此问题(iv)即：四条直线把平面最多能分成 11 个部分。

下面再考虑球上 n 个大圆把球面最多能分成多少部分。设这个最多部分数用 $F(n)$ 表示，如果把大圆数从 n 个再增加一个，则增加的一个大圆和 n 个大圆有 $2n$ 个交点，从而球面增加 $2n$ 个部分。

$$\therefore\quad F(n+1)=F(n)+2n,$$

即　　$F(n+1)-F(n)=2n.$

已知一个大圆把球面分成两个部分。即

$$F(1)=2,$$

所以有

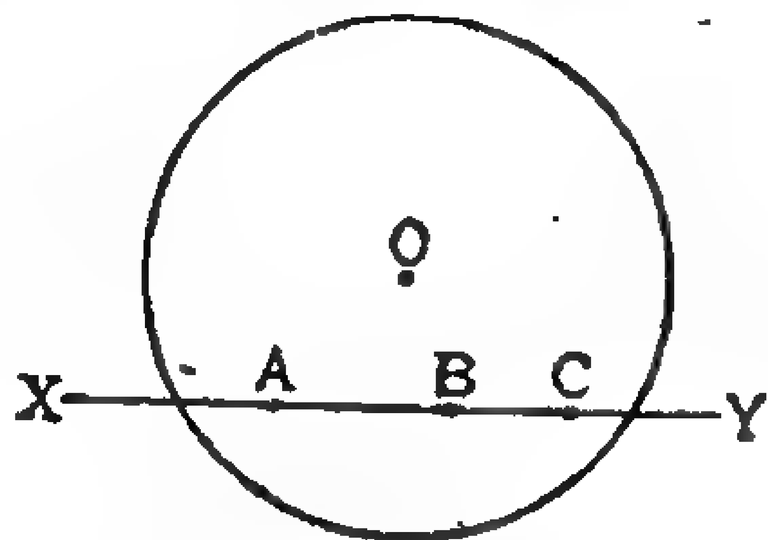
$$F(1)=2,$$
$$F(2)-F(1)=2\times1,$$
$$F(3)-F(2)=2\times2,$$
$$F(4)-F(3)=2\times3,$$

$$\therefore\quad F(4)=2+2\times1+2\times2+2\times3=14.$$

这就得出了(iv)的解答。

3277. 一条直线和球的交点不超过两个。

解　设直线 XY 和球相交于 A、B、C 三点，该球的球心为 O，则

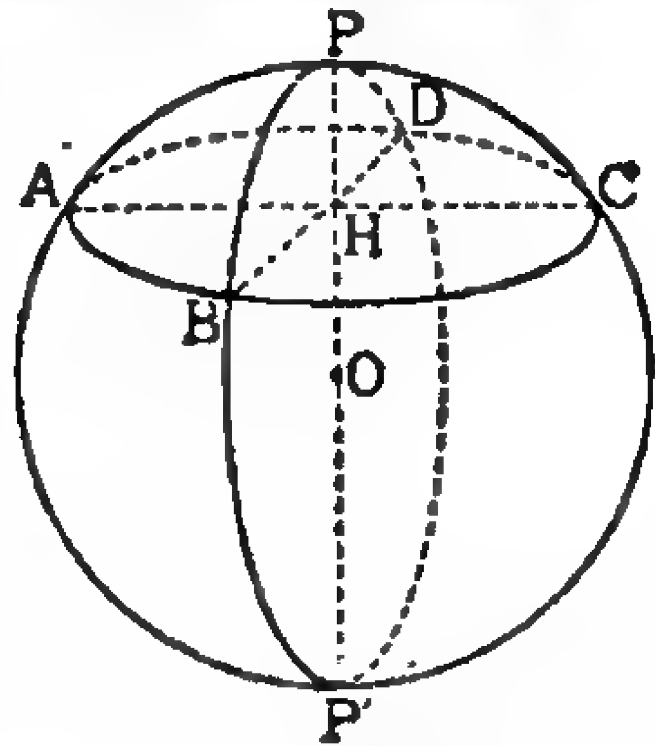


$OA=OB=OC$,

且 A、B、C 在直线 XY 上，这是不合理的。因此一条直线和球不会有三个交点，同理可证不会有四个、五个…交点。故一条直线与球不会有两个以上的交点。

3278. 球的小圆被过它的极的大圆二等分。

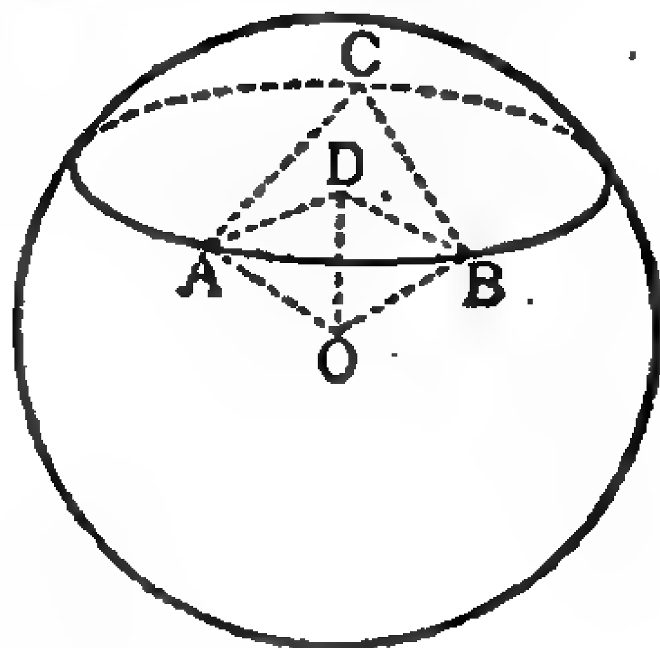
解　设球 O 的小圆为 $ABCD$，它的极为 P、P'，过 P、P' 的大圆为 $PBP'D$，小圆和大圆的交点为 B、D，则小圆的平面和大圆平面的交线为 BD。



设在大圆平面上，BD 和 PP' 的交点为 H，则 H 也是半径 OP 与小圆平面的交点。又因小圆 $ABCD\perp OP$(问题 **3268**)，所以 H 为小圆的圆心，因而 BD 为小圆的直径，故小圆 $ABCD$ 被 BD 二等分。即小圆 $ABCD$ 被大圆 $PBP'D$ 二等分。

3279. 已知球心为 O 的球上有 A、B、C 三点，证明 $\angle ACB$ 不小于 $\angle AOB$ 的一半。

解　(i) 如果用平面 ABC 截球所得的截面 ABC 是小圆。设小圆 ABC 的圆心为 D，则由 $\angle ADO=\angle R$ 可知 $DA<OA$。因为 $\triangle ADB$、$\triangle AOB$ 都是等腰三角形，AB 公共，且 $DA<OA$，所以



$\angle ADB>\angle AOB$,

即　　$\frac{1}{2}\angle ADB>\frac{1}{2}\angle AOB.$

又同弧上的圆周角是圆心角的 $\frac{1}{2}$，从而

$$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle ADB,$$

$$\therefore\quad \angle ACB>\frac{1}{2}\angle AOB.$$

(ii) 如果平面 ABC 截球的截面 ABC 是大圆。因为 $DA=OA$，所以

$$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB.$$

综合 (i)、(ii) 两种情况，可得

$$\angle ACB\geqq\frac{1}{2}\angle AOB.$$

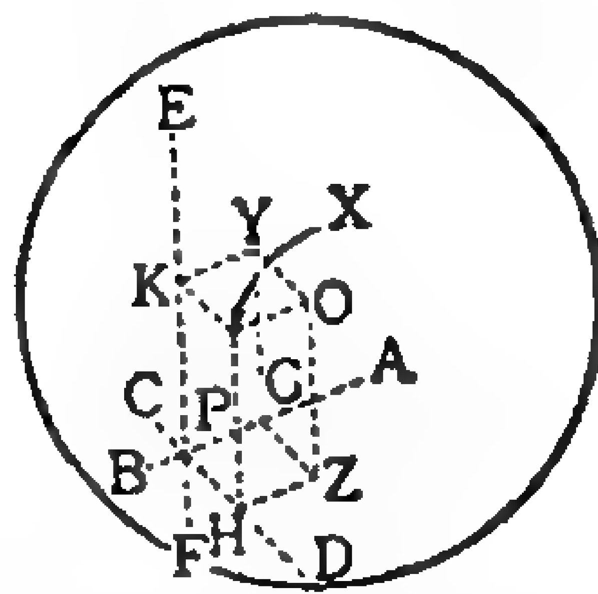
3280. 已知点 P 是球内的定点，AB、CD、EF 是过点 P 且相互直交的三条弦，证明：

$$AB^2+CD^2+EF^2$$

及　$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2+PE^2+PF^2$

是定值。

解　设球的半径为 r，线段 OP 的长度为 d，弦 AB、CD、EF 的中点分别为 G、H、K。从 O 向平面 (CD, EF) 引垂线的垂足为 X，从 O 向平面 (AB, EF) 引垂线的垂足为 Y，从 O 向平面 (AB, CD) 引垂线的垂足为 Z，则 $OXKY\text{-}ZHPG$ 是长方体。设



$$OX=YK=GP=ZH=l,$$
$$OY=XK=HP=ZG=m,$$
$$OZ=XH=KP=YG=n,$$
$$\therefore\quad l^2+m^2+n^2=OP^2=d^2.$$

而　$AG^2=OA^2-OG^2=OA^2-(OY^2+YG^2)$
$=r^2-(m^2+n^2)$,

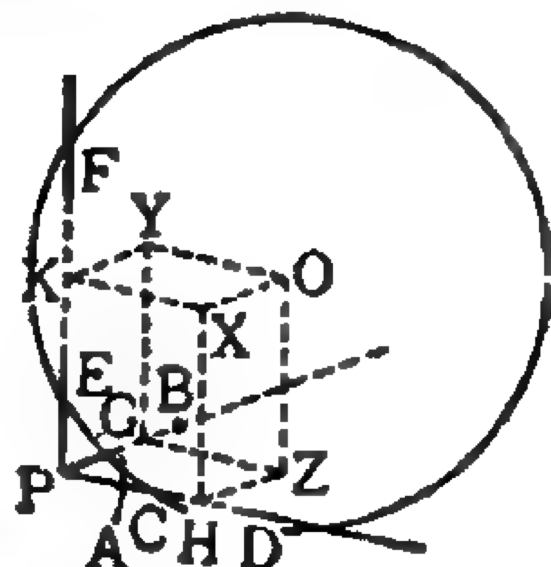
$\therefore \quad AB^2=(2AG)^2=4AG^2$
$=4[r^2-(m^2+n^2)].$

同样，$CD^2=4[r^2-(n^2+l^2)]$，
$EF^2=4[r^2-(l^2+m^2)]$，
$\therefore \quad AB^2+CD^2+EF^2$
$=12r^2-8(l^2+m^2+n^2)$
$=12r^2-8d^2$（定值）.

又，
$PA^2+PB^2=(AG+GP)^2+(AG-GP)^2$
$=2AG^2+2GP^2$
$=2[r^2-(m^2+n^2)]+2l^2$
$=2r^2-2m^2-2n^2+2l^2.$

同样，$PC^2+PD^2=2r^2-2n^2-2l^2+2m^2$，
$PE^2+PF^2=2r^2-2l^2-2m^2+2n^2$，

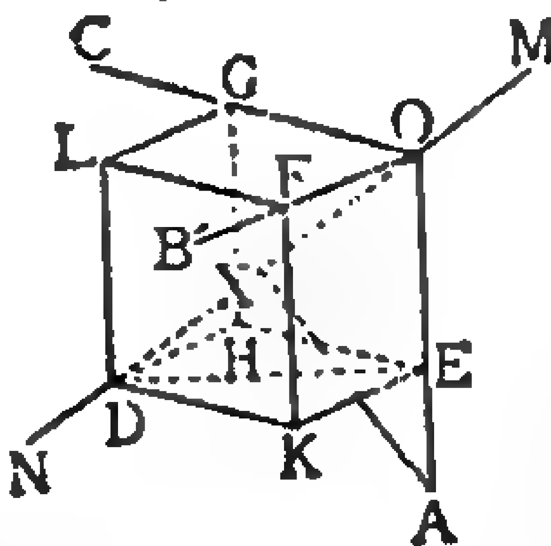
$\therefore \quad PA^2+PB^2+PC^2$
$+PD^2+PE^2+PF^2$
$=6r^2-2(l^2+m^2+n^2)$
$=6r^2-2d^2$（定值）.



注　当 P 在球外时，也能得出完全相同的结果.

3281. 已知 OA、OB、OC 是球 O 的三条互相垂直的半径，它们在过球心 O 的任意直线 MN 上的射影分别为 OX、OY、OZ，证明
$$OX^2+OY^2+OZ^2=R^2,$$
其中 R 是球的半径.

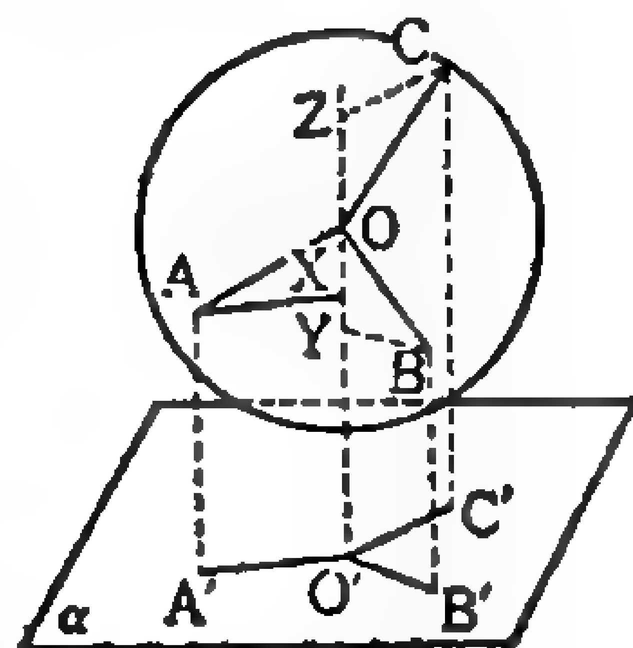
解　在 MN 上取 OD 等于半径，先过 D 作平行于平面 (OB, OC) 的平面 (DH, DK)，和 OA 交于 E. 其次过点 D 作平行于平面 (OC, OA) 的平面 (DK, DL)，和 OB 交于 F. 最后，过点 D 作平行于平面 (OA, OB) 的平面 (DL, DH)，和 OC 交于 G.



已知 OA、OB、OC 互相垂直，所以 OE、OF、OG 为三边的平行六面体 $OGLF\text{-}EHDK$ 是长方体，于是
$$OE^2+OF^2+OG^2=OD^2=R^2.$$
在 $\triangle ODE$ 和 $\triangle AOX$ 中，已知
$$OD=OA=R,\ \angle OED=\angle OXA=\angle R,$$
$\angle O$ 公共.
$$\therefore \quad \triangle ODE \cong \triangle OAX,$$
$$\therefore \quad OE=OX.$$

同样，$OF=OY$，$OG=OZ$，
$$\therefore \quad OE^2+OF^2+OG^2=OX^2+OY^2+OZ^2,$$
从而 $OX^2+OY^2+OZ^2=R^2$.

3282. 已知 OA、OB、OC 为球的互相垂直的三条半径，它们在任意平面 α 上的正投影分别为 $O'A'$、$O'B'$、$O'C'$，证明
$$O'A'^2+O'B'^2+O'C'^2=2R^2,$$
其中 R 为球的半径.



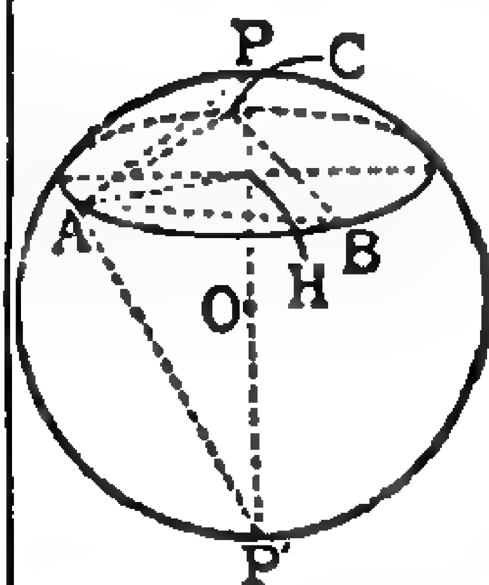
解　如图，设从 A、B、C 向 OO' 所作垂线的垂足分别为 X、Y、Z，则 OO'、AA'、BB'、CC' 都是平面 α 的垂线，$AA'O'X$、$BB'O'Y$、$CC'O'Z$ 都是矩形.

$\therefore \quad O'A'^2+O'B'^2+O'C'^2$
$=XA^2+YB^2+ZC^2$
$=(OA^2-OX^2)+(OB^2-OY^2)$
$+(OC^2-OZ^2)$
$=(R^2-OX^2)+(R^2-OY^2)$
$+(R^2-OZ^2)$
$=3R^2-(OX^2+OY^2+OZ^2).$

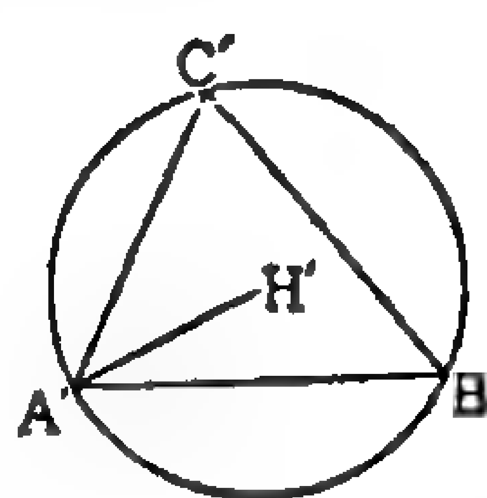
根据上题知，
$$OX^2+OY^2+OZ^2=R^2,$$
$$\therefore \quad O'A'^2+O'B'^2+O'C'^2$$
$$=3R^2-R^2=2R^2.$$

3283. 求球的半径.

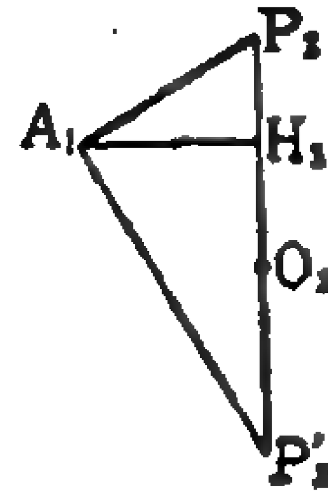
解　设已知球的球心为 O.



(1)



(2)



(3)

(1) 取球面上的任意一点 P，把两脚规的一端固定在 P 点，以另一端在球面上画圆 ABC（图 1），P 就是小圆 ABC 的极（问题 3268），PA 的长度就是圆规两脚的宽度.

(2) 若取小圆 ABC 上的任意三点 A、B、C，那么 AB、BC、CA 的长度用两脚规能够求出. 因此在平面上可以作出和 $\triangle ABC$ 相同的 $\triangle A'B'C'$，设其外接圆的圆心为 H'，则 $H'A'$

等于小圆 ABC 的半径 HA(图 2)。

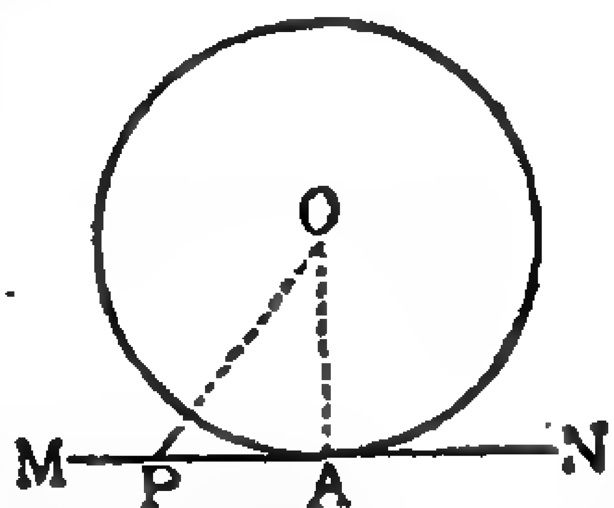
(3) 取 H_1A_1 等于 $H'A'$ 为直角边，和以 A_1P_1 等于 AP 为斜边，作直角$\triangle H_1A_1P_1$.设从 A_1 作 A_1P_1 的垂线和 P_1H_1 的延长线交于 P_1'，则 P_1P_1' 等于球的直径 PP' (图 3)。

事实上，在 $\triangle A_1P_1P_1'$ 和 $\triangle APP'$ 中，

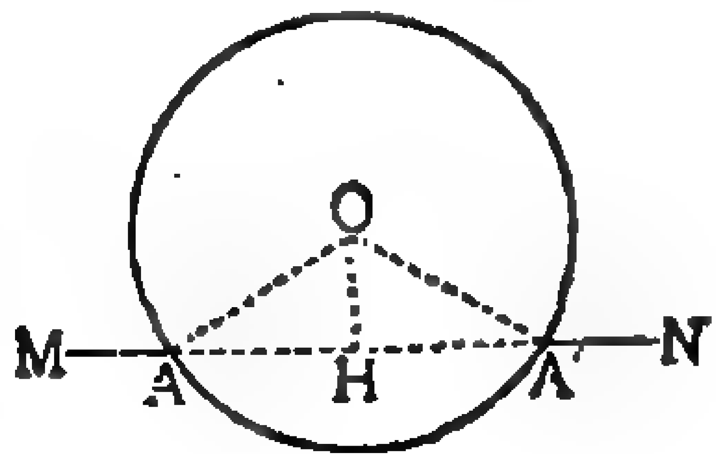
$$\angle P_1=\angle P,\ \angle A_1=\angle A=\angle R,$$
$$A_1P_1=AP,$$
$$\therefore\quad \triangle A_1P_1P_1'\cong\triangle APP',$$
$$\therefore\quad P_1P_1'=PP'.$$

若取 P_1P_1' 的 $\frac{1}{2}$ 为 O_1P_1，即为球 O 的半径 OP。

3284. 过球面上的一点且与半径垂直的直线就是球的切线。反之，过切点的半径和切线垂直。

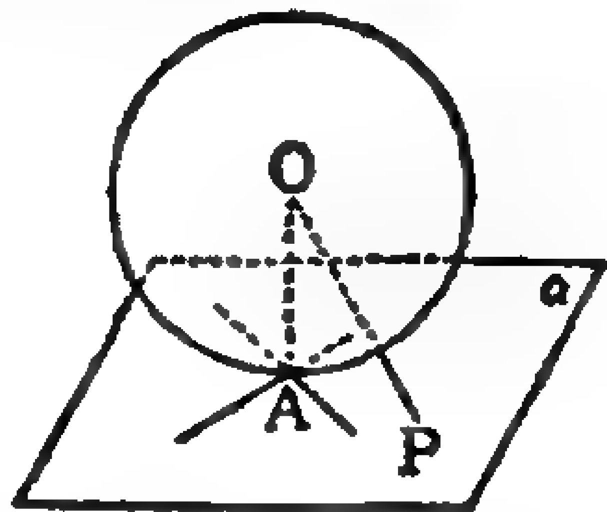


解 (i) 设球心为O，球面上的一点为 A，过点 A 且与半径OA垂直的直线为 MN。设在 MN 上除 A 外的任意一点为 P，则因 $OP>OA$，所以 P 在球外。即在 MN 上除点 A 外，其它的点都在球外，故 MN 是球 O 的切线。

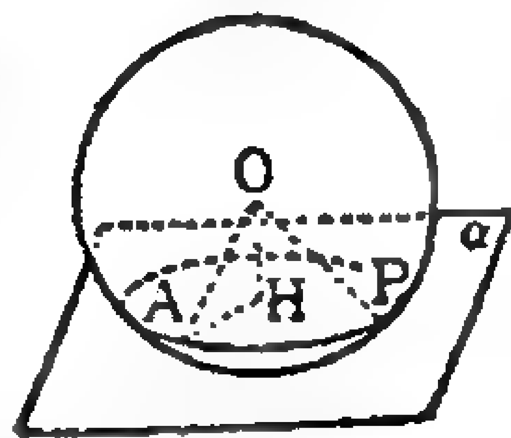


(ii) 设 MN 为球 O 的切线，A 为该切线的切点。假定 MN 与半径 OA 不垂直，从 O 向 MN 作垂线 OH，在 MN 上取点 A'，使 $HA'=HA$，且 A'、A 在点 H 的异侧，则 $OA'=OA$，所以 A' 为球面上的点，于是 MN 和球有两个交点 A 和 A'，这与 MN 是切线的假设相矛盾。故以 A 为切点的切线 MN 与过此切点的半径互相垂直。

3285. 过球面上一点，且与半径垂直的平面是球的切面。反之，过切点的半径和切面垂直。

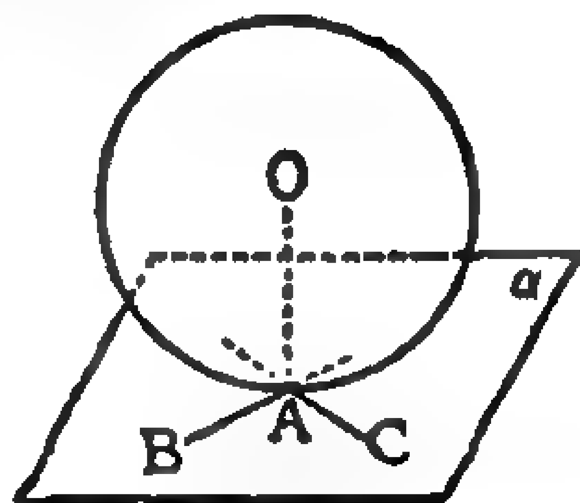


解 (i) 设球心为 O，球上的一点为 A，过点 A 且与半径 OA 垂直的平面为 α。设在平面 α 上除 A 以外的任意一点为 P，则因 OA 是平面 α 的垂线，OP 是平面 α 的斜线，所以 $OP>OA$，从而 P 在球外。这就是说，在平面 α 上除一点 A 在球面上外，其它所有点都在球外，因此平面 α 是这个球的切面。



(ii) 设平面 α 是球 O 的切面，A 为其切点，假定平面 α 与半径 OA 不垂直，设从 O 向平面 α 作垂线，其垂足为 H。在平面 α 上以 H 为圆心，以 HA 为半径作圆，则这个圆上的任意一点 P 都有 $OP=OA$，从而这个圆在球上。这和平面 α 是球的切面的条件相矛盾，故以 A 作为切点的切面 α 与半径 OA 垂直。

3286. 由球的共同切点的两条切线所决定的平面，是这个球的切面。



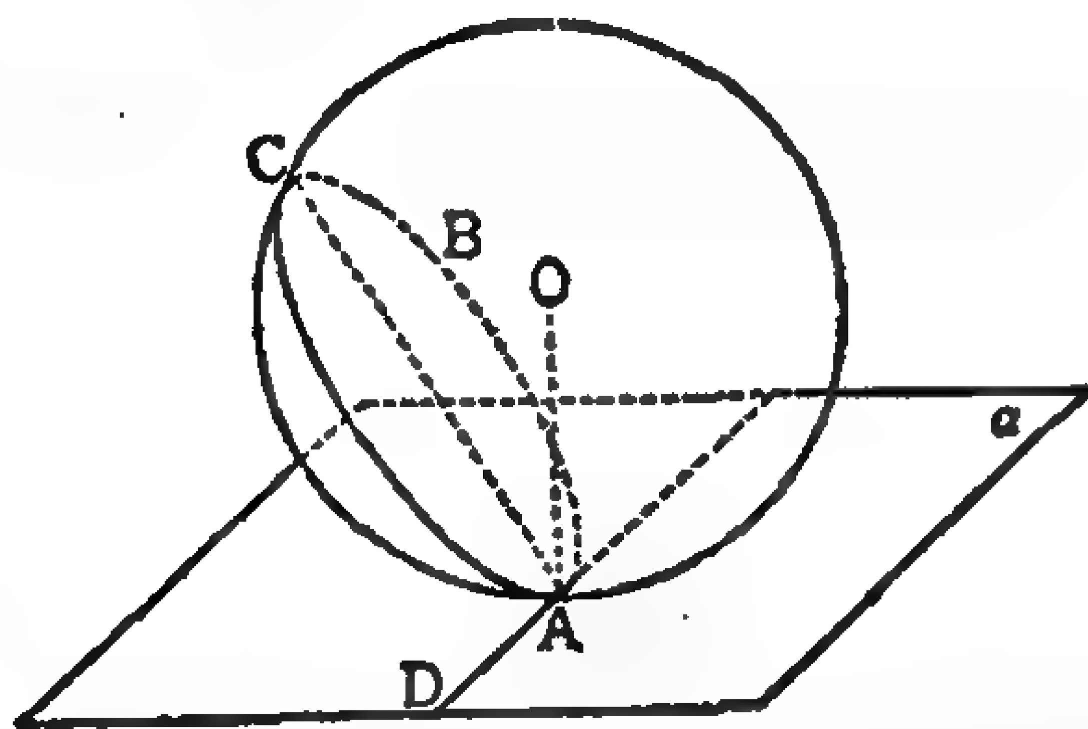
解 设球心为 O，球面上的点为 A，由 A 作球的两条切线为 AB、AC，AB、AC 所决定的平面为 α。

因为切线与过切点的半径垂直，所以

$$AB\perp OA,\ AC\perp OA,$$
$$\therefore\quad \text{平面}(AB,\ AC)\perp OA,$$

即平面 $\alpha\perp OA$，故平面 α 是在点 A 与球相切的平面(参照上题)。

3287. 过球面上一点的一切小圆(包括大圆)，以这点为切点的小圆的切线都在过这个点的球的切面上。

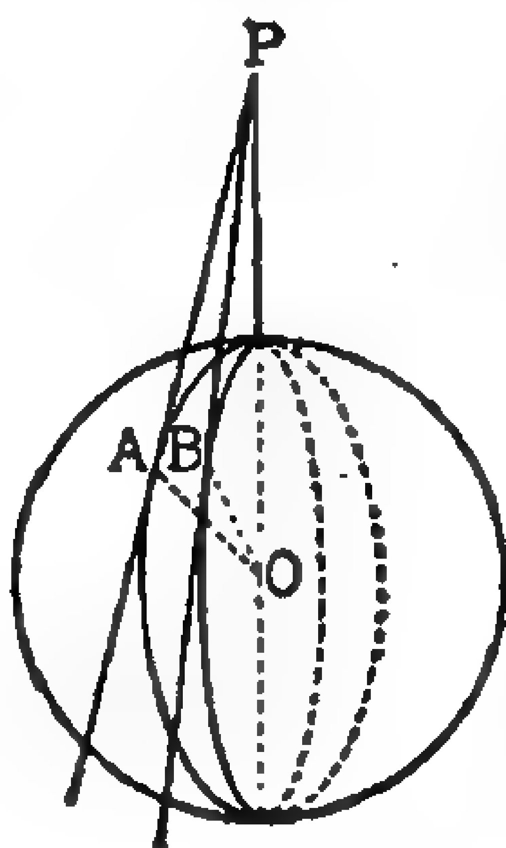


解 设过球上的点 A 且与球相切的平面为 α，过点 A 且在球面上的任意圆为 ABC，含 ABC 的平面和平面 α 的交线为 AD，则 AD 和圆 ABC 在同一平面上，只有一个公共的点 A，所以 AD 是圆 ABC 的切线。又 AD 在平面 α 上，故过球面上一点 A 的所有圆在点 A 处的切线，都在球的点 A 处的切面

α上。

3288. 从球外一点向球所作的切线都相等。

解 设从球外的一点P向球作任意的两条切线为PA、PB，则$PA\perp OA$，$PB\perp OB$，故在$\triangle PAO$、$\triangle PBO$中



$OA=OB$，PO公共，

$\angle PAO=\angle PBO=\angle R$，

$\therefore\ \triangle PAO\cong\triangle PBO$，

因而 $PA=PB$.

故从点P向球所作的切线都相等。

3289. 过球外的定直线，作这个球的切面。

解 设球心为O，在球外的定直线为MN，平面(MN, O)把球截开。设从MN上任意一点M向截面的大圆所作两条切线的切点分别为A、B，AB和OM的交点为C，则OM是AB的垂直平分线，$\triangle AOM$是以OM为斜边的直角三角形。以OM为轴把$\triangle AOM$旋转，就得到由CA旋转而成的圆AEB，圆心为C，由MA旋转而成的圆锥侧面，底面是圆AEB。设含圆AEB的平面为α，AB的延长线和MN的交点为D，则D是平面α上的点。

在平面α上，设从D向圆AEB所作切线的切点为E，则$DE\perp CE$，又因平面α垂直OM，可知$DE\perp OM$。所以

$$DE\perp\text{平面}(CE, OM),$$

$$\therefore\ DE\perp OE.$$

又$\triangle EOM$和$\triangle AOM$是合同的，$ME\perp OE$.

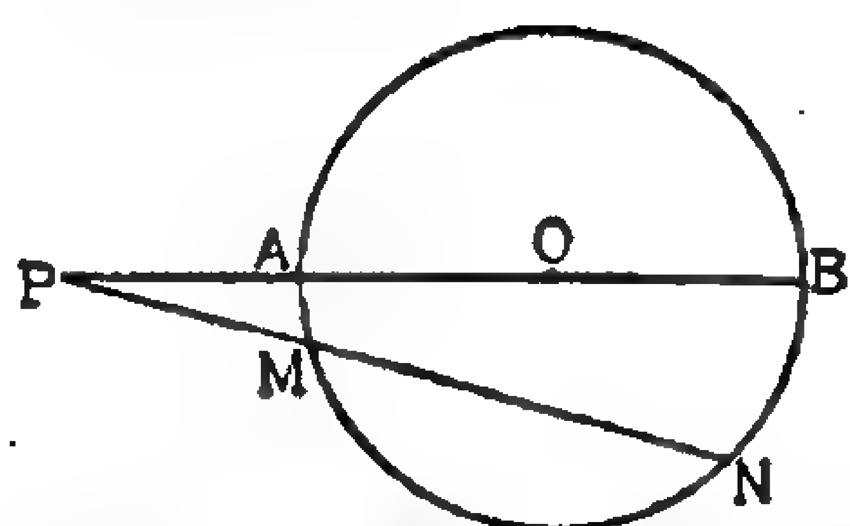
$$\therefore\ \text{平面}(DE, ME)\perp OE.$$

因为OE是球的半径，所以平面(DE, ME)是球的切面，但平面(DE, ME)和平面(MN, DE)重合，因此它就是过MN的平面。故过MN可以作球的切面。

注 因为从D能够向圆AEB作两条切线，所以过MN能够作球的两个切面。

3290. 过定点P向球作任意的割线PMN，则$PM\cdot PN$为定值。

解 设连结PO的直线分别交球于A、B，则A、B均为定点。如果用两直线PAB、PMN所决定的平面截球，则截面为大圆，两直线PAB、PMN均为该大圆的割线。



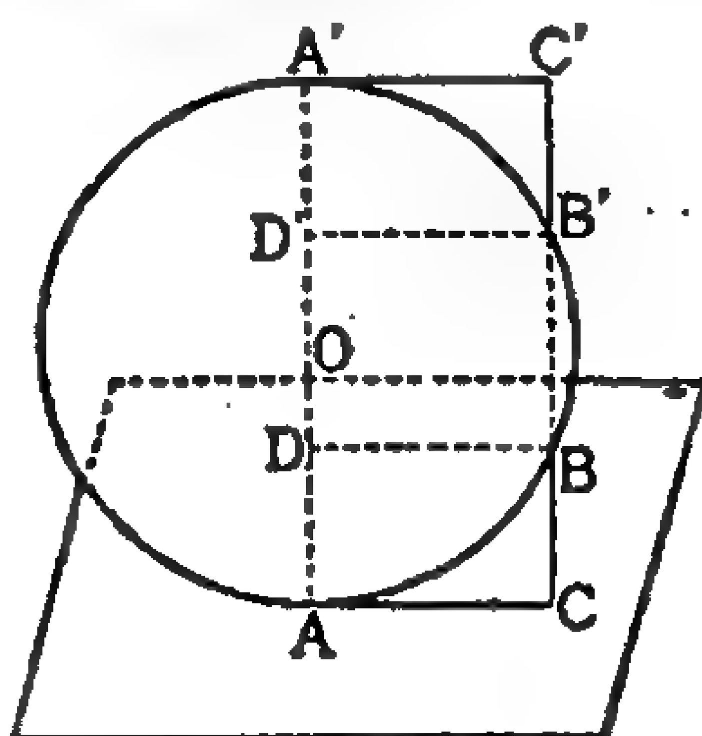
$$\therefore\ PM\cdot PN=PA\cdot PB.$$

因三点P、A、B是定点，所以$PA\cdot PB$为定值，从而$PM\cdot PN$也是定值。

注 如果M和N两点重合为点T，则PT为球的切线。关于切线PT有关系式：

$PT^2=PA\cdot PB$.

3291. 一平面与球相切于点A，从球上的一点B向平面引垂线BC，垂足为C。已知$AC=4\text{cm}$，$BC=3\text{cm}$，求球的半径。



解 设球的半径为$r$cm，延长CB再与球面相交于B'。过点A作直径AA'，从B及B'向AA'引垂线，其垂足分别为D和D'，则

$$AD=A'D'=BC=3,$$

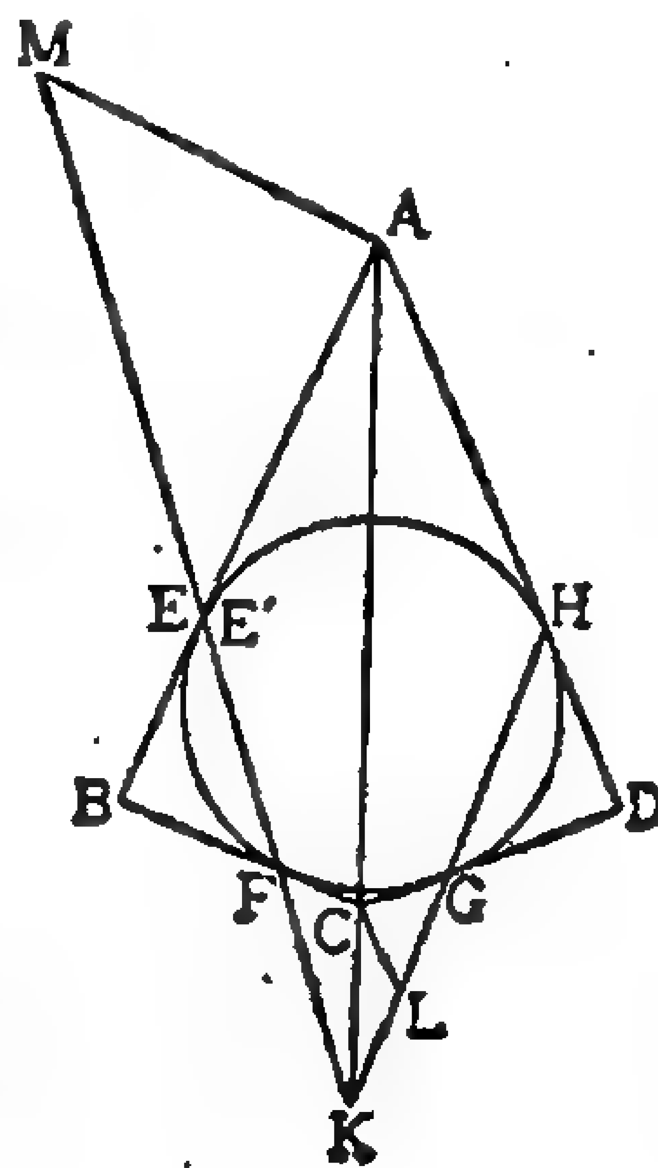
$\therefore\ CB'=AD'=AA'-A'D'=(2r-3)$.

因为 $CB\cdot CB'=CA^2$,

所以 $3(2r-3)=4^2$,

于是 $r=\dfrac{25}{6}=4.17(\text{cm})$.

3292. 如果不在同一平面上的四边形的四条边与球相切，则其切点都在同一圆上。



解 设四边形$ABCD$的边AB、BC、CD、DA分别与球相切，其切点分别为E、F、G、H。直线AC和直线HG在同一平面(A, C, D)上，它们

或者相交，或者平行。假定它们相交，交点为K，过C引AH的平行线与HK相交于L。在平面(A, B, C)上，连结KF的直线和AB相交于E'，从A引CF的平行线与KF的延长线相交于M。

因为 $DH=DG$，

所以 $\angle DHG=\angle DGH$。

又 $\angle CLG=\angle DHG$ （平行线的内错角），

$\angle CGL=\angle DGH$ （对顶角），

$\therefore \angle CLG=\angle CGL, \quad CL=CG$，

从而 $KC:KA=CL:AH=CG:AH$。

又 $CF=CG$ （问题 **3288**），

$KC:KA=CF:AM=CG:AM$，

$\therefore CG:AH=CG:AM$。

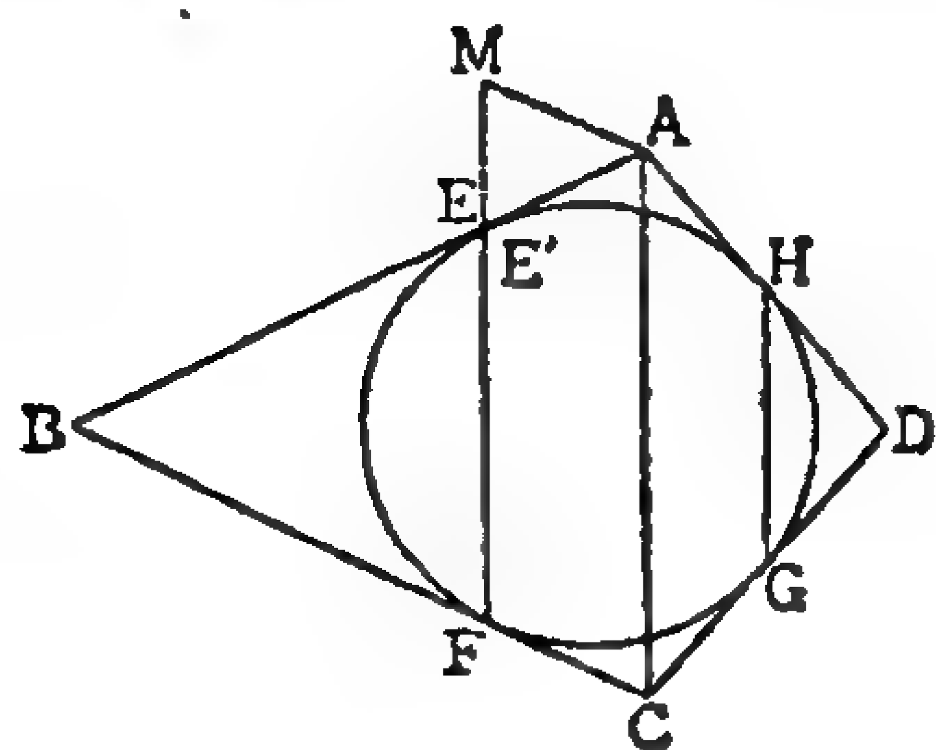
于是 $AH=AM$，

$BE':AE'=BF:AM=BF:AH$。

因为 $BF=BE, \ AH=AE$。

所以 $BE':AE'=BE:AE$，

故E'与E重合。因此E、F、G、H，在平面(KG, KF)上，即E、F、G、H在平面(KG, KF)截球的截面圆上。



如果直线AC与直线HG平行，则由$DH=DG$知，$AH=CG$，从而$AH=AE, CG=CF$，所以$AE=CF$。在平面(A, B, C)上，从F引AC的平行线与AB交于E'，从A引CF的平行线与FE'的延长线相交于M，则

$$BE':AE'=BF:AM.$$

因为$BF=BE$，又$AMFC$是平行四边形，所以

$$AM=CF,$$

因而 $AM=AE$。

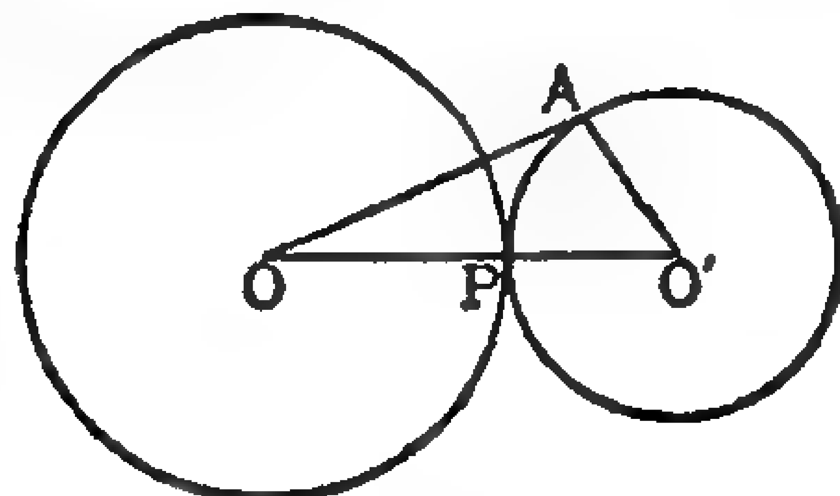
$\therefore BE':AE'=BE:AE$，

故E'与E重合。

$\therefore EF \parallel AC, \ EF \parallel HG$。

因此，E、F、G、H在平面(EF, HG)上，即E、F、G、H在平面(EF, HG)截球的截面圆上。

3293. 如果两个球面在连心线上的一点处相交，则它们没有其它公共点。



解 设两球的球心分别为O、O'，它们在直线OO'上的一点P处相交。

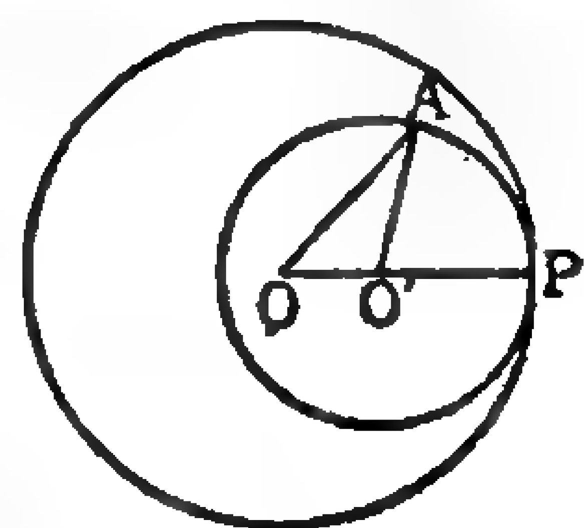
(i) 如果P在线段OO'上。设A为球O'上除点P外的任意一点，则在$\triangle AOO'$中

$$OA>OO'-O'A.$$

因为 $OO'-O'A=OO'-O'P=OP=$（球O的半径），

$\therefore OA>$球O的半径。

因此，球O'上的点，除P外都在球O外，即这两个球除点P外没有其它公共点。



(ii) 如果P在线段OO'的延长线上，设O'在连线OP上，取球O'上的除P以外的任意一点A，则在$\triangle AOO'$中，

$$OA<OO'+O'A.$$

而 $OO'+O'A=OO'+O'P$

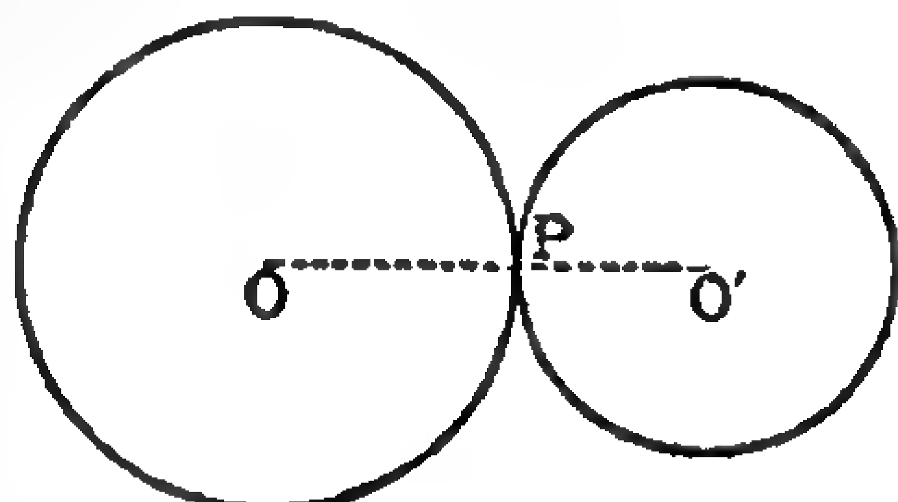
$=OP=$球O的半径，

$\therefore OA<$球O的半径。

因此，球O'上的点除P外都在球O内，即两球除点P外，没有其它公共点。

3294. 如果两球相切，则其切点和这两个球的球心在同一直线上。

解 设两球的球心分别为O、O'，切点为P。若P不在OO'上，在平面(OO', P)上取点P关于OO'的对称点P'，则

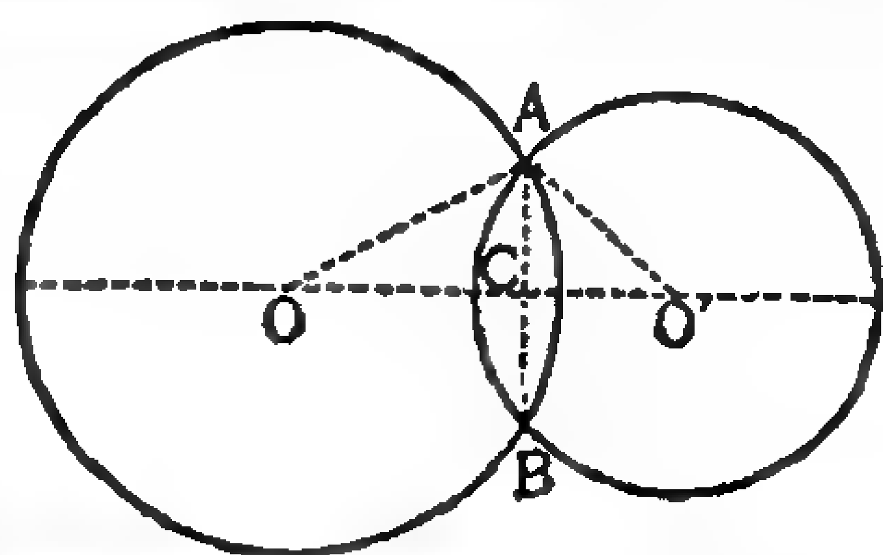


$$OP'=OP,$$
$$O'P'=O'P.$$

所以P'也是这两个球的公共点。这与两个球相切的条件矛盾，因此P必在OO'上。即切点和这两个球的球心在同一直线上。

3295. 证明两个球的交线为一圆，这个

圆与两球心的连线垂直，而且圆心在这条连心线上.



解 设两球的球心分别为 O、O'，两球的公共点为 A. 如果用平面 (OO', A) 截球，则截面分别是它们的大圆，而且 A 是两圆的一个交点. 设 B 是这两圆的另一交点，则公共弦 AB 被 OO' 垂直平分，即当 AB 和 OO' 的交点为 C 时，则有 $AC=BC$, $\angle ACO=\angle ACO'=\angle R$.

如果两圆以 OO' 为轴旋转，则可得到原来的两个球，点 A 旋转所得的曲线就是两球面的交线. 已知 AC 与 OO' 垂直，所以 AC 在过 C 且与 OO' 垂直的平面上，因而 A 在以 C 为圆心的圆上. 因此，两球相交于以 C 为圆心的圆，此圆与 OO' 垂直，且圆心在 OO' 上.

3296. 如果两球位置是外离，外切，相交，内切，内离，则这两个球心间的距离分别是大于两球半径之和，等于两球半径之和，小于两球半径之和而大于两球半径之差，等于两球半径之差，小于两球半径之差. 这些命题的逆命题也是成立的.

解 设两球的球心分别为 O、O'，其半径分别为 r、r'.

(i) 当两球外离时. 设连心线 OO' 与球 O 相交于 A，与球 O' 相交于 B，则

$$OO'=OA+AB+BO'$$
$$=r+AB+r'>r+r'.$$

(ii) 当两球外切时. 设切点为 P，由问题 **3294** 可知，切点在两球的连心线上，所以

$$OO'=OP+PO'=r+r'.$$

(iii) 当两球相交时，设球上公共的一点为 A，则在 $\triangle AOO'$ 中

$$OA\sim O'A<OO'<OA+O'A,$$

即 $$r\sim r'<OO'<r+r'.$$

(iv) 当两球内切时. 设大球的球心为 O，半径为 r，切点为 P，由问题 **3294** 可知切点在两球的连心线上，所以

$$OO'=OP-O'P=r-r'.$$

(v) 当两球内离时. 设大球的球心为 O，半径为 r，把 OO' 向球心 O' 方向延长，该延长线与球 O' 相交于 B，与球 O 相交于 A，则

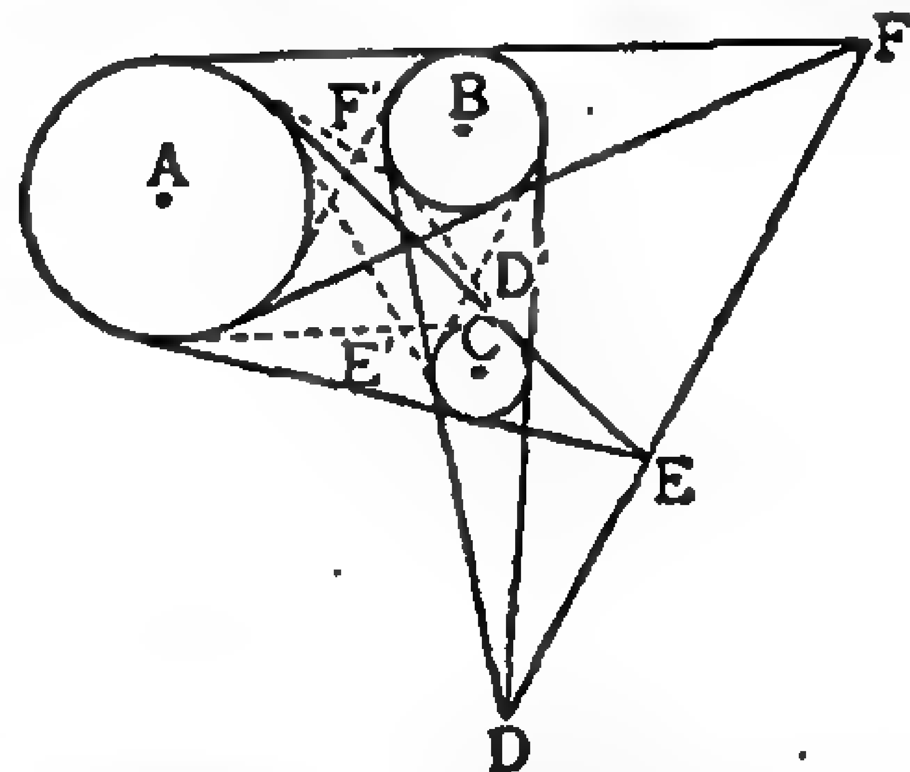
$$OO'=OA-AB-O'B=r-AB$$
$$-r'<r-r'.$$

由于上述命题包括条件和结论的所有情况，而且条件不同所对应的结论也不同，所以它的逆命题都成立(转换法).

3297. 已知三个半径不等的球的球心分别为 A、B、C. 如果两球 B、C 的相似外心为 D，相似内心为 D'；两球 C、A 的相似外心为 E，相似内心为 E'；两球 A、B 的相似外心为 F，相似内心为 F'. 则

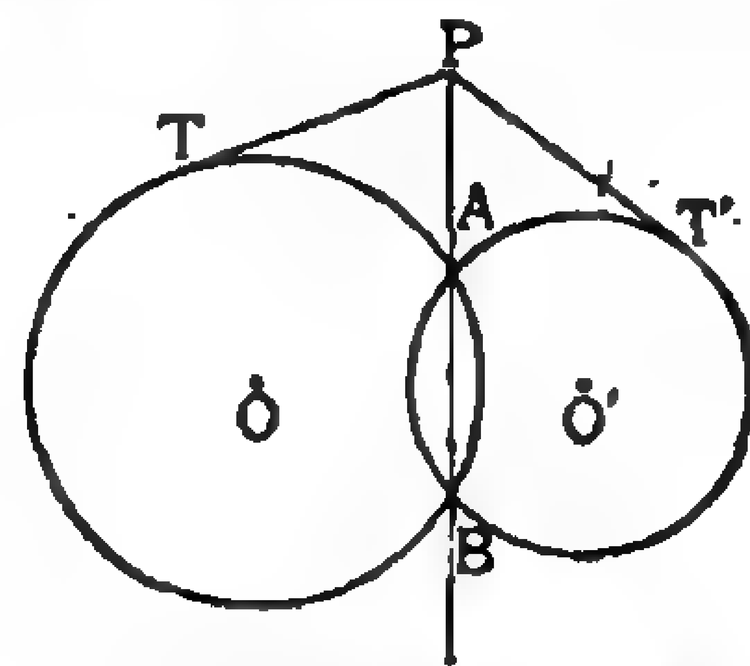
(1) D、E、F 在同一直线上；

(2) D、E'、F' 在同一直线上；D'、E、F' 在同一直线上；D'、E'、F 也在同一直线上.



解 用平面 (A, B, C) 截三个球，则其截面分别为大圆 A、B、C. D 及 D' 在平面 (A, B, C) 上而且是大圆 B、C 的相似外心及相似内心. E 及 E' 在平面 (A, B, C) 上，而且是大圆 C、A 的相似外心及相似内心. F 及 F' 在平面 (A, B, C) 上而且是大圆 A、B 的相似外心及相似内心，故由平面几何定理(问题 **1541**) 可知本命题成立.

3298. 在两球相交圆所在的平面上，由该圆外的任意一点向两球引切线，则这些切线的长都相等.



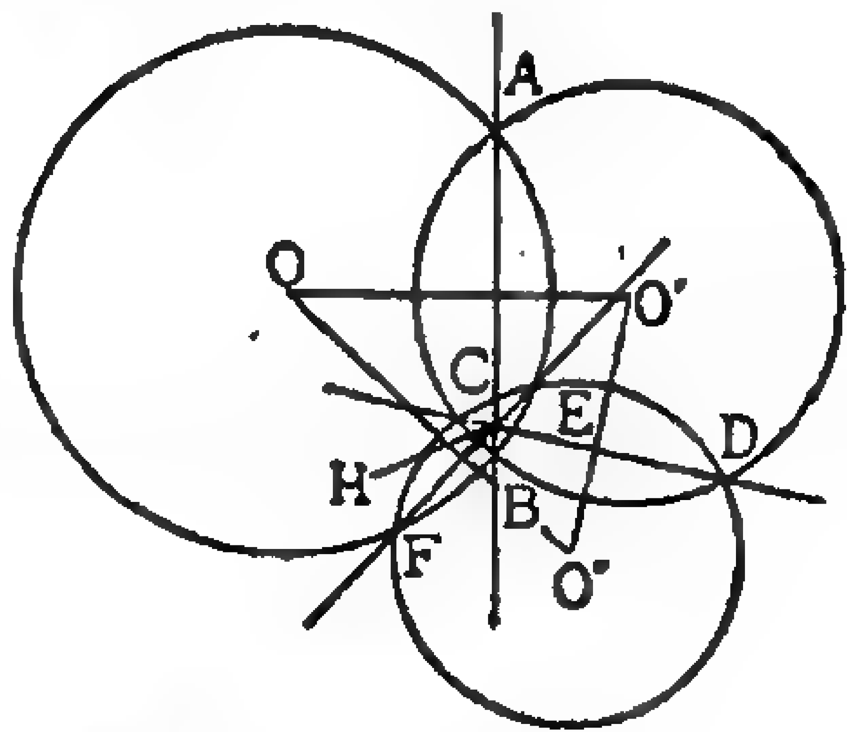
解 设两球的球心分别为 O、O'，两球相交的圆面为 α. 在平面 α 上，取该圆外的任意一点 P，如果用平面 (P, O, O') 截两球 O、O' 及平面 α，则两球的截面分别为大圆 O、O'，与平面 α 的交线为这两个大圆 O、O' 的公共弦 AB，而且点 P 在直线 AB 上. 如在平面 (P, O, O') 上，从 P 向大圆 O、O' 分别引切线 PT、PT'，则

$$PT^2=PA\cdot PB,\quad PT'^2=PA\cdot PB.$$

$$\therefore\quad PT^2=PT'^2,\qquad PT=PT'.$$

因 PT 也是球 O 的切线，PT' 也是球 O' 的切线，所以从 P 向两球所引的切线都相等。

3299. 设三个球的球心分别为 O、O'、O''，含两球 O、O' 的相交圆的平面为 α，含两球 O'、O'' 的相交圆的平面为 β，含两球 O''、O 的相交圆的平面为 γ，则三平面 α、β、γ 相交于一直线，而且从这条直线上的点向三球分别引切线，则这些切线的长都相等。



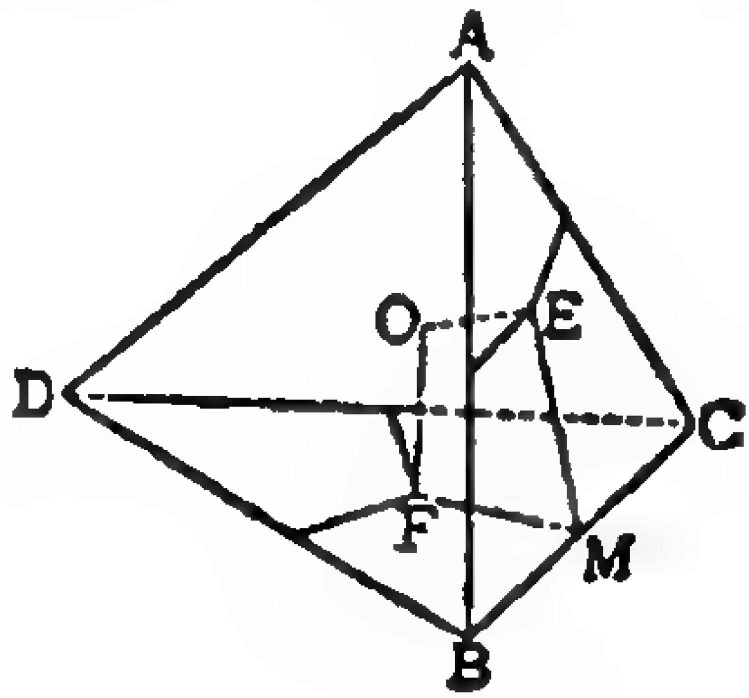
解　如果用平面 (O, O', O'') 截三个球，则截面分别为大圆 O, O', O''。在截面圆 O、O'、O'' 中，设两圆 O、O' 的公共弦为 AB，两圆 O'、O'' 的公共弦为 CD，两圆 O''、O 的公共弦为 EF，则平面 $(O、O', O'')$ 和三个平面 α、β、γ 的交线分别为 AB、CD、EF。因为 OO' 是线段 AB 的垂直平分线，所以将 AB 绕 OO' 轴旋转便得到两球 O、O' 的相交圆，故两球 O、O' 的相交圆所在平面 α 与 OO' 垂直。因此平面 α 是与含 AB 的平面 (O, O', O'') 垂直的平面。同样，平面 β 是与含 CD 的平面 (O, O', O'') 垂直的平面，平面 γ 是与含 EF 的平面 (O, O', O'') 垂直的平面。

由平面几何可知，两两相交的三个圆的公共弦相交于一点。设其交点为 H，若从 H 向平面 (O, O', O'') 作垂线 HP，则 HP 同时在三个平面 α、β、γ 上，因此三平面 α、β、γ 相交于一直线。

其次，从 HP 上的点 P 向三个球 O、O'、O'' 分别引切线 PT、PT'、PT''，则因 P 是平面 α 上的点，所以 $PT=PT'$（参照上题）。又因 P 是平面 β 上的点，所以 $PT'=PT''$（参照上题）。

$\therefore\ PT=PT'=PT''$.

3300. 过不在同一平面上的四个点，可以作而且只能作一个球。



解　设不在同一平面上的四个点为 A、B、C、D，线段 BC 的中点为 M，$\triangle ABC$ 的外心为 E，$\triangle BCD$ 的外心为 F。在平面 (ME, MF) 上，从 E 作 ME 的垂线和从 F 作 MF 的垂线相交于点 O。于是

$$ME\perp BC,\ MF\perp BC,$$

$$\therefore\ 平面(ME, MF)\perp BC.$$

从而　$OE\perp BC$.

又　$OE\perp ME$,

$$\therefore\ OE\perp 平面(BC, ME),$$

即　$OE\perp 平面(A, B, C)$.

而 E 是 $\triangle ABC$ 的外心，所以

$$EA=EB=EC.$$

$$\therefore\ OA=OB=OC.$$

同样，$OF\perp 平面(B, C, D)$，且

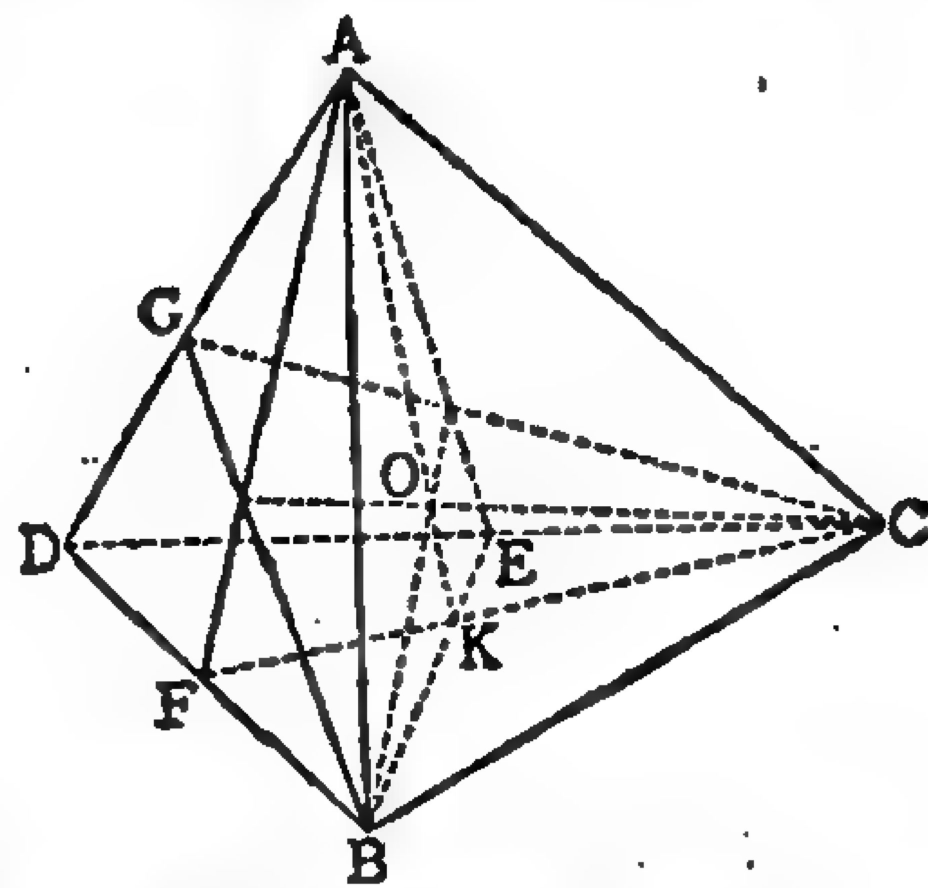
$$OB=OC=OD.$$

$$\therefore\ OA=OB=OC=OD.$$

因此，以 O 为球心、OA 为半径的球过四点 A、B、C、D。

其次，设还有一个过四点 A、B、C、D 的球的中心为 O'，则 $O'A=O'B=O'C$，所以 $O'E$ 是平面 (A, B, C) 的垂线。由于过点 E 的垂线只有一条，所以 $O'E$ 与 OE 重合。同样，$O'F$ 是平面 (B, C, D) 的垂线，所以 $O'F$ 与 OF 重合，因而 O' 与 O 重合，球 O' 与球 O 重合。因此过四点 A、B、C、D 的球只能有一个。

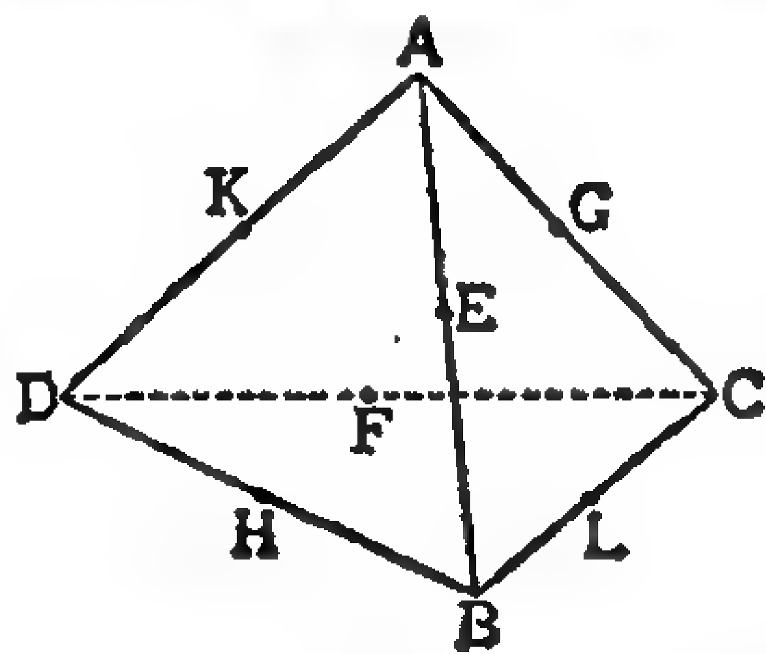
3301. 作已知四面体的内切球。



解　如图，已知四面体 $ABCD$，设平分四面体的二面角 AB 的平面为 EAB，平分二面角 AC 的平面为 FAC，而 EAB 和 FAC 的交线为 AK。平分二面角 BC 的平面为 GBC，直线 AK 与 GBC 的交点为 O，则 O 在二面角 AB 的平分面 EAB 上，所以与二平面 ABC、ABD 等距离。又 O 在二面角 AC 的平

分面 FAC 上，所以与二平面 ABC、ACD 等距离。又，O 在二面角 BC 的平分面 GBC 上，所以与二平面 ABC、DBC 等距离。故 O 与四面体的四个面等距离。因此以 O 为球心，以 O 到一面的距离为半径的球，就是四面体 $ABCD$ 的内切球。

3302. 如果四面体的六条棱与同一球相切，则其各组对棱的和相等。

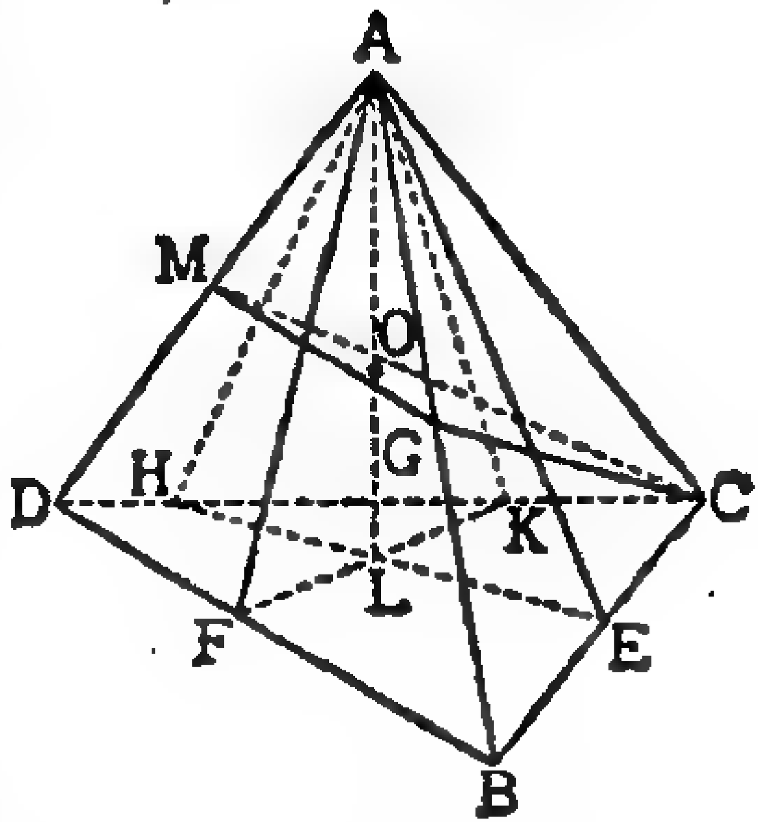


解 设四面体 $ABCD$ 的六条棱 AB、CD、AC、BD、AD、BC 与同一球相切，其切点分别为 E、F、G、H、K、L。因为从一点向球所作的切线相等，

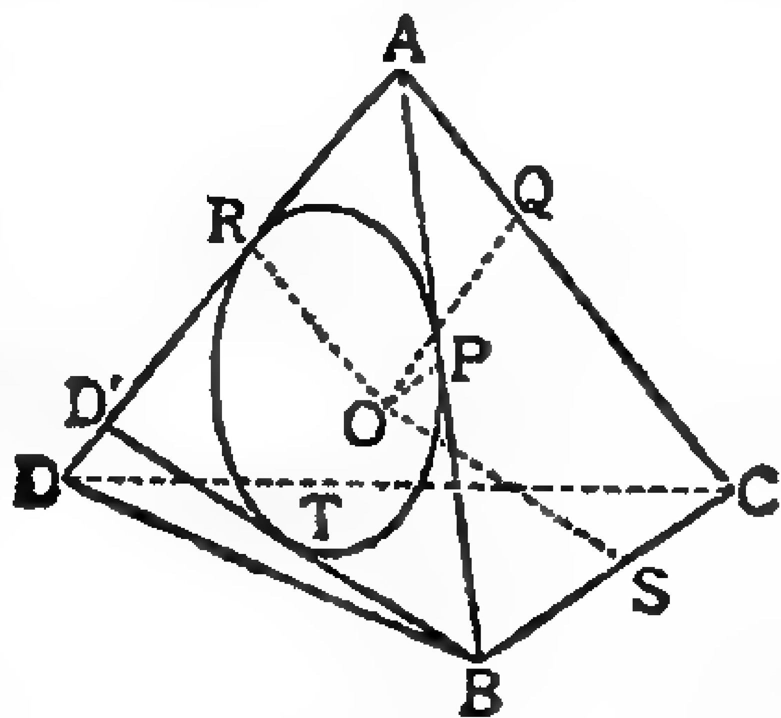
$$\therefore\quad AE=AG=AK,\ BE=BH=BL,$$
$$CF=CG=CL,\ DF=DH=DK.$$

因而
$$AE+BE+CF+DF$$
$$=AG+BH+CG+DH$$
$$=AK+BL+CL+DK,$$
$$\therefore\quad AB+CD=AC+BD=AD+BC.$$

3303. 如果四面体相对棱的和相等，则可作与四面体六条棱都相切的球。



解 在四面体 $ABCD$ 中，过 $\angle BAC$ 的平分线 AE 作平面 ABC 的垂直面 AEH，过 $\angle BAD$ 的平分线 AF 作平面 ABD 的垂直面 AFK，二平面 AEH、AFK 的交线为 AL。再过 $\angle ACB$ 的平分线 CG 作平面 ABC 的垂直面 CGM，此平面与直线 AL 的交点为 O。因为 O 在平面 AEH 上，



所以 O 与两棱 AB、AC 等距离。又 O 在平面 AFK 上，所以 O 与 AB、AD 等距离。再者，O 在平面 CGM 上，所以 O 与两棱 BC、AC 等距离，故 O 与四条棱 AB、AC、AD、BC 等距离。从 O 向四条棱 AB、AC、AD、BC 作垂线，其垂足分别是 P、Q、R、S，则 $OP=OQ=OR=OS$。因而以 O 为球心、OP 为半径的球与 AB、AC、AD、BC 相切于 P、Q、R、S 各点，从而

$$AP=AQ=AR,\ BP=BS,\ CQ=CS.$$

设这个球与平面 ABD 相交的小圆为 PTR，由 B 向圆 PTR 引切线 BT，其切点为 T，而 BT 的延长线与 AD 的交点为 D'，则

$$BT=BP=BS,\ D'T=D'R,$$
$$\therefore\quad AQ+CQ+BT+D'T$$
$$=AR+CS+BS+D'R.$$
$$\therefore\quad AC+BD'=AD'+BC.$$

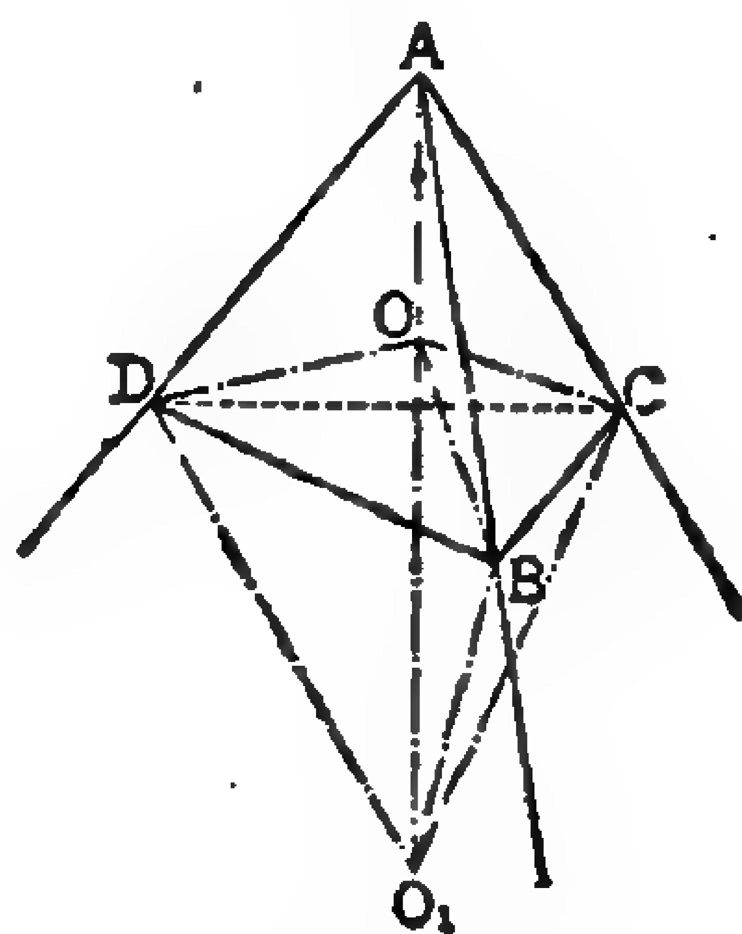
已知
$$AC+BD=AD+BC,$$
$$\therefore\quad BD\sim BD'=AD\sim AD',$$

即
$$BD\sim BD'=DD'.$$

但一般是 $BD\sim BD'<DD'$，所以这个结论不合理，故 D' 与 D 重合，BD 与圆 PTR 相切于 T，即 BD 与球 O 相切于 T。同样 CD 也与球 O 相切，因此六条棱都与球 O 相切。球 O 就是所求的球。

3304. 设四面体内切球的半径为 r，旁切球的半径为 r_1、r_2、r_3、r_4，则

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}.$$



解 设四面体 $ABCD$ 的体积为 V，内切球的球心为 O，则四面体 $ABCD$ 是 4 个四面体

$O\text{-}BCD$,
$O\text{-}ACD$,
$O\text{-}ABD$,
$O\text{-}ABC$

的和。所以

$$V=\frac{1}{3}r(S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ABC}).$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{3V}(S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ABC}). \qquad ①$$

设在三面角 A 内旁切球的半径为 r_1，球心

为O_1，四面体$ABCD$是3个四面体O_1-ACD，O_1-ABD，O_1-ABC的和减去四面体O_1-BCD所得的差。即

$$V=\frac{1}{3}r_1(S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BCD}),$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r_1}=\frac{1}{3V}(S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BCD}).$$

同样，设在三面角B内的旁切球的半径为r_2，在三面角C内的旁切球的半径为r_3，在三面角D内的旁切球的半径为r_4，则

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{3V}(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}-S_{\triangle ACD}),$$

$$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{3V}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACD}-S_{\triangle ABD}),$$

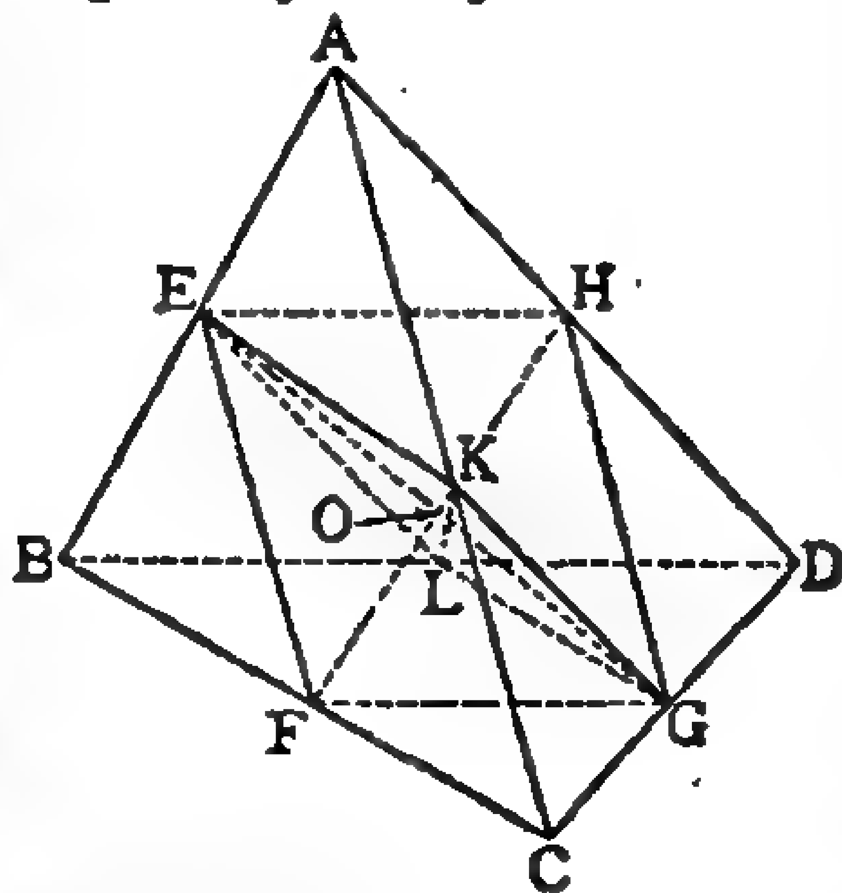
$$\frac{1}{r_4}=\frac{1}{3V}(S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ABC}).$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{2}{3V}(S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ABC}).\qquad ②$$

由①和②，可得

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}.$$

3305. 如果四面体的各组对棱分别相互垂直，则它的六条棱的中点在同一球面上。



解　设对棱互相垂直的四面体为$ABCD$，其六条棱AB、BC、CD、DA、AC、BD的中点分别为E、F、G、H、K、L，则

$$EF\parallel AC,\ HG\parallel AC,$$

$$\therefore\quad EF\parallel HG.$$

又因　　$EH\parallel BD$，$FG\parallel BD$，

$$\therefore\quad EH\parallel FG.$$

故四边形$EFGH$是平行四边形。

已知　　$AC\perp BD$，

所以　　$EF\perp EH$.

故平行四边形$EFGH$为矩形。设它的对角线EG、FH的交点为O，则

$$OE=OF=OG=OH.$$

同样，四边形$EKGL$也是矩形，其对角线EG、KL的交点就是EG的中点O，因而

$$OE=OK=OG=OL,$$

$$\therefore\quad OE=OF=OG=OH=OK=OL.$$

因此六条棱的中点E、F、G、H、K、L都在以O为球心、OE为半径在球面上。

注 1　$AC^2+BD^2=(2EF)^2+(2FG)^2$
$=4(EF^2+FG^2)=4EG^2$
$=4(2OE)^2=16OE^2$.

同样，　$AD^2+BC^2=16OE^2$，
$AB^2+CD^2=16OE^2$.

由此可知各组对棱互相垂直的四面体，其对棱的平方和是相等的。

2　AO的延长线和面BCD的交点，既在BG上，又在DF上，所以它是$\triangle BCD$的重心。同样，BO的延长线和面ACD的交点是$\triangle ACD$的重心。由此，O是四面体$ABCD$的重心。

3306. 如果四面体的对棱互相垂直，则各面的9点圆在同一球面上。

解　(参照上题图)设对棱互相垂直的四面体为$ABCD$，其六条棱AB、BC、CD、DA、AC、BD的中点分别为E、F、G、H、K、L。由上题知，这六个中点E、F、G、H、K、L都在以连结各组对棱中点EG、FH、KL的交点O为球心的球面上。这个球面和面BCD的交线是圆FGL，而圆FGL就是$\triangle BCD$的9点圆。其他各面都有同样的结果，所以各面的9点圆都在同一球面(过各棱中点的球面)上。

3307. 如果四面体各对棱互相垂直，则过一个面的三个顶点和另一面的垂心的各球，它们的半径都相等。

解　设对棱互相垂直的四面体为$ABCD$，H为面BCD的垂心，K为面ACD的垂心。过四点B、C、D、K的球的球心为O，从O向面BCD所引垂线的垂足为L，BD的中点为M，因为$OB=OC=OD$，所以L是$\triangle BCD$的外心。

$$\therefore\quad LM\perp BD.$$

又 H 是 $\triangle BCD$ 的垂心，$CH\perp BD$，

$\therefore\ LM\parallel CH$。

其次，因 BD、AC 是对棱，$BD\perp AC$。又因 K 是 $\triangle ACD$ 的垂心，$DK\perp AC$，

$\therefore$ 平面 $(BD, DK)\perp AC$，

$BK\perp AC$。

同样，$AB\perp CD$，

$AK\perp CD$，

$\therefore$ 平面 $(AB, AK)\perp CD$，$BK\perp CD$。

于是　$BK\perp$ 平面 (AC, CD)，

即　$BK\perp$ 平面 ACD。

$\therefore\ \angle BKD=\angle R$。

其中，M 是直角三角形 KBD 斜边的中点，

$\therefore\ MK=MB=MD$。

所以 M 是球 O 的小圆 KBD 的圆心。

$\therefore\ OM\perp$ 平面 KBD。

因此，OM、AC 都是平面 KBD 的垂线，所以 $OM\parallel AC$。

同样，$AH\perp$ 平面 BCD，则 OL、AH 都是平面 BCD 的垂线。所以 $OL\parallel AH$。

因为三边分别平行的三角形相似，

$\triangle OLM\backsim\triangle AHC$。

但是，$LM=\frac{1}{2}CH$，$\therefore\ OM=\frac{1}{2}AC$。

因而，设球 O 的半径为 R，则

$$R^2=OB^2=OM^2+BM^2=\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\left(\frac{1}{2}BD\right)^2=\frac{1}{4}(AC^2+BD^2).$$

$$\therefore\ R=\sqrt{\frac{1}{4}(AC^2+BD^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{AC^2+BD^2}.$$

这样，过一个面的三个是顶点和另一面的垂心的球，它们的半径分别是：

$$\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+CD^2},\ \frac{1}{2}\sqrt{AC^2+BD^2},\ \frac{1}{2}\sqrt{AD^2+BC^2}.$$

可是，$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$（问题 **3305** 注 **1**），因此这几个球的半径都相等。

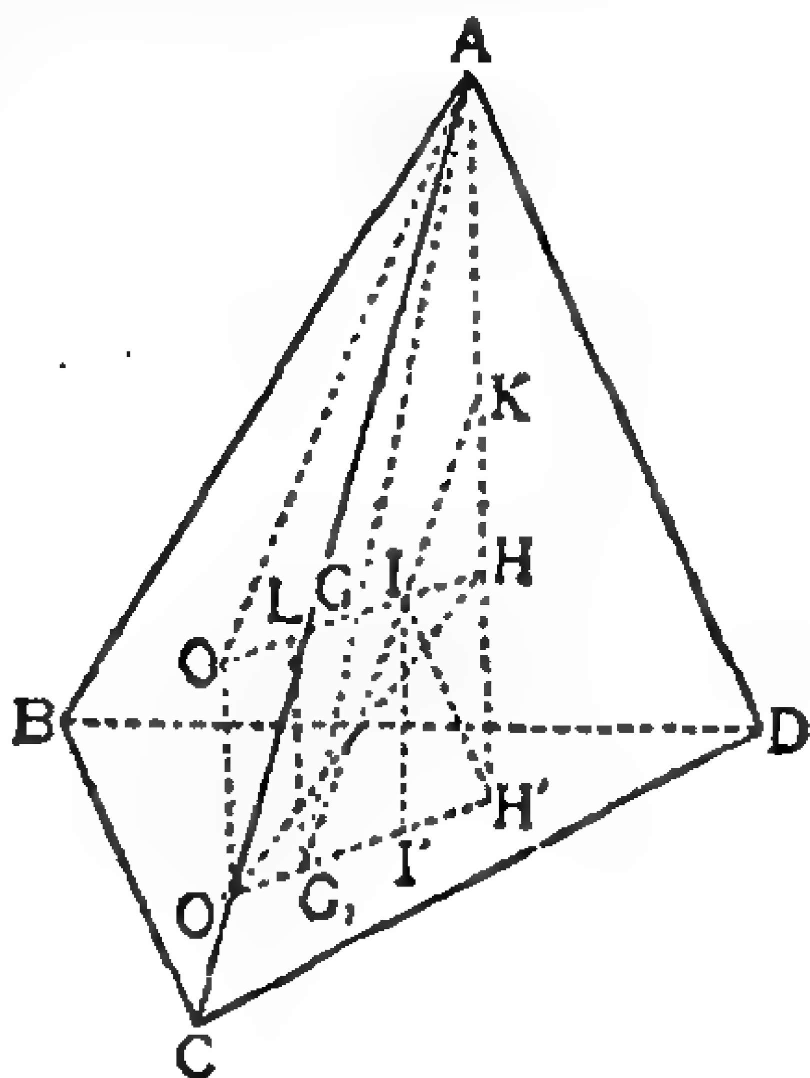
3308. 如果四面体的对棱互相垂直，则其垂心（由各顶点向对面所作垂线的交点）、重心（连结各顶点和其对面重心的直线的交点）与外心（外接球的中心）在同一直线上，且重心是连结垂心和外心的线段的中点。

解　设各对棱互相垂直的四面体为 $ABCD$，垂心为 H，重心为 G，外心为 O。设从 H、G、O 向平面 BCD 所引垂线的足分别为 H'、G'、O'，则 H' 是 $\triangle BCD$ 的垂心，G 是含有各面 9 点圆的球心（问题 **3306** 及 **3305** 注 **2**），G' 是 $\triangle BCD$ 的 9 点圆的圆心，O' 是 $\triangle BCD$ 的外心，所以 H'、G'、O' 在一直线上，且 G' 是 $H'O'$ 的中点，因而 HH'、GG'、OO' 在同一平面 (HH', OO') 上。其次，设由 H、G、O 引平面 ABC 的垂线的足分别为 H''、G''、O''，则 H'' 是 $\triangle ABC$ 的垂心，G'' 是 $\triangle ABC$ 的 9 点圆的圆心，O'' 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 G''、O''、H'' 在同一直线上，且 G'' 为 $O''H''$ 的中点，因而 HH''、GG''、OO'' 在同一平面 (HH'', OO'') 上。于是可知三点 H、G、O 是在平面 (HH', OO') 和平面 (HH'', OO'') 的交线上，即它们在同一直线上。又因 G' 是 $H'O'$ 的中点，可知 G 也是 HO 的中点。

3309. 如果四面体的对棱互相垂直，则从其垂心（从各顶点向对面所引垂线的交点）到各顶点距离的 $\frac{1}{3}$ 的点和各面的垂心、重心共 12 个点在同一球面上。

解　设对棱互相垂直的四面体为 $ABCD$，垂心为 H，重心为 G，外心为 O，则 G、H、O 在同一直线上，且 G 是 HO 的中点（上题）。从 H、O 引平面 BCD 的垂线，垂足分别为 H'、O'，则 H' 是 $\triangle BCD$ 的垂心，O' 是 $\triangle BCD$ 的外心。其次，连结 AG 和 $H'O'$ 的交点为 G_1，则 G_1 是 $\triangle BCD$ 的重心，$H'G_1:G_1O'=2:1$。

设I'为$H'G_1$的中点，设从两点I'、G_1引$H'H$的平行线和HO的交点分别为I、L，则



$HI=IL=LO$，

I是定点。延长G_1与I的连线和AH相交于K，可知

$HK=G_1L$。

又因G是HO的中点(上题)，可知G是IL的中点。

$$\therefore\quad G_1L:HA=GL:GH=1:3,$$

$$HK:HA=1:3,\ HK=\frac{1}{3}HA.$$

又因为I'是$H'G_1$的中点，所以I是G_1K的中点，而且

$$\angle KH'G_1=\angle B,$$

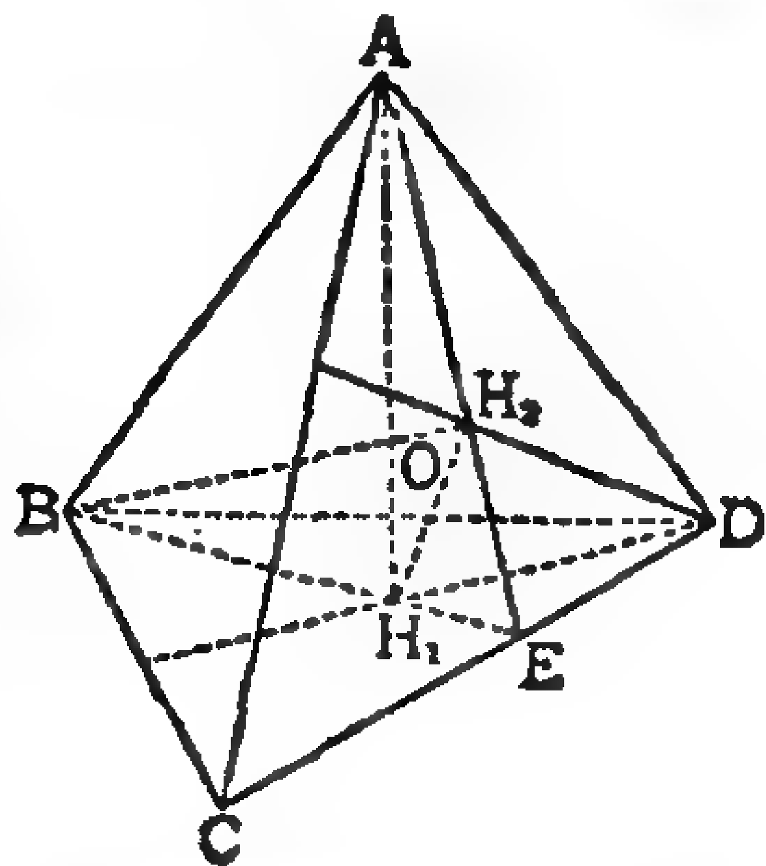
$$\therefore\quad IK=IH'=IG_1,$$

且　　$HI:HO=HK:HA=1:3.$

因此，$IK\parallel OA$，且$IK=\frac{1}{3}OA$。

综上所述，垂心H到A的距离$\frac{1}{3}$的点K和$\triangle BCD$的垂心H'及重心G_1，都在以定点I为球心、外接球半径的$\frac{1}{3}$为半径的球上。同样，从垂心H到B的距离$\frac{1}{3}$的点和$\triangle ACD$的垂心及重心都在以I为球心，外接球半径的$\frac{1}{3}$为半径的球上。其它的情形也一样，因此12个点都在以I为球心，外接球半径的$\frac{1}{3}$为半径的球上。

3310. 证明棱长为a的正四面体的外接球和内切球的半径分别是$\frac{\sqrt{6}}{4}a$，$\frac{\sqrt{6}}{12}a$。



解　设棱长为a的正四面体为$ABCD$，由A向对面BCD引垂线AH_1，由B向对面ACD引垂线为BH_2，且AH_1和BH_2的交点为O，则O既是外接球的球心，又是内切球的球心。又H_1和H_2既是$\triangle BCD$及$\triangle ACD$的外心，又是其内心，既是其重心又是其垂心。设CD的中点为E，则

$$BE=\sqrt{BC^2-CE^2}$$

$$=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$BH_1=\frac{2}{3}BE=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{1}{\sqrt{3}}a,$$

$$AH_1=\sqrt{AB^2-BH_1^2}$$

$$=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a.$$

又　　$EH_1:EB=EH_2:EA=1:3,$

$$\therefore\quad AO:OH_1=AB:H_2H_1=3:1,$$

$$\therefore\quad OA=\frac{3}{4}AH_1=\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a,$$

$$OH_1=\frac{1}{4}AH_1=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a.$$

因为OA是外接球的半径，OH_1是内切球的半径，所以外接球半径是$\frac{\sqrt{6}}{4}a$，内切球半径是$\frac{\sqrt{6}}{12}a$。

3311. 如果四个平面相交构成四面体，则与这四个平面相切的球一般有八个。

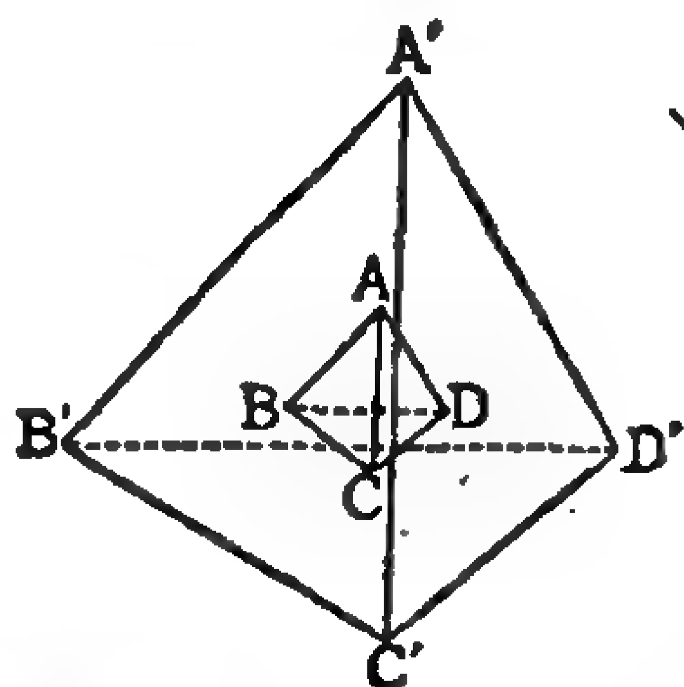
解　设四个平面α、β、γ、δ构成一个四面体，且α、β构成的二面角二等分面为π_1、π_2；β、γ构成的二面角二等分面为π_3，π_4；α、γ构成的二面角二等分面为π_5、π_6，则与四个平面α、β、γ、δ相切的球的球心必在π_1、π_2中的一个上，也必在π_3、π_4中的一个上，也必在π_5、π_6中的一个上。反过来，既在π_1、π_2中的任意一个上，又在π_3、π_4中的任意一个上，又在π_5、π_6中的任意一个上的点，都与四个平面α、β、γ、δ相切的球的球心。因此，与四个平面α、β、γ、δ相切的球的球心是下面各组三个平面的交点：

$$(\pi_1,\ \pi_3,\ \pi_5),\ (\pi_1,\ \pi_4,\ \pi_5),$$
$$(\pi_1,\ \pi_3,\ \pi_6),\ (\pi_1,\ \pi_4,\ \pi_6),$$
$$(\pi_2,\ \pi_3,\ \pi_5),\ (\pi_2,\ \pi_3,\ \pi_6),$$
$$(\pi_2,\ \pi_4,\ \pi_5),\ (\pi_2,\ \pi_4,\ \pi_6).$$

因为上述各组的三个平面相交于一点，所

以与四个平面 α、β、γ、δ 相切的球一般有八个。

3312. 半径相等的四个球，各自分别与其它三个球外切．求证：由与其中每三个球相切的四个平面所围成的立体是正四面体。



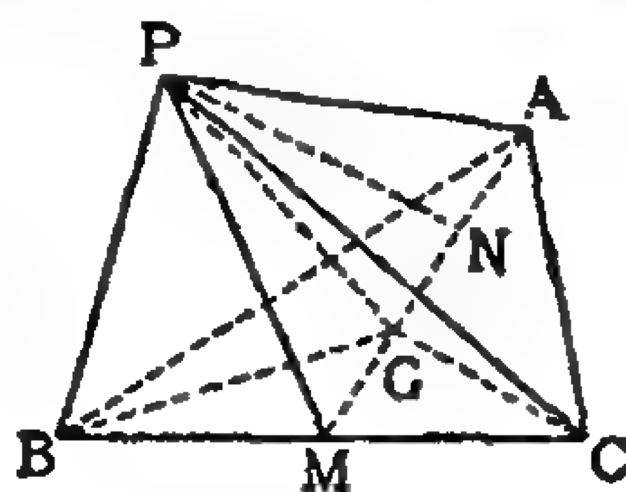
解　设四个球的球心分别是 A、B、C、D，其半径都是 r，则

$$AB=AC=AD=BC=BD=CD(=2r).$$

所以，四面体 $ABCD$ 是正四面体。

因球 B、C、D 的切平面与点 B、C、D 的距离都等于 r，所以它与平面 BCD 平行．其它的切平面也同样．因此，由四个切平面围成的四面体 $A'B'C'D'$ 的各面与正四面体 $ABCD$ 各面平行．因而，其对应的棱平行，对应的面相似．故知 $A'B'C'D'$ 是正四面体。

3313. 求与空间三定点 A、B、C 距离的平方和一定的点 P 的轨迹。



解　设 BC 的中点为 M，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则由中线定理得

$$PB^2+PC^2=2BM^2+2PM^2. \quad ①$$

又设 AG 的中点为 N，则

$$PA^2+PG^2=2PN^2+2GN^2. \quad ②$$

又

$$PN^2+PM^2=2PG^2+2GN^2, \quad ③$$

$$2BM^2+2MG^2=BG^2+CG^2. \quad ④$$

由①+②+③+④，和 $GN=AN=MG$ 得

$$PA^2+PB^2+PC^2=3PG^2+AG^2+BG^2+CG^2.$$

设　$PA^2+PB^2+PC^2=m^2$，

$AG^2+BG^2+CG^2=n^2$。

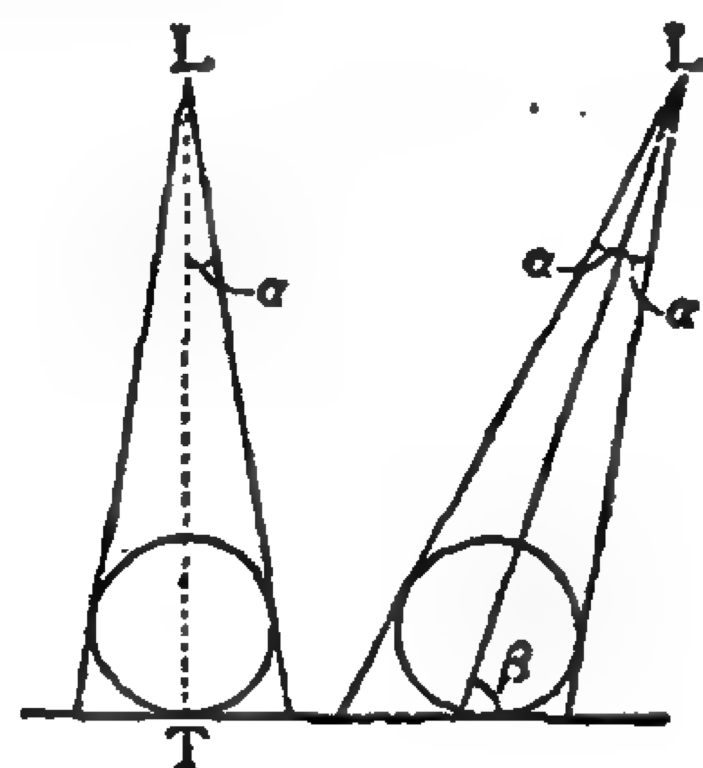
则 m^2、n^2 都是一定的，

所以　$$PG^2=\frac{1}{3}(m^2-n^2),$$

即　$$PG=\sqrt{\frac{m^2-n^2}{3}}$$

是一定的．因此，点 P 的轨迹是以 $\triangle ABC$ 的重心为球心，以 $\sqrt{\frac{m^2-n^2}{3}}$ 为半径的球。

3314. 有四个半径都是 r cm 的球，将其中三个球相互接触固定在桌子上，再在上面放另一个球．求这个球的最高点离开桌面的高度是多少。

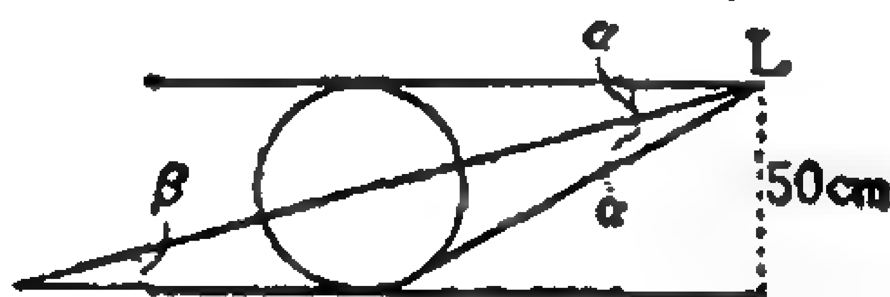


解　设堆垒的四个球的球心分别为 A、B、C、D，则四面体 $ABCD$ 是棱长为 $2r$ cm 的正四面体．其高 AH 由问题 3210 知是 $\frac{\sqrt{6}}{3}\times AB$，即 $\frac{2\sqrt{6}}{3}r$ cm．所以，这四个球的最高处和桌子面的距离是：

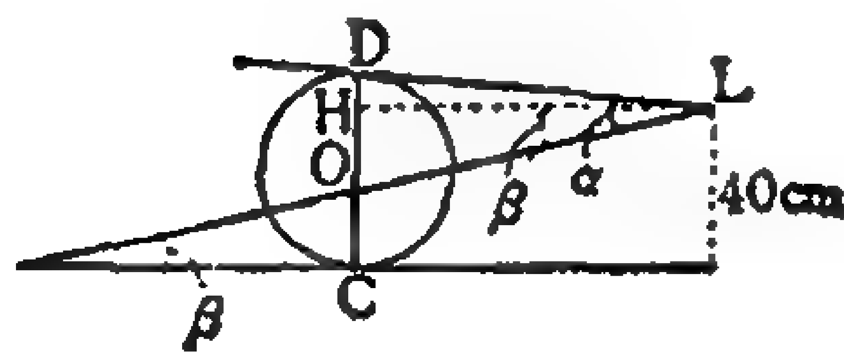
$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}+2\right)r,$$

即　$$\frac{2(\sqrt{6}+3)}{3}r\,(\text{cm}).$$

3315. 桌上放着一个直径为 50 cm 的球．已知电灯的一束光射到球面的视角的一半为 α，连结电灯和球心的直线和桌面的夹角为 β．当 $\alpha<\beta$ 时，球的阴影是椭圆或圆；当 $\alpha=\beta$ 时是抛物线；当 $\alpha>\beta$ 时是双曲线．如果电灯的高度为 h，在下列情况中，回答阴影的形状，并说明其理由。



(1)



(2)

(3)

(1) $h=300$ cm:

(i) 球的球心在电灯的正下方;

(ii) 球的球心不在电灯的正下方.

(2) $h=50$ cm, (3) $h=40$ cm.

解 (1) (i) 光源 L 在球的正上方时，阴影的边界和这个球在桌上的切点的距离是

$$300\cdot \operatorname{tg}\alpha\ (\text{cm}),$$

所以这时的阴影是圆.

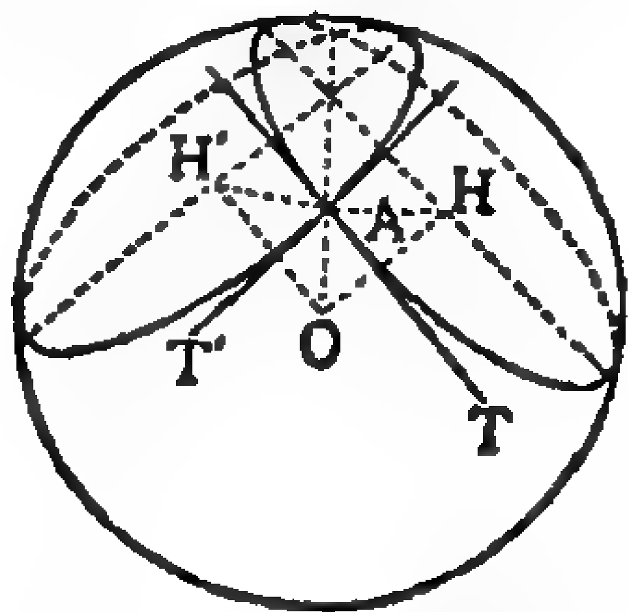
(ii) 因为 $\beta>\alpha$, 所以阴影是椭圆.

(2) 这时球的直径和光源 L 的高度相等，如图(2), $\alpha=\beta$, 所以阴影是抛物线.

(3) 这时 L 的高度比球的直径小，如图(3), $\beta<\alpha$, 所以阴影是双曲线.

(2) 球面三角形

3316. 球面上相交的两个小圆所构成的角，等于在交点处该两圆的切线分别和球心所确定的两个平面构成的二面角的平面角.



解 设球心为 O, 两个相交小圆的圆心分别为 H、H', 其交点之一是 A. 圆 H 在点 A 处的切线为 AT, 圆 H' 的切线为 AT', 则

圆 H 的平面 $\perp OH$,

$$\therefore\ AT\perp OH.$$

又 AT 是圆 H 的切线, $AT\perp HA$,

$$\therefore\ AT\perp \text{平面}(OH,\ HA),$$

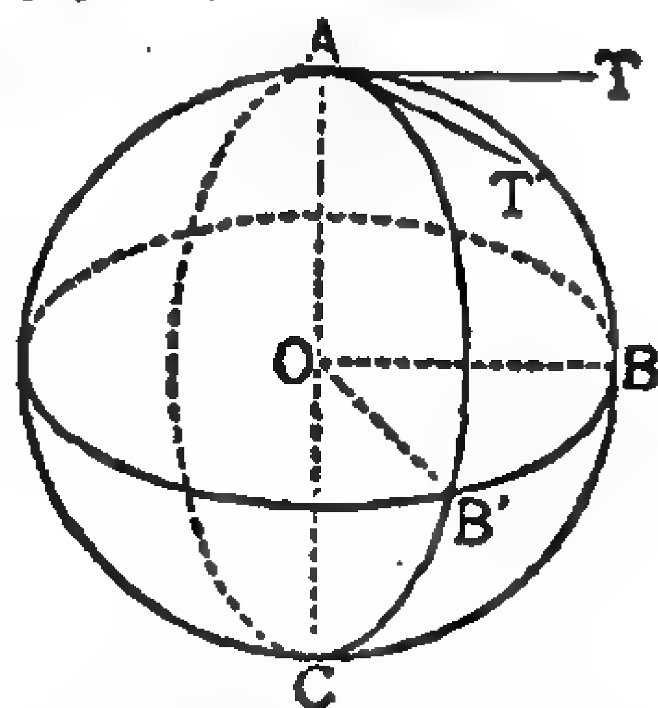
从而 $\qquad AT\perp OA.$

同理, $\qquad AT'\perp OA.$

因为 OA 是平面(AT, O)和平面(AT', O)的交线，所以 $\angle TAT'$ 是平面 (AT, O) 和平面 (AT', O)所构成的二面角的平面角，又因两相交小圆所构成的角就是在交点处该两圆的切线所构成的角，所以两相交圆 H、H' 所构成的角等于两平面(AT, O)和(AT', O)所构成的二面角的平面角.

注 因为 $AT\perp OA$, 所以小圆 H 的切线 AT 也是球 O 的切线. 同样，小圆 H' 的切线也是球 O 的切线.

3317. 球面上两个大圆弧所构成的角，与这两个大圆所在平面构成的二面角的平面角相等，且可用来测定以这两个大圆的交点为极的第三个大圆在这两个大圆间的弧.



解 设球心为 O, 两个大圆的交点分别为 A、C, 以 A 为极的大圆与以 A 为交点的两个大圆的交点分别为 B、B'. 如果 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AB'}$ 都是四分圆，则

$$\angle AOB=\angle AOB'=\angle R.$$

所以 $\angle BOB'$ 是度量两个大圆 ABC、$AB'C$ 所构成的二面角的平面角.

其次，从 A 引大圆 ABC 的切线 AT, 则

$$\angle OAT=\angle R,$$

所以 $\qquad AT\parallel OB.$

同样，从 A 引大圆 $AB'C$ 的切线 AT', 则

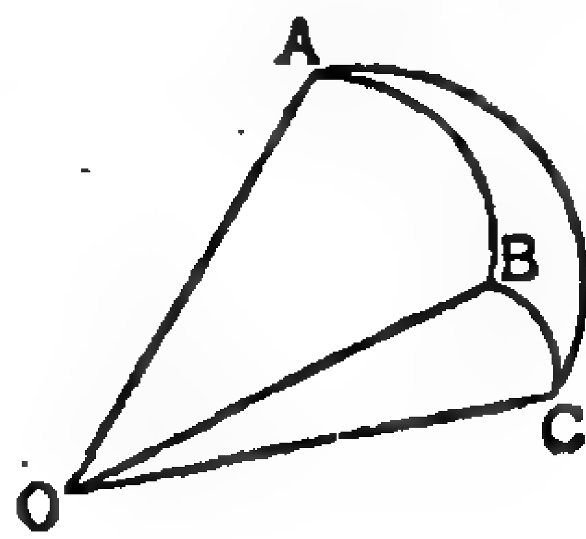
$$AT'\parallel OB',$$

$$\therefore\ \angle TAT'=\angle BOB'.$$

这就是说，两个大圆 ABC、$AB'C$ 所成的角 $\angle TAT'$, 与这两个大圆 ABC、$AB'C$ 所成的二面角的平面角 $\angle BOB'$ 相等.

因为一个圆上的弧与该弧所对的圆心角成比例，所以二面角 B-AC-B' 可以度量弧 BB' (如果球的半径为 1, 则 $\overset{\frown}{BB'}$ 可用 $\angle BOB'$ 的弧度数来表示; 如以大圆周长的 360 分之一作为度量弧的单位，则 $\overset{\frown}{BB'}$ 就可用 $\angle BOB'$ 的度数的值表示).

3318. 球面三角形的任意两边之和大于第三边.



解 设球心为 O, 球面三角形为 ABC, 其最大边为 $\overset{\frown}{AC}$. 连结OA, OB, OC 构成三面角 O-ABC, 由问题 **3076** 知

$$\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC,$$

由 $\qquad \angle AOB:\angle BOC:\angle COA=\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA},$

$$\therefore\ (\angle AOB+\angle BOC):\angle COA=(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}):\overset{\frown}{CA}.$$

因此, $\qquad \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{CA}.$

因为 $\overset{\frown}{AC}$ 是球面三角形 ABC 的最大边，显然还有

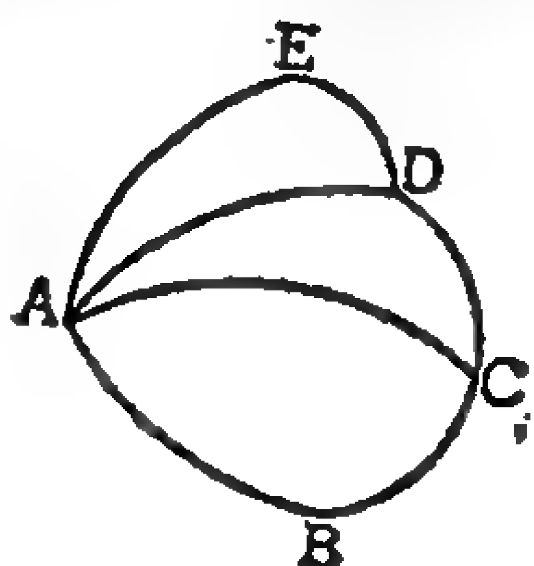
$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{AB},\ \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}>\overset{\frown}{BC}.$$

所以球面三角形中任意两边之和大于第

三边。

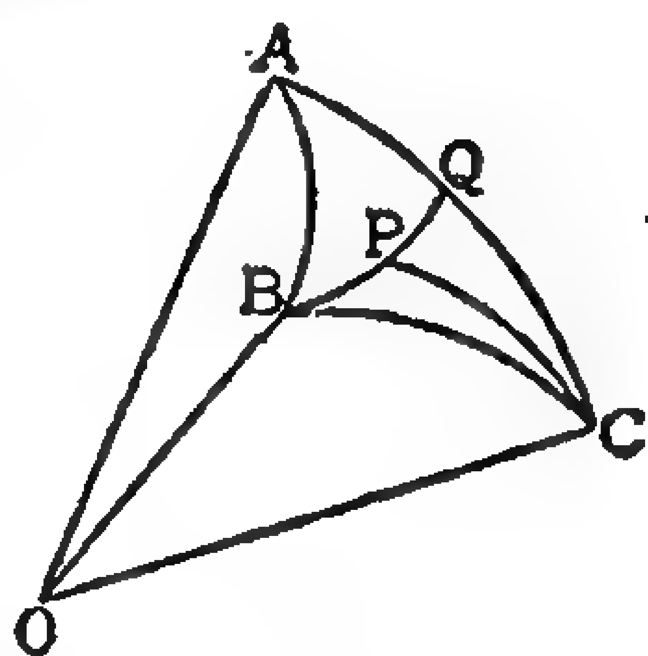
3319. 球面多边形的任一边小于其他所有边之和。

解　设球面多边形 $ABCDE$ 的最大边为 $\overset{\frown}{AB}$，分别用大圆弧连结 AC、AD，由上题知



$$\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC},$$
$$\overset{\frown}{AC}<\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD},$$
$$\overset{\frown}{AD}<\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EA},$$
$$\therefore\quad \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AD}<\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EA},$$
即 $$\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EA}.$$

3320. 设 P 为球面三角形 ABC 内的一点，用大圆弧连结 PB、PC，则
$$\overset{\frown}{PB}+\overset{\frown}{BC}<\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}.$$

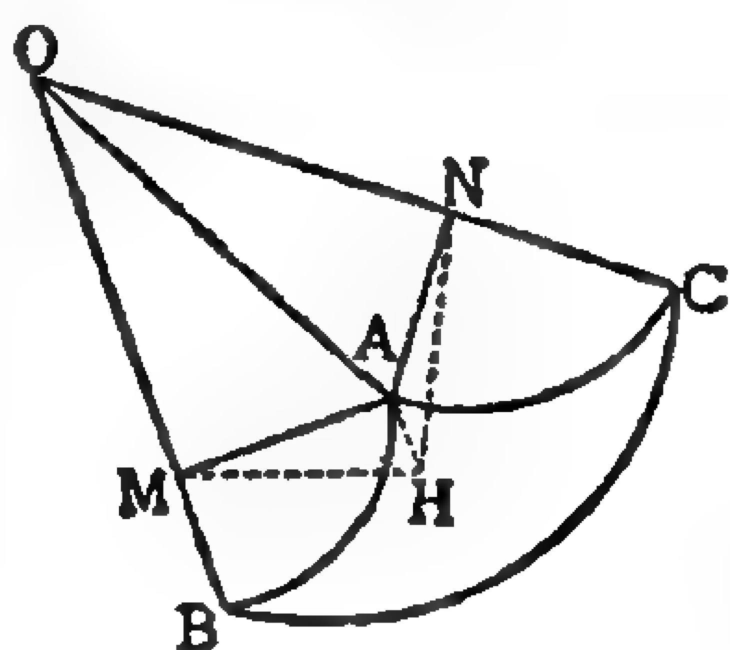


解　设弧 BP 的延长线和弧 AC 的交点为 Q，由问题 **3318** 知
$$\overset{\frown}{BQ}<\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AQ},$$
即 $$\overset{\frown}{PB}+\overset{\frown}{PQ}<\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AQ}.$$
又 $$\overset{\frown}{PC}<\overset{\frown}{PQ}+\overset{\frown}{QC},$$
$$\therefore\quad \overset{\frown}{PB}+\overset{\frown}{PQ}+\overset{\frown}{PC}<\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AQ}+\overset{\frown}{PQ}+\overset{\frown}{QC},$$
即 $$\overset{\frown}{PB}+\overset{\frown}{PC}<\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}.$$

3321. 球面三角形的三边之和小于大圆。

解　设球心为 O，球面三角形为 ABC，作三面角 $O\text{-}ABC$（参照问题 **3318** 的图），由问题 **3077** 知
$$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA<4\angle R.$$
但 $$\angle AOB:\angle BOC:\angle COA:4\angle R=\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}:\text{大圆周长},$$
$$\therefore\quad \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA}<\text{大圆周长}.$$

3322. 二等边球面三角形的两底角相等。反过来，两底角相等的球面三角形是二等边球面三角形。



解　设球心为 O，球面三角形为 ABC，且 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$。从 A 引平面 OBC 的垂线，垂足为 H。再从 A 引 OB、OC 的垂线，垂足分别为 M、N，则
$$OB\perp MA,\ OB\perp HA,$$
$$\therefore\quad OB\perp\text{平面}(MA,\ HA).$$
从而　$OB\perp MH$（三垂线定理）。
因此，$\angle AMH$ 是度量二面角 OB 的平面角。

同样，$\angle ANH$ 是度量二面角 OC 的平面角。由于 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，所以 $\angle AOB=\angle AOC$。于是在 $\triangle AMO$ 和 $\triangle ANO$ 中，
$$\angle AMO=\angle ANO=\angle R,$$
$$\angle AOM=\angle AON,\ AO\text{ 公共},$$
$$\therefore\quad \triangle AMO\cong\triangle ANO,$$
从而 $$AM=AN.$$
又在 $\triangle AHM$ 和 $\triangle AHN$ 中，
$$\angle AHM=\angle AHN=\angle R,$$
$$AM=AN,\ AH\text{ 公共},$$
$$\therefore\quad \triangle AHM\cong\triangle AHN,$$
从而 $$\angle AMH=\angle ANH.$$

由此可知二面角 $OB=$ 二面角 OC，所以 $\angle B=\angle C$。即二等边球面三角形的两底角相等。

反之，在球面三角形 ABC 中，如 $\angle B=\angle C$，则
$$\angle AMH=\angle ANH,$$
$$\triangle AHM\cong\triangle AHN,$$
$$\therefore\quad AM=AN.$$
从而 $$\triangle AMO\cong\triangle ANO,$$
$$\angle AOB=\angle AOC.$$
$$\therefore\quad \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}.$$
因此两角相等的球面三角形是二等边球面三角形。

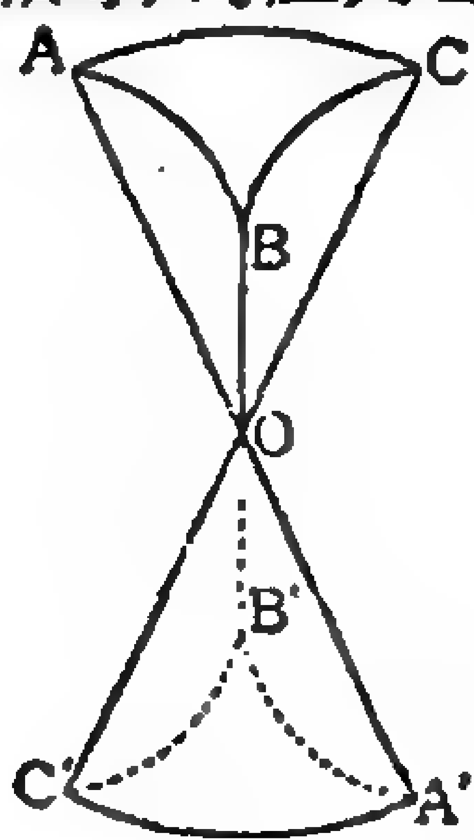
3323. 如果球面三角形的三条边相等，则它的三个角也相等。反之，如果球面三角形的三个角相等，则它的三条边也相等。

解　在球面三角形 ABC 中，如果 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CA}$，则由 $\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{CB}$ 知 $\angle A=\angle B$。
又由 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$ 知 $\angle C=\angle B$（参照上题），
$$\therefore\quad \angle A=\angle B=\angle C.$$

其次，在球面三角形 ABC 中，如果 $\angle A=\angle B=\angle C$，则由 $\angle C=\angle A$ 可知 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$。由 $\angle A=\angle B$ 可知 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}$，
$$\therefore\quad \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}.$$

3324. 如果 AA' 是球的直径，则称 A' 是 A 的对点，或称 A 是 A' 的对点。设 A、B、C 的对点分别为 A'、B'、C'，则球面三角形 ABC

和球面三角 $A'B'C'$ 的对应边相等，对应角也相等。



解　因为 $\angle AOB=\angle A'OB'$（对顶角），

$\therefore\quad \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$。

同理，

$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{B'C'}$，

$\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{C'A'}$。

因此这两个球面三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的对应边相等。

又二面角 OA＝二面角 OA'（对棱二面角），

$\therefore\quad \angle A=\angle A'$。

同理，　$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$。

因此这两个球面三角 ABC 和 $A'B'C'$ 的对应角相等。

注 1　一个球面三角形和以其各顶点的对点为顶点的球面三角形，叫做互为对称的球面三角形。互相对称的两个球面三角形的对应边相等，对应角也相等，但它们不一定是合同的。

2　一个球面三角形和与它的对称球面三角形的合同球面三角形也是互相对称的。

3325．互相对称的两个二等边球面三角形是合同的。

解　设球面三角形 ABC 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$A$、$B$、$C$ 的各对点 A'、B'、C' 所构成的球面三角形为 $\triangle A'B'C'$，则由上题知

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'},\ \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{B'C'},\ \overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{C'A'},$$

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C'.$$

已知　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，

$\therefore\quad \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'C'}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{A'B'}$。

取球面三角形 $A'B'C'$，把 A' 与 A 重合，$\overset{\frown}{A'C'}$ 与 $\overset{\frown}{AB}$ 重合，则由 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'C'}$ 可知 C' 重合于 B，又由 $\angle A=\angle A'$ 可知 $\overset{\frown}{A'B'}$ 与 $\overset{\frown}{AC}$ 重合。最后，因为 $\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{AC}$，$B'$ 与 C 重合，从而 $\overset{\frown}{B'C'}$ 重合于 $\overset{\frown}{BC}$。

$\therefore$　球面三角形 ABC

$\cong$ 球面三角形 $A'B'C'$。

3326．互相对称的两个球面三角形的面积相等。

解　设球心为 O，球面三角形为 ABC，小圆 ABC 的圆心为 D，OD 的延长线和球面的交点为 E，分别用大圆弧连结 EA，EB，EC，则在 $\triangle OAD$ 和 $\triangle OBD$ 中，

$OA=OB$，

$DA=DB$，

OD 公共。

$\therefore\quad \triangle OAD\cong\triangle OBD$，

$\angle AOD=\angle BOD$，

从而　$\overset{\frown}{EA}=\overset{\frown}{EB}$。

同样，　$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{EC}$，　$\therefore\quad \overset{\frown}{EA}=\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{EC}$。

由此可知三个球面三角形 EAB，EBC，ECA 都是二等边球面三角形。

设 A、B、C、E 的对点分别为 A'、B'、C'、E'，并以这些对点为顶点构成球面三角形，由上题得

球面三角形 EAB＝球面三角形 $E'A'B'$，

球面三角形 EBC＝球面三角形 $E'B'C'$，

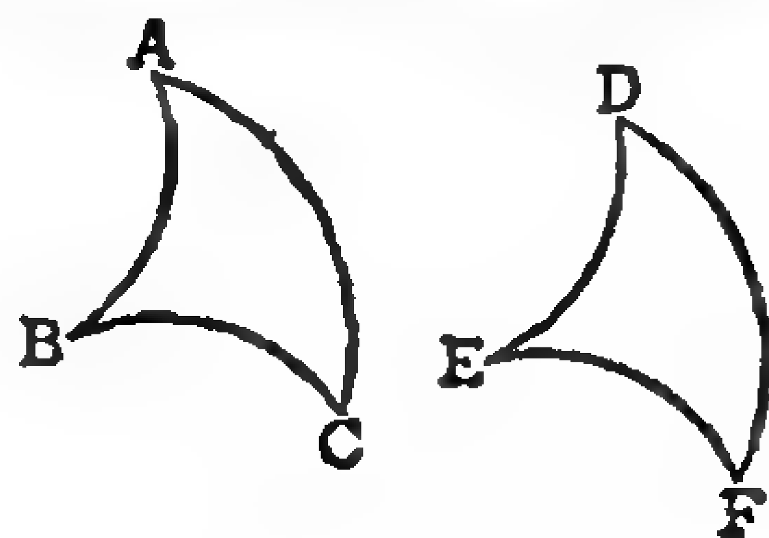
球面三角形 ECA＝球面三角形 $E'C'A'$。

由于球面三角形 ABC 是三个球面三角形 EAB、EBC、ECA 的和，或者是其中两个的和减去余下的一个所得的差，球面三角形 $A'B'C'$ 是三个球面三角形 $E'A'B'$、$E'B'C'$、$E'C'A'$ 的和，或者是其中两个的和减去余下的一个所得之差。

$\therefore$　球面三角形 ABC

＝球面三角形 $A'B'C'$。

3327．在相同或相等球面上的两边及其夹角对应相等的两个球面三角形，是合同的或者是对称的。



解　已知在相同或相等球面上的两个球面三角形 ABC、DEF 中，

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DE},\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DF},\ \angle A=\angle D.$$

设和 ABC 对称的球面三角形为 $A'B'C'$，则

$$\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{AB},\ \overset{\frown}{A'C'}=\overset{\frown}{AC},\ \angle A'=\angle A.$$

从而可知

$$\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{DE},\ \overset{\frown}{A'C'}=\overset{\frown}{DF},\ \angle A'=\angle D.$$

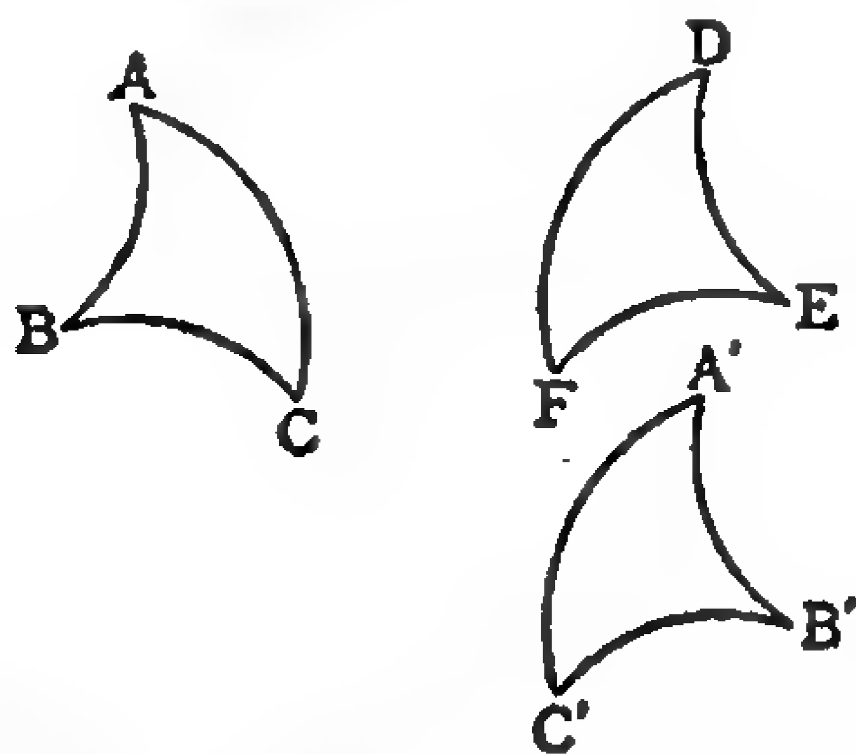
现在取 DEF，把 D 放在 A 上，使 $\overset{\frown}{DE}$ 和 $\overset{\frown}{AB}$ 重合，则由 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DE}$ 可知 E 重合于 B。

这时可分两种情况讨论:

如果 F 和 C 在 $\overset{\frown}{AB}$ 的同侧，因为 $\angle A=\angle D$,可使 $\overset{\frown}{DF}$ 重合于 $\overset{\frown}{AC}$。又因 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DF}$,于是 F 重合于 C,从而 $\overset{\frown}{EF}$ 重合于 $\overset{\frown}{BC}$。因此

球面三角形 $ABC\cong$球面三角形 DEF。

如果 F 和 C 在 $\overset{\frown}{AB}$ 的异侧，可把 D 放在 A' 上，使 $\overset{\frown}{DE}$ 重合于 $\overset{\frown}{A'B'}$,这时 F 和 C' 就在 $\overset{\frown}{A'B'}$ 的同侧，由 $\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{DE}$ 可知，E 重合于 B'.又因 $\angle A'=\angle D$, $\overset{\frown}{DF}$ 可重合于 $\overset{\frown}{A'C'}$,又 $\overset{\frown}{A'C'}=\overset{\frown}{DF}$,于是 F 重合于 C',因而 $\overset{\frown}{EF}$ 重合于 $\overset{\frown}{B'C'}$。因此



球面三角形 $A'B'C'\cong$球面三角形 DEF。

综上所述，可知球面三角形 ABC 和 DEF 或者合同、或者对称。

3328. 在相同或相等的球面上，两角及其夹边对应相等的两个球面三角形或者合同或者对称。

解　如上题的图。已知在相同或相等球面上的两个球面三角形 ABC 和 DEF 中

$$\angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F,\ \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{EF}.$$

设和 ABC 对称的球面三角形为 $A'B'C'$,则有

$$\angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',\ \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{B'C'}.$$

从而

$$\angle B'=\angle E,\ \angle C'=\angle F,\ \overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{EF}.$$

取 DEF,把 E 放在 B 上,使 $\overset{\frown}{EF}$ 重合于 $\overset{\frown}{BC}$,由于 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{EF}$ 可知 F 重合于 C。这时可分两种情况讨论:

如果 D 和 A 在 $\overset{\frown}{BC}$ 的同侧，由 $\angle B=\angle E$ 可知 $\overset{\frown}{ED}$ 重合于 $\overset{\frown}{BA}$。又由 $\angle C=\angle F$ 可知 $\overset{\frown}{FD}$ 重合于 $\overset{\frown}{CA}$,从而 D 和 A 重合。因此

$$ABC\cong DEF.$$

如果把 $\overset{\frown}{EF}$ 重合于 $\overset{\frown}{BC}$ 时，D 和 A 在 $\overset{\frown}{BC}$ 的异侧,则可把 E 放在 B' 上,使 $\overset{\frown}{EF}$ 与 $\overset{\frown}{B'C'}$ 重合，D 和 A' 就在 $\overset{\frown}{B'C'}$ 的同侧。由于 $\overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{EF}$ 可知 F 重合于 C'。由 $\angle B'=E$ 可知 $\overset{\frown}{ED}$ 重合于 $\overset{\frown}{B'A'}$,又由 $\angle C'=\angle F$ 可知 $\overset{\frown}{FD}$ 和 $\overset{\frown}{C'A'}$重合,因而 D 和 A' 重合。

$$\therefore\quad A'B'C'\cong DEF.$$

综上所述，两个球面三角形 ABC 和 DEF 或者合同或者对称。

3329. 在相同或相等的球面上，三边对应相等的两个球面三角形 ABC 和 DEF 或者合同或者对称。

解　设在两个球面三角形 ABC 和 DEF 中，

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DE},\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DF},\ \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{EF}.$$

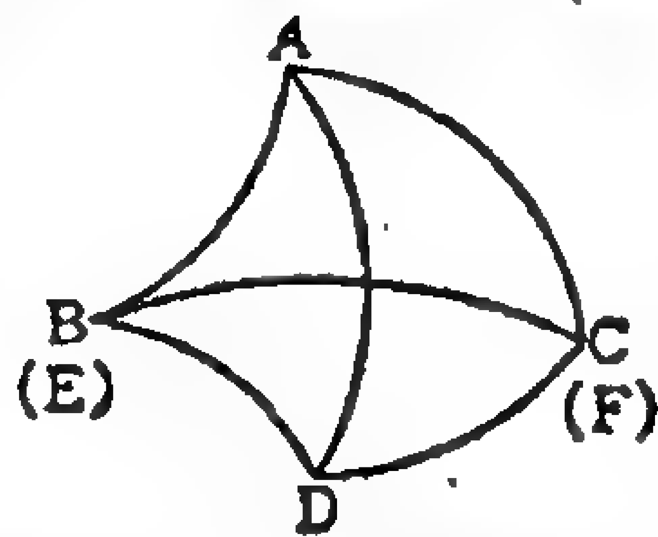
如果和球面三角形 ABC 对称的球面三角形为 $A'B'C'$,则

$$\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{AB},\ \overset{\frown}{A'C'}=\overset{\frown}{AC},\ \overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{BC}.$$

从而

$$\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{DE},\ \overset{\frown}{A'C'}=\overset{\frown}{DF},\ \overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{EF}.$$

取 DEF，把 E 放在 B 上，使 $\overset{\frown}{EF}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 重合，由 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{EF}$ 可知，F 重合于 C。如果 D 和 A 在 $\overset{\frown}{BC}$ 的异侧，作 AD 的大圆弧，则得到两个二等边球面三角形 BAD、CAD，因为它们的两底角相等，于是可得 $\angle A=\angle D$。



如果 $\overset{\frown}{EF}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 重合时，D 和 A 在 $\overset{\frown}{BC}$ 的同侧，可使 $\overset{\frown}{EF}$ 重合于 $\overset{\frown}{B'C'}$,于是 D 和 A' 就在 $\overset{\frown}{B'C'}$ 的异侧，作 AD 的大圆弧，则可得两个二等边球面三角形 $B'A'D$、$C'A'D$，它们的两底角相等,所以

$$\angle A'=\angle D;\quad 从而\quad \angle A=\angle D.$$

基于上述,可知 ABC 和 DEF 是两边及夹角分别相等的球面三角形(即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DF}$, $\angle A=\angle D$)，它们或者合同或者对称。

3330. 在相同或相等的球面上，三个角对应相等的两个球面三角形或者合同或者对称。

解　在以 O 为球心的球面上的两个球面三角形 ABC 和 DEF 中，

$$\angle A=\angle D,\ \angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F.$$

和问题 **3331** 一样，作 ABC 的极三角形 $A'B'C'$，作 DEF 的极三角形 $D'E'F'$，由问题 **3332** 知，$\angle B'OC'$ 和 $\angle A$ 互为补角，

$\angle E'OF'$ 和 $\angle D$ 互为补角，所以

$$\angle B'OC'=\angle E'OF',$$

从而　　$\overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{E'F'}$.

同理　　$\overset{\frown}{C'A'}=\overset{\frown}{F'D'}$, $\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{D'E'}$.

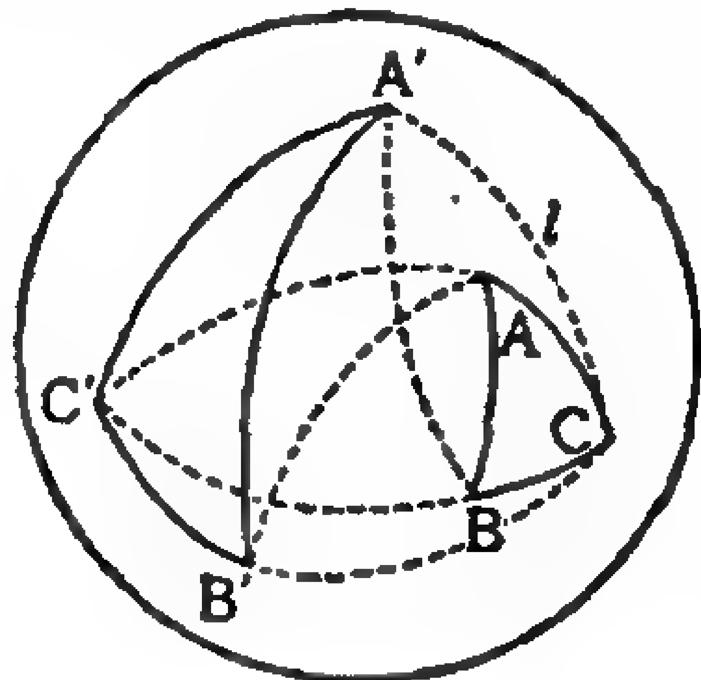
因此由上题可知，$A'B'C'$ 和 $D'E'F'$ 是合同的或者是对称的。

$$\therefore\quad \angle A'=\angle D',\ \angle B'=\angle E',\ \angle C'=\angle F'.$$

其次，由于 $A'B'C'$ 的极三角形为 ABC，$D'E'F'$ 的极三角形为 DEF，由上面的证明可知，ABC 和 DEF 是合同的或者是对称的。

如果 ABC 和 DEF 分别在两个相等的球面上，则由于可使球心重合，从而使这两个球面重合，所以和同球上的证明一样。

3331. 设分别过球面三角形 ABC 各边 BC、CA、AB 的大圆 BC、CA、AB，在 A、B、C 同侧的极点为 A'、B'、C'，则球面三角形 $A'B'C'$ 叫做球面三角形 ABC 的极三角形。



已知球面三角形 $A'B'C'$ 是球面三角形 ABC 的极三角形，证明球面三角形 ABC 也是球面三角形 $A'B'C'$ 的极三角形。

解　设大圆四分弧的长度为 l，A' 是大圆 BC 的极，则

$$\overset{\frown}{A'B}=\overset{\frown}{A'C}=l.$$

同样，设 B' 是大圆 CA 的极，则

$$\overset{\frown}{B'C}=\overset{\frown}{B'A}=l.$$

设 C' 是大圆 AB 的极，则

$$\overset{\frown}{C'A}=\overset{\frown}{C'B}=l.$$

从以上各式可得 $\overset{\frown}{B'A}=\overset{\frown}{C'A}=l$，因而 A 是大圆 $B'C'$ 的极。

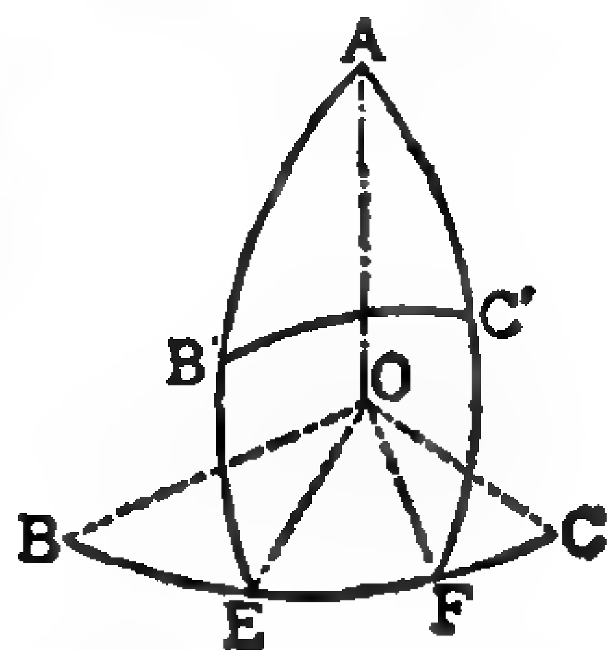
又 $C'B=A'B=l$，所以 B 是大圆 $C'A'$ 的极。

又 $A'C=B'C=l$，所以 C 是大圆 $A'B'$ 的极。

由此可知球面三角形 ABC 也是球面三角形 $A'B'C'$ 的极三角形。

3332. 设球面三角形 ABC 的极三角形为 $A'B'C'$，球心为 O，则 $\angle BOC$、$\angle COA$、$\angle AOB$ 分别与 $\angle A'$、$\angle B'$、$\angle C'$ 互为补角。

解　如果大圆弧 $A'B'$ 或其延长线和大圆弧 BC 的交点为 E，大圆弧 $A'C'$ 或其延长线和大圆弧 BC 的交点为 F，则 A' 就是大圆 BC 的极。所以



$$\angle A'OE=\angle R,$$
$$\angle A'OF=\angle R,$$
$$\therefore\quad \angle A'=\angle EOF.$$

又 B 是大圆 $A'C'$ 的极，$\angle BOF=\angle R$。C 是大圆 $A'B'$ 的极，$\angle COE=\angle R$，

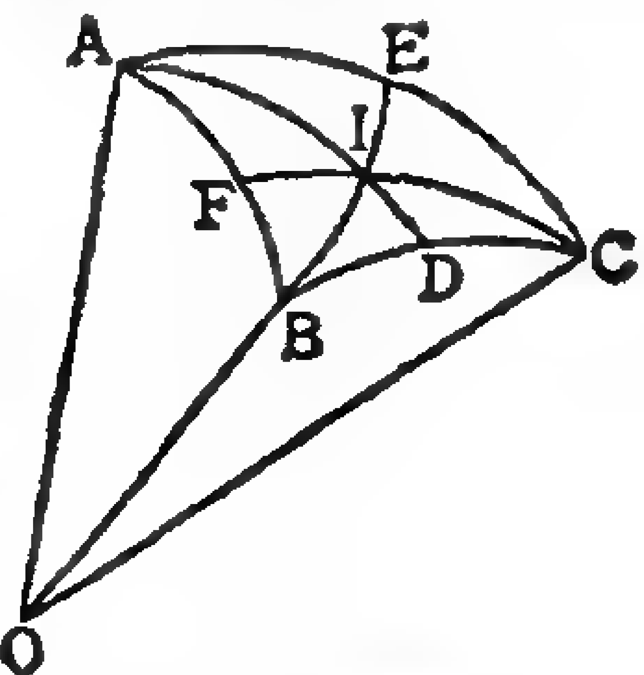
$$\therefore\quad \angle BOC+\angle EOF=\angle BOF+\angle COE=2\angle R.$$

因此，$\angle BOC$ 和 $\angle EOF$ 互为补角，从而 $\angle BOC$ 和 $\angle A'$ 互为补角。

同理，$\angle COA$ 和 $\angle B'$ 互为补角，$\angle AOB$ 和 $\angle C'$ 互为补角。

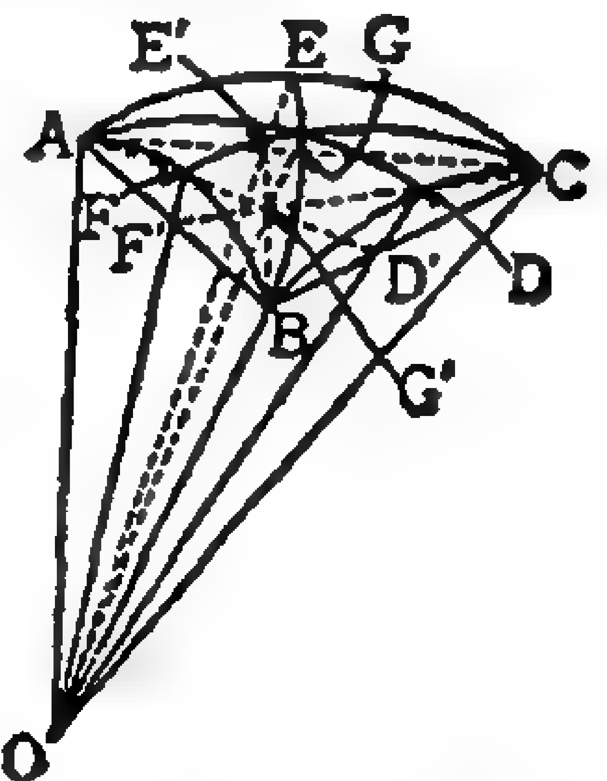
注　如球面三角形 ABC 的极三角形为 $A'B'C'$，则 $A'B'C'$ 的极三角形是 ABC，且 $\angle B'OC'$、$\angle C'OA'$、$\angle A'OB'$ 分别和 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 互补。

3333. 球面三角形的三个内角平分线共点。



解　设球心为 O 的球面三角形为 ABC，$\angle A$ 的平分线为 $\overset{\frown}{AD}$，$\angle B$ 的平分线为 $\overset{\frown}{BE}$，$\angle C$ 的平分线为 $\overset{\frown}{CF}$。设 $\overset{\frown}{BE}$ 和 $\overset{\frown}{CF}$ 的交点为 I，则因 I 是 $\angle B$ 平分线 $\overset{\frown}{BE}$ 上的点，I 到两平面 OAB、OBC 的距离相等。又因 I 是 $\angle C$ 平分线 $\overset{\frown}{CF}$ 上的点，I 到两平面 OBC、OAC 的距离相等，所以 I 到两平面 OAB 和 OAC 的距离相等，从而 I 也是 $\angle A$ 平分线 $\overset{\frown}{AD}$ 上的点。故 $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BE}$, $\overset{\frown}{CF}$ 共点 I。

3334. 球面三角形的三条中线共点。

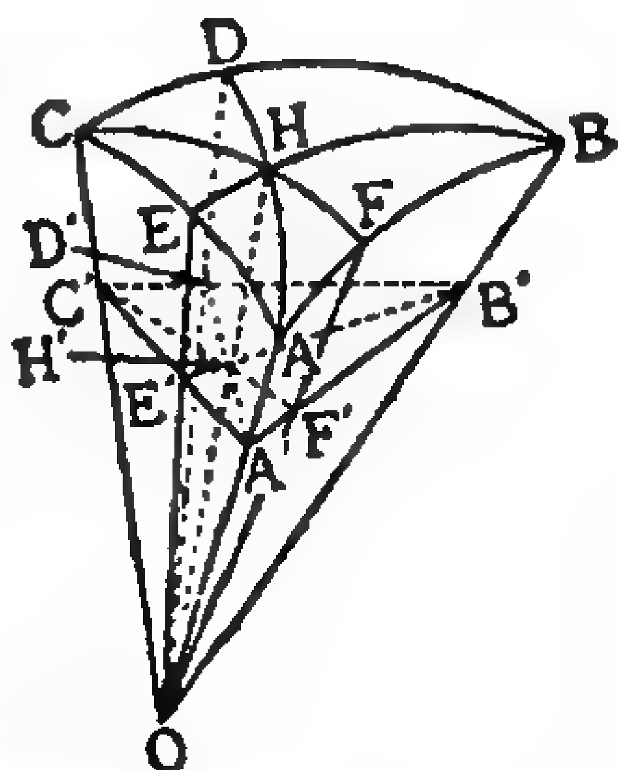


解　设球心为 O 的球面三角形为 ABC，各边 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$ 的中点分别为 D、E、F，弦 BC、CA、AB 的中点分别为 D'、E'、F'。因为在同圆内，圆心、弦的中点、该弦所对弧的中点在同一直线上，

所以D'在OD上，E'在OE上，F'在OF上。

在平面三角形ABC中，它的三条中线AD'、BE'、CF'共点，设这个交点为G'，则三平面(OA, OD)，(OB, OE)，(OC, OF)共线OG'。设OG'的延长线和球面的交点为G，则三平面(OA, OD)，(OB, OE)，(OC, OF)和直线OG分别与球面相交所成的球面三角形ABC，它的三条中线$\overset{\frown}{AD}$、$\overset{\frown}{BE}$、$\overset{\frown}{CF}$都共点G。

3335. 设球心为O的球面三角形为ABC，OA、OB、OC两两都不垂直，则由球面三角形的各顶点分别引其对边的垂线共点。



解 设由B引$\overset{\frown}{AC}$的垂线为$\overset{\frown}{BE}$，由C引$\overset{\frown}{AB}$的垂线为$\overset{\frown}{CF}$，$\overset{\frown}{BE}$和$\overset{\frown}{CF}$的交点为H。再过OA上的一点A'作垂直于OA的平面，它和OB、OC分别交于点B'、C'，则两平面OBE和$A'B'C'$的交线为$B'E'$，两平面OCF和$A'B'C'$的交线为$C'F'$。设$B'E'$和$C'F'$的交点为H'，则H'在两平面OBE和OCF的交线OH上。这时平面$A'B'C' \perp OA$，平面OAC包含OA。

$$\therefore\ \text{平面}\ A'B'C' \perp \text{平面}\ OAC.$$

又 $BE \perp AC$，平面$OBE \perp$平面OAC，所以两平面$A'B'C'$、OBE的交线$B'E'$垂直于平面OAC，

$$\therefore\ B'E' \perp A'C'.$$

同样 $C'F' \perp A'B'$.

因此，$B'E'$和$C'F'$的交点H'是$\triangle A'B'C'$的垂心，从而连结$A'H'$的直线和$B'C'$相交于D'，则

$$A'D' \perp B'C'.$$

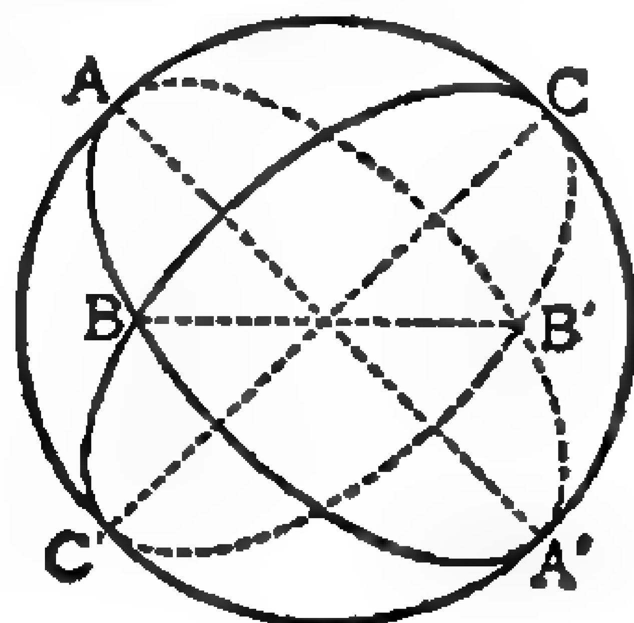
又OA垂直于平面$A'B'C'$上的直线$B'C'$，所以

$$\text{平面}(OA,\ A'D') \perp B'C'.$$

从而平面$(OA, A'D')$垂直于含有$B'C'$的平面OBC。

设OD'的延长线和$\overset{\frown}{BC}$相交于D，则$\overset{\frown}{AD}$在平面$(OA, A'D')$上，$\overset{\frown}{BC}$在平面OBC上，$\overset{\frown}{AD} \perp \overset{\frown}{BC}$。因为平面$(OA, A'D')$含有$OH'$，所以该平面上的$\overset{\frown}{AD}$必过直线$OH'$上的点$H$。由此可知由球面三角形$ABC$各顶点向其对边所引的三条垂线$AD$，$BE$，$CF$都过点$H$。即球面三角形的三条垂线共点。

3336. 球面三角形的面积和球面面积的比，等于该球面三角形内角的和减去两直角所得之差和八个直角的比。



解 设球面三角形ABC的对称球面三角形为$A'B'C'$（AA'，BB'，CC'为球的直径），半球的面积为S，则

月形$ABA'CA$面积$:S = \angle A : 2\angle R$，

$$\therefore\ \text{月形}\ ABA'CA\ \text{面积} = \frac{\angle A}{2\angle R}\cdot S.$$

月形$BC'B'A'B$面积$:S = \angle B : 2\angle R$，

$$\therefore\ \text{月形}\ BC'B'A'B\ \text{面积} = \frac{\angle B}{2\angle R}\cdot S.$$

月形$CAC'BC$面积$:S = \angle C : 2\angle R$，

$$\therefore\ \text{月形}\ CAC'BC\ \text{面积} = \frac{\angle C}{2\angle R}\cdot S.$$

$$\therefore\ \text{月形}\ ABA'CA\ \text{面积} + \text{月形}\ BC'B'A'B\ \text{面积} + \text{月形}\ CAC'BC\ \text{面积} = \frac{\angle A+\angle B+\angle C}{2\angle R}\cdot S,$$

从而

$$\text{球面三角形}\ ABC\ \text{面积} + \text{球面三角形}\ A'B'C'\ \text{面积} + S = \frac{\angle A+\angle B+\angle C}{2\angle R}\cdot S.$$

因

$$\text{球面三角形}\ ABC\ \text{面积} = \text{球面三角形}\ A'B'C'\ \text{面积},$$

$$\therefore\ 2\times(\text{球面三角形}\ ABC\ \text{面积}) = \frac{\angle A+\angle B+\angle C}{2\angle R}\cdot S - S = \frac{\angle A+\angle B+\angle C-2\angle R}{2\angle R}\cdot S.$$

即

$$\text{球面三角形}\ ABC\ \text{面积} = \frac{\angle A+\angle B+\angle C-2\angle R}{4\angle R}\cdot S,$$

从而

$$\frac{\text{球面三角形 } ABC \text{ 面积}}{2S}=\frac{\angle A+\angle B+\angle C-2\angle R}{8\angle R}.$$

3337. 球面三角形的内角和大于两直角而小于六直角。

解 设球面三角形为 ABC，半球面为 S，则由上题知

$$\frac{\text{球面三角形 } ABC \text{ 面积}}{2S}=\frac{\angle A+\angle B+\angle C-2\angle R}{8\angle R}.$$

这个等式的左边是正的，右边也必须是正的，

$$\therefore\quad \angle A+\angle B+\angle C-2\angle R>0,$$

即

$$\angle A+\angle B+\angle C>2\angle R.$$

又

$$\angle A<2\angle R,\ \angle B<2\angle R,\ \angle C<2\angle R,$$

$$\therefore\quad \angle A+\angle B+\angle C<6\angle R.$$

因此

$$2\angle R<\angle A+\angle B+\angle C<6\angle R.$$

注 从球面三角形的三个内角和减去两直角的球面叫做这个球面三角形的球面过剩。

3338. 球面凸 n 边形的面积，等于从其内角和的一半减去 $(n-2)\angle R$ 所得之差为月形角的球面月形的面积。

解 设球面凸 n 边形为 $ABCD\cdots MN$，半球面积为 S。如用大圆弧连结 AC、AD、…、AM，则得 $n-2$ 个球面三角形，这时 $\angle A$ 被分成 $\angle a_1$、$\angle a_2$、…、$\angle a_{n-2}$ 等 $n-2$ 个角，$\angle C$ 被分成 $\angle c_1$、$\angle c_2$ 两个角，$\angle D$ 被分成 $\angle d_1$、$\angle d_2$ 两个角，…，$\angle M$ 被分成 $\angle m_1$，$\angle m_2$ 两个角。由问题 3336 知

球面三角形 ABC 面积

$$=\frac{\angle a_1+\angle B+\angle c_1-2\angle R}{4\angle R}\cdot S,$$

球面三角形 ACD 面积

$$=\frac{\angle a_2+\angle c_2+\angle d_1-2\angle R}{4\angle R}\cdot S,$$

…………

球面三角形 AMN 面积

$$=\frac{\angle a_{n-2}+\angle m_2+\angle N-2\angle R}{4\angle R}\cdot S.$$

把以上各等式的两边分别相加，则得

球面凸 n 边形 $ABCD\cdots MN$ 面积

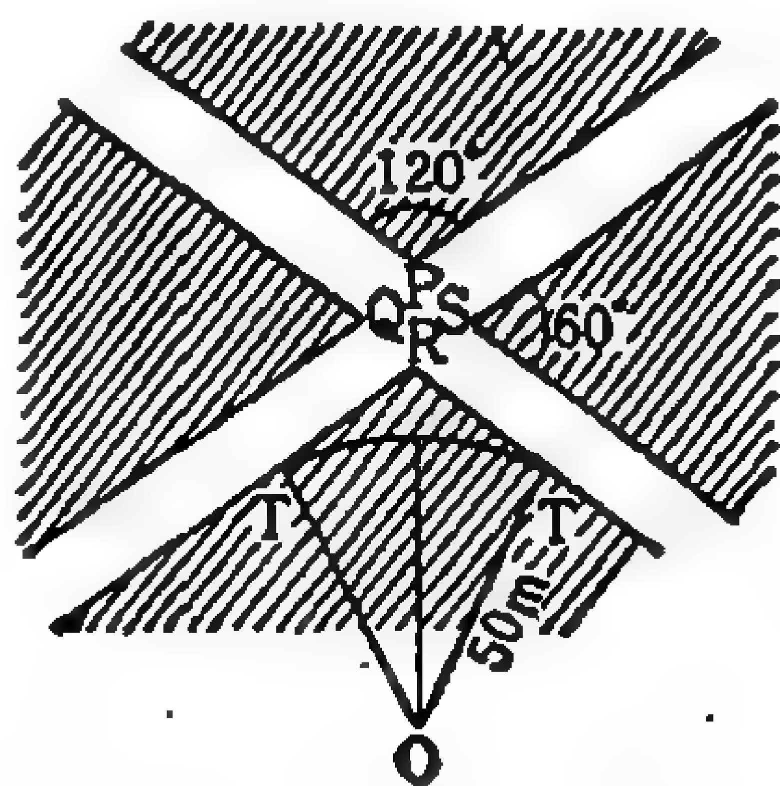
$$=[\angle A+\angle B+\angle C+\cdots+\angle N-2(n-2)\angle R]\cdot S\div 4\angle R$$

$$=\left[\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\cdots+\angle N)-(n-2)\angle R\right]\cdot S\div 2\angle R.$$

上式右边表示，以分子中的角为月形角的月形的面积，因此得证。

3339. 说明什么是曲率和曲率半径。

解 如果把弯曲的道路、铁路，或者物体上的曲线看成是圆弧的一部分，则这个圆的半径 r 的倒数 $\frac{1}{r}$，叫做这条曲线的曲率，r 叫做曲率半径。



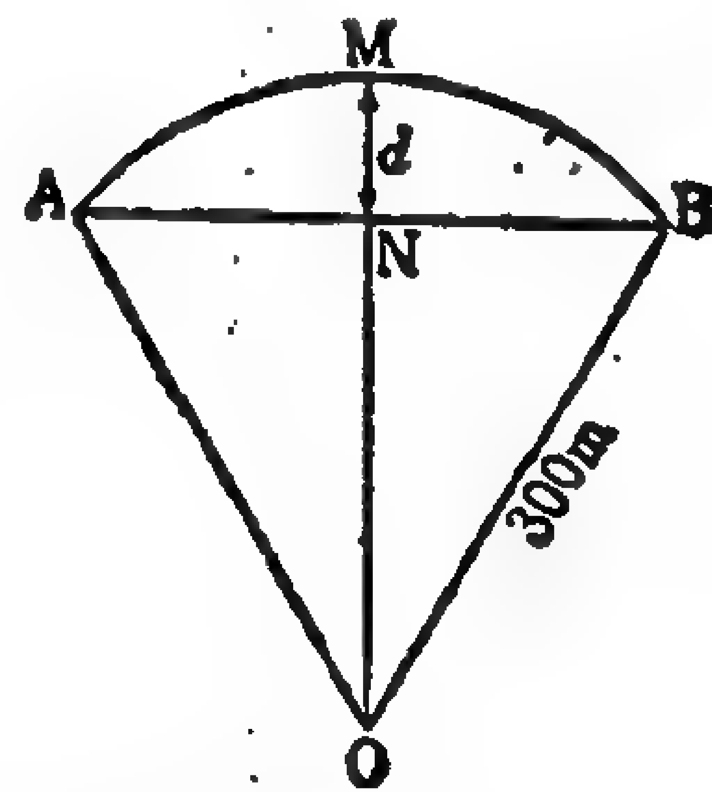
例如，图中相交成 60° 的十字路上，要在各角 P、Q、R、S 内作圆弧，使其曲率半径为 50 m 且和各角的两边相切，试求各角顶点 P、Q、R、S 到各切点的距离。

如图，已知 $OT=OT'=50$，设 $RT=x$，由 $\angle TRO=60°$ 知

$$OT=\sqrt{3}x,$$

$$\therefore\quad x=\frac{50}{\sqrt{3}}.$$

其余的同样可求出。



又如，已知长 25 m 的线路的曲率半径为 300 m，如图，试求其弯曲的高度 d。

设 $\angle AOB=\theta$，则有

$$\frac{25}{300\times 2\pi}=\frac{\theta}{360},$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{15}{\pi}\approx 4.7°.$$

从而 $\angle BON=2.35°$,

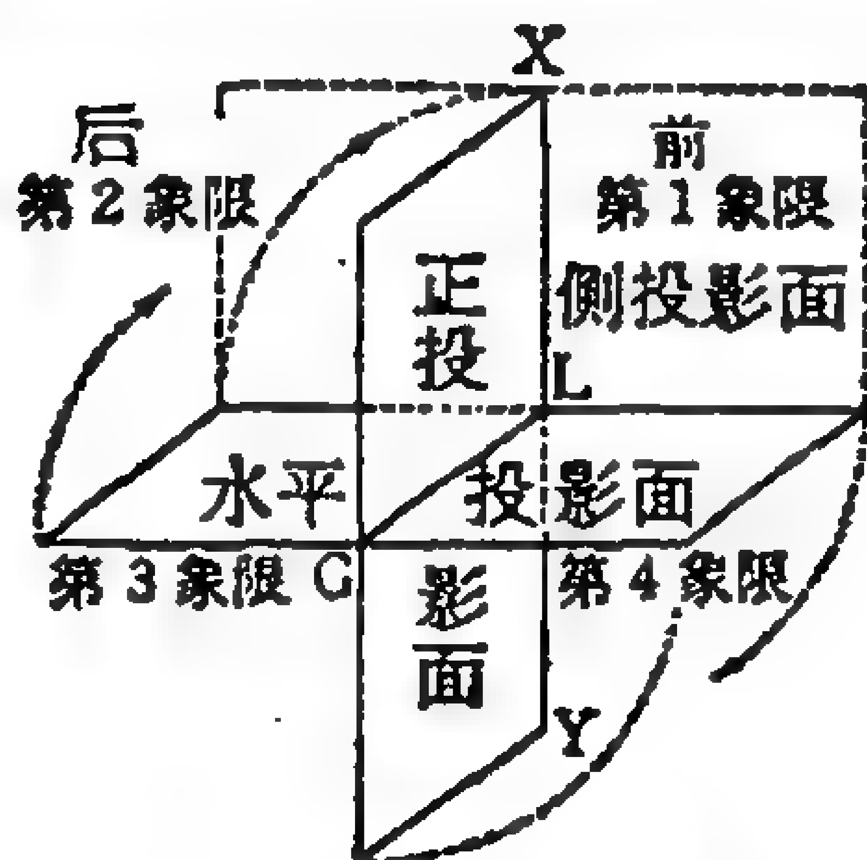
$$ON=300\cos 2.35°=300\times 0.9991\approx 299.7,$$

$$\therefore\quad d=300-299.7=0.3(\text{m}).$$

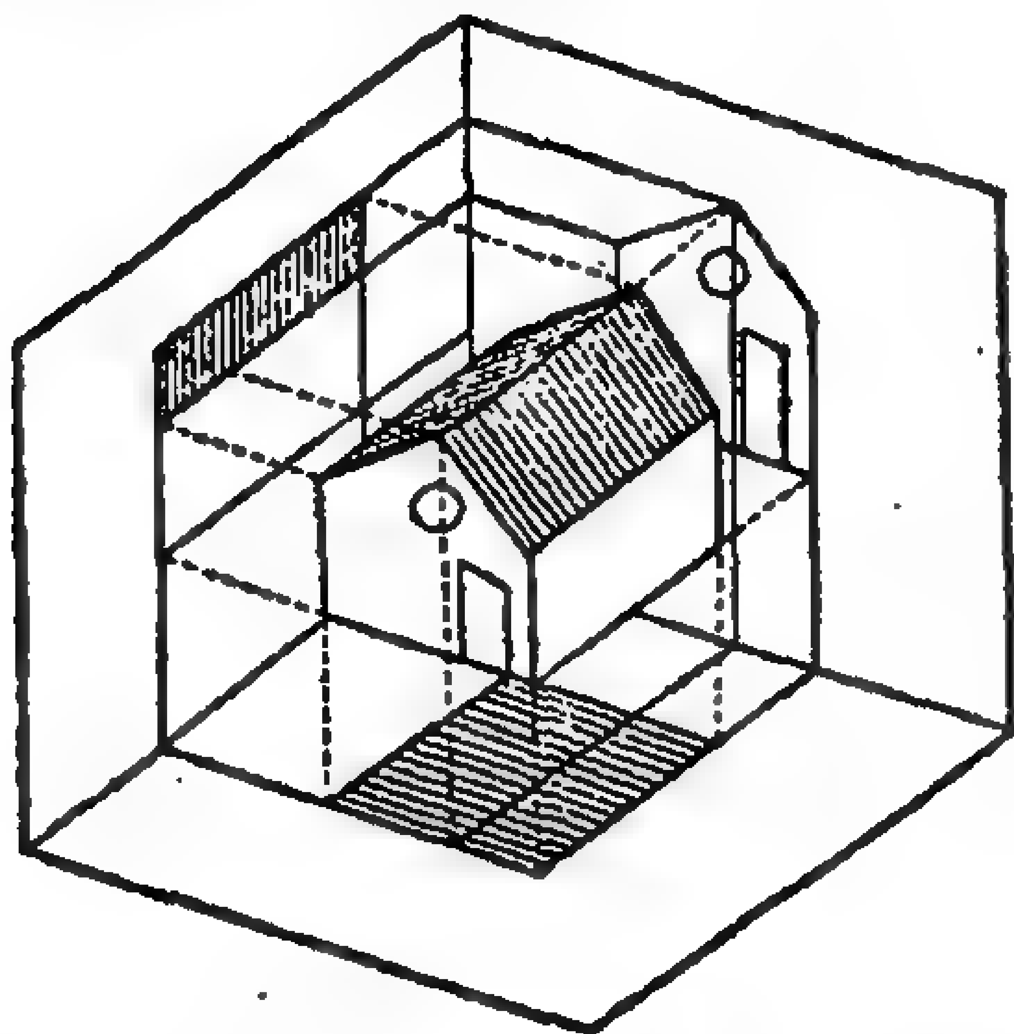
第六章 投影画法

3340. (定义)什么叫投影?

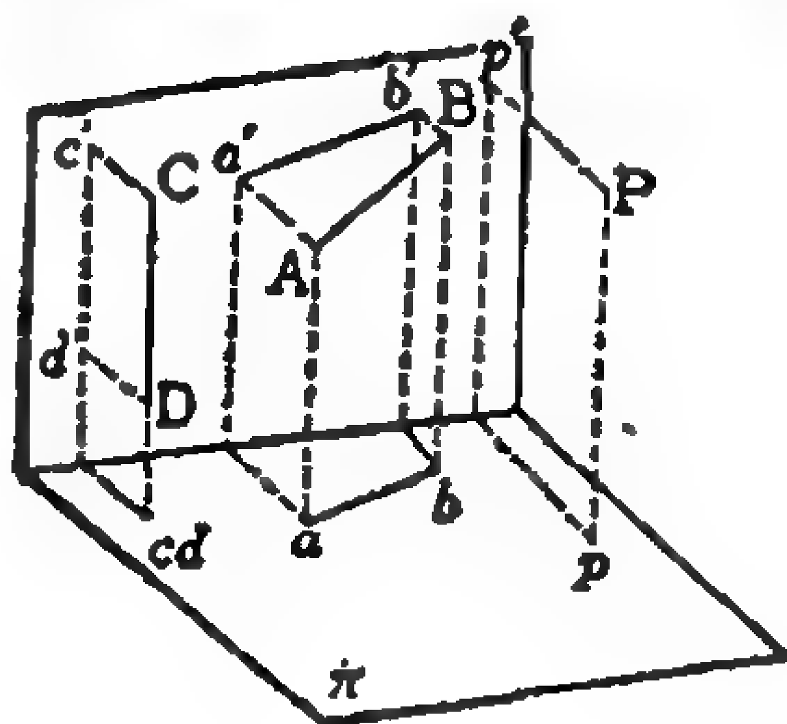
解 投影就是把物体的形状用视图表示在平面上。这个平面叫做投影面。一个平面水平放置，另一个平面垂直放置，前者叫做水平投影面，后者叫做正面投影面。



这两个面把空间分成四个象限，从第一象限到第四象限的位置和三角中的象限一样。如果投射线垂直于投影面，那么这种投影叫做正投影;如果投射线不与投影面垂直，那么这种投影叫做斜投影。除水平投影面和正面投影面外，和它们直交的面叫做侧面投影面。几何体在正面投影面上的视图称为主视图，在水平投影面上的视图称为俯视图，在侧面投影面上的视图称为左视图。



3341. (定义)什么叫射影、正射影?一条直线在平面上的射影是什么图形?



解 从一点 P 引平面 π 的垂线，设其垂足为 p，则点 p 叫做点 P 在平面 π 上的正射影或简称射影。图形 f 上的各点在平面 π 上的正射影的集合叫做图形 f 在平面 π 上的正射影或简称射影。如一条直线 AB 不垂直于平面，则该直线在这个平面上的正射影 ab 是一条直线。如另一条直线 CD 垂直于这个平面，则 CD 在这个平面上的正射影为点 cd。

3342. 作以下四点 A、B、C、D 的投影。

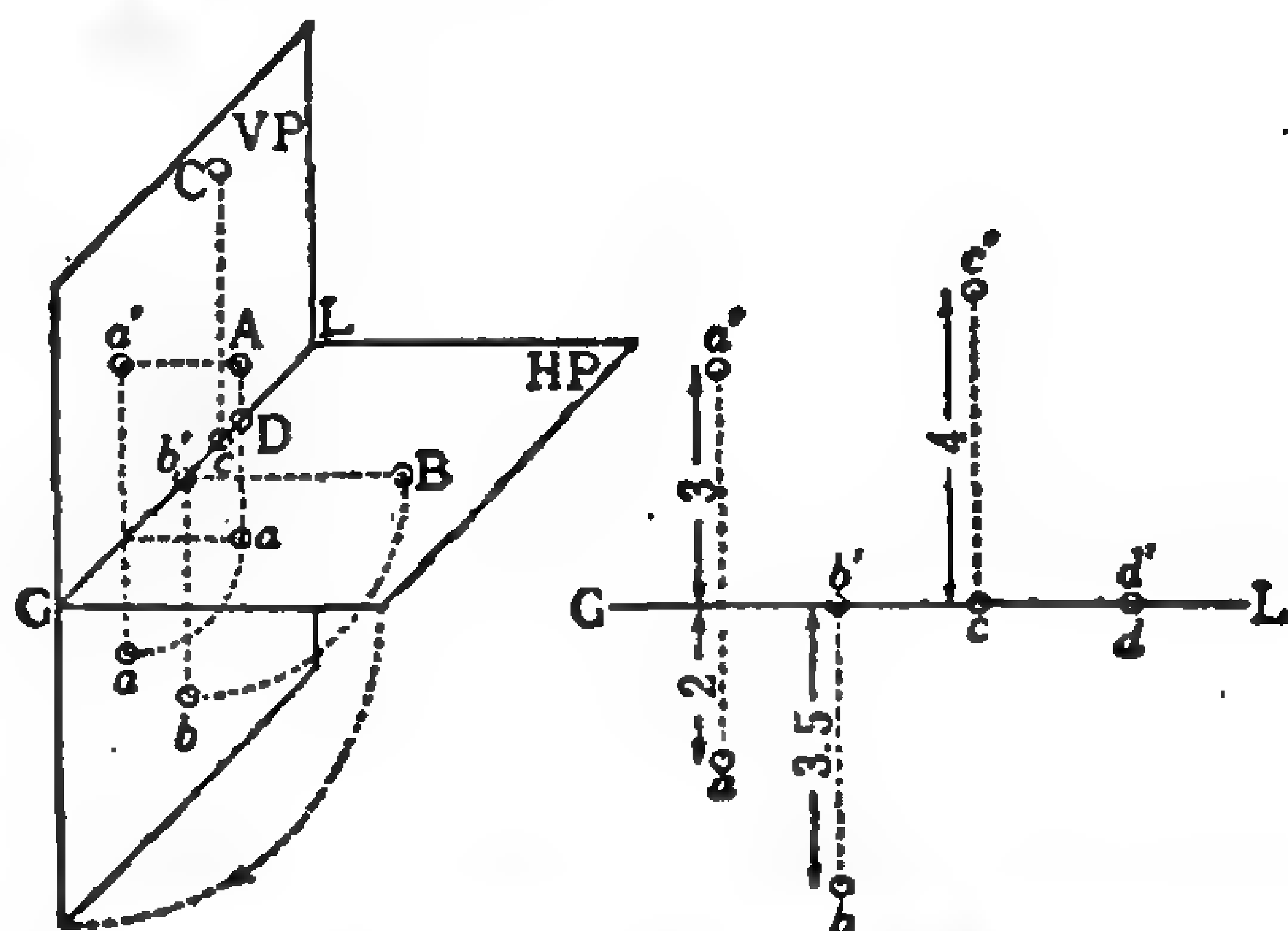
点 A 离正面投影面 2 cm，离水平投影面 3 cm;

点 B 离正面投影面 3.5 cm，在水平投影面上;

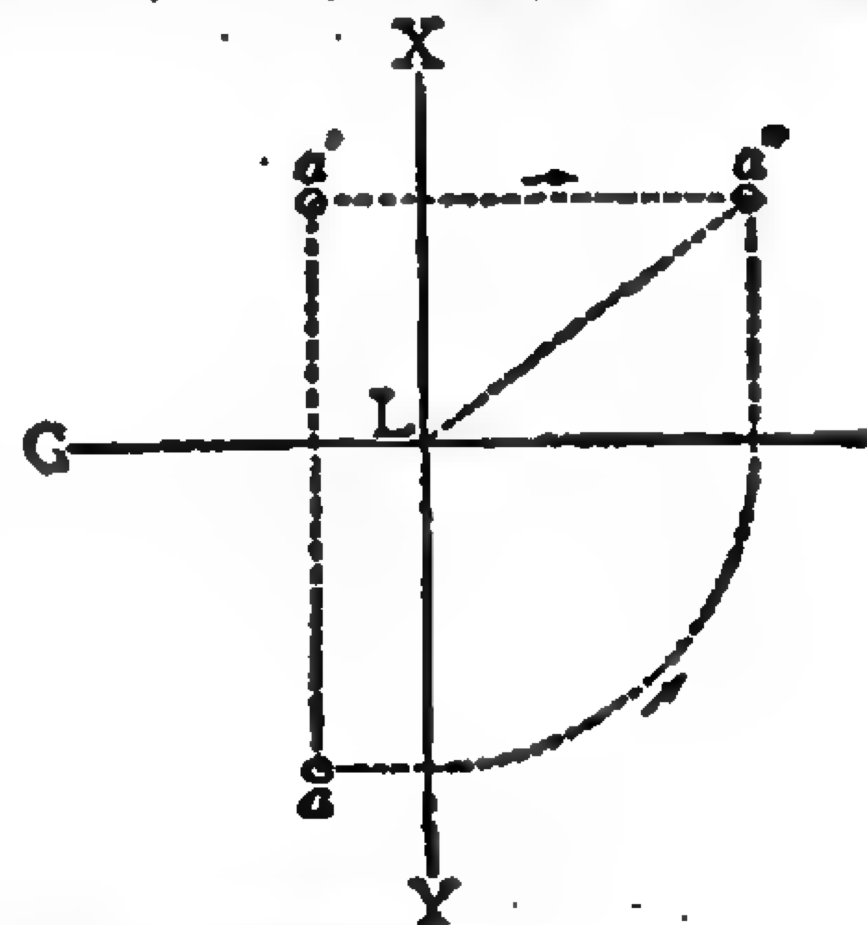
点 C 在正面投影面上，离水平投影面 4 cm;

点 D 在两投影面上。

解



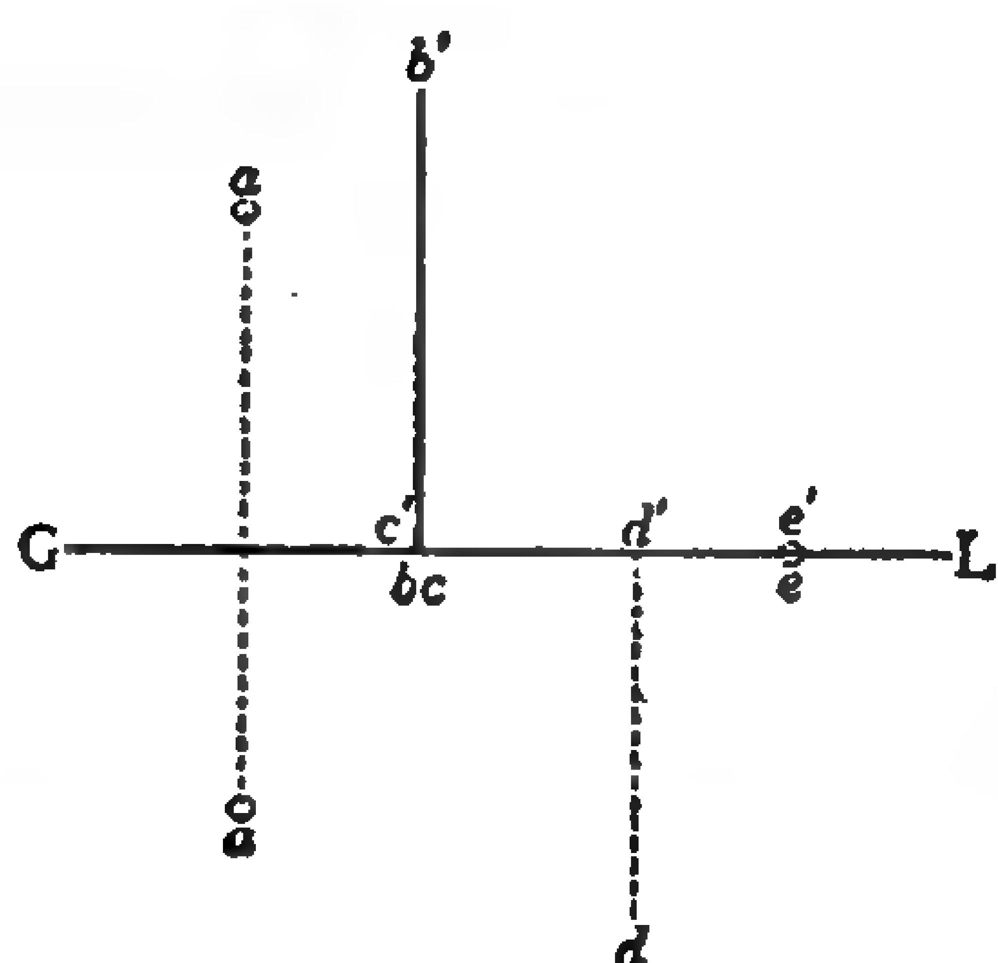
3343. 已知点 A 在水平投影面上的投影 a，正面投影面上的投影 a'，求点 A 和基线 GL 的距离。



解 已知点 A 的俯视图为 a，主视图为 a'，作它的左视图 a''，则 La'' 就是点 A 和 GL 的距离。

3344. 判定下面投影图所示的几何图

形的形状和位置.



解　(i) a、a' 是点 A 的投影，它的位置在正面投影面的前方和水平投影面的上方若干距离.

(ii) $b'c'$、bc 是线段 BC 的投影，线段的位置在正面投影面上，端点 C 在基线上.

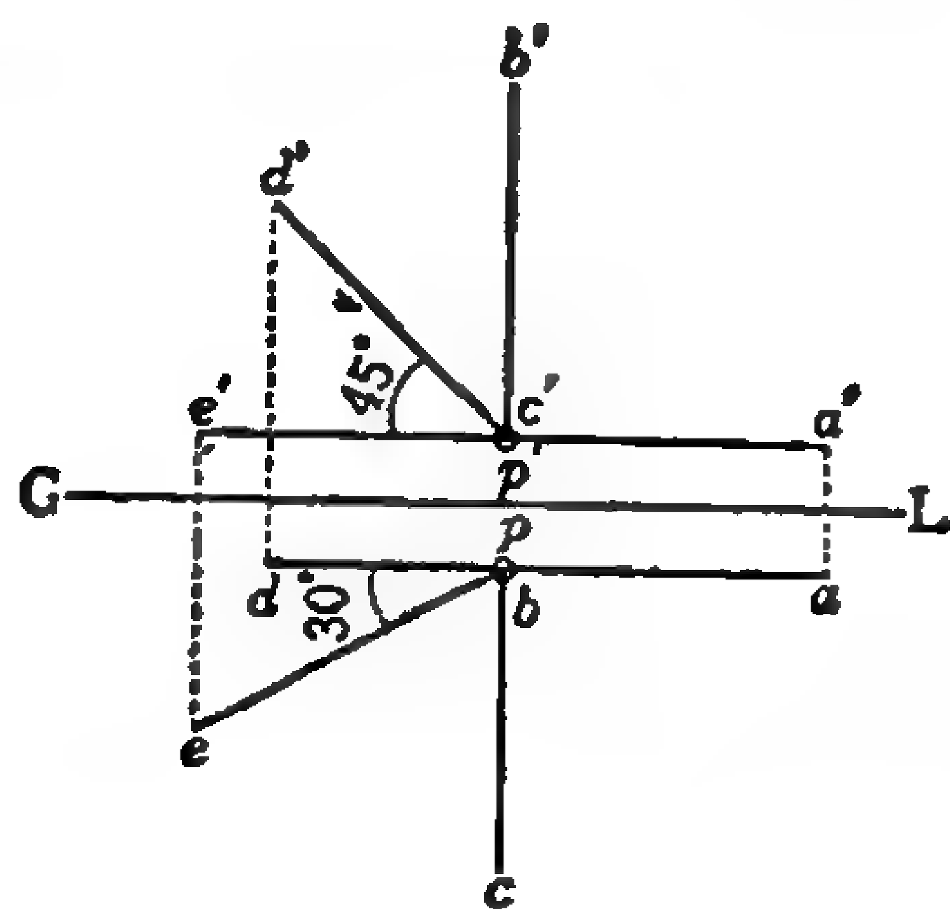
(iii) d'、d 是点 D 的投影，它表示点 D 在水平投影面上，且在正面投影面前方若干距离的位置.

(iv) e'、e 表示点 E 在基线上.

3345. 从定点 P，把已知线段 l 按以下指定的方向作出其投影图.

(1) 平行于基线；(2) 垂直于水平投影面；(3) 垂直于正面投影面；(4) 平行于正面投影面，对水平投影面的倾角为 45°；(5) 平行于水平投影面，对正面投影面的倾角为 30°.

解



(1) $p'a'$、pa 都平行于基线，且其长度都等于 l;

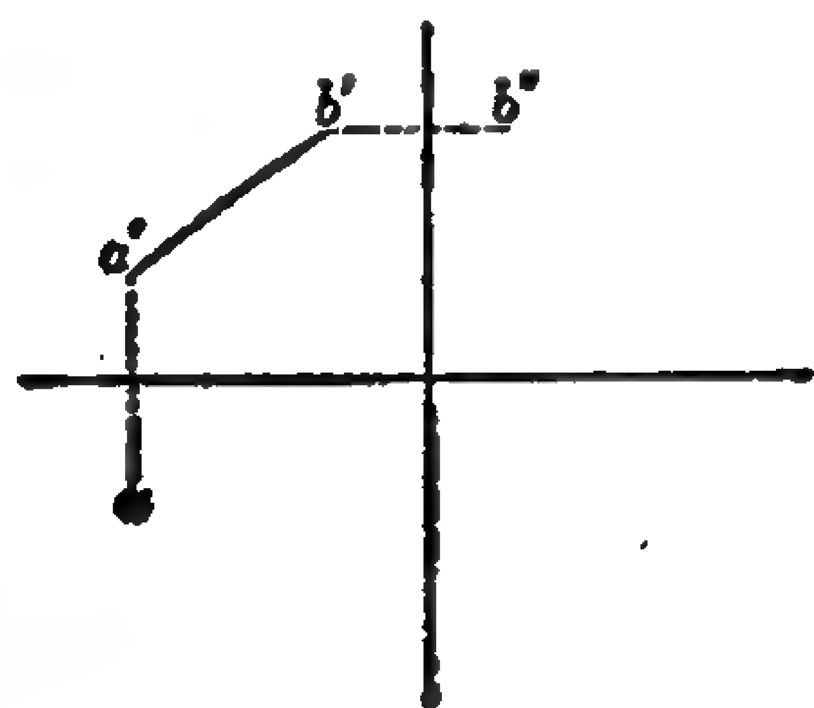
(2) $p'b' \perp GL$, $p'b'=l$;

(3) $pc \perp GL$, $pc=l$;

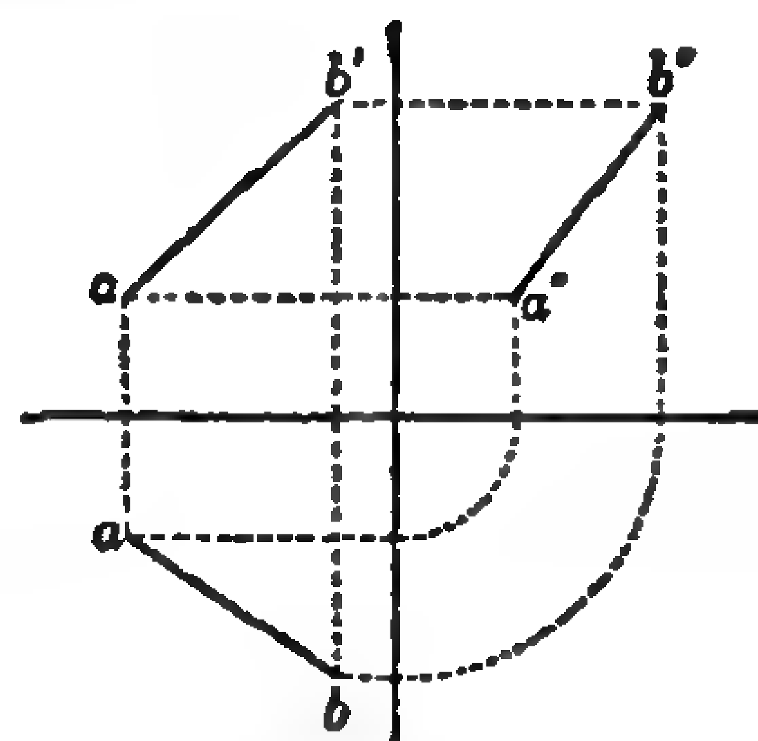
(4) $p'd'=l$, $\angle e'p'd'=45°$;

(5) $pe=l$, $\angle epd=30°$.

3346. 右图是线段 AB 投影图的一部分，其中 $a'b'$ 是 AB 的主视图，a 是点 A 的俯视图，b'' 是点 B 的左视图. 试完成线段 AB 的俯视图和左视图.



解　如右图，先从 b'、b'' 求 b 的位置，以确定 ab，再从 a、a' 求 a''，以确定 $a''b''$.



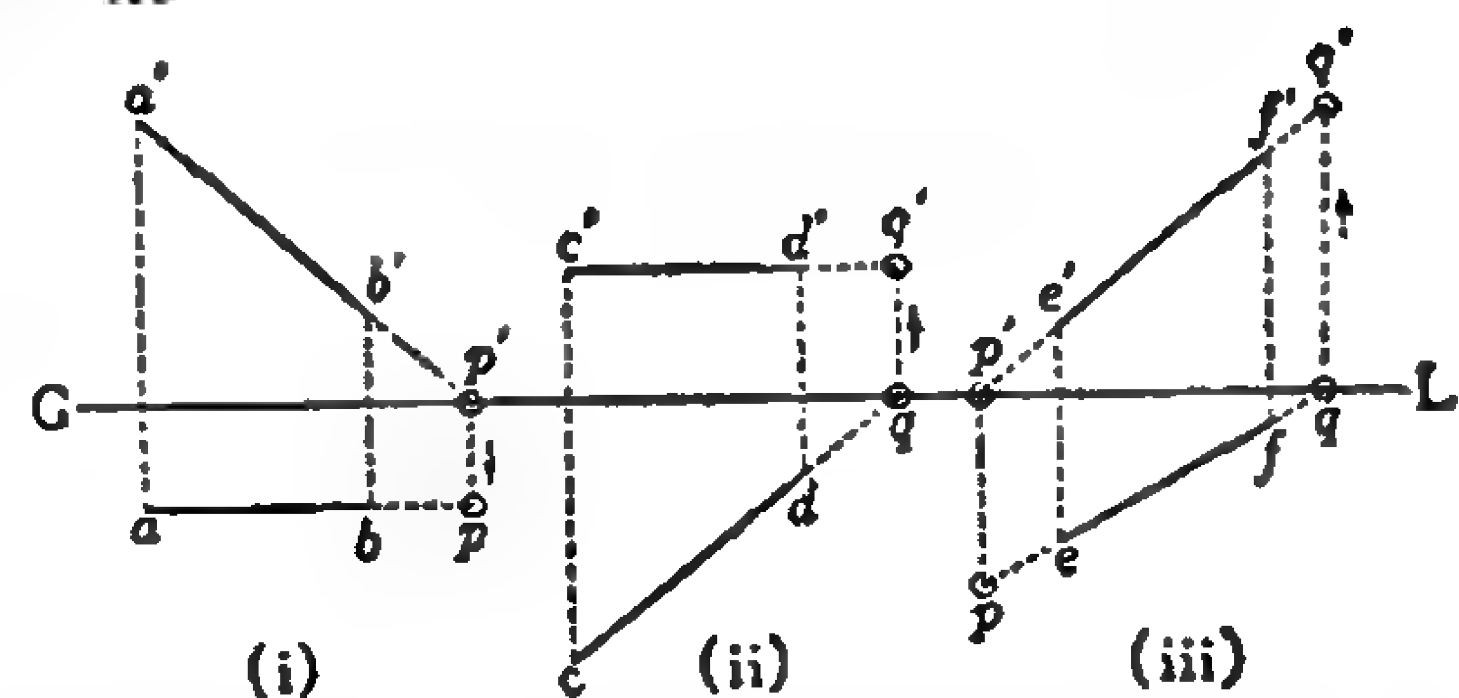
3347. 从下面的投影图中，求线段 AB、CD、EF 和各投影面交点的位置:

(i) AB 平行于正面投影面且倾斜于水平投影面.

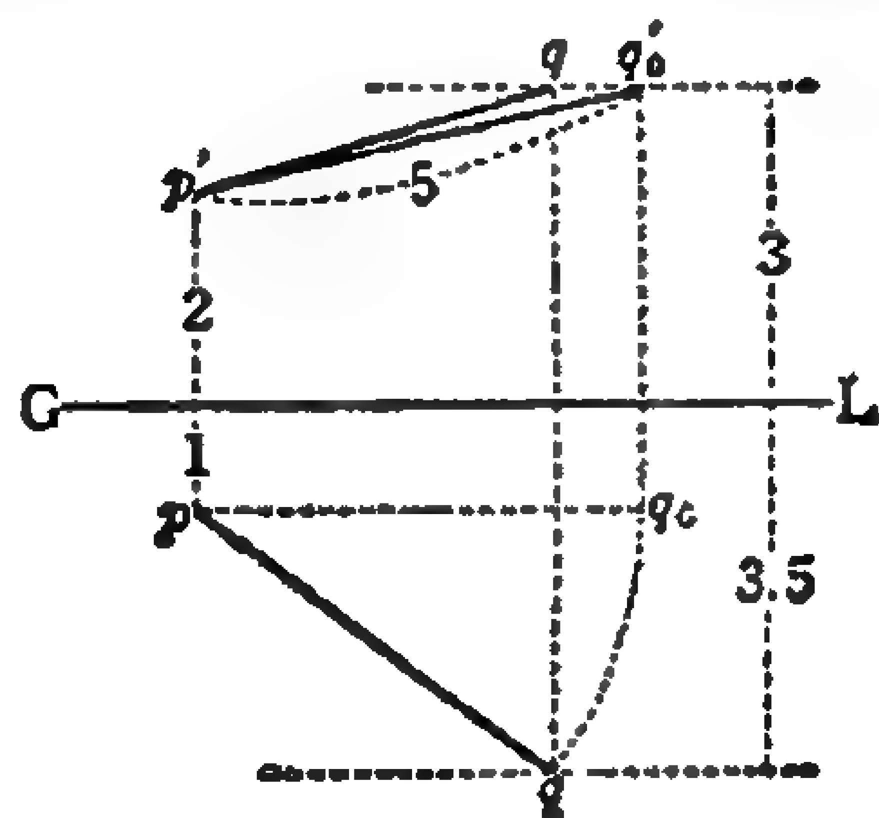
(ii) CD 平行于水平投影面且倾斜于正面投影面.

(iii) EF 倾斜于两投影面.

解



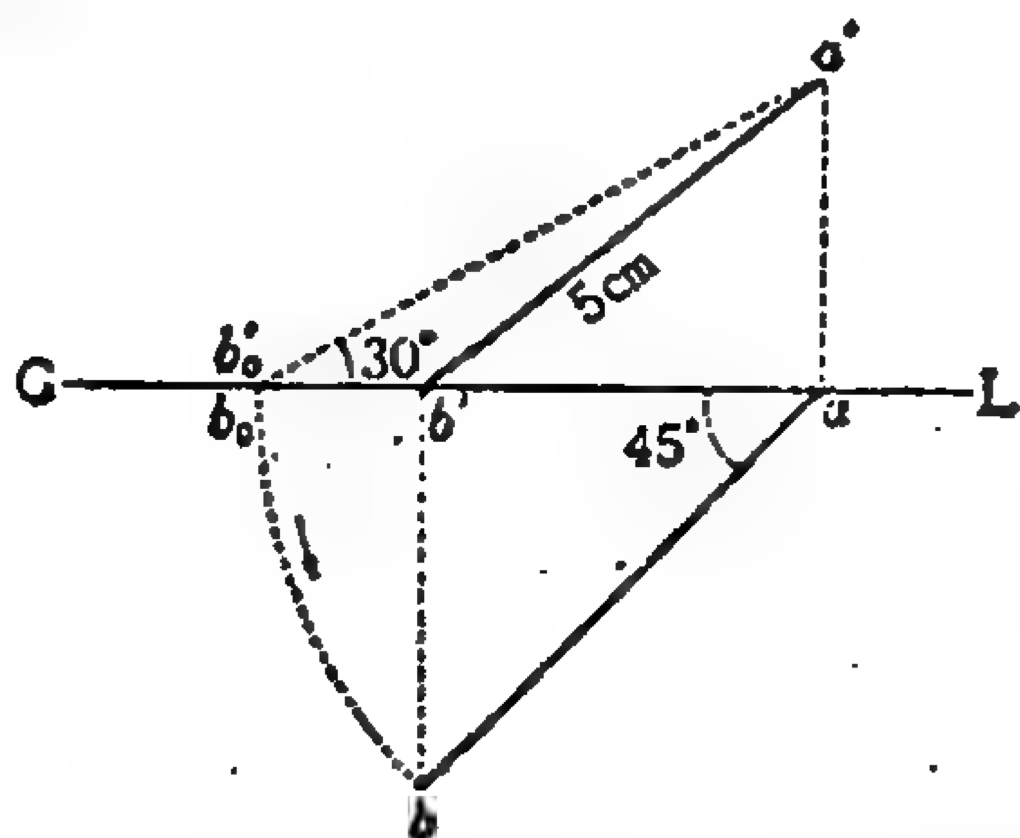
3348. 已知长 5cm 的线段 PQ 的一端 P 在水平投影面上方 2cm，正面投影面前方 1cm，另一端 Q 在水平投影面上方 3cm，正面投影面前方 3.5cm，求 PQ 的投影.



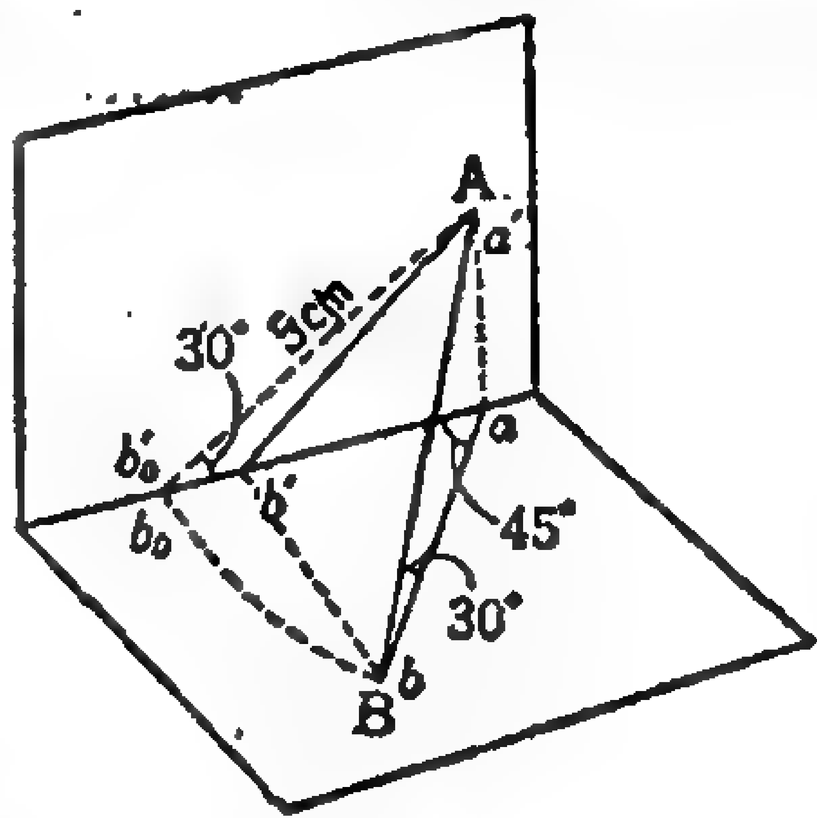
解 取点 P 的位置为 p、p'，以 P 为中心，把 Q 保持在 3 cm 的高度，旋转 PQ 和正面投影面平行，则点 Q 的投影是，距 GL 为 3 cm 的平行线和以 p' 为圆心、以 5 cm 为半径的圆弧的交点 q'_0。再求 q'_0 的水平面投影 q_0，然后以 p 为圆心、pq_0 为半径作圆弧，它和距 GL 3.5 cm 的平行线相交于 q，则 $p'q'$、pq 就是所求的投影。

3349. 已知线段 $AB=5$cm，点 A 在正面投影面上，点 B 在水平投影面上，AB 与水平投影面的倾角为 30°，其俯视图与基线成 45° 角，试作出 AB 的投影图。

解



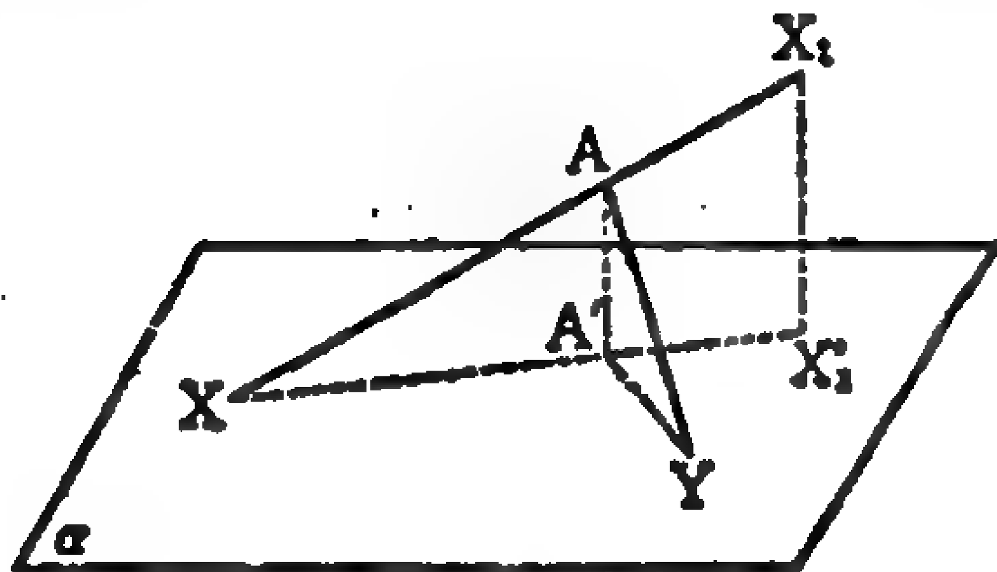
先从基线上的一点 $B(b'_0,\ b_0)$，在正面投影面上作和 GL 成 30° 角、长为 5 cm 的线段 b'_0a' 及 b_0a。再以 A 为圆心、AB'为半径，使 B 在水平投影面上画圆弧（即以 a 为圆心，ab_0 为半径画弧），它和 GL 成 45° 角的直线相交于 $B(b)$，则 ab、$a'b'$ 就是所求的投影图。



3350. 若把直角 XAY 垂直投射到平面 α 上，则直角边 XA 和 YA 的射影或它的延长线组成的角是钝角，由其中一条边的射影和另一边射影的延长线组成的角是锐角。

解 设 $XAY=\angle R$，延长 XA 到 X_1，则 $\angle X_1AY=\angle R$。如果 $\angle XAY$ 的两边和平面 α 的交点为 X、Y，A、X_1 在平面 α 上的正射影分别为 A'、X'_1，则 X、A'、X'_1 在一条直线上，且

$$\angle AA'X=\angle R,\ \angle AA'Y=\angle R.$$



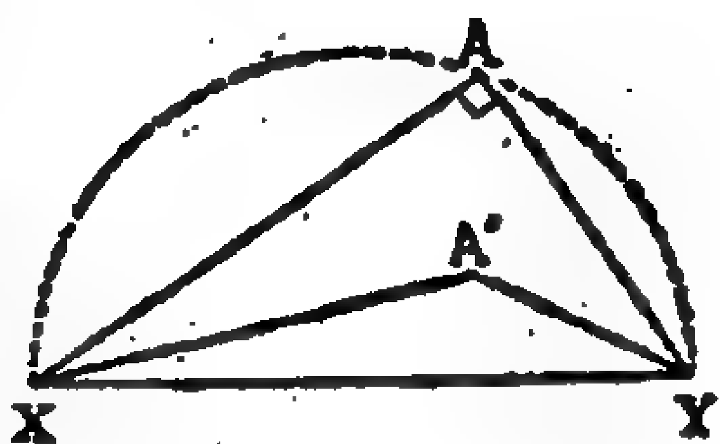
因而 $XA>XA'$，$YA>YA'$。

$$\therefore\ \angle XA'Y>\angle XAY=\angle R,$$

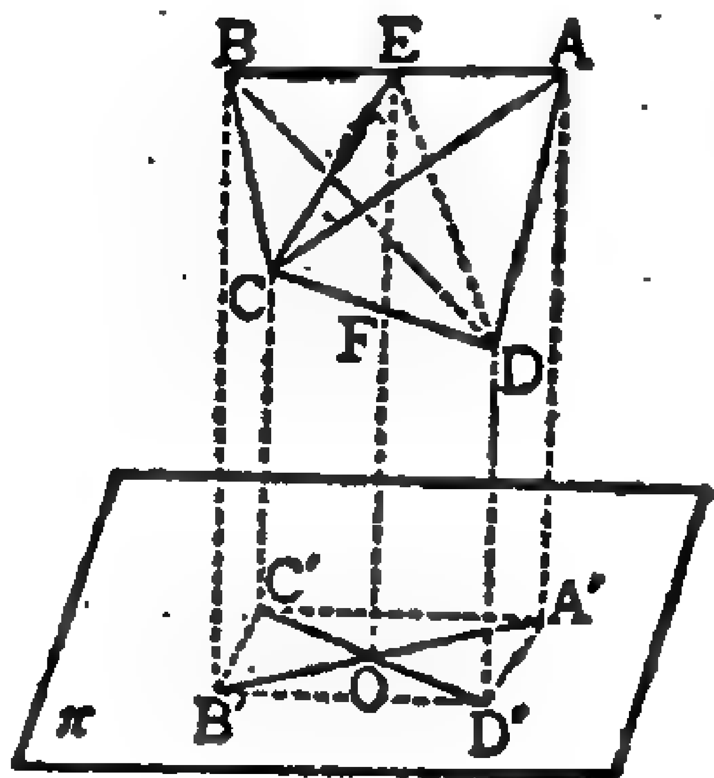
且

$$\angle X'_1A'Y<\angle R.$$

注 在同一平面上 XY 为公有，且 $XA>XA'$，$YA>YA'$ 的两个三角形 AXY、$A'XY$ 中，有 $\angle XA'Y>XAY$。



3351. 设正四面体 $ABCD$ 的对棱 AB、CD 的中点分别为 E、F，且连结 EF 的直线垂直平面 π，A、B、C、D 在平面 π 上的正射影分别为 A'、B'、C'、D'，则 $A'B'C'D'$ 是什么样的四边形，并说明其理由。



解 在正三角形 CAB 和 DAB 中，

$$CE\perp AB,\ DE\perp AB.$$

$$\therefore\ AB\perp \text{平面}\ CED,$$

从而 $AB\perp EF$，$AB\perp CD$。

因为 $EC=ED$，所以 $EF\perp CD$。

又知 $EF\perp$平面 π，

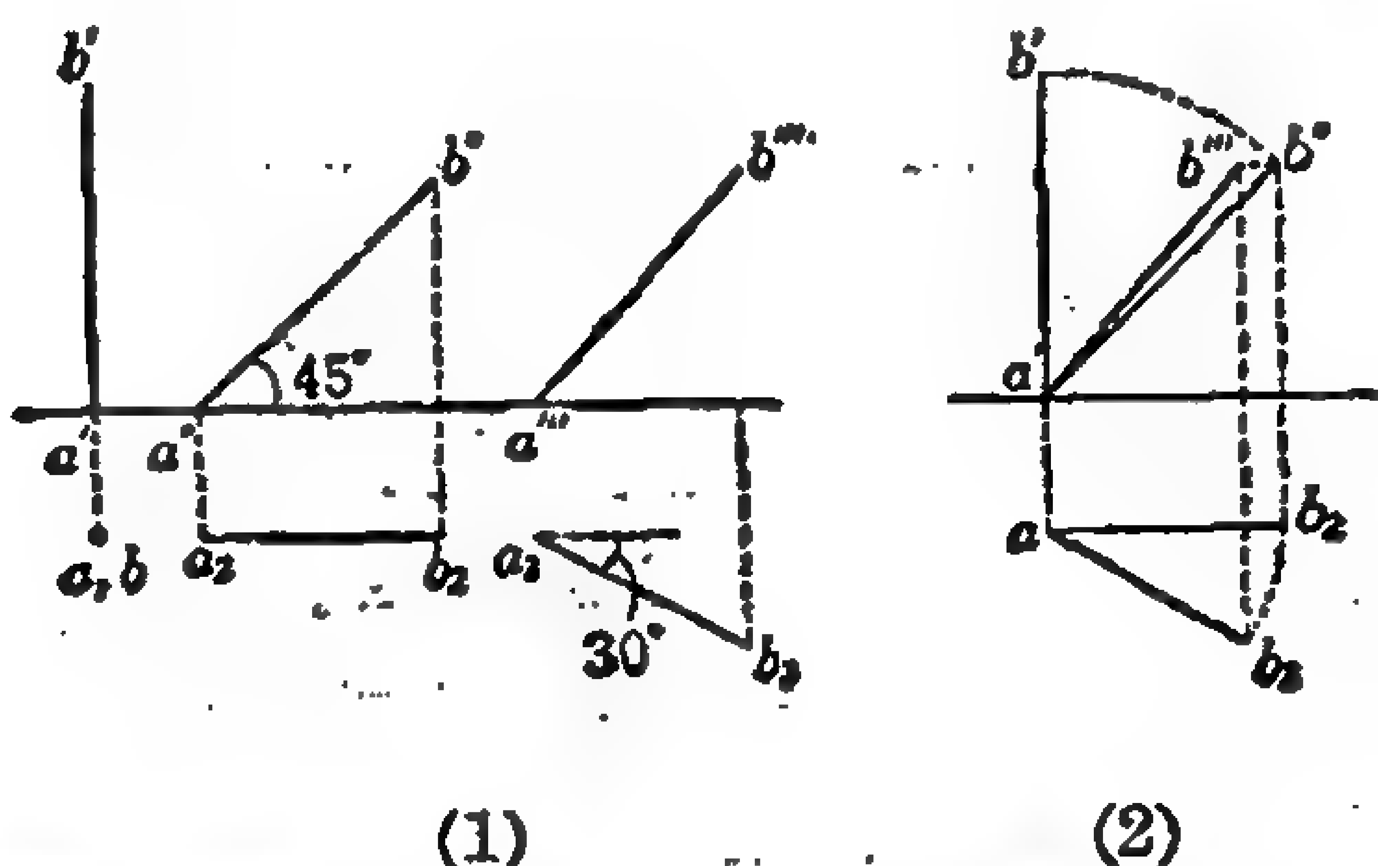
$$\therefore\ AB\parallel\pi,\ CD\parallel\pi.$$

故有 $AB\parallel A'B'$，$AB=A'B'$，

$$CD\parallel C'D',\ CD=C'D'.$$

设 EF 和平面 π 的交点为 O，则 O 是 $A'B'$、$C'D'$ 的中点。又因 $AB\perp CD$，而有 $A'B'\perp C'D'$，所以四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形。

3352. 已知直立于水平投影面上的线段 AB，如把 AB 倾斜使与水平投影面成 45° 角，再把它在水平投影面上的投影倾斜使与正面投影面成 30° 角，试作出它的投影图。

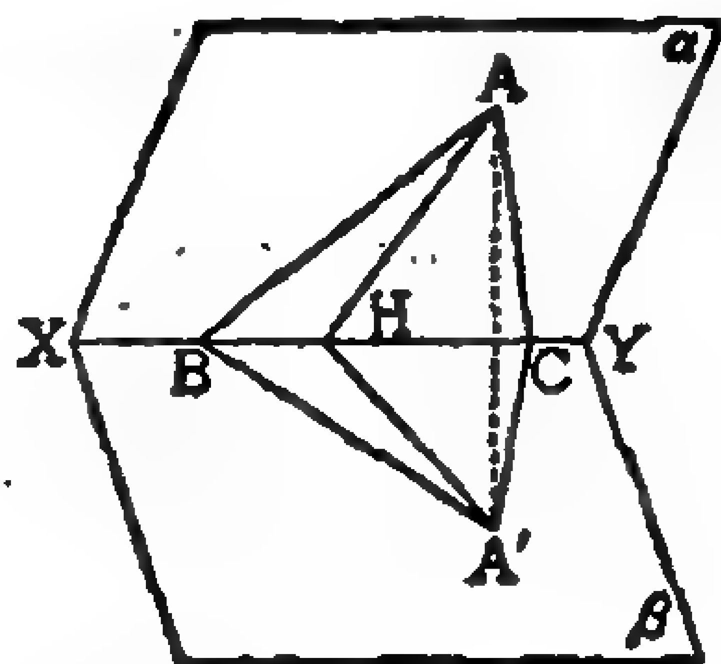


(1)　　　　(2)

解　线段 AB 直立于水平投影面上，它的投影为 $a'b'(ab)$。把线段 AB 倾斜使与水平投影面成 45° 角，它在正面投影面上的投影为 $a''b''$，在水平投影面上的投影为 a_2b_2。再把 a_2b_2 倾斜使与基线成 30° 角的平面图为 a_3b_3，这样就可作出其正面投影面上的投影 $a'''b'''$（因 $a'b'=a''b''$，$a_2b_2=a_3b_3$，所以 b''、b''' 等高）。

注　画如图(1)的分解式或统一于图(2)都可以。

3353. 已知两平面 α、β 的交角为 θ，交线为 XY。α 上的 $\triangle ABC$ 的底边 BC 在 XY 上，它的面积为 S，求这个三角形在 β 上的投影三角形 $A'BC$ 的面积。



解　设 $\triangle ABC$ 的高为 AH，则

$$A'H\perp XY,\quad 从而\quad \angle AHA'=\theta.$$

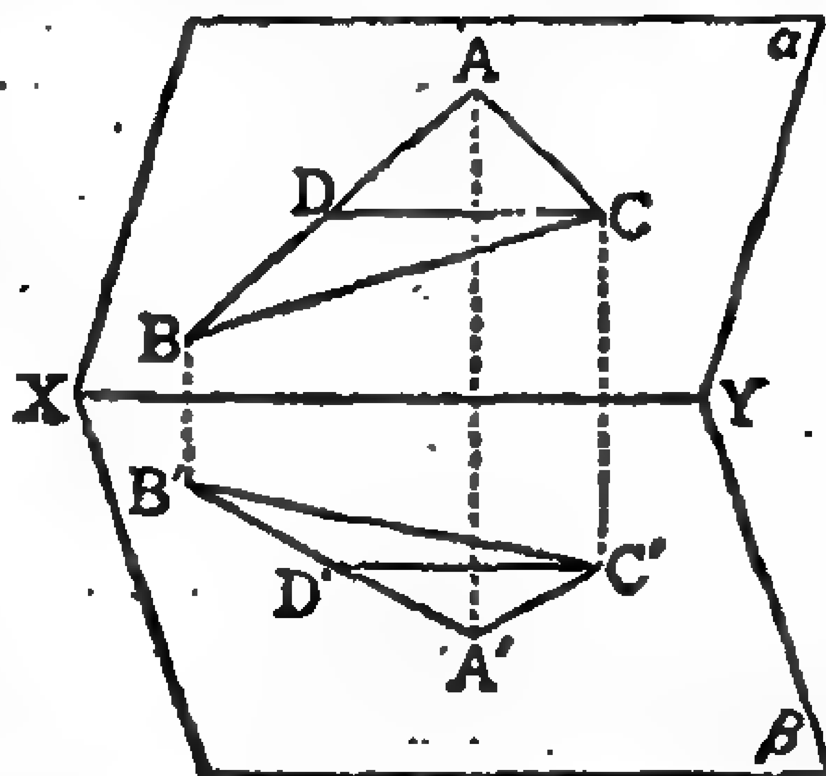
$$\therefore\quad A'H=AH\cos\theta,$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'BC}}=\frac{BC\cdot AH}{BC\cdot A'H}=\frac{AH}{AH\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle A'BC}=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\theta=S\cos\theta.$$

注　如果底边 BC 不在 XY 上，只要 $BC\parallel XY$ 也可得出同样的结论。

3354. 已知两平面 α、β 相交成角 θ，设平面 α 上的三角形 ABC 在平面 β 上的正投影为三角形 $A'B'C'$，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的面积有什么关系？



解　设两平面 α、β 的交线为 XY，过 C 且与 XY 平行的直线和 AB 相交于 D，过 C' 且与 XY 平行的直线和 $A'B'$ 相交于 D'，由上题知

$$S_{\triangle A'D'C'}=S_{\triangle ADC}\cdot\cos\theta,$$

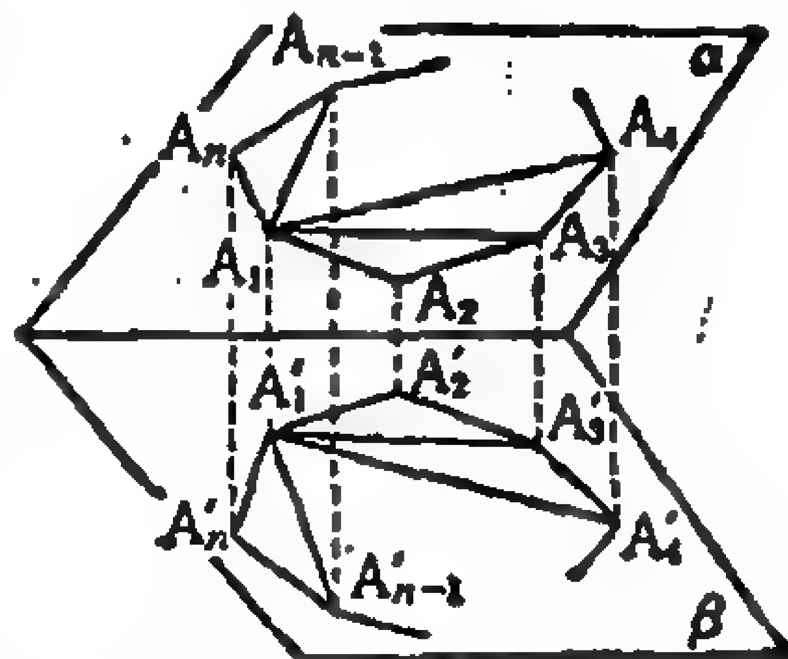
$$S_{\triangle B'D'C'}=S_{\triangle BDC}\cdot\cos\theta.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\theta.$$

3355. 设两平面 α、β 的夹角为 θ，平面 α 上的多边形 P 在平面 β 上的正投影为 P'，如多边形 P、P' 的面积分别用 S、S' 表示，则

$$S'=S\cos\theta$$

（可化为三角形证明）。



解　设平面 α 上的多边形 P 为 $A_1A_2\cdots A_n$，从 A_1 分别连结 A_3，A_4，$\cdots$，A_{n-1}，则把 P 分成 $n-2$ 个三角形。因此对应地也把平面 β 上的多边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 分成 $n-2$ 个三角形。已知两平面 α、β 的夹角为 θ，由上题知

$$S_{\triangle A_1'A_2'A_3'}=S_{\triangle A_1A_2A_3}\cdot\cos\theta,$$

$$S_{\triangle A_1'A_3'A_4'}=S_{\triangle A_1A_3A_4}\cdot\cos\theta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{\triangle A_1'A_{n-1}'A_n'}=S_{\triangle A_1A_{n-1}A_n}\cdot\cos\theta$$

$$\therefore\quad S'=S\cos\theta.$$

3356. 已知两平面 α、β 成 60° 角，平面 α 上的三角形 ABC 各边长分别为 5cm、7cm、10cm，求它在平面 β 上的正投影三角形 $A'B'C'$ 的面积。

解　根据海伦公式，平面 α 上的 $\triangle ABC$ 的面积为

$$\sqrt{11\times6\times4\times1}=2\sqrt{66}(\text{cm}^2).$$

根据问题 3354 可知 $\triangle ABC$ 在平面 β 上的正投影三角形 $A'B'C'$ 的面积为

$$2\sqrt{66}\times\cos60°=\sqrt{66}(\text{cm}^2).$$

3357. 已知平面 α 上的菱形 $ABCD$ 在另一平面 β 上的正投影为四边形 $A'B'C'D'$，问 $A'B'C'D'$ 是怎样的四边形？在什么时候 $A'B'C'D'$ 也为菱形？（只需简单叙述其结果）

解　设菱形 $ABCD$ 对角线的交点为 O，O 在 β 上的正投影为 O'，则

$$O'A'=O'C',\ O'B'=O'D'.$$

所以四边形 $A'B'C'D'$ 为平行四边形. 平行四边形 $A'B'C'D'$ 为菱形的充要条件是

$$A'C' \perp B'D'.$$

因此, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 都应与平面 β 平行. 反之, 如果对角线 AC、BD 都平行于平面 β, 则

$$OO' \perp A'C',\ AC \parallel A'C'.$$

$$\therefore\ OO' \perp AC.$$

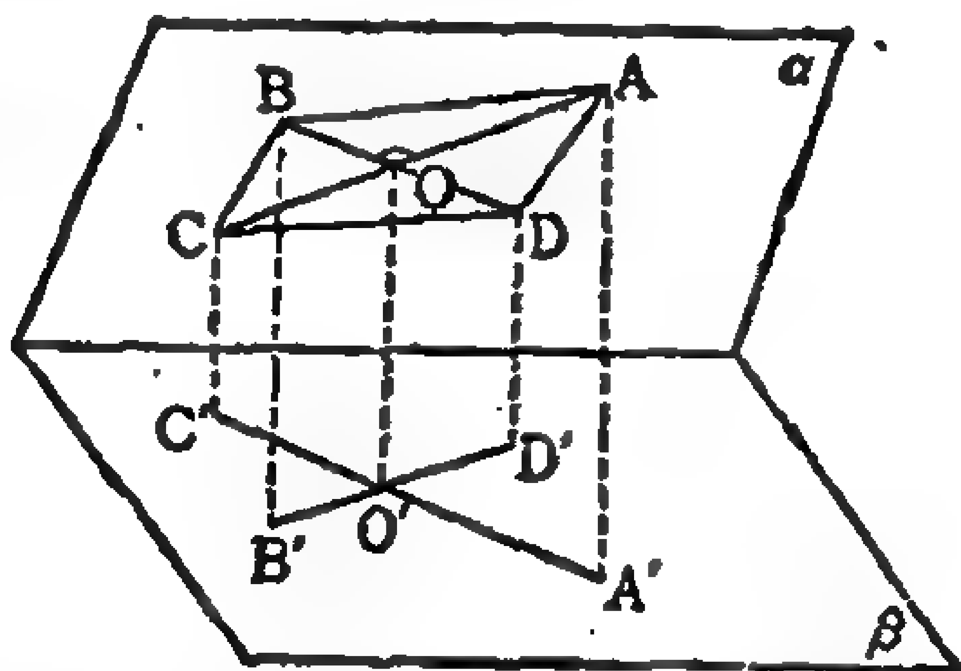
又知 $\qquad AC \perp BD,$

$$\therefore\ \text{平面}(OO',\ BD) \perp AC,$$

从而 $\qquad$ 平面$(OO',\ BD) \perp A'C'$.

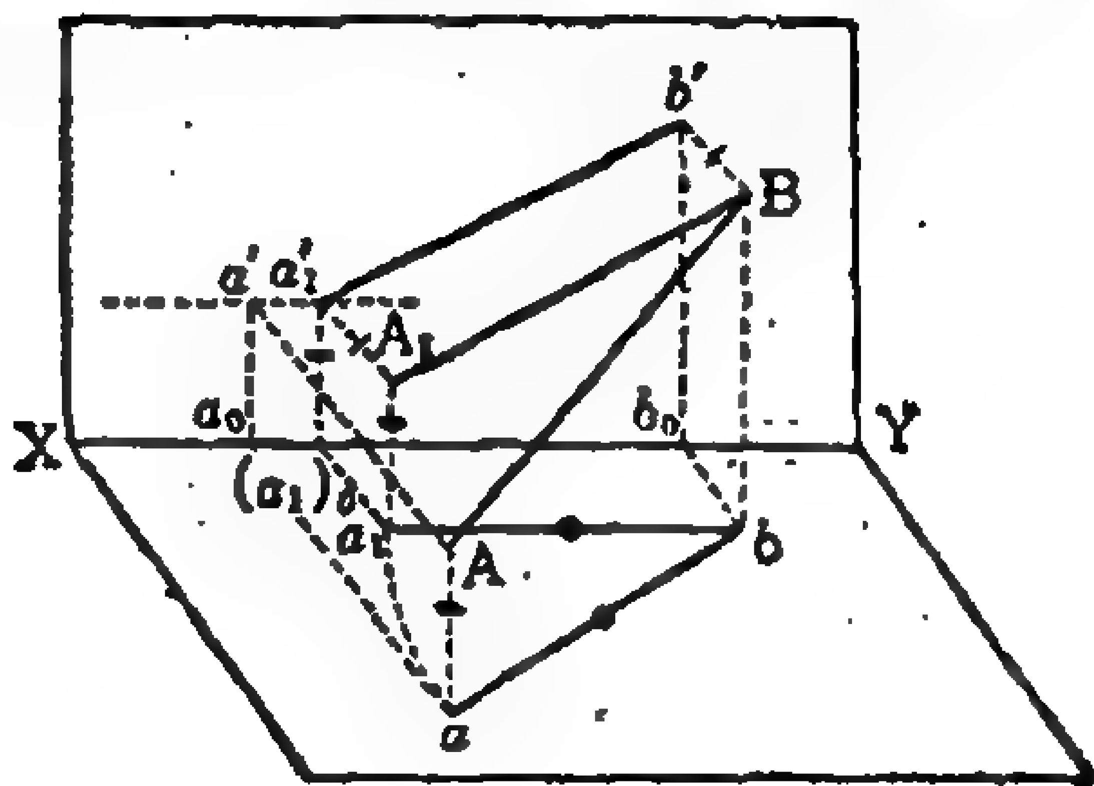
$$\therefore\ B'D' \perp A'C'.$$

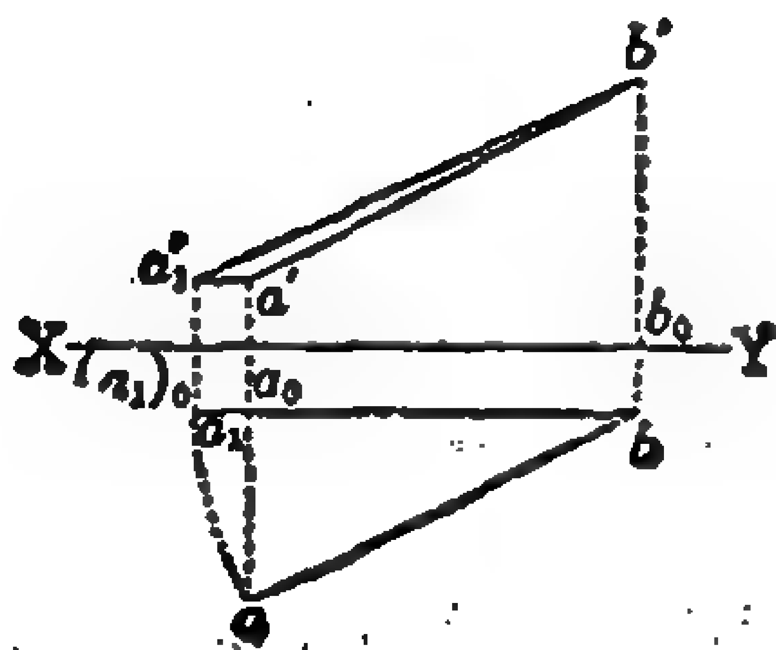
故四边形 $A'B'C'D'$ 为菱形.



3358. 说明由线段的投影求该线段实际长度的方法.

解 (1) 旋转法 如线段和投影面平行, 则它在投影面上投影的长度就是该线段的实际长度. 因此, 把平面 $AabB$ 以 Bb 为轴旋转到与正面投影面平行的位置 A_1a_1bB. 如果 A_1a_1bB 在正面投影面上投影为 $a_1'(a_1)_0b_0b'$, 则 $a_1'b'$ 就是线段 AB 的实际长度. 故

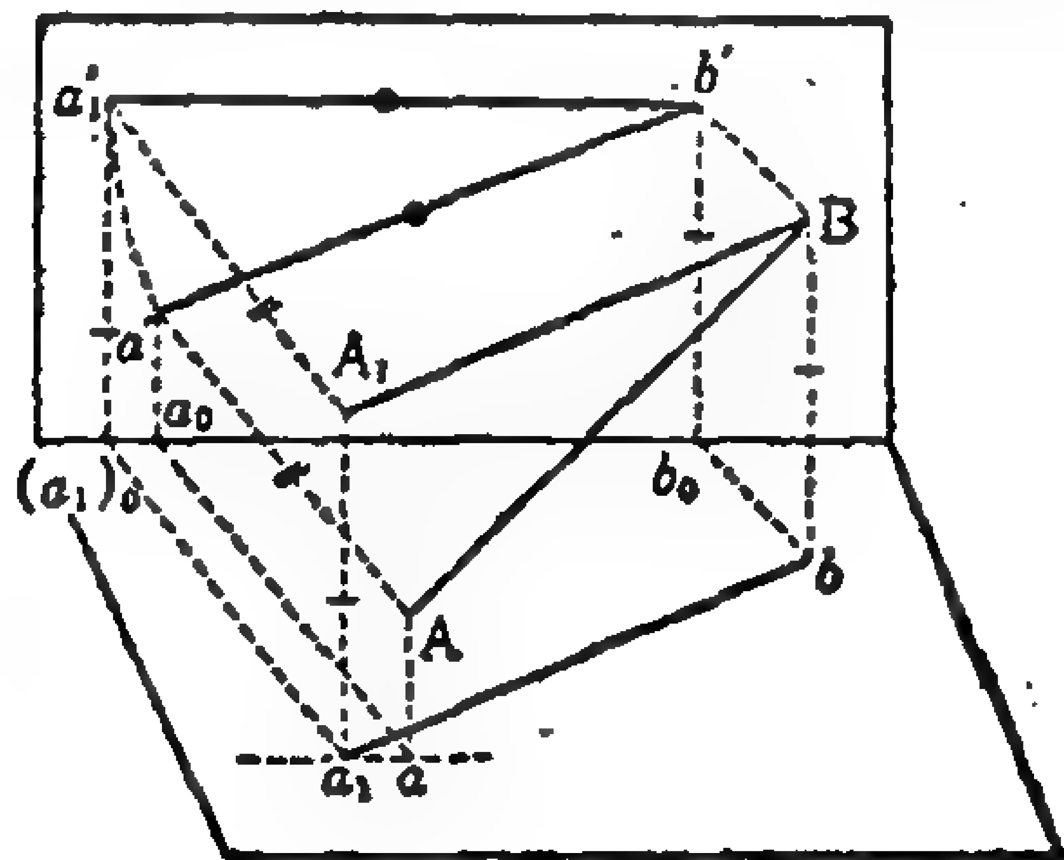


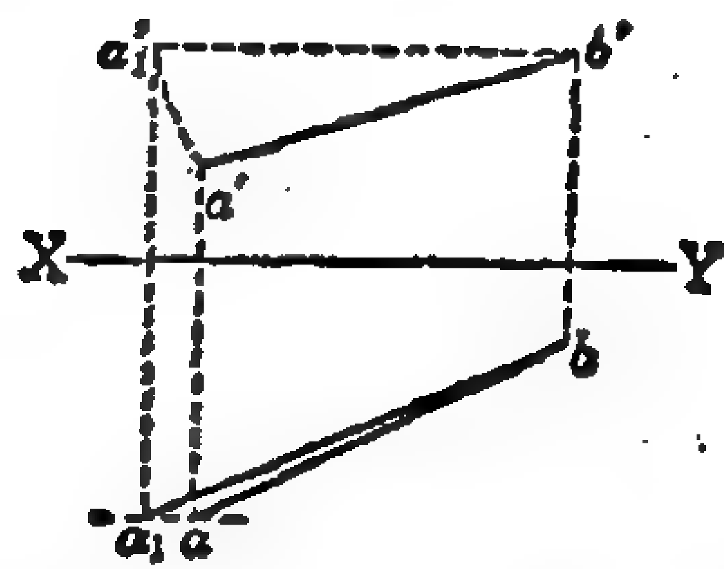


得作图方法如下.

作以 b 为圆心、ba 为半径的圆, 它和过点 b 且平行于基线的直线 ba_1 相交于点 a_1. 再过点 a_1 作垂直于基线的直线, 它和过点 a' 且与基线平行的直线相交于点 a_1', 则 $a_1'b'$ 就是线段 AB 的实际长度.

或把平面 $Aa'b'B$ 以 Bb' 为轴旋转到与水平投影面平行的位置 $A_1a_1'b'B$, 它在水平面上的投影为 $a_1(a_1)_0b_0b$, 于是 a_1b 就是线段 AB 的实际长度. 故又得作图方法如下.



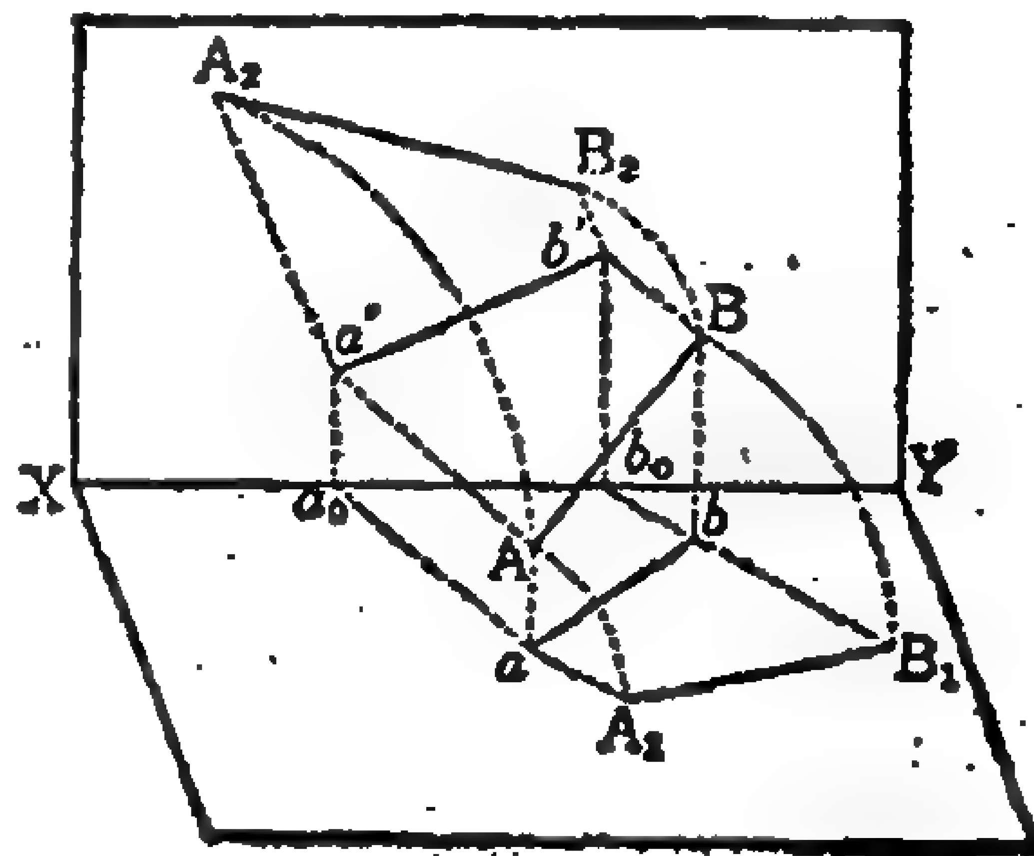


以 b' 为圆心、$b'a'$ 为半径作圆, 它和过点 b' 且与基线平行的直线 $b'a_1'$ 相交于点 a_1'. 再过点 a_1' 作与基线垂直的直线, 它和过点 a 且与基线平行的直线的交点为 a_1, 则 a_1b 就是线段 AB 的实际长度.

(2) 抑倒法(也称迭合法)

如图, 设把梯形 $ABba$ 推倒, 平放在水平投影面上的图形为 A_1B_1ba, 则

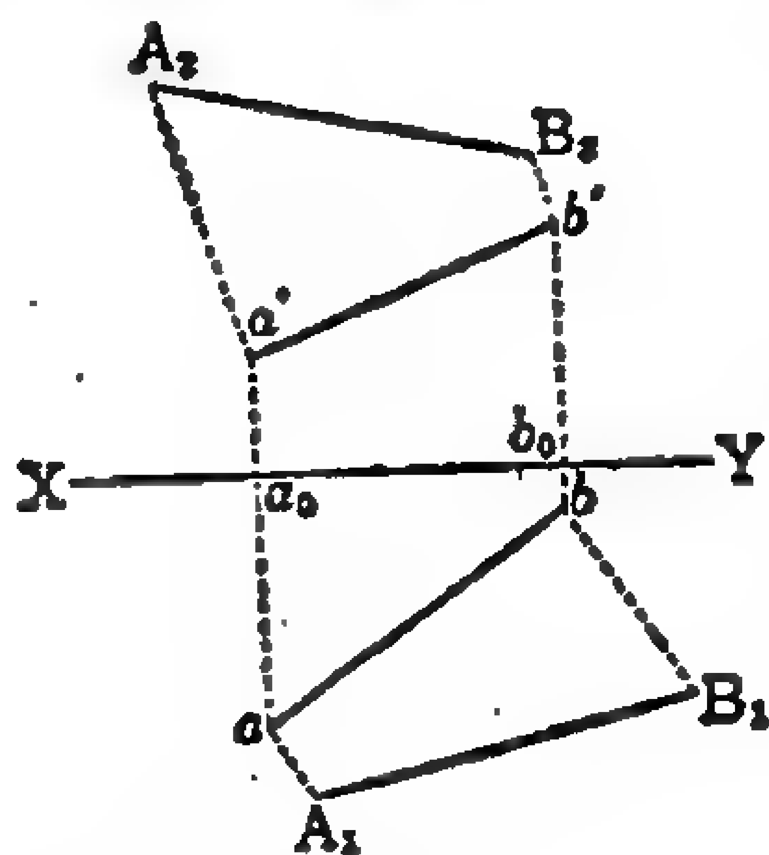
$$A_1a = Aa = a'a_0,$$



$$B_1b = Bb = b'b_0,$$

$$\angle A_1ab = \angle B_1ba = \angle R.$$

再把梯形$ABb'a'$竖起，平放在正面投影面上的图形为$A_2B_2b'a'$，则



$$A_2a' = Aa' = aa_0,$$

$$B_2b' = Bb' = bb_0,$$

$$\angle A_2a'b' = \angle B_2b'a' = \angle R.$$

故得如下作图方法.

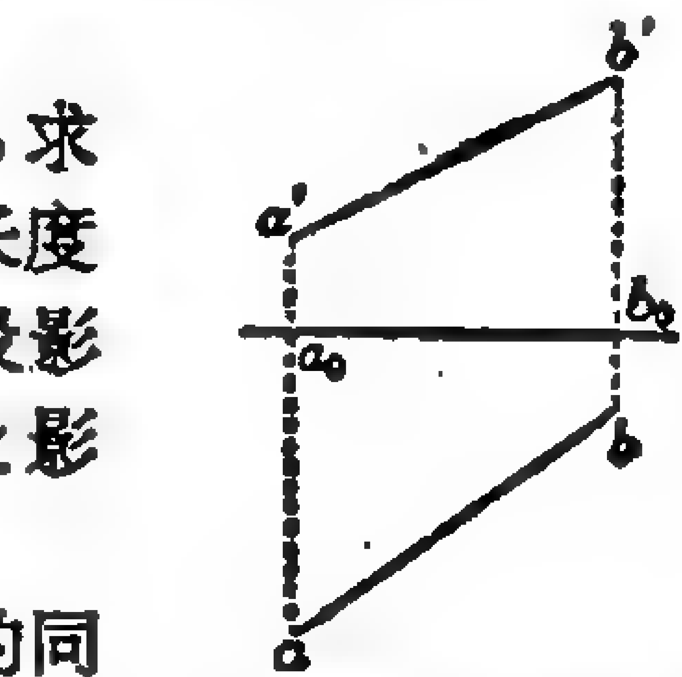
过a、b，在ab的同侧分别作ab的垂线aA_1、bB_1，并在这两条垂线上分别截取

$$aA_1 = a_0a',\ bB_1 = b_0b',$$

得到两点A_1、B_1，连结A_1B_1，则A_1B_1就是线段AB的实际长度.

或者，过a'、b'，在$a'b'$的同侧分别作$a'b'$的垂线$a'A_2$、$b'B_2$，并在这两条垂线上分别截取$a'A_2 = a_0a$，$b'B_2 = b_0b$，得到两点A_2、B_2，连结A_2B_2，则A_2B_2就是线段AB的实际长度.

3359. 应用押倒法，求图中线段AB的实际长度l，以及该线段和水平投影面的交角θ，和正面投影面的交角φ.



解　过a、b，在ab的同侧分别作ab的垂线aA_1、bB_1，并在这两条垂线上分别截取$aA_1 = a_0a'$，$bB_1 = b_0b'$，得到两点A_1、B_1，连结A_1B_1. 再过点A_1作与ab平行的直线A_1b''，则

$$A_1B_1 = l,$$

$$\angle B_1A_1b'' = \theta.$$

过a'、b'，在$a'b'$的同侧分别作$a'b'$的垂线$a'A_2$、$b'B_2$，并在这两条垂线上分别截取

$$a'A_2 = a_0a,$$

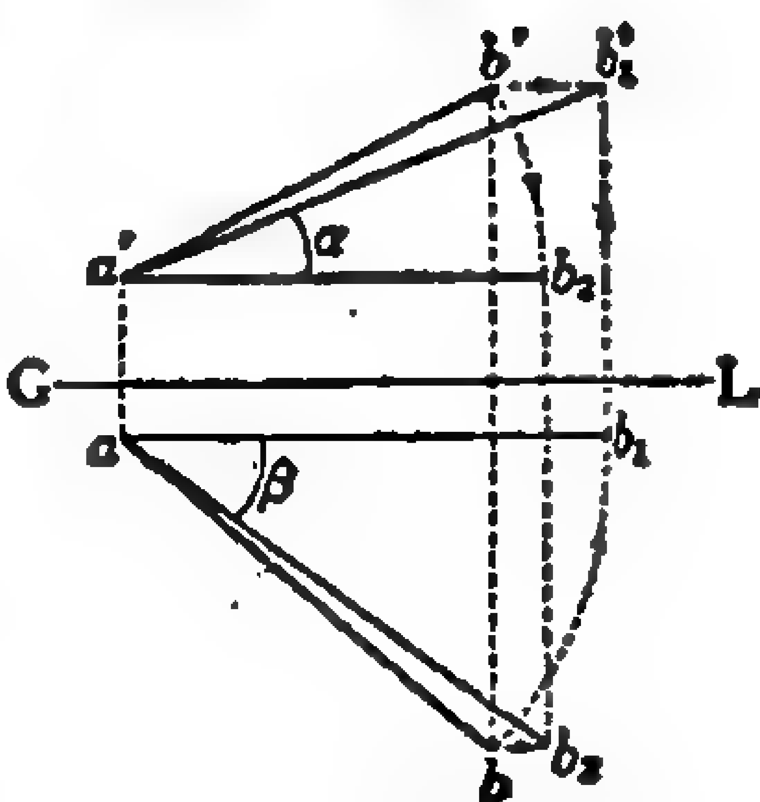
$$b'B_2 = b_0b,$$

得到两点A_2、B_2，连结A_2B_2. 再过点B_2作$b'a'$的平行线B_2a''，则

$$A_2B_2 = l,\ \angle A_2B_2a'' = \varphi.$$

显然　$A_1B_1 = A_2B_2$　(参照上题).

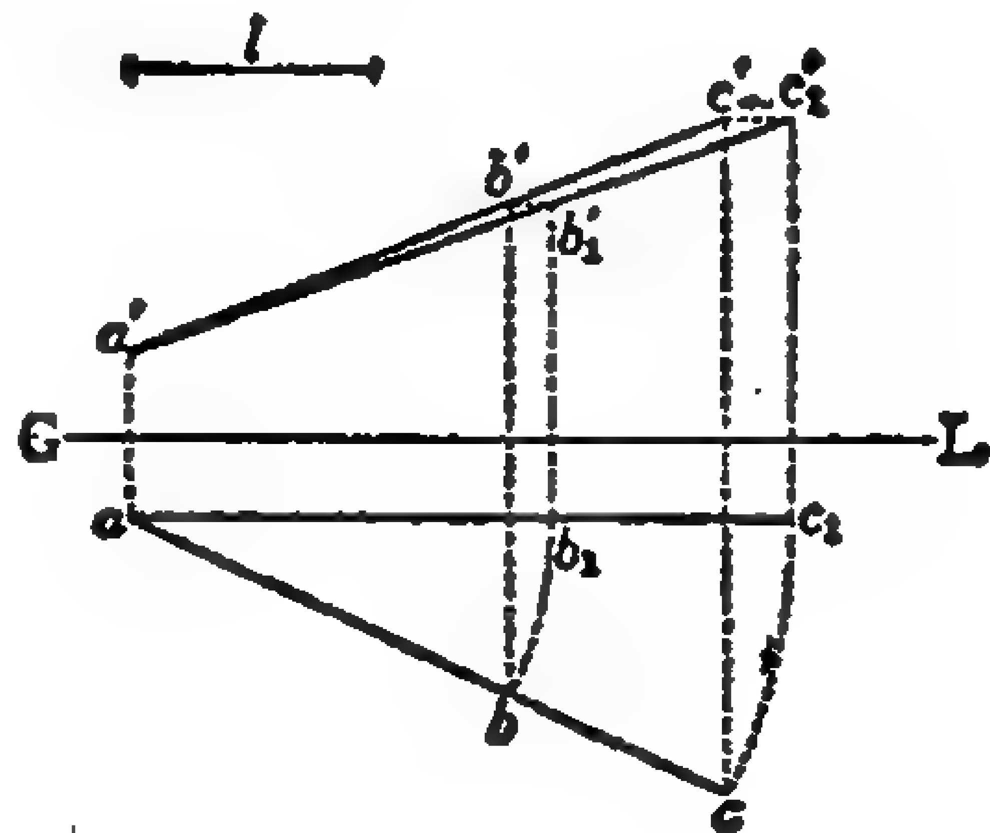
3360. 应用旋转法，求在水平投影面、正面投影面的投影分别为ab、$a'b'$的线段的实际长度，以及线段AB和各投影面的夹角.



解　参照问题3358可得如下作图方法.

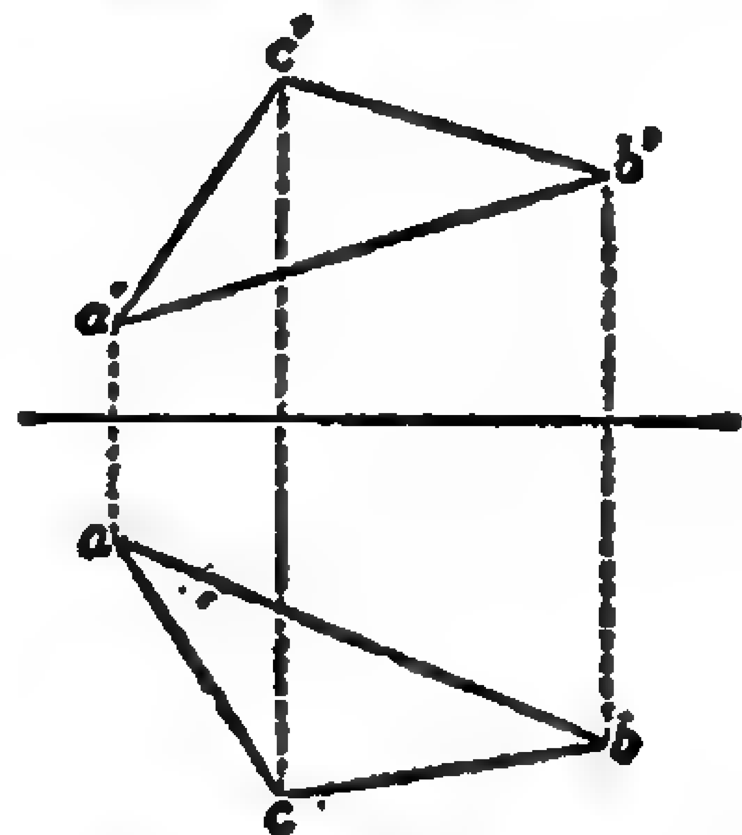
把ab变换为平行于正面投影面的投影ab_1，则与它对应的主视图$a'b'_1$就是线段AB的实长. 同样，把$a'b'$向水平投影面平行移动，其俯视图ab_2也是AB的实长. 图中的α、β分别表示AB和水平投影面及正面投影面的夹角.

3361. 已知线段AB的投影ab、$a'b'$，求作把线段延长l的投影图.



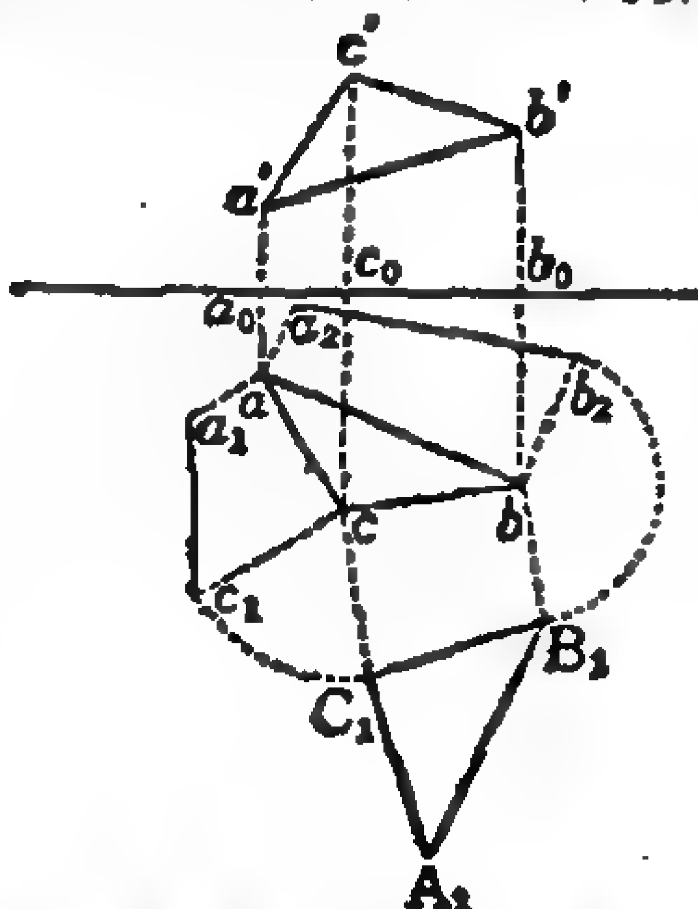
解　把ab变换为平行于正面投影面的投影ab_1，则主视图$a'b'_1$就是已知线段的实长. 因此把已知线段延长l，它的主视图就是把$a'b'_1$延长l所得的$a'c'_1$，它的俯视图是ac_1. 再把ab_1、$a'b'_1$变换为原来的位置，则ac、$a'c'$就是所求的投影图(参照问题3358).

3362. 根据右面的投影图求作它的原图形.



解　根据问题3358可以求出原图形三边的实长. 过a、b且在ab的同侧作垂线aa_2、bb_2，使其长分别等于a_0a'，

b_0b'，连结 a_2b_2，就是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的实长。



同样，过 a、c 且在 ac 的同侧作垂线 aa_1、cc_1，使其长分别等于 a_0a'、c_0c'，连结 a_1c_1 就是 $\triangle ABC$ 的边 AC 的实长。

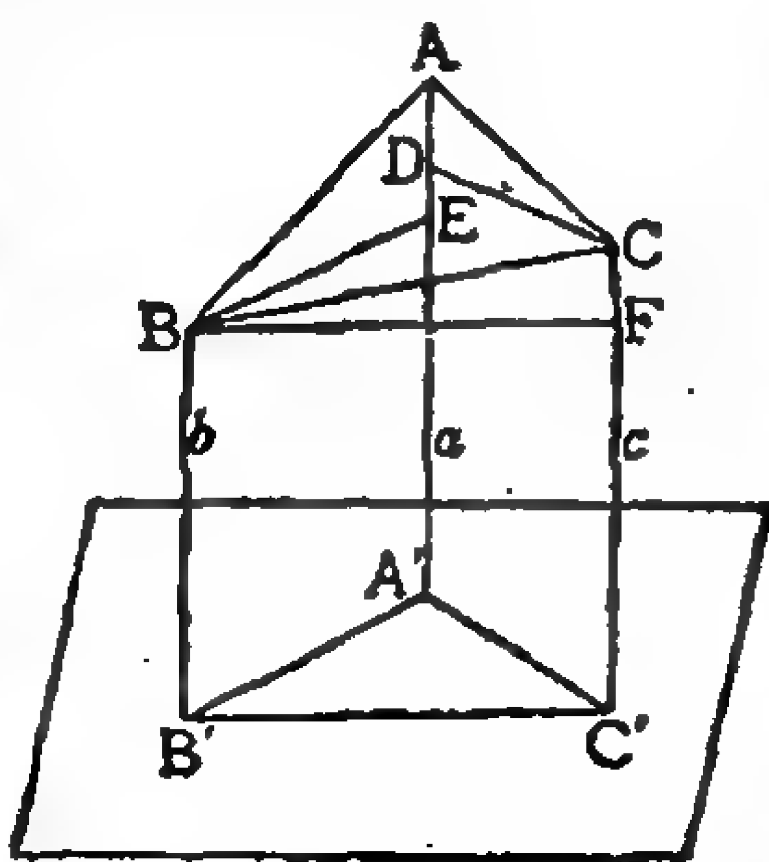
又过 b、c 且在 bc 的同侧作垂线 bB_1、cC_1，使其长分别等于 b_0b'、c_0c'，连结 B_1C_1 就是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的实长。

设以 B_1、C_1 为圆心，分别以 b_2a_2、c_1a_1 为半径的两个圆的一个交点为 A_1，则 $\triangle A_1B_1C_1$ 就是 $\triangle ABC$ 的实形。

3363. 设直角三角形 $ABC(\angle A=\angle R)$ 在平面上的正投影为 $A'B'C'$，且 $AA'=a$，$BB'=b$，$CC'=c$，试证

$$BC=\sqrt{(b-c)^2-2(a-b)(a-c)}.$$

解　如图。设 $B'A'\parallel BE$，$C'A'\parallel CD$，$B'C'\parallel BF$，正三角形 $A'B'C'$ 的长都为 m，则



$$AB^2=AE^2+BE^2=(a-b)^2+m^2, \quad ①$$

$$AC^2=AD^2+DC^2=(a-c)^2+m^2, \quad ②$$

$$BC^2=CF^2+BF^2=(c-b)^2+m^2. \quad ③$$

由于 $\angle A=\angle R$，则 $AB^2+AC^2=BC^2$。

所以 $[(a-b)^2+m^2]+[(a-c)^2+m^2]=(c-b)^2+m^2$，

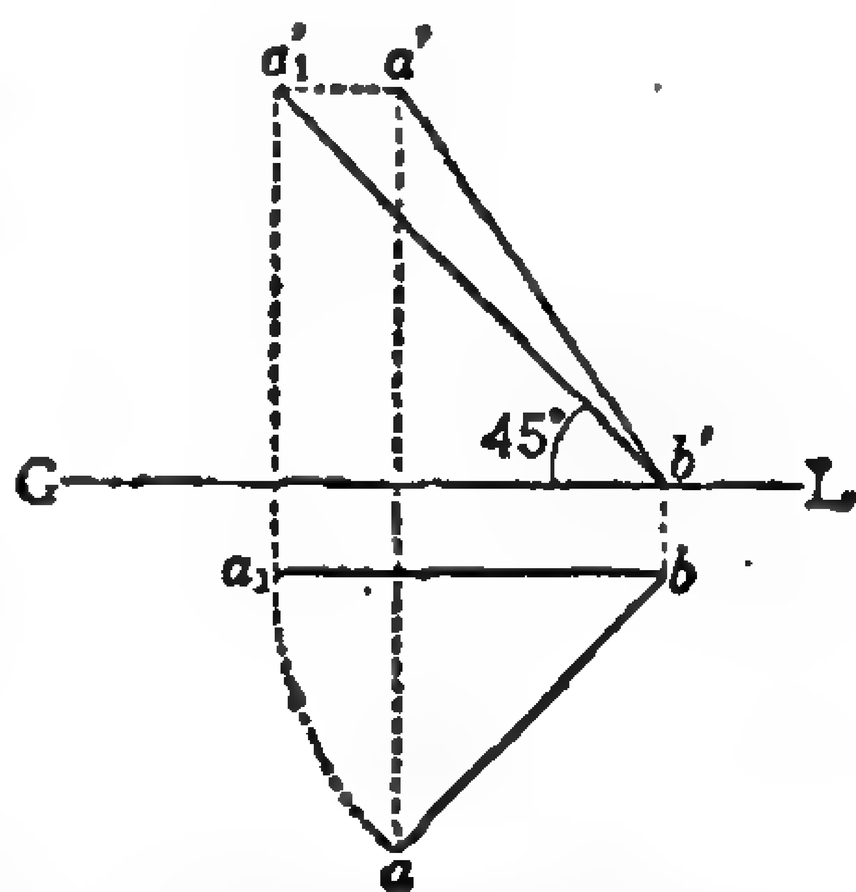
从而 $m^2=-2a^2+2ab+2ac-2bc=-2(a-b)(a-c)$。

代入③，得 $BC^2=(c-b)^2-2(a-b)(a-c)$，

$$\therefore\quad BC=\sqrt{(c-b)^2-2(a-b)(a-c)}.$$

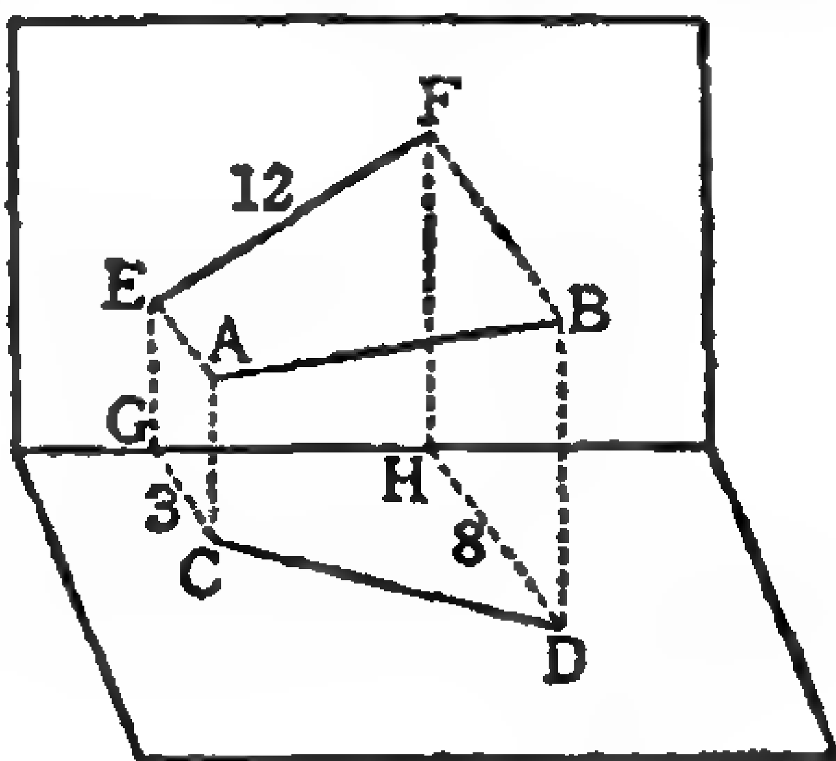
3364. 设 ab 是和水平投影面成45°角的线段的俯视图，求该线段的主视图。

解　把 ab 变换为象 a_1b 那样平行于正面投影面，则其主视图表示实角45°（问题3358），所以 $\angle Gb'a'_1=45°$。设 $b'a'_1$ 和过 a_1 且垂直于基线的直线相交于 a'_1，则 $b'a'_1$ 就是线段 AB 的实长。又因为 A 的高度等于 a' 的高度，所以 $a'b'$ 就是所求的主视图。



3365. 如图，求线段 AB 的长。

解　在平面 $EABF$ 上，过 E 引 AB 的平行线和 BF 相交于 F'，则

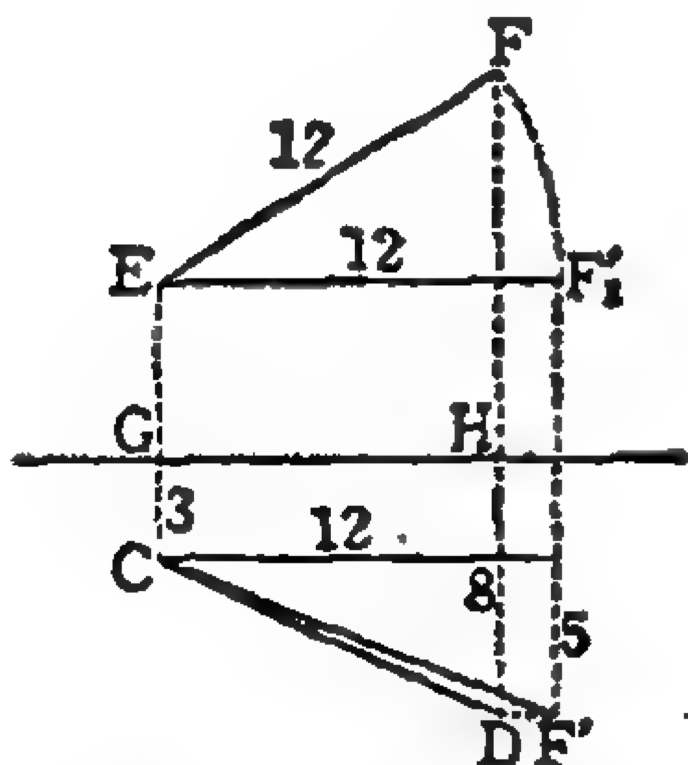


$$FF'=BF-BF'=DH-CG=8-3=5,$$

$$AB=EF'=\sqrt{12^2+5^2}=13,$$

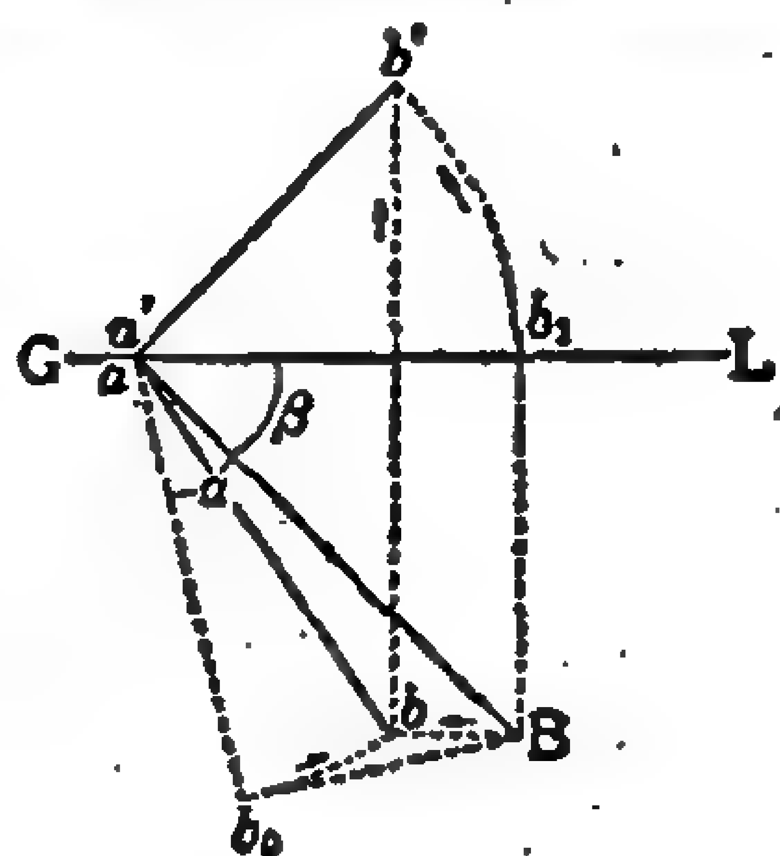
即　$AB=13$。

又根据求实长的方法，可知图中 CF' 就是所求的长。

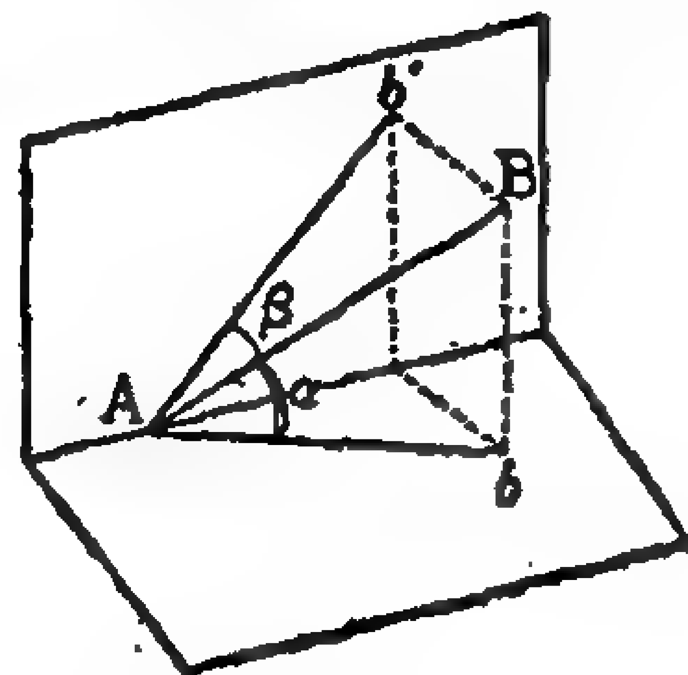


3366. 已知线段的实长及与投影面的倾角，求作其投影图。

解　如图，设已知线段 AB 和水平投影面的倾角为 α，和正面投影面的倾角为 β，则由其投影图、投射线及以 AB 为公共斜边的两个直角三角形 ABb、ABb'，可知 AB 是定值。



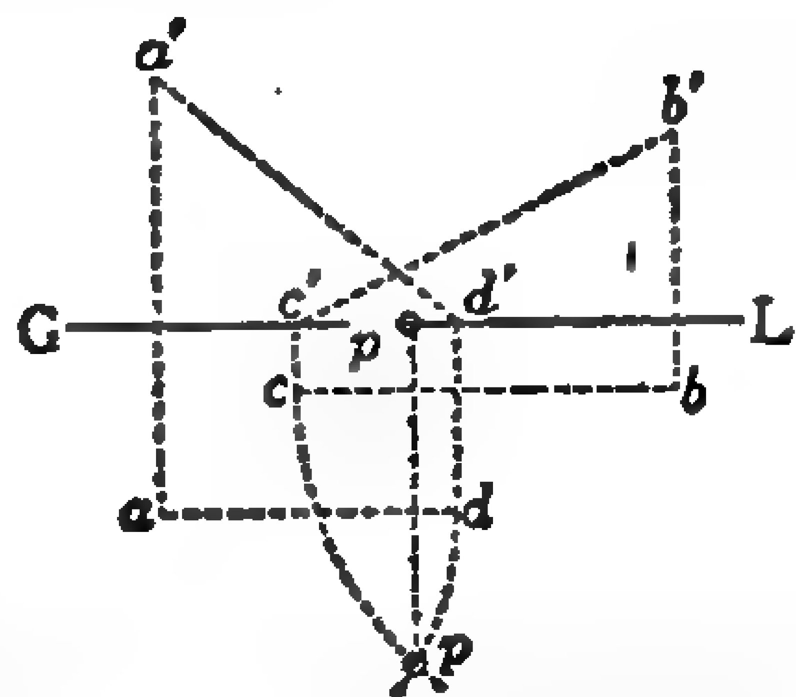
在作图时，设把上述两个直角三角形画在水平投影面上，分别为 ab_1B、aBb_0，则所求俯视图的大小就是 ab_0，B 端距正面投影面的距离就是 Bb_1，所以 ab 就是所求的俯视图，$a'b'$ 就是所求的主



视图。

3367. 在水平投影面上求一点 P，使距两定点的距离分别为 l, m。

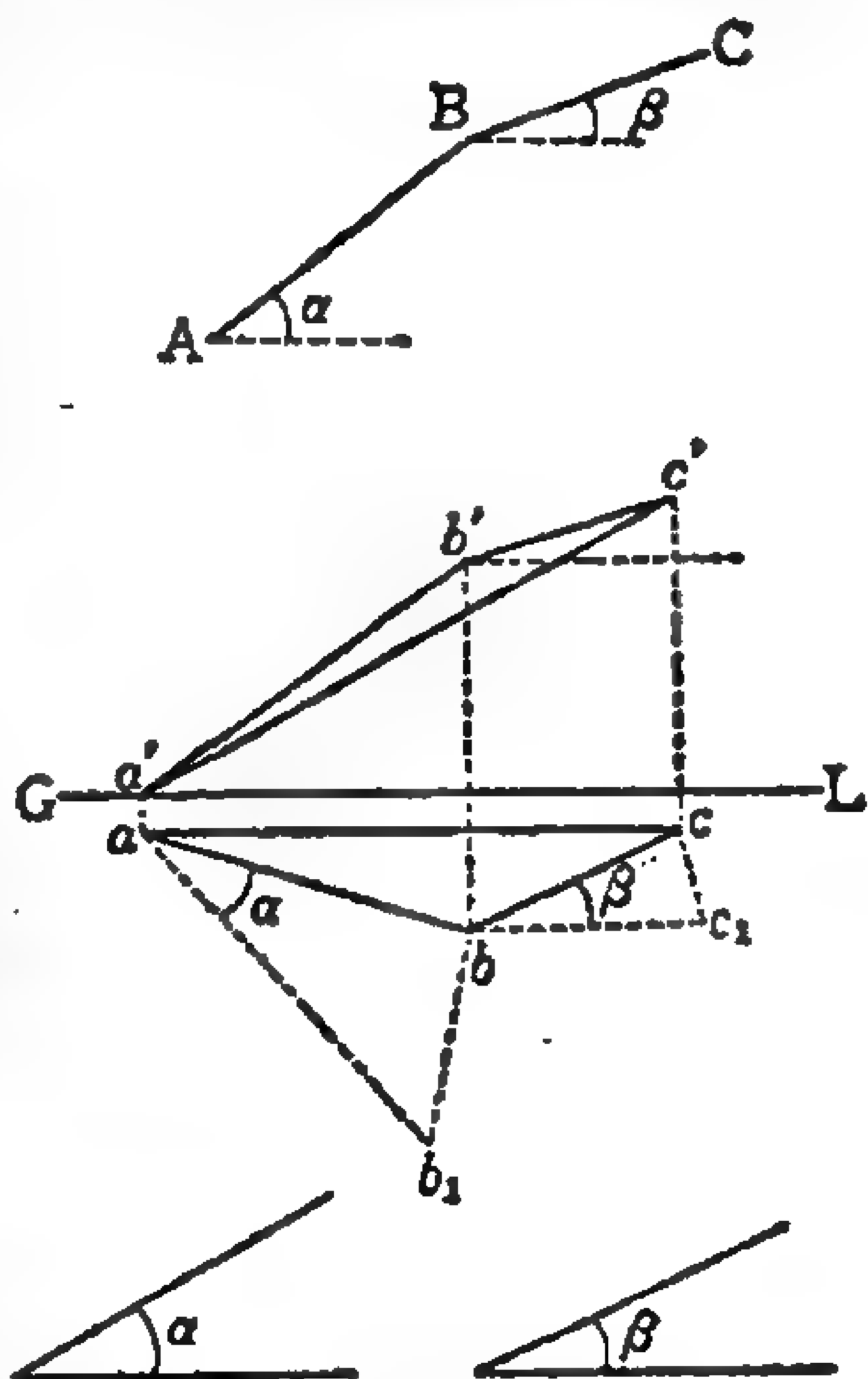
解　如图，设 $a'd'=l$, $b'c'=m$ 的俯视图分别为 ad、bc，则以 b 为圆心、cb 为半径的圆弧和以 a 为圆心、ad 为半径的圆弧的交点 p，就是点 P 在水平投影面上的投影。点 P 距两定点 A、B 的距离分别为 l, m。



3368. 已知从 A 经 B 到达 C 向上凸的道路的水平投影图为 abc，且 AB、BC 对水平投影面的倾角分别为 α, β，如把由 A 到 C 的道路改作直路，求它与水平投影面的倾角。

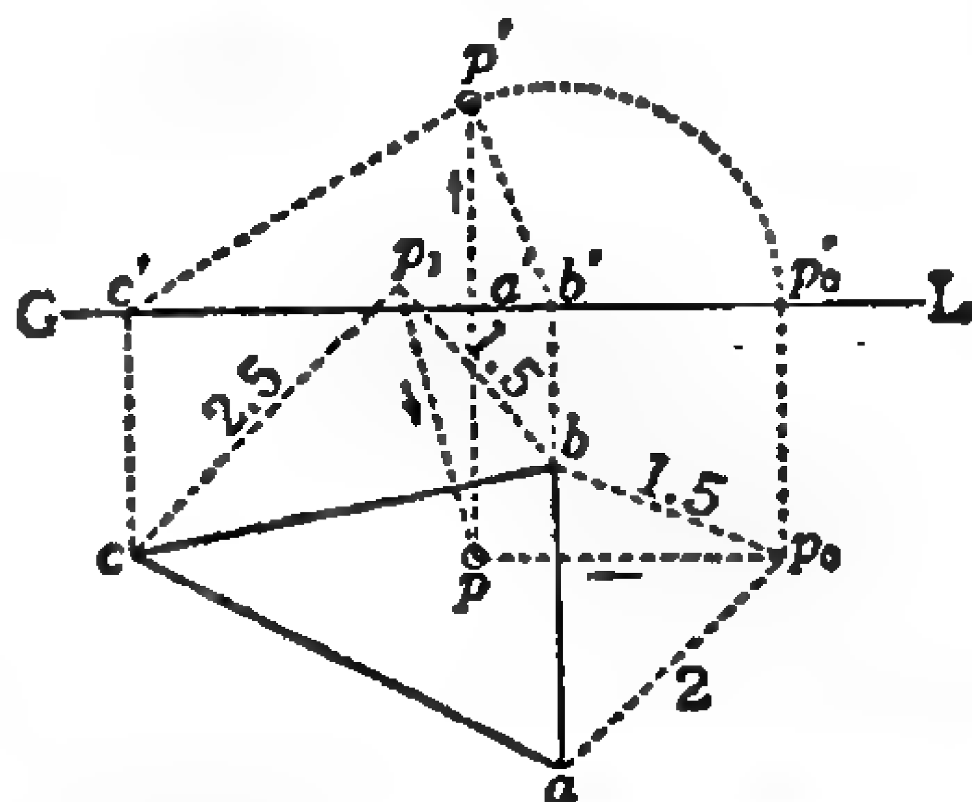
解　设连结道路两端的直线 ac 和基线平行。作以 ab 为底边、且含角 α 的直角三角形 abb_1，则 bb_1 就是点 B 的高度。把它移到正面投影面上，可求得点 b'。

同样，作含有边 bc 和角 β 的直角三角形 bcc_1，则 C 比 B 高 cc_1，所以把 bb_1+cc_1 作为高就可决定 c'。这时，AC 的主视图 $a'c'$ 和正面投影面平行，所以 $\angle c'a'L$ 就是新的直路对水平投影面的倾角。



3369. 已知水平投影面上的 $\triangle ABC$ 中，$AB=2\text{cm}$, $BC=2.5\text{cm}$, $CA=3\text{cm}$. 在水平投影面外有一点 P，它到 $\triangle ABC$ 各顶点的距离分别为 $AP=2\text{cm}$, $BP=1.5\text{cm}$, $CP=2.5\text{cm}$，试求点 P 的位置。

解　在平面投影上画三角形 abc，使其一边 ab 垂直于基线。再在水平投影面上求距 a 2cm、距 b 1.5cm 的点 p_0，和距 b 1.5cm、距 c 2.5cm 的点 p_1，然后从 p_0 向 ab 引垂线，从 p_1 向 bc 引垂线，设它们相交于 p，则 p 就是点 P 在水平投影面上的位置，p' 就是点 P 在正面投影面上的位置。



3370. 试述：从空间两直线的投影图判别其位置关系的方法。

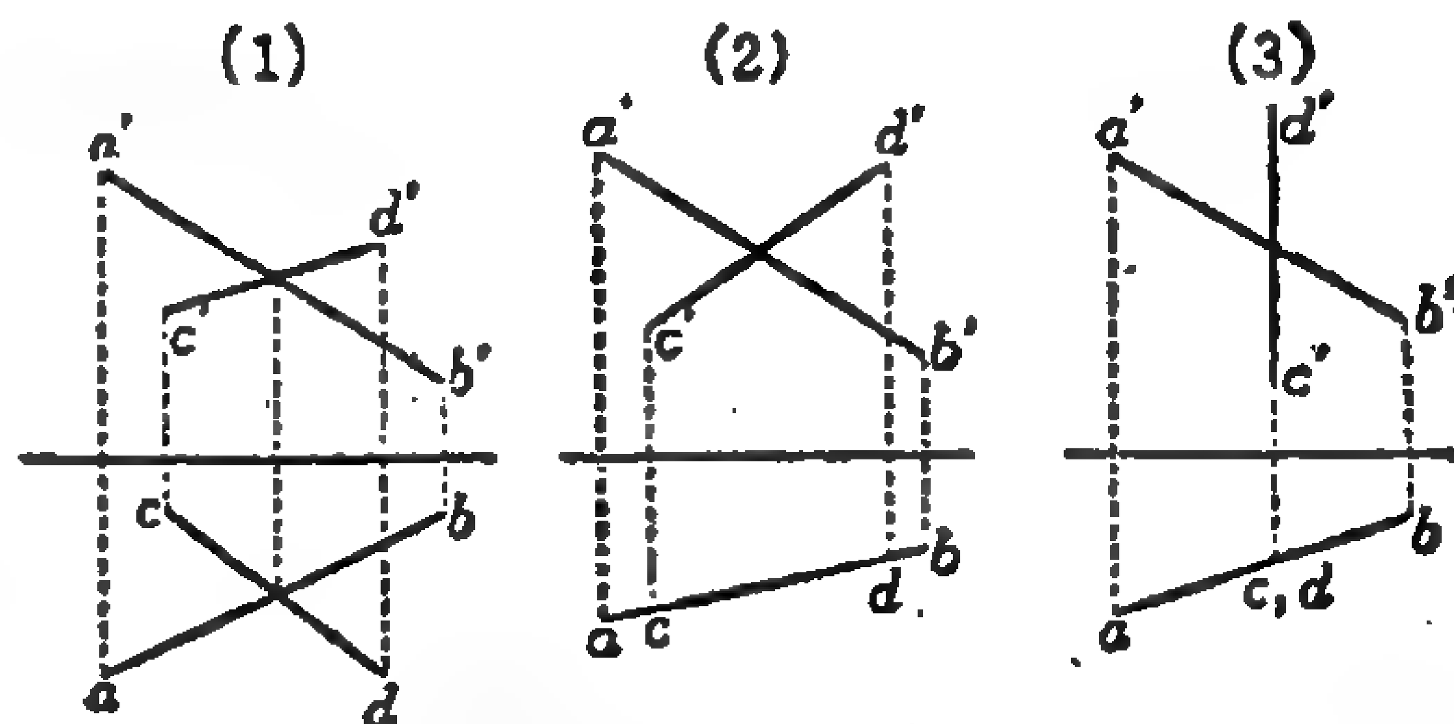
解　本题可分为下列四种情形来判别。

(1) 相交。

(i) 两直线在主视图、俯视图上都相交，且连结其交点的直线垂直于基线，则此两直线相交(图 1)。

(ii) 两直线在主视图、俯视图中的一个图上相交，而在另一个上重合，则此两直线相交(图 2)。

(iii) 在主视图和俯视图中的一个图上是点和直线，而且点在直线上，则此两直线相交(图 3)。



(2) 异面直线。

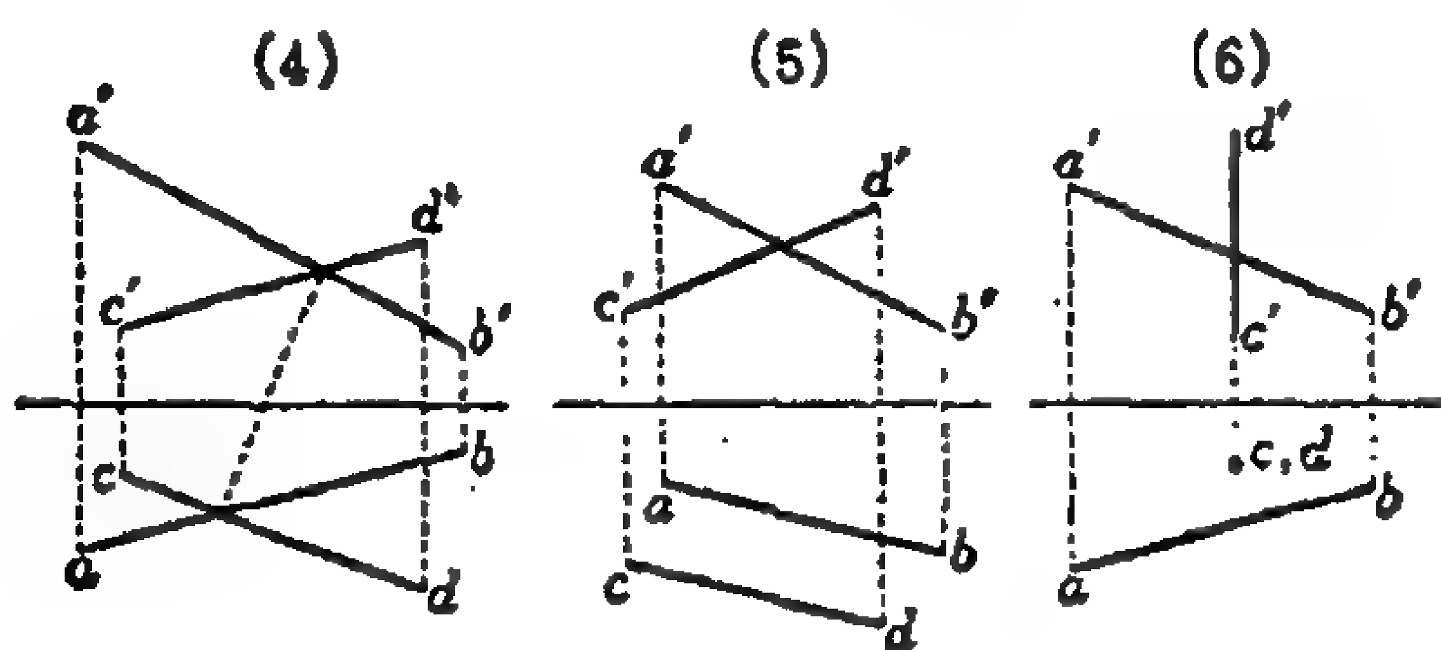
在下列情形，两直线是异面直线。

(iv) 两直线在主视图和俯视图上都相交，且连结其交点的直线不垂直于基线。

(v) 两直线在主视图和俯视图中的一个图上平行，而在另一个图上相交。

(vi) 两直线在主视图和俯视图中的一个图上，一条直线是点，另一条是直线，但这个点不在这条直线上。

(3) 平行。

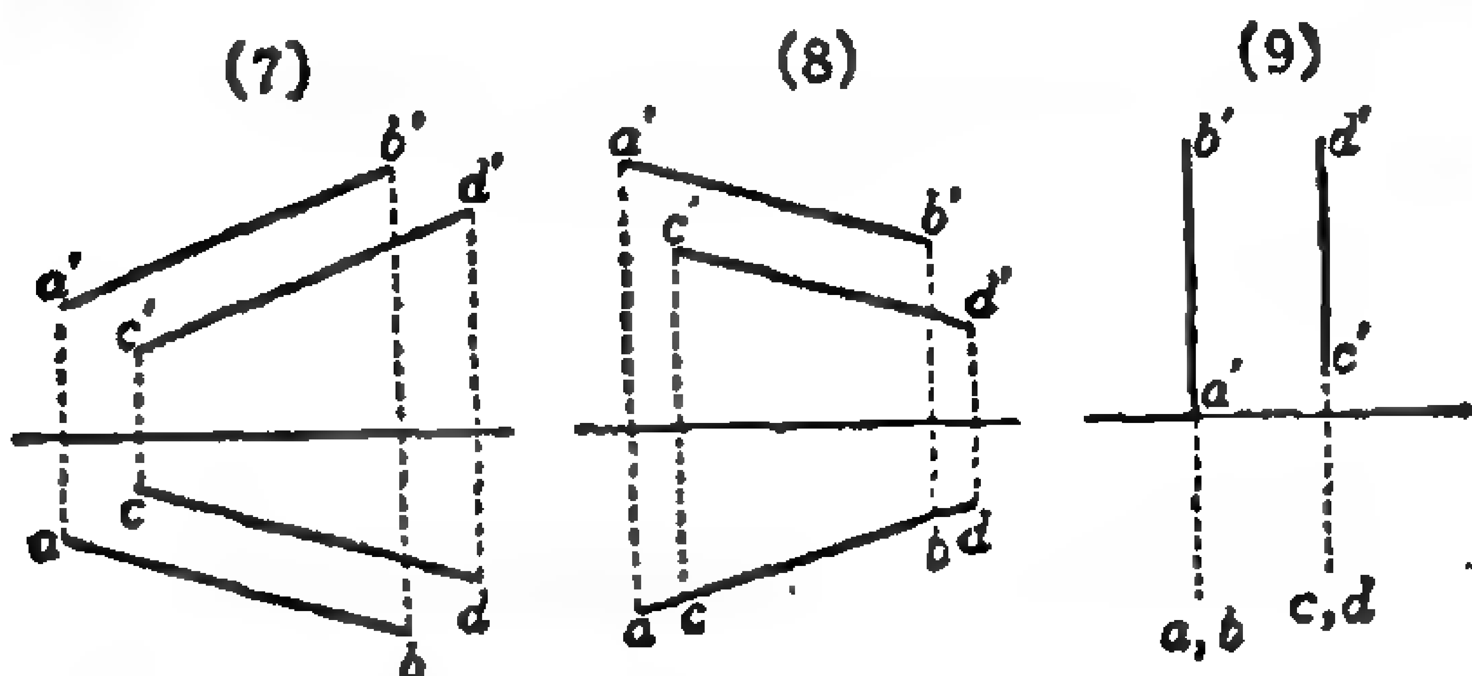


在下列情形，两直线平行。

(vii) 在主视图和俯视图中，两直线都是平行的。

(viii) 在主视图和俯视图中，有一个图上两直线平行，而另一个图上两直线重合。

(ix) 二直线在主视图和俯视图中的一个图上都是点。

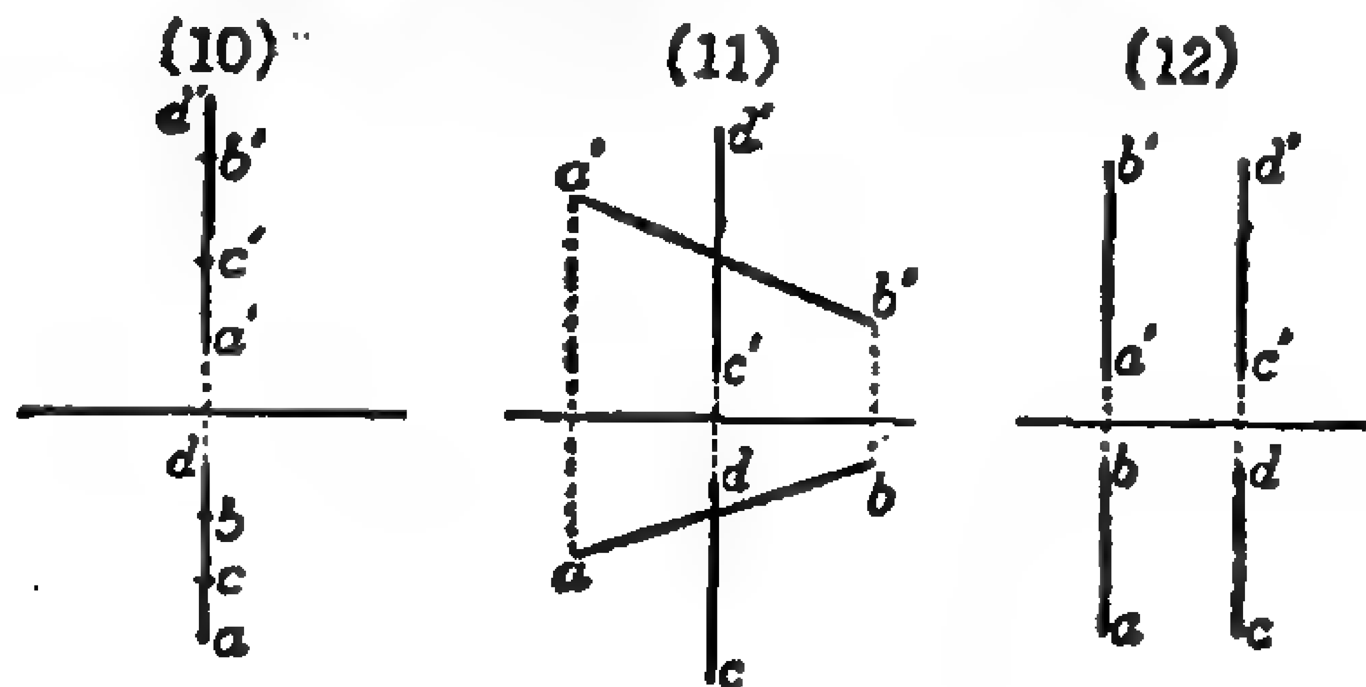


(4) 不能判别的情形。

(x) 在主视图和俯视图上，两直线都重合，且垂直于基线，不能判定它是相交或平行。

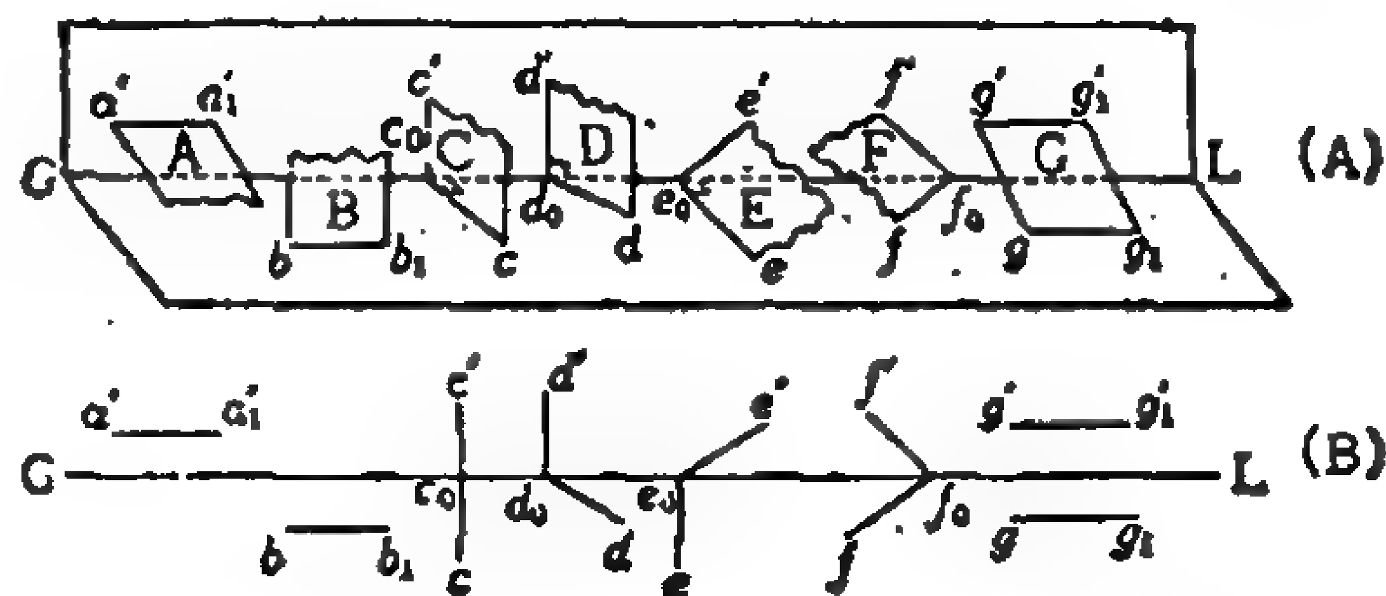
(xi) 两直线中有一条在主视图和俯视图上都垂直于基线，而另一条在主视图和俯视图上都和基线斜交，不能判定它是相交或是异面直线。

(xii) 两直线在主视图和俯视图上都垂直于基线，不能判定它是平行或是异面直线。



3371. 什么叫做平面迹线，什么叫做水平迹线和垂直迹线？

解　一平面与正面投影面、水平投影面相交的直线叫做该平面在各投影面上的迹线。平面在正面投影面上的迹线叫做垂直迹，在



水平投影面上的迹线叫做水平迹。

上图(*A*)是第一象限里的平面相交情况，(*B*)是其迹线图。平面 *A* 平行于水平投影面，*A*′*a*′ 是高度而不是水平迹；

平面 *B* 平行于正面投影面；

平面 *C* 垂直于两个投影面；

平面 *D* 和正面投影面斜交且和水平投影面垂直；

平面 *E* 和水平投影面斜交且和正面投影面垂直；

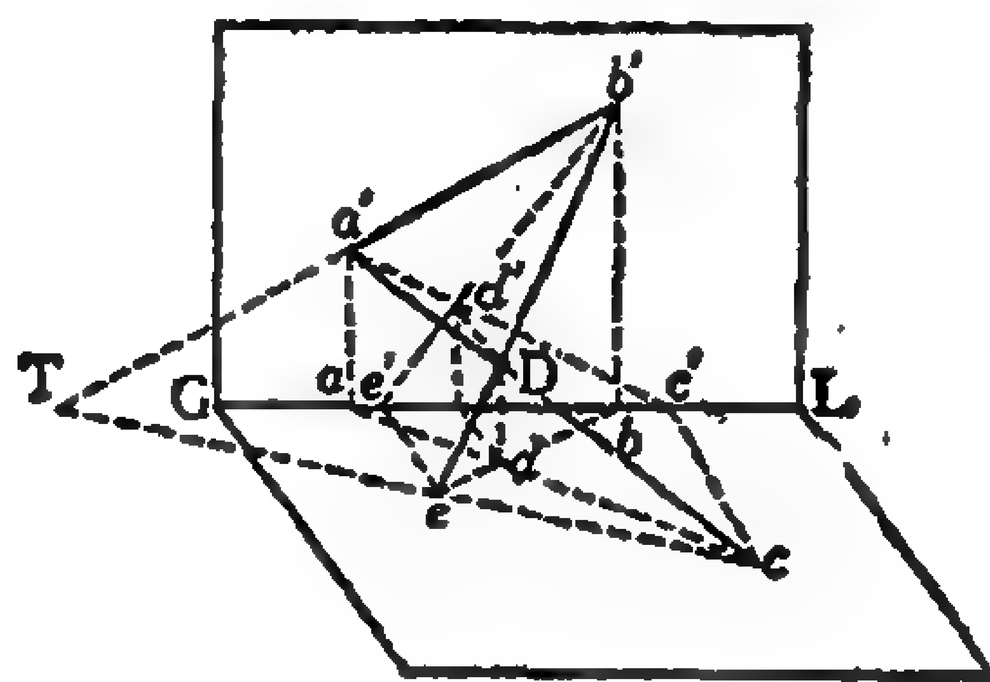
平面 *F* 和两个投影面都斜交；

平面 *G* 和两个投影面都斜交且平行于基线。

3372. 求作过正面投影面上的两定点 *A*、*B*，及水平投影面上定点 *C* 的平面的迹线。

解　垂直迹为过正面投影面上两点 a'、b' 的直线，设它和基线相交于 *T*. 因而水平迹就是通过 *T*, *c* 的直线。

如果直线 $a'b'$ 和基线的交点 *T* 要画在纸外，可作如下处理。取直线 *ac* 上的任意点 *D*，连结 *BD*，求出其水平迹点 *e*，则 *ce* 就是该平面的



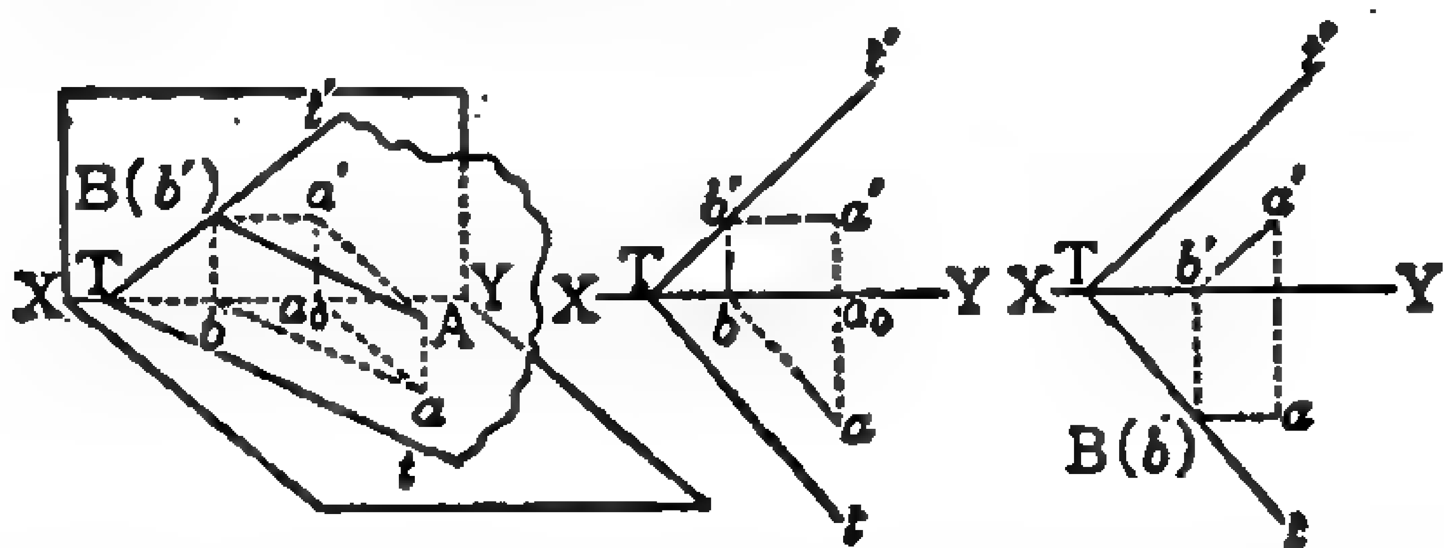
水平迹。

注 如图，在 ac、$a'c'$ 上分别取任意点 d、d'，作 $aa'\parallel cc'\parallel dd'$，设 $b'd'$ 和 LG 的交点为 e'，并在 bd 的延长线上求 e，使 $e'e\parallel dd'$，则从图中可知

$$b'd':d'e'=b'D:De=bd:de.$$

3373． 求点 A 在平面 T 上的条件．

解 当点 A 在平面 T 上时，设过 A 且与水平投影面平行的平面和 T 在正面投影面上的迹线 Tt' 的交点为 B，则 B 的主视图是，从 a' 引与基线平行的直线和 Tt' 的交点，设它为 b'．B 的俯视图在基线上，设它为 b．因为 $AB\parallel Tt$，所以 $ab\parallel Tt$．

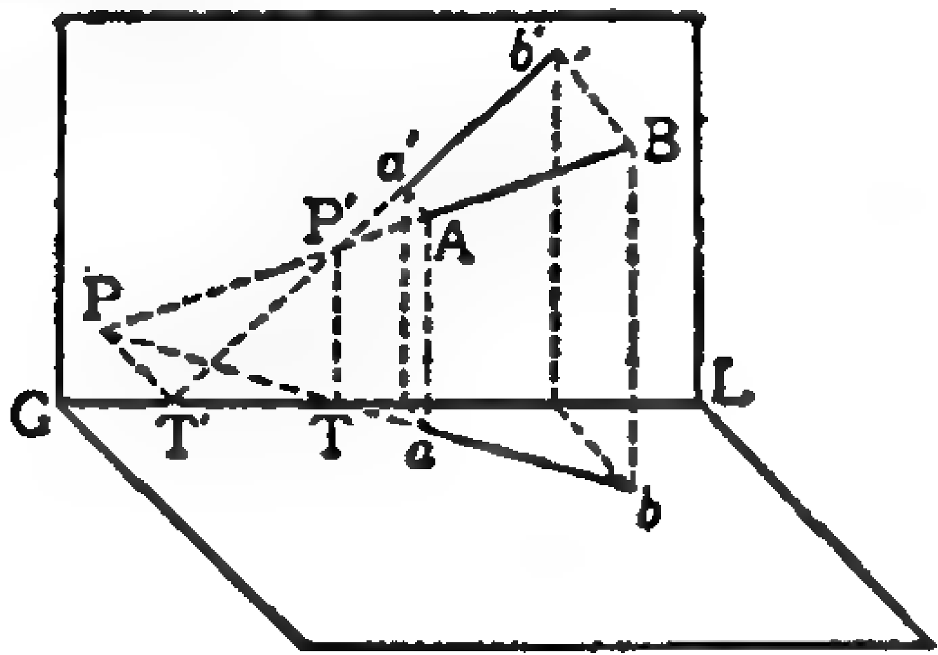


因此点 A 在平面 T 上的必要且充分条件是：设过 a 引 Tt 的平行线和基线的交点为 b，过 a' 引基线的平行线和 Tt' 的交点为 b'，bb' 垂直于基线。

3374． 求已知直线的垂直迹点和水平迹点。

解 设已知直线 AB 的俯视图为 ab，主视图为 $a'b'$．从 ba 的延长线和基线的交点 T 引基线的垂线，设它和 $b'a'$ 的延长线相交于 P'，则 P' 就是 AB 的垂直迹点。

从 $b'a'$ 的延长线和基线的交点 T' 引基线的垂线，设它和 ba 的延长线相交于 P，则 P 就是 AB 的水平迹点。如图，平面迹点表示在向基线的一侧。

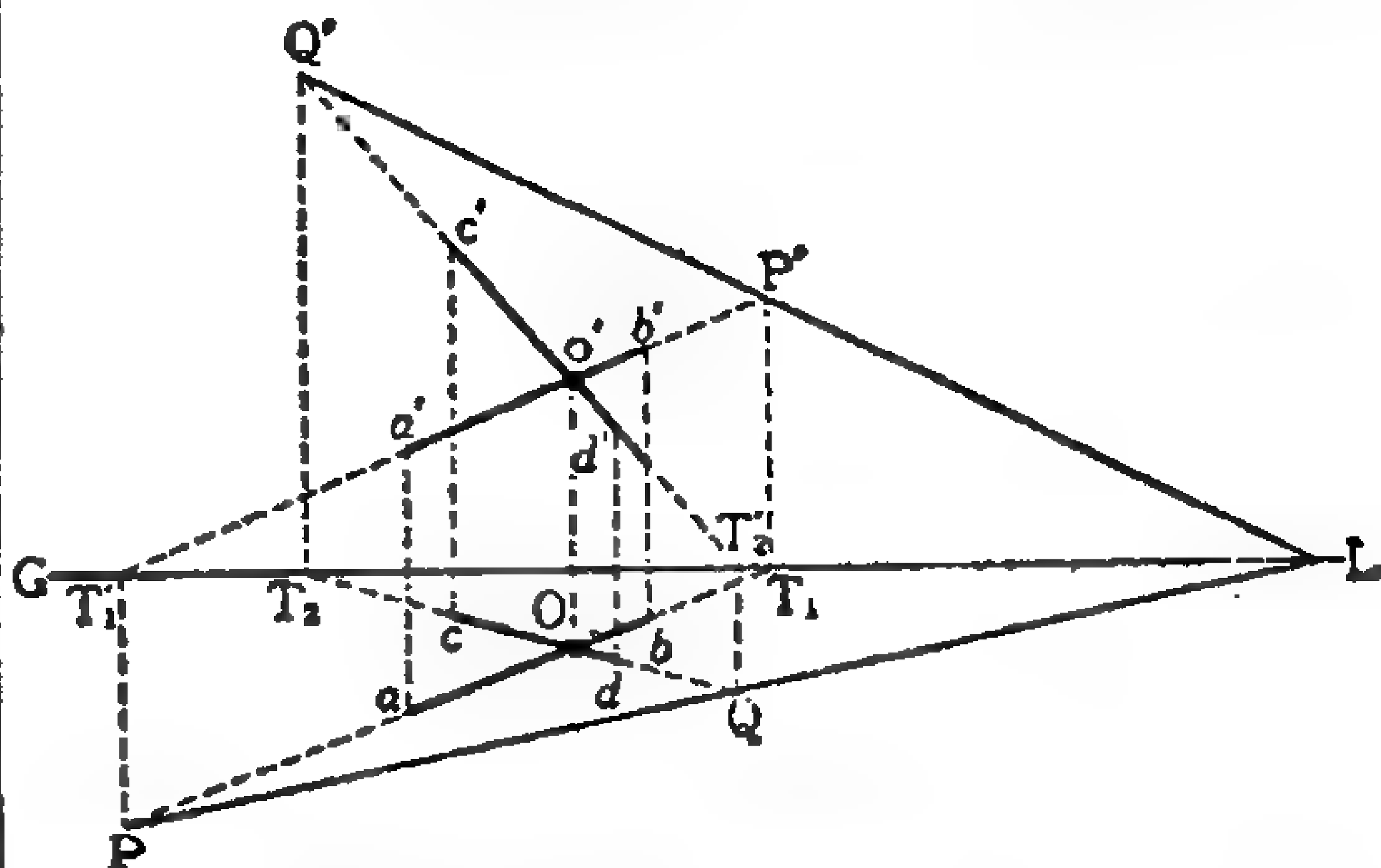


以上的作图(见上图)，只要考虑平面 $AabB$、$ABb'a'$ 的垂直迹线、水平迹线，就可求得 AB 在各投影面上的迹点。

3375． 求含有两条相交直线的平面的迹线。

解 应用上题的方法，分别求出已知两相交线 AB、CD 的垂直迹和水平迹．即将两垂直迹点、两水平迹点分别连结，即得所求的迹线。

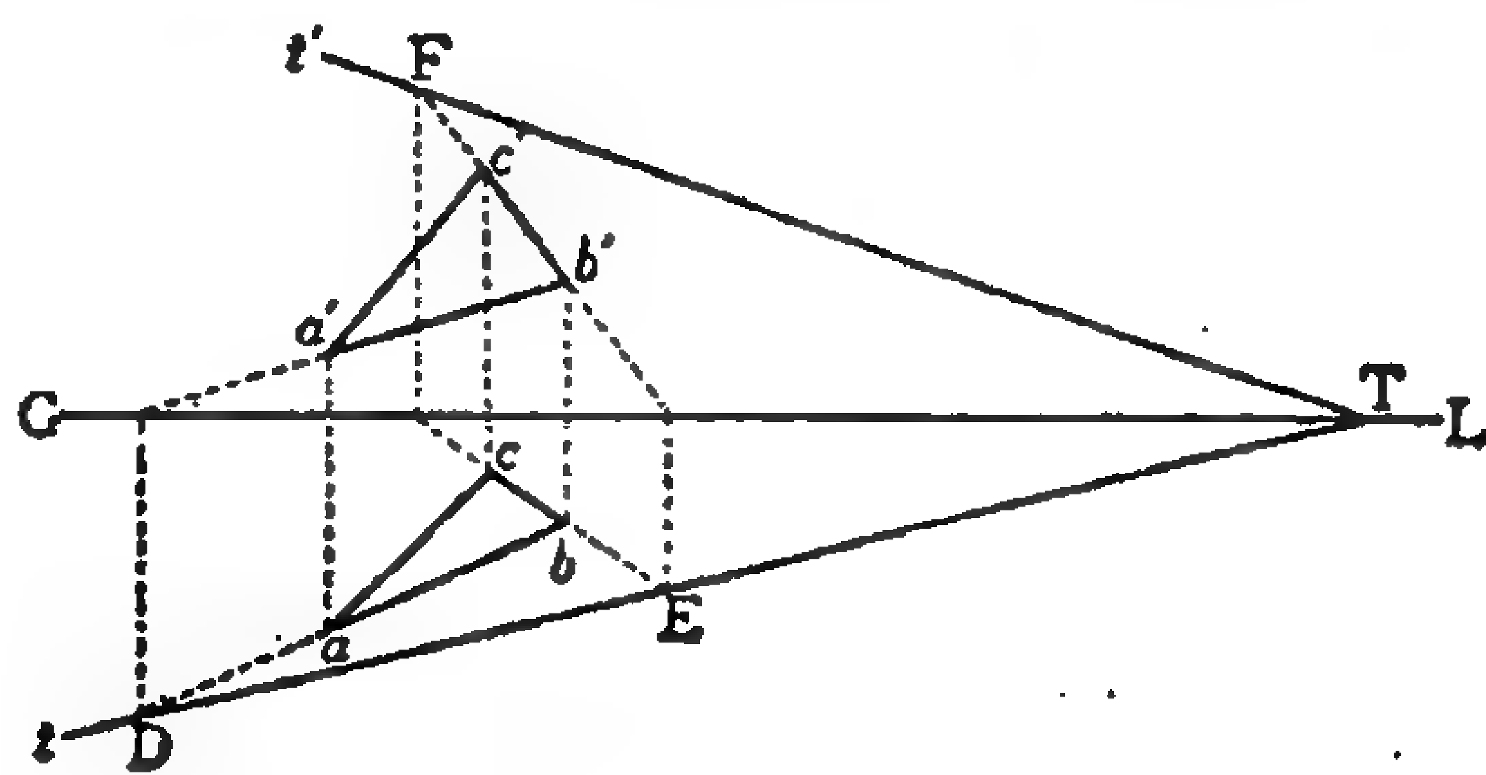
在图中，设两线段 AB、CD 相交于点 O，先求出 AB 的水平迹点 P、垂直迹点 P'，再求出 CD 的水平迹点 Q、垂直迹点 Q'，则含有 AB 和 CD 的平面的水平迹为 PQ，垂直迹为 $P'Q'$。



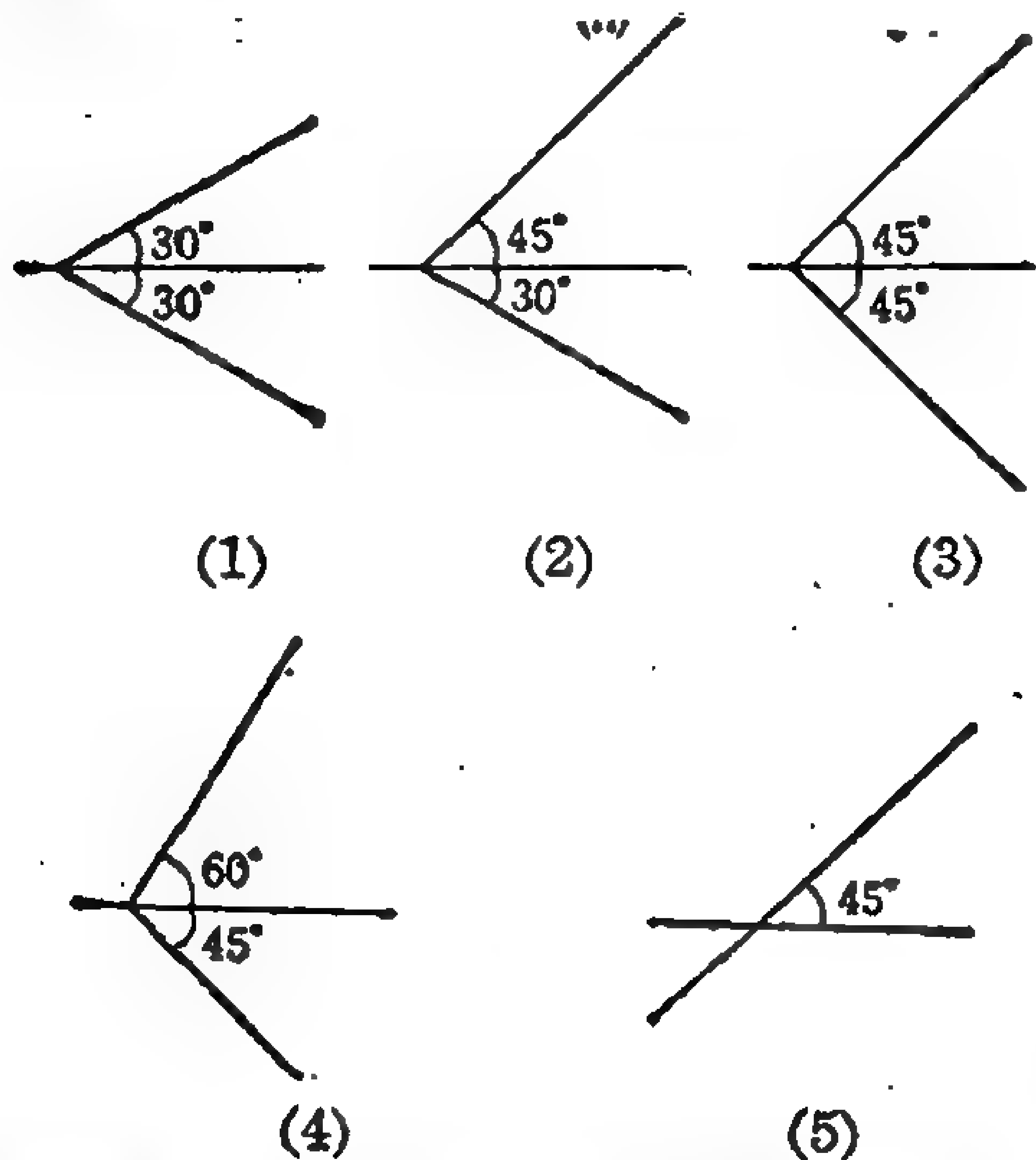
3376． 求不在同一直线上的三点 A、B、C 所决定的平面。

解 分别连结 AB、BC，就可根据上题的方法求出 AB 和 BC 所决定的平面．

先求出 BC 的水平迹点 (E) 和垂直迹点 (F)，再求 AB 的水平迹点(D)。设连结 DE 的直线和基线相交于点 T，再连结 TF，则 $Tt(TED)$ 和 $Tt'(TF)$ 分别为过三点的平面 T 的水平迹线和垂直迹线。它可用图表示如下：



3377. 求下图所示的平面与两投影面所成的角。



解　设T为已知平面，XY为基线，Tt为T的水平迹线，Tt'为T的垂直迹线。

(1) 设垂直于Tt的平面S的水平迹线为Ss，垂直迹为Ss'，Tt和Ss的交点为T_1，Tt'和Ss'的交点为Z。以S为圆心、ST_1为半径的圆和基线的交点为T_2，连结ZT_2，则$\angle ZT_2S$就是T和水平投影面所成的角α。

设$TZ=2$，则$SZ=1$，$TS=\sqrt{3}$。

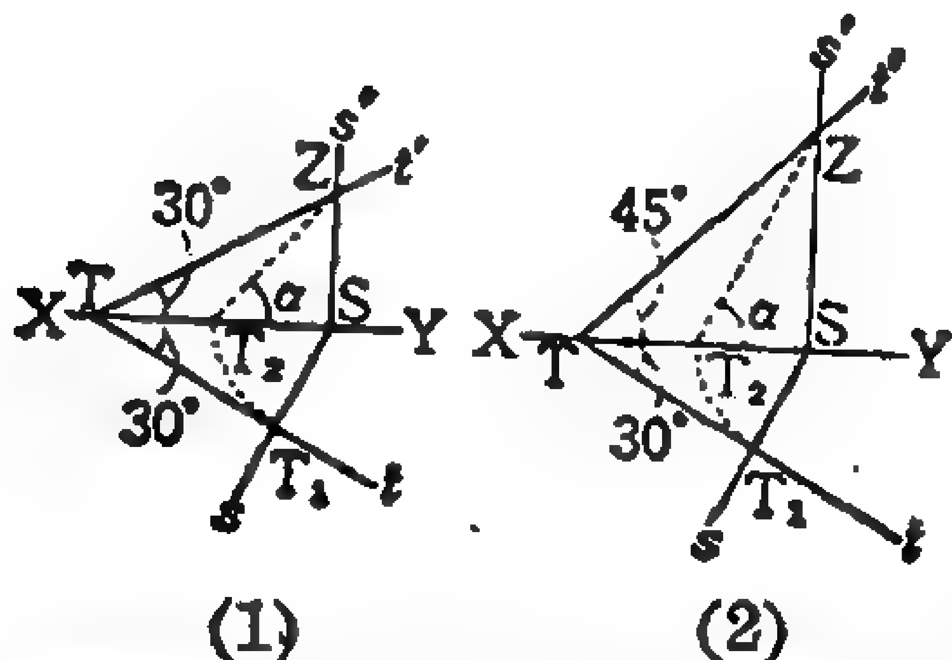
$$\therefore\quad ST_1=ST_2=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

从而
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{SZ}{T_2S}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

即
$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

因为Tt、Tt'和基线的夹角都是30°，所以平面T和正面投影面的夹角β是

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{2}{\sqrt{3}}\quad\text{即}\quad\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}.$$



(1)　　(2)

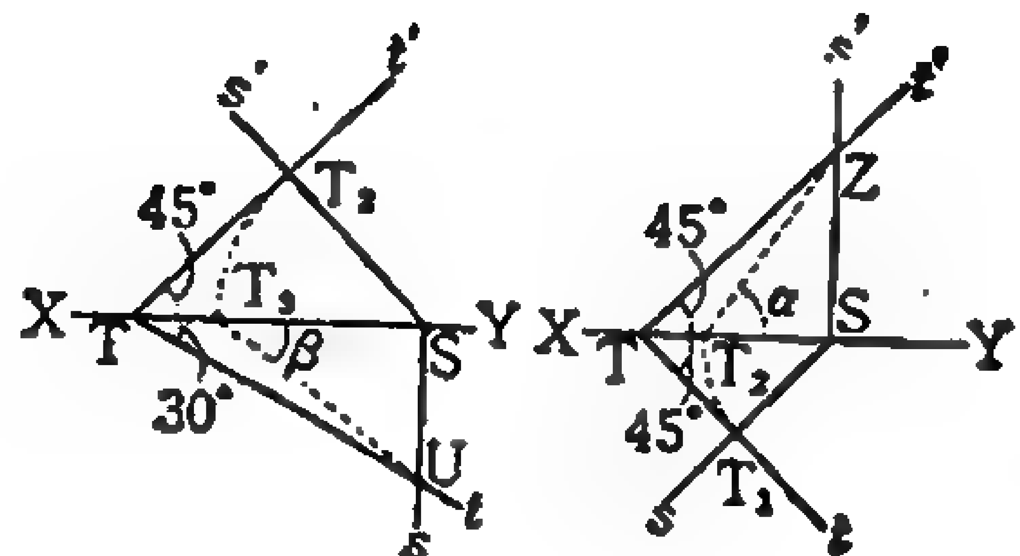
(2) 设垂直于Tt的平面S的水平迹线、垂直迹线分别为Ss、Ss'，Tt和Ss的交点为T_1，Tt'和Ss'的交点为Z，以S为圆心、ST_1为半径的圆和基线的交点为T_2，连结ZT_2，则$\angle ZT_2S$就是平面T和水平投影面所成的角α。

设$TZ=1$，则$SZ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$TS=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

$$\therefore\quad ST_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}=ST_2,$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{SZ}{T_2S}=2,$$

即
$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}2.$$



(3)　　(4)

其次，在图(3)中，设垂直于Tt'的平面S的水平迹线为Ss，垂直迹线为Ss'，Tt'和Ss'的交点为T_2，Tt和Ss的交点为U，以S为圆心、ST_2为半径的圆和基线的交点为T_3，连结UT_3，则$\angle UT_3S$就是T和正面投影面所成的角β。

设$TS=1$，则

$$ST_3=ST_2=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad SU=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{SU}{ST_3}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

即
$$\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(3) 和(1)同样作图，设$TZ=1$，则

$$SZ=\frac{1}{\sqrt{2}}=TS,\quad ST_1=ST_2=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{SZ}{T_2S}=\sqrt{2},$$

即$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$，又$\beta=\alpha$。

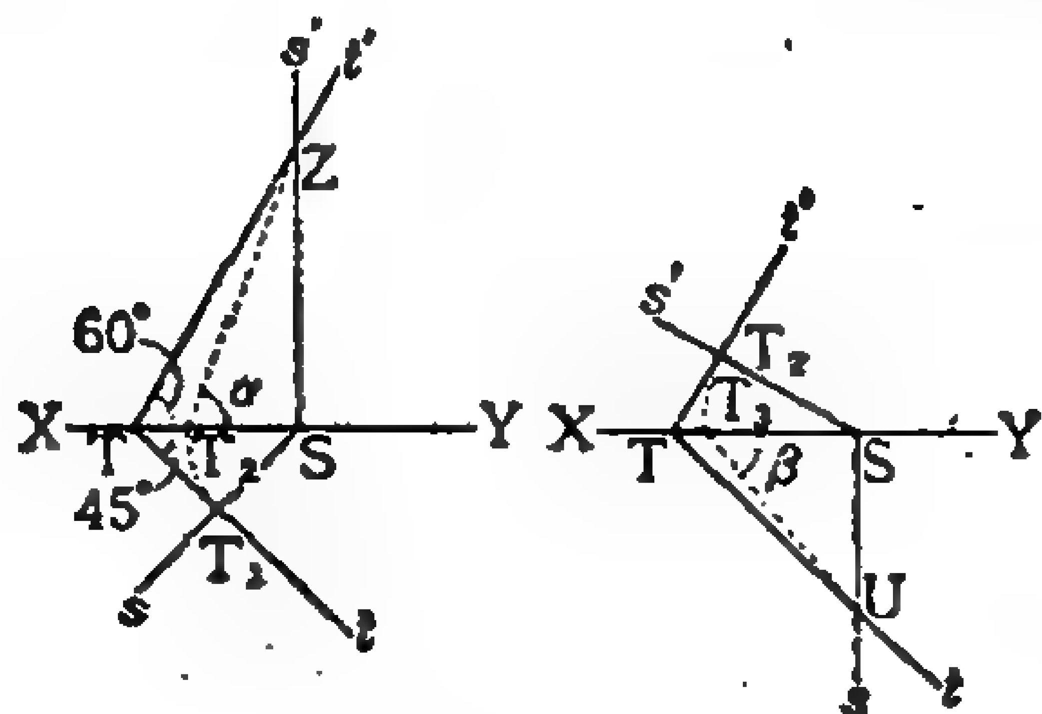
(4) 和(2)同样作图，设$TZ=2$，则

$$SZ=\sqrt{3},\quad TS=1.$$

$$\therefore\quad ST_1=ST_2=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\therefore$ $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{6}$，即$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{6}$。

下面再求β，如图(5)中的右图。设$ST=$



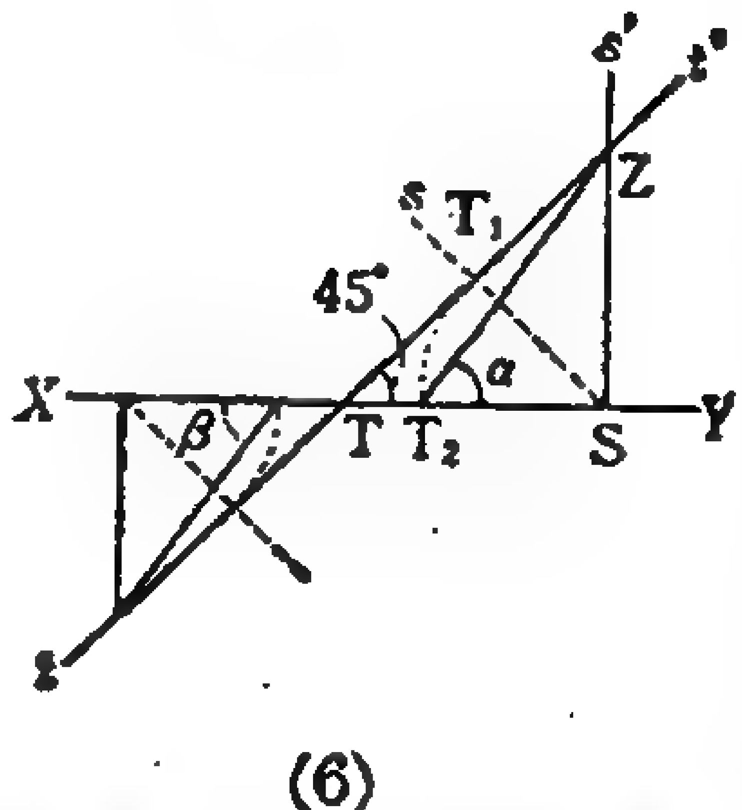
(5)

2，则 $ST_2=ST_3=\sqrt{3}$，$SU=2$.

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3},$$

即
$$\beta=\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(5) 设过基线上任意点 S 且与 Tt 垂直的平面 S，它的水平迹线为 Ss（Ss 如图所示），垂直迹线为 Ss'，Tt 和 Ss 的交点为 T_1（这时为 Tt' 和 Ss 的交点），Tt' 和 Ss' 的交点为 Z。以 S 为圆心、ST_1 为半径的圆与基线的交点为 T_2，连结 ZT_2，则 $\angle ZT_2S$ 就是 T 和水平投影面所成的角 α。



(6)

设 $TZ=1$，则 $SZ=\frac{1}{\sqrt{2}}=ST$.

$$\therefore\quad ST_1=ST_2=\frac{1}{2},$$

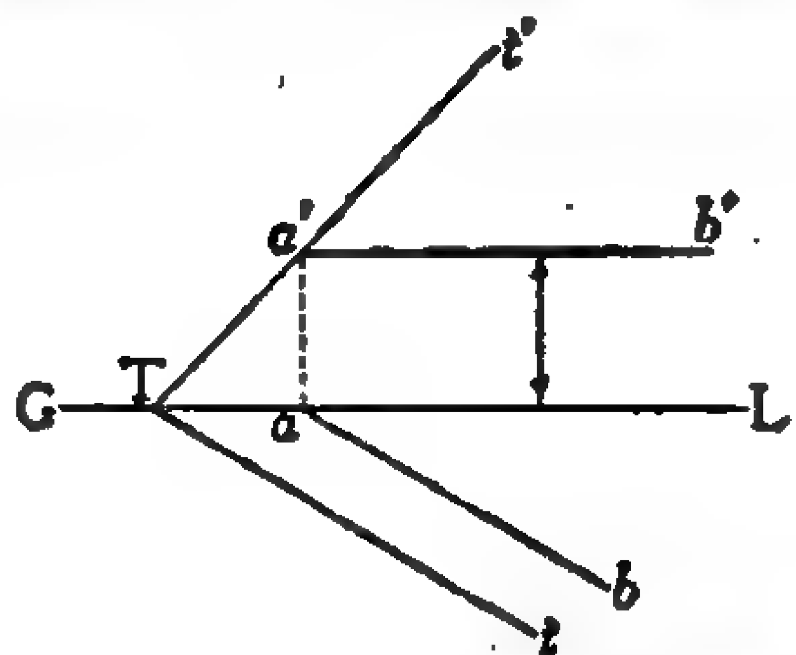
$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{SZ}{T_2S}=\sqrt{2},$$

即
$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}.$$

因为 Tt、Tt' 和基线的夹角都是 45°，所以可知 $\beta=\alpha$。

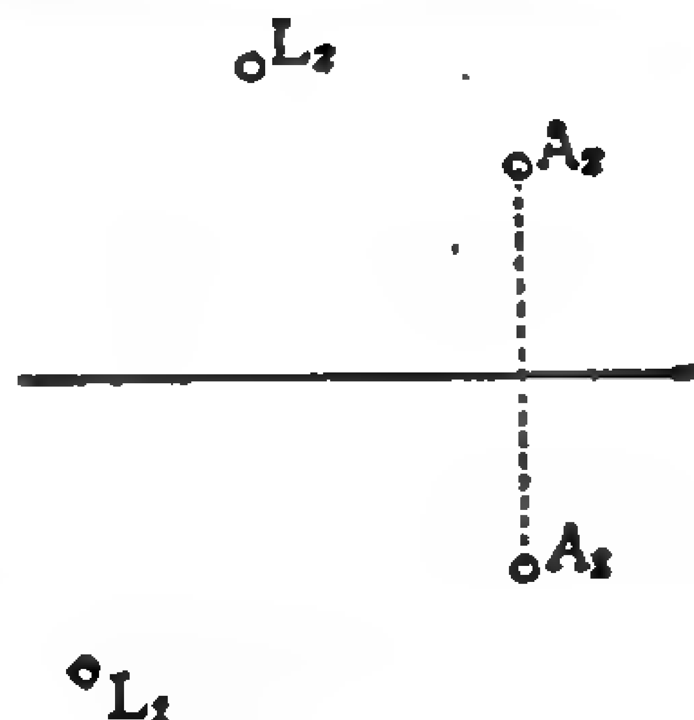
3378. 在已知平面上作与水平投影面的距离为一定的水平直线。

解　因为在已知平面上，与水平投影面有一定距离的直线，在正面投影面上的投影平行于基线，在水平投影面上的投影平行于 Tt，所以可作图如下。



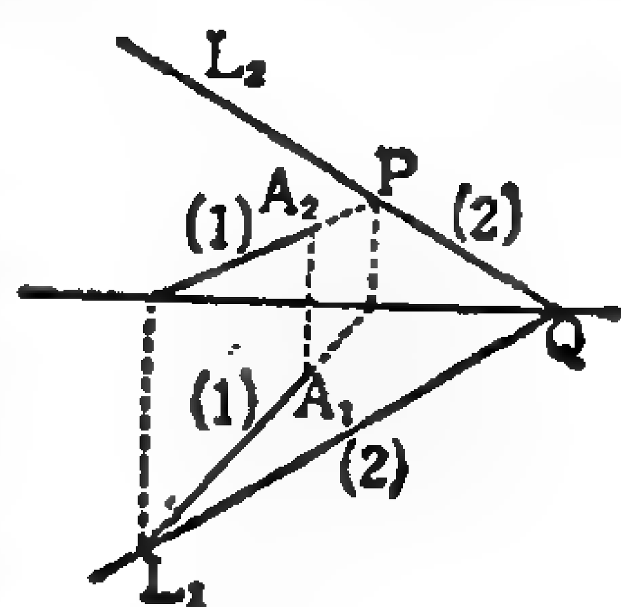
设已知平面在两投影面上的迹线分别为 Tt、Tt'，作距 GL 为定距离的平行线 $a'b'$，设它和 Tt' 的交点为 a'，再由 a' 求 a. 过 a 引 Tt 的平行线 ab，则 ab、$a'b'$ 就是所求直线在两投影面上的投影。

3379. 图上的点 A_1、A_2 分别是空间一点 A 的俯视图和主视图，L_1、L_2 分别为直线 l 和水平投影面、正面投影面的交点。



(1) 求连结 L_1A 直线的俯视图和主视图。

(2) 求 A 和 l 所决定的平面和水平投影面、正面投影面的交线，并说明其理由。

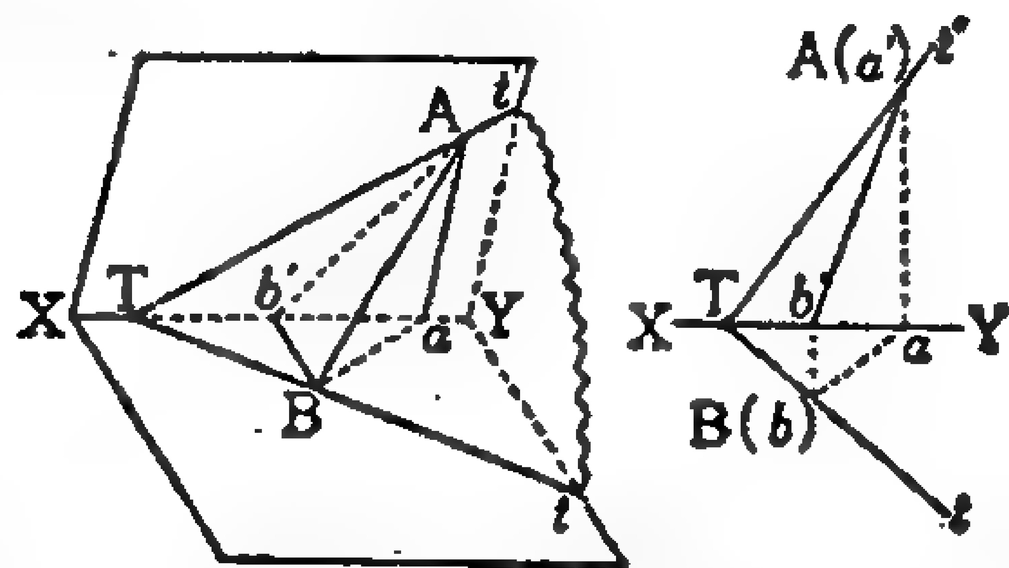


解　(1) 从 L_1 向基线引垂线，则连结该垂线足和 A_2 的直线就是所求的主视图。连结 L_1A_1 的直线就是所求的俯视图。

(2) 这里用 L_1、L_2、A 求已给平面和正面投影面的交线。先求连结 L_1A 的直线和正面投影面的交点 P，则连结 L_2P 的直线就是所求的交线（参照问题 3374）。

设连结 L_2P 的直线与基线相交于 Q，则直线 QL_1 就是已给平面和水平投影面的交线。

3380. 设平面 T 的水平迹线、垂直迹线分别为 Tt、Tt'，点 A、B 分别为 Tt'、Tt 上的点，试求线段 AB 的投影。

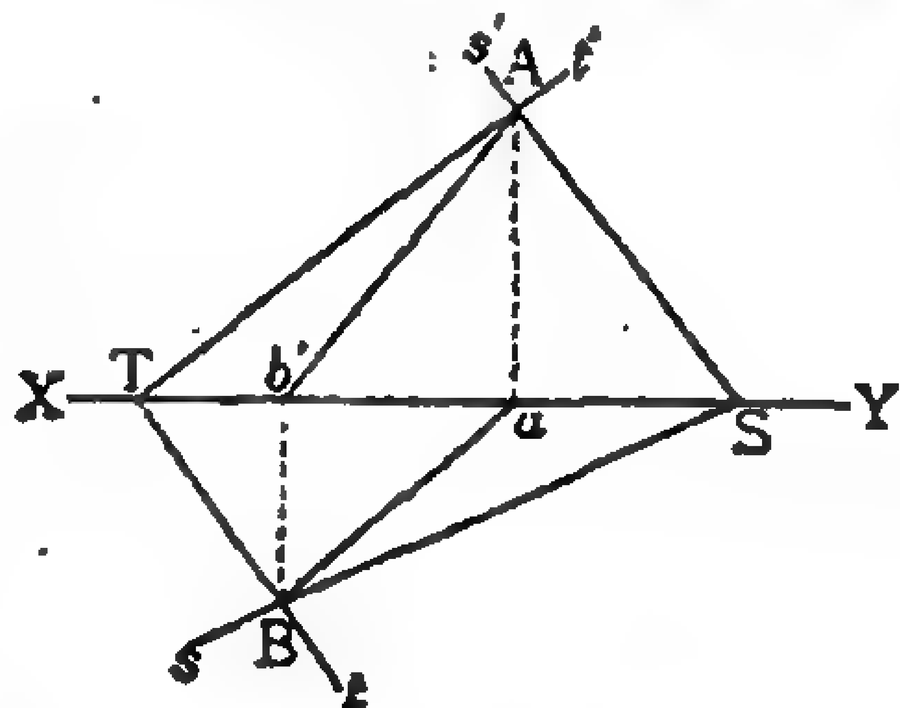


解　从 A 向基线所引垂线的垂线足 a 是点 A 的俯视图，所以 AB 的俯视图就是 aB（B 的俯视图 b 就是 B 自己）。

从 B 向基线所引垂线的垂线足 b'，是 B 的主视图，所以 AB 的主视图为 Ab'（A 的主

视图 a' 就是 A 自己)。

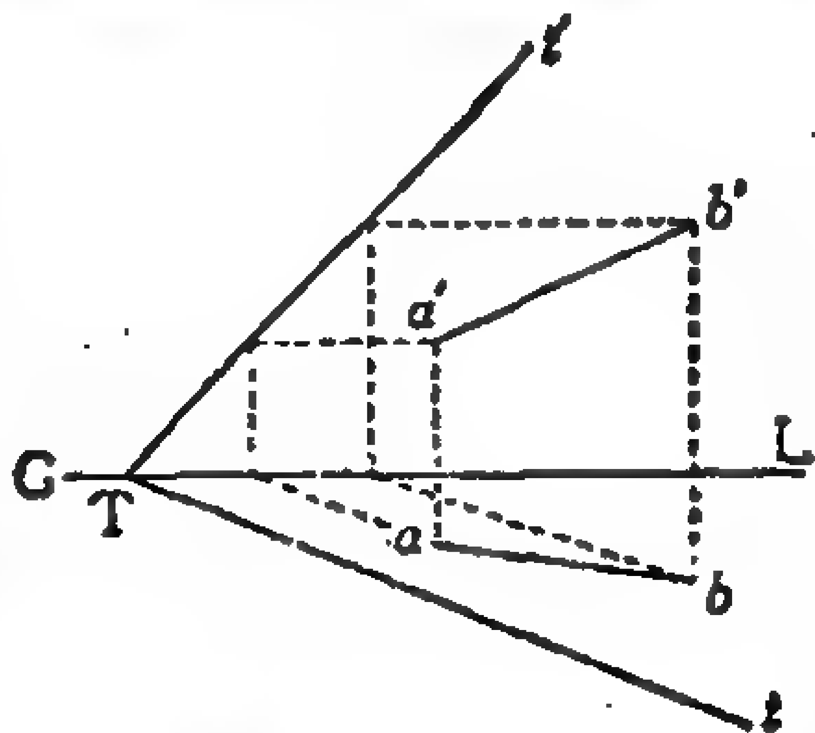
3381. 求已知两平面 T、S 的交线的投影。



解 设平面 T 的水平迹线、垂直迹线分别为 Tt、Tt'，平面 S 的水平迹线、垂直迹线分别为 Ss、Ss'，则 Tt' 和 Ss' 的交点 A 是这两个平面的公共点，所以点 A 也是这两个平面交线的垂直迹点。同样，Tt 和 Ss 的交点 B 是这两个平面交线的水平迹点。

求 AB 的投影。和上题一样，从 A、B 向基线引垂线，设其垂足分别为 a、b'，则 aB 就是已知两平面交线的俯视图，Ab' 就是该交线的主视图。

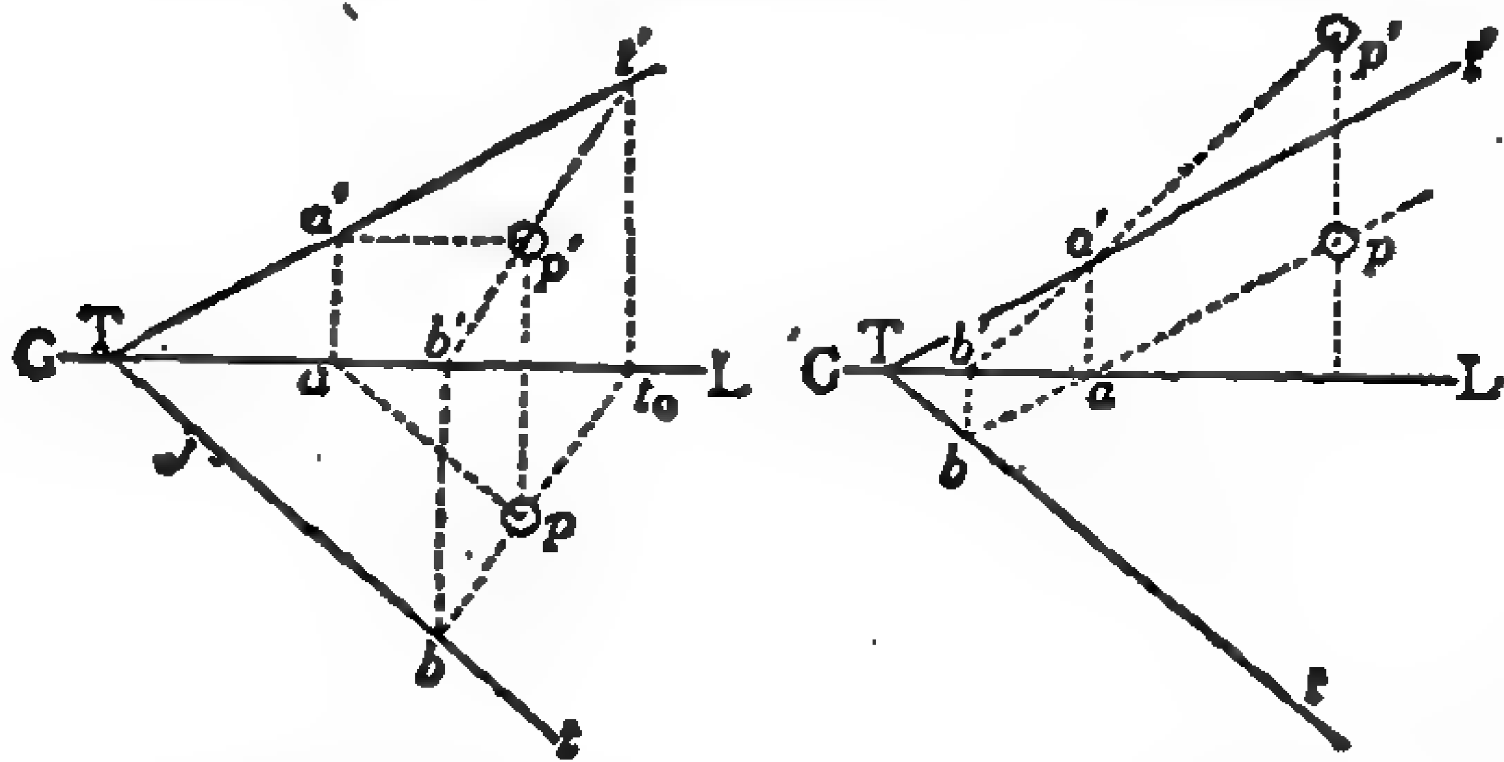
3382. 已知定平面上一直线的主视图，求作其俯视图。



解 设定平面的水平迹线、垂直迹线分别为 Tt、Tt'，该平面上的直线 AB 的主视图为 $a'b'$。应用问题 **3373** 的方法，求 a'、b' 的俯视图 a、b，则直线 ab 为 $a'b'$ 的俯视图。

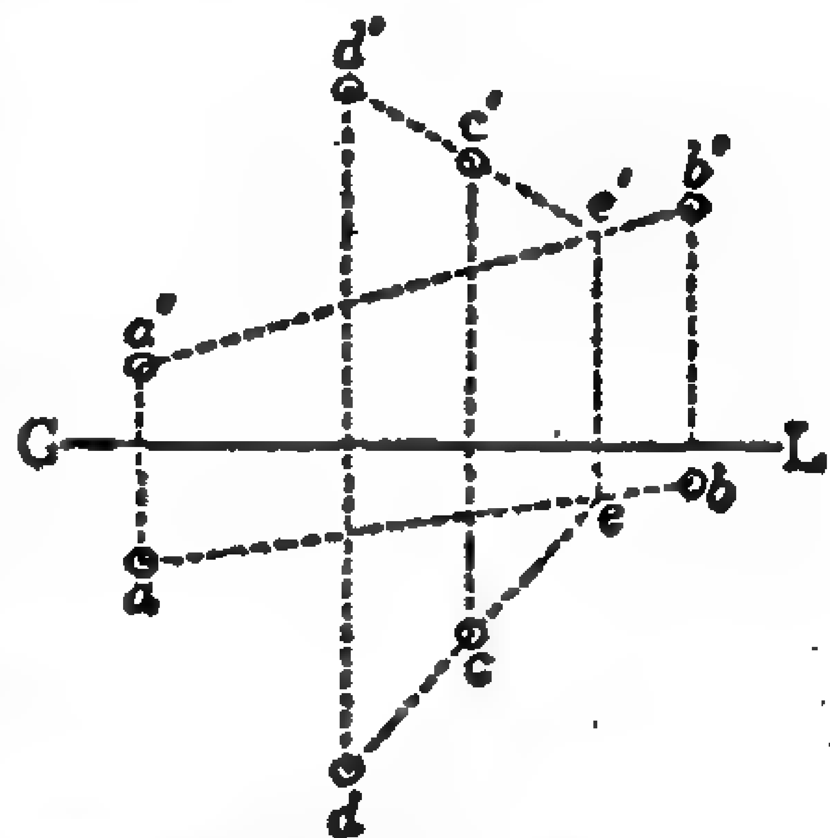
3383. 已知定平面上一定点的主视图，求作其俯视图。

解 在定平面上，过定点 P 作任一直线，设它在正面投影面上的投影为 $t'b'$，它的俯视图为 t_0b，则点 P 的俯视图 p 必在此直线上。



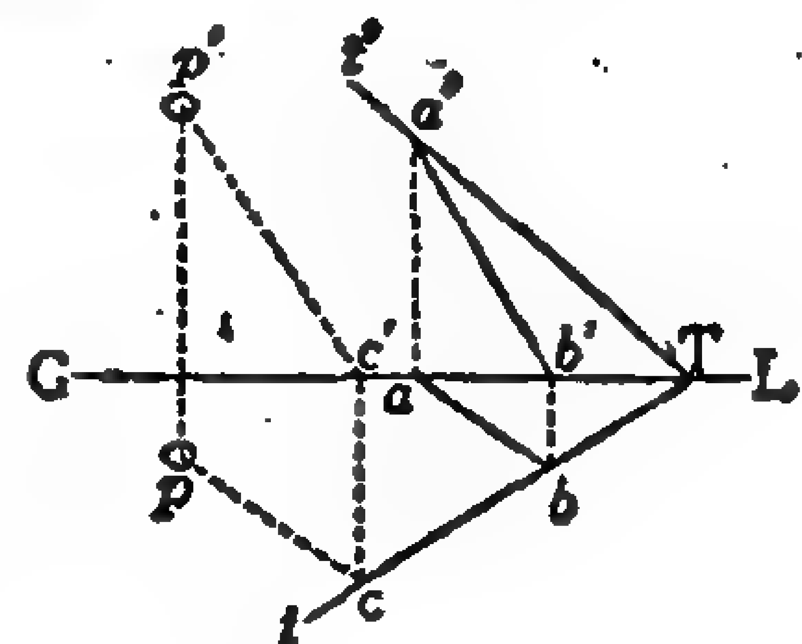
也可在定平面上，过 p' 作水平直线 PA，它的俯视图为 ap，在这条直线上可求出 p。如 P 在第二象限，和上面一样，可在定平面上过 P 作任意直线 $p'a'b'$，作与它对应的俯视图 ba，在其上可求出 p。

3384. 已知三个定点 A、B、C 的两个投影和一点 D 的主视图，D 和 A、B、C 在同一平面上，求 D 的俯视图。

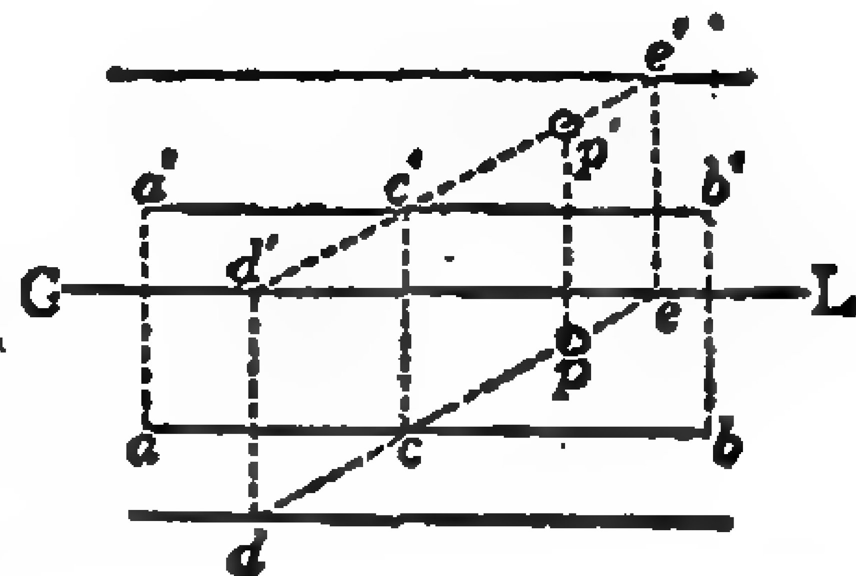


解 设连结 $a'b'$ 的直线和连结 $d'c'$ 的延长线相交于 e'，在俯视图 ab 上求 e，则在连结 ec 的直线上可求出俯视图 d。或者根据问题 **3376**，作含有 a、b、c 三点的平面，如 d' 在此平面上，则可和上题一样，求其俯视图。

3385. 已知一直线和该直线外的一点，求作含有该直线和点的平面。

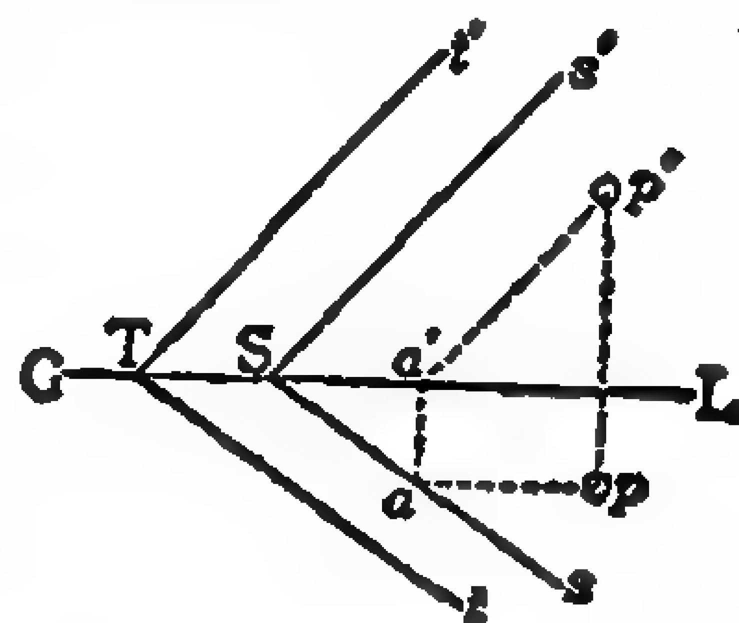


解 过已知点 P 作已知直线 AB 的平行线，求出其水平迹点 c，连结 cb (AB 的水平迹点)的直线 tT，就是所求平面的水平迹线。连结 Ta' (AB 的垂直迹点)的直线 Tt'，就是所求的垂直迹线。



如已知直线 AB 和基线平行，在 AB 上任取一点 C，连直线 PC。设 PC 的垂直迹点为 e'，水平迹点为 d，过 e'、d 分别作基线的平行线，就是所求平面的两迹线，这时所求平面平行于基线。

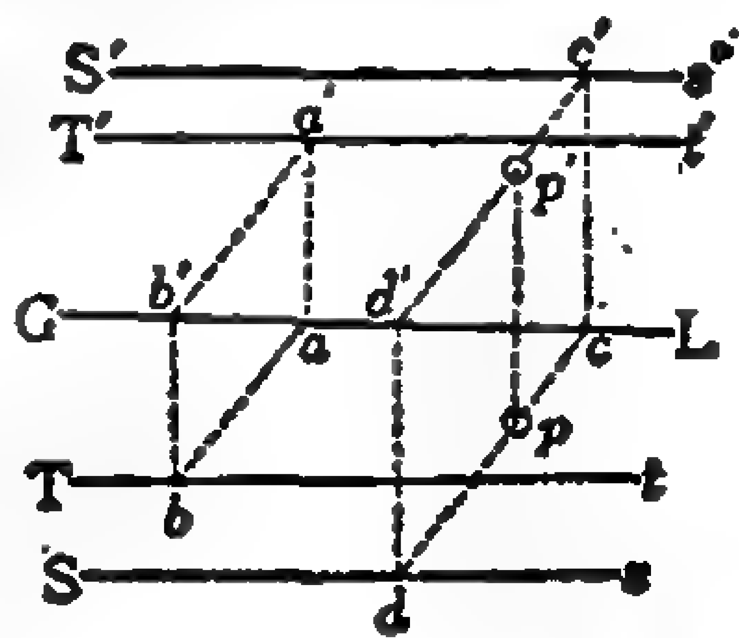
3386. 求作过定点 P 且与已知平面 T 平行的平面的两迹线。



解 过 p' 引 Tt' 的平行线 $p'a'$，则 $p'a'$ 与正面投影面平行，所以其俯视图 pa 平

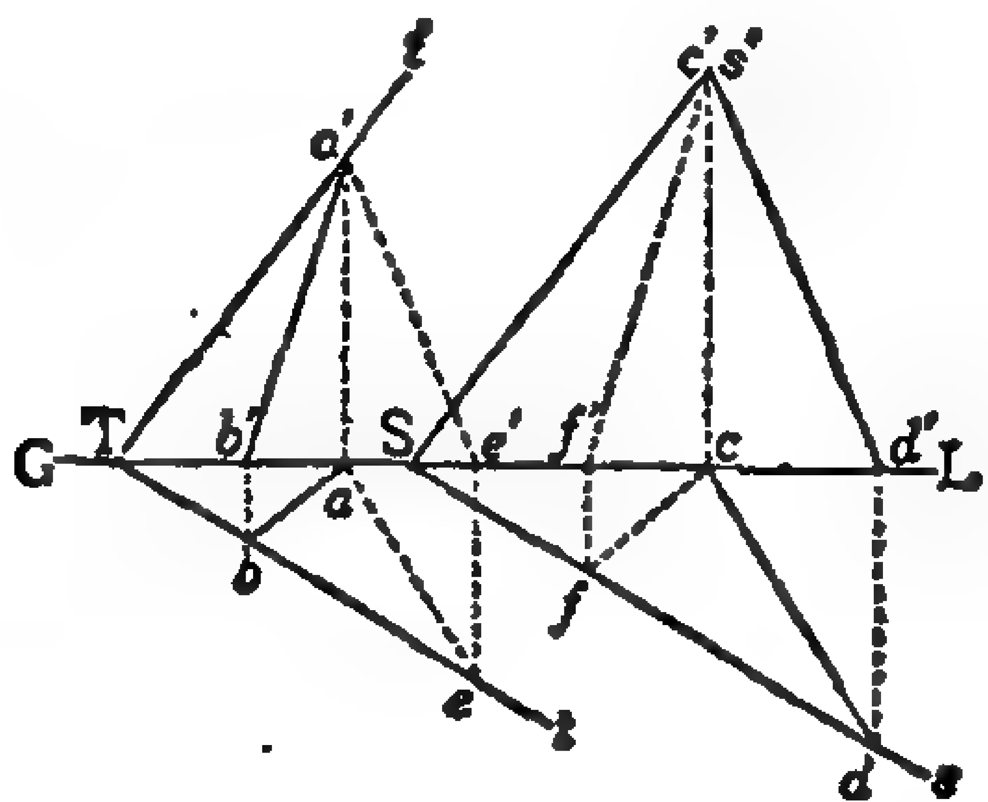
行于基线．因此，过 a 引 Ss 平行于 Tt，过 S 引 Ss' 平行于 Tt'，就是所求平面的迹线．

注　当平面 T 的两迹线平行于基线时，首先在平面 T 上引任意直线 AB，过 P 引直线 AB 的平行线 CD，设其垂直迹为 c'，水平迹为 d．过 c'、d 分别作与 $T't'$、Tt 的平行线，就是所求平面的迹线．



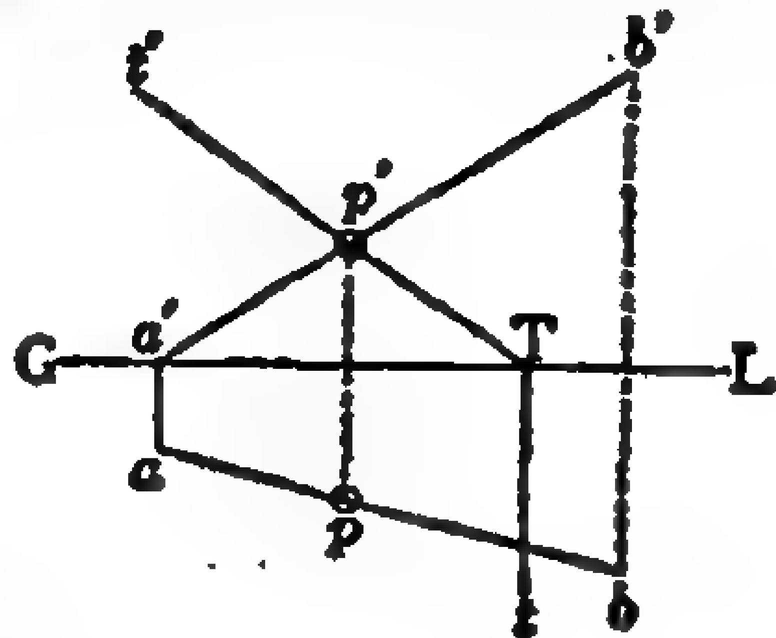
3387． 求作含有两直线 AB、CD 中的一条且与另一条平行的平面．

解　从点 A 引 CD 的平行线 AE，AE 的主视图为 $a'e'$，俯视图为 ae．如果连结 be 的直线作为 Tt，连结 Ta' 的直线作为 Tt'，则 Tt、Tt' 就是含有 AB 且与 CD 平行的平面的迹线．



同样，从 C 引 AB 的平行线，求其主视图 $c'f'$，俯视图 cf．连结 df 作为 Ss，连结 Sc' 作为 Ss'，则 Ss、Ss' 就是含有 CD 且与 AB 平行的平面的迹线．

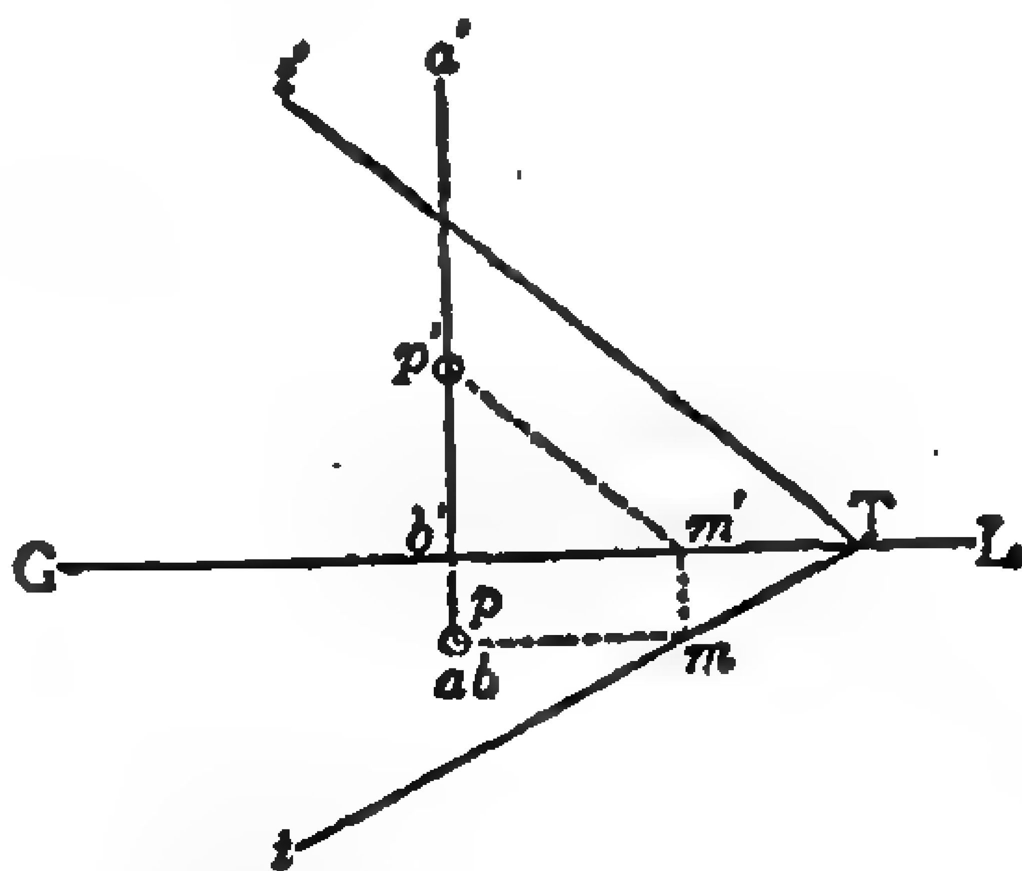
3388． 求已知平面和定直线的交点．



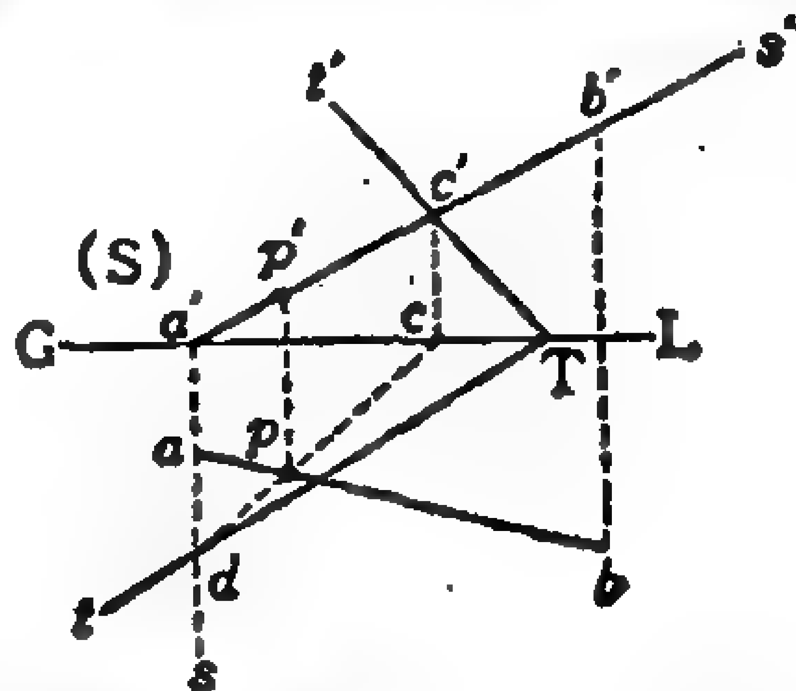
解　(i) 如果已知平面垂直于正面投影面，则 Tt' 和 $a'b'$ 的交点 p' 就是两者交点的主视图，p 是其俯视图．

(ii) 如果已知直线垂直于水平投影面，则其交点 p 的俯视图和 ab 都是点 p．由于 p 是 T 平面上的一点，根据问题 **3373**，就可求出其主视图 p'．

(iii) 如果已知直线和平面都倾斜于两个

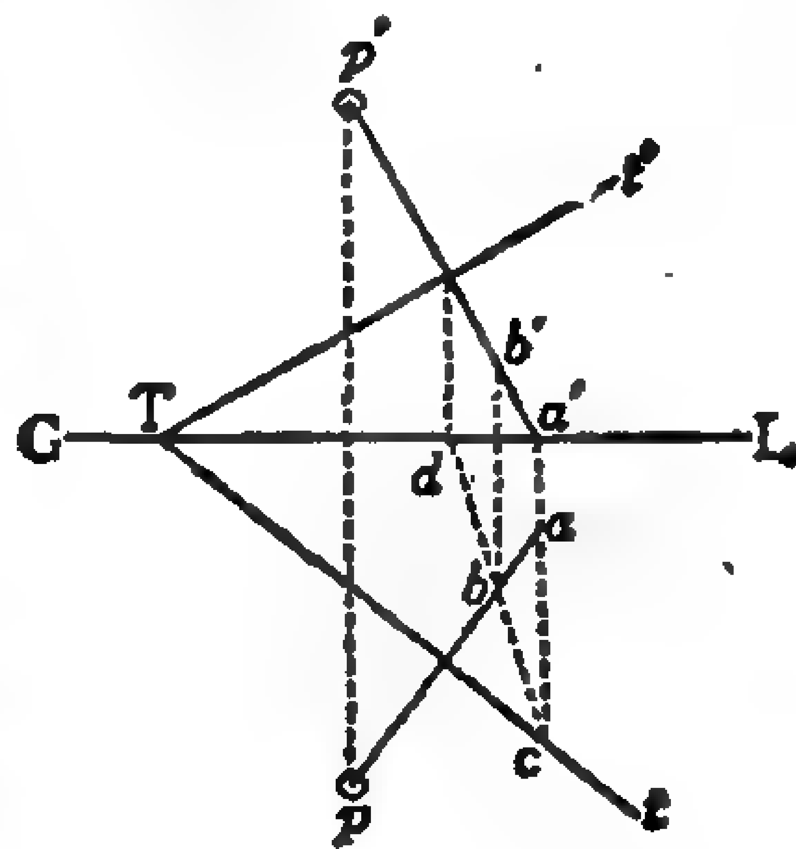


投影面，可先作包含直线 AB 且与正面投影面垂直的平面 S，再作平面 S 和 T 的交线 CD．然后求 $a'b'$ 和 Tt' 的交点 c'，$a'a$ 的延长线和 Tt 的交点 d，则 c'、d 就是交线 CD 的两迹．因为 CD、AB 都在平面 S 上，它们的交点 P 就是所求的点．因此，求 cd 和 ab 的交点 p，再由 p 就可求得 p'．



3389． 过定点 P 作定平面 T 的垂线．

解　从 p' 向 Tt' 引垂线 $p'a'$，从 p 向 Tt 引垂线 pa，则 PA 垂直于平面 T．其理由是如下．



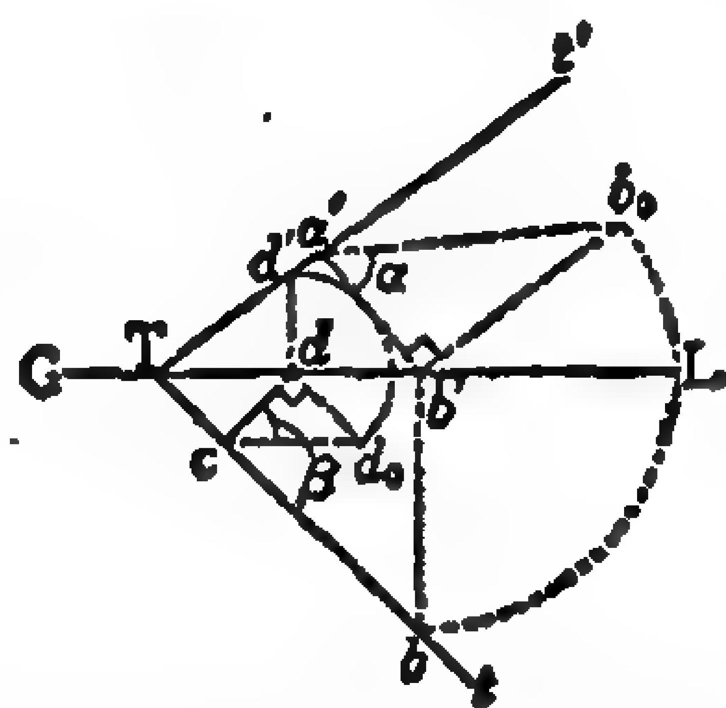
设过点 P 且与平面 T 上的直线 Tt 垂直的平面为 S，则 S 垂直于平面 T．又因 S 垂直于水平投影面上的 Tt，所以 S 也垂直于水平投影面．从而 S 的水平迹线为过 p 且与 Tt 垂直的直线 pa．故从点 P 向平面 T 所作垂线的足 B 的平面投影 b 必在直线 pa 上．

同样，设过点 P 且与 Tt' 垂直的平面为 S'，则 S' 的垂直迹线为过 p' 且与 Tt' 垂直的直线 $p'a'$．又 S' 垂直于正面投影面，所以 B 的垂直面投影 b' 必在直线 $p'a'$ 上．

因此，作 S' 和 T 交线的水平面投影 cd 和 pa 的交点 b，就是点 B 的水平面投影．与 b 对应的 b' 就是点 B 的垂直面投影．

3390． 求已知平面和两个投影面的夹角．

解 作已知平面T的垂直迹线Tt'。再作和正面投影面垂直的平面$a'b'b$，和平面T交于$a'b'$，则$b'b$和正面投影面的夹角α，就是T和正面投影面的夹角。



为求α，如图，作$a'b'$为底，bb'为垂线的直角三角形，则其斜边$a'b_0$即为交线的实长，α为AB和正面投影面所成的实角。

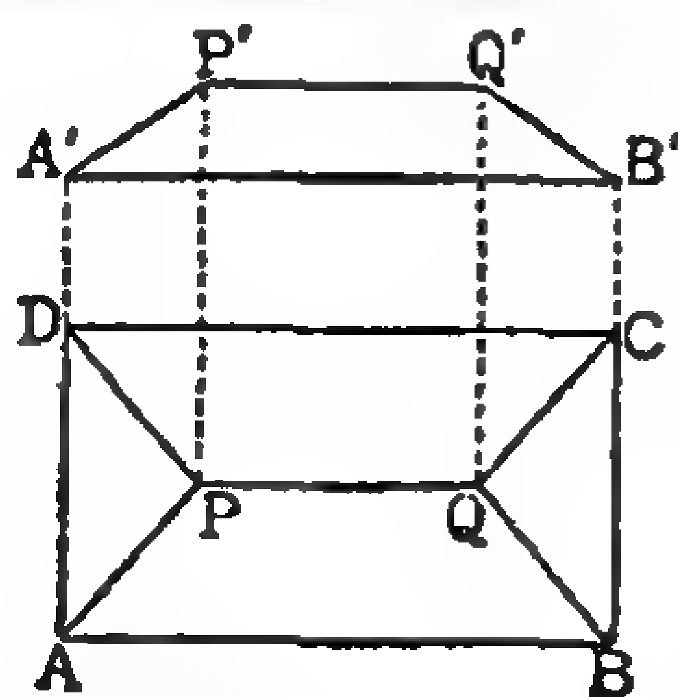
要求T和水平投影面的夹角β，和上面一样，作与Tt及水平投影面垂直的平面cdd'，就可求出β。

3391. 已知一屋顶的俯视图和主视图．在主视图中

$A'B' \parallel P'Q'$,

$A'B'=l$,

$\angle P'A'B'=\angle Q'B'A'=30°$.



在俯视图中，$ABCD$是矩形，$AD=a$,

$\angle DPA=\angle CQB=90°$,

$\angle PDA=\angle QCB=45°$.

求该屋顶的实际面积．

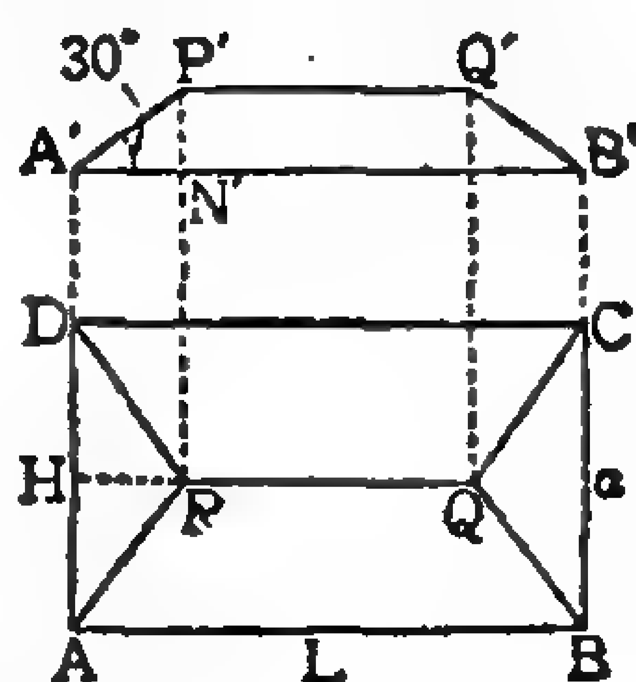
解 从P引AD的垂线PH，H为其垂足，则

$$PH=\frac{a}{2},\quad P'N'=\frac{a}{2}\operatorname{tg}30°=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

所以梯形$ABQP$的倾斜度$=\frac{P'N'}{AH}$

$$=\frac{a}{2\sqrt{3}}\div\frac{a}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}},$$



即梯形部分的倾斜角为30°．

又梯形$ABQP$的高为

$$\frac{a}{2}\sec 30°=\frac{a}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

故屋顶梯形部分的面积为

$$\frac{1}{2}\times\frac{a}{\sqrt{3}}(l+l-a)=\frac{a}{2\sqrt{3}}(2l-a).$$

又 $A'P'=\frac{a}{2}\sec 30°=\frac{a}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$,

故屋顶三角形部分的面积为

$$\frac{1}{2}\times a\times\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a^2}{2\sqrt{3}}.$$

因此，所求屋顶的总面积为

$$2\left[\frac{a}{2\sqrt{3}}(2l-a)+\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\right]$$

$$=\frac{2al}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}al}{3}.$$

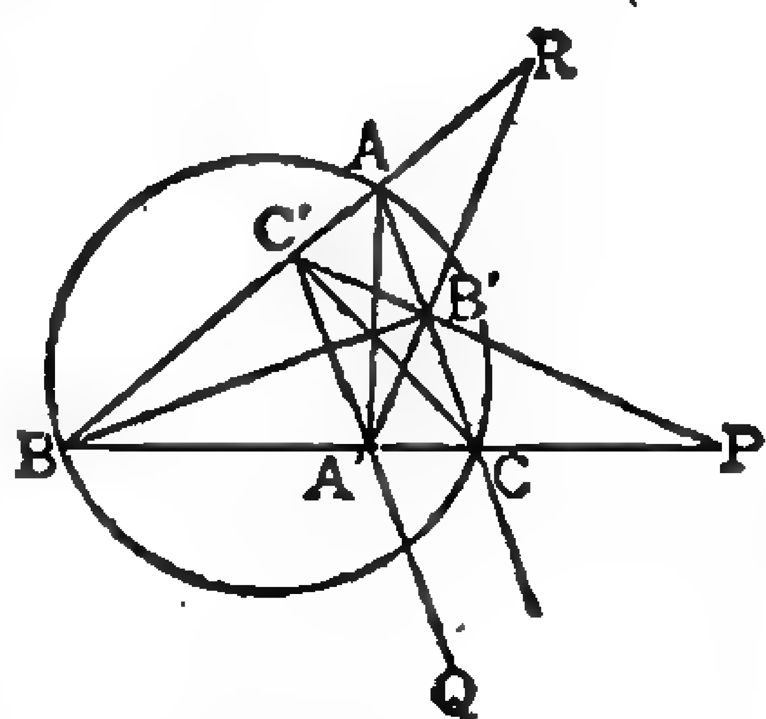
第七编　近世几何问题

1. 根轴

3392. 若从 $\triangle ABC$ 的各顶点向对边作垂线 AA'、BB'、CC'，则 BC 与 $B'C'$，AC 与 $A'C'$，AB 与 $A'B'$ 的三个交点 P、Q、R 在一条直线上。

解 由于 $ABA'B'$ 是圆内接四边形，所以

$$RA\cdot RB=RA'\cdot RB'.$$

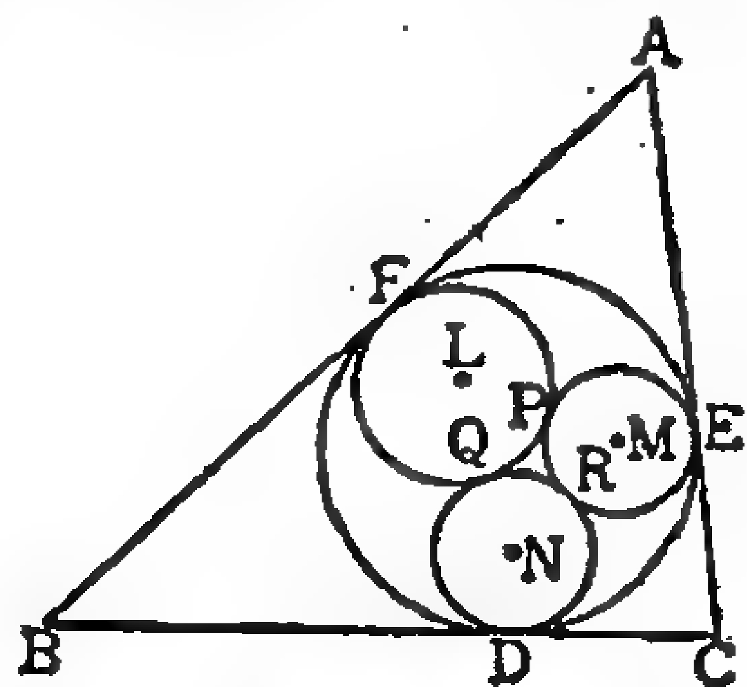


又因 $RA\cdot RB$ 是点 R 关于圆 ABC 的圆幂，$RA'\cdot RB'$ 是点 R 关于圆 $A'B'C'$ 的圆幂。因此点 R 关于两个圆 ABC、$A'B'C'$ 的圆幂相等。由此知 R 是在这两个圆的根轴上(问题 1835)。

同样理由，P、Q 也都在两圆 ABC、$A'B'C'$ 的根轴上。所以点 P、Q、R 是在一条直线上。

注(定义)根轴　由一点向两圆所作的切线，其长相等的这种点的轨迹叫做两圆的根轴。

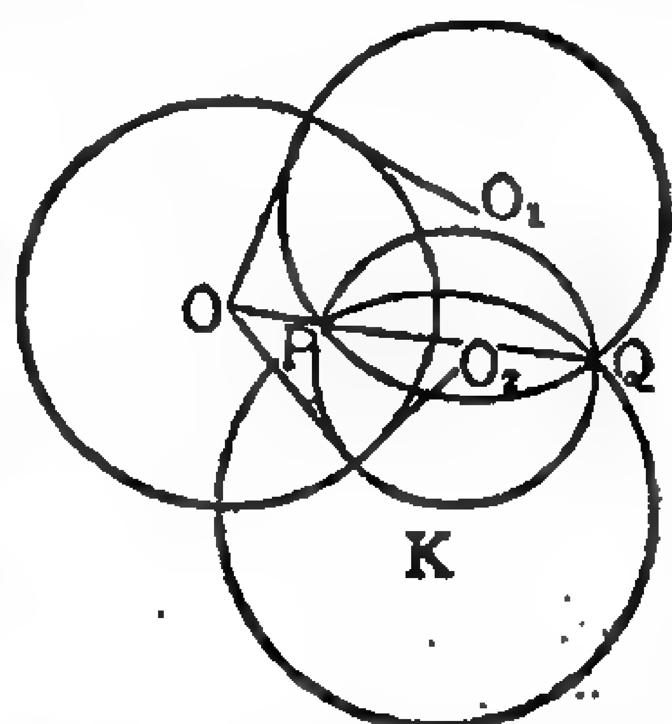
3393. 若一圆内切于 $\triangle ABC$，在各边的切点上，分别作与边相切且彼此互切的三个圆 L、M、N，其互切点分别为 P、Q、R，则 AP、BQ、CR 三线共点。



解 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC、CA、AB 的切点分别为 D、E、F，由 $AE=AF$ 知 A 是两圆 L、M 根轴上的点，从而 AP 是两圆 L、M 的根轴。因此直线 AP 是过三个圆 L、M、N 的根心。

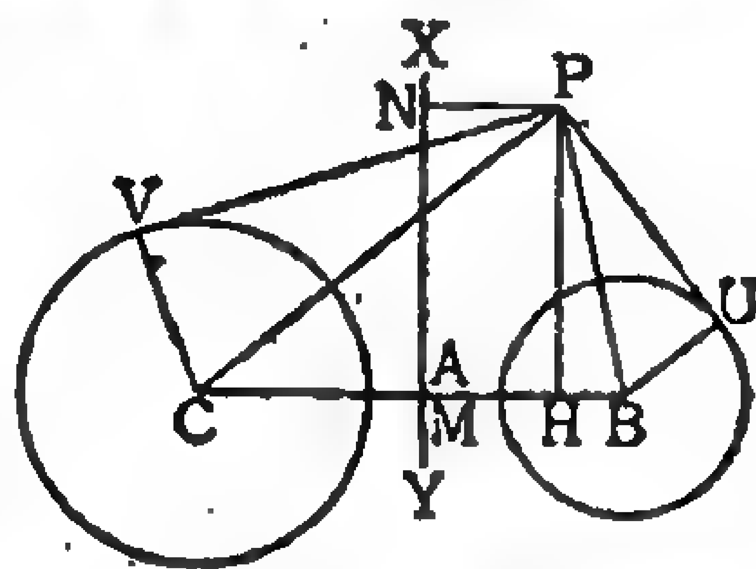
BQ、CR 也同样过三个圆的根心，所以三条直线 AP、BQ、CR 相交于根心。

3394. 设定圆 O 垂直相交于两圆 O_1、O_2，则过两圆 O_1、O_2 的交点 P、Q 的任意圆 K 也与圆 O 垂直相交。



解 三个圆 O_1、O_2、K 是共轴圆，其根轴为 PQ。再设圆 O 的半径为 r，圆心为 O_1。由于圆心 O 关于两圆 O_1、O_2 的圆幂都等于 r^2，从而圆心 O 在两圆的根轴 PQ 上。因此圆心 O 关于与两圆 O_1、O_2 的共轴圆 K 的圆幂也等于 r^2，即圆 O 与圆 K 垂直相交。

3395. 设 P 为任意点，从 P 向两圆 B、C 作两条切线 PU、PV，又从 P 向两圆的根轴 XY 作垂线 PN，则 PU、PV 的平方差等于连心线 BC 与 PN 之积的两倍。



解 设圆 B、C 的半径分别为 r，r'，则

$PV^2=PC^2-CV^2$，$PU^2=PB^2-BU^2$，

$$\begin{aligned}\therefore\ PV^2-PU^2&=(PC^2-PB^2)+BU^2-CV^2\\&=(PC^2-PB^2)+r^2-r'^2.\quad ①\end{aligned}$$

由 P 向 BC 作垂线 PH，M 为 BC 的中点，由问题 894 知

$$PC^2-PB^2=2BC\cdot MH.\quad ②$$

又因为 BC、XY 的交点 A 是两圆根轴 XY 上的点，有

$$AB^2-r^2=AC^2-r'^2.$$

$$\begin{aligned}\therefore\ r^2-r'^2&=AB^2-AC^2\\&=(AB+AC)(AB-AC)\\&=-BC\cdot 2AM.\quad ③\end{aligned}$$

由①、②、③有

$$\begin{aligned}PV^2-PU^2&=2BC\cdot MH-2BC\cdot AM\\&=2BC(MH-AM)\\&=2BC\cdot HA=2BC\cdot PN.\end{aligned}$$

3396. 由圆周 B 上任一点 P 向另一圆 C 作切线 PV，设两圆 B、C 的根轴为 XY，由

P 向 XY 作垂线 PN，则有 $PV^2=2BC\cdot PN$。

解 在上题中 $PU=0$，由上题的结果 $PV^2-PU^2=2BC\cdot PN$ 有

$PV^2=2BC\cdot PN$。

3397. 过定点 A 作动圆与定圆 B 垂直相交，若其交点为 P、Q，则 $\frac{AP\cdot AQ}{PQ}$ 是定值。

解 设 C 为动圆的圆心，作 AN 垂直 PQ，设 AK 为圆 B 的切线，BC、PQ 的交点为 M，则根据问题 **1318** 有

$$AP\cdot AQ=2CP\cdot AN.$$

又因 PQ 为两圆的根轴，应用上题的结果，有 $AK^2=2BC\cdot AN$。

$$\therefore\quad AP\cdot AQ=\frac{CP}{BC}\cdot AK^2$$

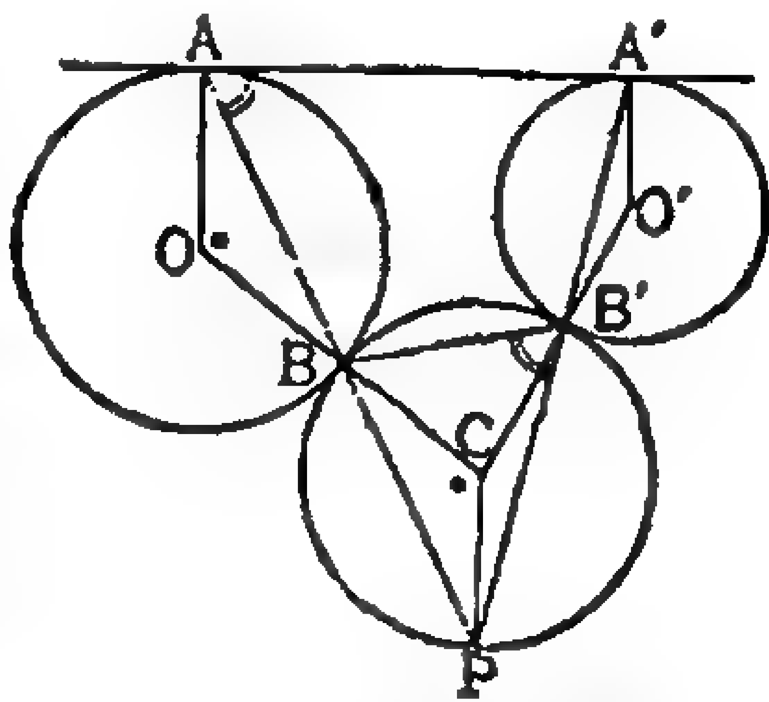
$$=\frac{PM}{PB}\cdot AK^2(\because \angle CPB=\angle R)$$

$$=\frac{PQ}{2PB}\cdot AK^2=\frac{AK^2}{2PB}\cdot PQ.$$

$$\therefore\quad \frac{AP\cdot AQ}{PQ}=\frac{AK^2}{2PB}.$$

但因 $\frac{AK^2}{2PB}$ 是定值，所以 $\frac{AP\cdot AQ}{PQ}$ 也是定值。

3398. 设两圆 O、O' 的外公切线为 AA'，A、A' 为其切点，作两圆的任意外切圆 C，圆 C 与圆 O 的切点为 B，与圆 O' 的切点为 B'，延长 AB 与圆 C 交于 P，证明点 P 在两圆 O、O' 的根轴上。



解 因为 AA' 是过点 A 的圆 O 的切线，有

$$\angle A'AB=\frac{1}{2}\angle AOB. \qquad ①$$

又在圆 $BB'P$ 上，连结 BB'，则

$$\angle BB'P=\frac{1}{2}\angle BCP. \qquad ②$$

由于 $\triangle AOB\backsim\triangle BCP$ 有

$$\angle AOB=\angle BCP.$$

由①、②有

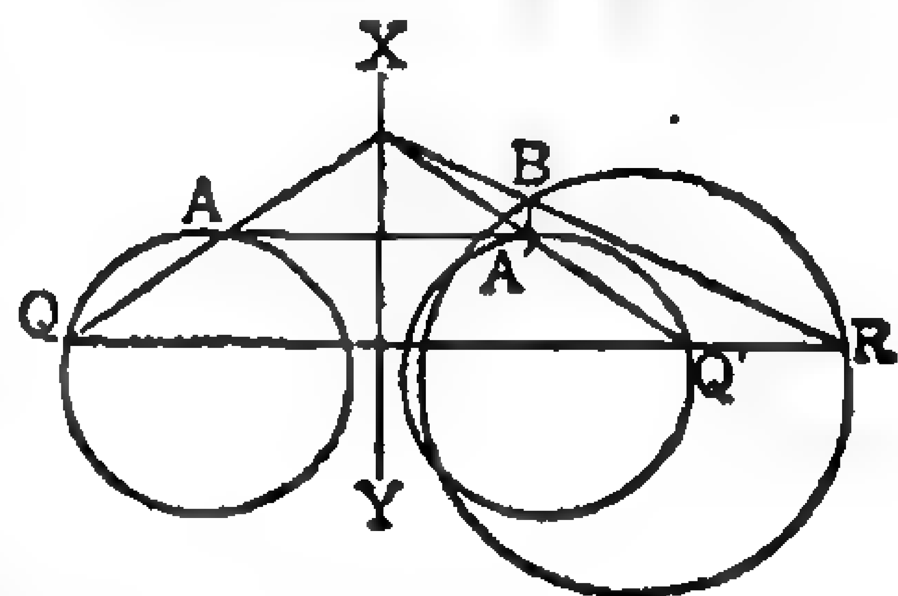
$$\angle A'AB=\angle BB'P.$$

由此可知 A、B、B'、A' 共圆。

$$\therefore\quad PA\cdot PB=PA'\cdot PB',$$

因此点 P 在两圆的根轴上。

3399. 设 A、B 分别是两定圆周上的定点，在两圆的根轴 XY 上求点 P，使 PA、PB 与两圆的另一交点分别为 Q、R，那么直线 QR 垂直于 XY。



解 设已求得点 P，作圆 AQ 关于 XY 的对称圆 $A'Q'$。设 A、Q 的对应点为 A'、Q'，由于 $QR\perp XY$，所以 Q' 在 QR 上，而 $AA'\parallel QQ'$，由此

$$\angle PAA'=\angle PQQ'=\angle PQ'Q.$$

因为 P 为两圆根轴上的点，有

$$PB\cdot PR=PA\cdot PQ=PA'\cdot PQ'.$$

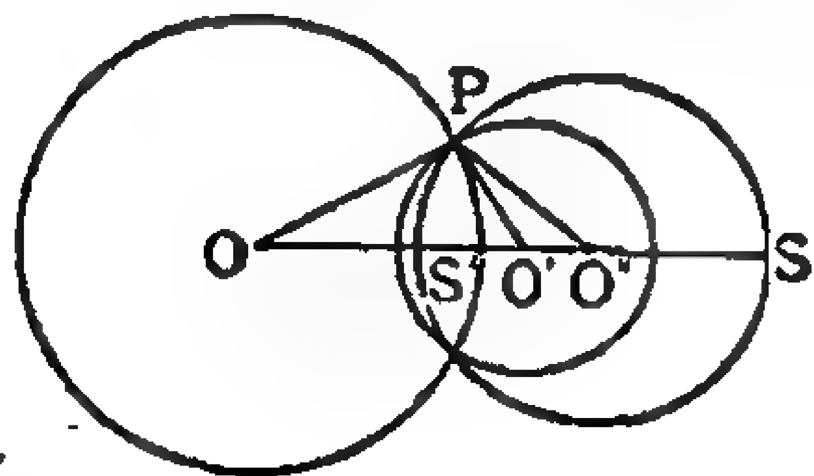
从而 A'、Q'、R、B 在同一圆周上。

$$\therefore\quad \angle A'BR=\angle PQ'Q,$$

$$\therefore\quad \angle A'BR=\angle PAA'.$$

故 P 在过 A、A'、B 的圆周上。因为这三点都是已知的，所以点 P 的位置就可确定。

3400. 设两定圆 O、O' 的外公切线为 UV（圆 O 的切点为 U，圆 O' 的切点为 V），两圆的相似外心为 S，相似内心为 S'，则以 SS' 为直径的圆 O'' 与两圆 O、O' 共轴。

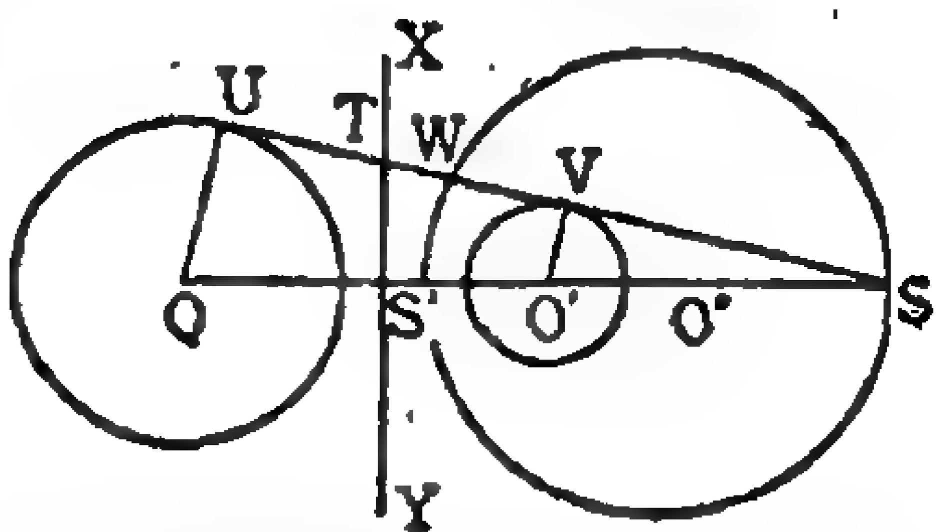


解 设两圆 O、O' 的半径为 r、r'，圆 O'' 是两圆 O、O' 的阿波罗尼斯圆。如果圆 O'' 与圆 O 相交，其交点为 P，那么

$$PO:PO'=r:r'.$$

又因 $PO=r$，所以 $PO'=r'$，于是 P 是两圆 O、O' 的交点，因而圆 O'' 是与两圆 O、O' 共轴（如果由 P 向 SS' 作垂线 PH，则两圆 O、O' 的根轴是 PH，而两圆 O、O'' 的根轴也是 PH，两圆 O'、O'' 的根轴也是 PH）。如果两

圆 O、O' 不相交时，那么两圆的外公切线 UV 过点 S，点 O、S'、O'、S 在一条直线上。又设 UV 与圆 O'' 的交点为 W，则由 OU、$S'W$、$O'V$ 都垂直于 UV，而互相平行，所以 U、W、V、S 是调和点列。若两圆 O、O' 的根轴 XY 与 UV 的交点为 T，则由 T 是 UV 的中点，有 $TU^2=TW\cdot TS$，且因 O、O'、O'' 在垂直于 XY 的直线上，所以圆 O'' 是和两圆 O、O' 共轴。

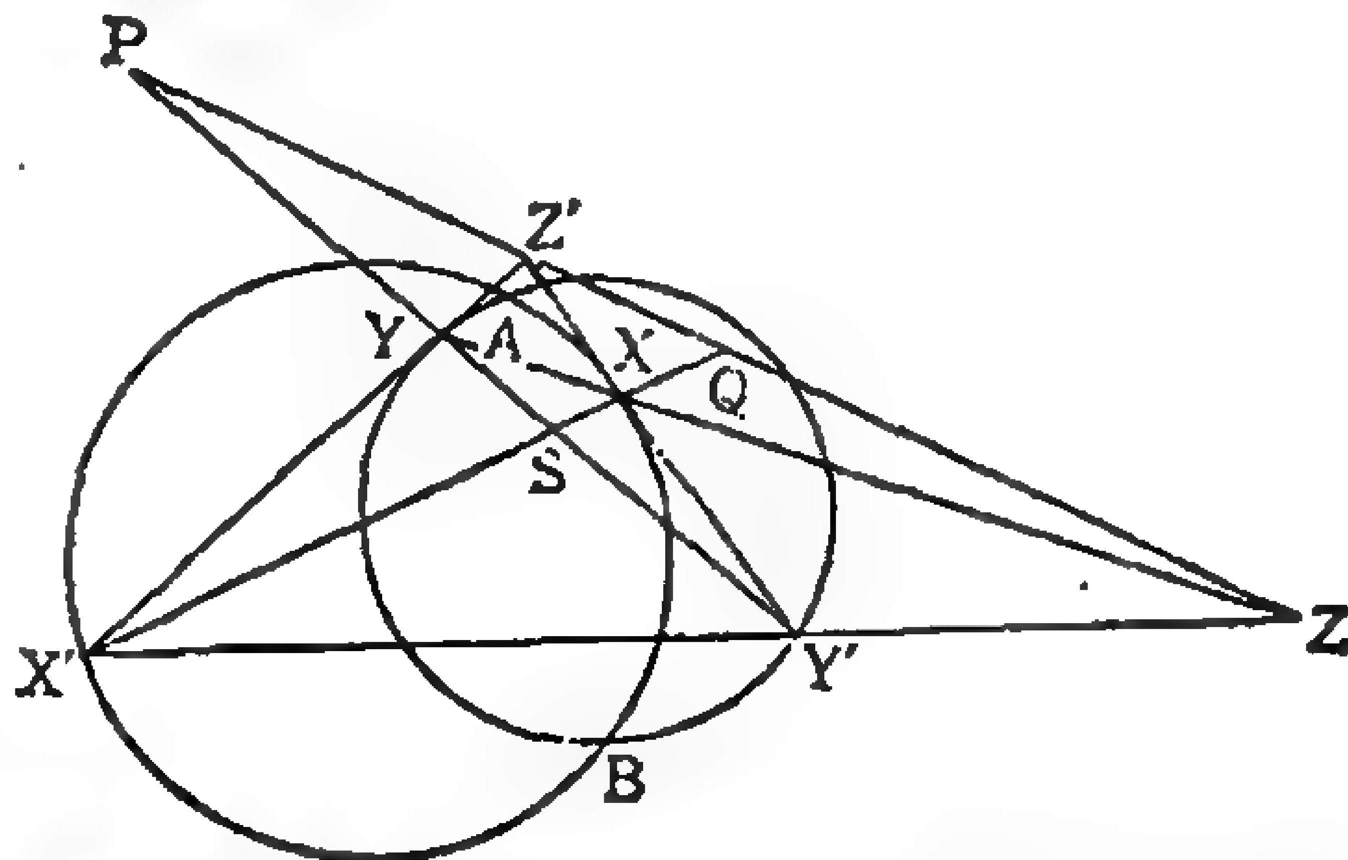


2. 调和点列、调和线束

3401. 已知四条射线组成的线束，与一条横截线的交点组成调和点列时，则不论横截线位置如何，其交点仍是调和点列。

解　设 A、B、C、D 是调和点列，则

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}. \quad ①$$



过点 C 作 OA 的平行线，与 OB、OD 的交点分别为 E、F，则

$$\frac{AB}{BC}=\frac{OA}{EC}, \quad ②$$

$$\frac{AD}{CD}=\frac{OA}{CF}. \quad ③$$

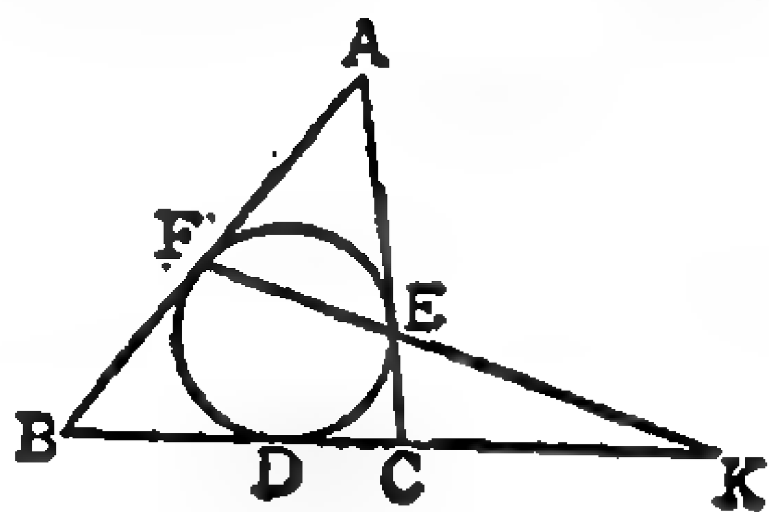
由①、②、③有

$$EC=CF. \quad ④$$

因此过 OC 上任意一点 C' 作任意截线 $A'B'C'D'$，过 C' 引 OA 的平行线与 OB、OD 的交点为 E'、F'，由④有 $E'C'=C'F'$。

$$\therefore\ \frac{OA'}{E'C'}=\frac{OA'}{C'F'},\ 故\ \frac{A'B'}{B'C'}=\frac{A'D'}{C'D'}.$$

3402. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆在三边 BC、CA、AB 上的切点为 D、E、F，连结 F、E 的直线与 BC 的延长线交于 K，则 B、D、C、K 是调和点列。



解　设 $\triangle ABC$ 的内切圆在三边 BC、CA、AB 上的切点分别为 D、E、F，延长 FE 与 BC 的延长线交于 K，根据美奈劳斯定理，有

$$\frac{FA}{FB}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{KB}{KC}=1. \quad ①$$

但由于 $BF=BD$，$AF=AE$，$CD=CE$，根据①有

$$\frac{EA}{BD}\cdot\frac{DC}{EA}\cdot\frac{KB}{KC}=1,\quad \therefore\quad \frac{DC}{BD}=\frac{KC}{KB},$$

从而
$$\frac{BD}{DC}=\frac{BK}{CK}.$$

因此 B、D、C、K 是调和点列。

注　如把本题中的内切圆改用旁切圆时，则定理仍然成立。

3403. 已知相交于 A、B 的两圆，XX'、YY' 是两圆的任意直径，又 XY、$X'Y'$ 的交点为 Z，XY'、$X'Y$ 的交点为 Z'，则以 ZZ' 为直径的圆过 A、B 两点。

解　设连结 ZZ' 的直线与 YY'、XX' 的交点分别为 P、Q，XX' 与 YY' 的交点为 S。在完全四边形 $XYX'Y'$ 中，由于 (X', S, X, Q) 是调和点列，$\angle X'BX=\angle R$，所以 BX、BX' 分别是 $\angle QBS$ 及其外角的平分线。由此得

$$\frac{QX}{XS}=\frac{BQ}{BS}. \quad ①$$

又因 (P, Y, S, Y') 是调和点列，$\angle YBY'=\angle R$，所以 BY、BY' 分别是 $\angle PBS$ 及其外角的平分线，由此得

$$\frac{YS}{YP}=\frac{BS}{BP}. \quad ②$$

根据①、②，

$$\frac{BQ}{BS}\cdot\frac{BS}{BP}=\frac{QX}{XS}\cdot\frac{YS}{YP},$$

$$\therefore\ \frac{BQ}{BP}=\frac{QX}{XS}\cdot\frac{YS}{YP}. \quad ③$$

对 $\triangle PQS$ 及其截线 YXZ，应用美奈劳斯定理得

$$\frac{QX}{XS}\cdot\frac{YS}{YP}\cdot\frac{PZ}{ZQ}=1,$$

$$\therefore\ \frac{QX}{XS}\cdot\frac{YS}{YP}=\frac{ZQ}{ZP}. \quad ④$$

由③、④有

$$\frac{BQ}{BP}=\frac{ZQ}{ZP}. \quad ⑤$$

又因 $(P,\ Z',\ Q,\ Z)$ 是调和点列，所以

$$\frac{ZQ}{ZP}=\frac{Z'Q}{Z'P}. \quad ⑥$$

根据⑤、⑥，

$$\frac{BQ}{BP}=\frac{ZQ}{ZP}=\frac{Z'Q}{Z'P}.$$

所以 BZ'、BZ 是 $\angle QBP$ 及其外角的平分线，

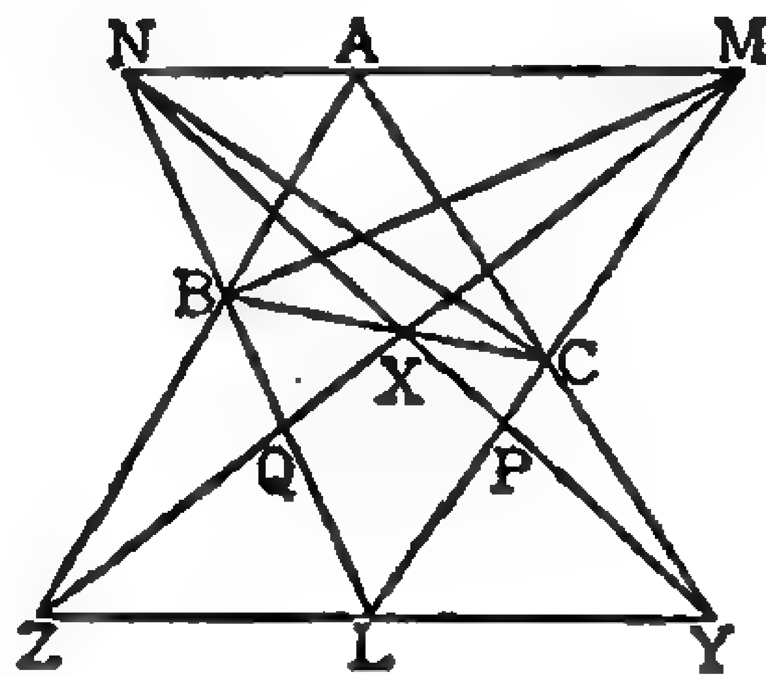
$$\therefore\ \angle Z'BZ=\angle R. \quad ⑦$$

由此知以 ZZ' 为直径的圆过点 B。

同理，$\qquad \angle ZAZ'=\angle R \quad ⑧$

亦可证得 ZZ' 为直径的圆过点 A。

3404. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 内的旁心分别为 L、M、N，在 BC 上取点 X，延长 MX、NX 与边 AB、AC 的延长线分别交于 Z、Y，则 Z、L、Y 在一直线上。



解 设 NY、MZ 与 LM、LN 的交点分别为 P、Q，则 BM、BN 是 $\angle ABC$ 及其外角的平分线，于是知 $(Z,\ X,\ Q,\ M)$ 是调和点列。同理 $(Y,\ X,\ P,\ N)$ 也是调和点列。又因为调和线束 $L(Z,\ X,\ Q,\ M)$ 与 $L(Y,\ X,\ P,\ N)$ 公共三条射线，所以

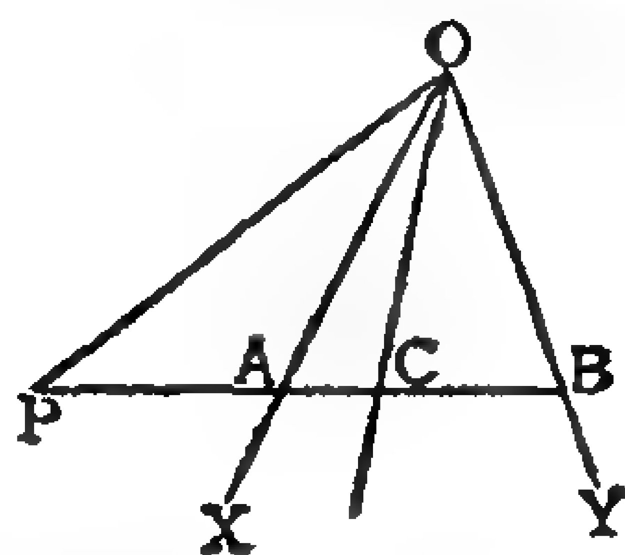
$$L(Y,\ X,\ P,\ N)=L(Z,\ X,\ Q,\ M).$$

从而第四条射线 LZ、LY 也是共同的，即 $\triangle XYZ$ 的边 YZ 过旁心 L。

3. 极、极直线

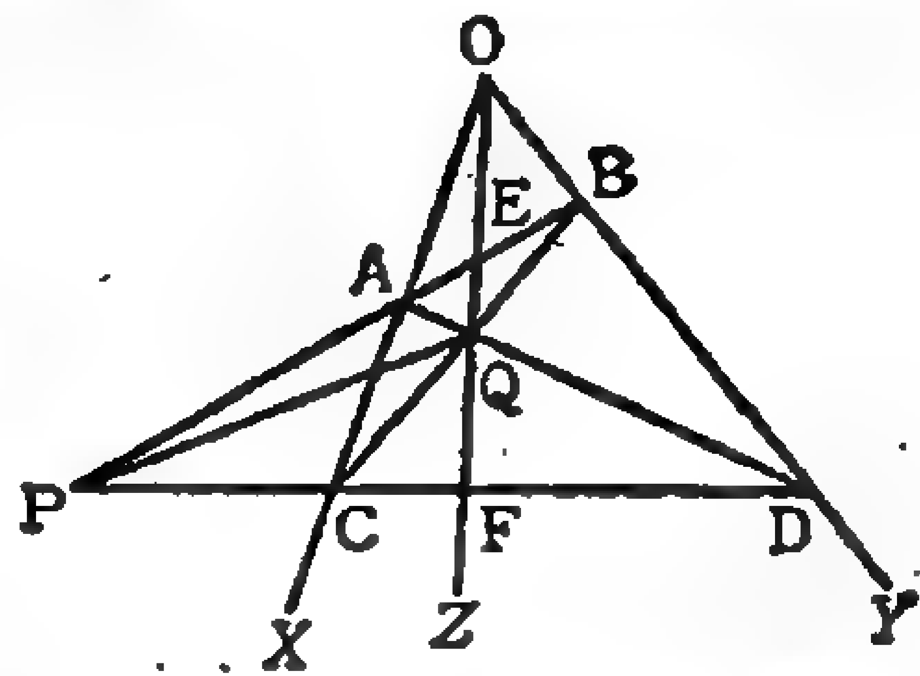
3405. 过定点 P 作直线，与两条定直线 OX、OY 的交点为 A、B，求点 P 关于 AB 的调和共轭点 C 的轨迹。

解 连结 OP、OC，由于 P、A、C、B 是调和点列，所以 OP、OA、OC、OB 是调和线束。因此过 P 的任意直线截这四条直线的交点都是调和分割点（问题 **3401**）。所以点 C 的轨迹是直线 OC。



注 在上面的情况中，点 P 称为直线 OC 的极。而直线 OC 称为点 P 的极直线。两条共轭直线 OP、OC 中一条直线上的任一点为极时，那么另一条直线是这个点的极直线。对 OA，OB 也是一样。

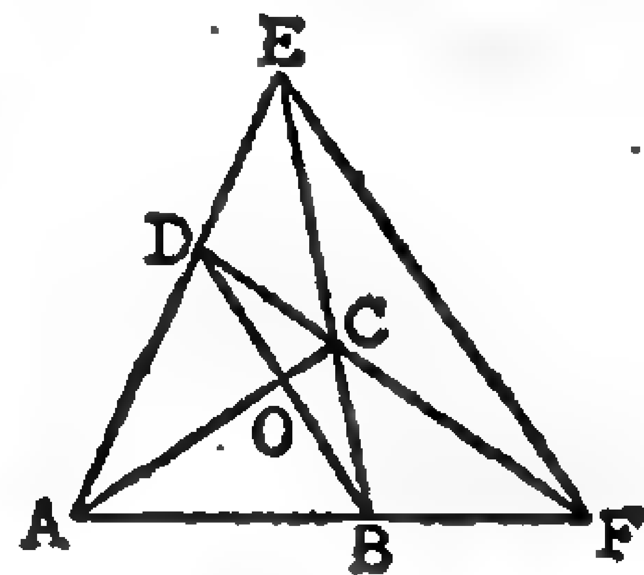
3406. 过点 P 作两条直线 PAB、PCD，与定角 XOY 的两边 OX、OY 分别交于 A、C、B、D，则四边形 $ACDB$ 对角线的交点 Q 的轨迹是点 P 的极直线。



解 设点 P 关于 AB 的调和共轭点为 E，则 $Q(P,\ A,\ E,\ B)$ 是调和线束，延长 EQ 与 CD 交于 F，根据上题知 $Q(P,\ C,\ F,\ D)$ 也是调和线束。由于直线 EQF 过点 P 的极直线上的两点 E、F，因此这条直线是点 P 的极直线。由上题知点 P 的极直线过点 O。故点 Q 的轨迹是点 P 的极直线 OZ。

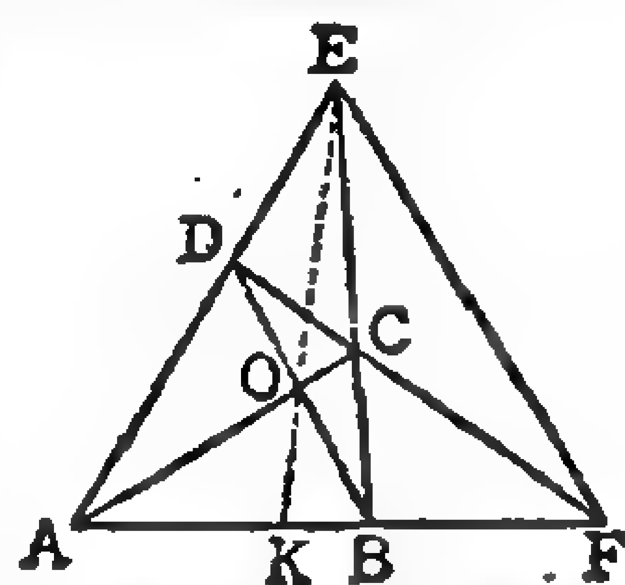
3407. 怎样的图形是完全四边形（完全四角形），叙述它的定义。

解 设在同一平面上四个点中，任意三点不在同一直线上，连结四点的六条直线所构成的图形叫做完全四边形（完全四角形）。而这四个点叫做顶点，连结的六条直线叫做边。不过同一顶点的边叫做对边。对边的三个交点叫做对角点，连结对角点作出的三角形叫做对角点三角形。图中的 E、O、F 就是对角点。



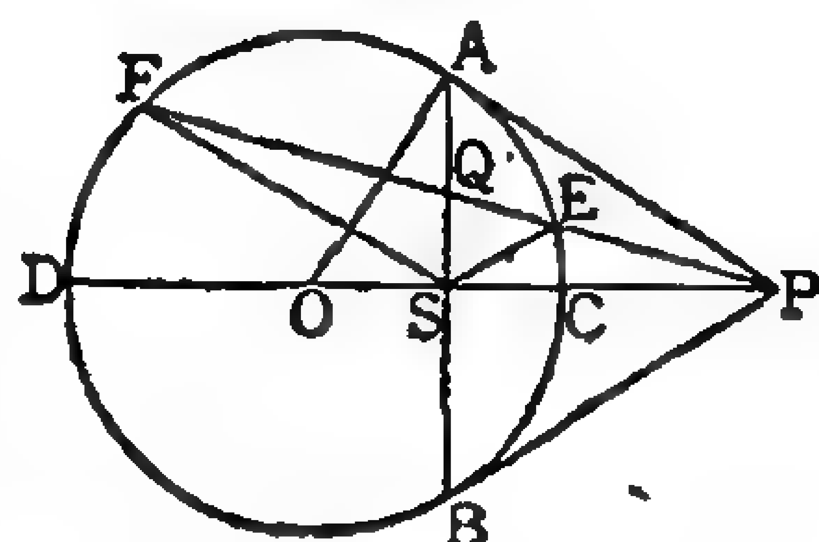
3408. 设完全四边形 $ABCD$ 的对角点为 E、O、F，则线束 $E(A,\ O,\ B,\ F)$ 是调和线束，从而 EO 是点 F 的极直线。

解 设点 F 关于 AB 的调和共轭点为 K，则 $E(A, K, B, F)$ 是调和线束。因为对角线 AC、BD 的交点 O 的轨迹是点 F 的极直线（问题 3406），所以点 O 在 EK 上，因此线束 $E(A, O, B, F)$ 是调和线束，EO 是点 F 的极直线。



3409. 由圆 O 外一点 P 向圆作切线 PA、PB，过 P 作任意割线 PEF 与 AB 交于点 Q，则 P、E、Q、F 是调和点列。

解 设圆 O 的直径 CD 过点 P，CD 与 AB 的交点为 S，则有 $OS\cdot OP=OA^2$，因而 D、S、P、C 为调和点列，由阿波罗尼斯定理知，以 DC 为直径的圆周上所有的点到 P、S 的距离之比是一定的。

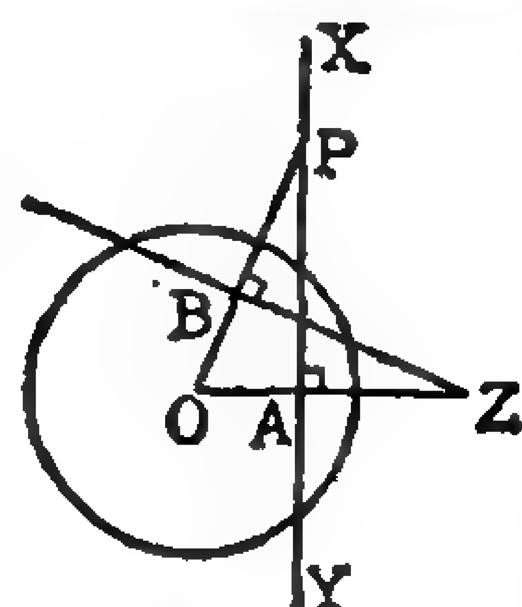


$$\therefore\quad \frac{EP}{ES}=\frac{FP}{FS},\quad 即\quad \frac{PE}{FP}=\frac{ES}{FS}.$$

这个比例式表明，SP 是 $\angle FSE$ 的外角平分线，而 $AS\perp DC$，所以 SQ 是 $\angle FSE$ 的平分线。因此 P、E、Q、F 是调和点列。

注 AB 叫做点 P 关于圆 O 的极直线。即从定点 P 向圆 O 作割线，割线上的弦为 EF，点 P 关于弦端点的调和共轭点 Q 的轨迹是 AB。这时点 P 叫做直线 AB 的极点。由此，点 P 关于圆 O 的极直线是垂直于 OP，且有性质 $OS\cdot OP=r^2$（r 为圆 O 的半径）。或者从点 P 向圆 O 作切线，连结切点的直线，就是作出的极直线。

3410. 设 XY 是点 Z 关于圆 O 的极直线，则 XY 上任意一点 P 关于圆 O 的极直线通过点 Z。



解 设 OZ 与 XY 的交点为 A，则由 XY 是点 Z 的极直线，有

$$OA\cdot OZ=r^2\quad（r 为圆 O 的半径）.$$

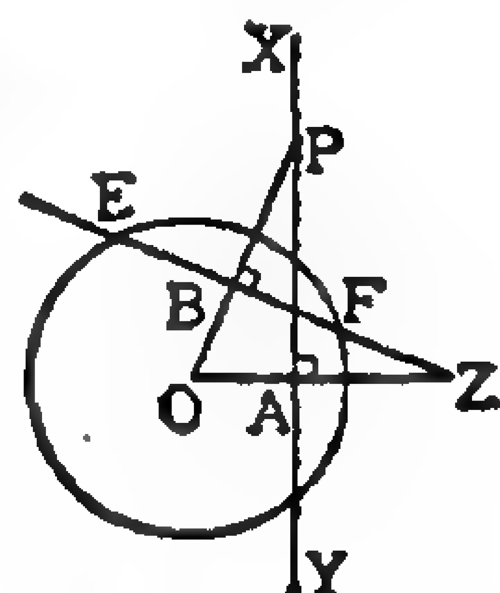
又若 XY 上任意一点 P 的极直线，与 OP 的交点为 B，则有 $OB\cdot OP=r^2$。$\therefore OA\cdot OZ=OB\cdot OP$。由此知 P、B、A、Z 是在同一圆周上，因而 $\angle PAZ=90°$，

$$\therefore\quad \angle PBZ=90°.$$

故点 P 的极直线通过点 Z。

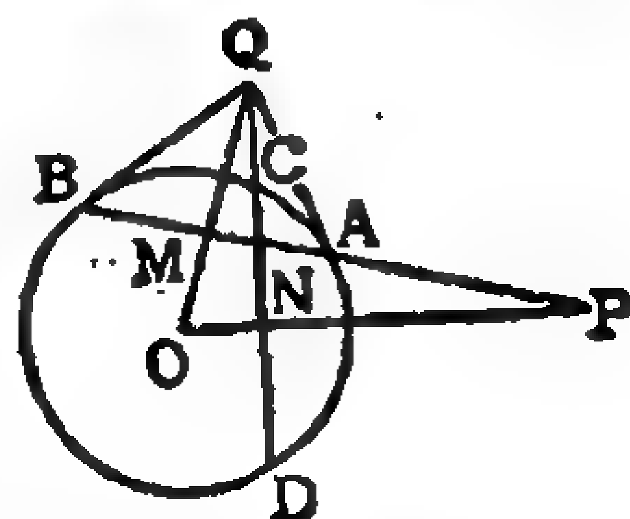
3411. 已知定圆 O，定点 Z，则过点 Z 的任意直线的极点在点 Z 的极直线 XY 上。

解 作过定点 Z 的任意直线 EF，由 O 作 EF 的垂线 OB，设 OB 与点 Z 的极直线 XY 的交点为 P，OZ 与 XY 上的交点为 A，由于点 A 在点 Z 的极直线 XY 上，所以 $OA\cdot OZ=r^2$（r 为圆 O 的半径）。由于四点 Z、A、B、P 共圆，从而 $OB\cdot OP=OA\cdot OZ=r^2$。所以点 P 是过定点 Z 的直线 EF 的极点。



3412. 过圆所在平面上的一定点作圆的任意割线，过割线上弦的两端点作切线，则此两切线的交点，在定点为极点的极直线上。

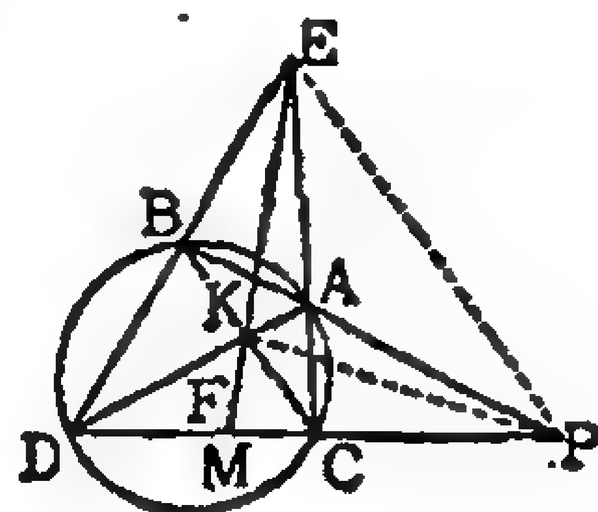
解 过点 P 作圆 O 的割线 PAB，AB 为圆 O 的弦，过弦两端点 A、B 的切线交于点 Q，OQ 与 AB 的交点为 M，则 AB 为点 Q 的极直线，P 在点 Q 的极直线上，并且 $OM\cdot OQ=r^2$（r 为圆 O 的半径）。



其次，由 Q 向 OP 作垂线 QN，设 QN 与圆周的交点为 C、D，则 M、N、P、Q 共圆，且 $ON\cdot OP=OM\cdot OQ=r^2$，所以 CD 是点 P 的极直线，Q 在点 P 的极直线上。

3413. 过圆所在平面上的一点 P，作圆的两条割线 PAB、PCD，设 AC、BD 及 AD、BC 的交点分别为 E、F，则 E 或者 F 都在 P 点的极直线上。

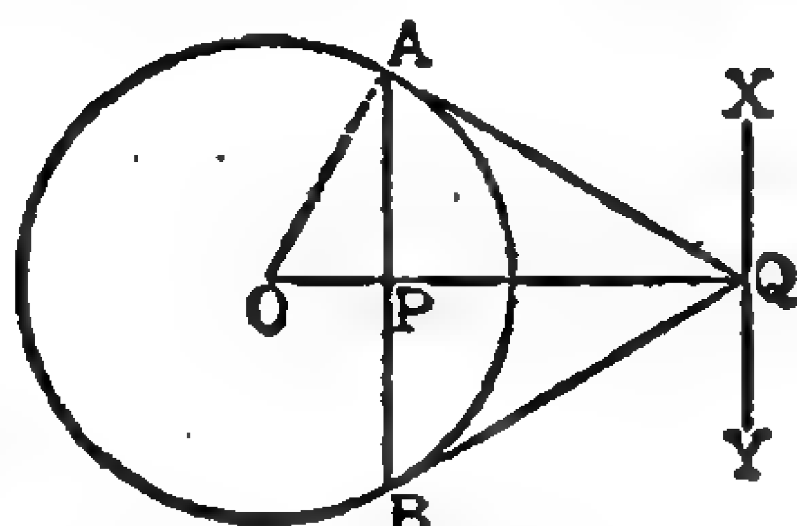
解 设点 P 关于 A、B 的调和共轭点为 K，点 P 关于 C、D 的调和共轭点为 M，则 KM 是点 P 关于圆 O 的极直线。如果考虑到调和线束 (EP, EA, EK, EB) 与调和线束 (EP, EC, EM, ED)，因为 EP 公共，EA 与 EC 是同一直线，EB 与 ED 也是同一直线，于是 EK 与 EM 也是同一直



线。因此 KM 过点 E。

其次，如果考虑到调和线束 (FP, FA, FK, FB) 与调和线束 (FP, FD, FM, FC)，因为 FP 公共，EA 与 FD 是同一条直线，FB 与 EC 也是同一条直线，于是 FK、FM 也是同一条直线。因此 KM 通过点 F。所以 E、F 都在点 P 的极直线 KM 上。

3414. 设圆 O 内有一点 P，过 P 作其极直线 XY 的垂线 PQ，由 Q 向圆 O 作两条切线 QA、QB，则 AB 通过点 P。



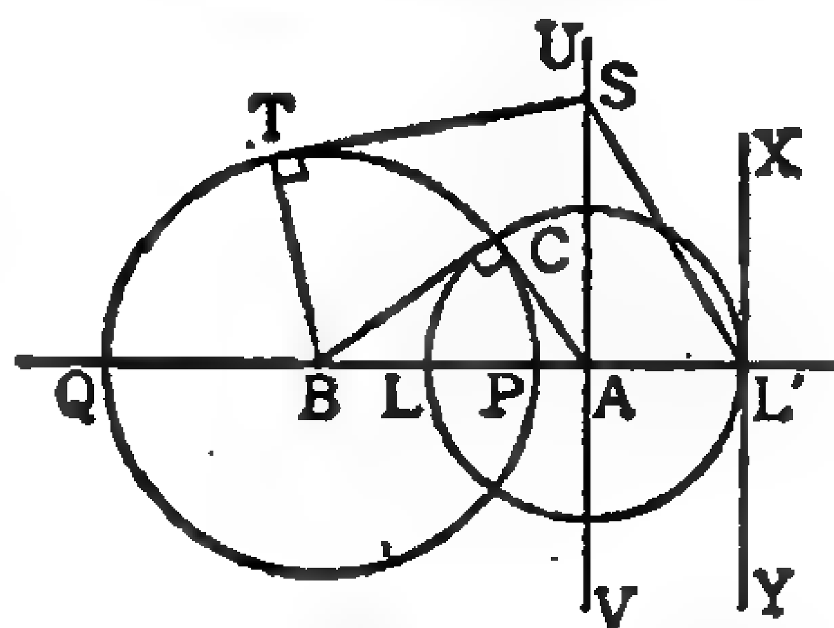
解　设 XY 是点 P 的极直线，又 $PQ\perp XY$，因此 O、P、Q 在一条直线上。由问题 3409 有

$$OP\cdot OQ=OA^2,$$

$$\therefore\quad \triangle OAP\backsim\triangle OQA.$$

由于 $\angle OAQ=\angle R$，$\therefore \angle OPA=\angle R$，同理 $\angle OPB=\angle R$，所以 AB 通过点 P。

3415. 若有共极 L 及极直线的若干圆，则这些圆是共轴系的圆。



解　由 L 向 XY 作垂线 LL'，设适合条件的圆之一与直线 LL' 的交点为 P、Q，圆心为 B，则 Q、L、P、L' 是调和点列，设 A 为 LL' 的中点，则 $AP\cdot AQ=AL^2$。由此以 LL' 为直径的圆与圆 B 垂直相交。

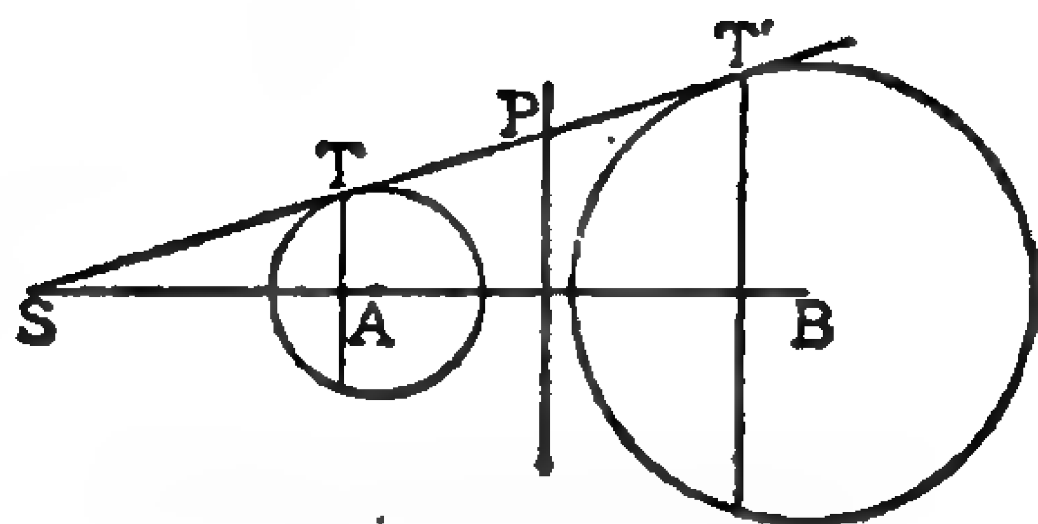
设圆 A、B 的交点之一为 C，从 LL' 的垂直平分线 UV 上的任一点 S 作圆 B 的切线，其切点为 T，则

$$ST^2=SB^2-BT^2=SA^2+AB^2-BC^2$$
$$=SA^2+AC^2=SA^2+AL'^2=SL'^2,$$
$$\therefore\quad ST=SL'=SL.$$

因此，从点 S 向适合条件的圆作切线，其切线长等于 SL。UV 是这些圆的根轴。所以适合条件的圆是共轴系的圆。

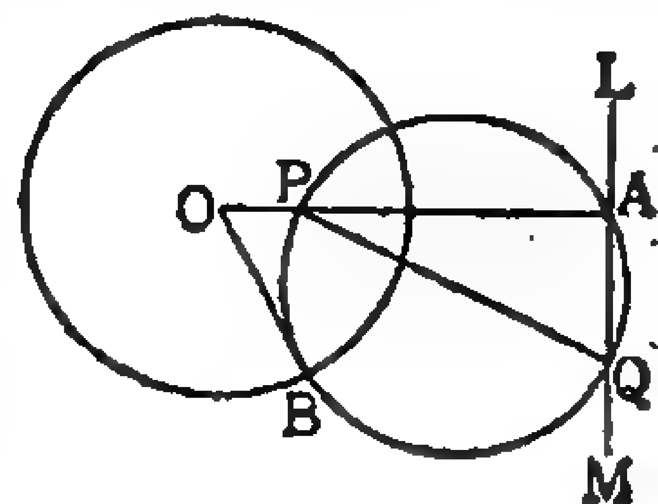
注　圆系中的任意两圆的根轴都相同时，称这个圆系是共轴系的圆。

3416. 两圆 A、B 的根轴，到它们的相似中心 S 关于圆 A 与圆 B 的极直线的距离相等。



解　由 S 向两圆作公切线 STT'，与圆 A、B 的切点分别为 T、T'，与两圆根轴的交点为 P，则点 S 关于圆 A 的极直线是由 T 向 AB 作的垂线。同理，关于圆 B 的极直线是由 T' 向 AB 作的垂线。因此两圆的极直线与根轴平行，且 $PT=PT'$，所以极直线与根轴等距离。同理，对于两圆的相似内心也可同样证明。

3417. 已知圆 O，在点 P 关于圆 O 的极直线 LM 上任取一点 Q，作以 PQ 为直径的圆，则此圆与圆 O 垂直相交。

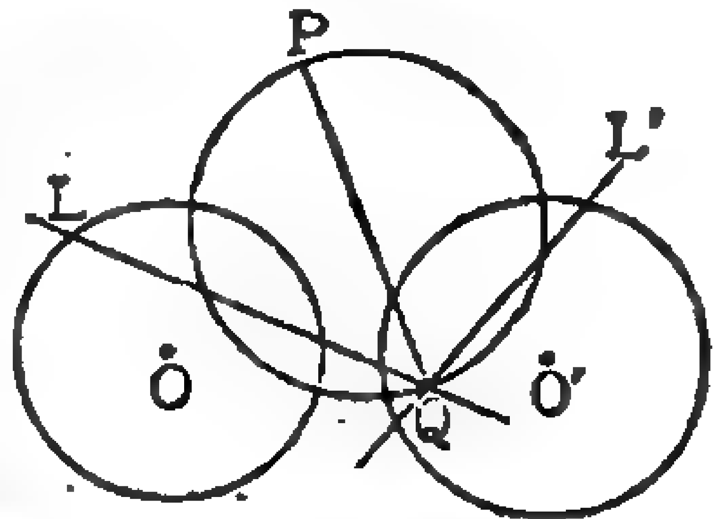


解　设 OP 与直线 LM 的交点为 A，因为 $OA\perp LM$，于是以 PQ 为直径的圆过点 A，与圆 O 相交于点 B。

$$\therefore\quad OB^2=OP\cdot OA.$$

因此 OB 是圆 PAQ 的切线，所以两圆垂直相交。

3418. 设定点 P 关于两圆 O、O' 的极直线为 L、L'，其交点为 Q，以 PQ 为直径作圆，则此圆与两圆 O、O' 垂直相交，且其圆心在圆 O、O' 的根轴上。

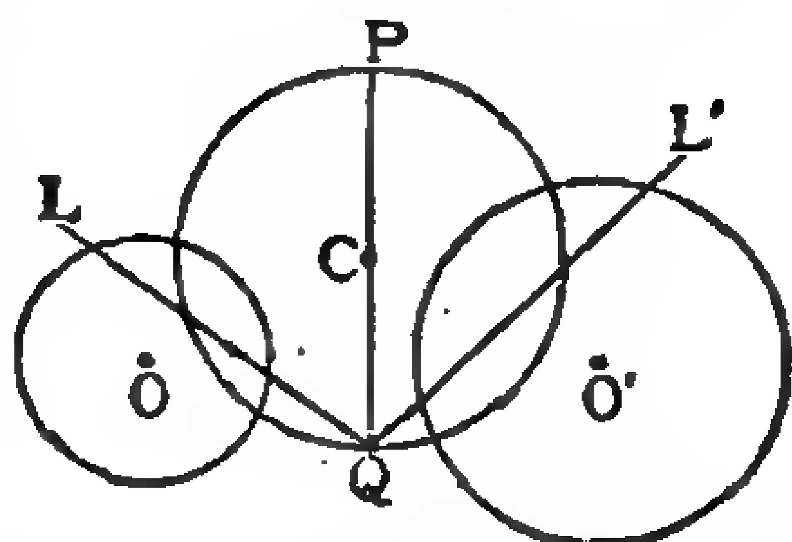


解　因为 Q 在极直线 L 上，由上题有圆 PQ 与圆 O 垂直相交。同理，圆 PQ 与圆 O' 也垂直相交，因此圆 PQ 与两圆 O、O' 垂直相交。由此其圆心在两圆 O、O' 的根轴上。

3419. 设 P 为圆 O、O' 根轴上的任意点，则点 P 关于圆 O、O' 的极直线的交点在根轴上。

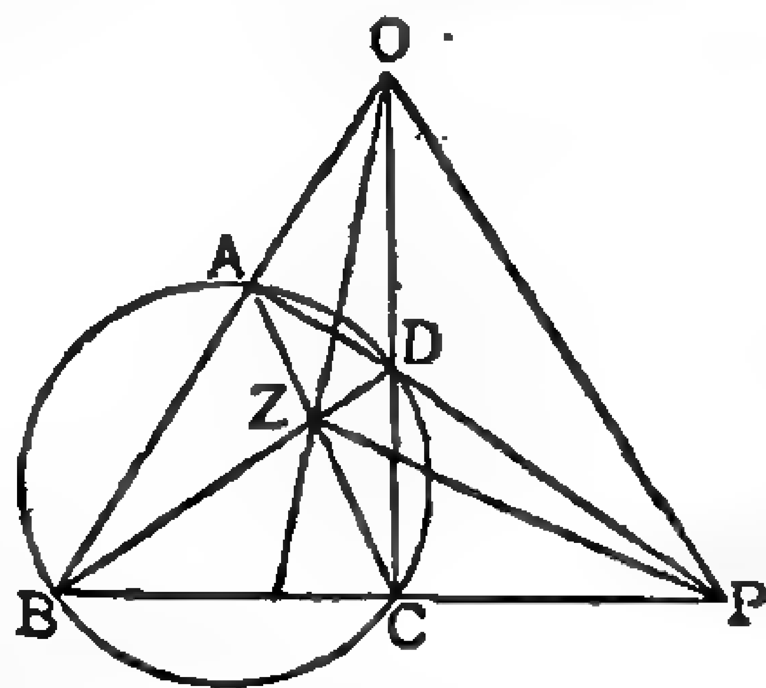
解　设点 P 关于圆 O、O' 的极直线为 L、L'，L 与 L' 的交点为 Q，则以 PQ 为直径的圆与圆 O、O' 垂直相交，根据上题知，圆 PQ

的圆心 C 在圆 O、O' 的根轴上。但因 P 又在两圆 O、O' 的根轴上，所以 PQ 是两圆的根轴，即极直线 L 与 L' 的交点 Q 在根轴上。



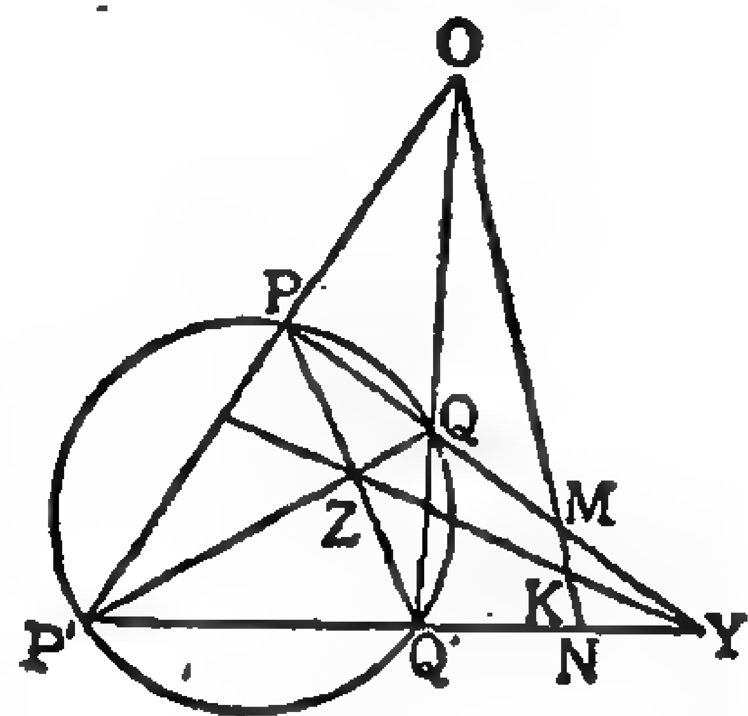
3420. 已知圆内接四边形一组对边的位置及对角线交点，求这个四边形外接圆心的轨迹。

解 在四边形 $ABCD$ 中，已知对边 BA、CD 的位置，对角线 AC、BD 相交于定点 Z，AD、BC 的交点 P，又设 BA、CD 的交点为 O，则 $O(B, Z, P, C)$ 是调和线束，而 OB、OZ、OC 是定直线，因此 OP 也是定直线。其次，OZP 是关于这个圆的自共轭三角形（问题 **3422**），Z 是直线 OP 的极点。所以圆心的轨迹是过点 Z 且垂直于 OP 的直线。



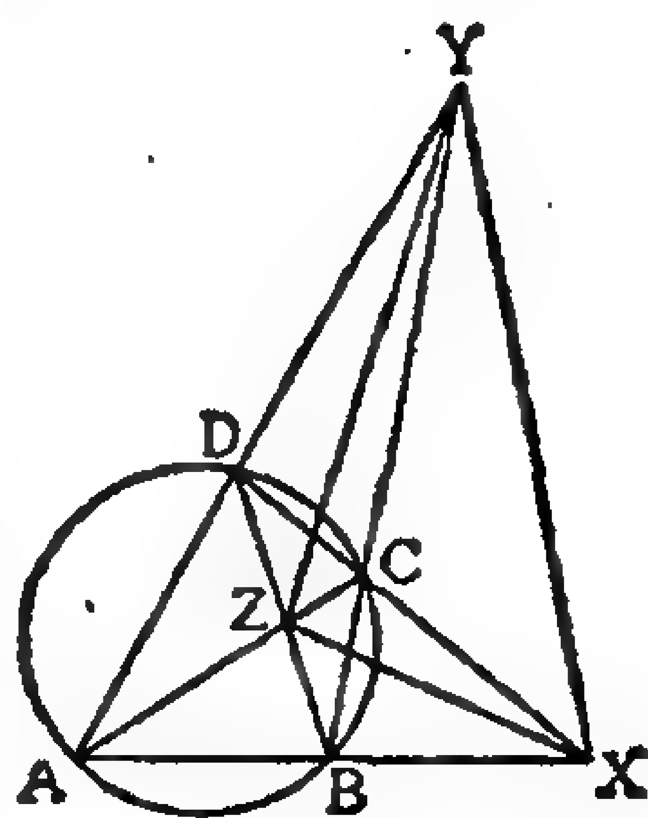
3421. 从圆外一定点 O 引两条直线，与圆周分别交于点 P、P' 及 Q、Q'，若 PQ 恒过定点 M，则 $P'Q'$ 也必过另外的定点。

解 在圆内接四边形 $PQQ'P'$ 中，设 PQ 与 $P'Q'$ 的交点为 Y，PQ' 与 QP' 的交点为 Z，延长 OM 与 YZ 及 YP' 的交点分别为 K、N，则 YZ 是点 O 的极直线。由于 O 是定点，所以 YZ 是定直线。又因 O、M 都是定点，因此 K 也是定点。这时 $Y(O, M, K, N)$ 是调和线束，所以 O、M、K、N 是调和点列。但是 O、M、K 都是定点，因此 N 也是定点。从而 $P'Q'$ 过这个定点 N。



3422. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，设 AB、DC 的交点为 X，AD、BC 的交点为 Y，AC、BD 的交点为 Z，则 $\triangle XYZ$ 是自共轭三角形。

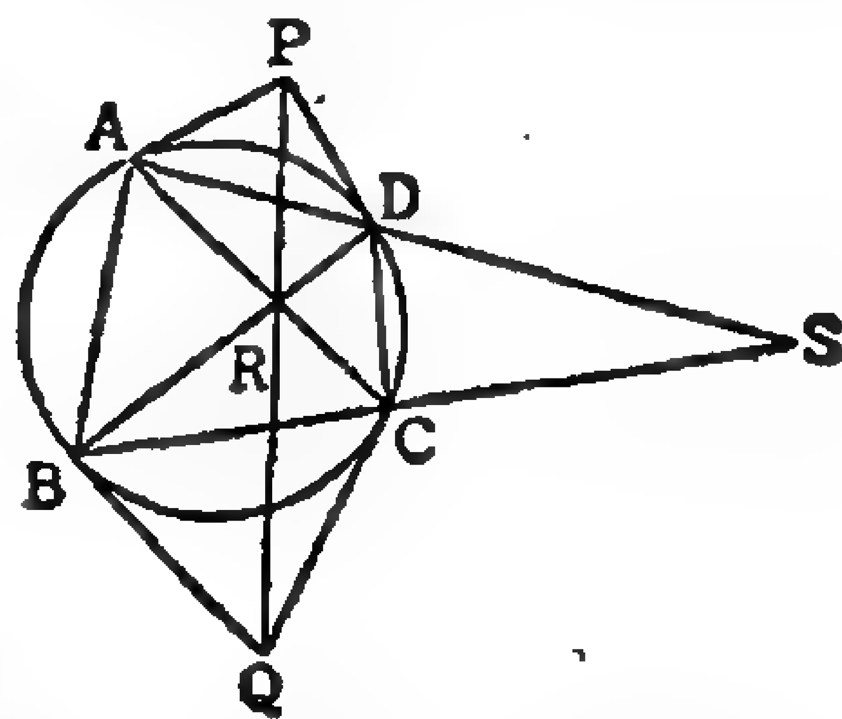
解 因为 YZ 是 X 的极直线，XZ 是 Y 的极直线，所以 XY 是 Z 的极直线，即 X、Y、Z 是 YZ、ZX、XY 的极点，于是 $\triangle XYZ$ 是自共轭三角形。



注（定义） 在 $\triangle XYZ$ 中，若 YZ 是 X 的极直线，ZX 是 Y 的极直线，XY 是 Z 的极直线时，称 $\triangle XYZ$ 是自共轭三角形。

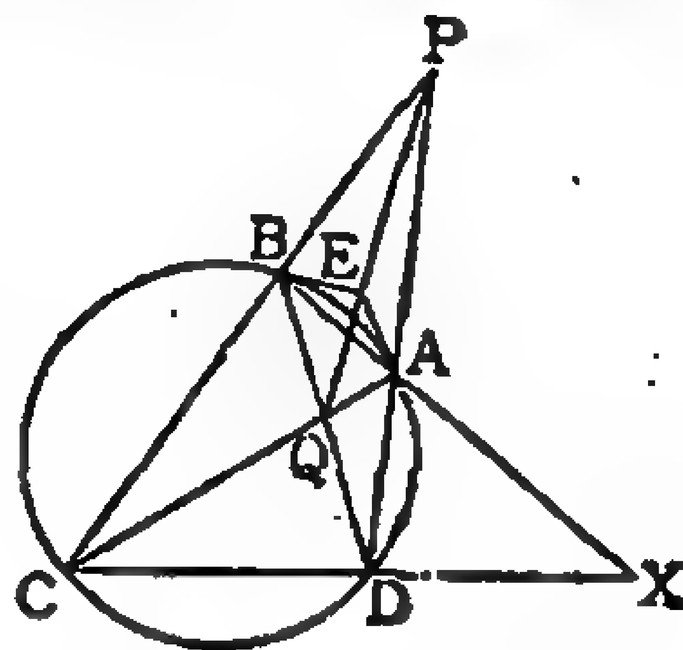
3423. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，设过点 A、D 的切线相交于点 P，过点 B、C 的切线相交于点 Q，则直线 PQ 通过对角线的交点 R。

解 设 AD 与 BC 的交点为 S，则点 P、Q、R 都在点 S 的极直线上（问题 **3412**, **3413**），从而点 P、R、Q 在一条直线上。



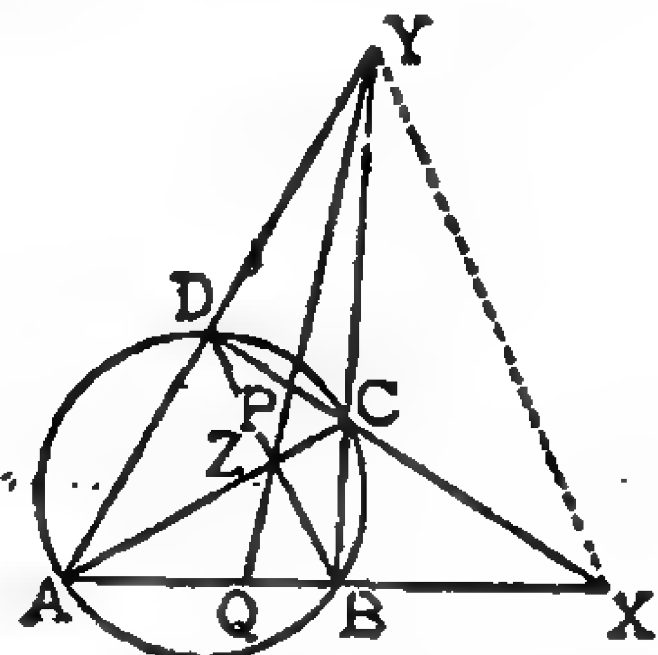
3424. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的一边 AB 固定，CB、DA 的交点为 P，对角线的交点为 Q，则连结 PQ 的直线通过定点。

解 设边 BA、CD 的交点为 X，则 PQ 是点 X 的极直线（问题 **3413**）。若从点 A、B 作切线，其交点为 E，则 PQ 过这个定点 E（问题 **3412**）。

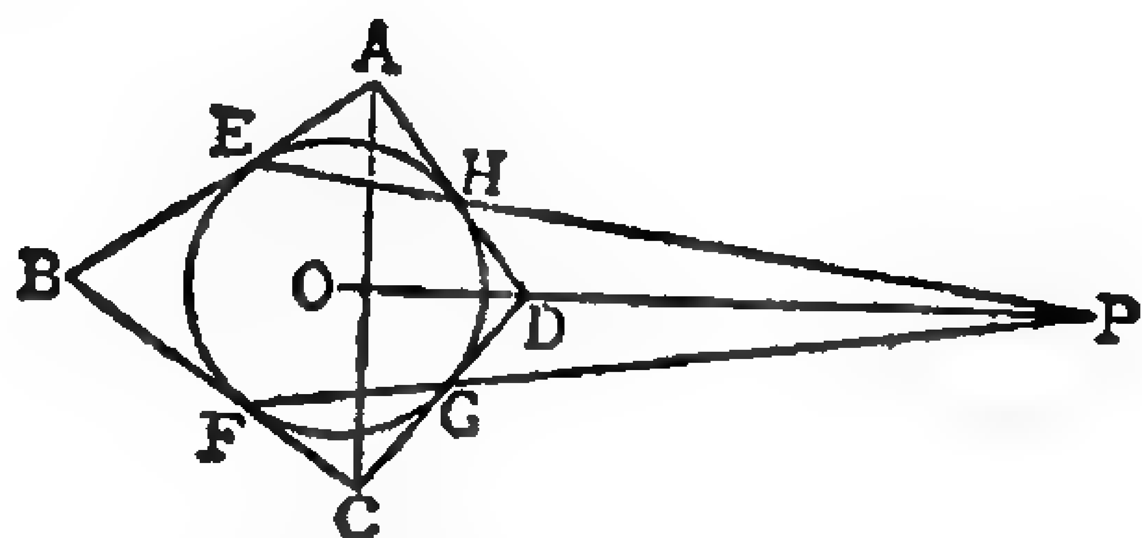


3425. 过圆内的定点 Z 作两弦 AC、BD，求 AB、DC 的交点 X 的轨迹。

解 设 AD、BC 的延长线相交于点 Y，连结 YZ 与 CD、AB 的交点分别为 P、Q，则 YZ 是点 X 关于这个圆的极直线（问题 **3409**），从而点 X 在点 Z 关于这个圆的极直线上（问题 **3411**）。所以点 X 的轨迹是点 Z 的极直线。



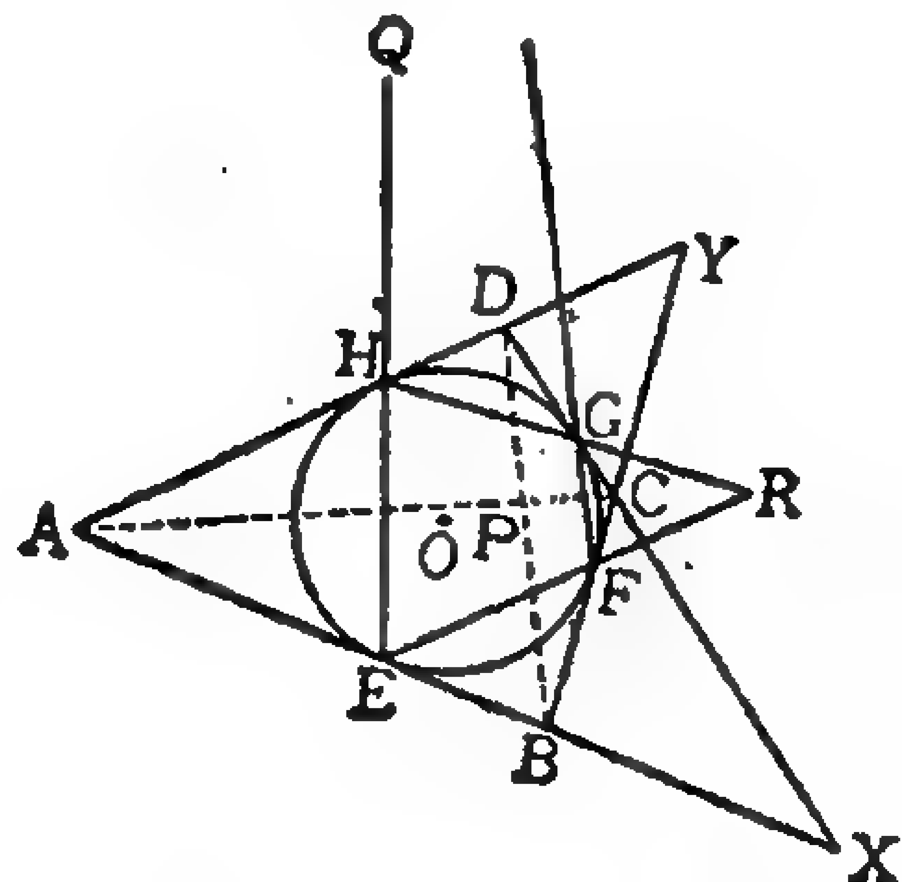
3426. 已知圆 O 的外切四边形 $ABCD$，AB、BC、CD、DA 的切点分别为 E、F、G、H，EH 与 FG 的交点为 P，则 PO 垂直于 AC。



解　因为 A 是 EH 的极点，所以 A 在点 P 的极直线上。同理 C 是 FG 的极点，所以 C 在点 P 的极直线上。故 AC 是点 P 的极直线，因此 $OP \perp AC$。

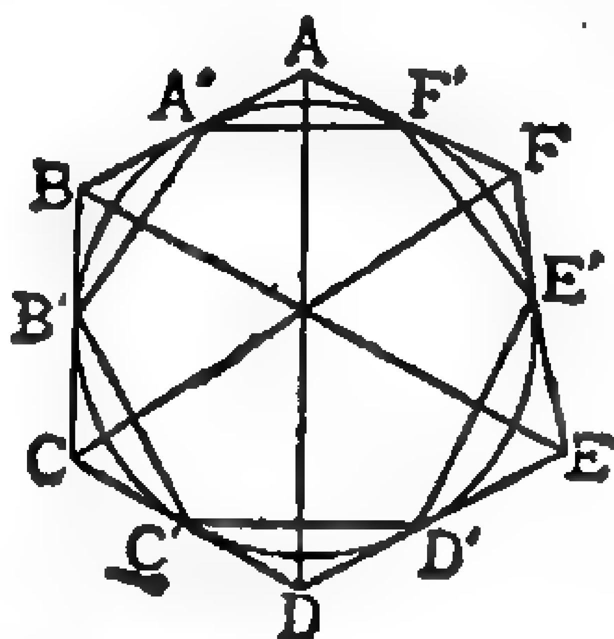
3427. 设圆 O 外切四边形为 $ABCD$，对边 AB、CD 的交点为 X，BC、AD 的交点为 Y，四边 AB、BC、CD、DA 在圆 O 上的切点分别为 E、F、G、H，HE、GF 的交点为 Q，EF、HG 的交点为 R，则 X、Y、Q、R 在一直线上。

解　由于 Q 是 HE、GF 的交点，根据上题知 Q 是 AC 的极点。同理，R 是 BD 的极点。从而直线 QR 是 AC、BD 交点 P 的极直线。因为 XY 也是点 P 的极直线，所以 X、Y、Q、R 都在点 P 的极直线上。



3428. 已知圆外切六边形 $ABCDEF$，则三条对角线 AD、BE、CF 相交于一点。[布利安深定理]

解　设圆的切点分别为 A'、B'、C'、D'、E'、F'，则 A、D 分别是弦 $A'F'$、$C'D'$ 的极点。设 $A'F'$、$C'D'$ 的交点为 P，由上题知，点 P 的极直线是 AD。



同理，设 $A'B'$、$D'E'$ 的交点为 Q，$B'C'$、$E'F'$ 的交点为 R，则弦 BE、CF 分别是点 Q、R 的极直线。由帕斯卡定理（问题 **1538**）知，P、Q、R 在一直线上，所以 AD、BE、CF 交于一点。

3429. 已知一点关于三个圆的极直线，且三条极直线过同一点，求这点的轨迹。

解　已知三个圆的圆心分别为 A、B、C，设点 P 关于这三个圆的极直线相交于点 Q，由 Q 分别向 PA、PB、PC 作垂线 QL、QM、QN，就是点 P 的三条极直线。假定圆 A、B、C 的半径分别为 a、b、c，则

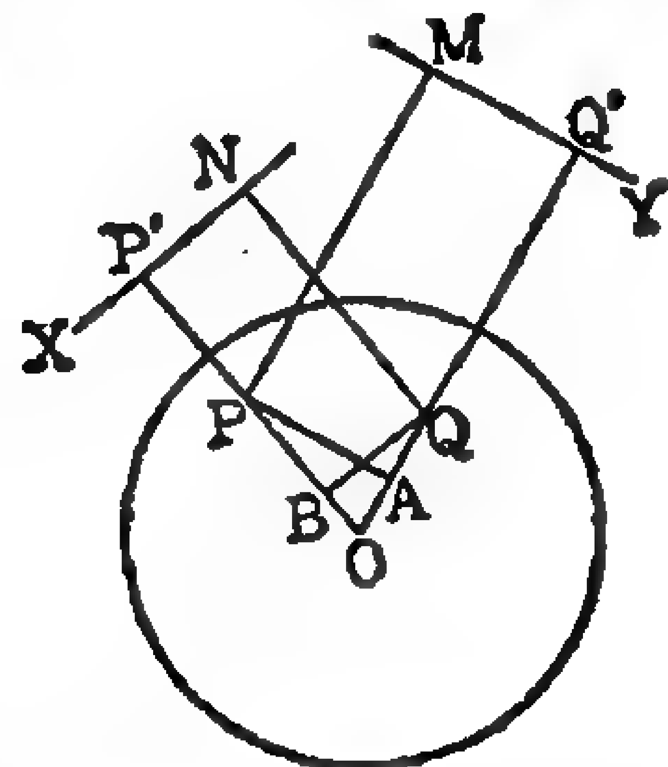
$$AL\cdot AP=a^2,\ BM\cdot BP=b^2,$$
$$CN\cdot CP=c^2.$$

因此，以 PQ 为直径的圆（即过 L、M、N 的圆）与已知三个圆 A、B、C 分别垂直相交，故点 P 在圆 PQ 上。反之，这个圆上的任意点 P 的极直线，交于过点 P 这个圆的直径的另一端。因此，所求的轨迹是与三个已知圆 A、B、C 垂直相交的圆。

3430. 设两点 P、Q 关于圆 O 的极直线分别为 X、Y，由 P、Q 分别向 X、Y 作垂线 PM、QN，则

$$OP:OQ=PM:QN.\quad \text{[沙门定理]}$$

解　设延长 OP、OQ 与 X、Y 分别交于点 P'、Q'，则 X、Y 分别是点 P、Q 的极直线，因此



$$PO\cdot OP'=OQ\cdot OQ'=R^2 \quad ①$$

（R 为圆 O 的半径）。由 P、Q 作 OQ、OP 的垂线 PA、QB，则 P、B、A、Q 共圆，因此

$$OP\cdot OB=OQ\cdot OA. \quad ②$$

由①－②有　$OP\cdot BP'=OQ\cdot AQ'$，

$$\therefore\ OP:OQ=AQ':BP'=PM:QN.$$

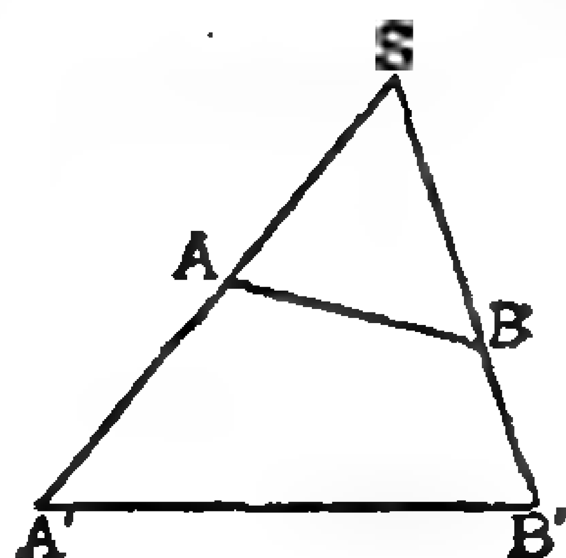
4. 反形

3431. 设一个图形上的任意两点 A、B，其反形上的对应点分别为 A'、B'，则 AB 与 $A'B'$ 之比等于其反演幂 i 与由原点 S 至 A'、B' 距离乘积之比，即

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{i}{SA'\cdot SB'}.$$

解　S 是原点，A、A'，B、B' 是对应点，因此 $SA\cdot SA'=SB\cdot SB'=i$，

$$\therefore\quad \frac{SA}{SB}=\frac{SB'}{SA'},$$

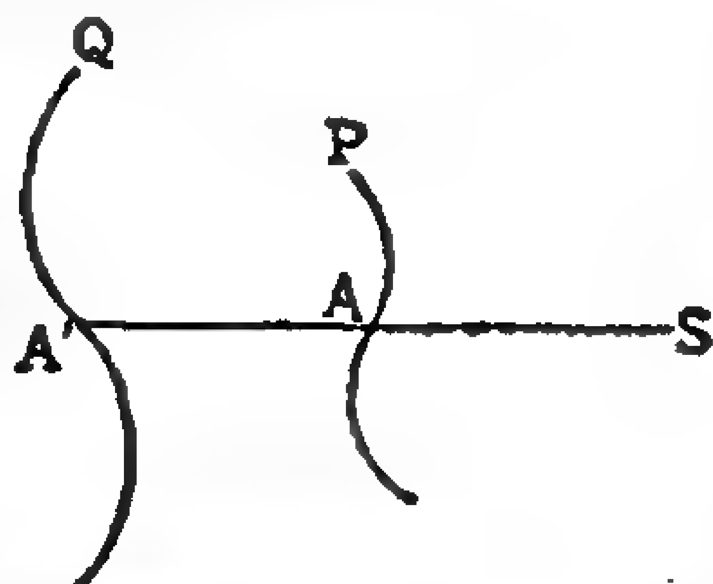


$\triangle SAB\backsim\triangle SB'A'$，

从而

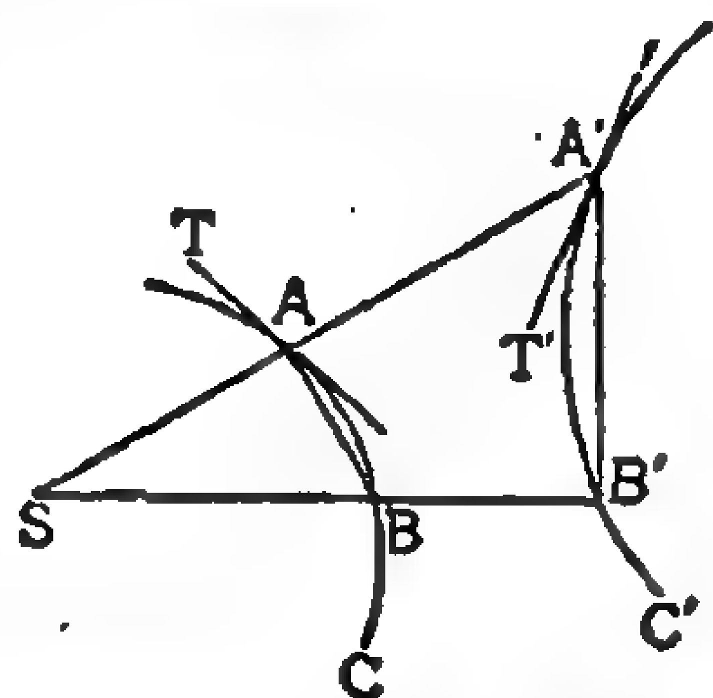
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{SA}{SB'}=\frac{SA'\cdot SA}{SA'\cdot SB'}=\frac{i}{SA'\cdot SB'}.$$

注　(定义)　设有定点 S 及图形 P，A 为图形 P 上的点，在连结 AS 的直线上取点 A'，使 $SA\cdot SA'=i$ (一定)，称点 A' 的轨迹 Q 是 P 的反形，点 S 叫做反演中心，i 叫做反演幂。



3432. 若两条曲线互为反形时，在其对应的两点上作曲线的切线，则切线与过这两点的动径的夹角相等。

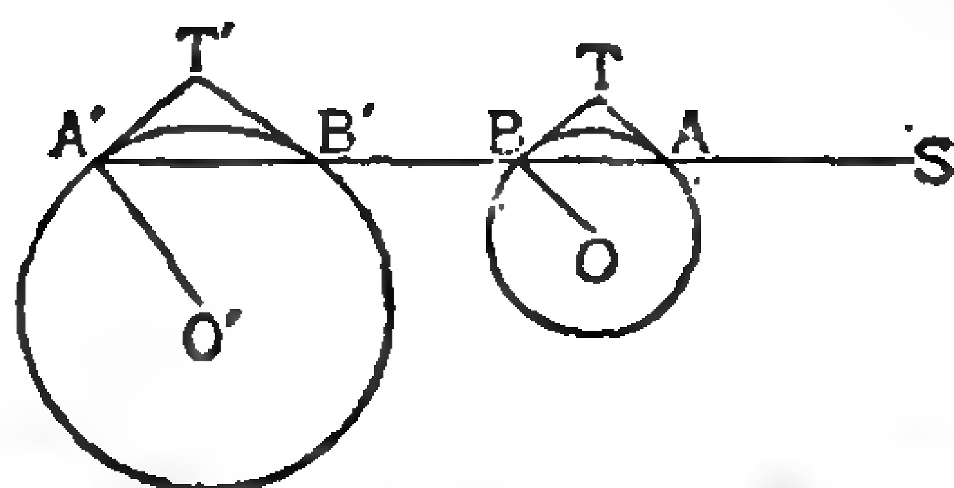
解　设两条曲线为 C、C'，将动径 SBB' 以原点 S 为中心作旋转，移动到 SAA' 的位置，则点 B、B' 相应地分别趋近于点 A、A'，其割线 AB、$A'B'$ 就分别趋近于曲线 C、C' 在点 A、A' 上的切线位置。因 C、C' 是互为反形的，由上题知 $\angle ABS=\angle SA'B'$，因此 $\angle SBA$ 在动径 SBB' 旋转过程中，总是等于 $\angle SA'B'$，所以 $\angle SBA$ 的极限位置为 $\angle SAT$，$\angle SA'B'$ 的极限位置为 $\angle SA'T'$。从而，$\angle SAT$ 与 $\angle SA'T'$ 是相等的。



注　在 A、A' 上作的切线，总在动径 SAA' 的同侧与动径 AA' 具有相等的夹角。

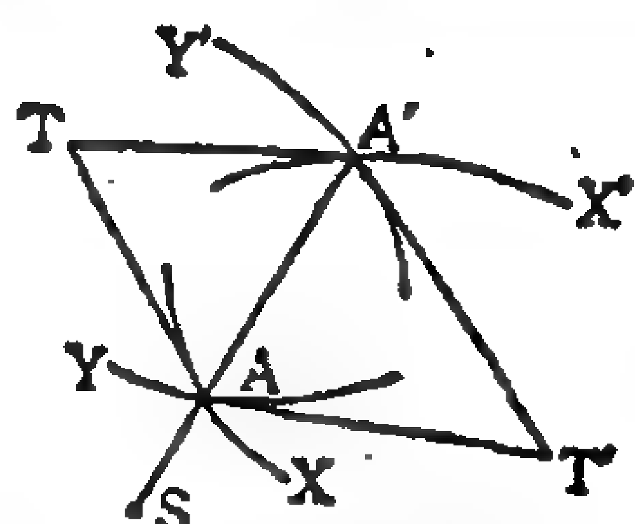
3433. 若两圆 O、O' 是以 S 作反演中心的互为反形，则在其对应的两点 A、A' 上的切线与动径 SAA' 的夹角相等。

解　因为两圆 O、O' 互为反形，所以反演中心 S 是两圆的相似中心 (问题 3437)。在图上 $O'A'\parallel OB$，设 A'、B 上的切线为 $A'T'$、BT，则 $A'T'\parallel BT$，$\therefore\ \angle T'A'B'=\angle TBA$。若在点 A 的切线为 AT，则由 $\angle TAB=\angle TBA$ 有



$$\angle T'A'B'=\angle TAB.$$

3434. 若两条曲线 X、Y 相交于一点 A，X、Y 的反形分别为 X'、Y'，则 X'、Y' 也相交，且其交点与交点 A 互为对应点，在交点处的切线的夹角相等。

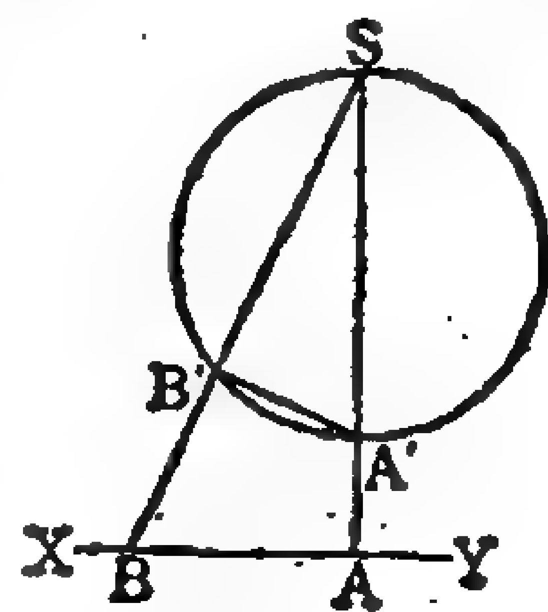


解　设曲线 X、Y 的交点为 A，反演中心为 S，点 A 的对应点为 A'，则 X'、Y' 都过点 A'。又在点 A' 作 X'、Y' 的切线，在点 A 作 X、Y 的切线，切线的交点分别为 T、T'，由问题 3432 有

$$\angle TAA'=\angle TA'A,\quad \angle T'AA'=\angle T'A'A.$$

所以 X 与 Y 的夹角等于 X' 与 Y' 的夹角。

3435. 不过反演中心 S 的直线 XY 的反形是过 S 的圆周。



解　从 S 向 XY 作垂线 SA，设反演幂为 r^2，取满足 $SA\cdot SA'=r^2$ 的点 A'，设 B 为 XY 上任意一点，B 的对应点为 B'，则 $SB\cdot SB'=SA\cdot SA'=r^2$，因此 B、A、A'、B' 共圆。

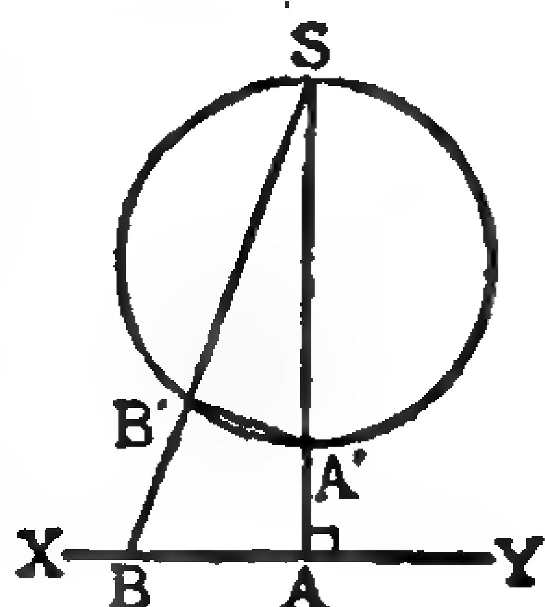
$$\therefore\quad \angle SB'A'=\angle A'AB=\angle B,$$

且 A' 是定点，因此知点 B' 的轨迹是以 SA' 为直径的圆周。所以直线 XY 的反形是通过点 S 的圆周。

3436. 若定圆周上的一点 S 为反演中心，则这个圆的反形是垂直于直径 SA' 的直线 XY。

解　设 B' 为圆周上任意一点，B' 的对应点为 B，则 $SA'\cdot SA=SB'\cdot SB$，因此 A'、A、B、B' 共圆。

$\therefore\ \angle SAB=\angle SB'A$
$=\angle R.$



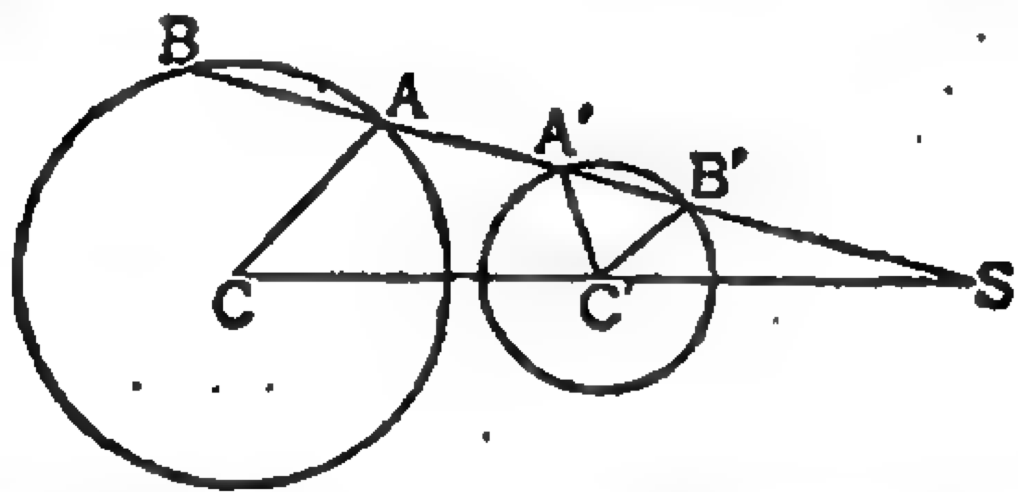
因此点 B 的轨迹是过点 A 垂直于 SA' 的直线 XY (其中 A 是 A' 的对应点).

3437. 设圆 C 为定圆, S 为圆外的定点, 则以 S 为反演中心, 圆 C 的反形是以 S 为相似中心的圆.

解 设反演幂为 r^2, 点 S 关于圆 C 的圆幂为 p^2, 则由图知, $SB\cdot SB'=r^2$, $SA\cdot SB=p^2$.

$$\therefore\ \frac{SB'}{SA}=\frac{r^2}{p^2}\quad(\text{一定}).$$

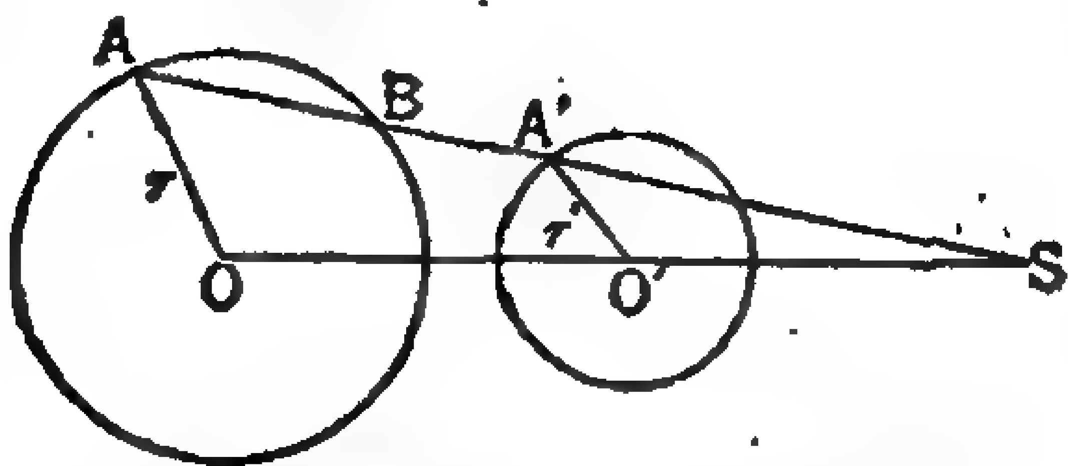
因此, 从反演中心 S 向圆 C 作动径 SAB, 设用 A 代替动径的一端 B, 则 $SA:SB'$ 是一定的 (问题 **3437**). 因此, B' 的轨迹是以定点 C' 为圆心, 半径为 $\frac{r^2}{p^2}R$ (R 是圆 C 的半径) 的圆周. 显然 S 是两圆 C、C' 的相似中心.



3438. 设圆 C 为定圆, S 为定点, 点 S 关于定圆 C 的圆幂为 p^2, 反演幂为 p^2, 则以 S 为反演中心圆 C 的反形是它自己.

解 在上题 $\frac{SB'}{SA}=\frac{r^2}{p^2}$ 中, 设 $p^2=r^2$, 则有 $SA=SB'$, 所以定圆 C 是其自身的反形.

3439. 若两圆 O、O' 的相似外心 (或内心) 为反演中心, 则圆 O、O' 互为反形.



解 设 S 为两圆 O、O' 的相似外心, 则由图知有

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{r}{r'}$$

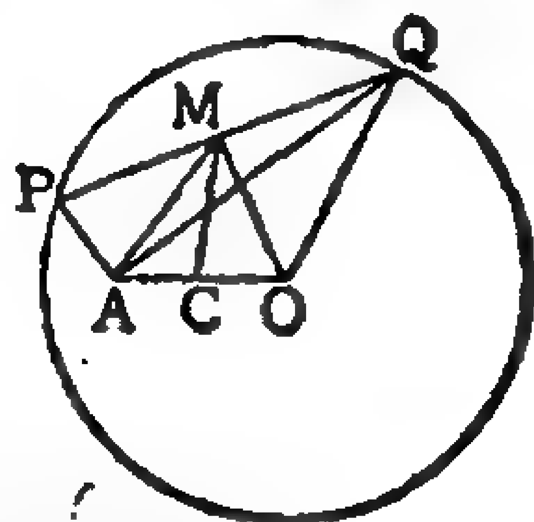
(设圆 O, O' 的半径分别为 r, r').

设 SA 与圆 O 的另一交点为 B, 由 S 对于圆 O 的圆幂设为 p^2, 则 $SA\cdot SB=p^2$,

$$\therefore\ SB\cdot SA'=\frac{r'}{r}p^2\quad(\text{一定}).$$

所以圆 O 与 O' 是以 S 为反演中心, 反演幂为 $\frac{r'}{r}p^2$ 的反形.

3440. 若圆 O 的一动弦 PQ, 对于一定点 A 总张成直角进行运动, 则弦 PQ 的极点的轨迹是一个圆.



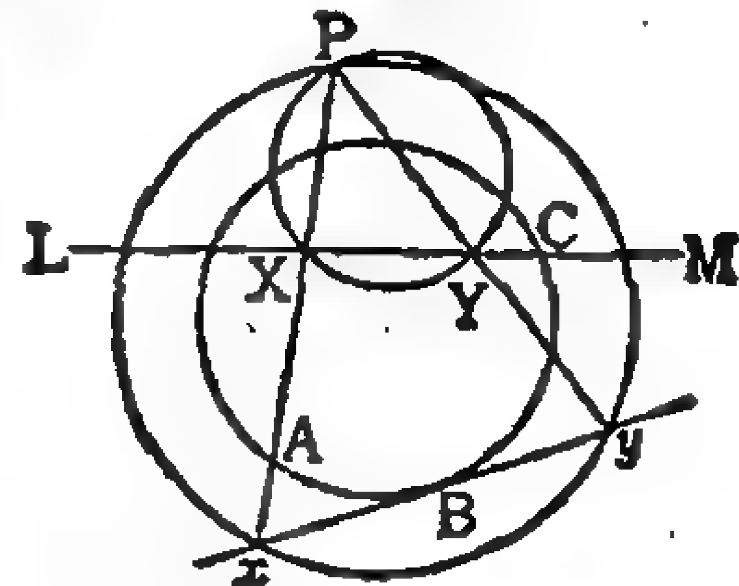
解 设 M 为 PQ 的中点, C 为 OA 的中点, 圆 O 的半径为 r, 根据中线定理

$$2CM^2+2CO^2$$
$$=AM^2+MO^2=MQ^2+MO^2=r^2.$$

$$\therefore\ CM=\sqrt{\frac{r^2}{2}-OC^2}\quad(\text{一定}),$$

因点 C 是定点, 所以点 M 的轨迹是以 C 为圆心的圆. 又因 $OM\perp PQ$, 所以关于圆 O, PQ 的极点 R 在 OM 上, 因为 $OR\cdot OM=OQ^2$, 故所求的轨迹是点 O 关于这个圆 C 的反形.

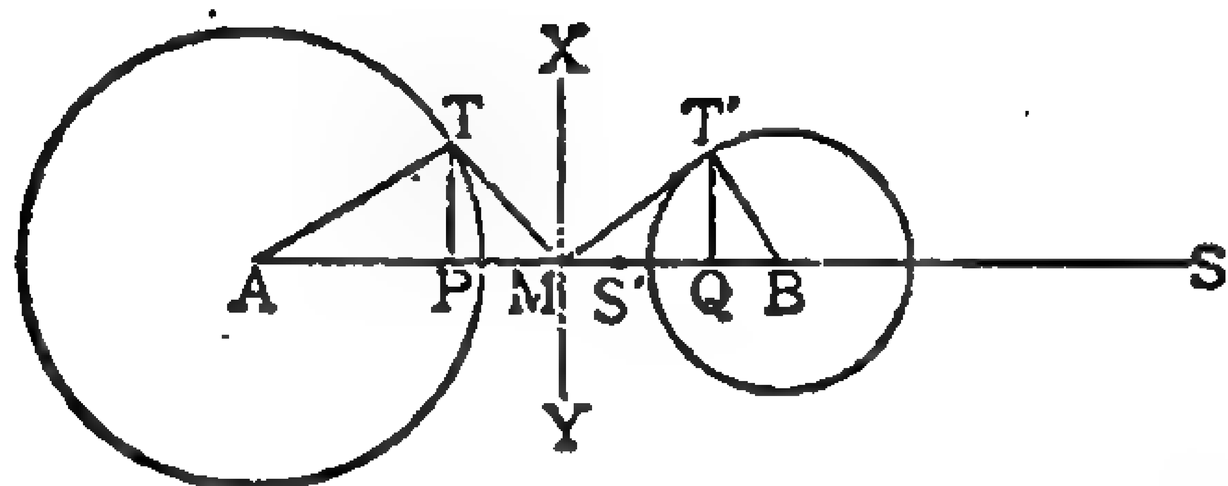
3441. 由定点 P 作两条直线 PX、PY, 与另一条定直线 LM 的交点为 X、Y. 如果 PX、PY 使 $\angle XPY$ 保持不变动时, 证明 $\triangle XPY$ 的外接圆恒与一个定圆相切.



解 设 P 为反演中心, 以任意数为反演幂, 并使 X、Y 在反形上的对应点分别为 x、y, 则直线 LM 的反形是圆 Pxy (问题 **3435**), 圆 PXY 的反形是直线 xy (问题 **3436**). 又因 $\angle XPY$ 即 $\angle xPy$ 及圆 xPy 是一定的, 所以即使圆 PXY 移动时, 线段 xy 的长也是一定的. 从而线段 xy 与圆 Pxy 的同心圆 ABC 相切. 反之, 相应于 xy 的反形的圆 PXY, 切于相应圆 ABC 的反形的定圆 (问题 **3434**).

3442. 若以 A、B 为圆心两圆的根轴 XY, 关于两圆 A、B 的极点分别为 P、Q, 则 P、Q 关于两圆的相似中心 S、S' 作成调和共轭点.

解 设 XY 与 AB 的交点为 M, 由 M 向两圆 A、B 作切线 MT、MT', 而 M 是根轴上的点, 因此 $MT=MT'$.



又因 P、Q 是 XY 的极点，所以

$$MA\cdot MP=MT^2,\quad MB\cdot MQ=MT'^2.$$

$$\therefore\quad MA\cdot MP=MB\cdot MQ. \qquad ①$$

又 S、S' 是两圆的相似中心，于是以 SS' 为直径的圆是与两圆 A、B 共轴系的圆(上题)，故

$$MS'\cdot MS=MT'^2. \qquad ②$$

由①、②知以 M 为反演中心，以 MT'^2 为反演幂，求 P、Q、S、S' 的反形的对应点分别为 A、B、S'、S. 因此 $(P,\ Q,\ S,\ S')=(A,\ B,\ S',\ S)$. 由于 $(A,\ B,\ S',\ S)$ 是调和点列，所以$(P,\ Q,\ S,\ S')$是调和点列。

3443. 作已知圆的内接四边形 $ABCD$，使边 AB、BC、CD、DA 分别过定点 P、Q、R、S。

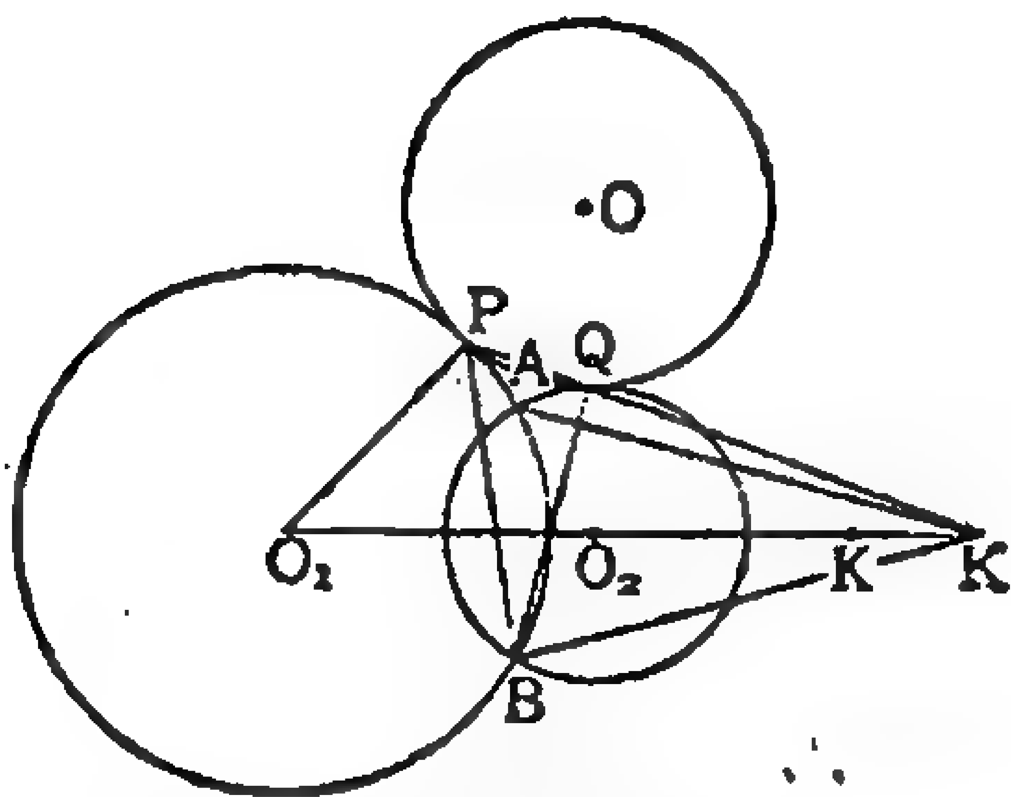
解 ［分析］ 设四边形 $ABCD$ 是所作的四边形，以定点 P、Q、R、S 为反演中心，且以相对于这些点的定圆的圆幂为反演幂，将点 A 顺次对于 P、Q、R、S 作四次反形，则点 A 再回到原来的位置。

如果将点 S 在 R、Q、P 的圆上作三次反形，其位置设为 S'，则将 S' 在 P、Q、R 的圆上作三次反形时，显然 S' 是回到点 S 的位置。又将直线 $S'A$ 依次对于 P、Q、R 作反形，则是过点 S 的圆。若将这个圆对于 S 再作反形，则变成过 A 的直线 $P'A$，这个点 P' 是将点 P 在 Q、R、S 的圆上依次作了三次反形的点。但是直线 $S'A$ 与圆的夹角，在进行四次反形后其大小、符号也不变。因此 $S'A$ 与 $P'A$ 是一直线。所以可作图如下。

［作图］ 由 P 依次在 Q、R、S 的圆上作反形，求出点 P' 的确定位置。其次，将 S 依次在 R、Q、P 的圆上作反形，确定 S' 的位置，设 $P'S'$ 与圆的交点为 A。

同理，依次作出 B, C, D。

3444. 若两圆 PAB, QAB 分别在 P、Q 上与圆 O 相切时，证明下列比例式



$$AP:AQ=BP:BQ.$$

解 设圆 PAB、QAB 的圆心分别为 O_1、O_2，O_1O_2 与 PQ 的交点为 K，则 K 是两圆 O_1、O_2 的相似中心。连结 KA，则 O_1、O_2 是以 K 为反演中心的互为反形(问题 **3439**)。由圆 O 在点 P、Q 与圆 O_1、O_2 相切，于是 P、Q 是反形的对应点；

$$\therefore\quad KP\cdot KQ=KA^2.$$

因此 KA 是 $\triangle APQ$ 外接圆的切线。

$$\therefore\quad \angle APQ=\angle KAQ,\ \triangle KPA\backsim\triangle KAQ,$$

从而 $\qquad AP:AQ=KP:KA.$

同理，连结 KB，有 $KP:KQ=KB^2$，所以 KB 是 $\triangle BPQ$ 外接圆的切线。

$$\therefore\quad \angle BPQ=\angle KBQ,\ \triangle KPB\backsim\triangle KBQ,$$

因而 $\qquad BP:BQ=KP:KB.$

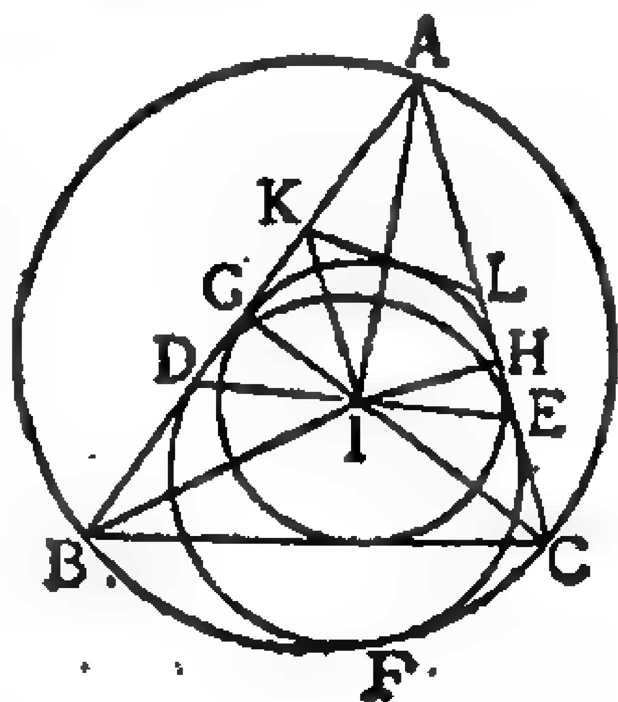
因 K 是中心线 O_1O_2 上的点，故

$$KA=KB.$$

$$\therefore\quad KP:KA=KP:KB,$$

即 $\qquad AP:AQ=BP:BQ.$

3445. 设一个圆与 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 以及外接圆分别相切于点 D、E、F，应用反形法证明，连结 DE 的直线过 $\triangle ABC$ 的内心 I。



解 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 I 与 AB、AC 的切点分别为 G、H，在这个圆上作与 BC 逆平行的切线 KL，与 AB、AC 的交点分别为 K、L，则

$$AB\cdot AK=AC\cdot AL.$$

又设 $\angle KAL=2\alpha$, $\angle ALK=2\beta$，则有

$$\angle LKB=2\alpha+2\beta.$$

$$\therefore\quad \angle LKI=\alpha+\beta.$$

而 $\qquad \angle AKL=180°-2\alpha-2\beta,$

$\therefore\ \angle AIK=180^\circ-\angle AKL-\angle LKI-\angle IAK$
$=180^\circ-(180^\circ-2\alpha-2\beta)-(\alpha+\beta)-\alpha=\beta$。

$\therefore\ \angle AIK=\frac{1}{2}\angle ALK=\angle ABI$。

因此，AI 是在点 I 切于 $\triangle BIK$ 的外接圆，

$\therefore\ AK\cdot AB=AI^2$。

若以 A 为反演中心，以 AI 为反演幂，作 KL 的反形，则由问题 3435 有圆 ABC。因圆 I 与 KL、AB、AC 相切，所以圆 I 的反形是与圆 ABC 及直线 AB、AC 相切的圆 DEF。即圆 I 与圆 DEF 是以 A 为反演中心，反演幂为 AI^2，D、G 是对应点，故有

$$AD\cdot AG=AI^2。$$

因 $IG\perp AD$，所以 $\angle AID=\angle R$。同理 $\angle AIE=\angle R$，所以 D、I、E 在一直线上。

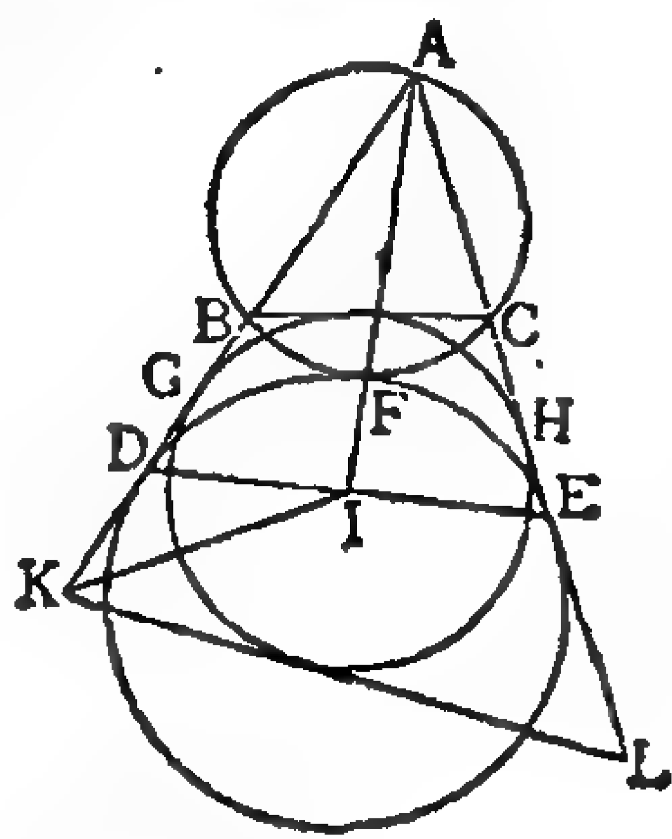
注　（定义）　当 $\angle ALK=\angle ABC$ 时，常称 KL 与 BC 是逆平行的。

3446．若作一圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆及边 AB、AC 的延长线分别在点 F、D、E 相切时，应用反形法证明，连结 DE 的直线过 $\triangle ABC$ 的旁心。

解　设 $\angle A$ 内的旁心为 I，旁切圆与 AB、AC 的切点为 G、H，若在圆 I 上作与 BC 逆平行的切线 KL，则与上题一样有

$$AC\cdot AL=AK\cdot AB=AI^2。$$

若以 A 为反演中心，AI^2 为反演幂，则与上题一样，圆 I 与圆 DEF 互为反形。所以



$$AG\cdot AD=AK\cdot AB=AI^2,$$

且 $AD\perp IG$，因此连结 DI，有

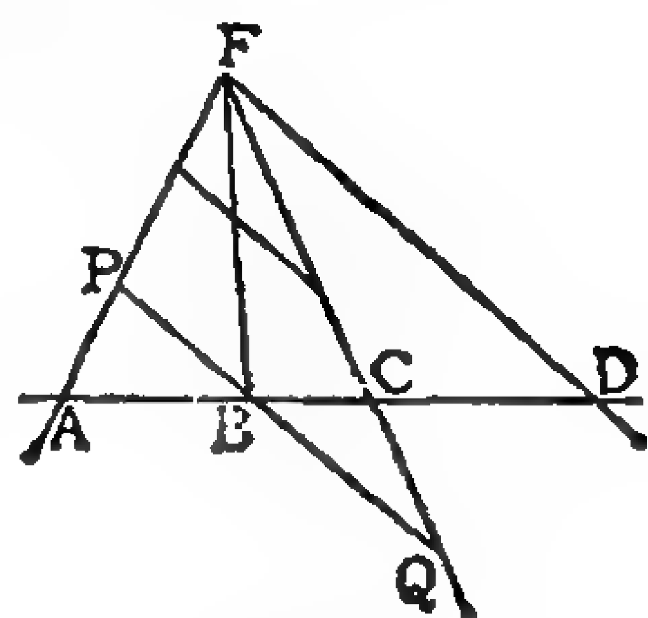
$$\angle AID=\angle R。$$

同理，$\angle AIE=\angle R$，所以 D、I、E 在一直线上。

5．十字比、对合

3447．若由四条射线组成的定线束被一横线相截，则其四个十字比不随横截线变化而变化。

解　设线束（顶点为 F）由一横线所截的截点为 A、B、C、D，过 B 作 FD 的平行线与 FA 交于 P，与 FC 交于 Q，则



$$AB:AD=PB:FD$$

及

$$CD:BC=FD:QB。$$

$\therefore\ AB\cdot CD:AD\cdot BC=PB:QB$。

由这个等式右端是定比，所以十字比 $AB\cdot CD:AD\cdot BC$ 对一切横截线都是定值。

注　（定义）　十字比又称非调和比。在一条直线上有四点 A、B、C、D，按下列方式作比

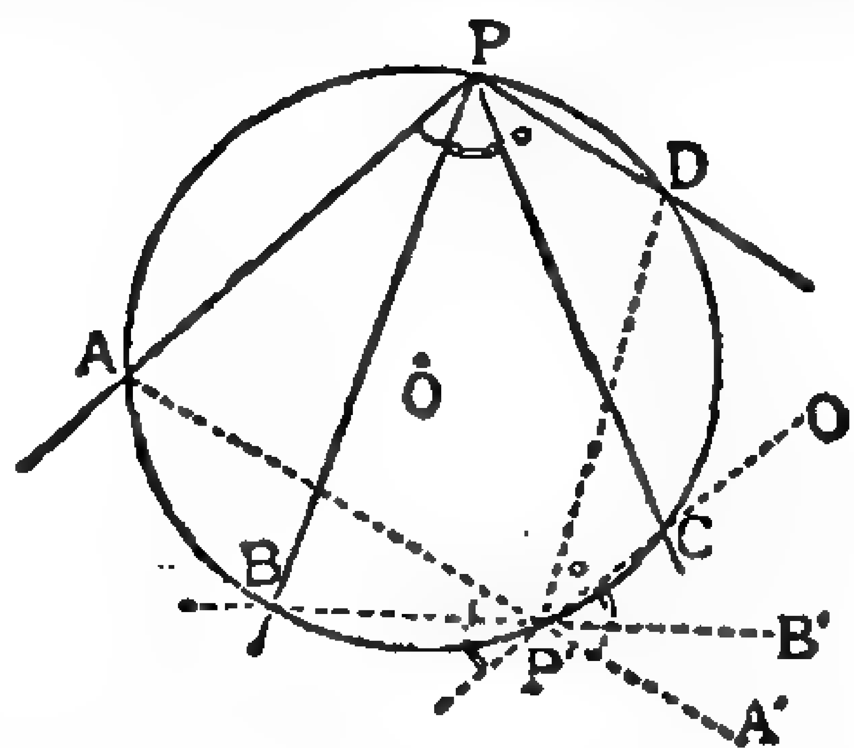
$$\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD}\quad 或\quad AB\cdot CD:AD\cdot CB$$

叫做这些点的十字比，或叫非调和比。十字比记为 $(ABCD)$，上图中的线束记为 $F(ABCD)$。

若 $\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD}=-1\left(\frac{AB}{BC}:\frac{AD}{CD}=1\right)$，则点列 A、B、C、D 是调和点列。

3448．同一圆上的四点与此圆上任意点连结的线束，十字比的值恒为一定。

解　设同一圆上的四点为 A、B、C、D，将此四点与圆上任一动点 P 连结，则所成的角 $\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPD$、$\angle APD$ 是一定的，因此十字比 $P(ABCD)$ 是定值。在图中，显然有

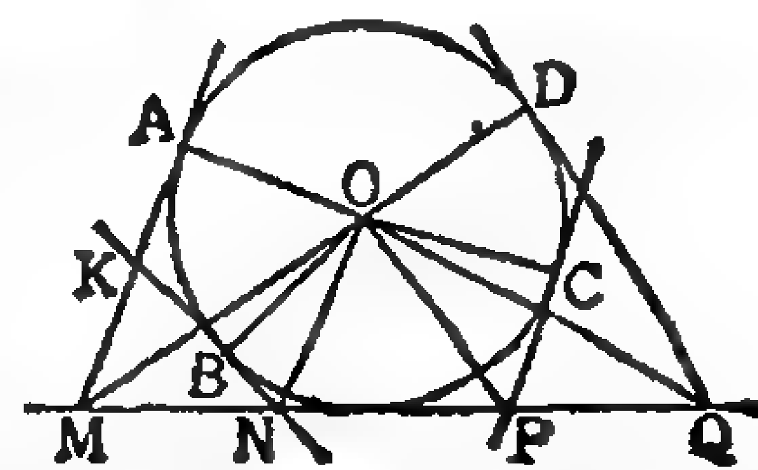


$$\angle APB=\angle A'P'B',\ \angle BPC=\angle B'P'C',$$
$$\angle CPD=\angle CP'D,$$

$\therefore\ P(ABCD)=P'(A'B'CD)$。

3449．切于同一圆的四条定切线，若被第五条动切线所截，则其十字比一定。

解　设过圆上四点 A、B、C、D 所作切线，分别称为 A、B、C、D，这四条切线与第五条动切线的交点分别为 M、N、P、Q，圆心为 O，切线



A、B的交点为K，则O是$\triangle MKN$的旁心，故有

$$\angle MON=\frac{1}{2}\angle MKN.$$

由于A、O、B、K共圆，所以

$$\angle MKN=\angle AOB.$$

因此 $\angle MON=\frac{1}{2}\angle AOB.$

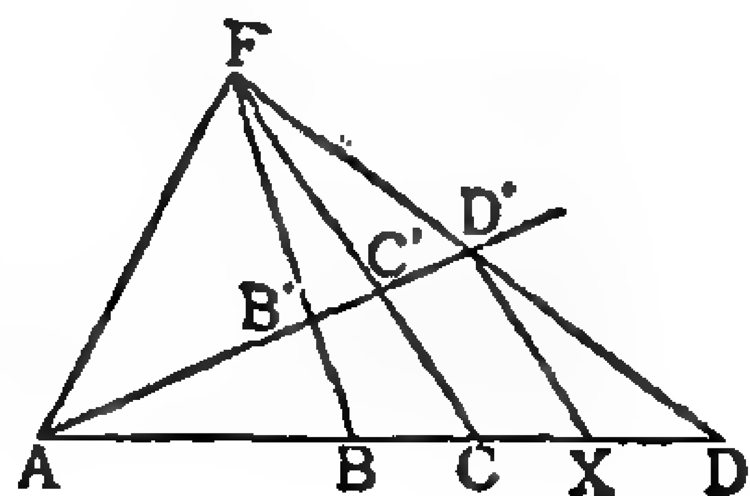
同理， $\angle NOP=\frac{1}{2}\angle BOC,$

$$\angle POQ=\frac{1}{2}\angle COD,$$

于是在线束$O(MNPQ)$的顶点O处的夹角一定，所以十字比$(MNPQ)$也一定。

3450. 若共一点A的两组点列$ABCD$、$AB'C'D'$的十字比相等，则连结其对应点的直线相交于一点。

解 设直线BB'、CC'交点为F，直线FD'与直线$ABCD$交于点X，连结FA，因为

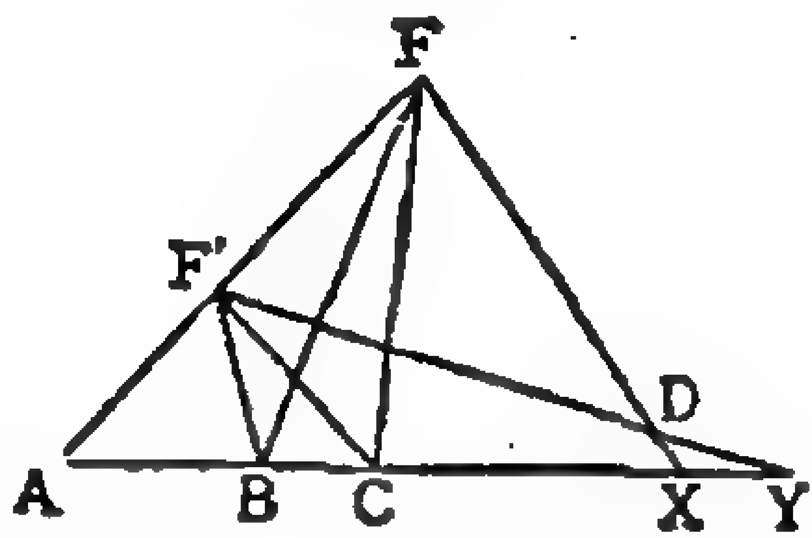


$$F(ABCX)=F(AB'C'D')=F(ABCD),$$

于是FX与FD是同一条射线，所以X与D是同一点，即BB'、CC'、DD'三线共点。

3451. 设有四条射线的两组线束，这两组线束顶点不同，但共有一条射线，且其十字比相等时，则对应射线的交点是共线点。

解 线束$F(ABCD)$及$F'(ABCD)$共一条射线FF'，且有相同的十字比。将BC向两端延长与FF'相交于点A，与FD相交于点X，且$F'D$与BC相交于点Y，因为



$$F(ABCX)=F(ABCD)=F'(ABCD)$$
$$=F'(ABCY)=F(ABCY).$$

所以FX与FY是同一条射线，即X与Y重合，从而这两点都与点D重合。所以A、B、C、D是共线点。

3452. 在对合的点群中，任意四点A、B、C、D的十字比与其共轭点A'、B'、C'、D'的十字比相等。

解 设O为对合中心，重点为F，从O向任意方向作直线OP，设$OP=OF$，连结P与各点，由定义有$OA\cdot OA'=OP^2$，于是OP是圆APA'的切线。因此$\angle OPA=\angle PA'O$。同理，$\angle OPB=\angle PB'O$，

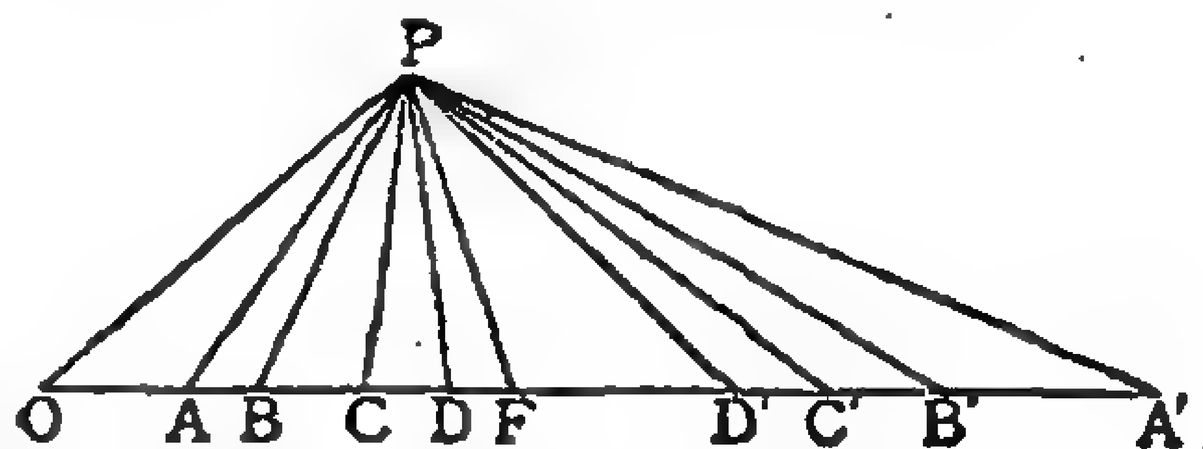
$$\therefore\ \angle APB=\angle PB'O-\angle PA'O$$
$$=\angle A'PB'.$$

同理，

$$\angle BPC=\angle B'PC',\ \angle CPD=\angle C'PD'.$$

所以两组线束$P(ABCD)$及$P(A'B'C'D')$的十字比相等。

$$\therefore\ (ABCD)=(A'B'C'D').$$



注 （定义） 对合：A、A'，B、B'，C、C'等在一条直线上，取这条直线上的一点O，使

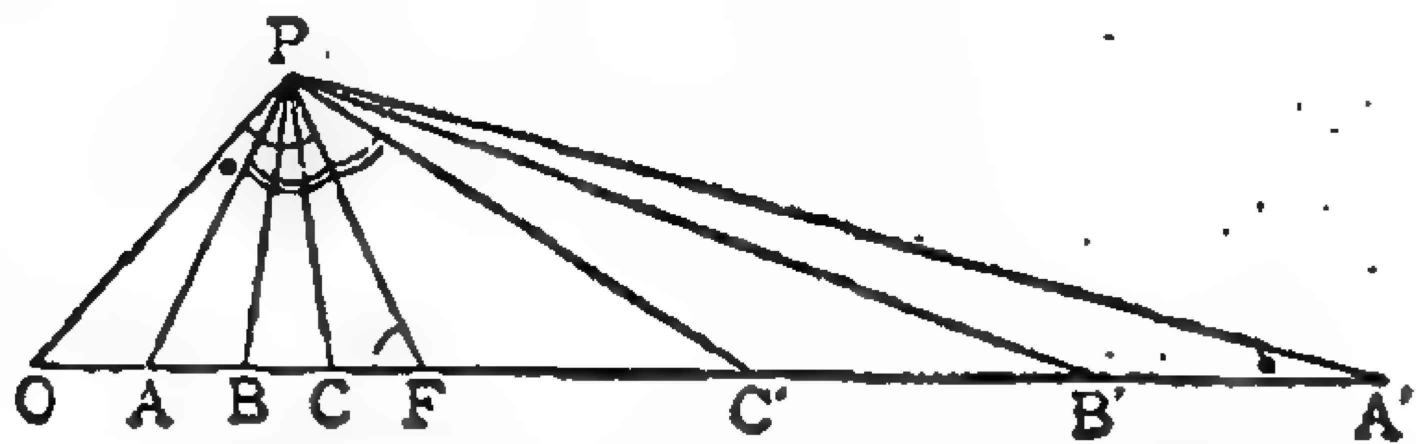
$$OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=OC\cdot OC'=\cdots$$

则这些点叫做对合的，O叫对合中心。A、A'，B、B'，C、C'，…叫做对合共轭点。又E、F取在O的点列线上的两侧，使

$$OE^2=OF^2=OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=\cdots$$

则E、F叫做重点。又点P与各点连结的直线叫做对合线束。OE、OF叫做重射线。又若共轭点在中心O的同侧时，则重点或重射线是存在的。

3453. 在对合点群中，任意三点A、B、C与重点F的十字比，等于三个点的共轭点A'、B'、C'与重点F的十字比。

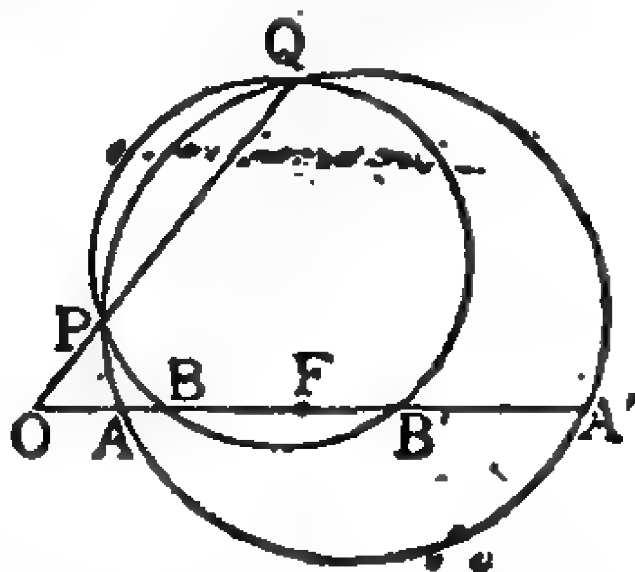


解 与上题一样，设$OP=OF$，则$\angle OPF=\angle PFO$，从而$\angle APF=\angle A'PF$。因此两组线束$P(ABCF)$与$P(A'B'C'F)$的十字比相等。

$$\therefore\ (ABCF)=(A'B'C'F).$$

3454. 已知对合共轭点A与A'，B与B'，求其对合中心O及重点F。

解 过A、A画任意圆，再过此圆上的任意点P与B、B'画圆与前一圆的另一交点为Q，则延长QP与AA'的交点就是所求的对合中心O。因为



$$OA\cdot OA'=OP\cdot OQ=OB\cdot OB',$$

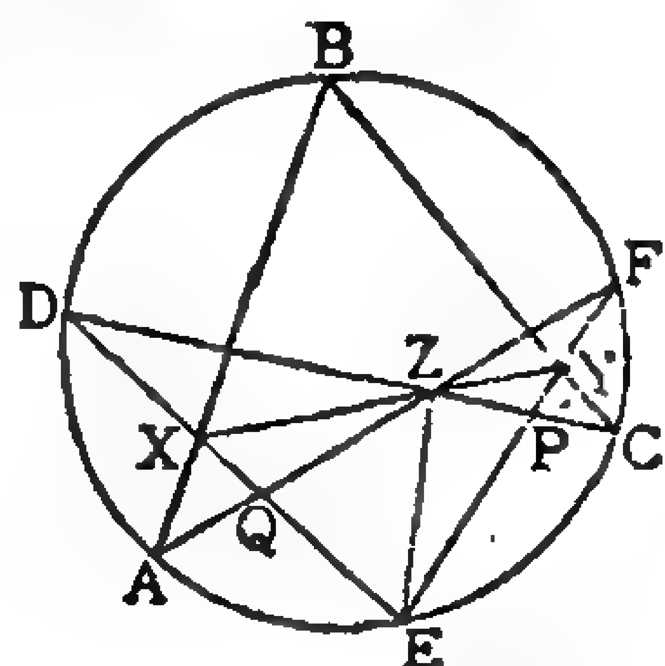
其次，如果重点E、F存在(共轭点在点O的同侧时)，则有

$$OE^2=OF^2=OA\cdot OA'.$$

由此关系，在点O的两侧能够求得E、F。

3455. 设A、B、C、D、E、F为圆上任意六点，从任意一点按任意顺序连续连结各点的六条直线中，则第一条与第四条的交点、第二条与第五条的交点，第三条与第六条的交点是共线点。

[帕斯卡定理]



解 设AB与DE，BC与EF，CD与FA的交点分别为X、Y、Z，连结ZX，ZY，ZE，ZA与XE的交点为Q，ZC与YE的交点为P，这时有

$$Z(FYPE)=C(FYPE) \quad ①$$

及

$$C(FYPE)=C(FBDE)=A(FBDE) \quad ②$$

(问题**3442**)。

同理，

$$A(FBDE)=A(QXDE)=Z(QXDE). \quad ③$$

由①、②、③得

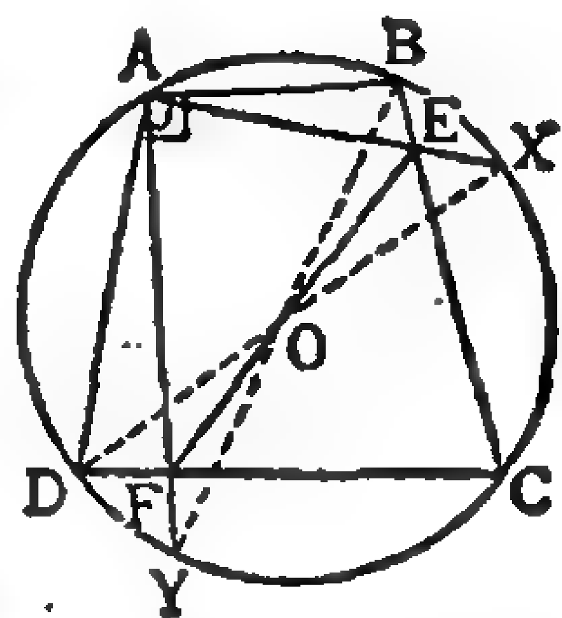
$$Z(FYPE)=Z(QXDE),$$

即在相等的十字比$(FYPE)=(QXDE)$上，三条射线ZE、ZP、ZF分别与ZE、ZD、ZQ公共，于是有第四条射线ZY与ZX是同一直线。

注 帕斯卡定理最简单的情形是问题**1538**。本题中，直线XZY叫做帕斯卡线。

3456. 作圆O的内接$\triangle ABC$，设A、B、C关于点O的对称点分别为A'、B'、C'，在圆上任取一点P，若PA'、PB'、PC'与BC、CA、AB的交点分别为X、Y、Z，则四点X、Y、Z、O在一直线上。

解 圆O内接帕斯卡六边形$ACC'PB'BA$中，AC与PB'，PC'与AB，CC'与BB'的交点Y、Z、O在一直线上(由上题)。同理X、Z、O也在一直线上。所以X、Y、Z、O在一直线上。



3457. 设$ABCD$是圆O的内接四边形，E、F在CB、CD上，且使$\angle DAE$、$\angle BAF$为直角的点，则E、O、F在一直线上。

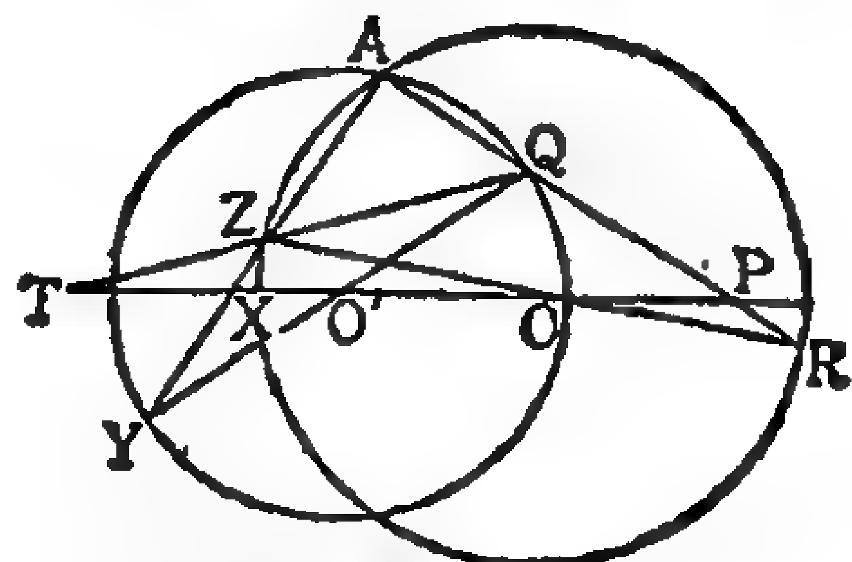
解 设延长AE、AF分别与圆O交于点X、Y，则DX、BY是这个圆的直径，相交于圆心O。若把$AXDCBY$看作帕斯卡六边形(问题**3455**)，则AX与CB，XD与BY，DC与YA的交点，即E、O、F在一直线上。

6. 杂题

3458. 过两圆的交点之一A作两条互相垂直的直线ZXY、QPR，与两圆的圆心线相交于点X、P，若这两直线又与一圆相交于点Y、Q，与另一圆相交于点Z、R，则

$$XY:XZ=PQ:PR.$$

解 把ZR、YQ上的点O、O'作为圆心，由$\angle ZAR$是直角知，直线ZR、YQ分别过O及O'。设OO'与QZ的交点为T，则OO'是$\triangle YZQ$及$\triangle RZQ$的横截线，由美奈劳斯定理知，



$$\frac{YX}{XZ}\cdot\frac{ZT}{TQ}\cdot\frac{QO'}{YO'}=1, \quad \therefore \quad \frac{YX}{XZ}=\frac{TQ}{ZT};$$

$$\frac{QP}{PR}\cdot\frac{RO}{OZ}\cdot\frac{ZT}{TQ}=1, \quad \therefore \quad \frac{QP}{PR}=\frac{TQ}{ZT}.$$

所以 $$\frac{XY}{XZ}=\frac{PQ}{PR}.$$

3459. 设$\triangle ABC$的边AB、BC、CA分别过一条直线上的定点X、Y、Z，且两个顶

点 A、B 分别在定直线 OL、OM 上时，求第三顶点 C 的轨迹。

解 作 XQ、YP 分别平行 OL、OC，与 OM 的交点为 Q 及 P，则 ACZ 是 $\triangle YBX$ 的横截线，由美奈劳斯定理有

$$\frac{YZ}{ZX}=\frac{YC}{CB}\cdot\frac{BA}{AX}=\frac{PO}{OB}\cdot\frac{BO}{OQ}=\frac{PO}{OQ}.$$

因此比 $PO:OQ$ 一定。而 O、Q 是定点，知 P 也是定点，YP 是定直线。因为 OC 平行于 YP，O 是定点，所以 OC 是定直线。故点 C 的轨迹是直线 OC。

3460. 从 $\triangle ABC$ 内一点 M 向 BC、CA、AB 作垂线，其垂足分别为 A'、B'、C'。点 O 为 $\triangle A'B'C'$ 的外心，从 A、B、C 向边 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 作垂线，则这三条垂线相交于点 M 关于 O 的对称点 M' 上。

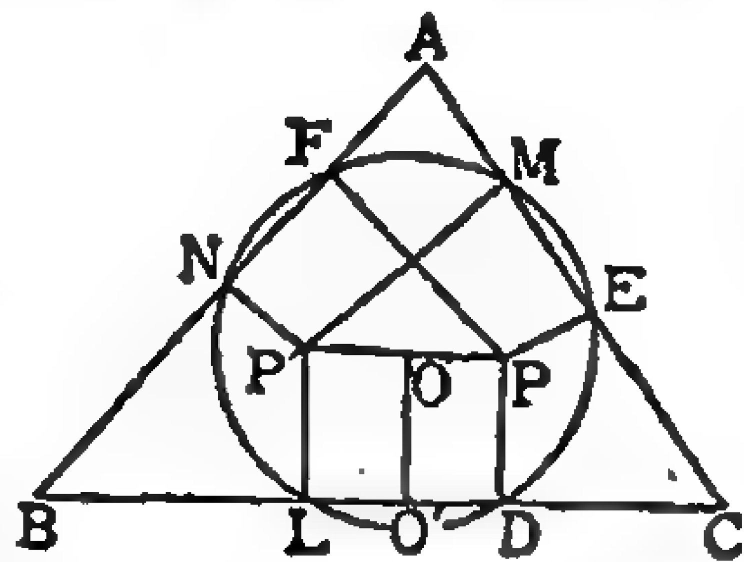
解 因为 $\angle AB'M=\angle B$ $=\angle AC'M$，由此 A、C'、M、B' 是共圆点，其圆心 I 是 AM 的中点。假定 $\triangle A'B'C'$ 的外心为 O，则 $B'C'$ 是两圆 $AB'C'$、$A'B'C'$ 的公共弦，于是 $B'C'$ 垂直于圆心线 IO，即 $OI\perp B'C'$。因为 $AI=IM$，$MO=OM'$，所以 $IO\parallel AM'$，

$$\therefore\quad AM'\perp B'C'.$$

同理，$BM'\perp A'C'$，$CM'\perp A'B'$。所以三条垂线过 M'。

3461. 由 $\triangle ABC$ 内任一点 P 向各边作垂线，过其垂足 D、E、F 的圆与三角形各边再相交时，则过这些点 L、M、N 所作的各边上的垂线共点。

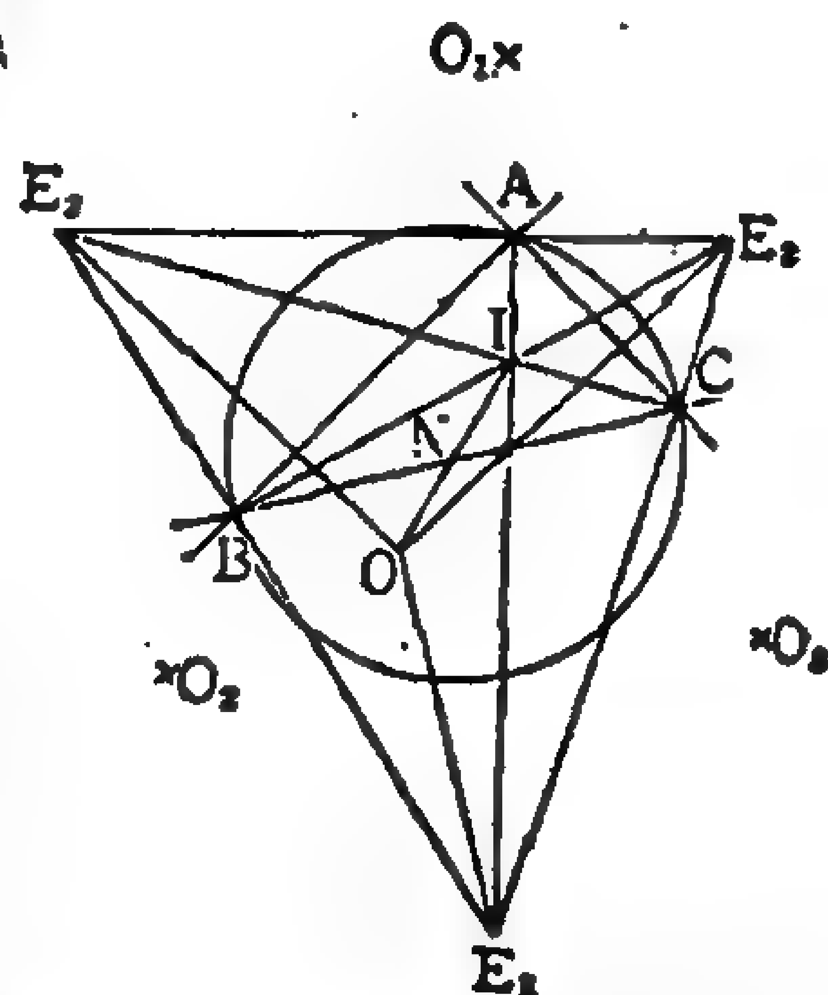
解 设圆 DEF 的圆心为 O，该圆与 $\triangle ABC$ 各边再交于 L、M、N，在 PO 的延长线上取点 P'，使 $OP'=OP$，在 BC 上作 O 的射影 O'，则 O' 是 PP' 射影的中点。



又 O' 是弦 LD 的中点，而 D 是 P 的射影，因此 L 是 P' 的射影。由此过点 L 垂直于 BC 的直线过点 P'。同理过点 M、N 分别垂直于 AC、AB 的直线都过点 P'，所以这三条垂线共点。

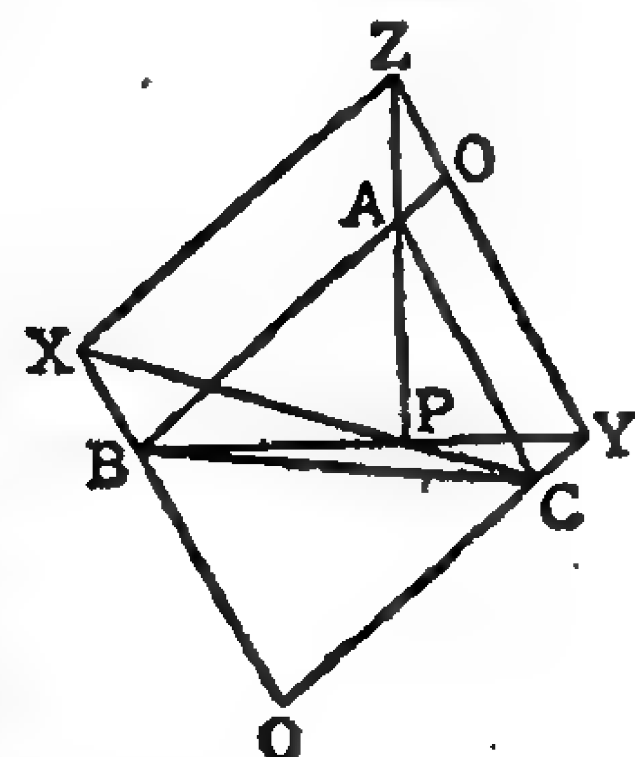
3462. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，旁心为 E_1、E_2、E_3，若由这四点向各边作十二条垂线，每三条交于一点即相交于四点，则这四点是四个旁心三角形的外心。

解 设 O、O_1、O_2、O_3 是旁心三角形 $E_1E_2E_3$、E_2E_3I、E_3IE_1、IE_1E_2 的外心，则 $\triangle ABC$ 是这四个三角形的垂足三角形（问题 465）。O 是 $\triangle E_1E_2E_3$ 的外心，$\triangle ABC$ 是其垂足三角形（问题 507），因此 OE_1 垂直于 BC，OE_3 垂直于 AB，OE_2 垂直于 AC。又由 I、E_2、E_3 分别向其垂足三角形的各边所作的垂线过点 O_1。由 I、E_3、E_1 分别向 AC、BC、AB 所作的垂线过点 O_2。由 I、E_2、E_1 分别向 AB、BC、AC 所作的垂线过点 O_3。所以从 I、E_1、E_2、E_3 向 $\triangle ABC$ 的各边作十二条垂线，每三条在 O、O_1、O_2、O_3 上相交。



3463. 过 $\triangle ABC$ 的两个顶点 B、C 分别引平行于对边的直线，在其上分别取点 X、Y，过 X、Y 分别引 AB、AC 的平行线相交于点 Z，则 XC、YB、ZA 是共点线。

解 设 XB、YC 的交点为 O，XC、BY 的交点为 P，BA、YZ 的交点为 O'，这时 XPC 是 $\triangle BOY$ 的横截线，因此由美奈劳斯定理有



$$\frac{BP}{PY}\cdot\frac{YC}{CO}\cdot\frac{OX}{XB}=1.$$

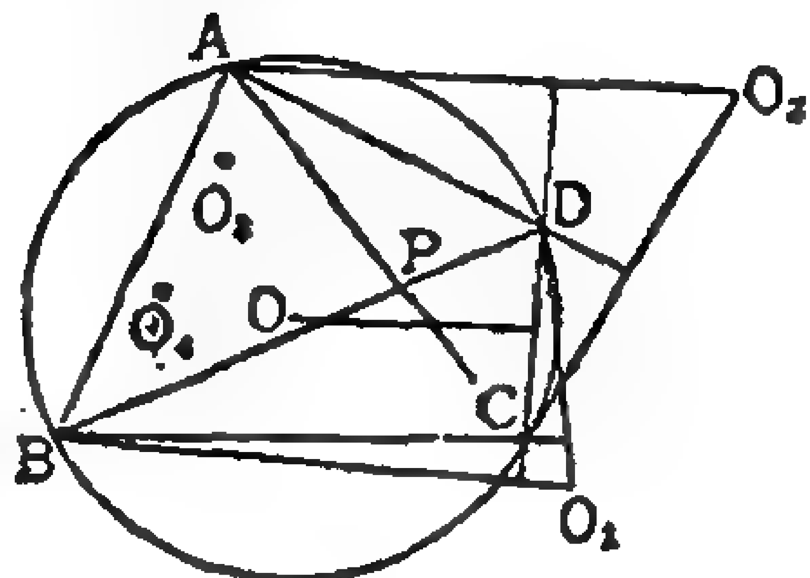
因　　$YC=O'A$，$CO=AB$，

$OX=YZ$，$XB=ZO'$。

$$\therefore\ \frac{BP}{PY}\cdot\frac{O'A}{AB}\cdot\frac{YZ}{ZO'}=1.$$

因此，由美奈劳斯逆定理知，点 Z、A、P 在一条直线上。

3464. 设 A、B、C、D 是这个顺序的共圆点，O_1、O_2、O_3、O_4 分别为 $\triangle BCD$、$\triangle ACD$、$\triangle ABD$、$\triangle ABC$ 的垂心，则 AO_1、BO_2、CO_3、DO_4 相交于同一点。

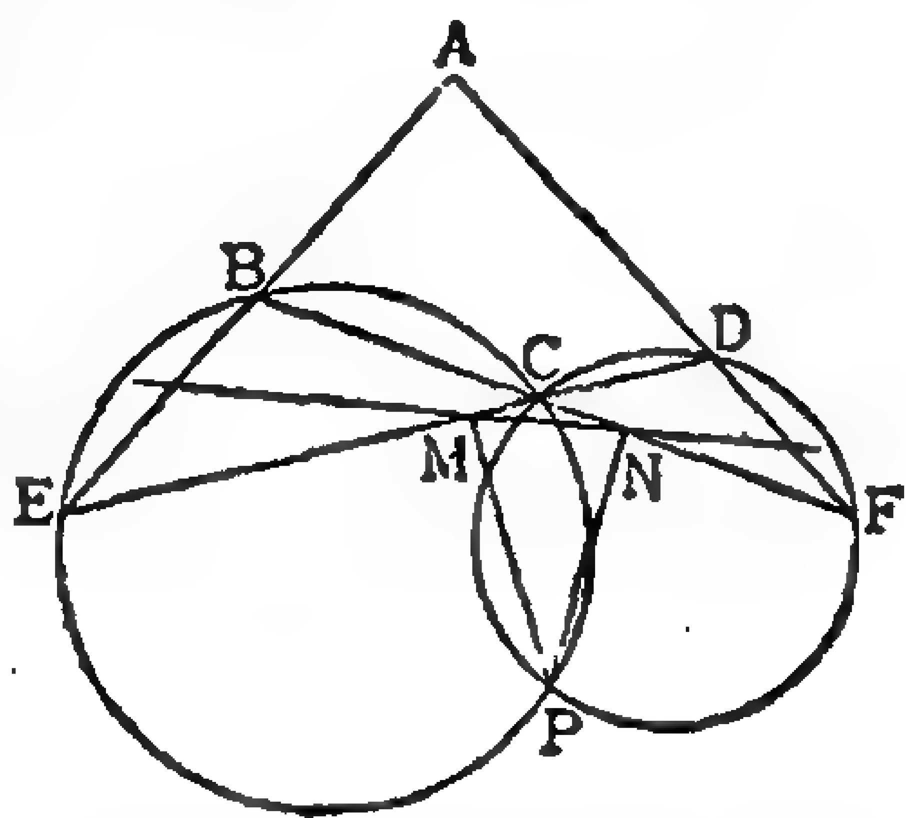


解 因为 AO_2、BO_1 都垂直于 CD，且等于从外接圆心 O 向 CD 所作垂线长的两倍(问题 **500**)。由此 $AO_2 \mathrel{\underline{\parallel}} BO_1$，所以 AO_1，BO_2 互相平分。

同理，$BO_3 \mathrel{\underline{\parallel}} CO_2$，且 BO_2、CO_3 互相平分。又 $AO_4 \mathrel{\underline{\parallel}} DO_1$ 从而 AO_1 与 DO_4 互相平分。所以四条直线 AO_1、BO_2、CO_3、DO_4 分别在其中点上相交。

3465. 若四边形 $ABCD$ 的两组对边延长相交于 E、F，则四个 $\triangle BCE$、$\triangle DCF$、$\triangle ABF$、$\triangle ADE$ 的垂心在同一直线上。

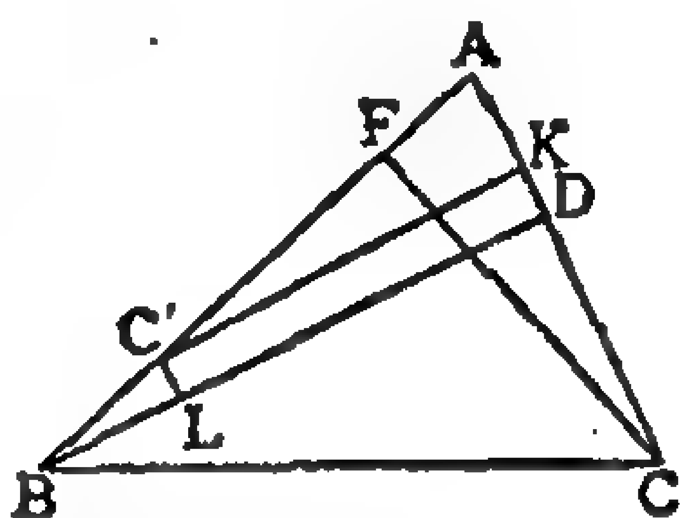
解 设 $\triangle BCE$、$\triangle DCF$ 的外接圆相交于点 P，则另外两个三角形的外接圆也通过点 P(问题 **631**)。若从点 P 向 BF、DE 作垂线 PN、PM，则关于点 P 的四个三角形的西姆逊线都过 M、N 的同一直线。但是(问题 **672**)连结三角形的垂心与外接圆上点 P 的直线，是被关于点 P 的西姆逊线 MN 所平分。设四个垂心为 H_1、H_2、H_3、H_4，则这些点在平行于 MN 的同一直线上。



3466. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB>AC$，由 B、C 向对边作垂线 BD、CF，则

$$AB+CF>AC+BD.$$

解 在 AB 上取 $AC'=AC$，由 C' 向 AC、BD 作垂线 $C'K$、$C'L$，则在 $\triangle ACF$、$\triangle AC'K$ 中，$\angle A$ 公共，$\angle F=\angle K=\angle R$，$AC=AC'$，因此，$\triangle ACF\cong\triangle AC'K$，$\therefore CF=C'K=LD$。



$\therefore\ AB-AC$

$=AB-AC'$

$=BC'$，①

$BD-CF$

$=BD-C'K$

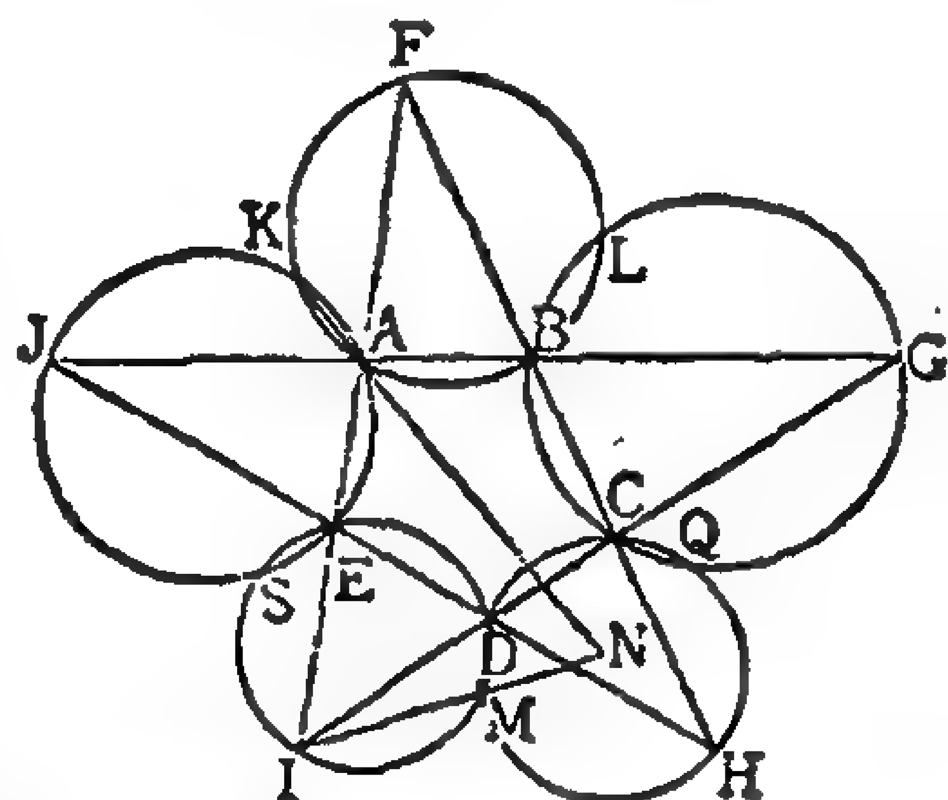
$=BL$。②

又 $\angle BLC'=\angle R$，于是 $BL<BC'$。

由①、②有 $AB-AC>BD-CF$，

$\therefore\ AB+CF>AC+BD.$

3467. 将五边形 $ABCDE$ 的各边延长相交，得到星形的顶点如图中的 F、G、H、I、J，设 $\triangle ABF$ 与 $\triangle AEJ$ 外接圆的交点为 K，$\triangle ABF$ 与 $\triangle GBC$ 外接圆的交点为 L，$\triangle EDI$ 与 $\triangle CDH$ 外接圆的交点为 M，KA 与 IM 的交点为 N，则 K、L、N、M 共圆。



解 在完全四边形 $AICBFG$ 中，$\triangle ABF$、$\triangle BCG$、$\triangle FIC$ 的外接圆相交于一点(问题 **631**)。由于 $\triangle ABF$、$\triangle BCG$ 的外接圆相交于 L，则 I、F、L、C 共圆。

同理，在完全四边形 $EFCDIH$ 中，因为 $\triangle DCH$、$\triangle DEI$、$\triangle FIC$ 的外接圆相交于一点，$\triangle DEI$ 与 $\triangle DCH$ 的外接圆相交于 M，则 F、C、M、I 共圆(因为过公共三点 F、C、I 的圆，所以是同一圆)。

$$\angle IFL=180^\circ-\angle LMI=\angle NML.\quad ①$$

但是 $\angle IFL=\angle AKL=\angle NKL.$　②

根据①、②得

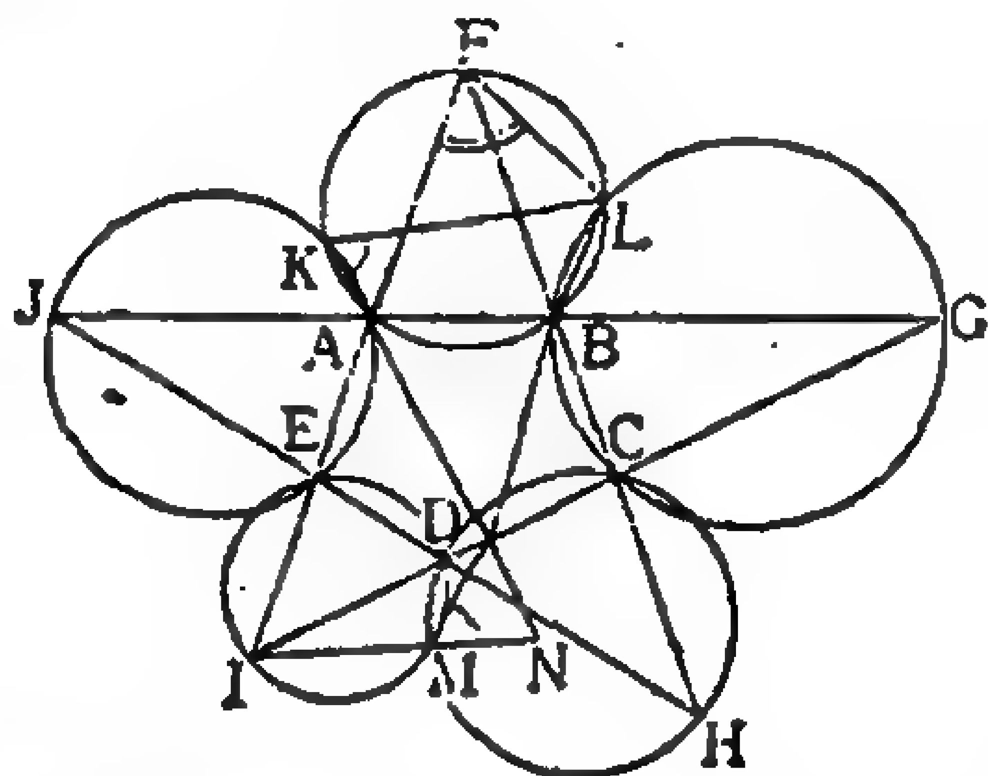
$$\angle NKL=\angle NML,$$

所以 K、L、N、M 共圆。

3468. 把五边形 $ABCDE$ 的各边延长作出五个三角形，则这五个三角形外接圆的五个新交点是在同一圆周上。[米库勒定理]

解 由上题的证明，显然 K、L、N、M 共圆。又因 E、M、K 在 $\triangle AIN$ 的各边上，因此 $\triangle KAE$、$\triangle EIM$、$\triangle KMN$ 的三个外接圆相交于一点。由于圆 KAE 与圆 EIM 的

交点是S,故知$\triangle KMN$的外接圆过点S。又因K、L、N、M共圆，所以K、L、M、S也共圆。同理K、L、M、Q也共圆。由此K、L、Q、M、S共圆。



3469. 圆形弹子盘上A点放有一只球，这个球向边缘作两次反射，使其回到原位置A上，试作出点A所经过的路线$ABCA$的图。根据物体反弹的法则，半径OB、OC应分别是$\angle ABC$、$\angle ACB$的平分线。

解 ［分析］ 设问题已解出，B、C为圆上所求出的位置，由于BO、CO是$\angle ABC$、$\angle ACB$的平分线，显然有$AB=AC$, $OB=OC$。从点A作BC的平行线，与BO的延长线相交于点G，则BG是$\angle CBA$的平分线，因此

$$AB=AG. \qquad ①$$

以A为圆心、AO为半径作圆，与OA、OG的交点分别为L、H，则有

$$\angle AOH=\angle AHO. \qquad ②$$

又由①有　$\angle G=\angle ABO$, 　③

由②、③有　$\angle GAH=\angle OAB$,

且因$AH=OA$, $AG=AB$, 因此

$$\triangle AGH\cong\triangle ABO.$$

$\therefore$　$HG=OB=r$　(r为圆O的半径),

$$\therefore\ OG-OH=r. \qquad ④$$

又$\angle GHL=\angle R=\angle GAL$, 因此，$G$、$H$、$A$、$L$共圆，

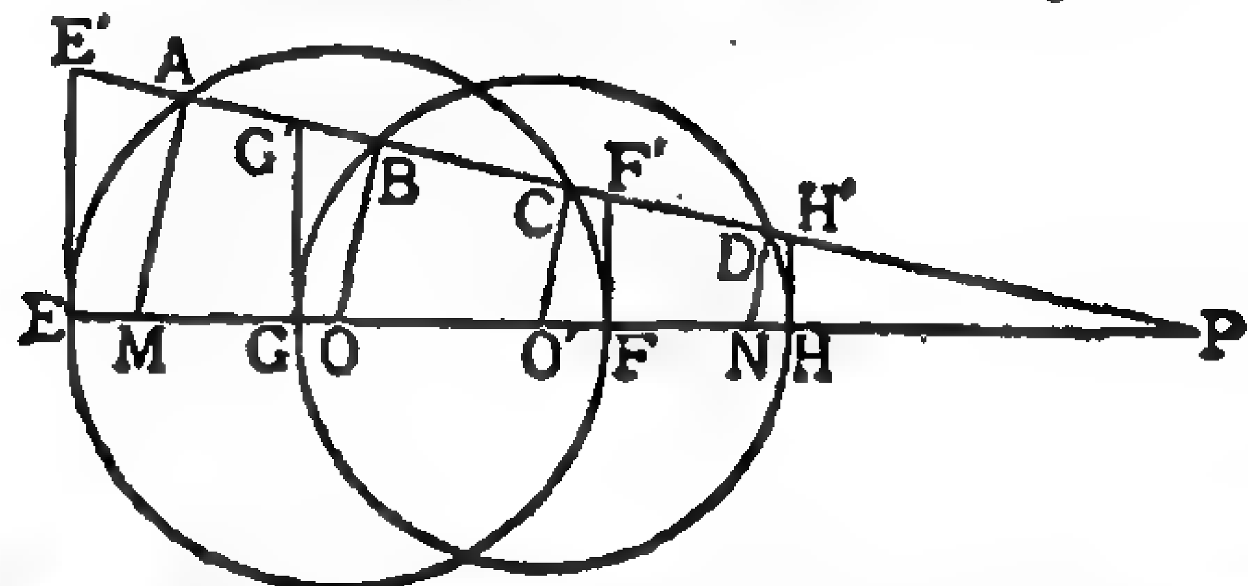
$$OH\cdot OG=OA\cdot OL=2OA^2$$

$$(\because\ OL=2OA). \qquad ⑤$$

由④与⑤知OG与OH之差与积，于是可以作出这两条线段(问题**2016**)。由此作图如下。

［作图］ 作过点A的直径EF，由A作EF的垂线，在其上取点G，使其满足分析中的条件④、⑤，求出OG，延长GO与圆相交于B，作点B关于EF的对称点C，则$ABCA$必是所求的球的路径。

3470. 在相交的两个定圆O、O'上，求作一条割线$ABCD$，与两圆的交点依次为A、B、C、D，使其满足$AB=BC=CD$。



解 ［分析］ 设割线$ABCD$已求出，连结BO, CO'，因为$AB=BC$, $BC=CD$，所以$BO\perp AC$, $CO'\perp BD$。于是从A、D作BO的平行线，与连心线OO'交于点M、N，则有$MO=OO'=O'N$，因此点M、N是定点。① 如图，设EF、GH是两圆的直径，从点E、F、G、H作EH的垂线，与AD的交点分别为E'、F'、G'、H'，则由问题**1313**有，

$$EE'\cdot FF'=EM\cdot MF, \qquad ②$$

$$GG'\cdot HH'=GO\cdot OH. \qquad ③$$

延长EH与AD交于点P，由于$EE'\parallel FF'\parallel GG'\parallel HH'$所以

$$\frac{EE'}{PE}=\frac{FF'}{PF}=\frac{GG'}{PG}=\frac{HH'}{PH},$$

$$\therefore\ \frac{EE'\cdot FF'}{PE\cdot PF}=\frac{GG'\cdot HH'}{PG\cdot PH}.$$

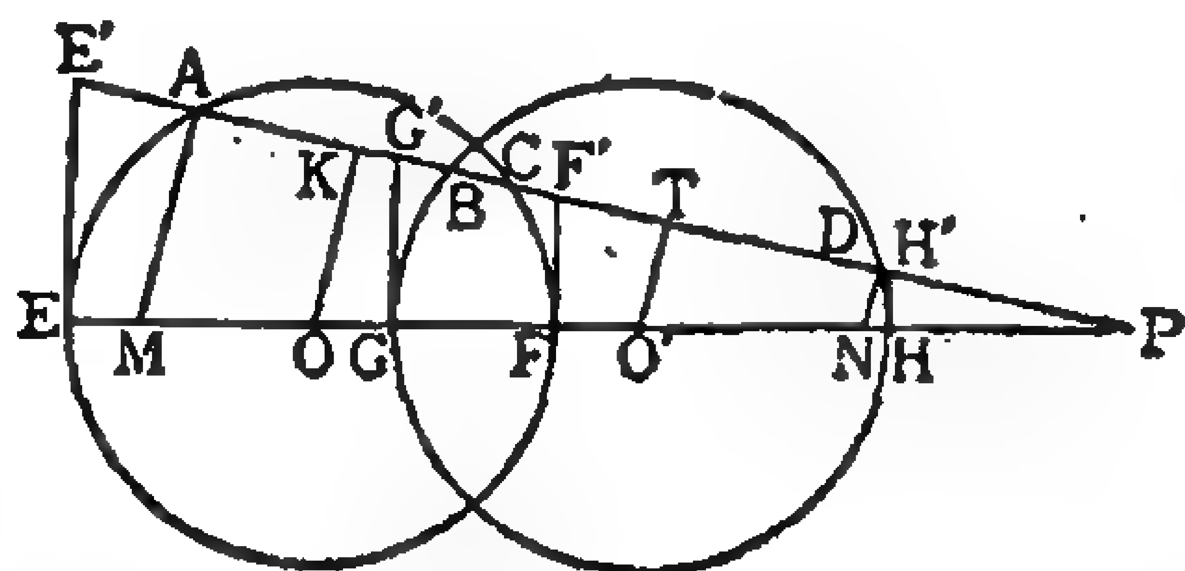
将②、③代入得

$$\frac{EM\cdot MF}{PE\cdot PF}=\frac{GO\cdot OH}{PG\cdot PH},$$

$$\therefore\ \frac{PG\cdot PH}{PE\cdot PF}=\frac{GO\cdot OH}{EM\cdot MF}. \qquad ④$$

因M是定点，E、F、O、G、H也是定点，于是④式右端是定值。所以$PG\cdot PH:PE\cdot PF$是定值。但$PG\cdot PH$, $PE\cdot PF$是两圆O、O'的圆幂，若两圆O、O'的半径分别为r、r'，则$PE\cdot PF=PO^2-r^2$, $PG\cdot PH=PO'^2-r'^2$。在④中，设$\dfrac{GO\cdot OH}{EM\cdot MF}=m$，则$\dfrac{PO'^2-r'^2}{PO^2-r^2}=m$，知点$P$是定点。因$\angle OBP=\angle R$，若以$PO$为直径的圆与圆$O'$的交点为$B$，则过$P$、$B$的直线即为所求的直线。

3471. 在上题中，求适合于$AB:BC:CD=l:m:n$的直线$ABCD$。



解　设适合条件的线段 $ABCD$ 已求出，由于 $AB:BC:CD=l:m:n$，因此 $AC:BC:BD=(l+m):m:(m+n)$。设 AC、BD 的中点为 K、T，则有

$$AK:KT:TD$$

$$=\frac{1}{2}AC:(KC+BT-BC):\frac{1}{2}BD$$

$$=\frac{1}{2}(l+m):\left[\frac{1}{2}(l+m)+\frac{1}{2}(m+n)-m\right]:\frac{1}{2}(m+n).$$

由 A、D 作 KO 的平行线 AM、DN，假定与连心线 OO' 的交点分别为 M、N，则 $MO:OO':O'N=AK:KT:TD$. 上式右端是定值，且 OO' 是定线段，所以 MO、$O'N$ 是定长，从而 M、N 是定点。在图上 EF、GH 是圆 O、O' 的直径，从点 E、F、G、H 作圆的切线，与 AD 的交点分别为 E'、F'、G'、H'，OO' 与 AD 的交点为 P，则与上题一样，有

$$EE'\cdot FF'=EM\cdot MF\ (\text{定值})\ (\text{问题 } \mathbf{1313}),$$

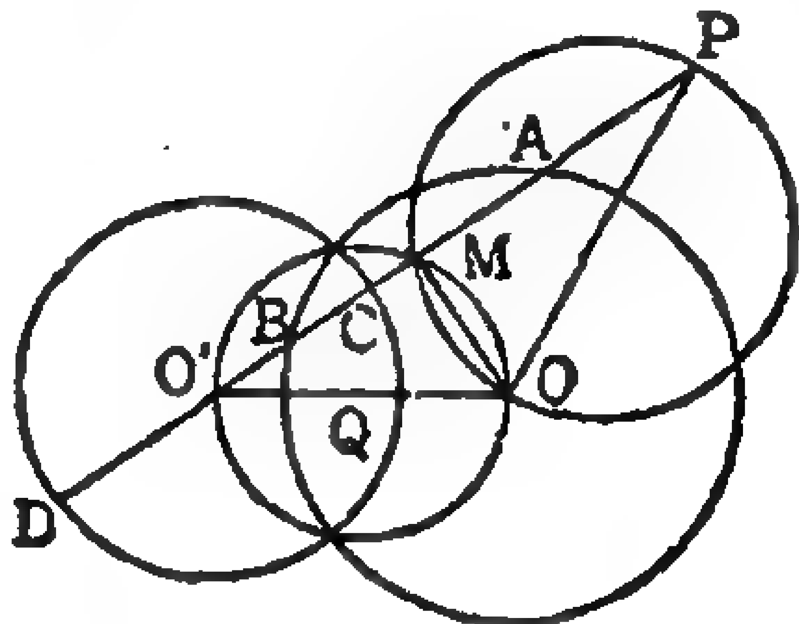
$$GG'\cdot HH'=GN\cdot NH,$$

$$\therefore\quad \frac{PG\cdot PH}{PE\cdot PF}=\frac{OG\cdot NH}{ME\cdot MF}.$$

以下的问题与上题一样，因为点 P 的位置确定，由 $\angle MAP=\angle B$ 知点 M 的位置也确定，于是以 PM 为直径的圆与圆 O 的交点 A，连结 PA 即为所求的直线 PA.

3472. 求过定点 P 的一条直线，与两个相交的定圆 O、O' 相截的四点成调和点列。

解　设问题的解已求出，过点 P 的直线与圆 O、O' 的交点分别为 A、B、C、D，且 A、C、B、D 成调和点列。若设 AB 的中点为 M，圆 O、O' 的半径为 r、r'，则



$$MC\cdot MD=MB^2$$

(问题 **1480**)。

而 $$MC\cdot MD=MO'^2-r'^2,$$

又 $$MB^2=r^2-MO^2,$$

$$\therefore\quad MO'^2-r'^2=r^2-MO^2,$$

$$\therefore\quad MO'^2+MO^2=r^2+r'^2\ (\text{一定}).$$

若设 OO' 的中点为 Q，根据中线定理有

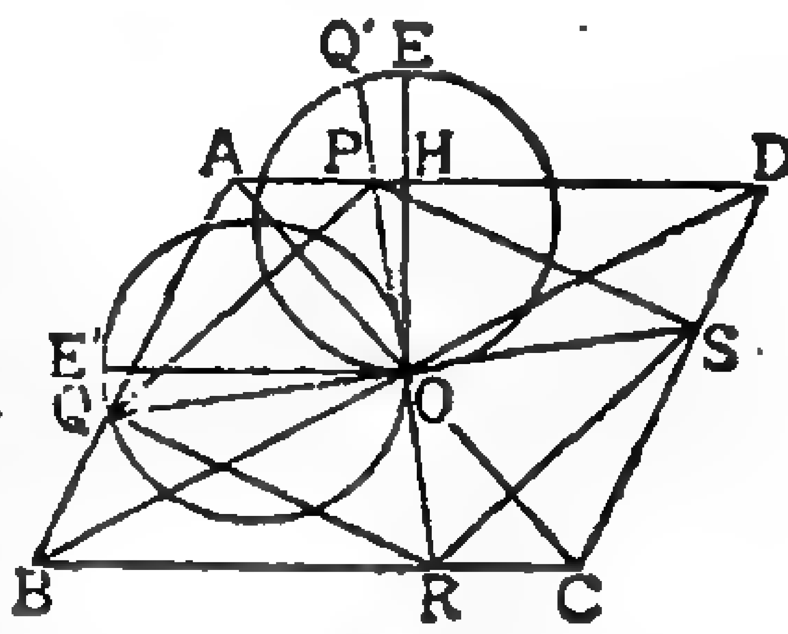
$$MO'^2+MO^2=2(MQ^2+QO^2).$$

$$\therefore\quad 2(MQ^2+QO^2)=r^2+r'^2,$$

从而 $$MQ=\sqrt{\frac{r^2+r'^2}{2}-QO^2}\ (\text{一定}).$$

由此，点 M 的轨迹是以 OO' 的中点 Q 为圆心具有定半径的圆，在这个圆上，由于 $\angle PMO=\angle R$，M 在以 PO 为直径的圆上。由此，根据这两圆的交点决定了点 M 的位置，通过 P、M 的割线即为所求的直线。

3473. 在已知平行四边形内，求作已知面积的内接菱形。



解　设已知平行四边形 $ABCD$ 面积为 m^2 的内接菱形为 $PQRS$。如果问题已求得，则平行四边形 $ABCD$ 的中心 O 与内接菱形的中心是重合的。若在 OP 上取 OQ' 等于 OQ，则有 $OP\cdot OQ=OP\cdot OQ'$，因为 $PQRS$ 是菱形，所以

$$OP\cdot OQ=\frac{1}{2}m^2.$$

从而 $$OP\cdot OQ'=\frac{1}{2}m^2.\qquad ①$$

但 AD 是定线段，$OP\cdot OQ$ 是一定的，于是点 P 在 AD 上移动时，点 Q' 的轨迹是圆(问题 **3435**)，它的直径为 OE. 因为 $PQRS$ 是菱形，有 $PO\perp OQ$，如果由 O 作长等于 OE 且与 OE 夹成直角的直线 OE'，则 $\angle E'QO=\angle EQ'O=\angle R$。因此可作图如下。

［作图］　由 O 向 AD 作垂线 OH，在 OH 的延长线上取点 E，使

$$OH\cdot OE=\frac{1}{2}m^2.$$

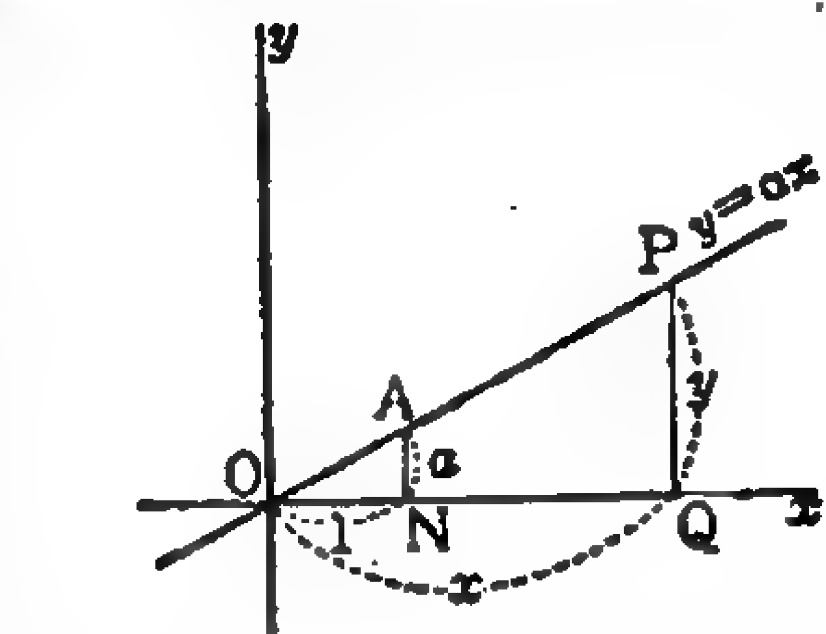
其次由 O 作直线 OE'，使 $OE=OE'$ 且 $\angle EOE'=90°$。以 OE' 为直径作圆与边 AB 的交点为 Q，连接 QO，并延长与 CD 的交点为 S，由 O 作 QS 的垂线与 AD、BC 的交点分别为 P、R，则 $PQRS$ 即为所求作的菱形。

第八编 解析几何

第一章 直 线

1. 直线的性质

3474. 证明函数 $y=ax$ 的图象是直线，$y=ax+b$ 的图象是平行于直线 $y=ax$，且和 y 轴相交于点 $(0, b)$ 的直线。



解 在 $y=ax$ 中、设 $x=0$ 则 $y=0$，设 $x=1$ 则 $y=a$，所以 $y=ax$ 的图象过点 $O(0, 0)$ 及 $A(1, a)$。从连结点 OA 直线上的任意点 P 向 x 轴作垂线 PQ，设 $OQ=x$，$QP=y$，则由

$$\frac{QP}{OQ}=\frac{NA}{ON}$$

（AN 是过 A 所作 x 轴的垂线），

可知 $\quad \dfrac{y}{x}=\dfrac{a}{1}$，$\therefore\ y=ax$.

这就是说，直线 OA 上的所有点的坐标 (x, y) 都满足 $y=ax$。再取直线 OA 外的任意一点 (x', y')，则由 $\dfrac{y'}{x'}\neq\dfrac{a}{1}$ 可知它的坐标不满足 $y=ax$。因此

(i) 直线 OA 上所有点的坐标都满足 $y=ax$；

(ii) 直线 OA 外所有点的坐标都不满足 $y=ax$。所以函数 $y=ax$ 的图象是直线 OA。

其次，看函数

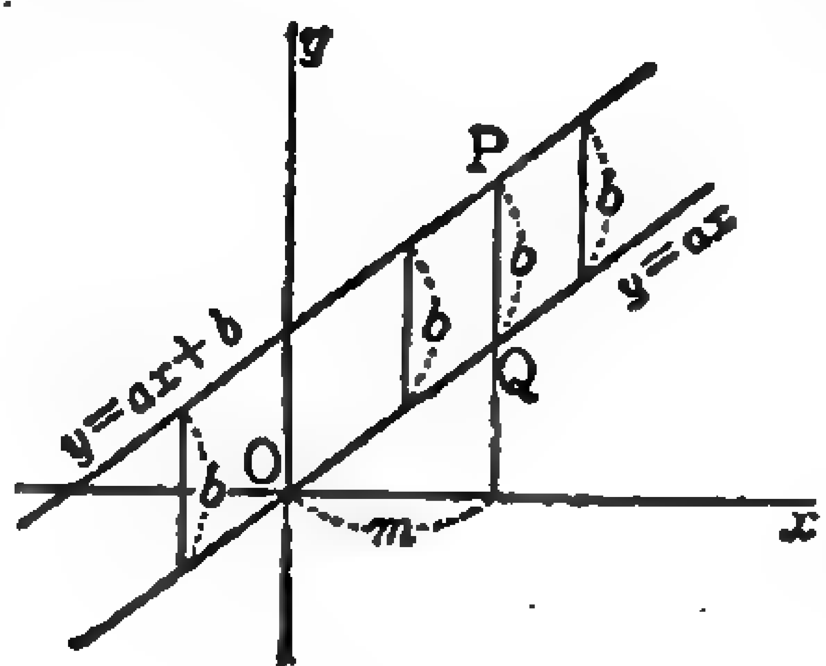
$$y=ax, \qquad ①$$
$$y=ax+b. \qquad ②$$

当 $x=m$ 时，设在①、②中对应的 y 值分别为 y'、y''，则

$y'=am$，

$y''=am+b$，

$\therefore\ y''-y'=b$.



取点 P、Q 的坐标分别为 (m, y'')、(m, y')，则直线 PQ 垂直于 x 轴（因它和 y 轴平行），且 $PQ=b$，这个 b 值和变数 x 无关。即对于同一的 x 值，$y''-y'$ 总是等于定数 b，所以②的图象就是把直线 $y=ax$ 沿 y 轴方向平行移动 b。具体地说，当 $b>0$ 时，把直线 $y=ax$ 向上平行移动 b；当 $b<0$ 时，把直线 $y=ax$ 向下平行移动 $|b|$，就得到函数 $y=ax+b$ 的图象。

根据以上讨论可知：

(i) $y=ax$ 的图象是过原点的一条直线，其中 a 的值可以决定这条直线和 x 轴正向夹角的大小，即可决定直线的方向，因此我们把 a 叫做直线 $y=ax$ 的斜率或方向系数。

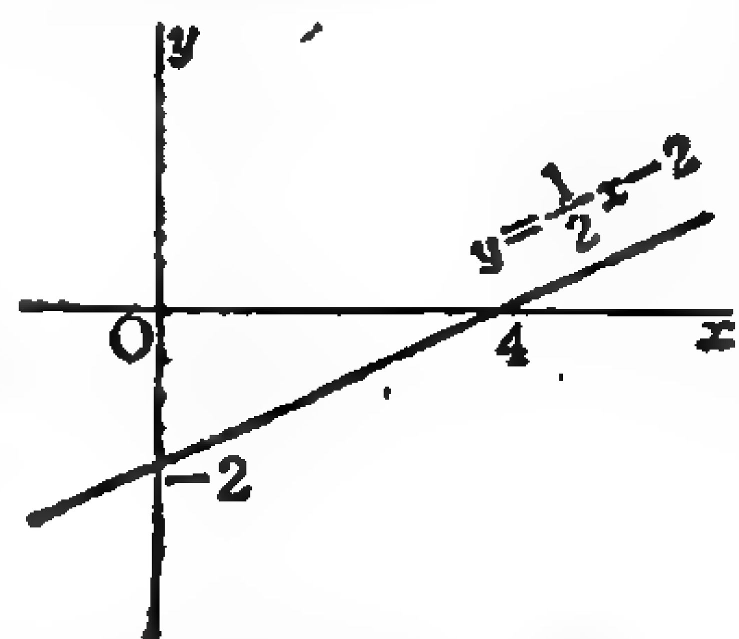
(ii) $y=ax+b$ 的图象是平行于直线 $y=ax$ 且和 y 轴交于点 $(0, b)$ 的一条直线，我们把 b 叫做该直线在 y 轴上的截距。

3475. 画出下列各函数的图象，并求各直线的斜率和在 y 轴上的截距。

(1) $y=\dfrac{1}{2}x-2$， (2) $3x+2y=6$.

解 (1) $y=\dfrac{1}{2}x-2$ 是一次式，它的图象是直线。设 $x=0$，则 $y=-2$，$y=0$，则 $x=4$，故所求图象是经过两点 $(0, -2)$ 及 $(4, 0)$ 的直线。

在 $y=\dfrac{1}{2}x-2$ 中，x 的系数是 $\dfrac{1}{2}$，所以该直线的斜率是 $\dfrac{1}{2}$.

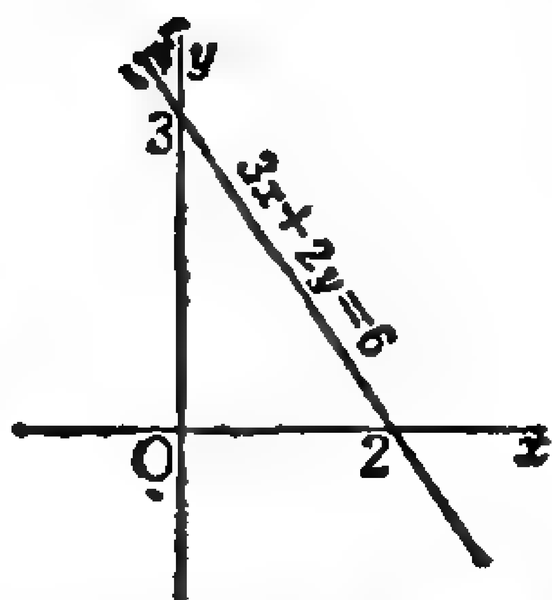


在此式中，令 $x=0$ 则 $y=-2$，所以该直线在 y 轴上的截距是 -2。

(2) $3x+2y=6$ 的图象是经过两点 $(2, 0)$ 和 $(0, 3)$ 的直线。把原方程写成

$$2y=-3x+6,$$

$$\therefore\quad y=-\frac{3}{2}x+3.$$



故该直线的斜率是 $-\frac{3}{2}$，在 y 轴上的截距是3.

3476. 求出适合下列条件的直线方程:

(1) 斜率是 $-\frac{2}{3}$ 且过点(3, −1);

(2) 和 x 轴正向的夹角是30°且过点(0, −2).

解 (1) 设所求直线方程为 $y=ax+b$. 已知斜率 $a=-\frac{2}{3}$，该方程可写成 $y=-\frac{2}{3}x+b$. 又知该直线过点(3, −1)，以 $x=3$, $y=-1$ 代入上式得

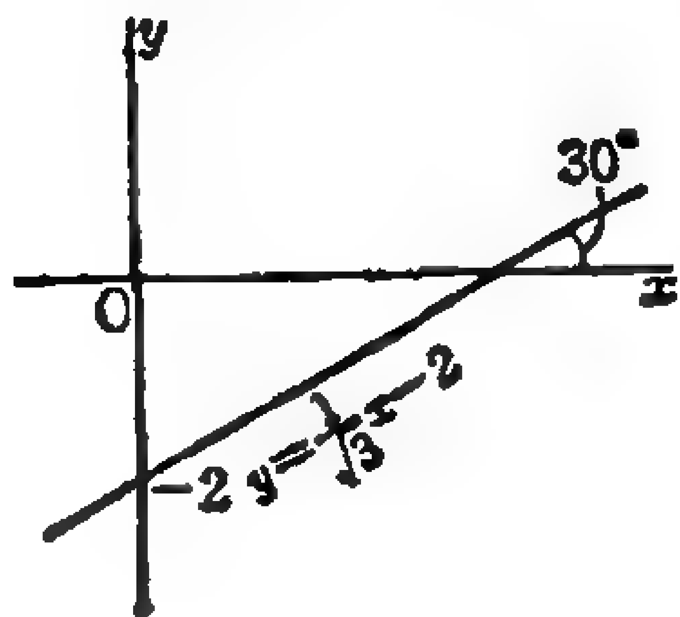
$$-1=-\frac{2}{3}\times3+b,\quad\therefore\quad b=1.$$

故所求直线方程为

$$y=-\frac{2}{3}x+1.$$

(2) 因 $\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$，故知直线的斜率是 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，从而该直线的方程可写成

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+b.$$



又该直线通过点(0, −2)，所以 $b=-2$. 故所求方程为

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-2.$$

3477. 求过定点 (x_1, y_1)，斜率为 a 的直线方程.

解 设所求直线方程为 $y=ax+b$ (其中 b 为待定系数)，已知直线通过点 (x_1, y_1)，以 $x=x_1$、$y=y_1$ 代入上式，得 $y_1=ax_1+b$,

$$\therefore\quad b=y_1-ax_1.$$

把它代入 $y=ax+b$，即得所求直线方程为

$$y=ax+(y_1-ax_1),$$

即
$$y-y_1=a(x-x_1).$$

3478. 求过两定点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 的直线方程，其中 $x_1\neq x_2$.

解 由上题知，过定点 $A(x_1, y_1)$ 且斜率为 a 的直线方程为 $y-y_1=a(x-x_1)$. 设这条直线过点 $B(x_2, y_2)$，把 $x=x_2$、$y=y_2$ 代入上式，得

$$y_2-y_1=a(x_2-x_1),$$

$$\therefore\quad a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

把 a 的值代入 $y-y_1=a(x-x_1)$ 得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

即
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

这就是所求过两定点 A、B 的直线方程.

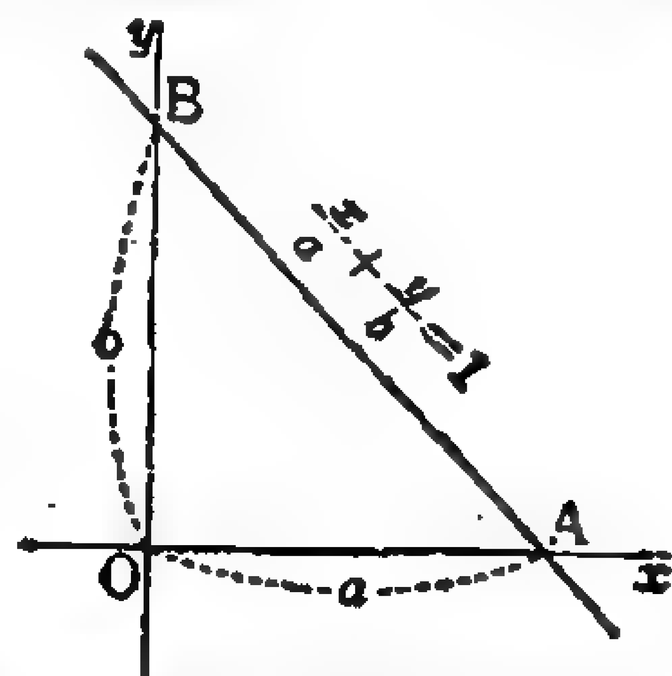
3479. 求过两点(−3, 0)和(5, −4)的直线方程.

解 由上题得所求直线方程为

$$\frac{y-0}{-4-0}=\frac{x-(-3)}{5-(-3)},$$

$$\therefore\quad x+2y+3=0.$$

3480. 求在 x 轴上的截距为 a，在 y 轴上的截距为 b 的直线方程.



解 设直线和 x 轴、y 轴分别交于点 A、B，则 $OA=a$, $OB=b$，因此该直线过两点 $A(a, 0)$ 和 $B(0, b)$，由问题 **3478** 知所求直线方程为

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

即
$$\frac{y}{b}=\frac{x}{-a}+1.$$

$$\therefore\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

3481. 求在 x 轴、y 轴上的截距分别为3, −2的直线方程.

解 由上题可知，所求直线方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1,\quad\therefore\quad y=\frac{2}{3}x-2.$$

3482. 求与直线 $2x-y=0$ 相交成45°角，且过定点(1, 2)的直线方程.

解 直线 $2x-y=0$ 的斜率为2，设所求直线的斜率为 m，则由问题 **3541** 知

$$\operatorname{tg}45°=\pm\frac{m-2}{1+2m},\quad 即\quad 1=\pm\frac{m-2}{1+2m}.$$

$$\therefore\quad m=-3 \quad 或 \quad m=\frac{1}{3}.$$

故所求直线方程为

$$y+2=-3(x-1),\quad 即\quad 3x+y=1,$$

或 $y+2=\frac{1}{3}(x-1)$　即　$x-3y=7$.

3483. 求三点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$共线的条件.

解　连结 $A(x_1, y_1)$和 $B(x_2, y_2)$ 的直线方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

如果点 $C(x_3, y_3)$ 在直线 AB 上，以 $x=x_3$、$y=y_3$代入上式,得

$$y_3-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_3-x_1).$$

$$\therefore\quad (y_3-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x_3-x_1),$$

或

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0,$$

或

$$y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)=0.$$

这三个式子中的任何一个都是所求三点共线的条件.

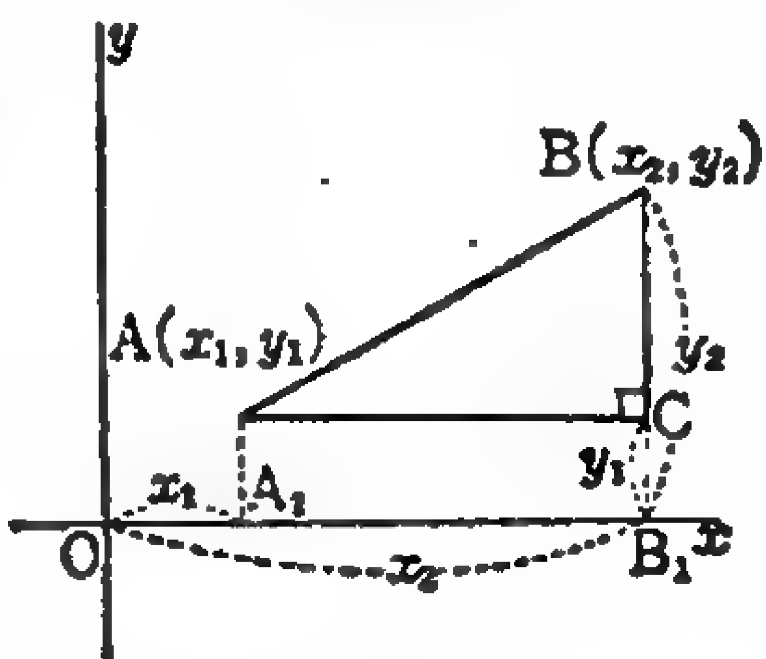
注　如把上述条件用行列式表示,则为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

3484. 证明两点 $A(x_1, y_1)$和 $B(x_2, y_2)$间的距离为

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

解　如图,从 A、B 分别引 x 轴的垂线 AA_1,BB_1,过 A 再引直线 BB_1 的垂线 AC,则



$$OA_1=x_1,$$
$$OB_1=x_2,$$
$$B_1C=y_1,\quad B_1B=y_2.$$
$$\therefore\quad AC=A_1B_1=x_2-x_1,$$
$$BC=y_2-y_1.$$

在直角三角形 ABC 中,应用勾股定理,得

$$AB^2=AC^2+CB^2.$$

即　$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$,

$$\therefore\quad AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

3485. 把连结两点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$的线段内分(或外分)为 $m:n$，试分别求其内分点和外分点的坐标公式，并把它们统一为一个公式.

解　从点 A、B 分别向 x 轴作垂线,设其垂足分别为 A'、B'，则 $OA'=x_1$, $OB'=x_2$. 设分线段 AB 为 $m:n$ 的内分点 P 的坐标为(x, y),从点 P 向 x 轴作垂线 PP'，则 $OP'=x$。因为 AA'、PP'、BB' 是平行线,所以

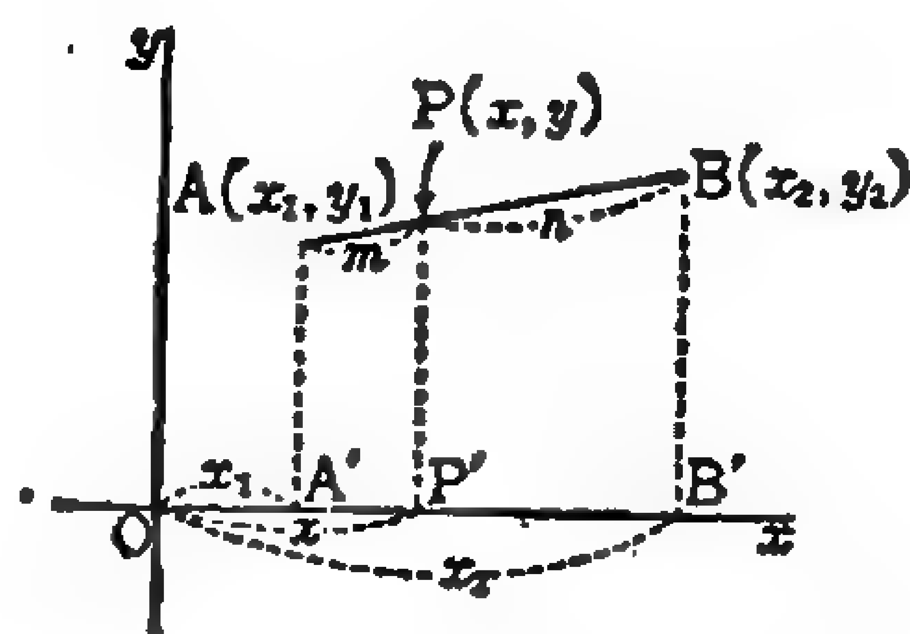
$$A'P':P'B'=AP:PB=m:n,$$

即　$(x-x_1):(x_2-x)=m:n.$

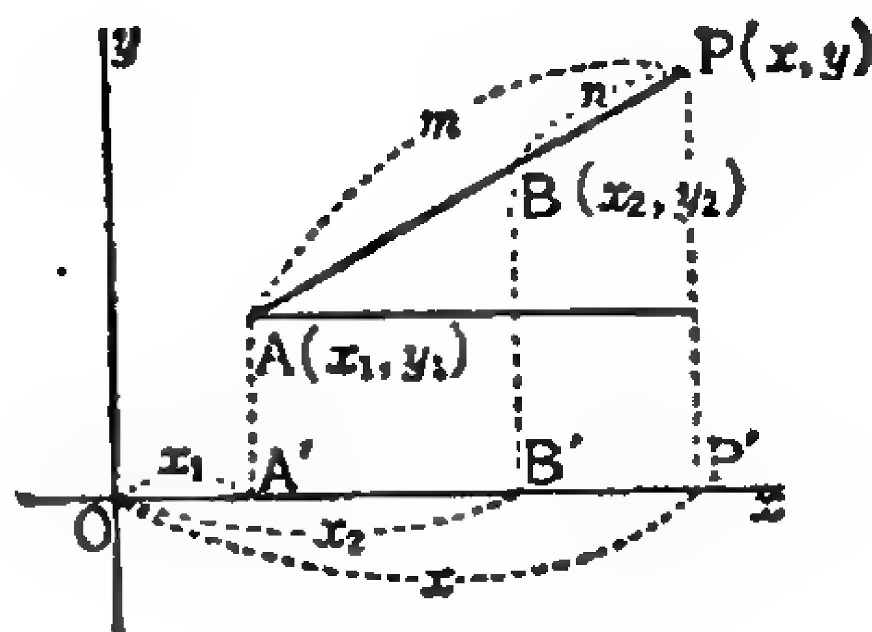
$$\therefore\quad n(x-x_1)=m(x_2-x),$$
$$(m+n)x=mx_2+nx_1.$$
$$\therefore\quad x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}.$$

同理,从 A、B、P 分别向 y 轴作垂线,可得

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$



其次，设点 P 把线段 AB 外分为 $m:n$，则由



$$AP:BP=m:n,$$

及　$AP:BP=A'P':B'P'$,

可知　$A'P':B'P'=m:n.$

以　$A'P'=x-x_1$, $B'P'=x-x_2$,

代入上式,则得

$$x-x_1:x-x_2=m:n,$$
$$n(x-x_1)=m(x-x_2),$$

即　$(m-n)x=mx_2-nx_1$,

$$\therefore\quad x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}.$$

同理，　　$y=\dfrac{my_2-ny_1}{m-n}$。

比较上述内分点和外分点的坐标公式，它们的区别只是 n 的符号不同，因此如果外分时 n 取负值，则两组坐标公式就可统一为内分点坐标公式。

3486. 求连结两点 $A(-3,0)$ 和 $B(2,0)$ 的线段被分成 3:1 的内分点、外分点的坐标，和该线段中点的坐标。

解 内分点的横坐标为

$$\frac{3\times2+1\times(-3)}{3+1}=\frac{3}{4},$$

外分点的横坐标为

$$\frac{3\times2-1\times(-3)}{3-1}=\frac{9}{2},$$

中点的横坐标为

$$\frac{1}{2}(-3+2)=-\frac{1}{2}.$$

即$\left(\frac{3}{4},0\right)$，$\left(\frac{9}{2},0\right)$，$\left(-\frac{1}{2},0\right)$。

3487. 方程

$$2x^2+9xy+10y^2-13x-30y+20=0$$

的图象是两条直线。

(1) 求这两条直线的方程；

(2) 求这两条直线和 x 轴、y 轴所围成的图形的面积。

解 (1) 把方程按 y 整理，

$$10y^2+(9x-30)y+2x^2-13x+20=0. \quad ①$$

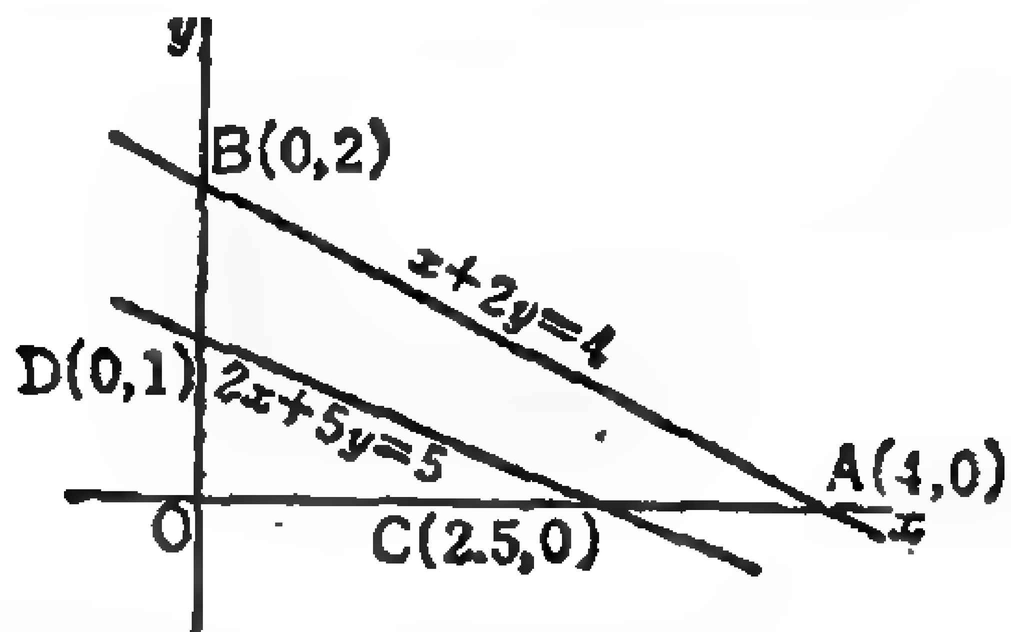
解关于 y 的二次方程，得

$$y=\frac{-9x+30\pm(x-10)}{20}.$$

$$\therefore\ y=\frac{-2x+5}{5},\quad y=\frac{-x+4}{2}.$$

即　　$2x+5y=5$，$x+2y=4$。

这就是所求的两条直线的方程。



(2) 设所求面积为 S，则

$$S=S_{\triangle OAB}-S_{\triangle OCD}$$

$$=\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times1=4-\frac{5}{4}$$

$$=\frac{11}{4}.$$

注　方程 ① 表示两直线，则它的判别式必须是关于 x 的完全平方。

3488. 分别求出下列二次方程所表示的两条直线。

(1) $(x-y)^2-6(x-y)+8=0$，

(2) $(2x-3y)^2-6x+9y-10=0$。

解 (1) 把方程左边分解因式，

$$(x-y-2)(x-y-4)=0.$$

$$\therefore\ x-y-2=0\quad 或\quad x-y-4=0.$$

因此所给方程的图象是两直线 $y=x-2$ 和 $y=x-4$。

(2) $(2x-3y)^2-3(2x-3y)-10=0$。

把方程左边分解因式，

$$(2x-3y-5)(2x-3y+2)=0.$$

因此所给方程的图象是两直线：

$$2x-3y-5=0\quad 和\quad 2x-3y+2=0.$$

3489. 如果关于 x、y 的二次方程

$$f(x,y)=x^2-xy+3x-12y^2+\square y-10=0$$

的图象是两直线，□中应填入什么数值。

解 设应填入□中的数为 k，并把 $f(x,y)=0$ 按 x 整理，则得

$$x^2-(y-3)x-(12y^2-ky+10)=0. \quad ①$$

为将此方程左边分解为两个关于 x，y 的一次式的积，则其判别式 D 必须是完全平方。今知

$$D=(y-3)^2+4(12y^2-ky+10)$$
$$=49y^2-2(3+2k)y+49. \quad ②$$

② 为完全平方的条件是它的判别式 $D'=0$，于是得 $(3+2k)^2-49^2=0$，$\therefore k=23$ 或 $k=-26$。

(i) 若 $k=23$，则

$$f(x,y)=x^2-xy+3x-12y^2+23y-10$$
$$=(x+3y-2)(x-4y+5).$$

因此 $f(x,y)=0$ 所表示的两直线是

$$x+3y-2=0\quad 和\quad x-4y+5=0.$$

(ii) 若 $k=-26$，则

$$f(x,y)=x^2-xy+3x-12y^2-26y-10$$
$$=x^2-(y-3)x-(12y^2+26y+10)$$
$$=(x-4y-2)(x+3y+5).$$

因此，$f(x,y)=0$ 所表示的两直线是

$x-4y-2=0$ 和 $x+3y+5=0$。

3490. a 为何值时，方程

$$x^2+2xy+ay^2+3x+9y=0$$

表示两直线，并写出这两条直线的方程。

解 $x^2+2xy+ay^2+3x+9y=0$，

即 $x^2+(2y+3)x+ay^2+9y=0$。

$$\therefore\ x=\frac{-(2y+3)\pm\sqrt{(2y+3)^2-4(ay^2+9y)}}{2}.$$

为使已知方程表示两直线，上式根号内的式子：

$$(2y+3)^2-4(ay^2+9y)$$
$$=4y^2+12y+9-4ay^2-36y$$
$$=4(1-a)y^2-24y+9$$

必须为完全平方，因而其判别式应为零，即

$12^2-36(1-a)=0$。 $\therefore\ a=-3$，

于是

$$x=\frac{-(2y+3)\pm\sqrt{16y^2-24y+9}}{2}$$
$$=\frac{-(2y+3)\pm(4y-3)}{2},$$

即 $x=y-3$ 或 $x=-3y$。所以题设方程表示两直线：$x-y+3=0$ 和 $x+3y=0$。

3491. 画出下列二次方程的图象。

$$6x^2-5xy+y^2-8x+2y-8=0.$$

解 把方程按 x 整理，

$$6x^2-(5y+8)x+(y^2+2y-8)=0, \quad ①$$

$\therefore\ 6x^2-(5y+8)x+(y-2)\times(y+4)=0.$

把上式分解因式，① 可写成

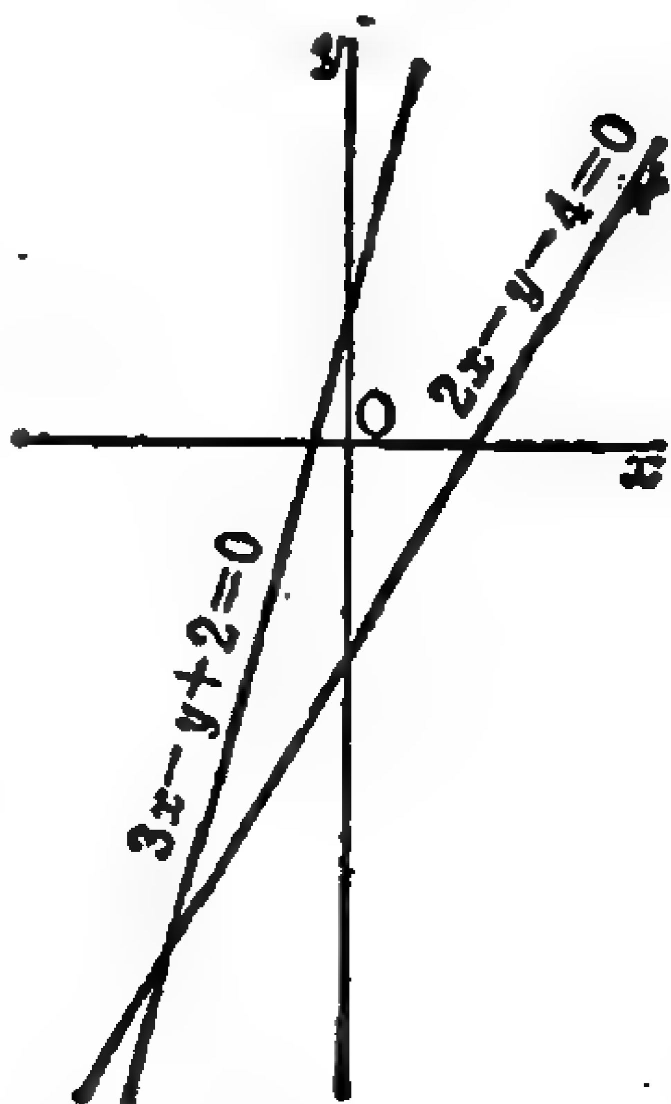
$[3x-(y-2)]\times[2x-(y+4)]=0.$

从而题设方程表示两直线：

$3x-y+2=0$，

$2x-y-4=0$。

其图象如图所示。



3492. 关于 x、y 的二次式

$$f(x,\ y)=x^2-xy-6y^2+9x+ky+20,$$

回答：

(1) 如果 $f(x,\ y)$ 能分解为两个关于 x、y 的一次因式，k 应取什么值？

(2) 将(1)所求的 k 值代入 $f(x,\ y)$，把满足不等式 $f(x,\ y)>0$ 的 x、y 值为坐标的点的范围，用图表示出来。

解 (1) 将 $f(x,\ y)$ 按 x 整理，

$f(x,\ y)=x^2+(9-y)x+(-6y^2+ky+20)$。

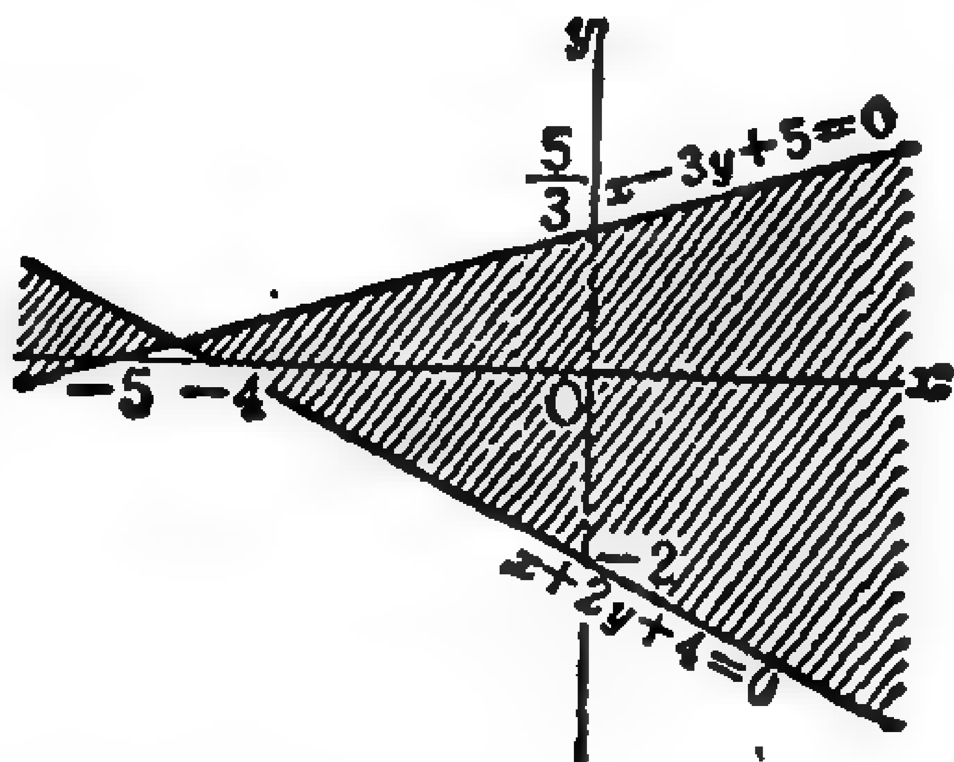
为使此式能分解为两个关于 x、y 的一次因式，则 $f(x,\ y)=0$ 的判别式 D 须是完全平方，即

$$D=(9-y)^2-4(-6y^2+ky+20)$$
$$=25y^2-2(9+2k)y+1 \text{(为完全平方)}。$$

为使上式成立，则方程 $D=0$ 的判别式 D' 须等于 0，即

$$D'=[2(9+2k)]^2-4\times25=0.$$
$$\therefore\ (9+2k)^2=25,$$
$$9+2k=\pm5.$$

从而 $k=-7,\ k=-2$。



(2) 把 $k=-2$ 代入 $f(x,\ y)$，则

$$f(x,\ y)=(x-3y+5)(x+2y+4)。$$

如果 $f(x,\ y)>0$，则须且仅须

$$\begin{cases}x-3y+5>0,\\ x+2y+4>0;\end{cases} \text{ 或 } \begin{cases}x-3y+5<0,\\ x+2y+4<0.\end{cases}$$

因而所求点 $(x,\ y)$ 的范围是图中斜线的部分(边界除外)。

$k=-7$ 的情形可类似作出。

3493. 求过两直线 $2x+y=3$，$x+4y=2$ 的交点和原点的直线方程。

解 设过两直线交点的直线方程为

$$2x+y-3+k(x+4y-2)=0. \quad ①$$

由于该直线过原点，以 $x=0$、$y=0$ 代入①式，得

$$-3-2k=0,\quad \therefore\ k=-\frac{3}{2}.$$

故所求直线方程为

$$2x+y-3-\frac{3}{2}(x+4y-2)=0,$$

即 $x-10y=0$。

3494. 已知两直线 $x-2y+2=0$ 和 $2x+y-3=0$ 的交点为 A，两直线 $2x+3y-5=0$ 和 $3x-2y-3=0$ 的交点为 B，求过两点 A、B 的直线方程。

解 设过两直线 $x-2y+2=0$，$2x+y-3=0$ 的交点 A 的直线方程为

$$(x-2y+2)+k(2x+y-3)=0, \quad ①$$

过两直线 $2x+3y-5=0$，$3x-2y-3=0$ 的交点 B 的直线方程为

$$(2x+3y-5)+k'(3x-2y-3)=0. \quad ②$$

把①写成

$$(1+2k)x+(-2+k)y+2-3k=0, \quad ③$$

把②写成

$$(2+3k')x+(3-2k')y-(5+3k')=0. \quad ④$$

为使③、④表示同一直线，则须

$$\frac{1+2k}{2+3k'}=\frac{-2+k}{3-2k'}=\frac{2-3k}{-(5+3k')}. \quad ⑤$$

从⑤得

$$7kk'-4k'-4k-7=0, \quad ⑥$$

及

$$9kk'-10k'-4k-4=0. \quad ⑦$$

⑥×9－⑦×7，得 $34k'-8k-35=0$，

$$\therefore\ k=\frac{34k'-35}{8}. \quad ⑧$$

以⑧代入⑥得 $34k'^2-59k'+12=0$。

即 $$(17k'-4)(2k'-3)=0,$$

$$\therefore\ k'=\frac{4}{17}\quad 或\quad k'=\frac{3}{2}.$$

当 $k'=\frac{3}{2}$ 时，⑤的分母为零，应该略去。

当 $k'=\frac{4}{17}$ 时，由⑧得 $k=-\frac{27}{8}$。以 k、k' 的值代入①或②，可得所求直线方程为

$$46x+43y=97.$$

注 先分别求出题设两直线的交点，然后求连结该两交点的直线方程也可以，但有时计算较为麻烦。

3495. 求过两直线

$$3x-2y+5=0,\ 5x+4y-3=0$$

的交点和点 $P(1, 3)$ 的直线方程。

解 设过题设两直线交点的直线方程为

$$(3x-2y+5)+k(5x+4y-3)=0.$$

其中 k 为任意数。因该直线还过点 $P(1,3)$，以 $x=1$、$y=3$ 代入上式，则

$$(3-6+5)+k(5+12-3)=0,$$

即 $$2+14k=0,\quad \therefore\ k=-\frac{1}{7}.$$

故所求直线方程为

$$(3x-2y+5)-\frac{1}{7}(5x+4y-3)=0,$$

即 $$8x-9y+19=0.$$

3496. 已知点 $P(6,a)$ 在过两点 $A(-1, 3)$、$B(5, -2)$ 的直线上，求 a 的值。

解 过两点 $A(-1, 3)$，$B(5, -2)$ 的直线方程为

$$y-3=\frac{-2-3}{5+1}(x+1),$$

即 $$6y+5x=13.$$

由于点 $P(6, a)$ 在此直线上，所以

$$6a+30=13,\quad 从而\quad a=-\frac{17}{6}.$$

3497. 求下列各直线的方程。

(1) 过定点 $P(3, -2)$，且和 x 轴正向成 $120°$ 角的直线；

(2) 过定点 $P(-2, -3)$，在 x 轴上的截距为 2 的直线；

(3) 过定点 $P(2, 3)$，且在两轴上截距相等的直线。

解 (1) 由题设知直线的斜率为

$$\operatorname{tg}120°=-\sqrt{3},$$

故所求直线方程为

$$y+2=-\sqrt{3}(x-3),$$

即 $$y=-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}-2.$$

(2) 设直线在 y 轴上的截距为 b，则有

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{b}=1.$$

又这条直线过点 $P(-2, -3)$，因而

$$\frac{-2}{2}+\frac{-3}{b}=1,\quad \therefore\ b=-\frac{3}{2}.$$

故所求直线方程为

$$\frac{x}{2}-\frac{2y}{3}=1,\quad 即\quad 3x-4y=6.$$

别解 设所求直线方程为 $y=mx+b$。因为该直线过点 $P(-2, -3)$，所以

$$-3=-2m+b. \quad ①$$

又该直线过点 $(2, 0)$，有

$$0=2m+b. \quad ②$$

解①、②得 $m=\frac{3}{4}$，$b=-\frac{3}{2}$。

故所求直线方程为

$$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2},\quad 即\quad 3x-4y=6.$$

(3) 设直线在两轴上的截距都是 a，则有

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1,\quad 即\quad x+y=a.$$

因为该直线通过点 $P(2, 3)$，所以

$$2+3=a,\quad 即\quad a=5.$$

故所求直线方程为 $x+y=5$。

3498. 连结两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 的线段和直线 $ax+by+c=0$ 相交，问线段 AB 被这条直线分成怎样的比？

解 把线段 AB 内分为 $m:n$ 的点的坐标为

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\quad y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}.$$

将它代入 $ax+by+c=0$ 中，则有

$$a\cdot\frac{nx_1+mx_2}{m+n}+b\cdot\frac{ny_1+my_2}{m+n}+c=0,$$

即 $n(ax_1+by_1+c)+m(ax_2+by_2+c)=0$.

$$\therefore\quad \frac{m}{n}=-\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}.$$

3499. 证明在直线族

$$y-kx-x+k+1=0$$

中，不论 k 取何值，它们都通过一定点。

解 把 $y-kx-x+k+1=0$ 写成

$$(y-x+1)-k(x-1)=0. \quad ①$$

在①中，k 为任意给定的数它都成立。由于使①成为关于 k 的恒等式的必要且充分条件是

$$y-x+1=0,\quad 且\quad x-1=0.$$

解此两式得 $x=1$，$y=0$。所以题设直线族中不论 k 为何值都通过定点 $(1, 0)$。

注 在一次式 $ax+b$ 中，不论 x 取何值，$ax+b$ 总等于零，即关于 x 的恒等式 $ax+b=0$ 成立的必要且充分条件是 $a=0$，$b=0$。

3500. 如果 m、n 满足关系式 $2m-3n=1$，则直线 $mx+ny=5$ 必通过一定点。

解 $\because\ 2m-3n=1,\quad \therefore\ m=\dfrac{3n+1}{2}$.

把 m 值代入 $mx+ny=5$，得

$$\frac{3n+1}{2}x+ny=5,$$

$$\therefore\quad n(3x+2y)+x-10=0. \quad ①$$

不论 n 取何值，①式成立的充要条件是

$$3x+2y=0,\quad 且\quad x-10=0.$$

由此两式得 $x=10$，$y=-15$。

所以直线 $mx+ny=5$ 总过定点 $(10, -15)$。

3501. 求三条直线：$a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$，$a_3x+b_3y+c_3=0$ 共点的条件。

解 直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 和 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 的交点的坐标为

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

把上面两式代入 $a_3x+b_3y+c_3=0$ 中，则得

$$a_3\cdot\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}+b_3\cdot\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}+c_3=0.$$

即

$$a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0;$$

或

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=0.$$

此两式就是题设三直线共点的条件。

注 如用行列式表示三线共点条件，则为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

3502. 求过两直线 $2x-3y=1$，$3x+2y=2$ 的交点并与直线 $y+3x=0$ 平行的直线方程。

解 过两直线 $2x-3y=1$ 和 $3x+2y=2$ 的交点的直线方程为

$$2x-3y-1+k(3x+2y-2)=0,$$

即 $(2+3k)x-(3-2k)y-1-2k=0$，

其斜率为 $\dfrac{2+3k}{3-2k}$。又知直线 $y+3x=0$ 的斜率为 -3，所以

$$\frac{2+3k}{3-2k}=-3,\quad \therefore\ k=\frac{11}{3}.$$

故所求直线方程为

$$2x-3y-1+\frac{11}{3}(3x+2y-2)=0,$$

即 $39x+13y-25=0$.

3503. 已知一直线在 x 轴上的截距是 -4，且过点 $(-1, 2)$，求过点 (a, b) 且垂直于已知直线的直线方程。

解 设在 y 轴上的截距为 β，在 x 轴上的

截距为 -4 的直线方程为

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{\beta}=1.$$

因为该直线过点 $(-1, 2)$，所以

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{\beta}=1, \quad \therefore \ \beta=\frac{8}{3}.$$

故题设已知直线方程为

$$-\frac{x}{4}+\frac{3y}{8}=1, \quad 即 \quad y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}.$$

从而垂直于这条直线且过点 (a, b) 的直线方程为

$$y-b=-\frac{3}{2}(x-a),$$

即 $$3x+2y=3a+2b.$$

3504. 如果 $h^2-ab>0$，证明

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

表示过原点的两直线，并求该两直线所成的角。

解 $$ax^2+2hxy+by^2=0.$$

由于 $D=4(h^2-ab)>0$，所以

$$y=\frac{-h\pm\sqrt{h^2-ab}}{b}\cdot x,$$

即 $$y=\frac{-h+\sqrt{h^2-ab}}{b}x,$$

$$y=\frac{-h-\sqrt{h^2-ab}}{b}x.$$

因此题设方程表示过原点的两直线。设这两条直线所成的角为 θ，则

$$\operatorname{tg}\theta=\pm\frac{\dfrac{-h+\sqrt{h^2-ab}}{b}-\dfrac{-h-\sqrt{h^2-ab}}{b}}{1+\dfrac{h^2-(h^2-ab)}{b^2}}$$

$$=\pm\frac{\dfrac{2\sqrt{h^2-ab}}{b}}{\dfrac{b^2+ab}{b^2}}=\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}.$$

$$\therefore \ \operatorname{tg}\theta=\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}.$$

3505. 若 a、b 为变数，k 为定数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=k$，则直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 总过某一定点。

解 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=k$，所以 $\frac{1}{ak}+\frac{1}{bk}=1$。以 $\frac{1}{ak}+\frac{1}{bk}=1$ 代换 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 右端的 1，则得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{ak}+\frac{1}{bk},$$

即 $$\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{b}\left(y-\frac{1}{k}\right)=0.$$

故直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 总过定点 $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$。

3506. 设过点 $(2, 3)$ 的直线和 x 轴的交点为 $(a, 0)$，和 y 轴的交点为 $(0, b)$。如果 $pa+qb=ab$，试求 p、q 的值。

解 设过点 $(2, 3)$ 的直线的斜率为 m，则其方程为 $y-3=m(x-2)$，因为这条直线和 x 轴交于点 $(a, 0)$，所以

$$-3=m(a-2).$$

又因这条直线和 y 轴交于点 $(0, b)$，又有

$$b-3=-2m.$$

从以上两式中消去 m，得

$$\frac{-3}{b-3}=\frac{a-2}{-2}.$$

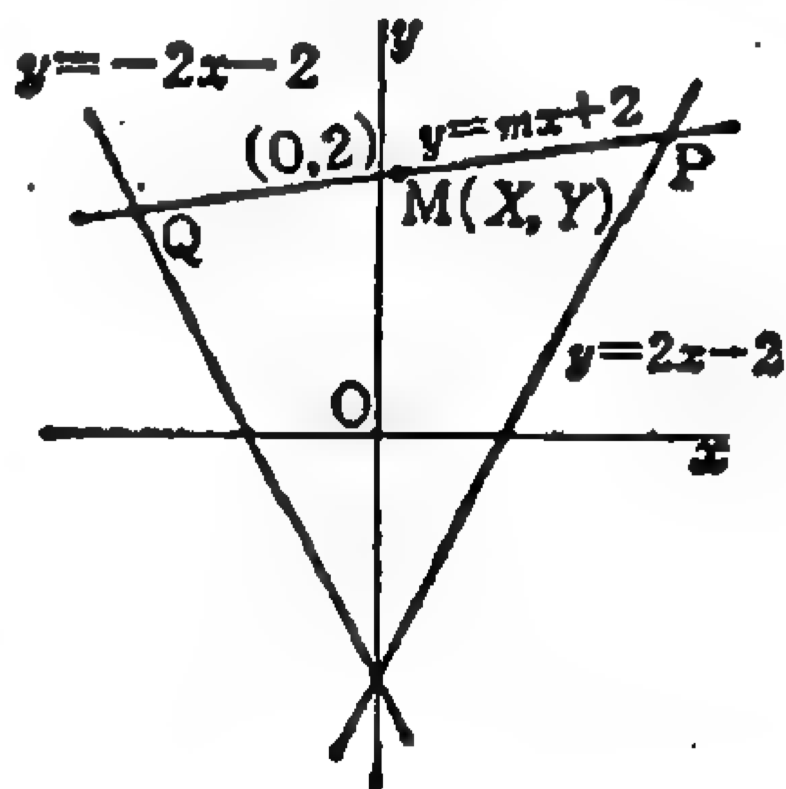
$$\therefore \ 3a+2b=ab，从而 \ p=3, \ q=2.$$

3507. 设过 y 轴上的定点 $(0, 2)$ 的直线 $y=mx+2$ 和已知两直线

$y=2x-2$,

$y=-2x-2$

的交点分别为 P、Q。



(1) 设线段 PQ 的中点 M 的坐标为 (X, Y)，试用 m 表示 X、Y；

(2) 当 m 变化时，求点 M 的轨迹方程，并指出其轨迹是什么？

解 (1)

$$y=mx+2, \quad ①$$
$$y=2x-2, \quad ②$$
$$y=-2x-2. \quad ③$$

点 P 的坐标是联立方程 ①、② 的解：

$$x=\frac{4}{2-m}, \quad y=\frac{2(2+m)}{2-m}.$$

同理，点 Q 的坐标是联立方程 ①、③ 的解：

$$x=-\frac{4}{2+m}, \quad y=\frac{2(2-m)}{2+m}.$$

因此线段 PQ 的中点 M 的坐标为

$$X=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2-m}+\frac{-4}{2+m}\right)=\frac{4m}{4-m^2},\qquad ④$$

$$Y=\frac{1}{2}\left[\frac{2(2+m)}{2-m}+\frac{2(2-m)}{2+m}\right]$$

$$=\frac{2(4+m^2)}{4-m^2}.\qquad ⑤$$

(2) 从④、⑤消去m，得

$$4X^2-Y^2=-4,\quad 即\quad Y^2-4X^2=4,$$

这就是所求点$M(X, Y)$的轨迹方程。它表示实轴为y轴，顶点为$(0, 2)$和$(0, -2)$，渐近线为$y=\pm 2x$的双曲线。

3508. 方程$(x^2+y^2)\sin 2\theta=2xy$，当$\theta=0°$、$15°$、$45°$时，各表示什么图形？并讨论当$\theta$从$0°$变化到$45°$时，该方程图象的变化。

解　当θ为$0°$、$15°$、$45°$时，由于

$$\sin 0°=0,\ \sin 30°=\frac{1}{2},\ \sin 90°=1,$$

所以题设方程分别为$2xy=0$，$x^2+y^2=4xy$，$x^2+y^2=2xy$。其中第一式$x=0$，$y=0$表示两坐标轴、第二式表示两直线

$$y=(2+\sqrt{3})x,\quad y=(2-\sqrt{3})x.$$

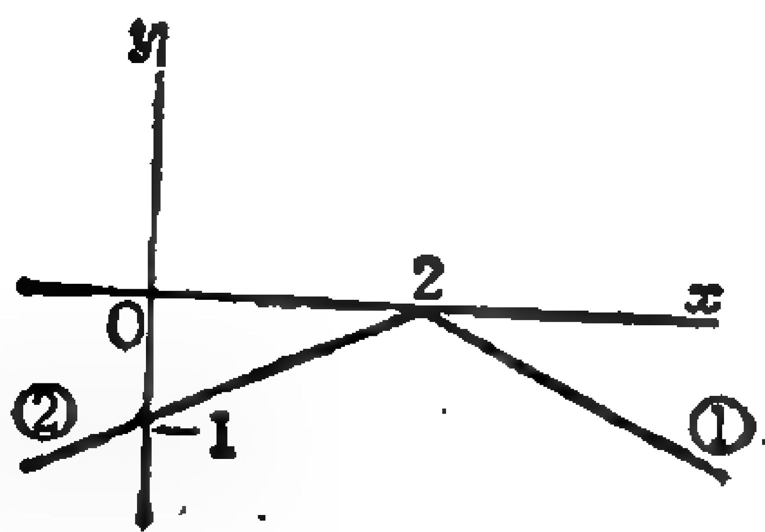
第三式$(x-y)^2=0$表示直线$x-y=0$。因此当θ由$0°$变化到$45°$时，方程$(x^2+y^2)\sin 2\theta=2xy$所表示的两直线，从两坐标轴逐渐接近直线$y=x$。

2. 绝对值

3509. 画出函数$y=-\frac{1}{2}|x-2|$的图象。

解　当$x\geqq 2$时，$x-2\geqq 0$，

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}(x-2).\qquad ①$$



当$x<2$时，$x-2<0$，

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}(2-x)=\frac{1}{2}(x-2).\qquad ②$$

从①、②就可得到所求函数的图象，如上图。

3510. 画出方程$|y|=2x+1$的图象。

解　当$y\geqq 0$时，方程可写成

$$y=2x+1.\qquad ①$$

当$y<0$时，方程可写成

$$-y=2x+1,$$

即

$$y=-2x-1.\qquad ②$$

从①、②就可得到题设方程的图象，如上图。

3511. 画出函数$y=|3-x|+|x-1|$的图象。

解　为了讨论$3-x$和$x-1$的正负号，x的取值范围可以分以下三部分考虑：



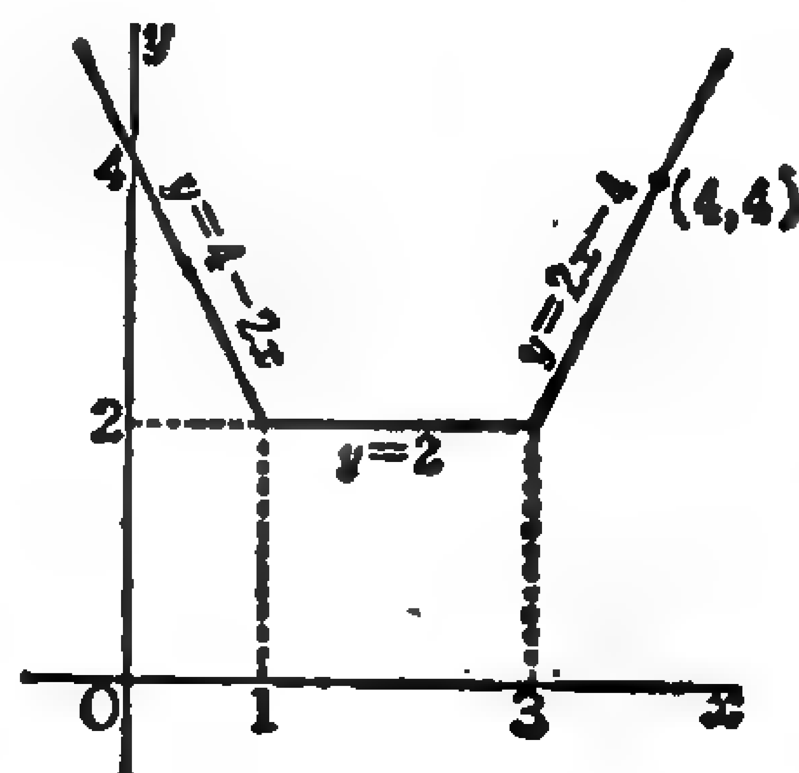
(i) 当$x\leqq 1$时，$x-1\leqq 0$，$3-x>0$，从而

$$|3-x|=3-x,$$
$$|x-1|=1-x.$$

$$\therefore\quad y=|3-x|+|x-1|=(3-x)+(1-x),$$

即

$$y=4-2x.\qquad ①$$



(ii) 当$1<x<3$时，$3-x>0$，$x-1>0$，从而

$$|3-x|=3-x,\ |x-1|=x-1.$$

$$\therefore\quad y=|3-x|+|x-1|=(3-x)+(x-1),$$

即

$$y=2.\qquad ②$$

(iii) 当$x\geqq 3$时，$3-x\leqq 0$，$x-1>0$，从而

$$|3-x|=x-3,\ |x-1|=x-1.$$

$$\therefore\quad y=|3-x|+|x-1|=(x-3)+(x-1)$$

即

$$y=2x-4.\qquad ③$$

画出①、②、③的图象（即上图中的折线），就是所求函数的图象。

3512. 画出下面函数的图象。

$y=|x+5|+|x-4|-2|x-3|$。

解 为了讨论 $x+5, x-4, x-3$ 的正负号，把 x 的取值范围作如下区分：



(i) 当 $x\leqq-5$ 时，$x+5\leqq0$，$x-4<0$，$x-3<0$，因而

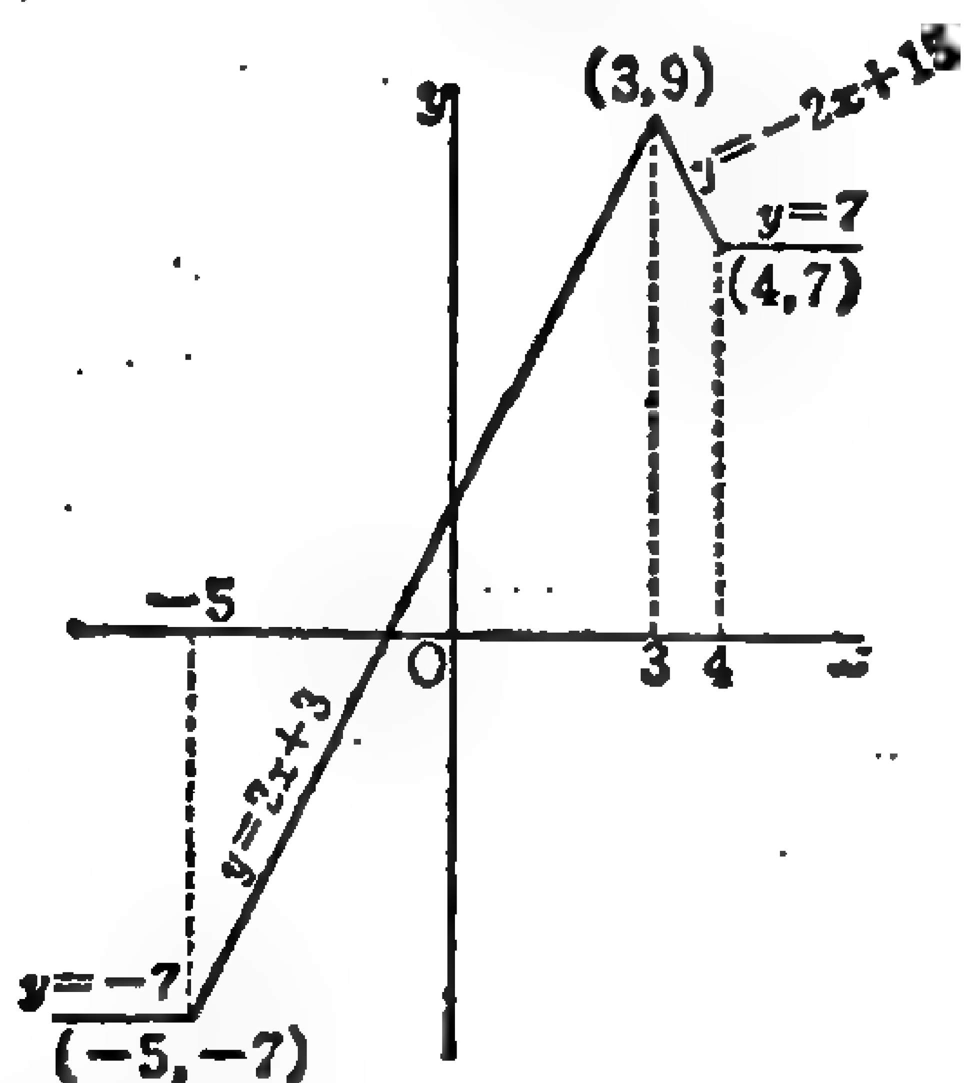
$$y=-(x+5)-(x-4)+2(x-3).$$

$$\therefore\quad y=-7. \qquad ①$$

(ii) 当 $-5<x\leqq3$ 时，$x+5>0$，$x-3\leqq0$，$x-4<0$，因而

$$y=(x+5)-(x-4)+2(x-3).$$

$$\therefore\quad y=2x+3. \qquad ②$$



(iii) 当 $3<x\leqq4$ 时，$x+5>0$，$x-3>0$，$x-4\leqq0$，因而

$$y=(x+5)-(x-4)-2(x-3).$$

$$\therefore\quad y=-2x+15. \qquad ③$$

(iv) 当 $x>4$ 时，$x+5>0$，$x-3>0$，$x-4>0$，因而

$$y=(x+5)+(x-4)-2(x-3).$$

$$\therefore\quad y=7. \qquad ④$$

画出 ①、②、③、④ 的图象，即上图中的折线，就是所求函数的图象。

3513. 画出函数 $y=||x|-1|$ 的图象。

解 (1) 当 $x\geqq0$ 时，$|x|=x$，所以 $y=|x-1|$。可分两种情况考虑：

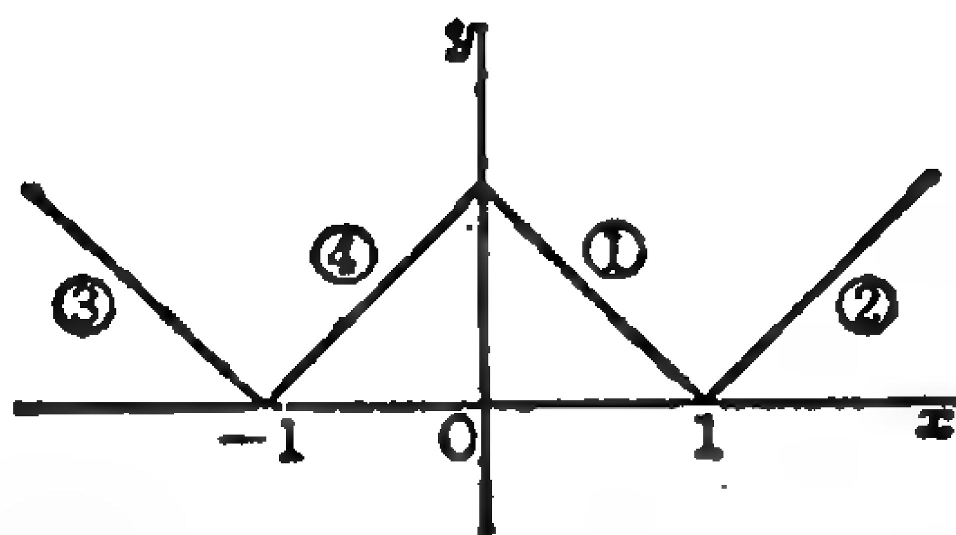
(i) $0\leqq x\leqq1$ 时，则

$$y=|x-1|=1-x. \qquad ①$$

(ii) $x>1$ 时，则

$$y=|x-1|=x-1. \qquad ②$$

(2) 当 $x<0$ 时，$|x|=-x$，因而



$$y=|-x-1|.$$

又可分两种情况考虑：

(i) $x\leqq-1$ 时，$x+1\leqq0$ 即 $-x-1\geqq0$，

$$\therefore\quad y=|-x-1|=-x-1. \qquad ③$$

(ii) $x>-1$ 时，$x+1>0$ 即 $-x-1<0$。

$$\therefore\quad y=|-x-1|=x+1. \qquad ④$$

从 ①、②、③、④ 可得到所求函数的图象。

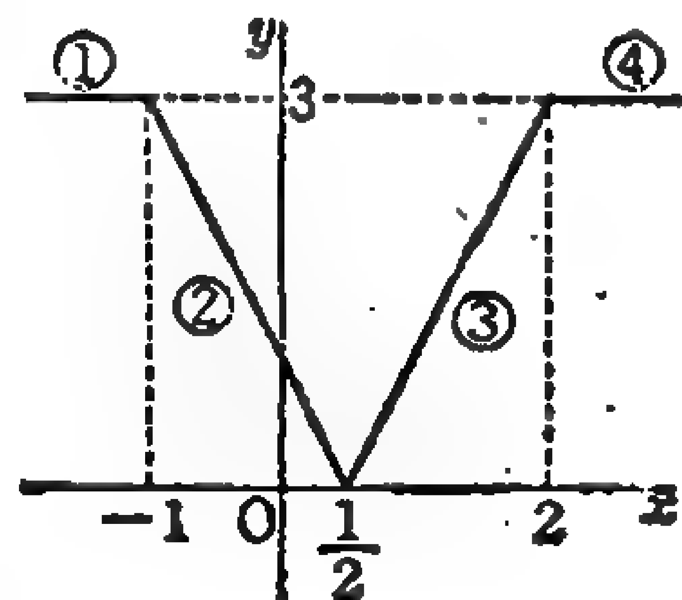
3514. 作函数 $y=||x+1|-|x-2||$ 的图象。

解 (1) 当 $x\leqq-1$ 时，

$|x+1|=-(x+1)$，$|x-2|=-(x-2)$。

$$\therefore\quad y=||x+1|-|x-2||$$
$$=|-(x+1)+(x-2)|=|-3|$$
$$=3. \qquad ①$$

(2) 当 $-1<x\leqq2$ 时，



$|x+1|=x+1$，

$|x-2|=2-x$。

$\therefore\ y=|x+1+x-2|$

$=|2x-1|$。

现分以下两种情况讨论：

(i) $-1<x\leqq\frac{1}{2}$ 时，$2x-1\leqq0$，

$$\therefore\quad y=-(2x-1). \qquad ②$$

(ii) $\frac{1}{2}<x<2$ 时，$2x-1>0$，

$$\therefore\quad y=2x-1. \qquad ③$$

(3) 当 $x>2$ 时，

$$y=|x+1-(x-2)|=3. \qquad ④$$

从 ①、②、③、④ 可得所求函数的图象。如上图。

3515. 已知三个数 a、b、c 满足 $a<b<c$，试作出函数 $y=|x-a|+|y-b|+|y-c|$ 的图象，并利用图象求 y 的最小值。

解 (i) 当 $x\leqq a$ 时，

$x-a\leqq0$，$x-b<0$，$x-c<0$，

$$\therefore\quad y=-(x-a)-(x-b)-(x-c)$$
$$=-3x+(a+b+c). \qquad ①$$

(ii) 当 $a<x\leqq b$ 时，

$$x-a>0,\ x-b\leqq 0,\ x-c<0,$$

$$\therefore\quad y=(x-a)-(x-b)-(x-c)$$
$$=-x+(-a+b+c). \qquad ②$$

(iii) 当 $b<x\leqq c$ 时，

$$x-a>0,\ x-b>0,\ x-c\leqq 0,$$

$$\therefore\quad y=(x-a)+(x-b)-(x-c)$$
$$=x-(a+b-c). \qquad ③$$

(iv) 当 $x>c$ 时，

$$x-a>0,$$
$$x-b>0,$$
$$x-c>0,$$

$$\therefore\ y=(x-a)+(x-b)+(x-c)$$
$$=3x-(a+b+c). \qquad ④$$

从 ①、②、③、④ 的图象就可得到所求函数的图象，如上图。从图象可以看出当 $x=b$ 时，y 有最小值：$y=c-a$。

3516. 记号$\{x\}$表示与 x 最接近的整数。即如果 m 为整数且 $m-\frac{1}{2}\leqq x\leqq m+\frac{1}{2}$，则 $\{x\}=m$。试画出函数 $y=|x-\{x\}|$ 的图象。

解 "如果 $m-\frac{1}{2}\leqq x\leqq m+\frac{1}{2}$，则 $\{x\}=m$"，可以具体表示如下：

如果 $x=1.1$，则 $\{x\}=1$；
如果 $x=1.2$，则 $\{x\}=1$；
如果 $x=1.3$，则 $\{x\}=1$；
如果 $x=1.4$，则 $\{x\}=1$；
如果 $x=1.6$，则 $\{x\}=2$；
如果 $x=1.7$，则 $\{x\}=2$；
………………

当 $x=1.5$ 时，x 和 1、2 的间隔相等，那么这时取 $\{x\}=1$，还是取 $\{x\}=2$，似乎有些迷惑。现讨论如下：

当 $x=1.5$ 时，若取 $\{x\}=1$，则

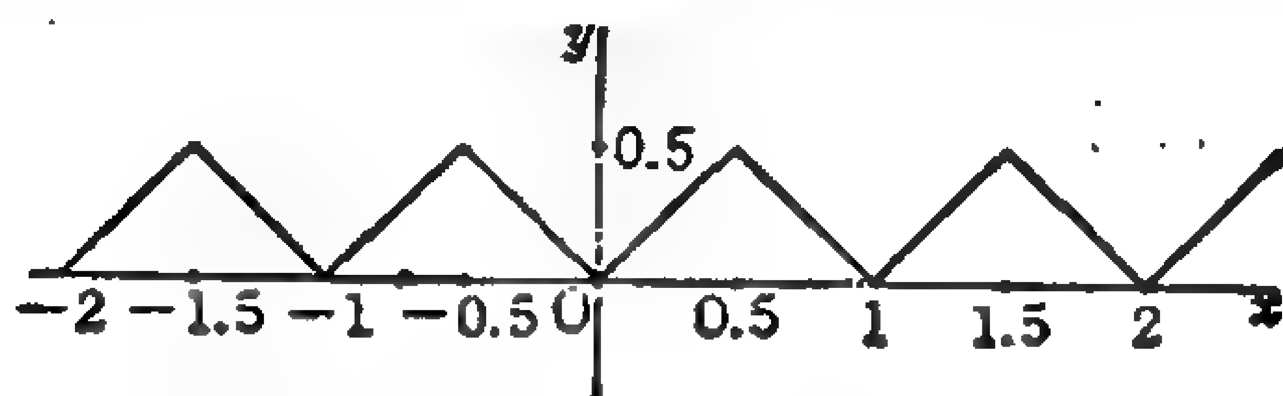
$$|x-\{x\}|=|1.5-1|=0.5;$$

当 $x=1.5$ 时，若取 $\{x\}=2$，则

$|x-\{x\}|=|1.5-2|=|-0.5|=0.5$。因此，当 $x=1.5$ 时，无论取 $\{x\}=1$ 或 $\{x\}=2$，其所对应的 $y=|x-\{x\}|$ 都是一样的。于是，可得下表：

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0

如果 x 取其他的值，同样可计算出对应的 y 值。因此所求图象如下图：



3. 垂直、平行

3517. 求两直线 $y=mx+b$ 和 $y=m'x+b'$ 互相垂直的充要条件。

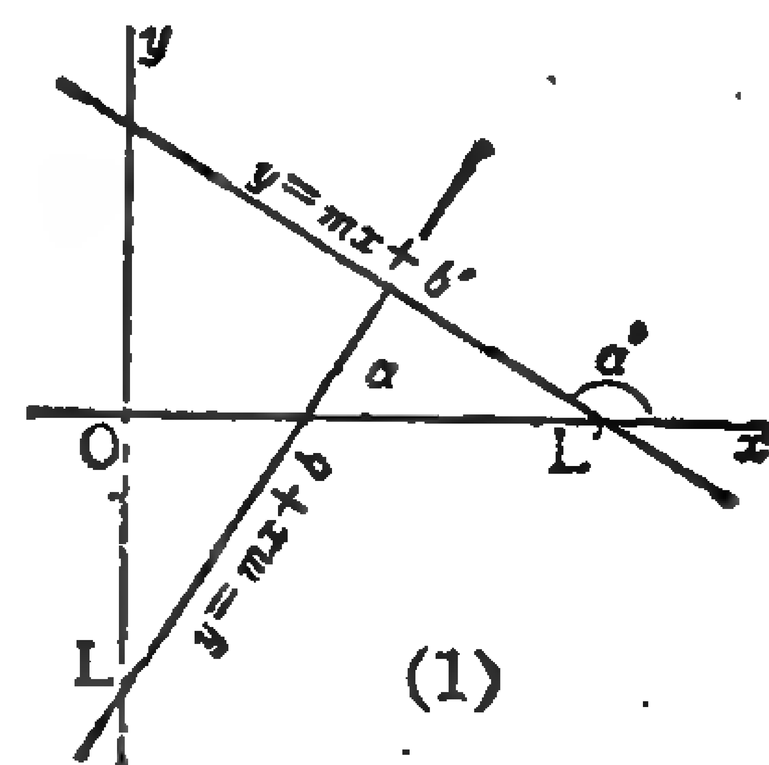
解 把直线 $y=mx+b$ 用 L 表示，直线 $y=m'x+b'$ 用 L' 表示，并设直线 L、L' 和 x 轴正向所成的角分别为 α、α'，则

$$m=\operatorname{tg}\alpha,$$
$$m'=\operatorname{tg}\alpha'.$$

如果 L 和 L' 互相垂直，则

$$\alpha'-\alpha=90°$$

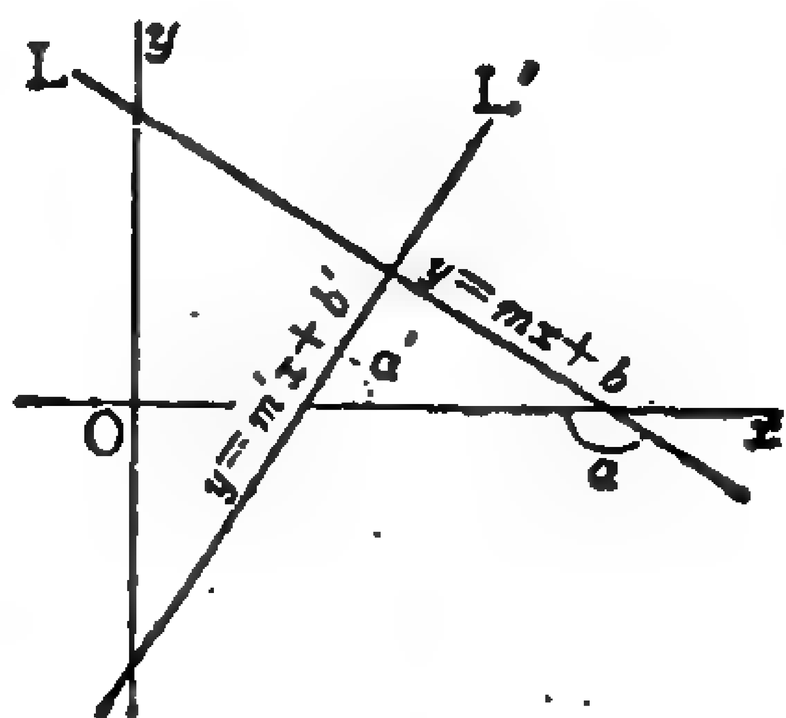
(图 1)



或

$$\alpha'-\alpha=-90°$$

(图 2).



$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha'=\operatorname{tg}(\alpha\pm 90°)$$
$$=-\operatorname{ctg}\alpha$$
$$=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

即

$$m'=-\frac{1}{m}. \qquad ①$$

反之，如果等式 ① 成立，则直线 L 和 L' 互相垂直。若取垂直于直线 L 的直线 L''，设 L'' 的斜率为 m''，则由上述证明可知

$$m''=-\frac{1}{m}.$$

已知等式 $m'=-\frac{1}{m}$ 成立，于是

$$m'=m''.$$

所以直线 $L'\parallel L''$，从而 $L'\perp L$。

综上所述，直线 $y=mx+b$ 和 $y=m'x+b'$

互相垂直的充要条件是 $mm'=-1$.

3518. 求两直线 $ax+by+c=0$ 和 $a'x+b'y+c'=0$ 互相平行的充要条件.

解 由 $ax+by+c=0$ 得

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b},$$

由 $a'x+b'y+c'=0$ 得

$$y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}.$$

如果题设两直线平行，须且仅须其斜率相等，

$$\therefore\quad -\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'},\ 即\ \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}.$$

这就是所求两直线平行的充要条件.

当 $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ 且 $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$ 时，题设两直线重合.

3519. 求过点 (x_1, y_1) 且与已知直线 $y=mx+b$ 平行的直线的方程.

解 由问题 **3477** 知，过点 (x_1, y_1)、斜率为 m 的直线方程为

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

这就是所求直线方程.

3520. 求与直线 $y=mx+b$ 垂直且过点 (x_1, y_1) 的直线方程.

解 由问题 **3517** 知，与直线 $y=mx+b$ 垂直的直线的斜率为 $-\frac{1}{m}$，根据问题 **3477** 可知，所求过点 (x_1, y_1) 且斜率为 $-\frac{1}{m}$ 的直线方程为

$$y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1).$$

3521. 已知直线

$$y=mx+b, \qquad ①$$

求过原点且垂直于直线 ① 的直线及与直线 ① 的交点的坐标.

解 已知直线的方程为

$$y=mx+b, \qquad ①$$

则过原点且垂直于直线 ① 的直线方程为

$$y=-\frac{1}{m}x. \qquad ②$$

解联立方程 ①、② 得

$$x=-\frac{bm}{m^2+1},\quad y=\frac{b}{m^2+1}.$$

因而所求坐标为 $\left(-\frac{bm}{m^2+1},\ \frac{b}{m^2+1}\right)$

3522. 求从点 (x_1, y_1) 到直线 $ax+by+c=0$ 的距离.

解 直线

$$ax+by+c=0, \qquad ①$$

即 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$，其斜率为 $-\frac{a}{b}$. 所以过点 $P(x_1, y_1)$ 且与这条直线垂直的直线方程为

$$y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1). \qquad ②$$

设直线 ① 和 ② 的交点 H 的坐标为 (x_2, y_2)，则

$$ax_2+by_2+c=0, \qquad ③$$

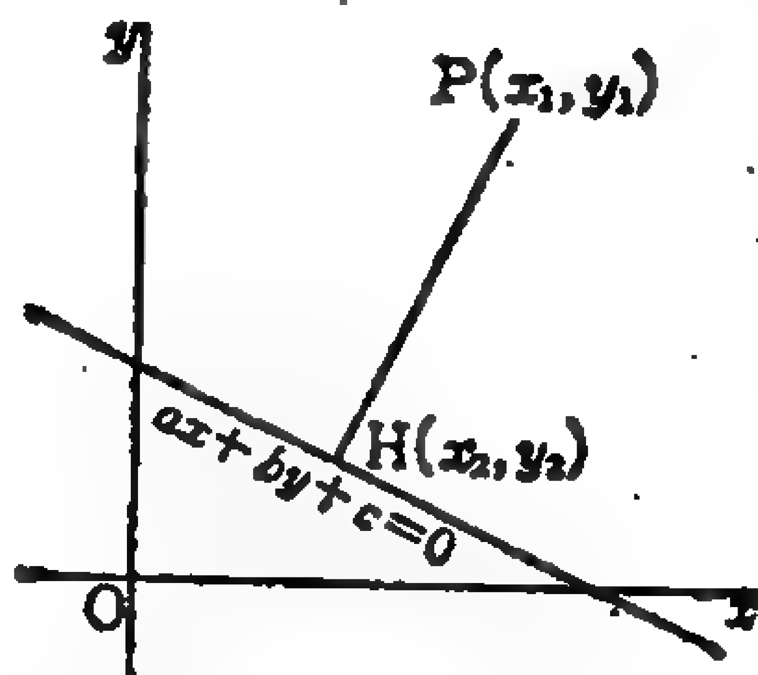
$$y_2-y_1=\frac{b}{a}(x_2-x_1). \qquad ④$$

把 ④ 改写为

$$b(x_2-x_1)-a(y_2-y_1)=0, \qquad ⑤$$

把 ③ 改写为

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+ax_1+by_1+c=0. \qquad ⑥$$



从 ⑤、⑥ 求 x_2-x_1 和 y_2-y_1，则

$$x_2-x_1=-\frac{a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2},$$

$$y_2-y_1=-\frac{b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}.$$

设 P、H 两点间的距离为 l，则

$$l^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

把 x_2-x_1, y_2-y_1 的值代入上式，

$$l^2=\frac{(a^2+b^2)(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2},$$

$$\therefore\quad l=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

注 特别地，当点 P 和原点重合时，则

$$l=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3523. 求从原点和点 $(1, 2)$ 分别到直线 $3x-4y=5$ 的距离.

解 由上题知，从原点到直线 $3x-4y=5$ 的距离是 $\frac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$，从点 $(1, 2)$ 到直线 $3x-4y=5$ 的距离是

$$\frac{|3\times1-4\times2-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2.$$

3524. 求两条平行直线 $ax+by+c=0$ 和 $ax+by+c'=0$ 间的距离。

解 从点 (x_1, y_1) 到两直线 $ax+by+c=0$ 和 $ax+by+c'=0$ 的距离分别为

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{|ax_1+by_1+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

所以两平行直线间的距离为

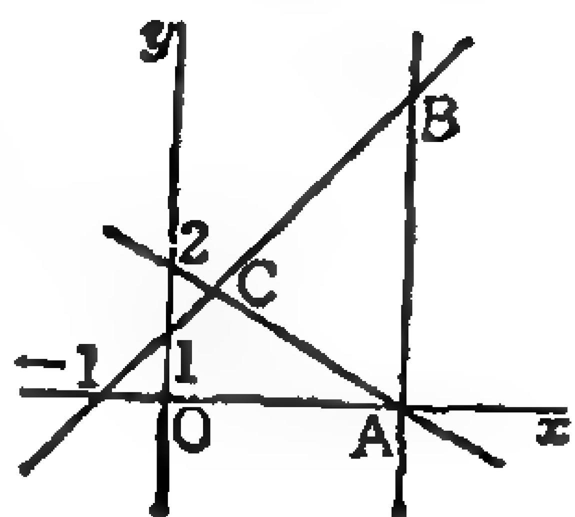
$$\frac{|(ax_1+by_1+c)-(ax_1+by_1+c')|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

别解 1 因为原点到两直线 $ax+by+c=0$ 和 $ax+by+c'=0$ 的距离分别是 $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 和 $\frac{|c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，所以该两平行直线间的距离为 $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2 容易知道，点 $\left(-\frac{c}{2a},\ -\frac{c}{2b}\right)$ 是直线 $ax+by+c=0$ 上的点，由问题 **3522** 知，这个点到直线 $ax+by+c'=0$ 的距离为 $\frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 即 $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3525. 如图. AB 是垂直于 x 轴的直线，BC 是过两点 $(-1,\ 0)$ 和 $(0,\ 1)$ 的直线，AC 是过点 $(0,\ 2)$ 且与 x 轴正向夹角为 $\frac{5}{6}\pi$ 的直线.



(1) 求直线 AB、BC、CA 的方程；

(2) 不用点 C 的坐标，求线段 AC 的长；

(3) 用 (2) 的结果求 $\triangle ABC$ 的面积.

注 以上各点尽量简单地解答，答数不化为小数.

解 (1) BC 是过点 $(-1,\ 0)$ 和 $(0,\ 1)$ 的直线，所以其方程为 $y=x+1$. 直线 AC 和 x 轴正向的夹角是 $\frac{5}{6}\pi$，$\operatorname{tg}\frac{5}{6}\pi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 又 AC 在 y 轴上的截距为 2，所以直线 AC 的方程为 $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+2$. 在 AC 的方程中，令 $y=0$，则 $x=2\sqrt{3}$，即点 A 的坐标为 $(2\sqrt{3},\ 0)$. 直线 AB 是过点 $A(2\sqrt{3}, 0)$ 且和 x 轴垂直，所以其方程为 $x=2\sqrt{3}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CBA=45^\circ$，$\angle CAO=30^\circ$，因而 $\angle BCA=45^\circ+30^\circ=75^\circ$. 由正弦定理，得

$$\frac{AC}{\sin 45^\circ}=\frac{AB}{\sin 75^\circ}.$$

因 $$AB=1+2\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad AC=\frac{AB\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}=\frac{AB\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ+30^\circ)}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}AB}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2(1+2\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}}$$

$$=-(1+2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})$$

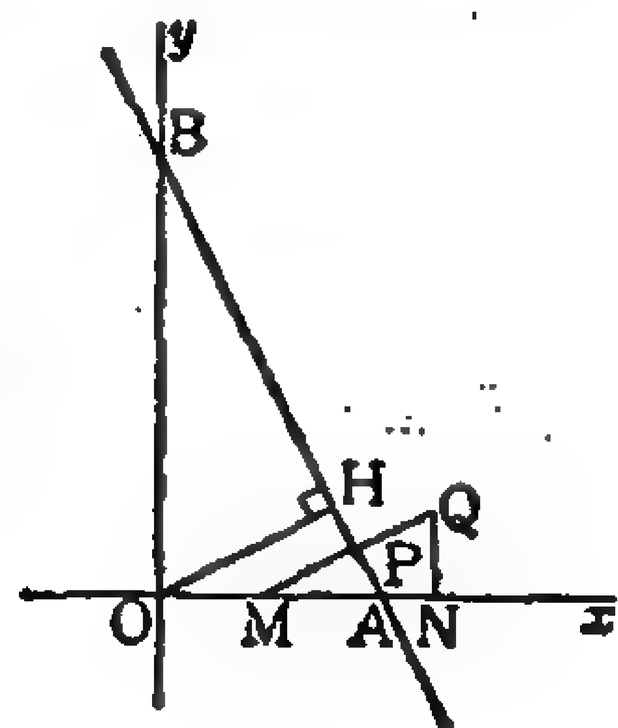
$$=5-\sqrt{3}.$$

(3) $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}(1+2\sqrt{3})(5-\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{27-\sqrt{3}}{4}.$$

3526. 在以 O 为原点的直角坐标系 xOy 里，直线 $2x+y-2=0$ 和 x 轴、y 轴分别交于点 A、B.



(1) 求从 OA 的中点 M 到直线 AB 的距离；

(2) 求点 M 关于直线 AB 的对称点 Q 的坐标.

解 (1) 如图，$OA=1$、$OB=2$、$AB=\sqrt{5}$，根据问题 **3522** 可知，点 O 到 AB 的距离为 $OH=\frac{2}{\sqrt{5}}$. 所以点 M 到直线 AB 的距离是

$$MP=\frac{1}{2}OH=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(2) 从 Q 向 Ox 引垂线 QN（如图），则

$$\angle QPA=\angle QNA=90^\circ,$$

因而 $PQNA$ 是圆内接四边形，所以

$$MA\cdot MN=MP\cdot MQ.$$

已知 $MA=\frac{1}{2}$, $MP=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $MQ=\frac{2}{\sqrt{5}}$，把这些值代入上式，得

$$\frac{1}{2}MN=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}},$$

从而 $$MN=\frac{4}{5}.$$

$$\therefore\quad ON=OM+MN=\frac{1}{2}+\frac{4}{5}=\frac{13}{10},$$

$$NQ=\sqrt{MQ^2-MN^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{5}.$$

因此得 $Q\left(\frac{13}{10},\ \frac{2}{5}\right)$。

3527. 已知直线 $Ax+By+C=0$ 和两条平行直线 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ 相交，求该直线夹在两平行线间的线段的长。

解 直线 $Ax+By+C=0$ 和直线 $ax+by+c=0$ 的交点坐标为

$$x_1=\frac{Bc-bC}{Ab-aB},\quad y_1=\frac{Ca-cA}{Ab-aB}.$$

直线 $Ax+By+C=0$ 和直线 $ax+by+c'=0$ 的交点坐标为

$$x_2=\frac{Bc'-bC}{Ab-aB},\quad y_2=\frac{Ca-c'A}{Ab-aB}.$$

设直线 $Ax+By+C=0$ 夹在两平行线 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ 间的线段长为 d，则

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

将前面所求的 x_1、y_1, x_2、y_2 代入上式，

$$d^2=\frac{B^2(c-c')^2}{(Ab-aB)^2}+\frac{A^2(c-c')^2}{(Ab-aB)^2}$$

$$=\frac{(A^2+B^2)(c-c')^2}{(Ab-aB)^2},$$

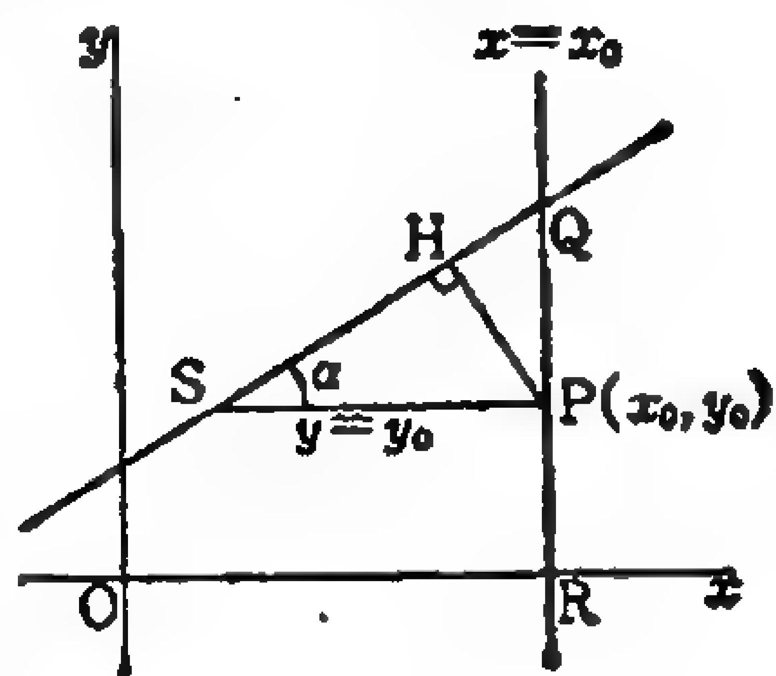
$$\therefore\quad d=\frac{\sqrt{A^2+B^2}\,|c-c'|}{|Ab-aB|}.$$

3528. 已知定直线 $ax+by+c=0$ $(ab<0)$ 和定点 $P(x_0,\ y_0)$。

(1) 过点 P 且与 y 轴平行的直线和定直线、x 轴的交点分别为 Q、R，求线段 QR 的长；

(2) 过点 P 且与 x 轴平行的直线和定直线的交点为 S，夹角 $\angle PSQ$ 为 α，求线段 PS 的长和 $\operatorname{tg}\alpha$；

(3) 求点 P 到定直线的距离 PH。



解 (1) 过点 P 且与 y 轴平行的直线方程为

$$x=x_0,$$

因而点 R 的坐标是 $(x_0,\ 0)$。点 Q 的坐标是方程

$$x=x_0$$

和 $ax+by+c=0$ 的解：

$$x=x_0,\quad y=-\frac{ax_0+c}{b}.$$

$$\therefore\quad QR=\left|-\frac{ax_0+c}{b}\right|.$$

(2) 直线 PS 的方程是 $y=y_0$，所以点 S 的坐标为

$$x=-\frac{by_0+c}{a},\quad y=y_0,$$

从而

$$PS=\left|x_0-\left(-\frac{by_0+c}{a}\right)\right|$$

$$=\left|x_0+\frac{by_0+c}{a}\right|$$

$$=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{a}\right|. \qquad ①$$

同理

$$PQ=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right|, \qquad ②$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{PQ}{PS}=\left|\frac{a}{b}\right|.$$

由于 $ab<0$, a、b 的符号相反，所以

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{a}{b}.$$

(3) 从 P 向定直线作垂线，垂足为 H，考虑直角三角形 PQS 的面积，则有

$$\frac{1}{2}PH\cdot QS=\frac{1}{2}PS\cdot PQ,$$

$$\therefore\quad PH=\frac{PS\cdot PQ}{QS}. \qquad ③$$

但是

$$QS^2=\left(x_0+\frac{by_0+c}{a}\right)^2+\left(-\frac{ax_0+c}{b}-y_0\right)^2$$
$$=(ax_0+by_0+c)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right),$$

$$\therefore\quad QS=|ax_0+by_0+c|\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{-ab}.\quad ④$$

把①、②、④代入③，得

$$PH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3529. 求过两直线 $2x+y-4=0$, $x+y-1=0$ 的交点且与直线 $x+2y=3$ 平行（或垂直）的直线的方程。

解 过题设两直线交点的直线方程可写成

$$(2x+y-4)+k(x+y-1)=0,\qquad ①$$

其中 k 为任意给定的数。因为①是关于 x、y 的一次方程，它表示一条直线。又因题设两直线交点的坐标必满足它们的方程 $2x+y-4=0$ 和 $x+y-1=0$，因而题设两直线交点的坐标也满足①，所以直线①过题设两直线的交点。直线①的斜率 $m=-\frac{k+2}{k+1}$，它平行于直线 $x+2y=3$ 的条件是 $m=-\frac{1}{2}$，所以

$$-\frac{k+2}{k+1}=-\frac{1}{2},\ k=-3.$$

以 $k=-3$ 代入①，则得过题设两直线交点且平行于直线 $x+2y=3$ 的直线方程为

$$x+2y+1=0.$$

同样，直线①垂直于直线 $x+2y=3$ 的条件是 $mm'=-1$，所以

$$-\frac{k+2}{k+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,\ k=-\frac{4}{3}.$$

以 k 的值代入①，则得过题设二直线的交点且垂直于直线 $x+2y=3$ 的直线方程为

$$2x-y-8=0.$$

4. 对称

3530. 求点 (x_1, y_1) 关于点 (α, β) 对称的点的坐标，并求点 $(-2, 5)$ 关于点 $(3, 4)$ 对称的点的坐标。

解 设点 (x_1, y_1) 关于点 (α, β) 对称的点的坐标为 (x_2, y_2)，则

$$\alpha=\frac{x_1+x_2}{2},\quad \beta=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

$$\therefore\quad x_2=2\alpha-x_1,\ y_2=2\beta-y_1.$$

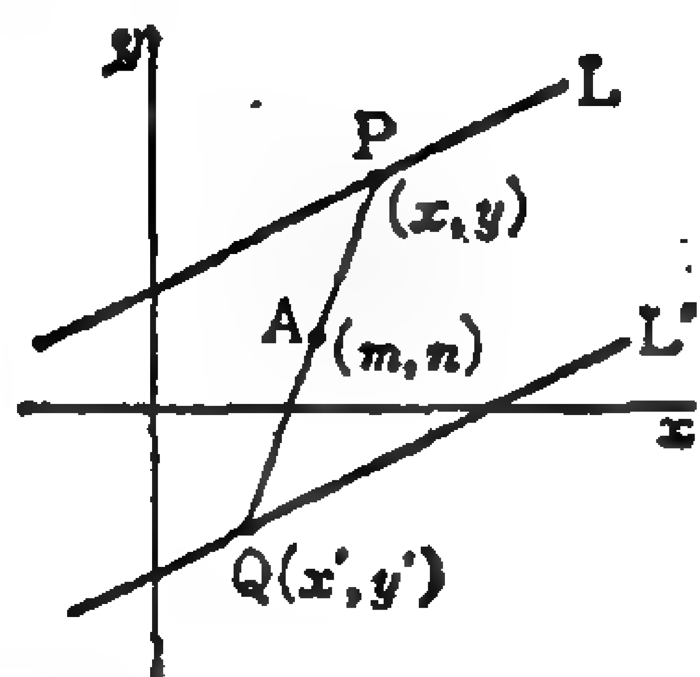
如 $x_1=-2$, $y_1=5$; $\alpha=3$, $\beta=4$，则所求对称点的坐标为

$$x_2=2\times3-(-2)=8,\ y_2=2\times4-5=3.$$

3531. 把直线 $y=ax+b$ 移动到关于点 $A(m, n)$ 的对称位置时，求该直线的方程。

解 因为把点 $P(x, y)$ 移动到关于定点 $A(m, n)$ 的对称位置 $Q(x', y')$ 时，这些坐标之间有关系式：

$$x+x'=2m,\ y+y'=2n.$$



所以把

$$x=2m-x',$$
$$y=2n-y'$$

代入直线方程

$$y=ax+b,$$

就得到动点 (x', y') 的轨迹方程：

$$2n-y'=a(2m-x')+b,$$

即 $$y'=-a(2m-x')+2n-b.$$

根据习惯，我们把 (x', y') 改写成 (x, y) 就得到所求轨迹方程为

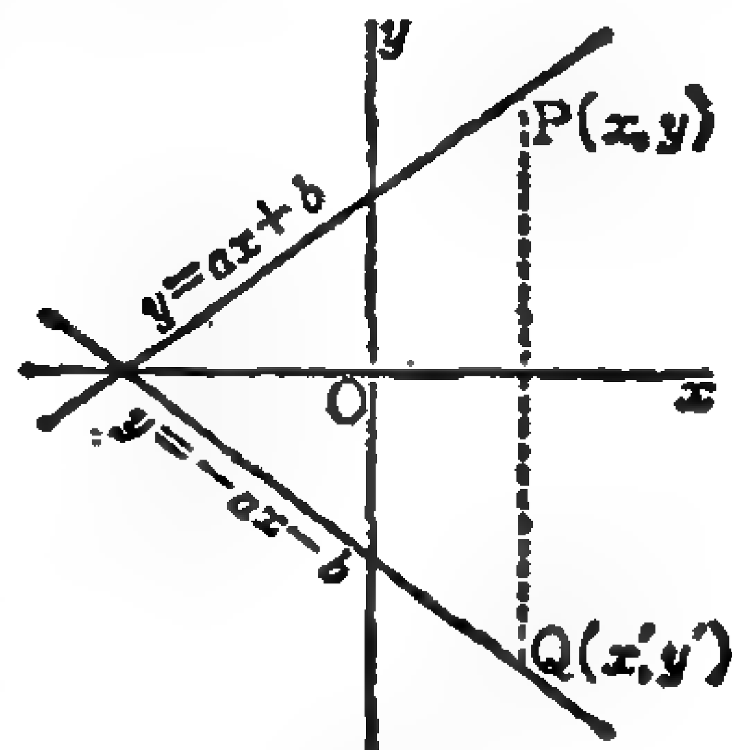
$$y=-a(2m-x)+2n-b,$$

它仍是一条直线。

3532. 求直线 $y=ax+b$ 关于 x 轴的对称直线方程。

解 设直线 $y=ax+b$ 上的点 $P(x, y)$ 关于 x 轴的对称点为 $Q(x', y')$，则点 Q 在直线 $y=ax+b$ 关于 x 轴对称的直线上，且有

$$x=x',\ y=-y'.$$



由此可知，要求直线 $y=ax+b$ 关于 x 轴对称的直线方程，只要在该直线方程中，x 保持不变，把 y 改写成 $-y$ 即可。故所求直线方程为

$$-y=ax+b,\quad 即\quad y=-ax-b.$$

注 求曲线关于 x 轴的对称曲线的方程时，只须把其方程中的 y 改写为 $-y$。

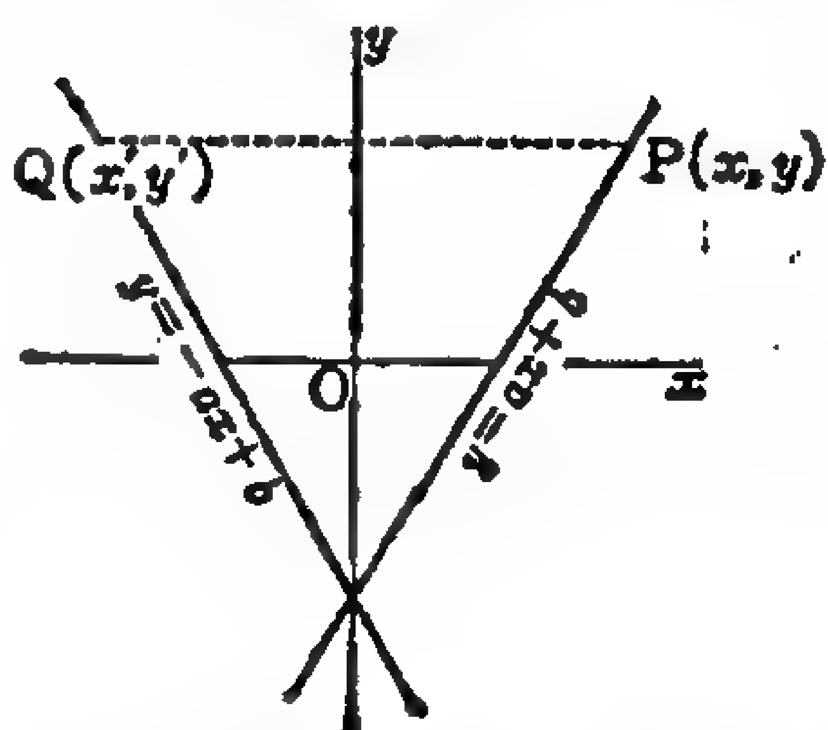
3533. 求直线 $y=ax+b$ 关于 y 轴的对称直线方程。

解　设直线 $y=ax+b$ 上任意一点 P 关于 y 轴的对称点为 $Q(x', y')$，则点 Q 在直线

$$y=ax+b$$

关于 y 轴对称的直线上，且

$$x'=-x,$$
$$y'=y.$$



因而要求直线 $y=ax+b$ 关于 y 轴对称的直线方程，只要把 $y=ax+b$ 中的 x 改写成 $-x$，y 保持不变。于是得

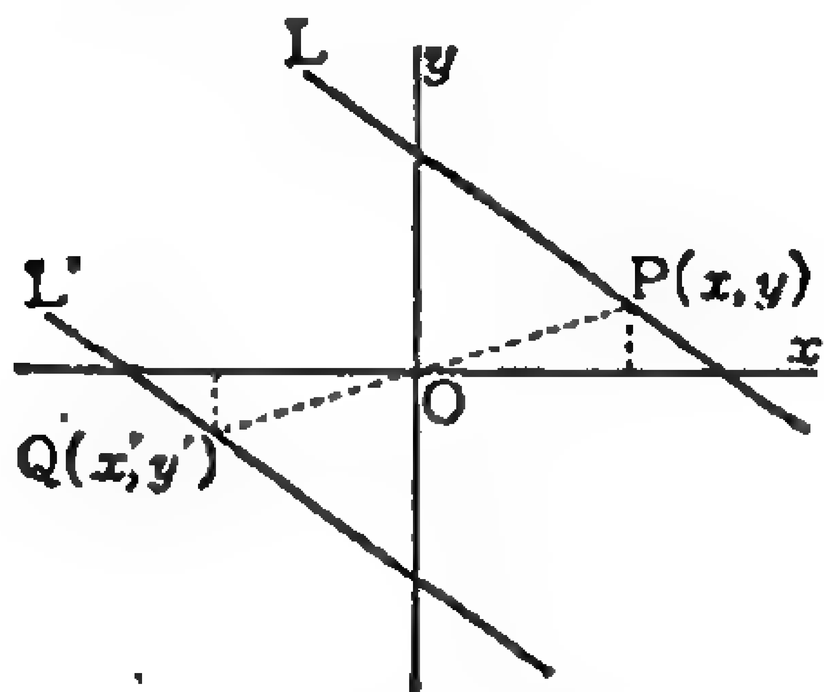
$$y=-ax+b.$$

注　求曲线关于 y 轴的对称曲线的方程时，只要把其方程中的 x 改写为 $-x$。

3534.　把直线 $y=ax+b$ 移动到关于原点 O 的对称位置时，求这条直线的方程。

解　用 L 表示直线 $y=ax+b$，L' 表示 L 关于原点 O 对称的直线。设 L 上任意一点 $P(x, y)$ 关于点 O 的对称点为 $Q(x', y')$，则 Q 在 L' 上，且有

$$x'=-x,$$
$$y'=-y.$$



因此直线 L' 的方程是把直线 L:

$$y=ax+b$$

中的 x 改写为 $-x$，y 改写为 $-y$，于是得

$$-y=-ax+b \quad 即 \quad y=ax-b.$$

注　一般地，曲线 $f(x)$

关于 x 轴对称的曲线方程是

$$-y=f(x);$$

关于 y 轴对称的曲线方程是

$$y=f(-x);$$

关于原点对称的曲线方程是

$$-y=f(-x).$$

3535.　把直线 $y=3x-1$ 移动到与它关于点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 对称的位置时，求这条直线的方程。

解　设直线 $y=3x-1$ 上任意一点 $P(x, y)$ 关于点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 的对称点为 $Q(x', y')$，则有

$$\frac{x+x'}{2}=\frac{1}{2}, \quad \frac{y+y'}{2}=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad x=1-x', \quad y=-1-y'.$$

把它们代入 $y=3x-1$ 中，得

$$-1-y'=3(1-x')-1,$$

$$\therefore \quad y'=3x'-3.$$

把 (x', y') 改写为 (x, y)，得

$$y=3x-3.$$

这就是所求的直线方程。

3536.　求直线 $y=2x+1$ 关于直线 $y=x-1$ 对称的直线方程。

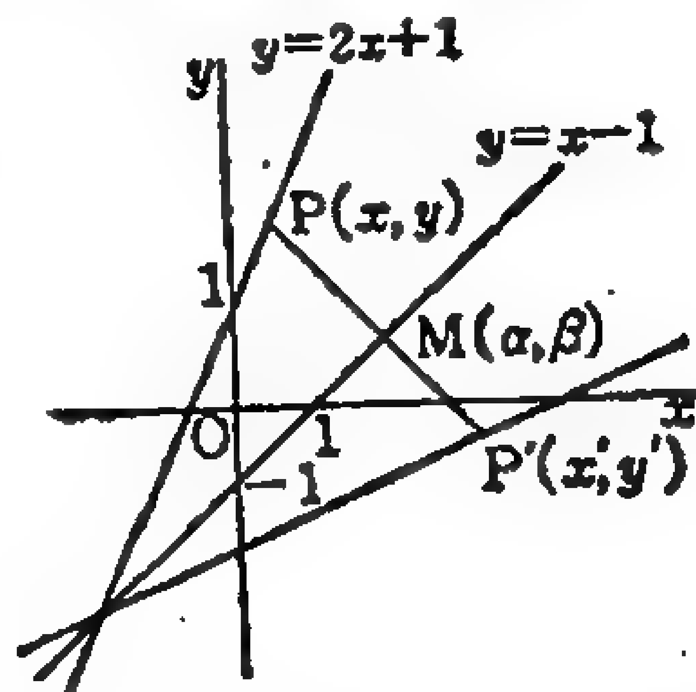
解

$$y=x-1, \qquad ①$$
$$y=2x+1. \qquad ②$$

设直线②上的点 $P(x, y)$ 关于直线①的对称点为 $P'(x', y')$，则 PP' 垂直于直线①，设其垂足为 $M(\alpha, \beta)$，可得

$$\alpha=\frac{1}{2}(x+x'),$$

$$\beta=\frac{1}{2}(y+y').$$



M 在直线①上，所以 $\beta=\alpha-1$。把 α、β 的值代入上式，得

$$y+y'=x+x'-2. \qquad ③$$

又 PP' 垂直于直线①，所以

$$\frac{y-y'}{x-x'}=-1,$$

即

$$y-y'=x'-x. \qquad ④$$

从③和④，得

$$y=x'-1, \quad x=y'+1. \qquad ⑤$$

把⑤代入②，得

$$x'-1=2(y'+1)+1, \quad \therefore \quad 2y'=x'-4.$$

再把 (x', y') 改写为 (x, y)，就得到所求方程为

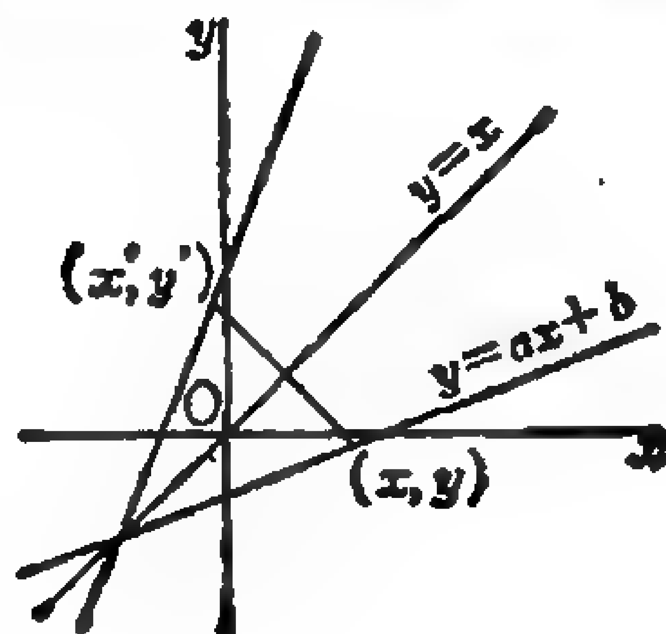
$$2y=x-4.$$

3537.　把直线 $y=ax+b(a\neq0)$ 移动到与它关于直线 $y=x$ 的对称位置时，求这条直线的方程。

解　设直线

$$y=ax+b$$

上的任意一点 (x, y) 关于直线 $y=x$



的对称点为(x', y')，则有

$$x'=y,\ y'=x.$$

把x、y的值代入$y=ax+b$，得

$$x'=ay'+b,$$

$$\therefore\ y'=\frac{1}{a}x'-\frac{b}{a}.$$

因此，所求直线方程为

$$y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}.$$

5. 轨迹

3538. 如果过定点$A(a, 0)$直线的斜率是过定点$B(-a, 0)$直线的斜率的两倍，求这两条直线交点的轨迹。

解 两直线的方程可分别写成

$$y=2m(x-a),\ y=m(x+a).$$

从这两方程中消去m就可得到两直线交点的轨迹方程。把两式两边相除，得

$$1=\frac{2(x-a)}{x+a},\ \therefore\ x=3a.$$

这就是所求轨迹方程，它表示平行于y轴的直线。

3539. 求距两定点$A(a,0)$和$B(-a,0)$的距离相等的点的轨迹。

解 设满足$AP=BP$的点为$P(x, y)$，则

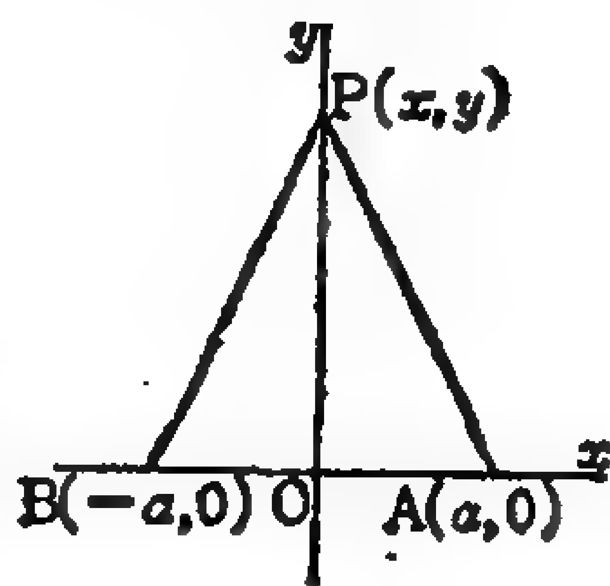
$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{(x+a)^2+y^2},$$

$$\therefore\ (x-a)^2+y^2=(x+a)^2+y^2,$$

即 $x=0$.

这就是所求轨迹方程，它表示y轴，即线段AB的垂直平分线。

3540. 已知两个定点$A(a,0)$和$B(-a,0)$，动点P为该坐标平面上的点，且$PA^2-PB^2=k^2$（k是常数），求点P的轨迹。



解 设点P的坐标为(x, y)，则

$$AP=\sqrt{(x-a)^2+y^2},$$

$$BP=\sqrt{(x+a)^2+y^2},$$

从而，

$$PA^2-PB^2$$

$$=|[(x-a)^2+y^2]-[(x+a)^2+y^2]|$$

$$=k^2,$$

$$\therefore\ |4ax|=k^2,\ x=\pm\frac{k^2}{4a}.$$

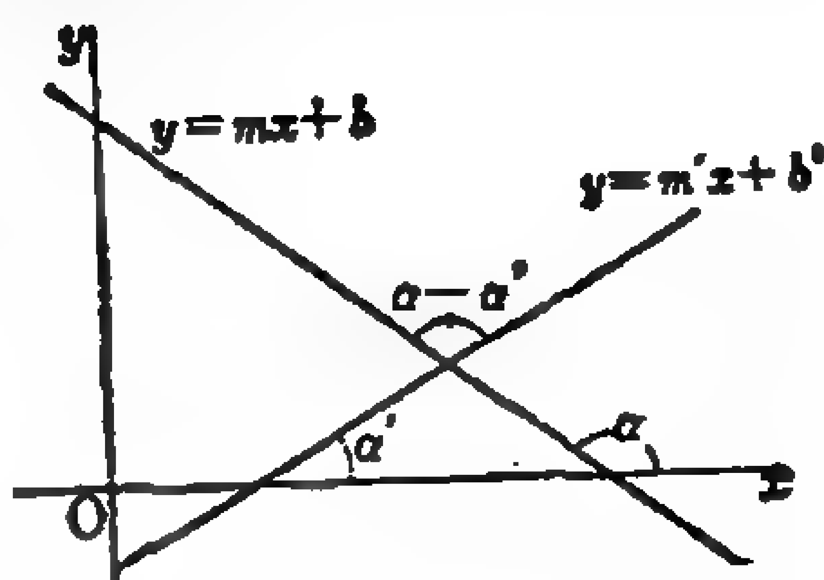
故所求轨迹是距y轴$\left|\frac{k^2}{4a}\right|$，且与$y$轴平行的两条直线。

6. 杂题

3541. 求两直线的交角，并由此推求两直线垂直或平行的条件。

解 设与y轴不平行的两条直线

$$y=mx+b,$$
$$y=m'x+b'.$$



它们和x轴的正方向的夹角分别为α、α'，则

$$\operatorname{tg}\alpha=m,\ \operatorname{tg}\alpha'=m',$$

且两直线的夹角为$\pm(\alpha-\alpha')$。

$$\therefore\ \operatorname{tg}[\pm(\alpha-\alpha')]$$

$$=\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha'}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'}=\pm\frac{m-m'}{1+mm'}.$$

这就是两直线交角公式。由此可知：

两直线垂直的条件是 $1+mm'=0$.

两直线平行的条件是 $m=m'$.

如果给定的两直线是

$$ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0,$$

即 $$m=-\frac{a}{b},\ m'=-\frac{a'}{b'},$$

则两直线垂直的条件是$aa'+bb'=0$。两直线平行的条件是$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.

3542. 已知一直线上有四点A、B、C、D，且$\frac{AC}{CB}+\frac{AD}{DB}=0$.

(1) 证明 $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$;

(2) 设AB的中点为M，证明 $MC\cdot MD=MA^2$.

解 (1) 以已知直线为坐标轴，A为原点建立直角坐标系，并设B、C、D的坐标分别为b、c、d. 则由$\frac{AC}{CB}+\frac{AD}{DB}=0$可知

$$\frac{c}{b-c}+\frac{d}{b-d}=0.$$

$$\therefore\quad bc-cd+bd-cd=0,$$

即 $$bc+bd=2cd.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{b}$$

即 $$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}.$$

(2) $MC\cdot MD=\left(c-\frac{b}{2}\right)\left(d-\frac{b}{2}\right)$

$$=cd-\frac{1}{2}(bc+bd)+\frac{b^2}{4}$$

$$=cd-\frac{1}{2}(2cd)+\frac{b^2}{4}$$

$$=\frac{b^2}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2=MA^2.$$

3543. 已知一直线上有四点 A、B、C、D，证明

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=0.$$

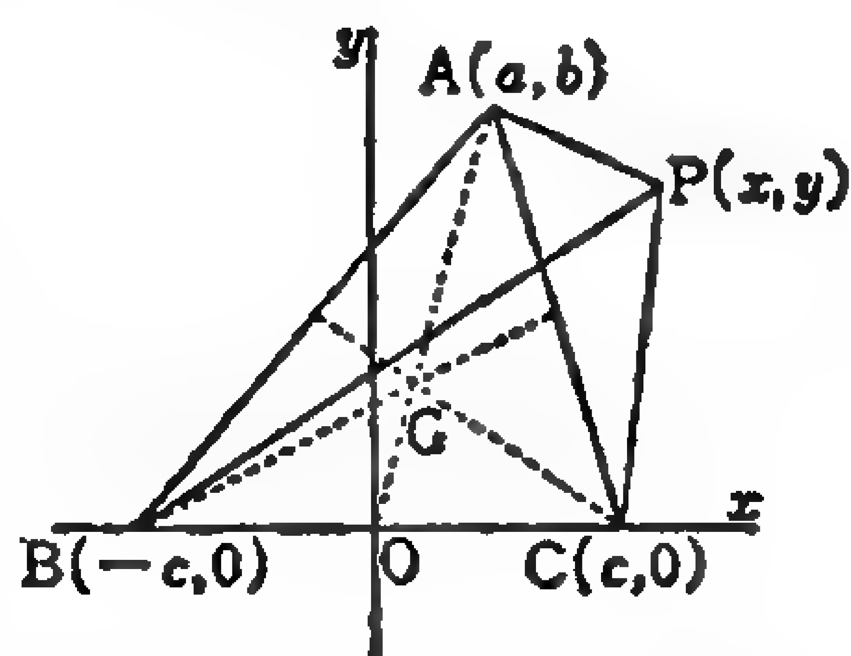
解 在已知直线上选适当点为原点建立坐标系，设直线上点 A、B、C、D 的坐标分别为 a、b、c、d. 则

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC$$
$$=(b-a)(d-c)+(c-a)(b-d)$$
$$+(d-a)(c-b)=0.$$

3544. 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，P 为该平面上的任意一点，证明

$$AP^2+BP^2+CP^2$$
$$=AG^2+BG^2+CG^2+3GP^2.$$

解 取 BC 在 x 轴上，BC 的中点为原点，建立平面直角坐标系. 设 $A(a, b)$，$B(-c, 0)$，$C(c, 0)$，则 $\triangle ABC$ 的重心 G 为 $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$. 再设点 P 的坐标为 (x, y)，则



$$AP^2+BP^2+CP^2$$
$$=(x-a)^2+(y-b)^2+(x+c)^2+y^2$$
$$+(x-c)^2+y^2$$
$$=3x^2+3y^2-2ax-2by+a^2+b^2+2c^2.$$

又

$$AG^2+BG^2+CG^2+3GP^2$$
$$=\left(a-\frac{a}{3}\right)^2+\left(b-\frac{b}{3}\right)^2+\left(-c-\frac{a}{3}\right)^2$$
$$+\left(\frac{b}{3}\right)^2+\left(c-\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2$$
$$+3\left[\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y-\frac{b}{3}\right)^2\right]$$
$$=3x^2+3y^2-2ax-2by+a^2+b^2+2c^2.$$

$$\therefore\quad AP^2+BP^2+CP^2$$
$$=AG^2+BG^2+CG^2+3GP^2.$$

3545. 如图. 过矩形 $ABCD$ 内任意一点 M，作矩形两邻边的平行线 PMQ、RMS，它们和矩形各边的交点分别为 P、Q，R、S. 证明直线 RP、QS 和对角线 BD 共点.

解 以 A 为原点，AB、AD 分别为 x 轴、y 轴建立坐标系. 取 $A(0, 0)$，$B(b, 0)$，$C(b, c)$，$D(0, c)$.

设点 M 的坐标为 (x_1, y_1)，则

直线 PQ 的方程为 $y=y_1$，

直线 RS 的方程为 $x=x_1$，

直线 SQ 的方程为

$$y-y_1=\frac{y_1-c}{b-x_1}(x-b), \qquad ①$$

直线 PR 的方程为

$$y-y_1=-\frac{y_1}{x_1}x, \qquad ②$$

直线 BD 的方程为

$$y=-\frac{c}{b}(x-b). \qquad ③$$

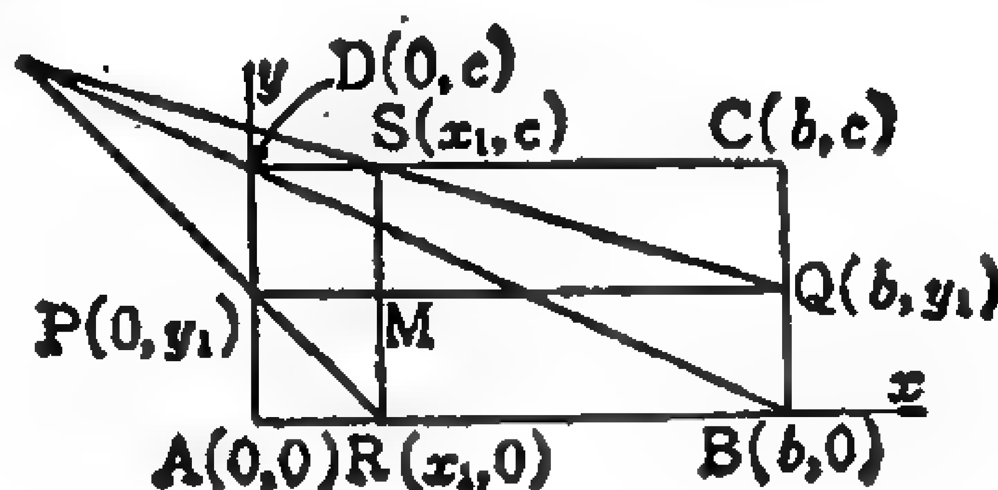
解联立方程 ①、②，得直线 SQ 和 PR 交点的坐标为

$$x=\frac{(y_1-c)bx_1}{by_1-cx_1},\quad y=\frac{(b-x_1)cy_1}{by_1-cx_1}.$$

代入 ③ 的右边，则

$$右边=-\frac{c}{b}\left[\frac{(y_1-c)bx_1}{by_1-cx_1}-b\right]$$
$$=\frac{(b-x_1)cy_1}{by_1-cx_1}=y=左边.$$

这就是说，PR、SQ 的交点在 BD 上. 即三直线共点.



3546. 已知正$\triangle ABC$的顶点$A(0, 1)$、$B(1, 0)$，求顶点C的坐标。

解 设正$\triangle ABC$顶点C的坐标为(x, y)，则由边$AB=\sqrt{2}$可得

$$x^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2=2,$$

及

$$(x-1)^2+y^2=(\sqrt{2})^2=2.$$

即

$$x^2+y^2-2y-1=0, \qquad ①$$

及

$$x^2+y^2-2x-1=0. \qquad ②$$

①－②，$y=x$．代入①，得

$$2x^2-2x-1=0, \quad \therefore \quad x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

因此，顶点C的坐标为

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

或

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right),$$

即符合条件的正三角形有两个。

3547. 证明：三角形的三中线相交于一点，并且这个点内分各中线为2:1(从顶点起算)。

解 设三角形顶点分别为$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$，则边BC的中点D的坐标为

$$D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

设把AD内分为2:1的点为G，则点G的坐标为

$$\left(\frac{2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}+1\cdot x_1}{2+1}, \frac{2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}+1\cdot y_1}{2+1}\right)$$

即

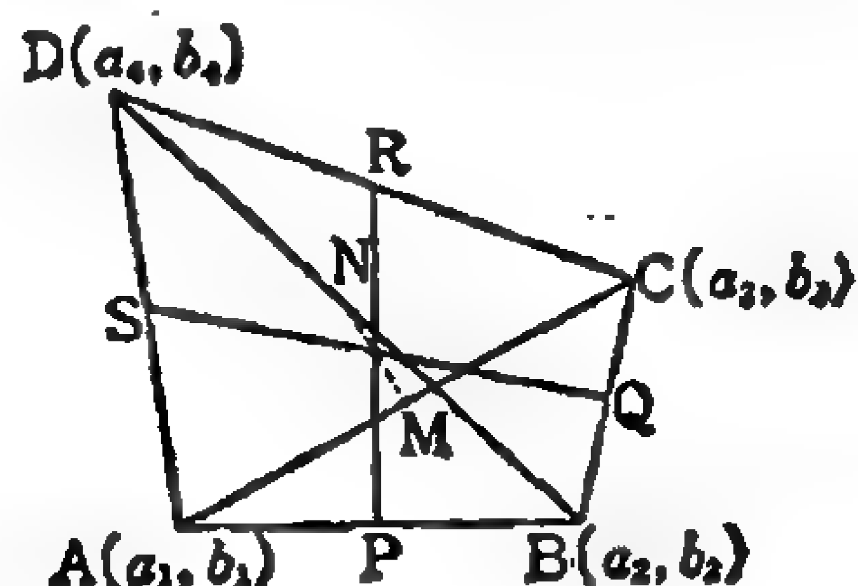
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

类似地，设AC、AB的中点分别为E、F，可知把BE、CF内分为2:1的点都是

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right),$$

和G的坐标重合。因此三条中线相交于一点G，并且G把各中线从顶点内分为2:1。

3548. 已知四边形$ABCD$各顶点坐标为$A(a_1, b_1)$，$B(a_2, b_2)$，$C(a_3, b_3)$，$D(a_4, b_4)$，则分别连结两组对边中点的两条线段和连结两对角线中点的线段共点，并且互相平分。



解 设四边形$ABCD$各边AB、BC、CD、DA的中点分别为P、Q、R、S，对角线AC、BD的中点分别为M、N。取A、B、C、D的坐标分别为(a_1, b_1)、(a_2, b_2)、(a_3, b_3)、(a_4, b_4)，则P、Q、R、S、M、N的坐标分别为

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2+a_3}{2}, \frac{b_2+b_3}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_3+a_4}{2}, \frac{b_3+b_4}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_4+a_1}{2}, \frac{b_4+b_1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_1+a_3}{2}, \frac{b_1+b_3}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2+a_4}{2}, \frac{b_2+b_4}{2}\right).$$

所以，PR、QS、MN各线段中点的坐标都是同一点：

$$\left[\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4), \frac{1}{4}(b_1+b_2+b_3+b_4)\right].$$

这就是说，三线段PR、QS、MN共点并且互相平分。

3549. 证明：顶点为$A(6, 6)$，$B(-4, 3)$，$C(-1, -7)$，$D(9, -4)$的四边形是正方形，并求这个正方形在第一象限部分的面积。

解 直线AB的方程为

$$\frac{y-6}{6-3}=\frac{x-6}{6+4},$$

即

$$y-6=\frac{3}{10}(x-6).\qquad ①$$

直线 CD 的方程为

$$\frac{y+4}{-4+7}=\frac{x-9}{9+1},$$

即

$$y+4=\frac{3}{10}(x-9).\qquad ②$$

因为直线①、②的斜率都是 $\frac{3}{10}$，所以

$$AB\parallel CD.$$

又 直线 AD 的方程为

$$\frac{y-6}{6+4}=\frac{x-6}{6-9},$$

即

$$y-6=-\frac{10}{3}(x-6).\qquad ③$$

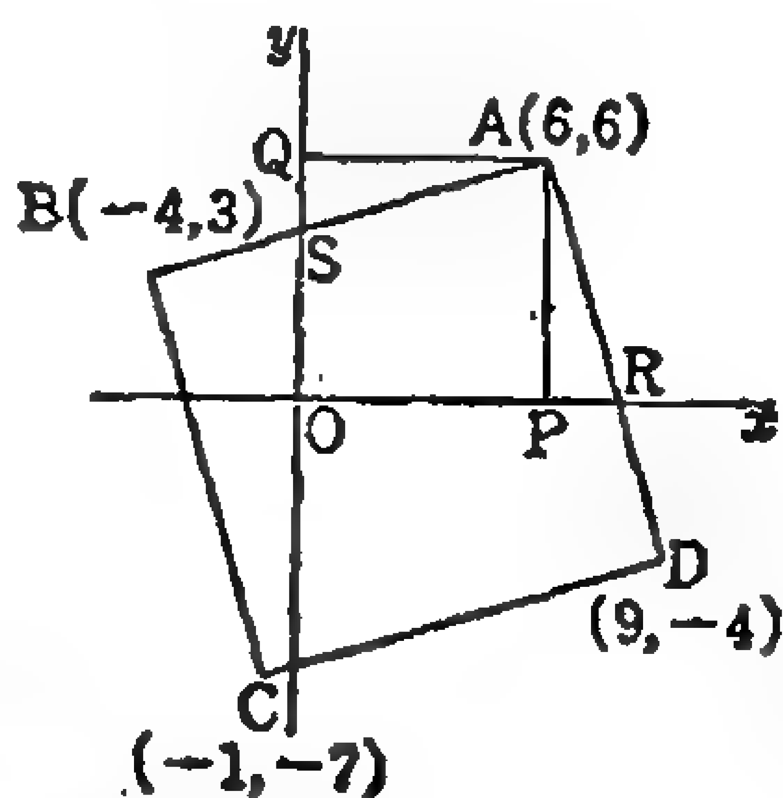
直线 BC 的方程为

$$\frac{y-3}{3+7}=\frac{x+4}{-4+1},$$

即

$$y-3=-\frac{10}{3}(x+4).\qquad ④$$

因为直线③、④的斜率都是 $-\frac{10}{3}$，所以 $AD\parallel BC$。



又由①、③知直线 AB 和 AD 的斜率之积:

$$\frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)=-1,$$

所以 $AB\perp AD$。同样可知 $AC\perp BD$。

综上所述，可知四边形 $ABCD$ 的两组对边平行，一个角为直角，对角线互相垂直，因此它是一个正方形。

设直线 AD 和 x 轴的交点为 R，由③知 OR 是③中当 $y=0$ 时 x 的值，即

$$0-6=-\frac{10}{3}(x-6),\quad \therefore\ x=\frac{39}{5}.$$

$$\therefore\ S_{\triangle AOR}=\frac{1}{2}OR\cdot AP=\frac{1}{2}\cdot\frac{39}{5}\cdot 6=23.4\qquad ⑤$$

(其中 AP 是从 A 所引 x 轴的垂线)。

设直线 AB 和 y 轴的交点为 S，则 OS 是①中当 $x=0$ 时 y 的值，即

$$y-6=\frac{3}{10}(0-6),\quad \therefore\ y=4.2.$$

$$\therefore\ S_{\triangle AOS}=\frac{1}{2}OS\cdot AQ=\frac{1}{2}\times 4.2\times 6=12.6\qquad ⑥$$

(其中 AQ 是从 A 所引 y 轴的垂线)。

设四边形 $ASOR$ 的面积为 ω，则由⑤、⑥知

$$\omega=23.4+12.6=36.$$

3550. (1) 在矩形 $ABCD$ 的边 BC、CD、DA 上分别取不同于顶点的点 P、Q、R。设线段 PR 和 BQ 的交点为 M，问三角形 BRM 和三角形 QMP 的面积哪一个大?

(2) 以三点 $A(0,4)$，$B(-1,1)$，$C(2,1)$ 为顶点的三角形内点 P 的坐标应满足怎样的不等式?

解 (1) $S_{\triangle BRP}=\frac{1}{2}BP\cdot CD$,

$$S_{\triangle BQP}=\frac{1}{2}BP\cdot CQ.$$

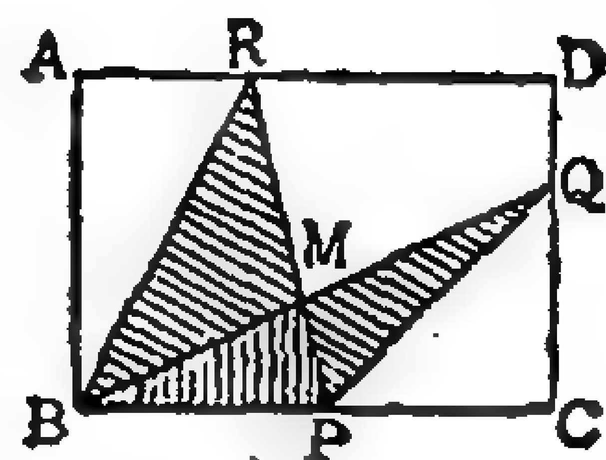
因为 $CD>CQ$，所以

$$S_{\triangle BRP}>S_{\triangle BQP},$$

即

$$S_{\triangle BRM}+S_{\triangle BMP}>S_{\triangle PQM}+S_{\triangle BMP}.$$

$$\therefore\ S_{\triangle BRM}>S_{\triangle PQM}.$$



(2) 连结 A、B 两点的直线方程为

$$y=3x+4,\qquad ①$$

连结 B、C 两点的直线方程为

$$y=1,\qquad ②$$

连结 A、C 两点的直线方程为

$$y=-\frac{3}{2}x+4.\qquad ③$$

对于直线①和顶点 C，点 P 的坐标 (x,y) 应满足

$$y<3x+4.\qquad ④$$

点 P 和点 A 应在直线②的同侧，点 $P(x,y)$ 的坐标又应满足

$$y>1.\qquad ⑤$$

点 P 和点 B 应在直线③的同侧，点 $P(x,y)$ 的坐标还应满足

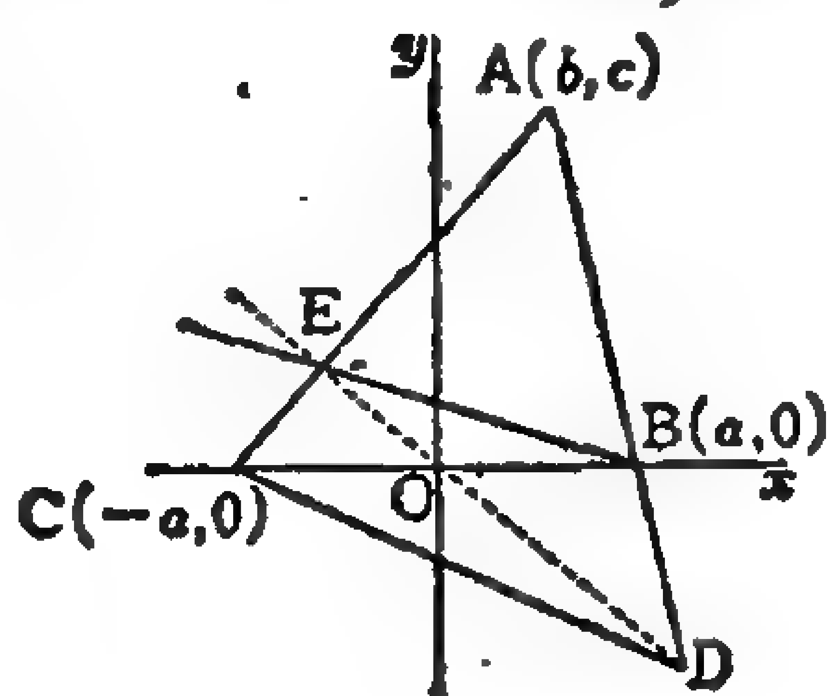
$$y<-\frac{3}{2}x+4.\qquad ⑥$$

因此，$\triangle ABC$ 内的点 $P(x, y)$ 的坐标应同时满足三个不等式

$$y<3x+4,\ y>1,\ y<-\frac{3}{2}x+4.$$

3551. 在 $\triangle ABC$ 中，过边 BC 的中点 O 引任意直线，和边 AB、AC（或其延长线）分别交于 D、E，求直线 BE 和 CD 交点的轨迹。

解 取 BC 在 x 轴上，BC 的垂直平分线在 y 轴上，以建立坐标系，并取 $A(b, c)$，$B(a, 0)$，$C(-a, 0)$，则 AB 的方程为



$$y=\frac{c}{b-a}(x-a). \qquad ①$$

AC 的方程为

$$y=\frac{c}{b+a}(x+a). \qquad ②$$

DE 的方程为

$$y=mx. \qquad ③$$

解①、③得点 D 的坐标为

$$\left[\frac{ac}{(a-b)m+c},\ \frac{mac}{(a-b)m+c}\right].$$

解②、③得点 E 的坐标为

$$\left[\frac{ac}{(a+b)m-c},\ \frac{mac}{(a+b)m-c}\right].$$

因而 BE 的方程为

$$y=\frac{\dfrac{mac}{(a+b)m-c}}{\dfrac{ac}{(a+b)m-c}-a}\cdot(x-a).$$

去分母，整理得

$$ma[(a+b)y+c(x-a)]=2acy. \qquad ④$$

DC 的方程为

$$y=\frac{\dfrac{mac}{(a-b)m+c}}{\dfrac{ac}{(a-b)m+c}+a}\cdot(x+a),$$

即

$$-ma[(a-b)y-c(x+a)]=2acy. \qquad ⑤$$

从④、⑤消去 m 就得到 BE、DC 交点的轨迹方程。

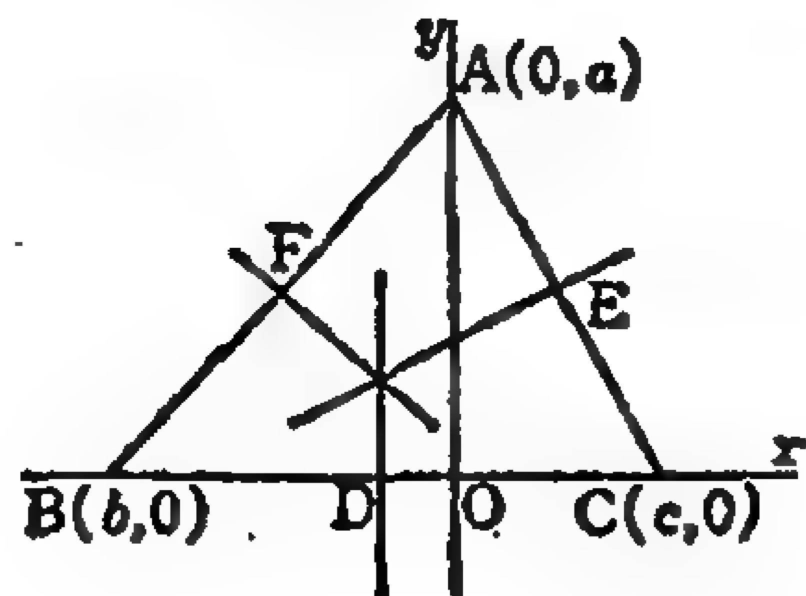
④÷⑤，$$-\frac{(a+b)y+c(x-a)}{(a-b)y-c(x+a)}=1.$$

去分母，整理得 $y=c$.

因此所求轨迹是过顶点 A 并与边 BC 平行的直线。

3552. 证明：三角形各边的垂直平分线共点。

解 取 BC 在 x 轴上，从点 A 引 BC 的垂线在 y 轴上建立坐标系，并设 $A(0, a)$，$B(b, 0)$，$C(c, 0)$。



BC、CA、AB 的中点分别为 D、E、F，则有

$$D\left(\frac{b+c}{2},\ 0\right),\quad E\left(\frac{c}{2},\ \frac{a}{2}\right),$$

$$F\left(\frac{b}{2},\ \frac{a}{2}\right).$$

因为 AC 的斜率是 $-\frac{a}{c}$，所以过点 E 且垂直于 AC 的直线方程为

$$y-\frac{a}{2}=\frac{c}{a}\left(x-\frac{c}{2}\right). \qquad ①$$

又因 AB 的斜率是 $-\frac{a}{b}$，所以过点 F 且垂直于 AB 的直线方程为

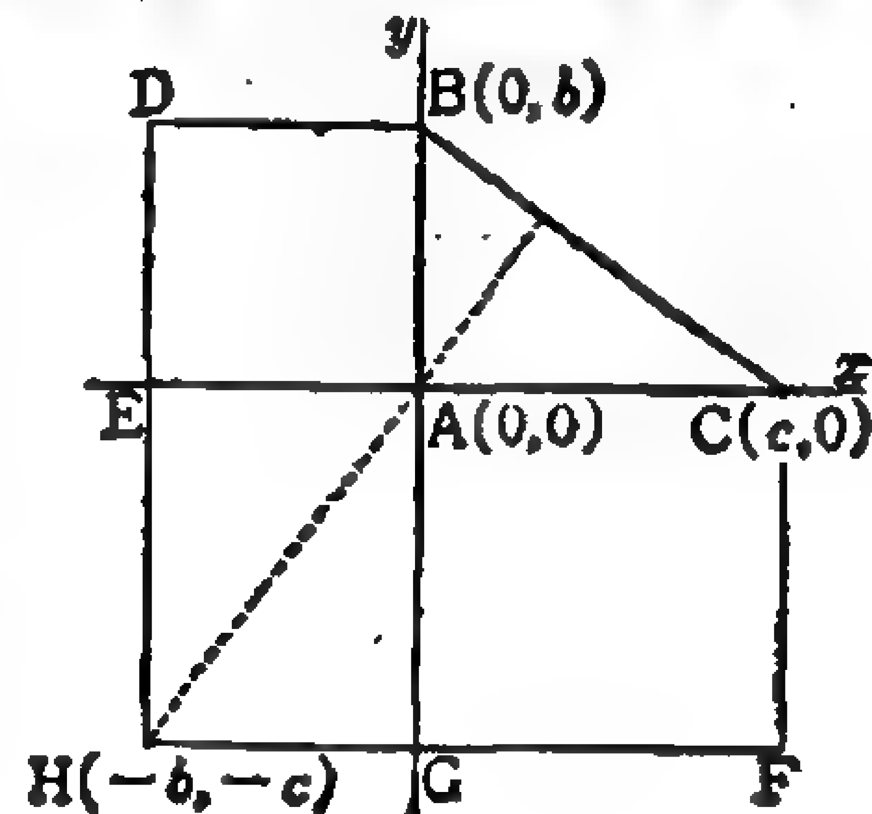
$$y-\frac{a}{2}=\frac{b}{a}\left(x-\frac{b}{2}\right). \qquad ②$$

由①、②得

$$\frac{c}{a}\left(x-\frac{c}{2}\right)=\frac{b}{a}\left(x-\frac{b}{2}\right).$$

由于 $b\neq c$，所以直线①、②交点的横坐标为 $x=\frac{b+c}{2}$。这就是说，直线①、②的交点在过点 D 且垂直于 BC 的直线上。即三角形各边的垂直平分线共点。

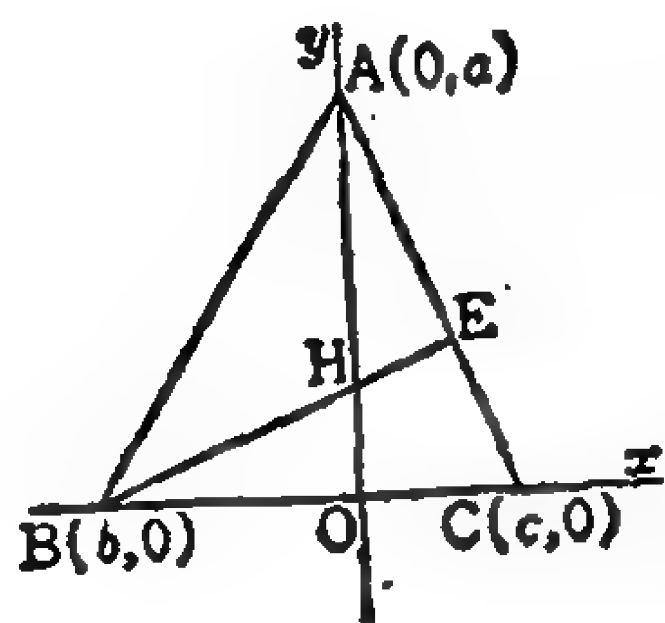
3553. 以直角三角形 ABC 的两直角边 AB、AC 为一边，在三角形的外部分别作正方形 $ABDE$、$ACFG$，则直线 DE、FG 的交点 H 和顶点 A 的



连线垂直于斜边 BC。

解 以 A 为原点，AC、AB 分别为 x 轴、y 轴建立坐标系。取 $A(0, 0)$, $B(0, b)$, $C(c, 0)$。则直线 DE 和 FG 的交点 H 的坐标为 $(-b, -c)$。因为直线 AH 的斜率为 $\frac{c}{b}$，直线 BC 的斜率为 $-\frac{b}{c}$，它们的积等于 -1，所以 $AH\perp BC$。

3554. $\triangle ABC$ 的一个顶点和垂心 H 的距离是外心 O' 到这个顶点对边的距离的两倍。证明：把连结外心 O' 和垂心 H 的线段 $O'H$ 内分为 1:2 的点就是该三角形的重心。



解 取 BC 在 x 轴上，从点 A 引 BC 的垂线在 y 轴上，建立坐标系，如图。直线 BHE 的方程为

$$y=\frac{c}{a}(x-b).$$

在此式中设 $x=0$，则

$$y=-\frac{bc}{a}.$$

所以 H 的坐标是 $H\left(0,\ -\frac{bc}{a}\right)$，从而

$$AH=a-\left(-\frac{bc}{a}\right)=\frac{a^2+bc}{a}.$$

又线段 AB 的垂直平分线的方程为

$$y-\frac{a}{2}=\frac{b}{a}\left(x-\frac{b}{2}\right).$$

在此式中，如取 $x=\frac{b+c}{2}$，则 $y=\frac{a^2+bc}{2a}$。所以外心 O' 的坐标是 $O'\left(\frac{b+c}{2},\ \frac{a^2+bc}{2a}\right)$，从而外心 O' 到边 BC 的距离为 $O'D=\frac{a^2+bc}{2a}$，因此，$AH=2O'D$。

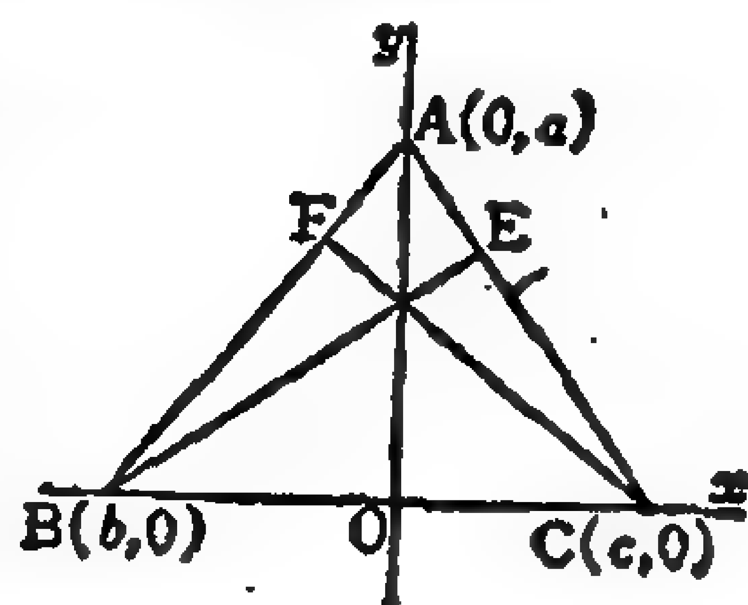
设把 $O'H$ 内分为 1:2 的点为 $G(x_g, y_g)$，则

$$x_g=\frac{2\times\frac{b+c}{2}}{1+2}=\frac{b+c}{3},$$

$$y_g=\frac{2\times\frac{a^2+bc}{2a}+1\times\left(-\frac{bc}{a}\right)}{1+2}=\frac{a}{3}.$$

但是，以 $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ 为顶点的三角形重心的坐标也是 $\left(\frac{b+c}{3},\ \frac{a}{3}\right)$，所以 G 就是 $\triangle ABC$ 的重心。

3555. 证明：$\triangle ABC$ 的三条垂线共点。



解 取 BC 在 x 轴上，从 A 引 BC 的垂线在 y 轴上，建立坐标系，如图。设 $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$。从 B、C 向对边 AC、AB 所引的垂线分别为 BE、CF，则由 AC 的方程式为

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1 \quad 即 \quad y=-\frac{a}{c}x+a.$$

可知 BE 的方程为

$$y=\frac{c}{a}(x-b),$$

又由 AB 的方程

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1,$$

可知 CF 的方程为

$$y=\frac{b}{a}(x-c).$$

因此 BE 和 CF 交点的坐标满足

$$\frac{c}{a}(x-b)=\frac{b}{a}(x-c) \quad 即 \quad x=0.$$

这就是说，BE 和 CF 的交点在 y 轴上，即 $\triangle ABC$ 的三垂线共点。

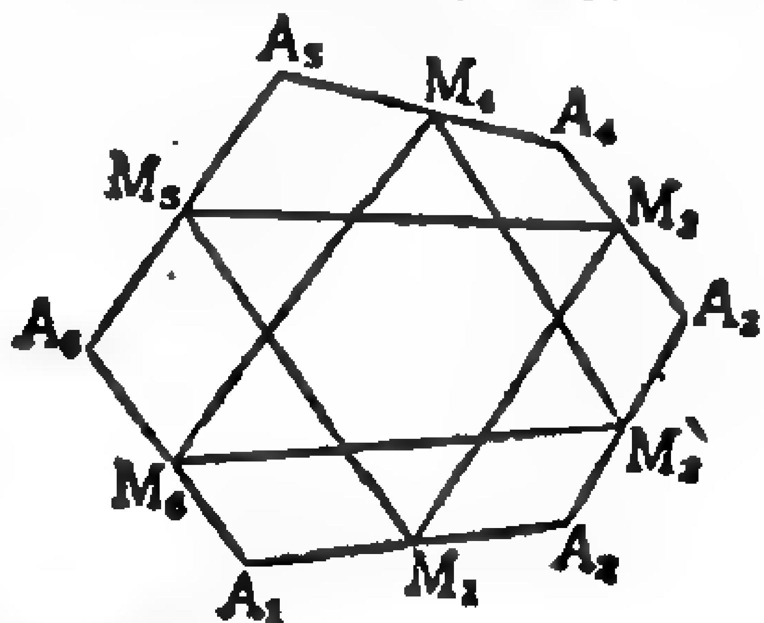
3556. 计算由下列四直线所围成的平行四边形的面积。

$$Ax+By+C=0,\quad Ax+By+C'=0,$$
$$ax+by+c=0,\quad ax+by+c'=0.$$

解 由问题 **3527** 知，直线 $Ax+By+C=0$ 夹在两平行直线 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ 间的线段的长为 $\frac{\sqrt{A^2+B^2}|c-c'|}{|Ab-aB|}$。又由问题 **2524** 知，两平行线 $Ax+By+C=0$, $Ax+By+C'=0$ 间的距离为 $\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。所以平行四边形的面积为

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2}|c-c'|}{|Ab-aB|}\cdot\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$=\frac{|c-c'|\cdot|C-C'|}{|Ab-aB|}.$$

3557. 设六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 各边 A_1A_2, A_2A_3, …的中点顺次为 M_1, M_2, M_3, …。从某中点开始，每相隔一条边与对边中点连线可得两个三角形 $M_1M_3M_5$、$M_2M_4M_6$，证明这两个三角形的重心重合。



解 设 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 的坐标分别为 (a_1, b_1)、(a_2, b_2)、(a_3, b_3)、…、(a_6, b_6)，则各中点 M_1、M_2、…、M_6 的坐标分别为

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2+a_3}{2}, \frac{b_2+b_3}{2}\right),$$

………………

$$\left(\frac{a_6+a_1}{2}, \frac{b_6+b_1}{2}\right).$$

因此 $\triangle M_1M_3M_5$ 和 $\triangle M_2M_4M_6$ 的重心都是同一点：

$$\left[\frac{1}{6}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6),\right.$$

$$\left.\frac{1}{6}(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6)\right].$$

3558. 已知 $\triangle ABC$ 各边 BC、CA、AB 的中点分别为 $D(4, -1)$、$E(-1, 1)$、$F(-2, -5)$，求各顶点 A、B、C 的坐标。

解 设 A、B、C 的坐标分别为 (a_1, b_1)、(a_2, b_2)、(a_3, b_3)，则

$$a_2+a_3=2\times 4=8,$$
$$a_3+a_1=2\times(-1)=-2,$$
$$a_1+a_2=2\times(-2)=-4,$$
$$b_2+b_3=2\times(-1)=-2,$$
$$b_3+b_1=2\times 1=2,$$
$$b_1+b_2=2\times(-5)=-10.$$

解之得 $a_1=-7$, $b_1=-3$, $a_2=3$, $b_2=-7$, $a_3=5$, $b_3=5$.

故有 $A(-7, -3)$, $B(3, -7)$, $C(5, 5)$.

3559. 已知 $A(p, q)$, $B(-q, p)$ 是正方形相邻的两顶点，求正方形中心的坐标。

解 设正方形的中心为 $P(x, y)$，则 $\triangle PAB$ 是等腰直角三角形，即

$$PA=PB, \quad ①$$

$$\angle APB=\angle R. \quad ②$$

从①，得

$$(x-p)^2+(y-q)^2=(x+q)^2+(y-p)^2,$$

$$\therefore \quad (p+q)x=(p-q)y.$$

设 $\dfrac{x}{p-q}=\dfrac{y}{p+q}=k$，则

$$x=(p-q)k, \; y=(p+q)k. \quad ③$$

从②，得

$$\frac{y-q}{x-p}\cdot\frac{y-p}{x+q}=-1,$$

$$\therefore \quad x^2-(p-q)x+y^2-(p+q)y=0.$$

把③代入上式，

$$[(p+q)^2+(p-q)^2]k(k-1)=0,$$

$$\therefore \quad k=0 \quad 或 \quad k=1.$$

把 k 值代入③，得

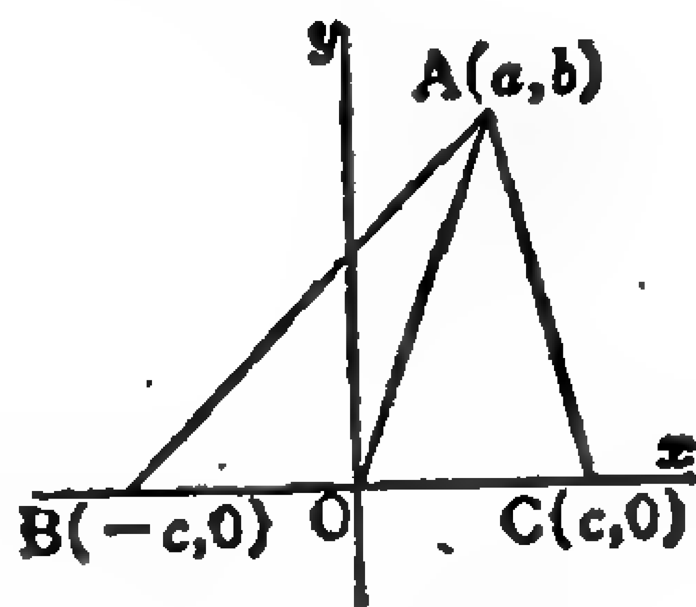
$$x=y=0 \quad 或 \quad x=p-q, \; y=p+q.$$

这就是所求正方形中心的坐标。

3560. 已知 $\triangle ABC$ 的一条中线 AO，证明

$$AB^2+AC^2=2(AO^2+BO^2).$$

解 取 O 为原点，BC 在 x 轴上，BC 的垂直平分线为 y 轴。设 $A(a, b)$，$B(-c, 0)$，$C(c, 0)$，则



$$AB^2+AC^2$$
$$=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2$$
$$=2(a^2+b^2+c^2),$$
$$2(AO^2+BO^2)=2(a^2+b^2+c^2),$$
$$\therefore \quad AB^2+AC^2=2(AO^2+BO^2).$$

3561. 在直角坐标系中，把以三点 $(0, 0)$，$(1, 0)$，$(0, 1)$ 为顶点的直角三角形内的任意一点 P 和斜边上的一点 M 相连结，并延长 PM 到 Q，使 $PM=MQ$，试分别用图形和不等式表示点 Q 的存在范围。

解 设已知直角三角形的斜边为 AB，则点 P 的坐标 (x, y) 满足以下关系：

$$0\leq x\leq 1, \; 0\leq y\leq 1, \; 0\leq x+y\leq 1. \quad ①$$

设点 Q 的坐标为 (X, Y)，则由点 M 是线段 PQ 的中点，可知点 M 的坐标是

$$\left(\frac{x+X}{2}, \frac{y+Y}{2}\right). \quad ②$$

因为 M 在直线 AB: $x+y=1$ 上，所以

$$\frac{x+X}{2}+\frac{y+Y}{2}=1,$$

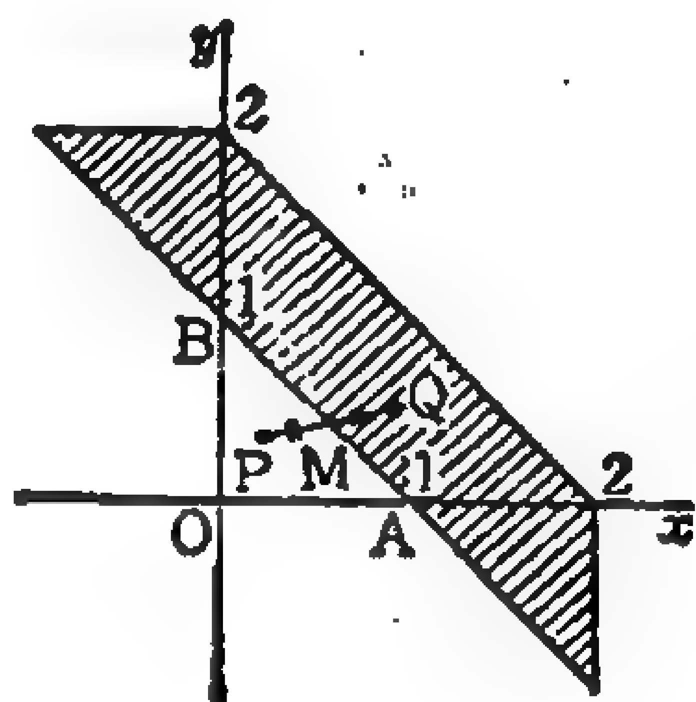
即

$$X+Y=2-(x+y),$$

从①的第三式知

$$1\leqq X+Y\leqq 2.$$

这就是说，点$Q(X,Y)$在两平行直线



$X+Y=1$, $X+Y=2$之间。再从②知

$$\frac{x+X}{2}\leqq 1 \quad 即 \quad X\leqq 2-x.$$

考虑①的第一式$x\geqq 0$，所以$X\leqq 2$。

同理，可得$Y\leqq 2$。

因此点Q的坐标应满足不等式

$$1\leqq X+Y\leqq 2,\ X\leqq 2,\ Y\leqq 2,$$

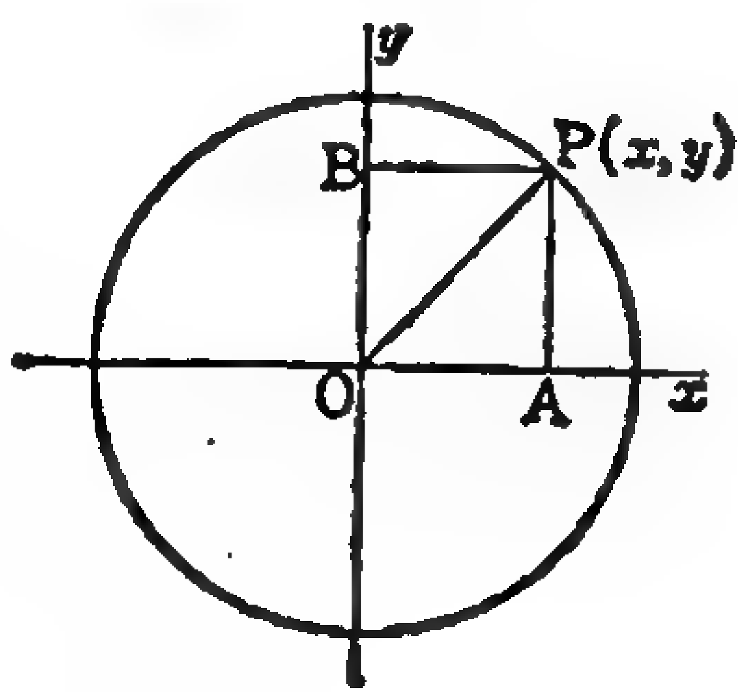
它的存在范围如图中的斜线部分。

第二章 圆

1. 圆的方程

3562. 求以原点O为圆心，r为半径的圆的方程。

解 设以原点O为圆心，r为半径的圆周上任意一点P的坐标为(x,y)；从P向x轴引垂线PA，则



$$OA^2+PA^2=OP^2,$$

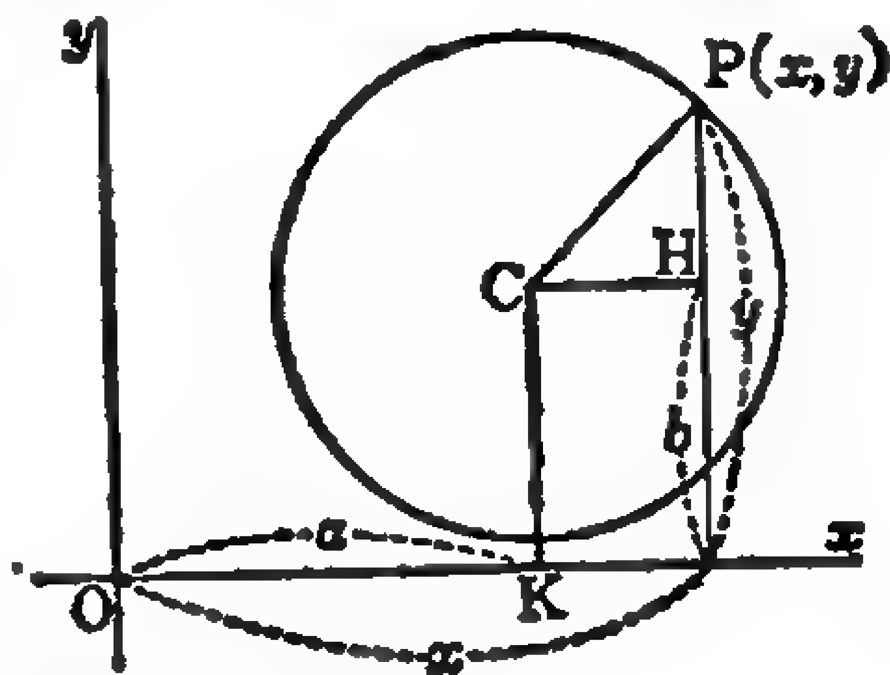
$$\therefore\quad x^2+y^2=r^2. \qquad ①$$

反过来，坐标满足方程①的点都在以原点为圆心，r为半径的圆周上。

综上所述，所求圆的方程是①。

3563. 求以点(a,b)为圆心，r为半径的圆的方程。

解 设圆心为$C(a,b)$，半径为r的圆周上任意一点P的坐标为(x,y)。如图



$$CH^2+PH^2=CP^2.$$

但
$$CH=x-a,$$
$$PH=y-b,$$
$$CP=r,$$

$$\therefore\quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

这就是以(a,b)为圆心，r为半径的圆的方程。

3564. 写出适合下列条件的圆的方程：

(1) 圆心$(-2,4)$，半径为5；

(2) 圆心$(5,0)$，半径为$\sqrt{7}$。

解 (1) 在上题中，取$a=-2$, $b=4$, $r=5$，则得

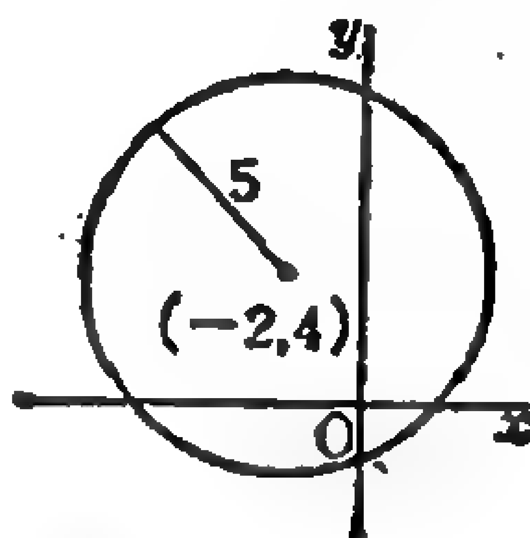
$$(x+2)^2+(y-4)^2=5^2,$$

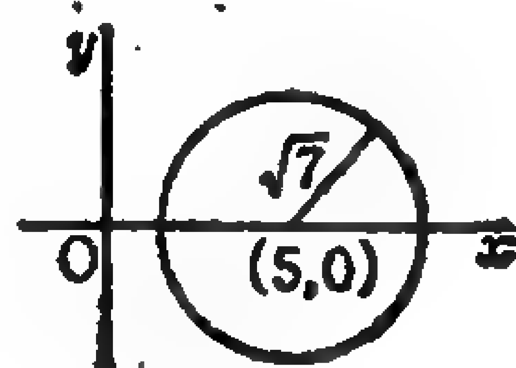
即
$$x^2+y^2+4x-8y-5=0.$$

(2) 取$a=5$, $b=0$, $r=\sqrt{7}$，则得

$$(x-5)^2+y^2=(\sqrt{7})^2,$$

即
$$x^2+y^2-10x+18=0.$$





3565. 作出下列方程的图象：

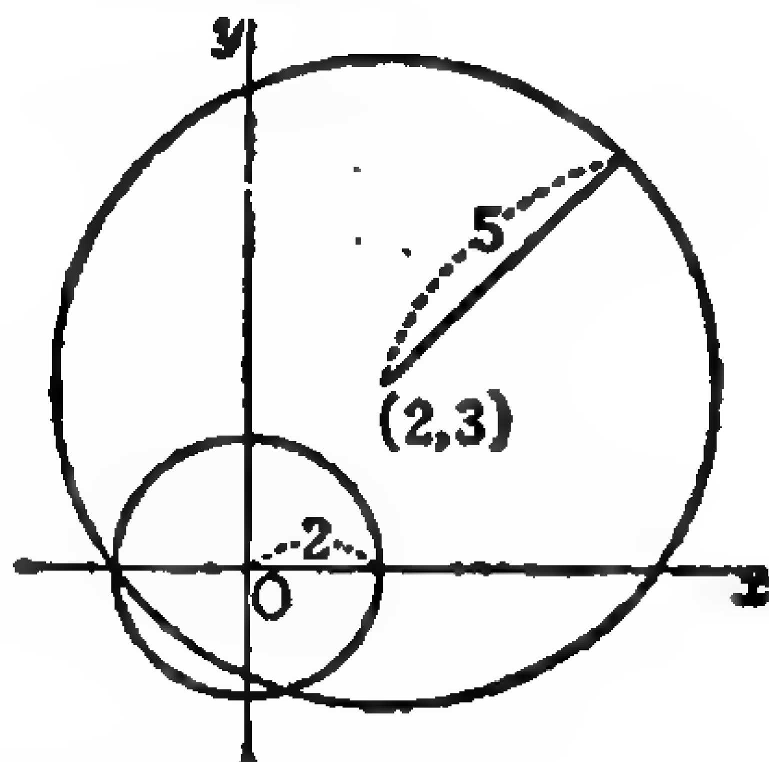
(1) $2x^2+2y^2=8$；

(2) $3x^2+3y^2-12x-18y=36$。

解 (1) 方程两边同除以2，得

$$x^2+y^2=2^2.$$

它的图象是以原点为圆心，2为半径的圆。



(2) 两边同除以3，得

$$x^2+y^2-4x-6y=12.$$

把它变成$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的形式，得

$$(x-2)^2+(y-3)^2=5^2.$$

故所求图象是以$(2,3)$为圆心，5为半径的圆。

3566. 求以点(3, −5)为圆心，且过点(6, −1)的圆的方程。

解　设所求圆的半径为r，则其方程为

$$(x-3)^2+(y+5)^2=r^2.$$

因为这个圆过点(6, −1)，从而$x=6$、$y=-1$满足这个方程。

$$\therefore\quad (6-3)^2+(-1+5)^2=r^2,$$

即　$r^2=25$,　$\therefore\quad r=5$.

故所求圆的方程为

$$(x-3)^2+(y+5)^2=5^2,$$

即　$x^2+y^2-6x+10y+9=0$.

3567. (1) $x^2+y^2-2x+6y-1=0$,

(2) $x^2+y^2-2x+4y=0$.

把上面方程的图象沿x轴正向平移4，再沿y轴正向平移−3，求这时各图象的方程.

解　(1) $(x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)=11$,

即　$(x-1)^2+(y+3)^2=(\sqrt{11})^2$,

这是以(1, −3)为圆心，半径为$\sqrt{11}$的圆。因此把它沿x轴正向平移4，再沿y轴正向平移−3时，圆的方程为

$$[(x-4)-1]^2+[(y+3)+3]^2=11,$$

即　$(x-5)^2+(y+6)^2=11$.

这是以(5, −6)为圆心，半径为$\sqrt{11}$的圆。

(2) $(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=5$,

即　$(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

象(1)那样，把这个圆平行移动，得

$$[(x-4)-1]^2+[(y+3)+2]^2=5,$$

即　$(x-5)^2+(y+5)^2=5$.

这是以(5, −5)为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆。

3568. 一圆过三点(−8, −1)，(5, 12)，(17, 4)，求它的圆心的坐标和半径。

解　设所求圆的圆心为(a, b)，半径为r，则该圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

因为这个圆过三点(−8, −1)、(5, 12)、(17, 4)，所以

$$(-8-a)^2+(-1-b)^2=r^2,\quad ①$$

$$(5-a)^2+(12-b)^2=r^2,\quad ②$$

$$(17-a)^2+(4-b)^2=r^2.\quad ③$$

①−②，化简，得

$$a+b=4.\quad ④$$

③−②，化简，得

$$-3a+2b=-17,\quad ⑤$$

解④、⑤，得$a=5$, $b=-1$，从而$r=13$.

故所求的圆心为(5, −1)，半径为13.

3569. 求圆$x^2+y^2-5x-7y+6=0$和两坐标轴交点的坐标。

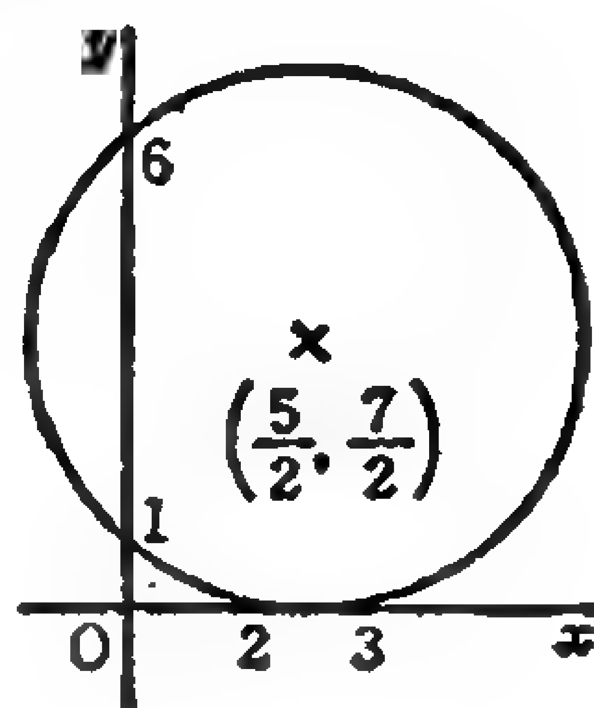
解　为求圆和x轴交点的坐标，在圆的方程中令$y=0$，则得

$$x^2-5x+6=0,$$

即　$(x-2)(x-3)=0$,

$$\therefore\quad x=2\ \text{或}\ x=3.$$

因此该圆和x轴交点的坐标为(2, 0)，(3, 0)。



同样，在圆的方程中令$x=0$，得

$$y^2-7y+6=0,$$

$$(y-1)(y-6)=0.$$

$\therefore\quad y=1$　或　$y=6$.

因此，该圆和y轴的交点坐标是(0, 1)，(0, 6)。

3570. 求过两个定圆

$$x^2+y^2=3,\ x^2+y^2-5x+y+4=0$$

的交点和点(1, 2)的圆的方程。

解　设所求圆的方程为

$$x^2+y^2-5x+y+4+k(x^2+y^2-3)=0.$$

因为这个圆过点(1, 2)，所以

$$1^2+2^2-5\times1+2+4+k(1^2+2^2-3)=0,$$

解之，得　$k=-3$.

故所求圆的方程为

$$x^2+y^2-5x+y+4-3(x^2+y^2-3)=0,$$

即　$2x^2+2y^2+5x-y-13=0$.

3571. 已知圆$x^2+y^2+2x-6y-14=0$，试求下列与该圆有关的圆的方程：

(1) 关于x轴对称的圆；

(2) 关于y轴对称的圆；

(3) 关于原点对称的圆；

(4) 关于点(α, β)对称的圆；

(5) 关于直线$y=x$对称的圆。

解　(1) 求与已知圆关于x轴对称的圆的方程，只要把已知圆方程中的y改写为$-y$，得

$$x^2+y^2+2x+6y-14=0.$$

(2) 求与已知圆关于y轴对称的圆的方程，只要把已知圆方程中的x改写为$-x$，得

$$x^2+y^2-2x-6y-14=0.$$

(3) 求与已知圆关于原点对称的圆的方程，只要把已知圆方程中的x、y分别改写为

$-x$、$-y$，得

$$x^2+y^2-2x+6y-14=0.$$

(4) 求与已知圆关于点(α, β)对称的圆的方程，只要把已知圆方程中的x、y分别改写为$2\alpha-x$、$2\beta-y$，得

$$(2\alpha-x)^2+(2\beta-y)^2+2(2\alpha-x)-6(2\beta-y)-14=0,$$

即

$$x^2+y^2-2(1+2\alpha)x+2(3-2\beta)y+4\alpha(\alpha+1)+4\beta(\beta-3)-14=0.$$

(5) 求与已知圆关于直线$y=x$对称的圆的方程，只要把已知圆方程中的x、y分别换成y、x，得

$$y^2+x^2+2y-6x-14=0,$$

即 $$x^2+y^2-6x+2y-14=0.$$

3572. 证明：无论k取怎样的值$(k\neq-1)$，圆$(k+1)(x^2+y^2)=x+ky$总过两定点。

解 将圆的方程按k整理，得

$$(x^2+y^2-y)k+(x^2+y^2-x)=0.$$

这个关于k的方程，无论k取怎样的值都能成立的条件是

$$x^2+y^2-y=0, \quad 且 \quad x^2+y^2-x=0.$$

(此两式都是圆的方程且与k无关)解此两方程得

$$x=y=0, \ x=y=\frac{1}{2}.$$

所以题设的圆总过两定点$(0, 0)$，$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3573. 已知方程$x^2+y^2+2kx+c=0$中，c为负的定数。证明：无论k取怎样的值，这个方程所表示的圆总过两个定点。

解 $x^2+y^2+2kx+c=0$可写成

$$(x^2+y^2+c)+k(2x)=0.$$

这个关于k的方程，无论k取怎样的值都能成立的条件是

$$x^2+y^2+c=0 \quad 且 \quad 2x=0.$$

解此两方程得

$$x=0, \ y=\pm\sqrt{-c},$$

所以圆$x^2+y^2+2kx+c=0$总过两定点$(0, \sqrt{-c})$，$(0, -\sqrt{-c})$.

3574. 求圆心在直线$y-x=5$上，且过两定点$(0, 0)$和$(1, 2)$的圆的方程。

解 设所求圆的圆心为(a, b)，半径为r，则其方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \quad ①$$

因为圆心(a, b)在直线$y=x+5$上，所以

$$b=a+5. \quad ②$$

又因这个圆过点$(1, 2)$和$(0, 0)$，又有

$$(1-a)^2+(2-b)^2=r^2, \quad ③$$

$$a^2+b^2=r^2. \quad ④$$

从③，得 $a^2+b^2-2a-4b+5=r^2$，

以④代入上式得

$$2a+4b-5=0. \quad ⑤$$

解②、⑤， $a=-\frac{5}{2}$, $b=\frac{5}{2}$.

代入④， $r^2=\frac{25}{2}$.

故所求圆①是

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2},$$

即 $$x^2+y^2+5x-5y=0.$$

3575. 证明：以两定点$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$为直径两端的圆的方程是

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

解 由直径端点$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，可知圆心和半径分别是

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

把这两式代入公式$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，就可得到所求圆的方程。也可用以下方法解。

设$P(x, y)$为圆上任意一点，则$\angle APB=\angle R$. 因为AP、BP的斜率分别是$\frac{y-y_1}{x-x_1}$，$\frac{y-y_2}{x-x_2}$，根据两直线垂直的条件，可得

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1,$$

即 $$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

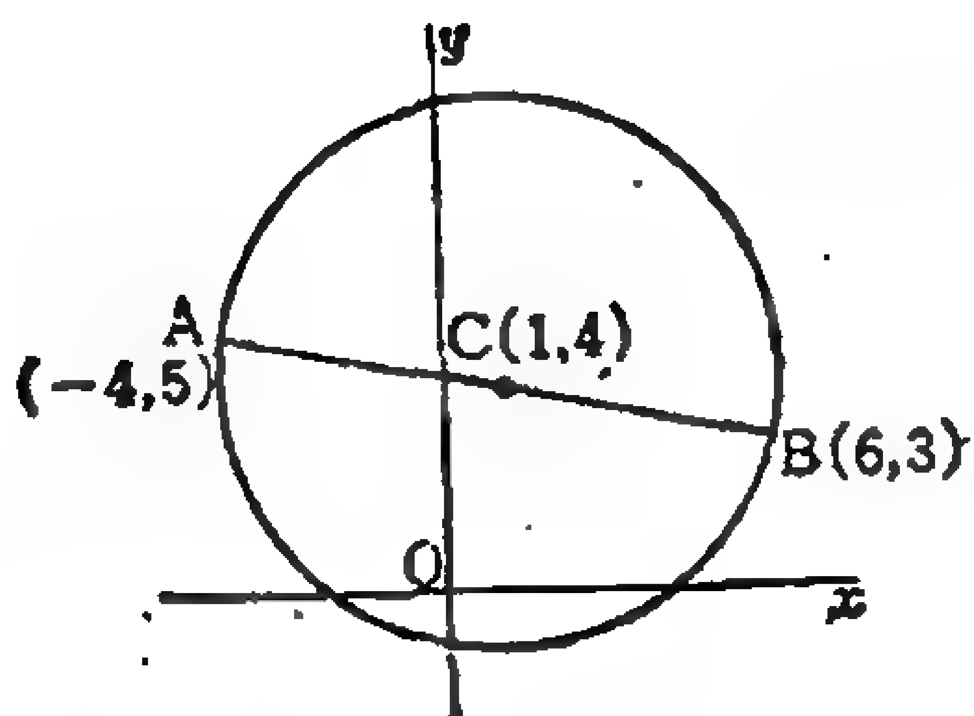
3576. 求以两点$A(-4, 5)$，$B(6, 3)$所连线段为直径的圆的方程。

解 设线段AB的中点为$C(a, b)$，则

$$a=\frac{-4+6}{2}=1, \ b=\frac{5+3}{2}=4.$$

于是所求圆的圆心坐标为$C(1, 4)$，圆的半径是CB:

$$CB=\sqrt{(6-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{26}.$$

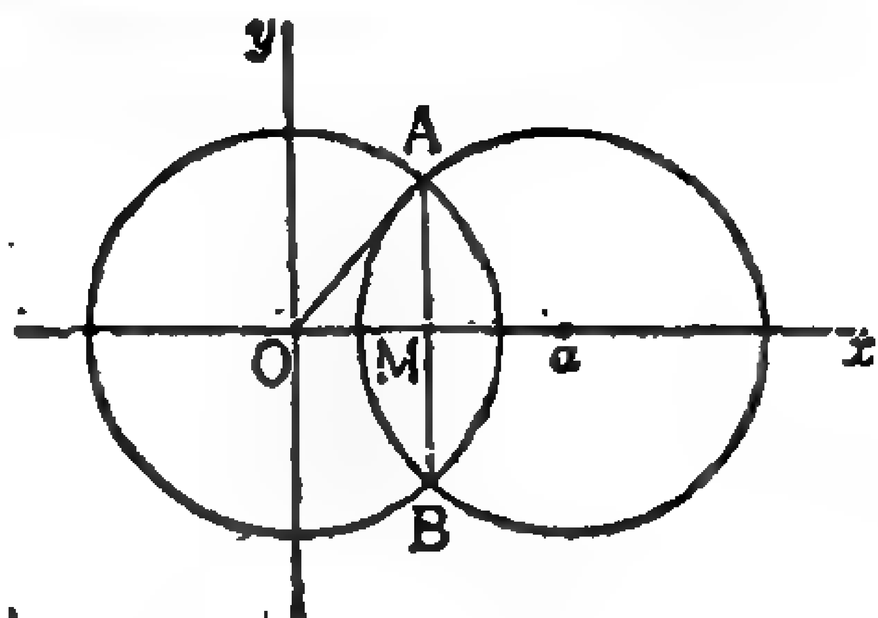


故所求圆的方程为

$$(x-1)^2+(y-4)^2=(\sqrt{26})^2,$$

即　　$x^2+y^2-2x-8y-9=0.$

3577. 求以两圆 $(x-a)^2+y^2=r^2$ 和 $x^2+y^2=r^2$ 的公共弦为直径的圆的方程. 其中 $0<a<2r$.



解　因两个圆的半径相等，故以它们的公共弦为直径的圆的圆心是两圆连心线的中点. 设此点为 M，则 M 的坐标为 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. 设公共弦为 AB，则

$$MA^2=OA^2-OM^2=r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$=r^2-\frac{a^2}{4}.$$

故以题设两圆的公共弦为直径的圆的方程为

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=r^2-\frac{a^2}{4},$$

即　　$2(x^2+y^2)-2ax+a^2-2r^2=0.$

3578. 证明：连结两点 $A(0, 1)$, $B(a, b)$ 为直径的圆和 x 轴交点的横坐标是方程 $x^2-ax+b=0$ 的根.

解　由问题 **3575** 知，以 AB 为直径的圆的方程为

$$\frac{y-1}{x}\cdot\frac{y-b}{x-a}=-1,$$

即　　$x(x-a)+(y-1)(y-b)=0.$

在此式中令 $y=0$，则得 $x^2-ax+b=0$. 所以该方程的两个根就是以 AB 为直径的圆和 x 轴交点的横坐标.

3579. 已知圆 $x^2+y^2-2ax=0$ 和直线 $y=mx$ 相交，求以其所得弦为直径的圆的方程.

解　直线 $y=mx$ 和圆 $x^2+y^2-2ax=0$ 的交点是

$$(0, 0), \left(\frac{2a}{1+m^2}, \frac{2am}{1+m^2}\right),$$

故所求圆的圆心为

$$\left(\frac{a}{1+m^2}, \frac{am}{1+m^2}\right),$$

半径的平方为

$$\frac{a^2}{(1+m^2)^2}+\frac{a^2m^2}{(1+m^2)^2}=\frac{a^2}{1+m^2}.$$

从而所求圆的方程为

$$\left(x-\frac{a}{1+m^2}\right)^2+\left(y-\frac{am}{1+m^2}\right)^2$$

$$=\frac{a^2}{1+m^2},$$

即　　$x^2+y^2-\frac{2ax}{1+m^2}-\frac{2amy}{1+m^2}=0.$

去分母，得

$$(1+m^2)(x^2+y^2)-2ax-2amy=0.$$

3580. 求和圆 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 有同一圆心，且过点 $(-1, 1)$ 的圆的方程.

解　把 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 写成

$$(x-2)^2+(y+3)^2=16,$$

其圆心为 $(2, -3)$，故可设所求圆的方程为

$$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2.$$

因这个圆过点 $(-1, 1)$，所以

$$(-1-2)^2+(1+3)^2=r^2,$$

$$\therefore\quad r^2=25,$$

从而所求圆的方程是

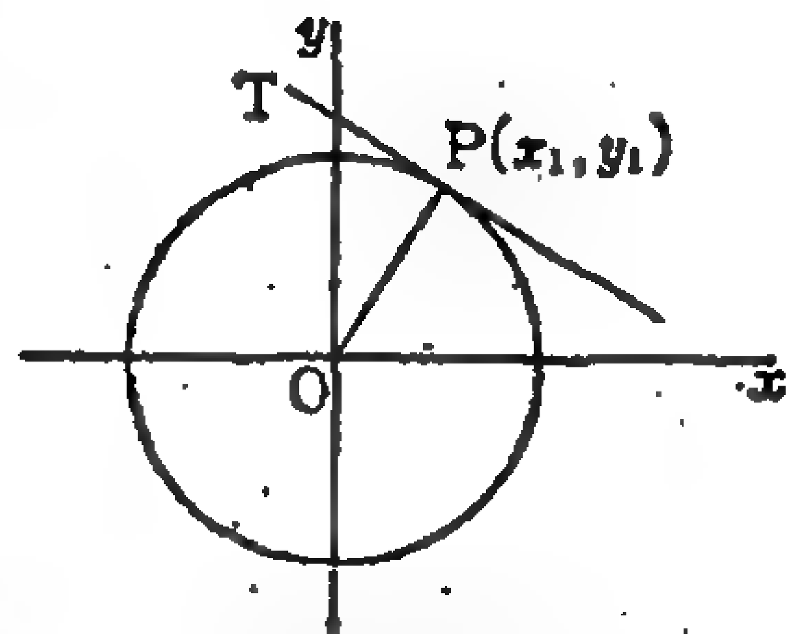
$$(x-2)^2+(y+3)^2=25,$$

即　　$x^2+y^2-4x+6y-12=0.$

2. 切线

3581. 证明：圆 $x^2+y^2=r^2$ 上点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线方程是

$$x_1x+y_1y=r^2.$$



解　设在点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线为 PT，则 PT 垂直于半径 OP. 由于 OP 的方程是 $y=\frac{y_1}{x_1}x$，所以切线 PT 的方程为

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$

即 $$y_1y-y_1^2=-x_1x+x_1^2.$$

$$\therefore\quad x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2.$$

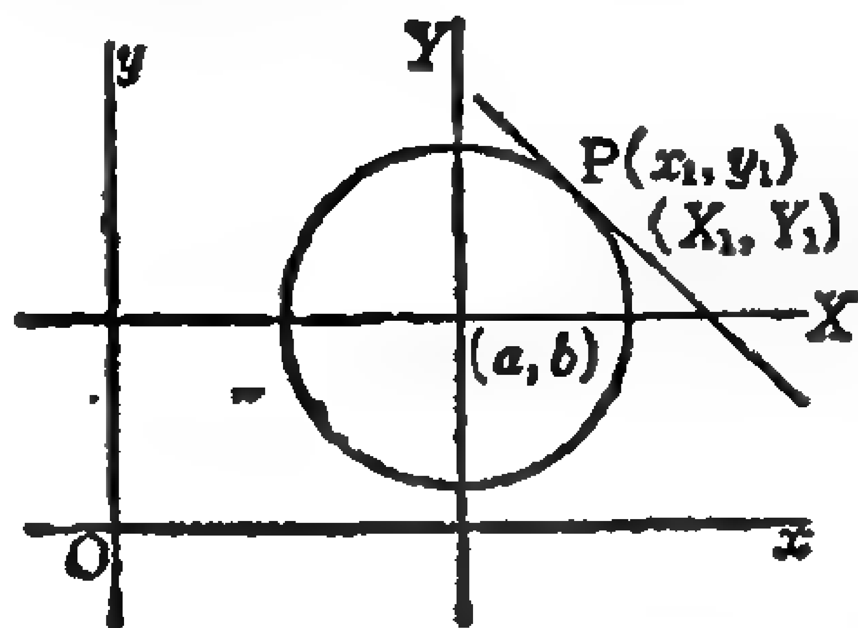
因为点 $P(x_1, y_1)$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 上，所以 $x_1^2+y_1^2=r^2$，从而知切线 PT 的方程为

$$x_1x+y_1y=r^2.$$

3582. 证明：圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线方程是

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2.$$

解 如果把坐标原点平移到已知圆心 (a, b)，设圆上点 $P(x_1, y_1)$ 的新坐标为 (X_1, Y_1)，则有



$$x_1=X_1+a,\ y_1=Y_1+b.$$

因此在新坐标系中圆的方程为 $X^2+Y^2=r^2$。又知在圆上点 $P(X_1, Y_1)$ 处的切线方程为 $X_1X+Y_1Y=r^2$，用

$$X_1=x_1-a,\quad Y_1=y_1-b,$$
$$X=x-a,\quad Y=y-b,$$

代入此式，就能得到在原坐标系的所求切线方程为

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2.$$

3583. 证明：直线 $ax+by+c=0$ 和圆 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ 相切的条件是

$$(a\alpha+b\beta+c)^2=r^2(a^2+b^2).$$

解 在 $ax+by+c=0$ 中，a、b 不同时为零，设 $b\neq0$，则 $y=-\dfrac{ax+c}{b}$，把它代入圆的方程，得

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+\left(-\frac{ax+c}{b}\right)^2$$
$$+2\beta\cdot\frac{ax+c}{b}+\beta^2=r^2.$$

按 x 整理，

$$(a^2+b^2)x^2+2(-b^2\alpha+ab\beta+ac)x$$
$$+b^2(\alpha^2+\beta^2)+2bc\beta+c^2-b^2r^2=0,$$

已知直线和圆相切的条件是，这个含 x 的二次方程具有等根，即其判别式应等于零，所以

$$(-b^2\alpha+ab\beta+ac)^2$$
$$-(a^2+b^2)(b^2\alpha^2+b^2\beta^2-2bc\beta+c^2-b^2r^2)$$
$$=0$$

展开，在两边同除以 b^2，得

$$(a\alpha+b\beta+c)^2=r^2(a^2+b^2).$$

3584. 分别求出圆 $x^2+y^2=25$ 上点 $A(3, -4)$，$B(-4, -3)$，$C(-1, 2\sqrt{6})$ 处的切线方程。

解 点 A 处的切线方程为

$$3x-4y=25,$$

点 B 处的切线方程为

$$-4x-3y=25\quad 即\quad 4x+3y+25=0,$$

点 C 处的切线方程为

$$-x+2\sqrt{6}\,y=25.$$

3585. 已知圆 $x^2+y^2=r^2$ 的切线的斜率为 m，求这条切线的方程。

解 已知圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2, \qquad ①$$

设斜率为 m 的切线方程为

$$y=mx+b. \qquad ②$$

为求直线和圆的交点，从 ①、② 消去 y，得

$$(1+m^2)x^2+2bmx+b^2-r^2=0. \qquad ③$$

当 ② 是 ① 的切线时，③ 必有等根，所以 ③ 的判别式必为零。即

$$m^2b^2-(1+m^2)(b^2-r^2)=0,$$
$$\therefore\quad b=\pm r\sqrt{1+m^2},$$

于是 ② 可写成

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

这就是所求的切线方程式。

3586. 求和 x 轴的正方向成 $120°$ 角且切于圆 $x^2+y^2=8$ 的直线方程.

解 斜率是 m 且切于圆 $x^2+y^2=r^2$ 的直线方程为

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

已知 $$m=\operatorname{tg}120°=-\sqrt{3},$$
$$r=\sqrt{8}=2\sqrt{2},$$

因此所求切线方程为

$$y=-\sqrt{3}x\pm2\sqrt{2}\sqrt{1+3}$$
$$=-\sqrt{3}x\pm4\sqrt{2},$$

即 $$y+\sqrt{3}x=\pm4\sqrt{2}.$$

3587. 如果直线

$$y=x+a$$

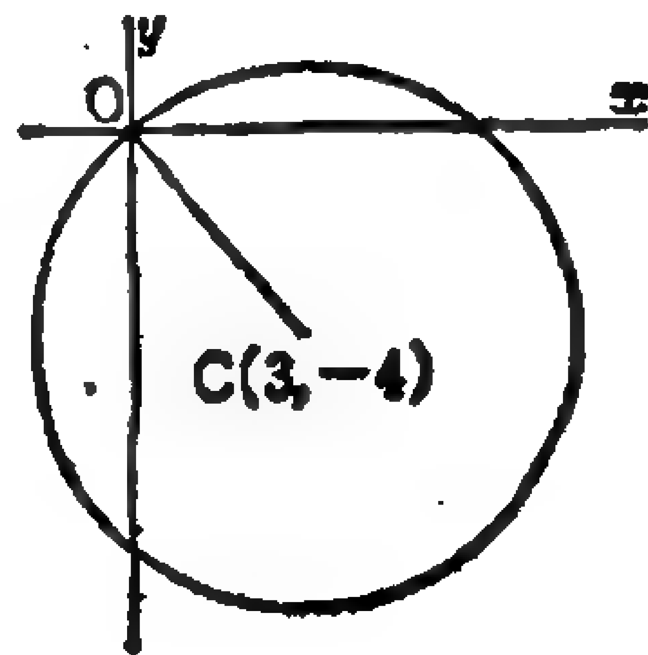
与圆

$$x^2+y^2-6x+8y=0$$

相切，试求 a 的值。如果这个圆和圆

$$x^2+y^2+b=0$$

相离，试求 b 的范



围。

解 为使直线 $y=x+a$ 和圆 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 相切，则方程

$$x^2+(x+a)^2-6x+8(x+a)=0$$

即 $$2x^2+2(a+1)x+a^2+8a=0$$

必有等根，因而其判别式为零：

$$(a+1)^2-2(a^2+8a)=0.$$

$$\therefore\quad a^2+14a-1=0,$$

解之得 $$a=-7\pm5\sqrt{2}.$$

其次，圆 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 可写成

$$(x-3)^2+(y+4)^2=5^2,$$

其圆心坐标为 $(3,\ -4)$，半径为 5，且过原点。要使这个圆和圆 $x^2+y^2+b=0$ 即 $x^2+y^2=(\sqrt{-b})^2$ 相离，则须半径 $\sqrt{-b}$ 比 10 大，即 $\sqrt{-b}>10$，从而 $b<-100$。

3588. 求从原点作圆

$$x^2+y^2-6x-2y+8=0$$

的切线的方程。

解 设切线的斜率为 m，则过原点的切线方程为 $y=mx$。为求它和圆的交点，把 y 值代入圆的方程，得

$$x^2+m^2x^2-6x-2mx+8=0,$$

$$\therefore\quad (1+m^2)x^2-2(3+m)x+8=0.$$

直线和圆相切的条件是这个关于 x 的二次方程有等根，其判别式 D 等于零。即

$$D\div4=(3+m)^2-8(1+m^2)=0,$$

$$\therefore\quad m=-\frac{1}{7},\ m=1.$$

故所求的切线方程是

$$y=-\frac{1}{7}x\quad 或\quad y=x.$$

3589. 求过点 $(3,\ 2)$ 的圆 $x^2+y^2=4$ 的切线方程。

解 设所求切线方程为 $y=ax+b$，把这个 y 值代入 $x^2+y^2=4$，得

$$x^2+(ax+b)^2=4,$$

即 $$(1+a^2)x^2+2abx+(b^2-4)=0.$$

直线和圆相切的条件是这个方程具有等根，所以

$$a^2b^2-(1+a^2)(b^2-4)=0,$$

即

$$4a^2-b^2+4=0. \qquad ①$$

又直线 $y=ax+b$ 过点 $(3,2)$，所以 $2=3a+b$。以 $b=2-3a$ 代入 ①，得

$$4a^2-(2-3a)^2+4=0,$$

即 $$-5a^2+12a=0.$$

$$\therefore\quad a=0\quad 或\quad a=\frac{12}{5}.$$

(i) 设 $a=0$，则 $b=2$。

(ii) 设 $a=\frac{12}{5}$，则 $b=-\frac{26}{5}$。

故所求切线方程为

$$y=2\quad 及\quad y=\frac{12}{5}x-\frac{26}{5}.$$

别解 设过点 $(3,\ 2)$ 的直线方程为

$$y-2=m(x-3), \qquad ①$$

即 $$mx-y+(2-3m)=0.$$

从原点（圆心）到这条直线的距离等于 2（半径），则这条直线就是圆 $x^2+y^2=4$ 的切线，所以

$$\frac{|2-3m|}{\sqrt{m^2+1}}=2,$$

即 $$(2-3m)^2=4(m^2+1),$$

$$5m^2-12m=0,$$

$$\therefore\quad m=0\quad 或\quad m=\frac{12}{5}.$$

把它代入 ①，得所求切线方程为

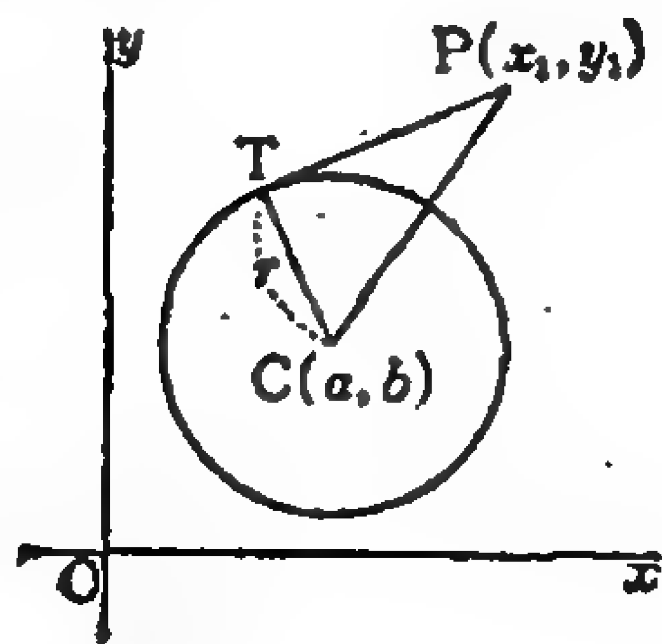
$$y=2\quad 及\quad y=\frac{12}{5}x-\frac{26}{5}$$

$$(12x-5y=26).$$

3590. 过圆外一点 $P(x_1,\ y_1)$ 作该圆

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

的切线，求此切线的长。



解 设圆心为 $C(a,\ b)$，过点 P 所作圆的切线的切点为 T，则 $\triangle CPT$ 是直角三角形。由勾股定理知

$$PT^2+CT^2=CP^2.$$

已知 $CT^2=r^2$，$CP^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$，

$$\therefore\quad PT^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2,$$

从而所求切线的长为

$$PT=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2}.$$

3591 已知直线 $y=mx$ 和圆 $x^2+y^2=r^2$ 相交，求在交点处圆的切线方程。

解 圆 $x^2+y^2=r^2$ 和直线 $y=mx$ 的交点坐标为

$$\left(\frac{r}{\sqrt{1+m^2}},\ \frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}\right),$$

$$\left(-\frac{r}{\sqrt{1+m^2}},\ -\frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}\right).$$

故所求切线方程为

$$\pm\frac{r}{\sqrt{1+m^2}}x\pm\frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}y=r^2,$$

即 $$x+my=\pm r^2\sqrt{1+m^2}.$$

3592. 求圆 $x^2+y^2+2ax+4ay+b=0$ 的圆心坐标和半径，并讨论当这个圆和 x 轴相切时，a、b 是怎样的关系？

解 把 $x^2+y^2+2ax+4ay+b=0$ 写成

$$(x+a)^2+(y+2a)^2=a^2+4a^2-b,$$

即 $$(x+a)^2+(y+2a)^2=(\sqrt{5a^2-b})^2$$

$$(5a^2-b\geqq0),$$

可知圆心坐标是 $(-a,\ -2a)$，半径是 $\sqrt{5a^2-b}$。

当这个圆和 x 轴相切时，从圆心到 x 轴的距离等于半径，于是

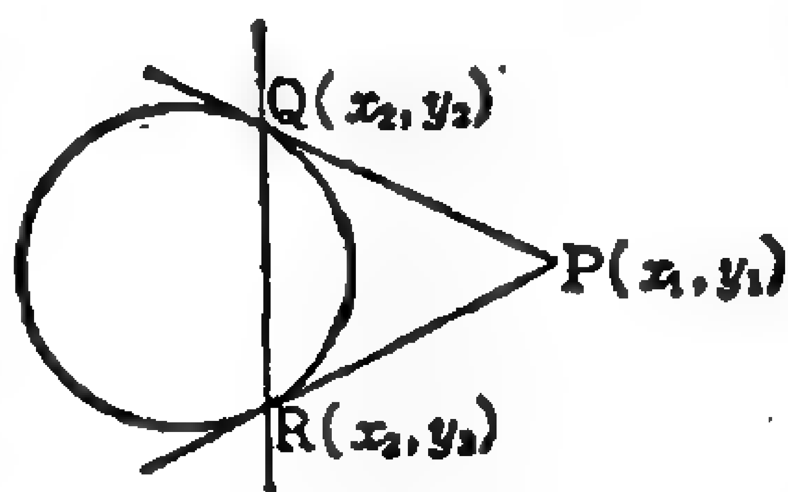
$$\sqrt{5a^2-b}=|-2a|.$$

等式两边平方，得

$$5a^2-b=4a^2,$$

即 a、b 应满足 $a^2=b$。

3593. 从圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $P(x_1,\ y_1)$ 作圆的两条切线，求过这两个切点的直线方程。



解 设从点 $P(x_1,\ y_1)$ 所作圆的两条切线的切点分别为 $Q(x_2,\ y_2)$、$R(x_3,\ y_3)$，则 PQ 的方程为

$$x_2x+y_2y=r^2. \quad ①$$

PR 的方程为

$$x_3x+y_3y=r^2. \quad ②$$

由于直线 ①、② 都过点 $P(x_1,\ y_1)$，所以

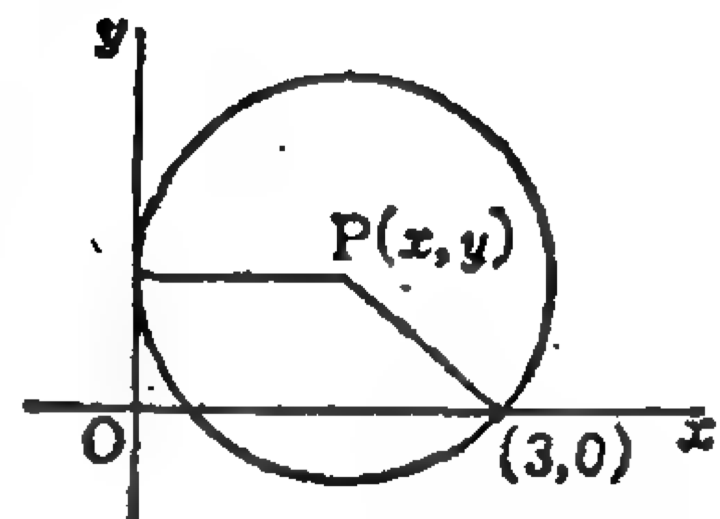
$$x_2x_1+y_2y_1=r^2, \quad ③$$

$$x_3x_1+y_3y_1=r^2. \quad ④$$

考虑直线 $x_1x+y_1y=r^2$，由 ③、④ 知 $Q(x_2,\ y_2)$、$R(x_3,\ y_3)$ 都在此直线上，所以直线 QR 的方程是 $x_1x+y_1y=r^2$。

3. 轨迹

3594. 求过点 $(3,\ 0)$ 且切于 y 轴的各圆的圆心的轨迹。



解 设所求圆心为 $P(x,\ y)$，由于点 P 到点 $(3,\ 0)$ 及 y 轴的距离相等，所以

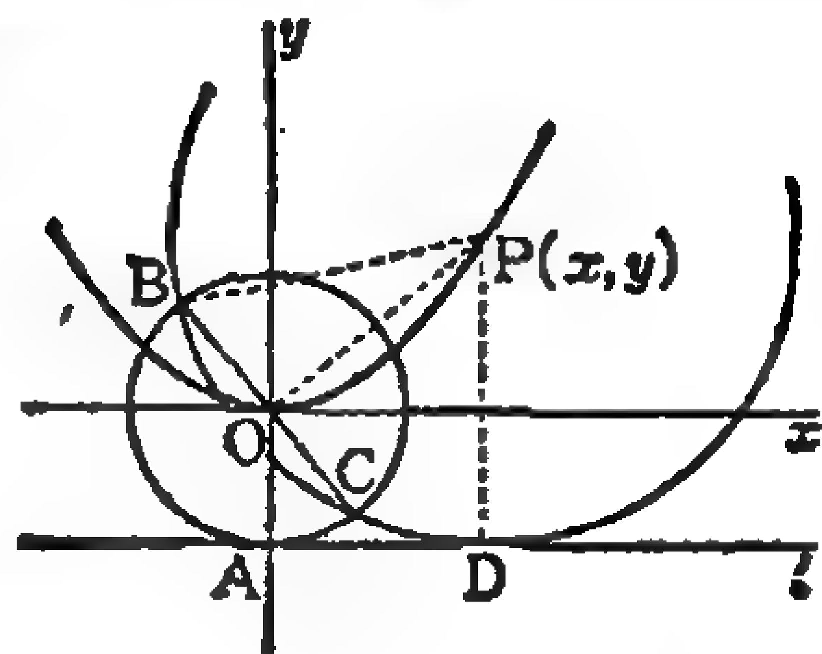
$$(x-3)^2+y^2=x^2,$$

即 $$y^2=6x-9.$$

这是以点 $(3,\ 0)$ 为焦点、以 y 轴为准线的一条抛物线。

3595. 已知和定直线 l 相切的定圆 O，求过这个圆任意直径的两端且和定直线 l 相切的圆的圆心的轨迹，并作出其图形。

解 取圆的任意直径为 BC，设过 B、C 且与定直线 l 相切的圆的圆心为 P。取过定圆圆心 O 且平行于 l 的直线为 x 轴（l 在 x 轴的下方），过 O 并垂直于 l 的直线为 y 轴，建立坐标系。



设圆 O 的半径为 a，则 l 的方程为 $y=-a$。设圆 P 的半径为 r，点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，因圆 P 和 l 相切，所以有

$$r=|y-(-a)|=|y+a|.$$

又 $PO\perp BC$，$PB=r$，有

$$r^2=PB^2=PO^2+OB^2=x^2+y^2+a^2.$$

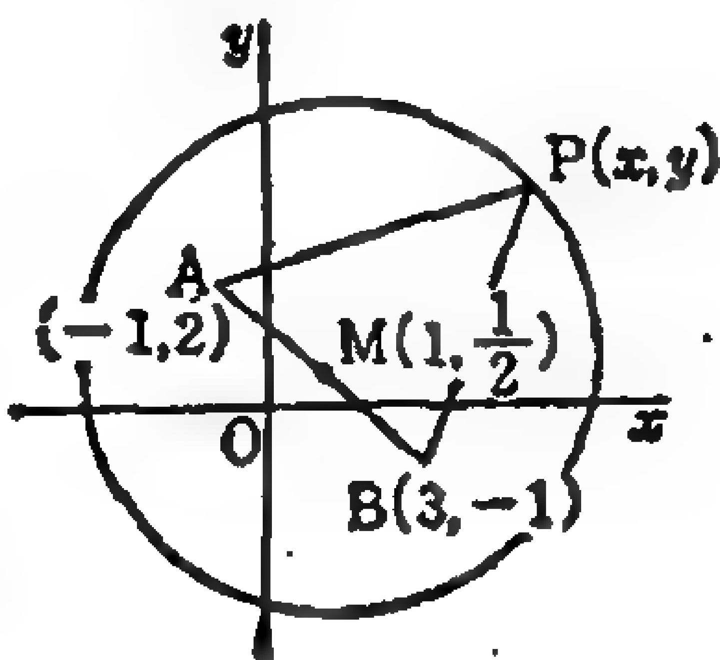
$$\therefore\quad (y+a)^2=x^2+y^2+a^2,$$

即 $$x^2=2ay.$$

这就是点 P 的轨迹方程，它表示以 O 为顶点且与 x 轴相切的抛物线。

注 如 l 和圆 O 相切于点 A，点 A 关于 O 的对称点为 N，则抛物线的焦点就是 ON 的中点，准线就是过 OA 中点 M 且垂直于 OA 的直线。

3596. 一平面上有两点 $A(-1,2)$，$B(3,-1)$，如在这个平面上取点 P，使 $AP^2+BP^2=50$，试求点 P 的轨迹并画出其图形。



解 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，则

由 $AP^2+BP^2=50$，得

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(x-3)^2+(y+1)^2=50.$$

$$\therefore\quad x^2-2x+y^2-y=\frac{35}{2},$$

即 $$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{75}{4}.$$

这就是所求轨迹方程．它表示以 $M\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ 为圆心，半径为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 的圆．

3597． 求到三个定点的距离的平方和为一定值的点的轨迹．

解 设三个定点分别为 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$、$(x_3,\ y_3)$，到三定点的距离的平方和是定值 k^2 的点为 $P(x,\ y)$，则

$$[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]+[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]+[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2]=k^2,$$

$$\therefore\quad x^2+y^2-2\cdot\frac{x_1+x_2+x_3}{3}x-2\cdot\frac{y_1+y_2+y_3}{3}y+\frac{1}{3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-k^2)=0,$$

即

$$\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2-\frac{1}{3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-k^2)=0.$$

因此，如果此方程的右端为正数时，所求轨迹就是一个圆，它的圆心就是以三个定点 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$、$(x_3,\ y_3)$ 为顶点的三角形的重心 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$．如果此方程的右端等于零时，所求轨迹就是一个点，即 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$．如果此方程的右端是负数，则轨迹不存在．

3598． 已知圆 O：$x^2+y^2=r^2$，求把定点 $A(a,\ 0)$ 和该圆上任意点 B 所连线段 AB 分为定比 $m:n$ 的点 P 的轨迹．

解 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，点 B 的坐标为 $(\alpha,\ \beta)$，则

$$x=\frac{m\alpha+na}{m+n},\quad y=\frac{m\beta}{m+n}.$$

由此可得

$$\alpha=\frac{(m+n)x-na}{m},\quad \beta=\frac{(m+n)y}{m}.$$

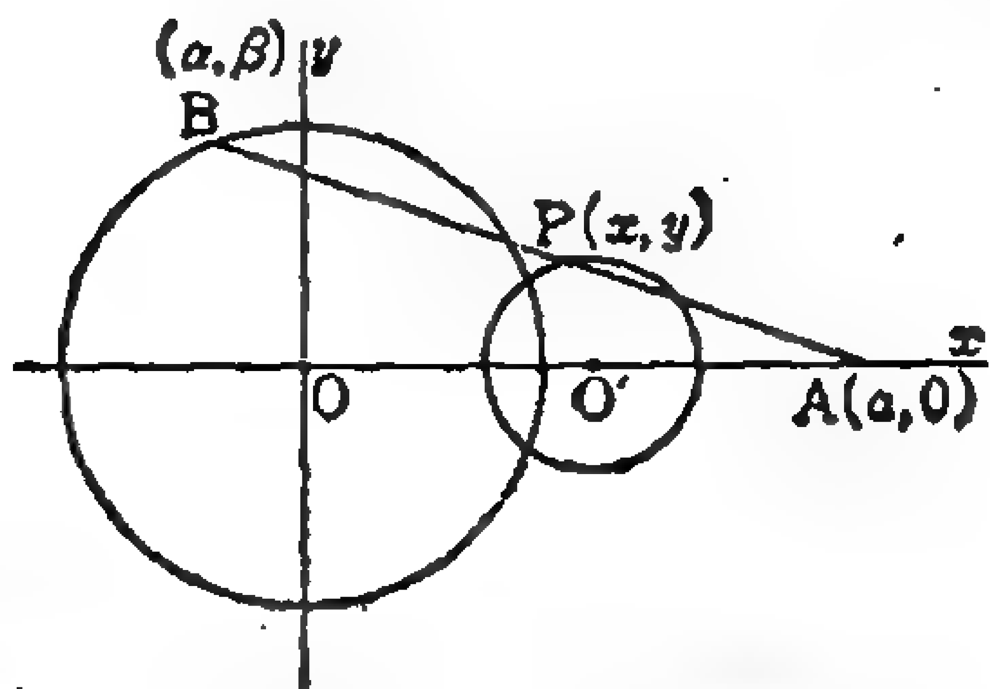
因为点 $B(\alpha,\ \beta)$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 上，所以

$$\alpha^2+\beta^2=r^2,$$

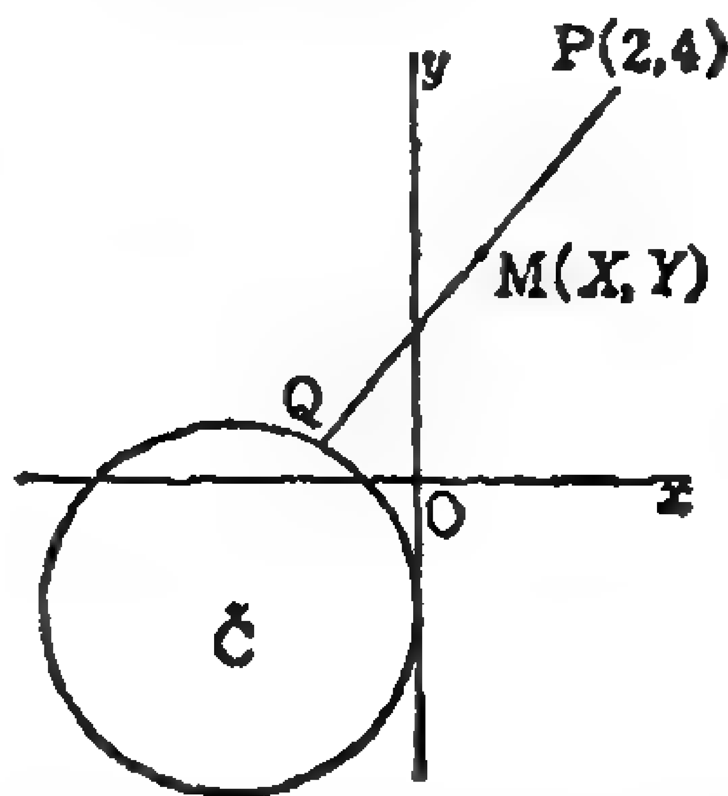
即 $$\left[\frac{(m+n)x-na}{m}\right]^2+\left[\frac{(m+n)y}{m}\right]^2=r^2,$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{n}{m+n}a\right)^2+y^2=\left(\frac{m}{m+n}r\right)^2.$$

这就是所求轨迹方程，它表示把 AO 分为 $m:n$ 的点 O' 为圆心，$\frac{m}{m+n}r$ 为半径的圆．



3599． 求点 $P(2,\ 4)$ 与圆 $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 上的任意点所连线段的中点的轨迹．



解 把 $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 写成 $(x+2)^2+(y+1)^2=2^2$，可知这个圆的圆心是 $(-2,\ -1)$，半径是 2．

设圆上任意点 $Q(x,\ y)$ 和定点 $P(2,\ 4)$ 所连线段的中点为 $M(X,\ Y)$，则

$$X=\frac{x+2}{2},\ Y=\frac{y+4}{2}.$$

$$\therefore\quad x=2(X-1),\quad y=2(Y-2).$$

把它代入圆的方程，得

$$(2X)^2+(2Y-3)^2=2^2,$$

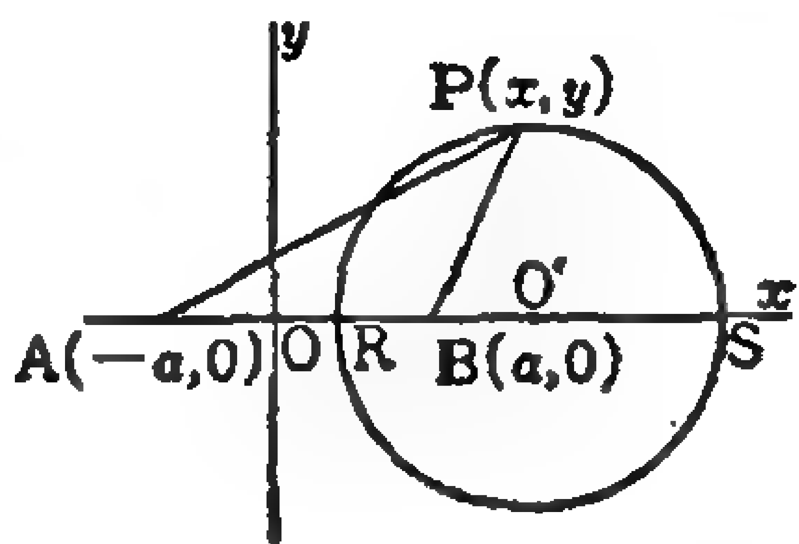
$$\therefore\quad X^2+\left(Y-\frac{3}{2}\right)^2=1.$$

在这个方程中，把 X、Y 改写为 x、y，则得

$$x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1.$$

它表示以$\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$为圆心，半径为1的圆．反过来，这个圆上的所有点都适合题设条件，故所求轨迹就是这个圆．

3600. 已知平面上有两定点 $A(-a,\ 0)$、$B(a,\ 0)$，在该平面上取点 P，使 P 到 A、B 的距离的比 $AP:BP$ 为 $m:n$，求点 P 的轨迹（阿波罗尼斯圆）．



解 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，则

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}:\sqrt{(x-a)^2+y^2}=m:n.$$

$$\therefore\quad n^2(x^2+y^2+2ax+a^2)=m^2(x^2+y^2-2ax+a^2),$$

即

$$(m^2-n^2)x^2+(m^2-n^2)y^2-2a(m^2+n^2)x+a^2(m^2-n^2)=0.$$

如果 $m=n$，则上面的方程变为 $x=0$，它表示 y 轴，故所求轨迹为线段 AB 的垂直平分线．

如果 $m\neq n$，则方程可写成

$$x^2+y^2-\frac{2a(m^2+n^2)}{m^2-n^2}x+a^2=0,$$

即 $$\left(x-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}a\right)^2+y^2=\left(\frac{2mna}{m^2-n^2}\right)^2.$$

设把 AB 内分和外分为定比 $m:n$ 的点为 R、S，则其坐标分别为

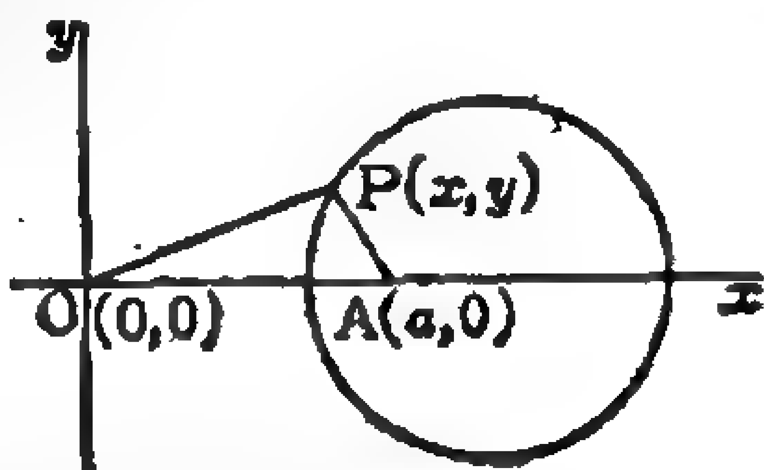
$$R\left(\frac{m-n}{m+n}a,\ 0\right),\ S\left(\frac{m+n}{m-n}a,\ 0\right).$$

因而 RS 的中点为 $O'\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}a,\ 0\right)$，且

$$RO'=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}a-\frac{m-n}{m+n}a=\frac{2mna}{m^2-n^2}.$$

故所求轨迹是把 AB 内分和外分为定比 $m:n$ 的分点 R、S 所连线段为直径的圆．

3601. 已知两点 $O(0,\ 0)$、$A(a,0)$，求满足 $PO:PA=1:k$（k 是正的定数）的点 P 的轨迹，并指出它是什么图形？



解 设 $P(x,\ y)$，则由 $PO:PA=1:k$ 可得

$$(x^2+y^2):[(x-a)^2+y^2]=1:k^2,$$

即 $$(x-a)^2+y^2=k^2(x^2+y^2),$$

$$\therefore\quad (1-k^2)x^2-2ax+(1-k^2)y^2=-a^2.$$

(i) 当 $k=1$ 时，上式可写成 $x=\frac{a}{2}$．即所求的轨迹是线段 OA 的垂直平分线．

(ii) 当 $k\neq1$ 时，上式可写成

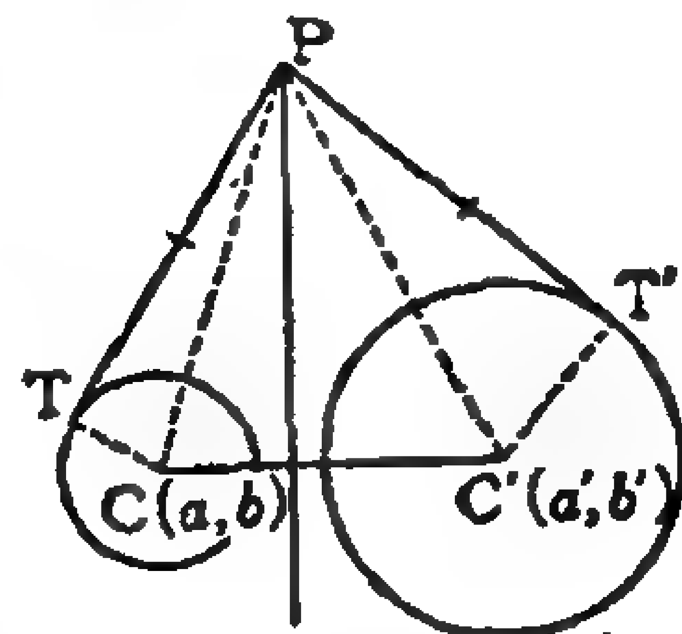
$$x^2-\frac{2a}{1-k^2}x+y^2=-\frac{a^2}{1-k^2},$$

即 $$\left(x-\frac{a}{1-k^2}\right)^2+y^2=\frac{k^2a^2}{(1-k^2)^2}.$$

故所求轨迹是圆，其圆心为 $\left(\frac{a}{1-k^2},\ 0\right)$，半径为 $\left|\frac{ka}{1-k^2}\right|$．

注 这是阿波罗尼斯圆．

3602. 已知两圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 和 $(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2$．如果从点 P 向两圆所作切线的长相等，求点 P 的轨迹（根轴）．



解 已知两圆 C、C' 的方程分别为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \quad ①$$

$$(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2. \quad ②$$

设从点 $P(x,\ y)$ 向两圆①、②所引的切线分别为 PT、PT'，则

$$PT=\sqrt{PC^2-CT^2}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2-r^2},$$

$$PT'=\sqrt{PC'^2-C'T'^2}=\sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2}.$$

因为 $PT=PT'$，所以有

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2.$$

整理得

$$2(a-a')x+2(b-b')y-a^2+a'^2-b^2+b'^2+r^2-r'^2=0,$$

它表示一条直线，叫做两圆 C、C' 的根轴．

3603. 已知两圆 $(x+1)^2+(y-3)^2=2^2$，$(x-4)^2+(y-1)^2=3^2$．如果从点 $P(x,\ y)$ 所引两圆的切线长相等，求点 P 的轨迹．

解 设适合条件的点为 $P(x,\ y)$，从点 P

所引两圆的切线长分别为 PQ、PR，则

$$PQ^2=(x+1)^2+(y-3)^2-2^2,$$
$$PR^2=(x-4)^2+(y-1)^2-3^2.$$

由于 $PQ=PR$ 时，$PQ^2=PR^2$，由此可得

$$5x-2y=1.$$

故所求的轨迹为直线。

注 这条直线就是两圆的根轴。

3604. 证明：从三个圆中，每取两圆的根轴都共点。

解 设三个圆的方程式分别为

$$x^2+y^2+g_1x+f_1y+c_1=0,$$
$$x^2+y^2+g_2x+f_2y+c_2=0,$$
$$x^2+y^2+g_3x+f_3y+c_3=0,$$

则三条根轴分别是

$$(x^2+y^2+g_1x+f_1y+c_1)-(x^2+y^2+g_2x+f_2y+c_2)=0, \quad ①$$
$$(x^2+y^2+g_2x+f_2y+c_2)-(x^2+y^2+g_3x+f_3y+c_3)=0, \quad ②$$
$$(x^2+y^2+g_3x+f_3y+c_3)-(x^2+y^2+g_1x+f_1y+c_1)=0. \quad ③$$

因为此三式的和为零，所以这三条根轴共点。这个点叫做三个圆的根心。

3605. 求三个圆 $x^2+y^2+4x-5=0$，$x^2+y^2+6x-2y-6=0$，$x^2+y^2+2y=0$ 的根心。

解 第一个圆 $(x+2)^2+y^2=3^2$，

第二个圆 $(x+3)^2+(y-1)^2=4^2$，

第三个圆 $x^2+(y+1)^2=1^2$。

由问题 **3602** 知第一个圆和第二个圆的根轴方程是 $2x-2y-1=0$，第一个圆和第三个圆的根轴方程是 $-4x+2y+5=0$。解这两个方程得 $x=2$，$y=\frac{3}{2}$，因而所求根心是 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$。

4. 杂题

3606. 在同一坐标系中分别作出两方程

$$\frac{1}{2}x+y=5, \quad y=\sqrt{25-x^2}$$

的图象，并用它解不等式

$$5-\frac{1}{2}x>\sqrt{25-x^2}.$$

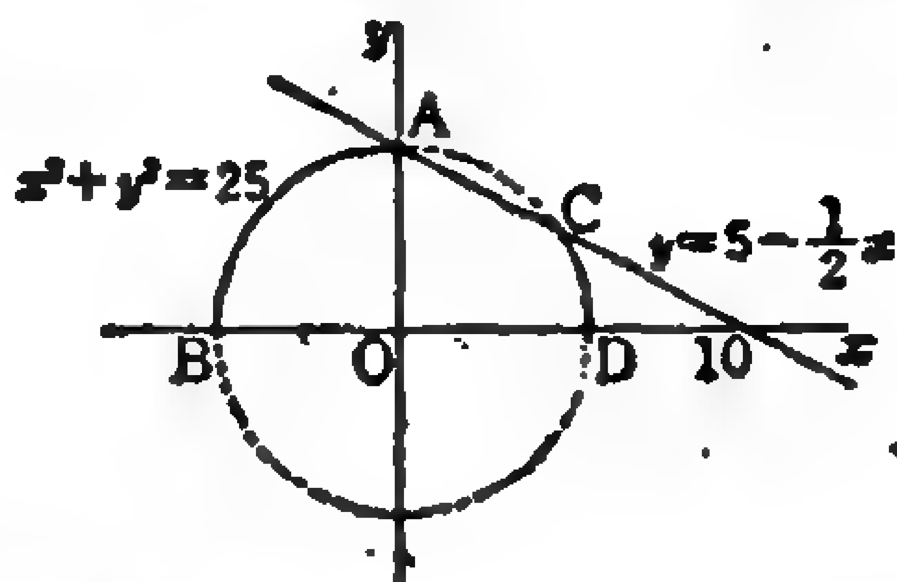
解 从第一个方程得

$$y=5-\frac{1}{2}x, \quad ①$$

它的图象是过两点 (0, 5)、(10, 0) 的直线。从第二个方程得

$$x^2+y^2=5,$$

它的图象是以原点为圆心，半径为 5 的圆。由于 $\sqrt{25-x^2}\geqq 0$ 知 $y\geqq 0$，所以 $y=\sqrt{25-x^2}$ 的图象是该圆在 x 轴上方的半圆（包括端点）。



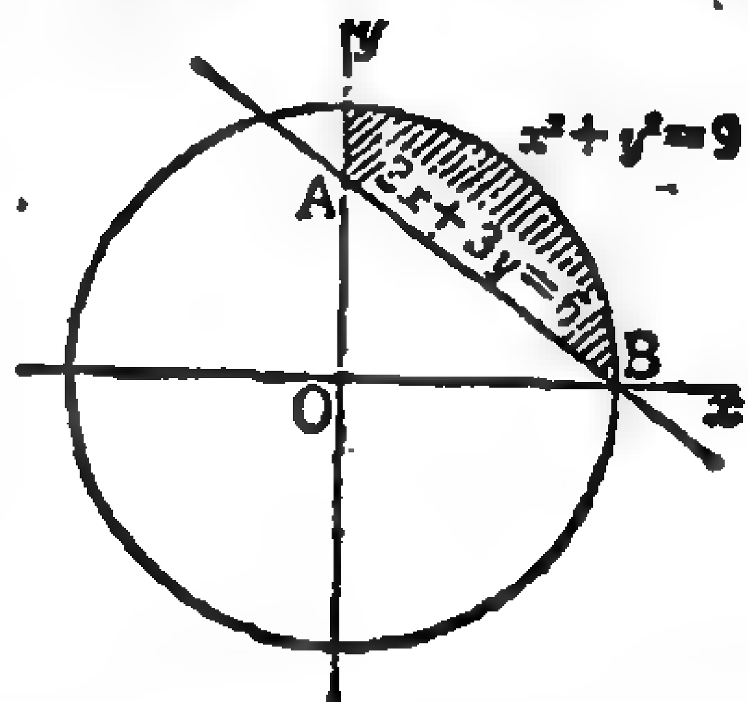
因此坐标满足不等式 $5-\frac{1}{2}x>\sqrt{25-x^2}$ 的点在弧 AB 和 CD 上（但不包括点 A、C）。A、B、D 的横坐标分别是 0，−5，5。C 的横坐标是方程 $5-\frac{1}{2}x=\sqrt{25-x^2}$ 的根，即 $x=4$。故满足该不等式的 x 值的范围是

$$-5\leqq x<0, \quad 4<x\leqq 5.$$

3607. 在坐标平面上，用图表示坐标满足下列不等式

$$x>0, \quad x^2+y^2<9, \quad 2x+3y>6$$

的点的存在范围，并计算该图形的面积（精确到小数第二位）。



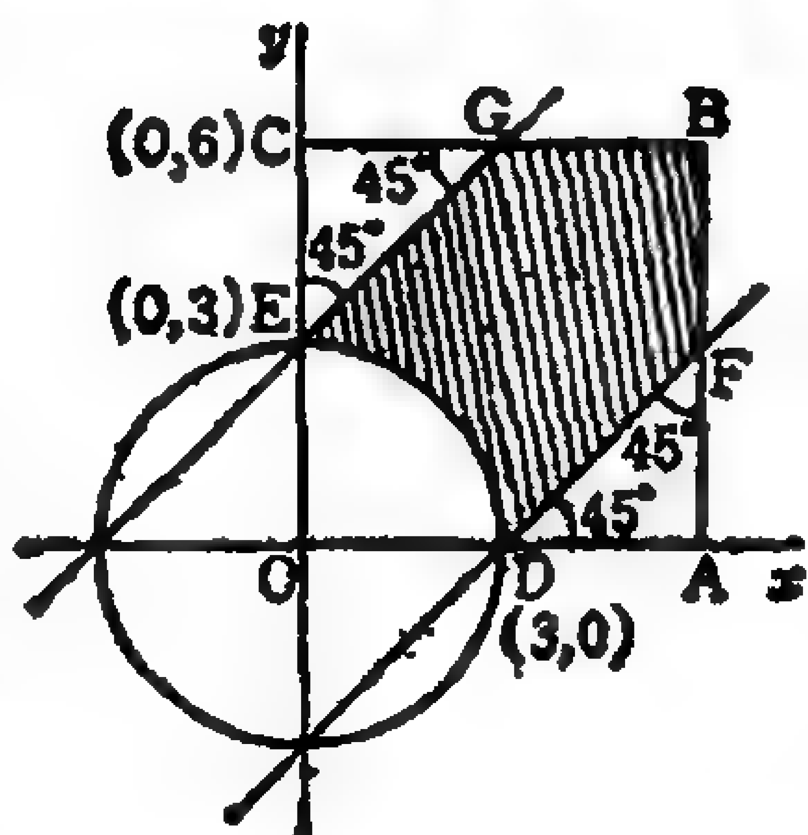
解 在坐标平面上，坐标满足 $x>0$ 的点在 y 轴的右侧，坐标满足 $x^2+y^2<9$ 的点在以原点为圆心，半径为 3 的圆内，坐标满足 $2x+3y>6$ 的点在直线 $2x+3y=6$ 的上侧。所以坐标满足各不等式的点就是图中的斜线部分。其面积为

$$\frac{1}{4}\text{圆的面积}-S_{\triangle OAB}$$
$$=\frac{1}{4}\pi\times 3^2-\frac{1}{2}\times 3\times 2\approx 4.07.$$

3608. 用图表示坐标满足下列各不等式

$$0<x<6,\ 0<y<6,\ |y-x|<3,$$
$$x^2+y^2>9$$

的点的存在范围，并计算其面积(精确到小数第二位)。



解　在坐标平面上，坐标满足 $0<x<6$ 的点在两平行直线 $x=0$ 与 $x=6$ 之间，坐标满足 $0<y<6$ 的点在两平行直线 $y=0$ 与 $y=6$ 之间，满足 $x^2+y^2>9$ 的点在以原点为圆心、半径为 3 的圆的外部。

因为 $|y-x|<3$ 可写成

$$-3<y-x<3,$$

即　$y-x+3>0$　且　$y-x-3<0$。

所以坐标满足 $|y-x|<3$ 的点在直线 $y=x-3$ 的上方和直线 $y=x+3$ 的下方。

因此坐标满足各不等式的点就是图中的斜线部分。

设斜线部分的面积为 S，则

$S=$ 正方形 $OABC$ 面积 $-\triangle ADF$ 面积 $-\triangle CEG$ 面积 $-\frac{1}{4}$ 圆 ODE 面积。

由于　$OA=OC=6,\ OD=OE=3,$
$DA=AF=3,\ CE=CG=3,$

所以

$$S=6^2-\frac{1}{2}\times3\times3-\frac{1}{2}\times3\times3-\frac{1}{4}\pi\times3^2$$
$$=27-\frac{9}{4}\pi\approx19.93。$$

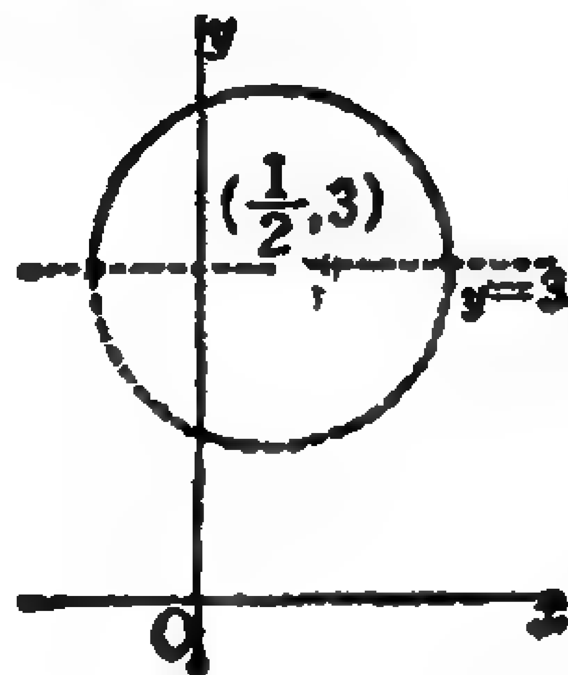
3609. 作下列函数的图象。

(1) $y=3+\sqrt{(x+1)(2-x)}$；

(2) $y=2-\sqrt{8-2x-x^2}$。

解　(1) 把 3 移到右边后，两边平方

$y-3=\sqrt{(x+1)(2-x)}$，①



$(y-3)^2=-x^2+x+2$

即

$(y-3)^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$。

$$\therefore\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2。$$

这是以 $\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$ 为圆心，半径为 $\frac{3}{2}$ 的圆。

由 ① 知 $y-3\geqq0$，所以 ① 的图象是这个圆在直线 $y=3$ 上方部分。

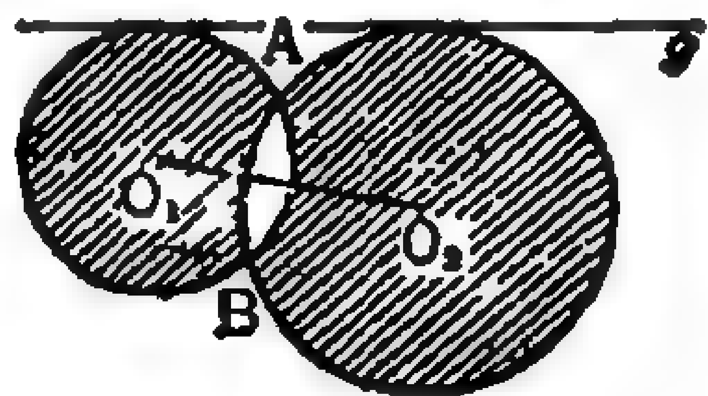
(2) $y-2=-\sqrt{8-2x-x^2}$。　②

等式两边平方，

$(y-2)^2=-(x^2+2x-8)$

即

$(y-2)^2=-(x+1)^2+9,$



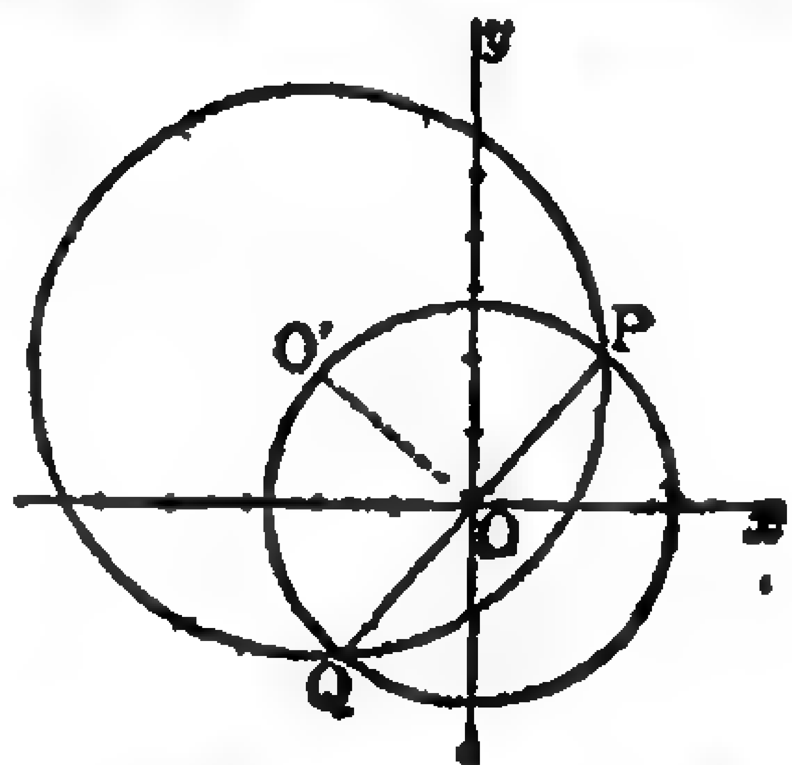
$$\therefore\quad (x+1)^2+(y-2)^2=3^2。$$

这是圆心为 $(-1,\ 2)$，半径为 3 的圆。

由 ② 知 $y-2\leqq0$，所以 ② 的图象是这个圆在直线 $y=2$ 下方部分。

3610. 已知相交于两定点 A、B 的两定圆 O_1、O_2 的一条公切线为 g，作出其图形并回答下列问题(不证明)。

(1) 为使过两定点的圆和定直线 g 不相交，其圆心应在什么位置？



(2) 过两定点 A、B 和另一点 P 的圆，为使该圆和定直线 g 不相交，点 P 应在什么位置？试把它用斜线表示。

解　(1) 圆心应在以 A 为焦点，g 为准线的抛物线的内部(即含有点 A 的一侧)或在线段 O_1O_2 上(包括端点)。

(2) 点 P 须在以线段 O_1O_2 上的点为圆心，并且过点 A 的所有圆上的点所遮蔽的部分，即从两定圆内部除去其公共部分，就是所求的范围(证明略)。

3611. 已知圆心在 $(-2,\ 2)$、半径为 4 的圆和圆心在原点、半径为 $2\sqrt{2}$ 的另一圆。设这两个圆的交点分别为 P、Q，求点 P、Q 的坐标及直线 PQ 和 x 轴正向的夹角。

解 已知两圆的方程分别为

$$(x+2)^2+(y-2)^2=4^2, \quad ①$$

$$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2. \quad ②$$

从①得 $x^2+y^2+4x-4y=8$,

从②得 $x^2+y^2=8$.

解此两方程得

$$x=2,\ y=2;\quad x=-2,\ y=-2.$$

所以两圆交点的坐标为 $P(2,2)$, $Q(-2,-2)$. 由于过点 P、Q 的直线方程为 $y=x$, 所以它和 x 轴正向的夹角是 $45°$.

3612. 求两个圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$, $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$ 的公共弦的长.

解 这两个圆关于直线 $y=x$ 对称, 其公共弦必过原点, 所以公共弦的方程是 $y=x$. 把 $y=x$ 代入方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$, 则得

$$(y-a)^2+(y-b)^2=c^2,$$

即 $2y^2-2(a+b)y+a^2+b^2-c^2=0$.

$$\therefore\quad y=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-2(a^2+b^2-c^2)}}{2},$$

因而

$$x_1=y_1=\frac{a+b+\sqrt{(a+b)^2-2(a^2+b^2-c^2)}}{2},$$

$$x_2=y_2=\frac{a+b-\sqrt{(a+b)^2-2(a^2+b^2-c^2)}}{2}.$$

设公共弦的长为 l, 则

$$l^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2.$$

已知

$$x_1-x_2=y_1-y_2=\sqrt{(a+b)^2-2(a^2+b^2-c^2)},$$

所以

$$l^2=2(a+b)^2-4(a^2+b^2-c^2)=4c^2-2(a-b)^2,$$

$$l=\sqrt{4c^2-2(a-b)^2}.$$

3613. 对于圆 $x^2+y^2+2ax+2by=1$, 回答下列问题.

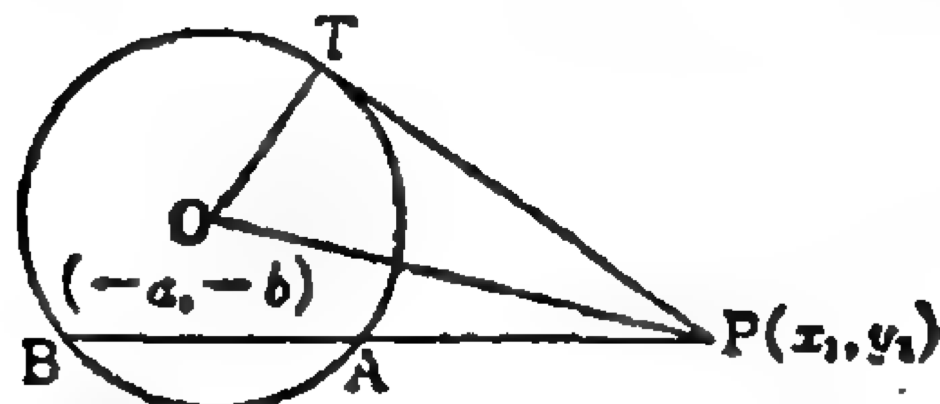
(1) 求圆心的坐标和半径;

(2) 从圆外一点 $P(x_1, y_1)$ 引一直线和圆交于 A、B 两点, 试把积 $PA\cdot PB$ 用 x_1、y_1、a、b 表示.

解 (1) 在 $x^2+y^2+2ax+2by=1$ 的两边同加上 a^2+b^2, 变形为

$$(x+a)^2+(y+b)^2=1+a^2+b^2,$$

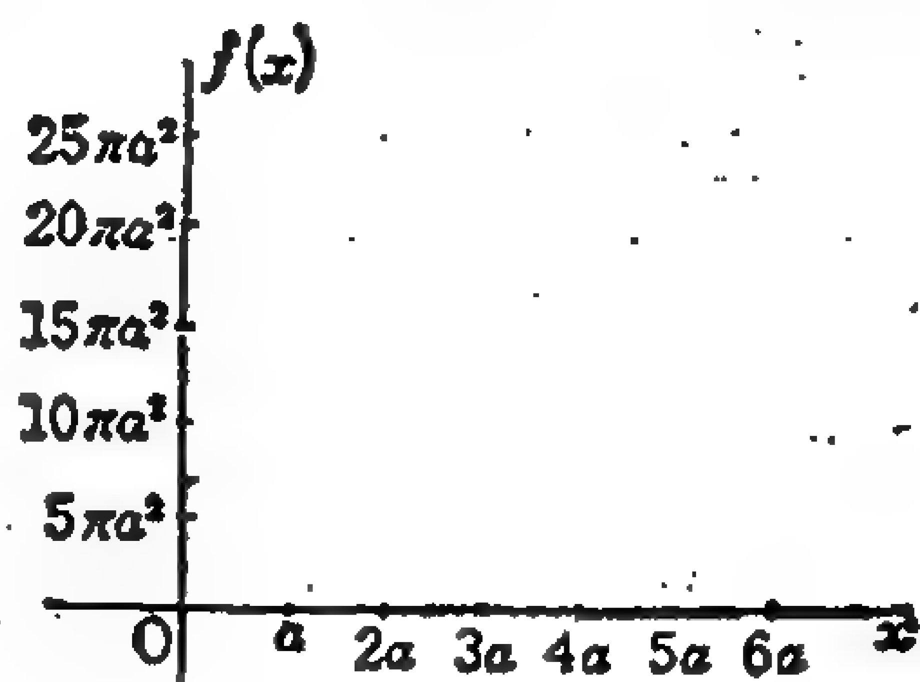
因而圆心是 $(-a, -b)$, 半径是 $\sqrt{a^2+b^2+1}$.

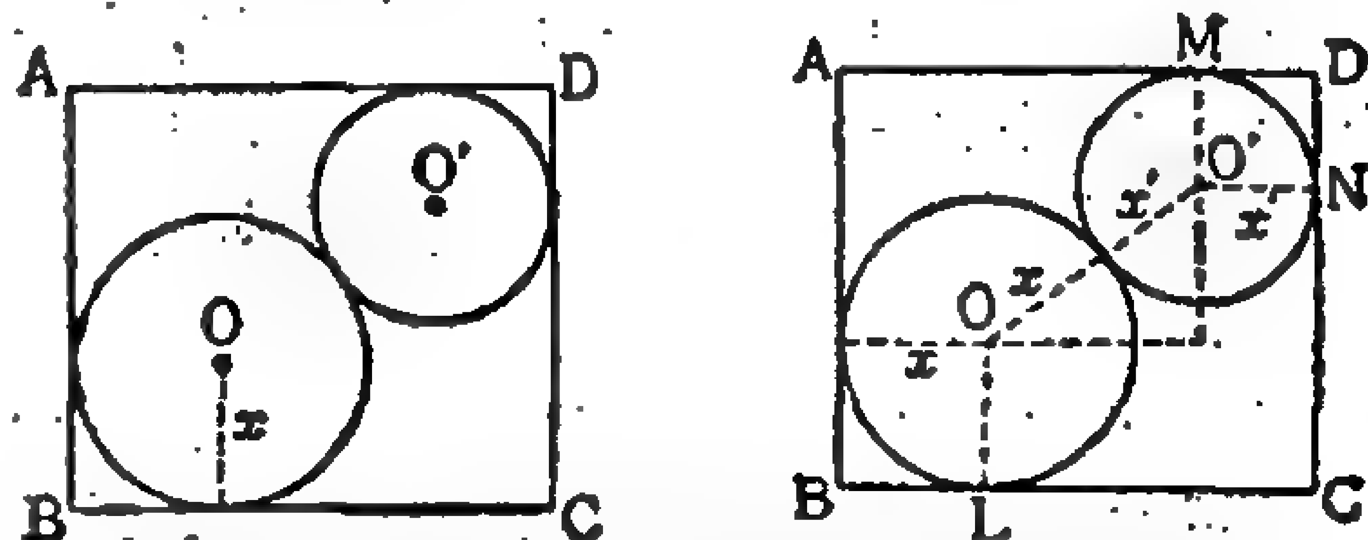


(2) 设圆心为 O, 从点 P 引圆 O 的切线, 其切点为 T, 则

$$PA\cdot PB=PT^2=PO^2-OT^2$$
$$=(x_1+a)^2+(y_1+b)^2-(1+a^2+b^2)$$
$$=x_1^2+y_1^2+2ax_1+2by_1-1.$$

3614. 如图, 在边长为 $AB=8a$, $BC=9a$ 的矩形 $ABCD$ 中, 有互相外切的两圆 O、O', 且圆 O 和边 AB、BC 相切, 圆 O' 和边 AD、DC 相切. 设两圆面积之和是圆 O 半径 x 的函数 $f(x)$, 画出其图形并求其最大值和最小值.





解 设圆 O 的半径为 x, 圆 O' 的半径为 x', 则

$$OO'^2=(8a-x-x')^2+(9a-x-x')^2.$$

又知 $OO'=x+x'$,

因而

$$(x+x')^2=145a^2-34a(x+x')+2(x+x')^2,$$

即 $(x+x')^2-34a(x+x')+145a^2=0$,

$$(x+x'-5a)(x+x'-29a)=0.$$

显然 $x+x'<29a$, 所以 $x+x'=5a$.

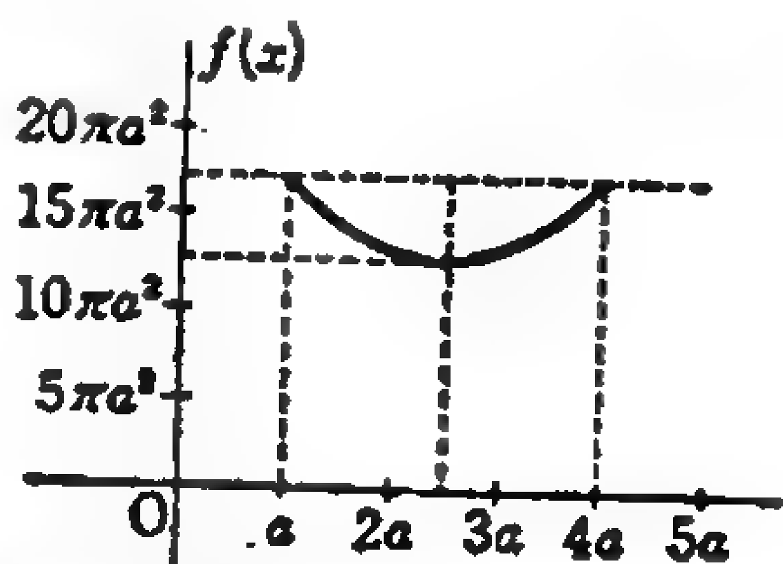
已知两圆面积之和为 $f(x)$, 则

$$f(x)=\pi x^2+\pi x'^2=\pi x^2+\pi(5a-x)^2$$
$$=2\pi\left(x-\frac{5}{2}a\right)^2+\frac{25}{2}\pi a^2.$$

根据题意 x 取最大值时 $x=4a$, x 取最小值时 $x'=4a$ (即 $x=a$). 因此, $f(x)$ 的最小

值是

$$f\left(\frac{5}{2}a\right)=\frac{25}{2}\pi a^2,$$

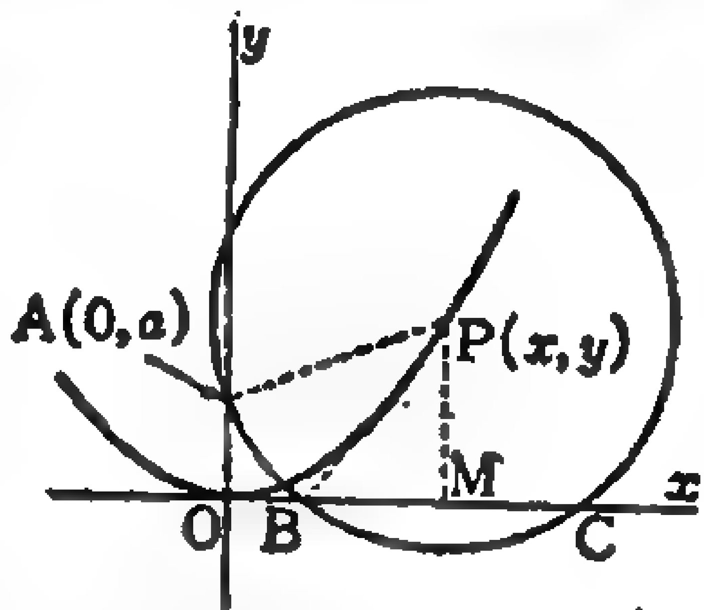


$f(x)$的最大值是

$$f(a)=f(4a)=17\pi a^2.$$

所求函数$f(x)$的图象如上图。

3615. 一圆过定点$(0, a)$，与x轴截得的弦长为$2a$，问它的圆心在什么曲线上？



解　设定点为A，圆心为$P(x, y)$，圆和x轴的交点为B、C，弦BC的中点为M，$BM=a$，则由$PA=PB$，知

$$PA^2=PM^2+BM^2,$$

$$\therefore\quad x^2+(y-a)^2=y^2+a^2,$$

即 $$x^2=2ay.$$

故圆心P在抛物线$x^2=2ay$上。该抛物线与x轴在原点处相切，其焦点为$\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$。

3616. 求两定点$A(-a, 0)$，$B(a, 0)$和圆$(x-b)^2+(y-c)^2=r^2$上的动点P所构成的$\triangle APB$的重心的轨迹方程，并指出它的图形是什么？

解　因为三角形重心的坐标等于三顶点坐标的平均值，以$A(-a, 0)$，$B(a, 0)$，$P(x, y)$为顶点的三角形的重心坐标为

$$X=\frac{x+a-a}{3}=\frac{x}{3},$$

$$Y=\frac{y+0+0}{3}=\frac{y}{3}.$$

把$x=3X$，$y=3Y$代入圆的方程

$$(x-b)^2+(y-c)^2=r^2,$$

则得 $$(3X-b)^2+(3Y-c)^2=r^2,$$

即 $$\left(X-\frac{b}{3}\right)^2+\left(Y-\frac{c}{3}\right)^2=\left(\frac{r}{3}\right)^2.$$

这个圆可以看成是原来的圆以原点为相似中心，相似比为$\frac{1}{3}$进行相似变换得到的。

3617. 两两相交的三条直线为

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3=0.$$

把它们左边的一次式分别用l_1, l_2, l_3表示，试回答下列问题。

(1) 取任意定数p, q, r，方程

$$pl_2l_3+ql_3l_1+rl_1l_2=0$$

的图象过上述三条直线中每两条直线的交点。试述其理由。

(2) (1)的方程表示圆时，证明p、q、r满足

$$p(a_2a_3-b_2b_3)+q(a_3a_1-b_3b_1)$$
$$+r(a_1a_2-b_1b_2)=0$$

及 $$p(a_2b_3+a_3b_2)+q(a_3b_1+a_1b_3)$$
$$+r(a_1b_2+a_2b_1)=0.$$

解　(1) 设$l_1=0$, $l_2=0$，则有

$$pl_2l_3+ql_3l_1+rl_1l_2=0.$$

因此直线$l_1=0$与$l_2=0$的交点在曲线

$$pl_2l_3+ql_3l_1+rl_1l_2=0$$

上。同理，直线$l_2=0$与$l_3=0$的交点和直线$l_3=0$, $l_1=0$的交点都在此曲线上。

(2) 如果(1)的曲线表示圆，则x^2和y^2的系数相等，且xy项的系数为零。在方程

$$pl_2l_3+ql_3l_1+rl_1l_2=0$$

中，x^2的系数是　$pa_2a_3+qa_3a_1+ra_1a_2$，

y^2的系数是　$pb_2b_3+qb_3b_1+rb_1b_2$，

xy的系数是$p(a_2b_3+b_2a_3)+q(a_3b_1+b_3a_1)+r(a_1b_2+b_1a_2)$。

因此，由x^2和y^2的系数相等得

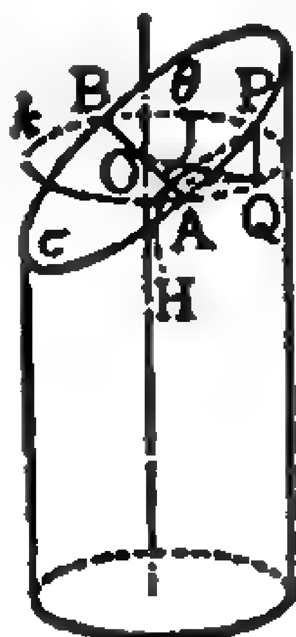
$$pa_2a_3+qa_3a_1+ra_1a_2$$
$$=pb_2b_3+qb_3b_1+rb_1b_2,$$

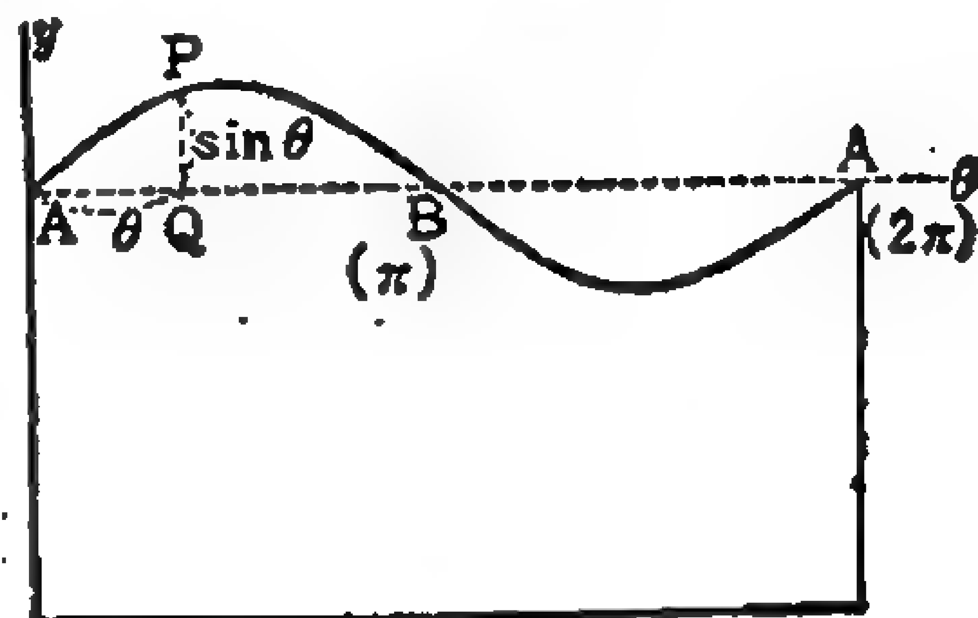
即 $$p(a_2a_3-b_2b_3)+q(a_3a_1-b_3b_1)$$
$$+r(a_1a_2-b_1b_2)=0.$$

由xy的系数为零，得

$$p(a_2b_3+b_2a_3)+q(a_3b_1+b_3a_1)$$
$$+r(a_1b_2+b_1a_2)=0.$$

3618. 把直圆筒用与其轴成45°角的平面截开，再把这个圆筒面沿一条母线剪开，并展开平面，问这时截口的曲线是什么形状？





解 设截平面为α，α与直圆柱面的轴的交点为O，α截直圆柱面的截面为c。过O作与轴垂直的平面，它和直圆柱面的交线k与曲线c的交点为A、B，则AB必过点O。设过c上任意点P的母线和k的交点为Q，过Q引AB的垂线，其垂足为H。由$PH\perp AB$知$\angle PHQ=45°$，$\therefore QP=HQ$。

设$\angle AOQ=\theta$(用弧度制表示)，则$HQ=OQ\sin\theta$。如把OA取作单位长，则

$$\widehat{AQ}=OA\cdot\theta=\theta,$$
$$QP=HQ=OQ\sin\theta=\sin\theta.$$

因此，如沿过A的母线把直圆柱的侧面剪开并展成平面，则截面c就是在这个平面上，以A为原点、过A的母线为y轴建立的直角坐标系里，用$y=\sin\theta$所表示的曲线，即正弦曲线。

如果沿其他母线剪开时，所得的曲线与上面的曲线相同，仍是正弦曲线。

第三章 抛 物 线

1. 图象

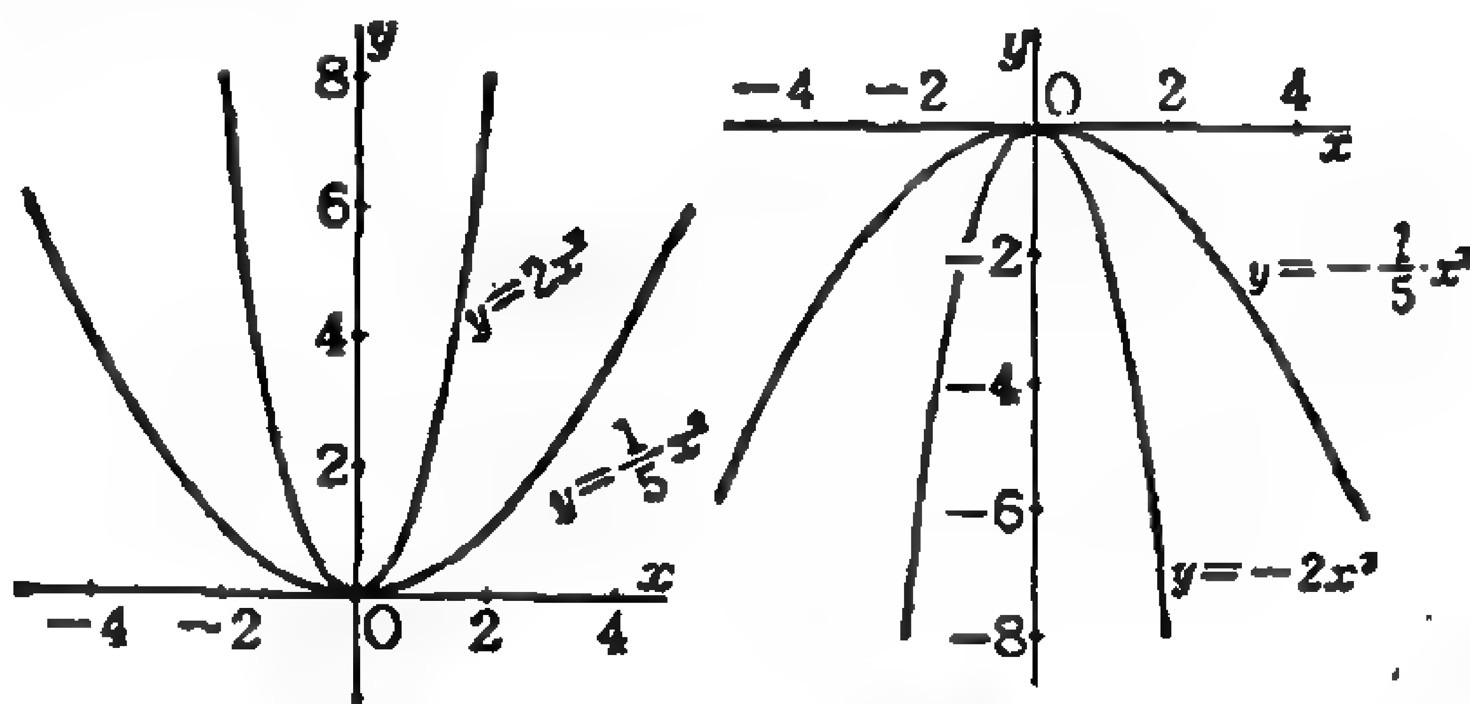
3619. 作下列函数的图象。

(1) $y=\frac{1}{5}x^2$, (2) $y=2x^2$,

(3) $y=-\frac{1}{5}x^2$, (4) $y=-2x^2$.

解 (1)、(2) 取数值表描点作图，其图象如下左图。

(3)、(4) 取数值表描点作图，其图象如下右图。



注 一般地，$y=ax^2$的图象是顶点在原点、y轴为对称轴的抛物线。如$a>0$，开口向上；如$a<0$，开口向下。

3620. 作下列函数的图象，指出它和函数$y=\frac{1}{2}x^2$的图象的位置关系。

(1) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2$, (2) $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$.

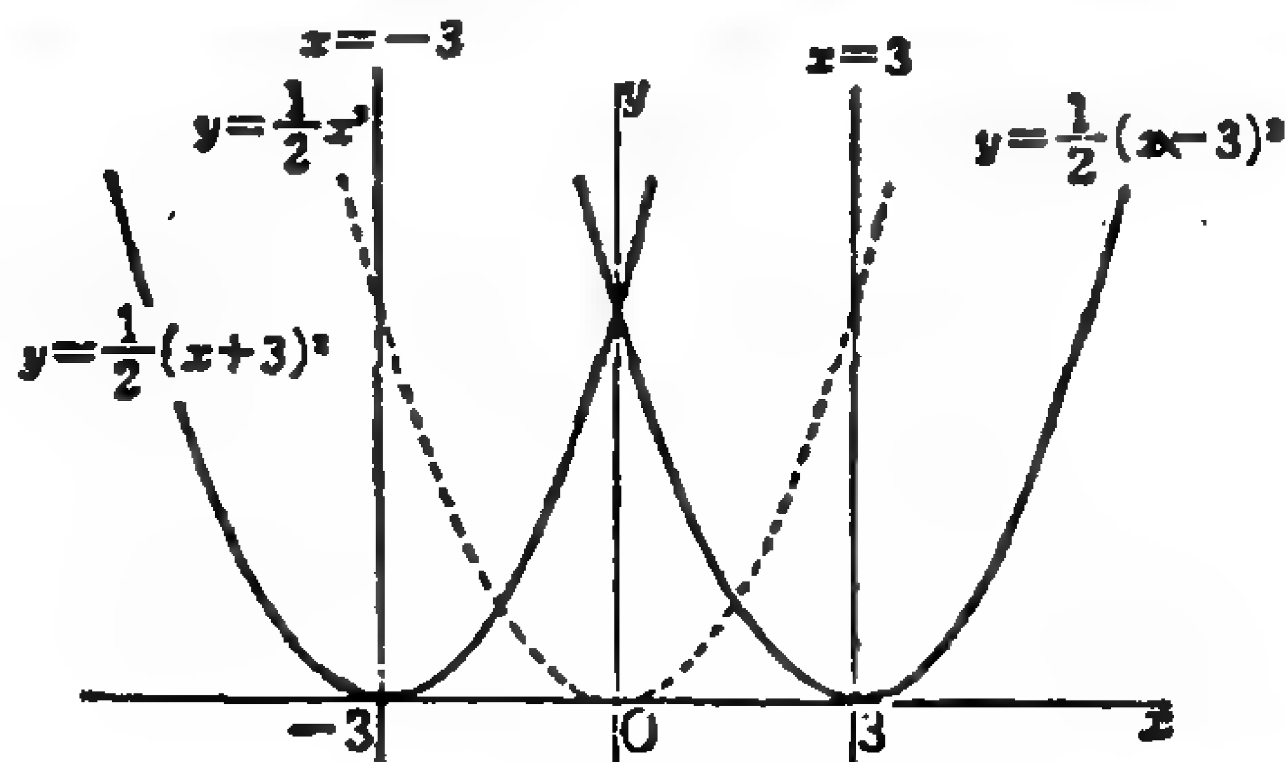
解 (1) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2$. 列出x, y间的对应数值表:

x	…	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	…
y	…	12.5	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	…

(2) $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$和(1)一样，列表如下:

x	…	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	…
y	…	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	12.5	…

根据上表描点作图可以得到其图象如下图。



由此可见，函数$y=\frac{1}{2}(x-3)^2$的图象是把抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$沿x轴正向平行移动3(即向右平移3)所得的抛物线；函数$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$的图象是把抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$沿x轴正向平行移动-3(即向左平移3)所得到的抛物线。

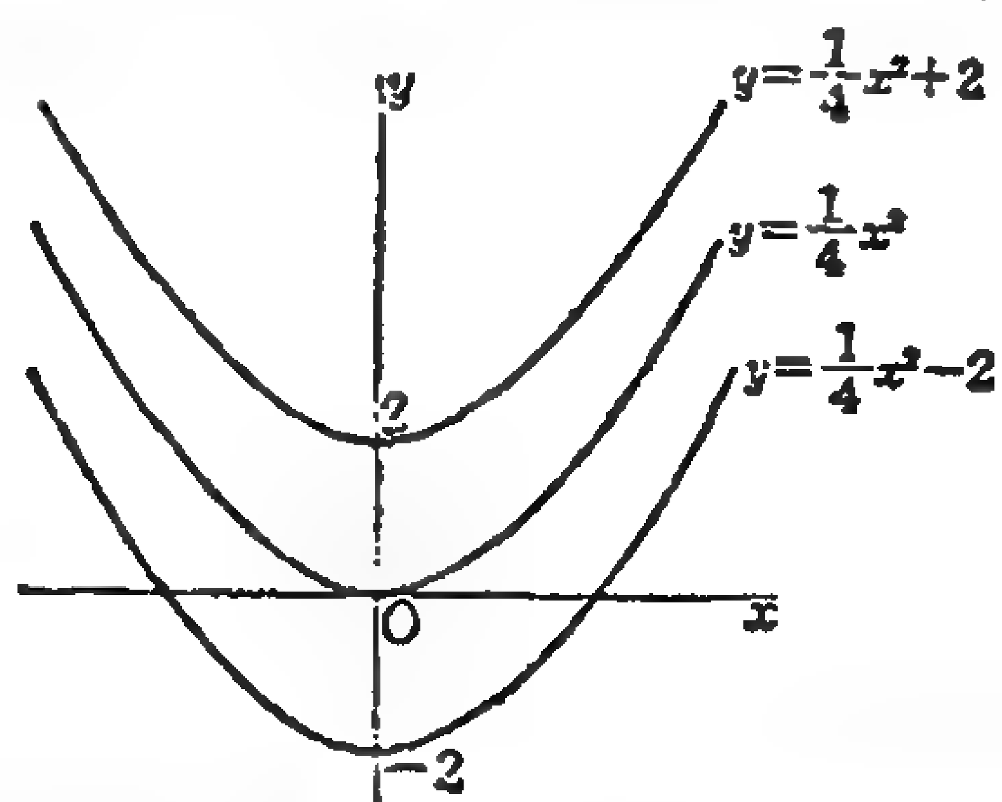
一般地，函数$y=a(x-h)^2$的图象是把抛物线$y=ax^2$沿x轴正向平行移动h所得到的抛物线。具体地说，当$h>0$时向右平移h；当$h<0$时向左平移$|h|$。

3621. 作下列函数的图象，指出它和抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$的位置关系。

(1) $y=\frac{1}{4}x^2+2$, (2) $y=\frac{1}{4}x^2-2$.

解 和上题一样，列出x、y的对应数值

表，然后描点作图，就可得到它们的图象如下图。



由此可见，函数 $y=\frac{1}{4}x^2+2$ 的图象是把抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 沿 y 轴正方向平行移动 2（即向上平移 2）所得到的抛物线；函数 $y=\frac{1}{4}x^2-2$ 的图象是把抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 沿 y 轴正方向平行移动 -2（即向下平移 2）所得到的抛物线。

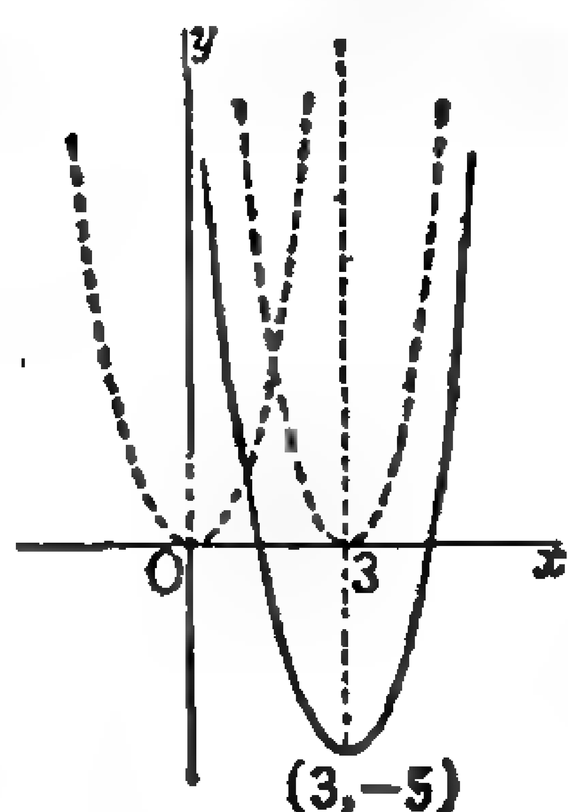
一般地，函数 $y=cx^2+k$ 的图象是把抛物线 $y=ax^2$ 沿 y 轴正方向平行移动 k（当 $k>0$ 时向上平移 h，当 $k<0$ 时向下平移 $|k|$）所得到的抛物线。

3622. 作

$y=2(x-3)^2-5$

的图象。

解 先作 $y=2x^2$ 的图象，把它向右平行移动 3 得到 $y=2(x-3)^2$ 的图象，再把得到的图象向下平行移动 5 就得到 $y=2(x-3)^2-5$ 的图象。因此 $y=2(x-3)^2-5$ 的图象是顶点在 $(3, -5)$、对称轴方程是 $x=3$ 的抛物线。



3623. 作 $y=-x^2+4x-5$ 的图象，求其顶点坐标和对称轴方程。

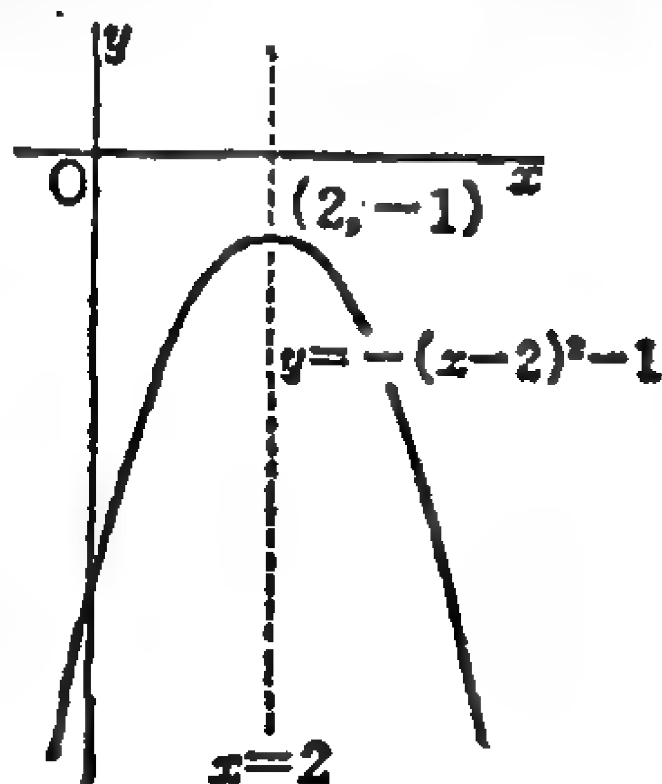
解

$y=-(x^2-4x+5)$

$=-(x^2-4x+4+1)$

$=-(x-2)^2-1.$

它的图象是把抛物线 $y=-x^2$ 向右平行移动 2，再向下平行移动 1 所得到的抛物线。它的顶点坐标是 $(2, -1)$，对称轴方程是 $x=2$。

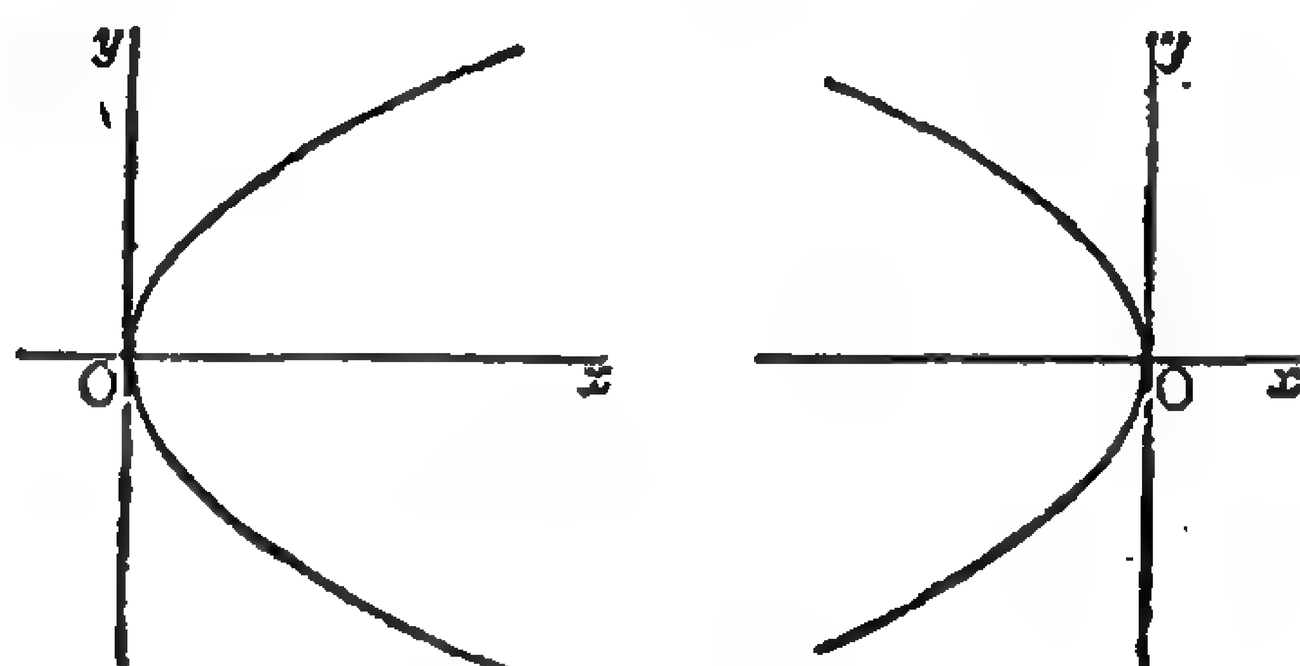


3624. 作下列函数的图象。

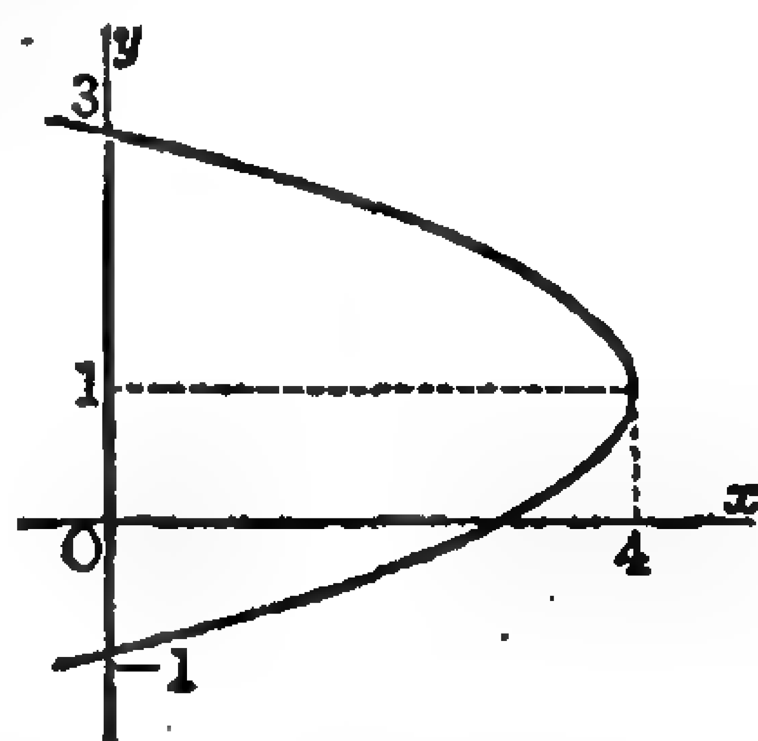
(1) $y^2=2x$,　　(2) $y^2=-2x$,

(3) $y^2-2y+x-3=0$.

解 (1)　　(2)



(3) 把原方程变形为 $(y-1)^2=-(x-4)$。它的图象是把抛物线 $y^2=-x$ 沿 x 轴正向平移 4，再沿 y 轴方向平移 1 所得到的抛物线。



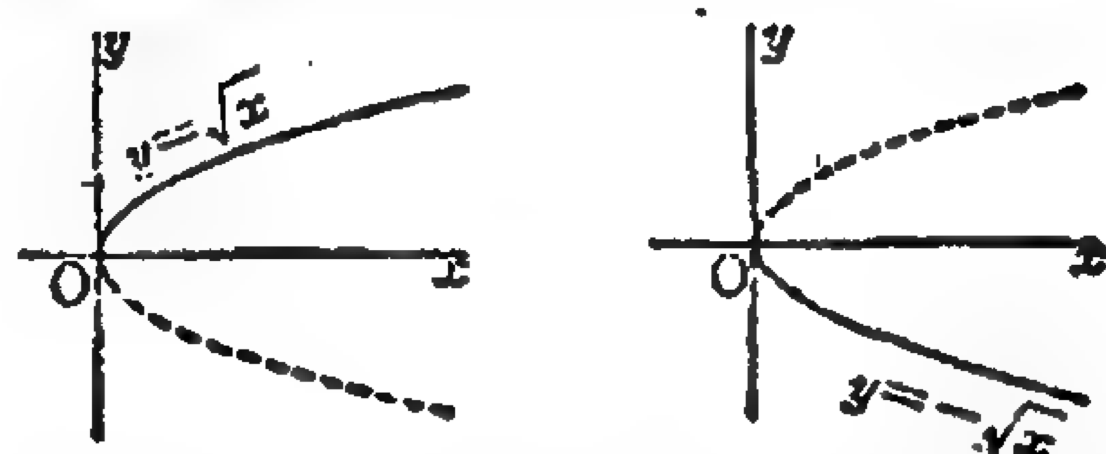
注 一般地，$y^2=ax$ 的图象是顶点在原点、x 轴为对称轴的抛物线。如 $a>0$，抛物线开口向右；如 $a<0$，抛物线开口向左。

3625. 作下列函数的图象，并指出它们之间的位置关系。

(1) $y=\sqrt{x}$,　　(2) $y=-\sqrt{x}$,

(3) $y=\sqrt{-x}$,　　(4) $y=-\sqrt{-x}$.

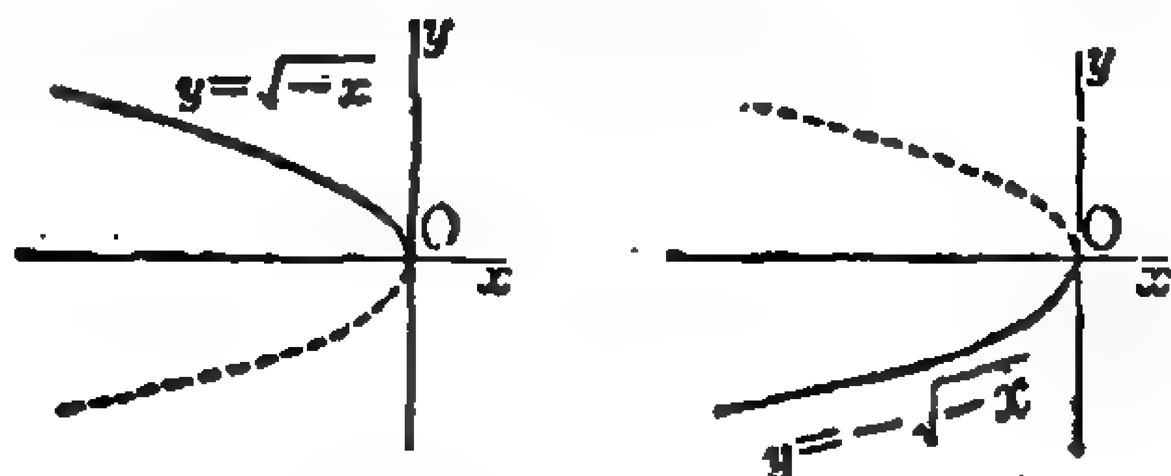
解 (1) 在 $y=\sqrt{x}$ 中，因 y 必须是实数，所以 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$。因此，它的图象是在抛物线 $y^2=x$ 中表示纵坐标 y 是非负值的部分。如下左图中的实线。



(2) 在 $y=-\sqrt{x}$ 中，和 (1) 一样 $x\geqq 0$, $y\leqq 0$。所以它的图象是在抛物线 $y^2=x$ 中纵坐标 y 是负值和零的部分。如上右图中的实线。(1) 和 (2) 关于 x 轴对称。

(3) 在 $y=\sqrt{-x}$ 中，因 y 必须是实数，所

以$x\leqq0$，$y\geqq0$。因此，它的图象是抛物线$y^2=-x$中纵坐标y是非负值的部分。如下左图。



(4) 在$y=-\sqrt{-x}$中，和(3)一样$x\leqq0$，$y\leqq0$。所以它的图象是抛物线$y^2=-x$中纵坐标y是非正值的部分。如上右图。

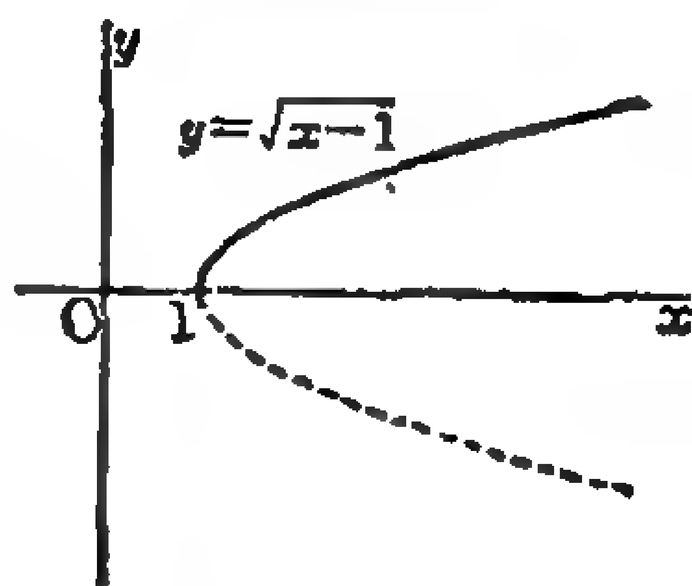
(3)和(4)关于x轴对称。又(1)和(3)，(2)和(4)分别关于y轴对称。(1)和(4)，(2)和(3)分别关于原点对称。

3626. 作函数$y=\sqrt{x-1}$的图象。

解 把两边平方，得

$$y^2=x-1,$$

$$\therefore\ x\geqq1.$$



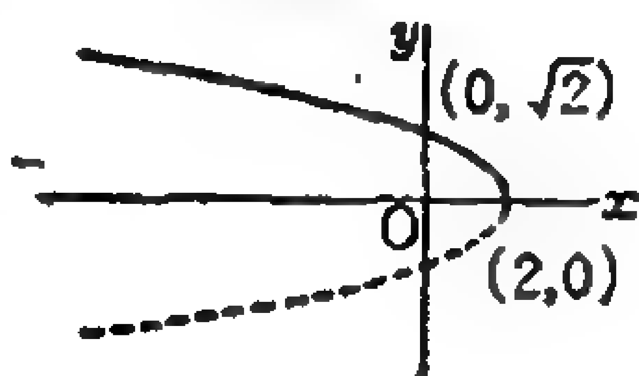
这个方程的图象是以(1, 0)为顶点、以x轴为对称轴的抛物线。

在函数$y=\sqrt{x-1}$中，$x-1\geqq0$，$y\geqq0$。所以它的图象是图中的实线。

3627. 作函数$y=\sqrt{2-x}$的图象。

解 把

$$y=\sqrt{2-x}\quad ①$$



两边平方，得

$$y^2=2-x,$$

即 $$y^2=-(x-2)\quad (x\leqq2).\quad ②$$

②的图象是以(2, 0)为顶点、x轴为对称轴的抛物线。因为$\sqrt{2-x}\geqq0$，$y\geqq0$，所以①的图象是抛物线②中x轴上方的部分。

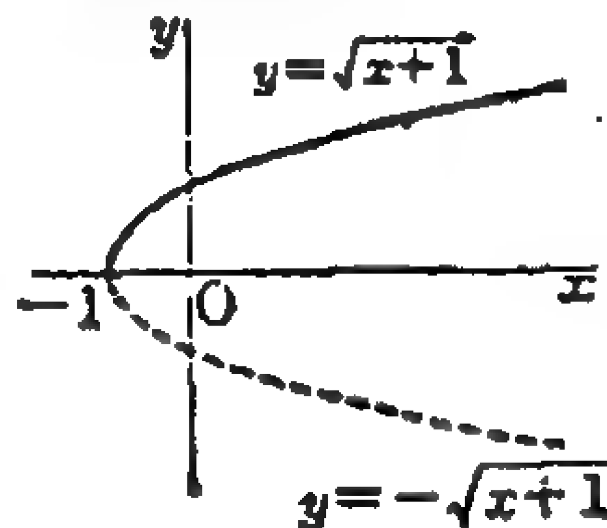
3628. 作函数

$$y=\sqrt{x+1}$$

的图象。

解

$$y=\sqrt{x+1}\quad ①$$



两边平方，得

$$y^2=x+1\quad (x\geqq-1).\quad ②$$

②的图象是顶点在(−1, 0)，对称轴是x轴的抛物线。因为$\sqrt{x+1}\geqq0$，$y\geqq0$，所以①的图象是抛物线②中x轴上方的部分。图中的虚线部分是函数$y=-\sqrt{x+1}$的图象。

3629. 作下列函数的图象。

(1) $y=\sqrt{3x-2}$，

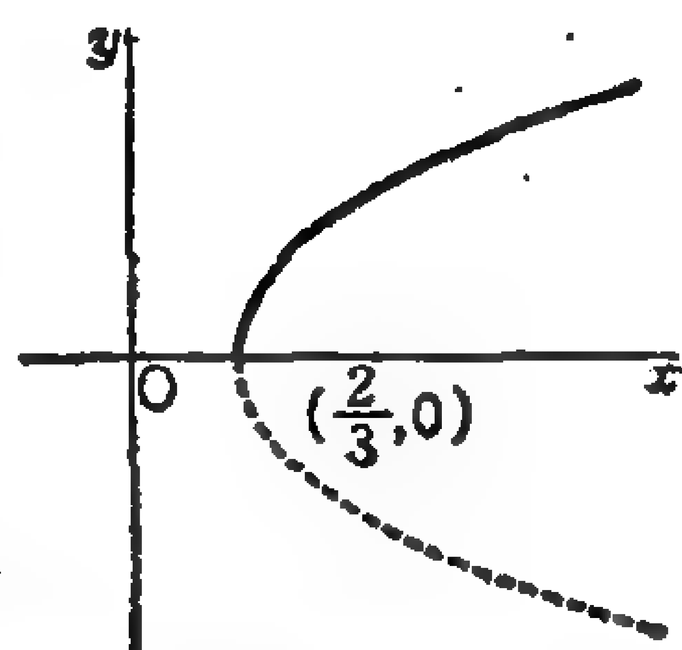
(2) $y=-\sqrt{2(3x-2)}$。

解 (1) $3x-2\geqq0$，$\therefore\ x\geqq\frac{2}{3}$。

即$x\geqq\frac{2}{3}$时，$y\geqq0$。

把原式两边平方，得

$$y^2=3x-2.$$



所求的图象是以点$\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$为顶点、$x$轴为对称轴、开口向右的抛物线上，纵坐标$y$是非负值的部分。

(2) $3x-2\geqq0$，$\therefore\ x\geqq\frac{2}{3}$。

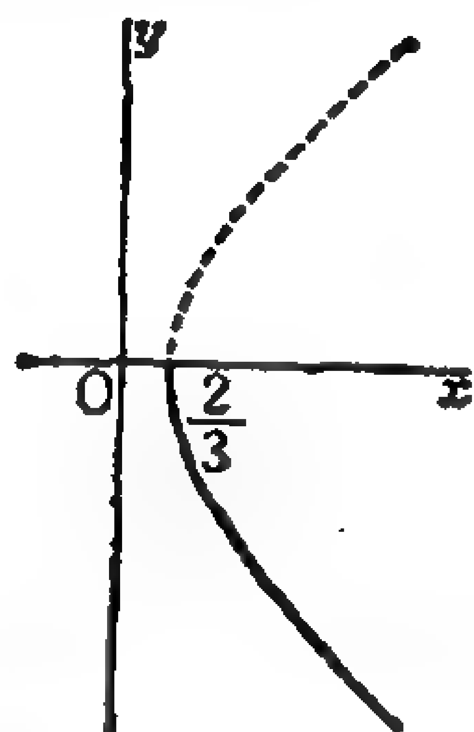
即在函数中

$$x\geqq\frac{2}{3},\quad y\leqq0.$$

把原式两边平方，得

$$y^2=2(3x-2),$$

即 $$y^2=6\left(x-\frac{2}{3}\right).$$

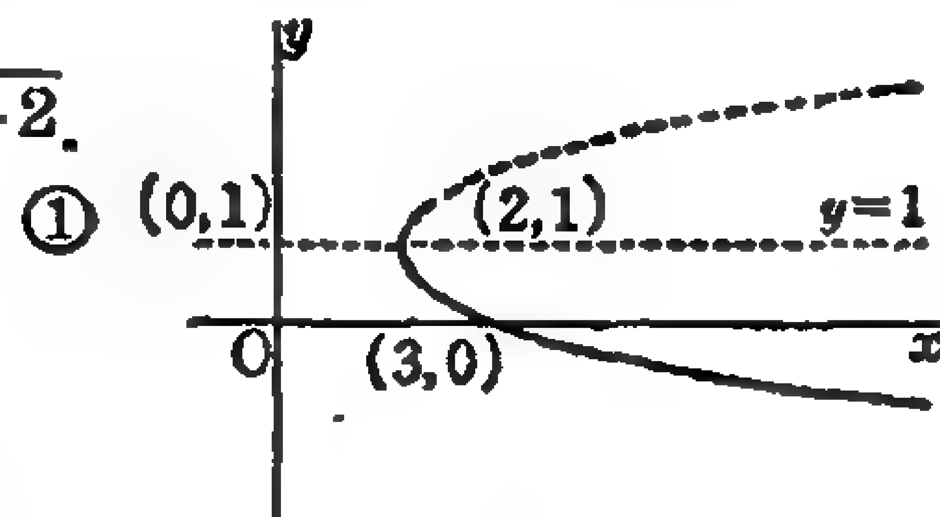


因此，所求图象是以点$\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$为顶点、$x$轴为对称轴、开口向右的抛物线上，纵坐标$y$是非正值的部分。

3630. 作函数$y=1-\sqrt{x-2}$的图象。

解

$$y-1=-\sqrt{x-2}.\quad ①$$



因为

$$x-2\geqq0,$$

所以$x\geqq2$。

又因$-\sqrt{x-2}\leqq0$，所以$y-1\leqq0$，从而

$$y\leqq1.\quad ②$$

把①两边平方，

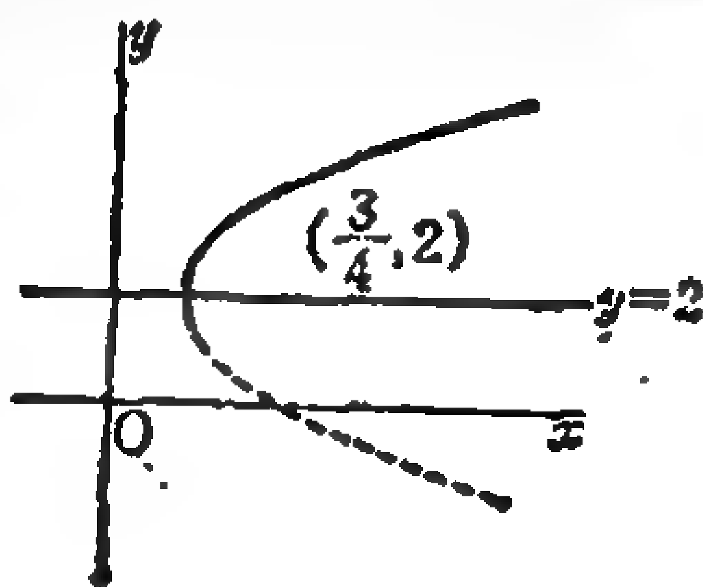
$$(y-1)^2=x-2.\quad ③$$

③的图象是以直线$y=1$为对称轴、点(2, 1)为顶点的抛物线。由②$y\leqq1$，所以①的图象是③的抛物线上纵坐标$y\leqq1$的部分。

3631. 作函数

$$y-\sqrt{4x-3}=2$$

的图象。



解 已知函数 $y-2=\sqrt{4x-3}$。两边平方，

$$(y-2)^2=4x-3,$$

即 $$(y-2)^2=4\left(x-\frac{3}{4}\right).$$

故所求图象是以点$\left(\frac{3}{4}, 2\right)$为顶点、以直线 $y=2$ 为对称轴的抛物线的上半部分。

2. 顶点、轴、焦点、准线

3632. 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标和对称轴的方程。

解
$$\begin{aligned}y&=ax^2+bx+c\\&=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]\\&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.\end{aligned}$$

它的图象是把抛物线 $y=ax^2$ 沿 x 轴正向平行移动 $-\frac{b}{2a}$，再沿 y 轴正向平移 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 所得到的抛物线。它的顶点坐标是$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$，对称轴方程是 $x=-\frac{b}{2a}$。

3633. 求下列抛物线的顶点坐标和对称轴方程。

(1) $y=-8x^2+16$, (2) $y=2x^2-4x-5$,
(3) $y=x^2+8x+13$, (4) $y=24-9x-x^2$.

解 (1) 顶点(0, 16)，轴 $x=0$。

(2)
$$\begin{aligned}y&=2\left(x^2-2x-\frac{5}{2}\right)\\&=2\left(x^2-2x+1-1-\frac{5}{2}\right)\\&=2\left[(x-1)^2-\frac{7}{2}\right]=2(x-1)^2-7.\end{aligned}$$

顶点(1, −7)，轴 $x=1$。

(3) $y=(x+4)^2-3$，
顶点(−4, −3)，轴 $x=-4$。

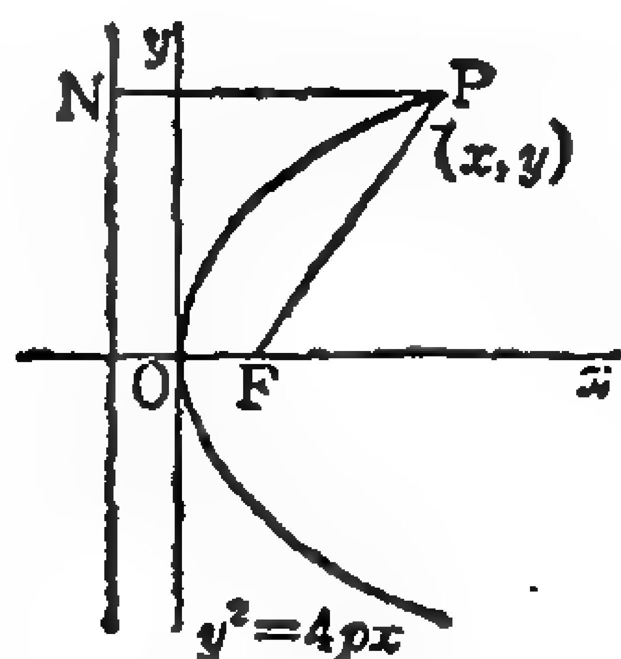
(4)
$$\begin{aligned}y&=-(x^2+9x-24)\\&=-\left(x+\frac{9}{2}\right)^2+\frac{167}{4}.\end{aligned}$$

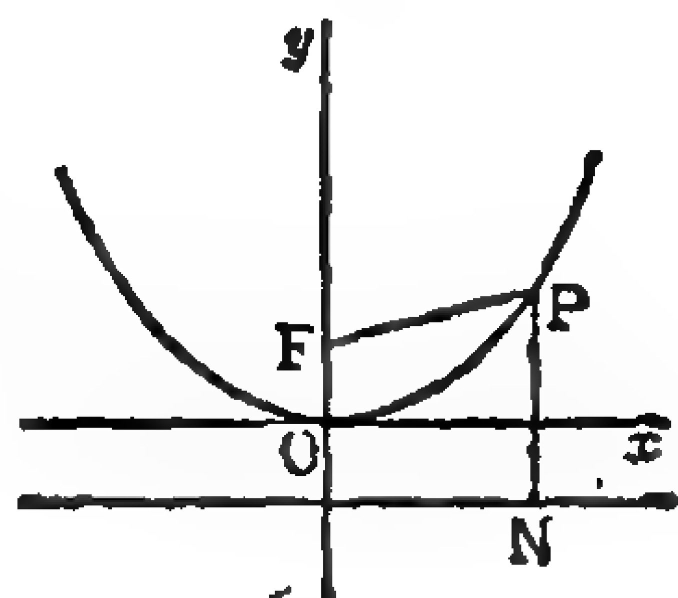
顶点$\left(-\frac{9}{2}, \frac{167}{4}\right)$，轴 $x=-\frac{9}{2}$。

3634. 证明：到定点 $(p, 0)$ 和定直线 $x=-p$ 距离相等的点 (x, y) 的坐标满足方程

$$y^2=4px.$$

到定点 $(0, p)$ 和定直线 $y=-p$ 距离相等的点 (x, y) 的坐标满足方程 $y=\frac{1}{4p}x^2$。





解 设 $P(x, y)$，$F(p, 0)$，其中 $p>0$。从 P 向直线 $x=-p$ 所作的垂线足为 N，则由题设知

$$PN=PF, \quad 因而 \quad PN^2=PF^2,$$

即 $$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2.$$

$$\therefore\ y^2=4px.$$

同样，设 $P(x, y)$、$F(0, p)$，定直线 $y=-p$，则得 $y=\frac{1}{4p}x^2$。

注 定点 F 叫做抛物线的焦点，定直线叫做抛物线的准线。

3635. 求下列方程的图象的焦点坐标和准线方程。

(1) $y^2=-6x$, (2) $y=3x^2$.

解 (1) 抛物线 $y^2=4px$ 的焦点坐标为 $(p, 0)$，准线方程为 $x=-p$。把 $y^2=-6x$ 与 $y^2=4px$ 比较，得

$$4p=-6, \quad \therefore\ p=-\frac{3}{2}.$$

故所求焦点的坐标为$\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$，准线方程为 $x=\frac{3}{2}$。

(2) 把抛物线 $x^2=\frac{1}{3}y$ 与标准形式 $x^2=4py$ 比较，得

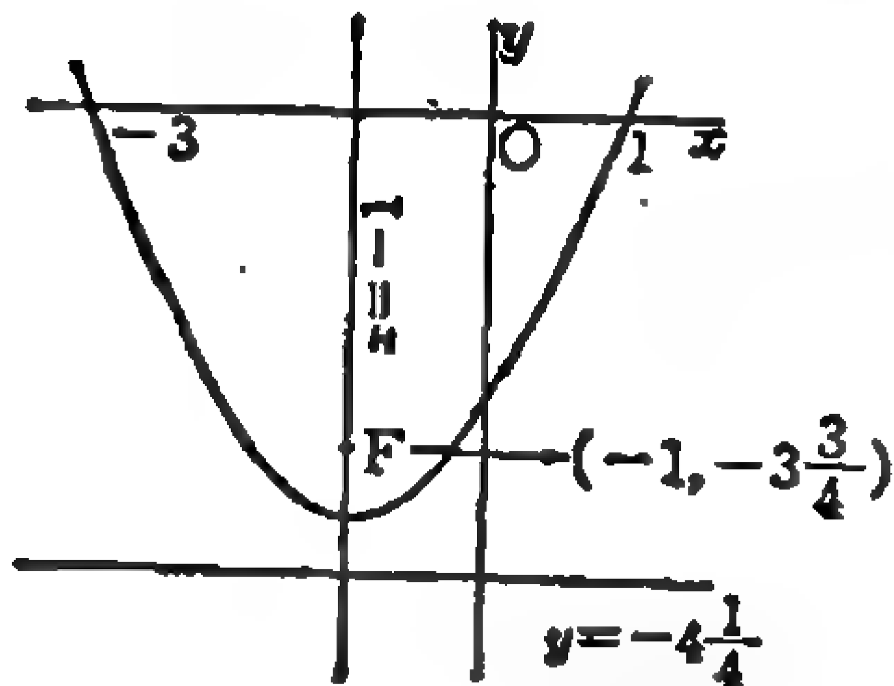
$$4p=\frac{1}{3}, \quad \therefore\ p=\frac{1}{12}.$$

故所求焦点的坐标为$\left(0, \frac{1}{12}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{1}{12}$。

3636. 求抛物线 $y=x^2+2x-3$ 的准线、

焦点和对称轴。

解 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$. 它的图象是把抛物线 $y=x^2$ 向左平移1，再向下平移4所得的抛物线。把抛物线 $y=x^2$ 和标准形式 $y=\frac{1}{4p}x^2$ 比较，得 $p=\frac{1}{4}$，所以其准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$，焦点为 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$，对称轴为 $x=0$. 因而 $y=x^2+2x-3$ 的准线为直线 $y=-\frac{17}{4}$，焦点为 $\left(-1,\ -\frac{15}{4}\right)$，对称轴为 $x=-1$.



3637. 求下列抛物线的准线、焦点和对称轴。

(1) $y=x^2+2x+1$, (2) $x^2=-9y$,

(3) $y=(2-x)(2+x)$,

(4) $y^2+2y=8x+3$.

解 (1) $y=x^2+2x+1=(x+1)^2$.

它的图象是把抛物线 $y=x^2$ 向左平移1所得到的抛物线。已知抛物线 $y=x^2$ 的准线、焦点、对称轴分别是

$$y=-\frac{1}{4},\ \left(0,\ \frac{1}{4}\right),\ x=0.$$

因此题设抛物线的准线、焦点和对称轴分别是

$$y=-\frac{1}{4},\ \left(-1,\ \frac{1}{4}\right),\ x=-1.$$

(2) $x^2=-9y$, $\therefore\ x^2=-4\times\frac{9}{4}y$.

这条抛物线的准线、焦点和对称轴分别是

$$y=\frac{9}{4},\ \left(0,\ -\frac{9}{4}\right),\ x=0.$$

(3) $y=(2-x)(2+x)=-x^2+4$.

它的图象是把抛物线 $y=-x^2$ 向上平移4而得到的抛物线。已知抛物线 $y=-x^2$ 的准线、焦点和对称轴分别是

$$y=\frac{1}{4},\ \left(0,\ -\frac{1}{4}\right),\ x=0.$$

因此题设抛物线的准线、焦点和对称轴分别是

$$y=\frac{17}{4},\ \left(0,\ \frac{15}{4}\right),\ x=0.$$

(4) $y^2+2y=8x+3$,

即
$$(y+1)^2=8\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

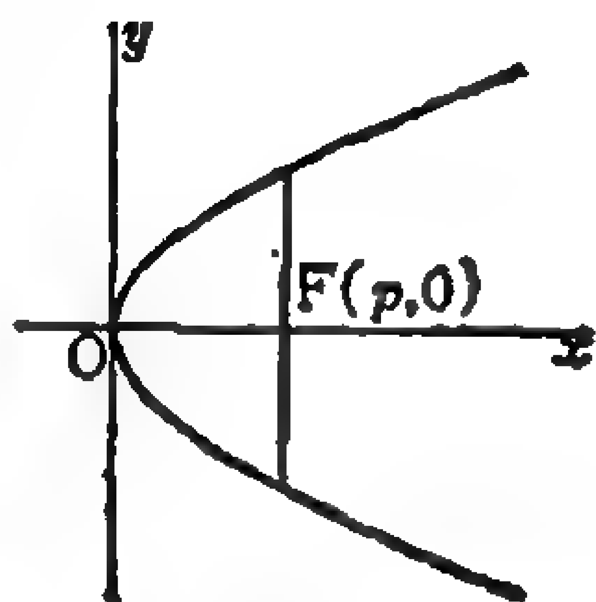
它的图象是把抛物线 $y^2=8x$ 向左平移 $\frac{1}{2}$，再向下平移1而得到的抛物线。已知抛物线 $y^2=8x=4\cdot2\cdot x$ 的准线、焦点和对称轴分别是

$$x=-2,\ (2,\ 0),\ y=0,$$

因此题设抛物线的准线、焦点和对称轴分别是

$$x=-\frac{5}{2},\ \left(\frac{3}{2},\ -1\right),\ y=-1.$$

3638. 求通过抛物线 $y^2=4px$ 的焦点且垂直于其对称轴的弦长。



解 抛物线 $y^2=4px$ 和弦 $x=p$ 交点的纵坐标满足 $y^2=4p^2$，即 $y=\pm2p$，所以该弦的长是 $4p$.

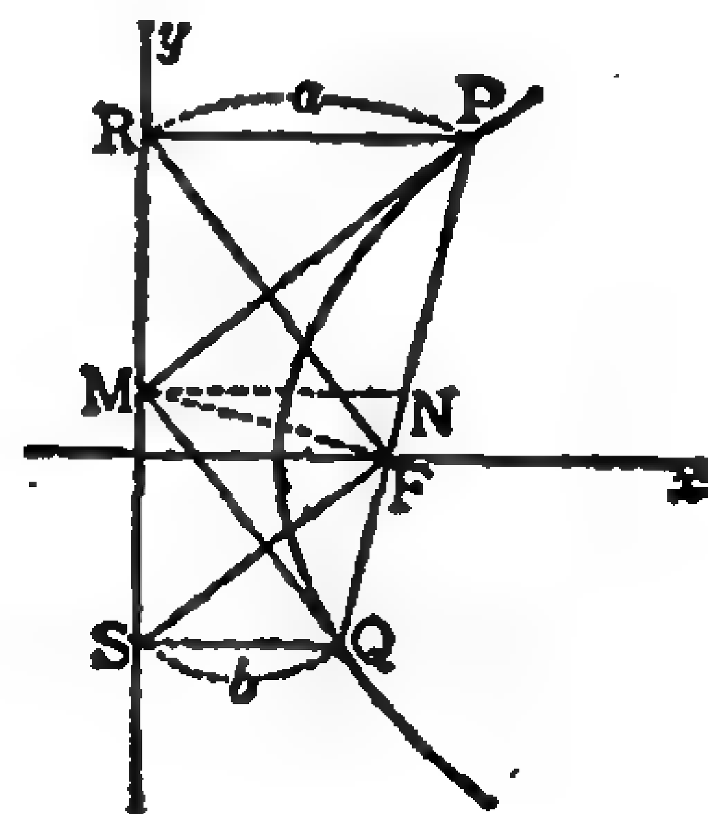
3639. 已知从过抛物线焦点 F 的弦 PQ 两端所作准线的垂线分别为 PR、QS，RS 的中点为 M。证明以下各点：

(1) $RF\perp SF$, (2) $RF\perp PM$,

(3) $PM\perp QM$,

(4) $PQ\perp MF$,

(5) 设 $PR=a$, $QS=b$, 试用 a、b 表示 MF 的长。



解 (1)

$\because\ PF=PR$,

$$\therefore\ \angle PFR=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle FPR).$$

$$\because\ QF=QS,$$

$$\therefore\ \angle QFS=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle FQS).$$

因而

$$\angle PFR+\angle QFS$$
$$=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle FPR+\angle FQS)$$
$$=90^\circ,$$

$$\therefore\quad \angle RFS=90°,$$

从而 $RF\perp SF$.

(2) 设 PQ 的中点为 N,

$$MN=\frac{1}{2}(PR+QS)=\frac{1}{2}PQ=PN.$$

由于 $MN\parallel PR$,

$$\therefore\quad \angle NPM=\angle NMP=\angle RPM.$$

故 PM 是等腰三角形 RPF 顶角的平分线,

$$\therefore\quad RF\perp PM.$$

(3) 完全和(2)类似

$$MN=NQ,$$

$$\angle NQM=\angle NMQ=\angle MQS.$$

故 QM 是等腰三角形 SQF 的顶角平分线,

$\therefore$ $SF\perp QM$, 且 $PM\perp RF$(由(2)).

$$\therefore\quad PM\perp QM.$$

(4) 在 $\triangle PRM$ 和 $\triangle PFM$ 中, $PR=PF$, $\angle RPM=\angle FPM$(由(2)), PM 公共.

$$\therefore\quad \triangle PRM\cong\triangle PFM,$$

因而 $\angle PFM=\angle PRM=90°$,

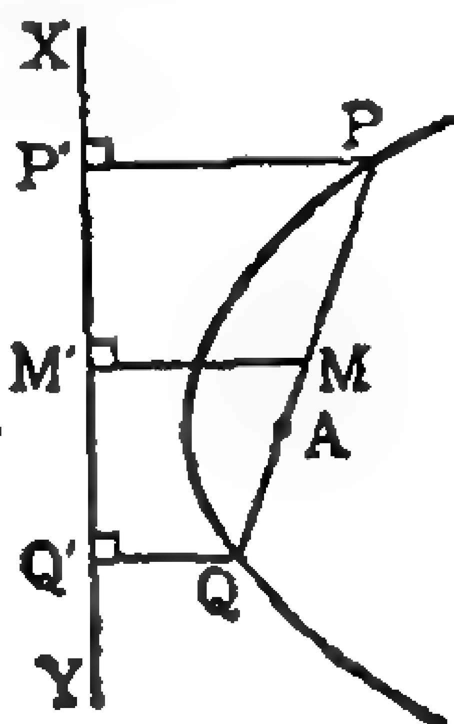
$$PQ\perp MF.$$

(5) $\angle PMQ=\angle R$(由(3)), $MF\perp PQ$(由(4)),

$$\therefore\quad MF^2=PF\cdot QF=PR\cdot QS=ab,$$

从而 $MF=\sqrt{ab}$.

3640. 证明: 以过抛物线焦点的弦为直径的圆和该抛物线的准线相切。



解 设 A 为抛物线的焦点, XY 为准线,则从抛物线上任一点 P 到 XY 的距离都等于 PA. 设过焦点 A 的任意弦为 PQ, 其中点为 M. 如从 P、Q、M 分别向 XY 引垂线 PP'、QQ'、MM',则

$$PP'+QQ'=2MM'. \quad ①$$

由于 $PP'=PA$, $QQ'=QA$,

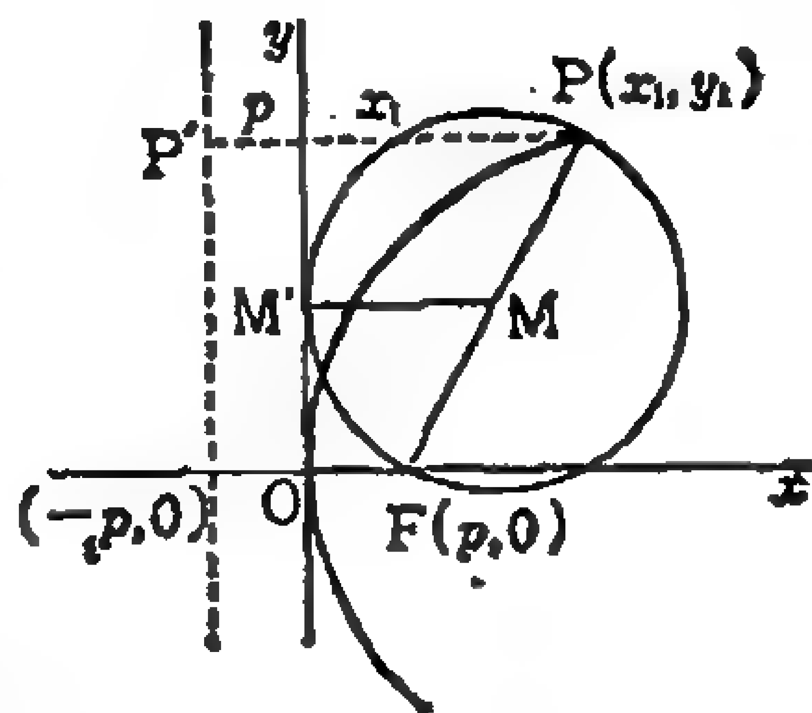
所以

$$PP'+QQ'=PA+QA=PQ. \quad ②$$

由①、②, 知 $PQ=2MM'$.

因此以 PQ 为直径的圆的半径是 MM', 又因 $MM'\perp XY$, 所以圆 M 和准线 XY 相切。

3641. 证明: 以抛物线 $y^2=4px$ $(p>0)$ 的焦点 $(p, 0)$ 和抛物线上的任意一点 $P(x_1, y_1)$ 为直径两端点的圆和 y 轴相切。



解 设抛物线为 $y^2=4px$, 焦点为 $F(p, 0)$, 抛物线上的点为 $P(x_1, y_1)$, 则 FP 的中点坐标为 $\left[\frac{1}{2}(x_1+p), \frac{1}{2}y_1\right]$,

从 P 向准线作垂线 PP', 则

$$FP=PP'=p+x_1.$$

又从 M 向 y 轴作垂线 MM', 则

$$MM'=\frac{1}{2}(p+x_1)=\frac{1}{2}FP.$$

因此以 M 为圆心、FP 为半径的圆和 y 轴相切。

3. 抛物线的切线、切点

3642. 求抛物线 $y^2=4px$ 上的点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线方程。

解 设过 $P(x_1, y_1)$ 的任意直线为

$$y-y_1=m(x-x_1), \quad ①$$

又

$$y^2=4px. \quad ②$$

由 ② 知 $x=\frac{y^2}{4p}$, 代入 ①, 则

$$my^2-4py+4py_1-4mpx_1=0.$$

由 $y_1^2=4px_1$, 上式可写成

$$my^2-4py+4py_1-my_1^2=0.$$

因为 $m\neq 0$, ① 和 ② 相切的条件是此方程的判别式 $D=0$, 即

$$4p^2-m(4py_1-my_1^2)=0,$$

$$m^2y_1^2-4mpy_1+4p^2=0,$$

$$\therefore\quad (my_1-2p)^2=0,$$

从而

$$m=\frac{2p}{y_1}. \quad ③$$

把 ③ 代入 ① 并整理,得所求切线方程为

$$yy_1=2p(x+x_1).$$

注 在 $x^2=4py$ 上的点 (x_1, y_1) 处的切线方程是

$$x_1x=2p(y+y_1).$$

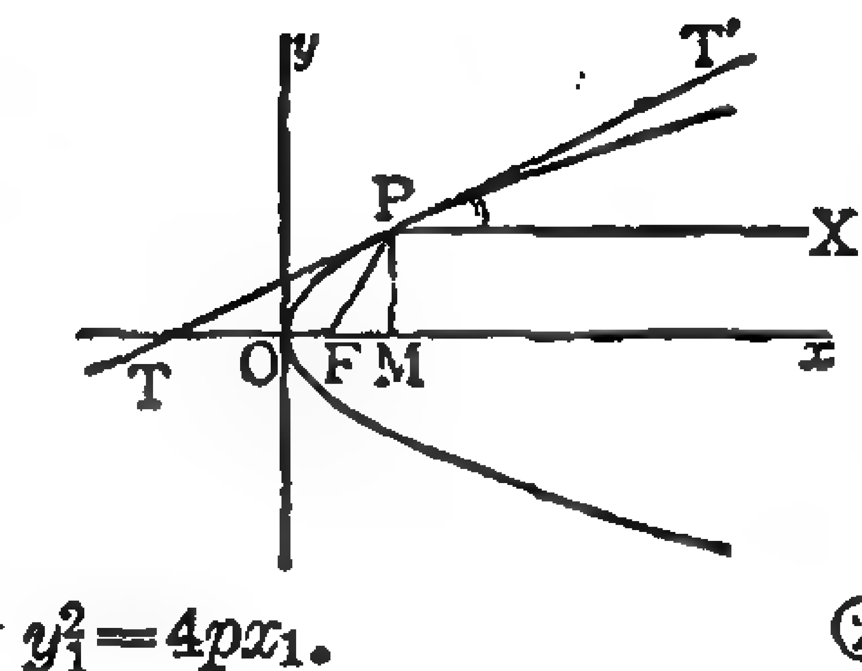
3643. 设抛物线 $y^2=4px$ $(p>0)$ 上的任意点为 $P(x_1, y_1)$, 焦点为 F. 过点 P 作平行于 x 轴的直线 PX 和直线 PF, 证明此两直线与点 P 处的切线的夹角相等。

解 抛物线 $y^2=4px$ 的焦点是 $F(p, 0)$,

所以

$$PF^2=(x_1-p)^2+y_1^2. \quad ①$$

又 P 是抛物线上的点，所以



$$y_1^2=4px_1. \quad ②$$

由①、②，

$$PF^2=(x_1-p)^2+4px_1=(x_1+p)^2. \quad ③$$

由上题知，在点 P 处的切线 PT 的方程为

$$y_1y=2p(x+x_1).$$

设 $y=0$，则 $x=-x_1$.

$$\therefore\ OT=|-x_1|=x_1 \quad (\because\ x_1>0),$$

因而 $FT=x+p$. 由此式和③，得

$$FT=PF,\ \therefore\ \angle TPF=\angle T.$$

又 $PX\parallel TO$，$\therefore\ \angle XPT'=\angle T$，

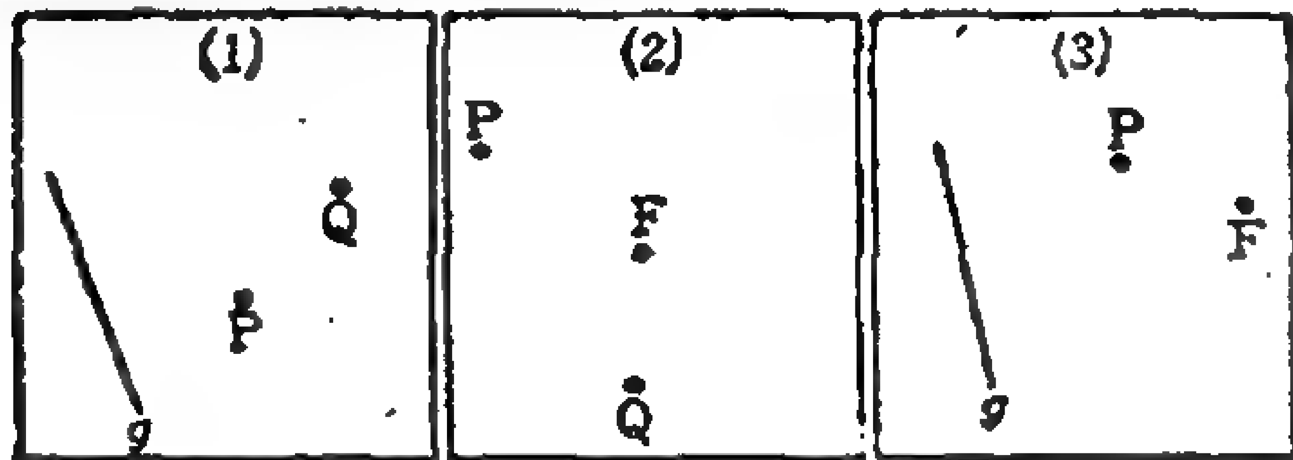
故 $\angle TPF=\angle XPT'$.

3644. 如下图. 直线 g，点 F 及 P、Q 分别是某抛物线的准线、焦点和该抛物线上的点.

(1) 由图(1)求抛物线的焦点(不证明)；

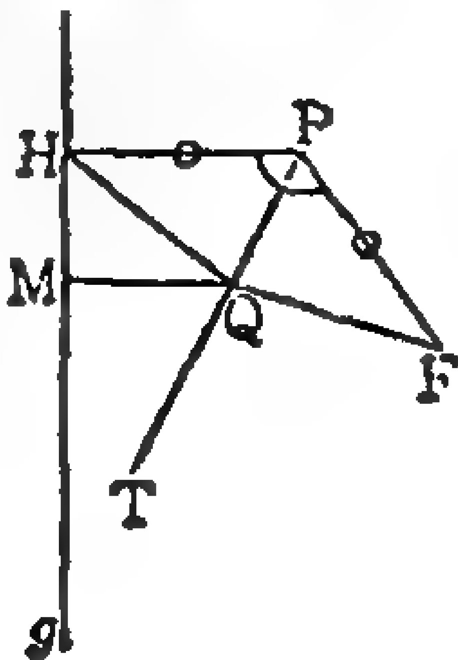
(2) 由图(2)求抛物线的准线(不证明)；

(3) 图(3). 设由 P 向 g 所引的垂线为 PH，$\angle FPH$ 的平分线为 PT，证明 PT 和这条抛物线相切于点 P.



解 (1) 从 P、Q 分别向 g 引垂线 PP'，QQ'. 以 P、Q 为圆心分别作半径为 PP'，QQ' 的圆，设其交点为 F，则 F 就是这条抛物线的焦点.

(2) 作以 P 为圆心、PF 为半径和以 Q 为圆心、QF 为半径的两个圆，这两个圆的外公切线就是这条抛物线的准线.



(3) P 是抛物线上的点、F 是焦点、g 是准线，所以 $PH=PF$. 在直线 PT 上取点 P 以外的点 Q，从 Q 向 g 作垂线 QM，则

$$QM<QH.$$

因为 $QH=QF$，

所以 $QM<QF$.

即在 PT 上，除点 P 外都不在这条抛物线上，所以 PT 和这条抛物线相切于 P.

3645. 求和抛物线 $y^2=8x$ 相切且平行于直线 $y=\frac{1}{2}x+5$ 的切线方程和切点的坐标.

解 直线 $y=\frac{1}{2}x+5$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$，设所求切线的方程为 $y=\frac{1}{2}x+b$. 因此方程

$$\left(\frac{1}{2}x+b\right)^2=8x \quad ①$$

具有等根，其判别式 D 为 0. 整理①得

$$x^2+4(b-8)x+4b^2=0,$$

$$D=[4(b-8)]^2-4\cdot 4b^2=0,$$

$$\therefore\ b=4.$$

代入①得 $x=8$. 以 $x=8$, $b=4$ 代入

$$y=\frac{1}{2}x+b$$

中得 $y=8$. 因此所求切线方程为

$$y=\frac{1}{2}x+4,$$

切点为(8, 8).

3646. 证明抛物线

$$y^2=4px \quad ①$$

的斜率为 m 的切线方程为

$$y=mx+\frac{p}{m}.$$

解 设①的斜率为 m 的切线方程为

$$y=mx+b. \quad ②$$

把②代入①，得

$$(mx+b)^2=4px,$$

$$m^2x^2+2bmx+b^2=4px,$$

即 $m^2x^2+2(bm-2p)x+b^2=0$.

由于②是①的切线，这个方程必须具有等根，所以

$$(bm-2p)^2-m^2b^2=0.$$

解之得 $b=\frac{p}{m}$.

故所求切线方程为

$$y=mx+\frac{p}{m}.$$

3647. 证明：在抛物线 $y=ax^2$ 上的点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线方程为

$$y=2ax_1x-y_1.$$

解　由问题 **3642** 注，在 $x^2=4py$ 上的点 (x_1, y_1) 处的切线方程为 $x_1x=2p(y+y_1)$。抛物线 $y=ax^2$ 即 $x^2=\frac{y}{a}$，把它与标准形式比较知 $4p=\frac{1}{a}$ 即 $p=\frac{1}{4a}$，把它代入就得到所求切线方程为

$$x_1x=\frac{1}{2a}(y+y_1),$$

即

$$y=2ax_1x-y_1.$$

3648. 证明：过抛物线 $y^2=4px$ 上的两点 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$ 的两条切线的交点坐标为 $\left[\frac{1}{4p}y_1y_2,\ \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right]$。

解　过抛物线 $y^2=4px$ 上的两点 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$ 的切线方程分别为

$$y_1y=2p(x+x_1),\ y_2y=2p(x+x_2).$$

消去 y，得两切线交点的横坐标：

$$x=\frac{y_1x_2-y_2x_1}{y_2-y_1}.$$

但

$$y_1^2=4px_1,\ y_2^2=4px_2,$$

$$\therefore\ x=\frac{y_1\cdot\frac{y_2^2}{4p}-y_2\cdot\frac{y_1^2}{4p}}{y_2-y_1}=\frac{y_1y_2}{4p}.$$

把这个 x 值无论代入那个切线方程都可得到两切线交点的纵坐标为

$$y=\frac{2p}{p_1}\left(\frac{y_1y_2}{4p}+\frac{y_1^2}{4p}\right)=\frac{1}{2}(y_1+y_2).$$

故两切线的交点坐标为

$$\left(\frac{y_1y_2}{4p},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

3649. 证明：过一点 $P(x_1, y_1)$ 向抛物线 $y^2=4px$ 可引两条切线。这两条切线的斜率，当点 P 在抛物线的外部时是不同的两个实数，当点 P 在抛物线上时是两个相同的实数，当点 P 在抛物线的内部时是虚数（虚直线）。

解　由问题 **3646** 知，抛物线 $y^2=4px$ 的斜率为 m 的切线方程是

$$y=mx+\frac{p}{m},\qquad ①$$

① 过点 $P(x_1, y_1)$ 时

$$y_1=mx_1+\frac{p}{m}.\qquad ②$$

从 ②，得

$$m^2x_1-my_1+p=0.\qquad ③$$

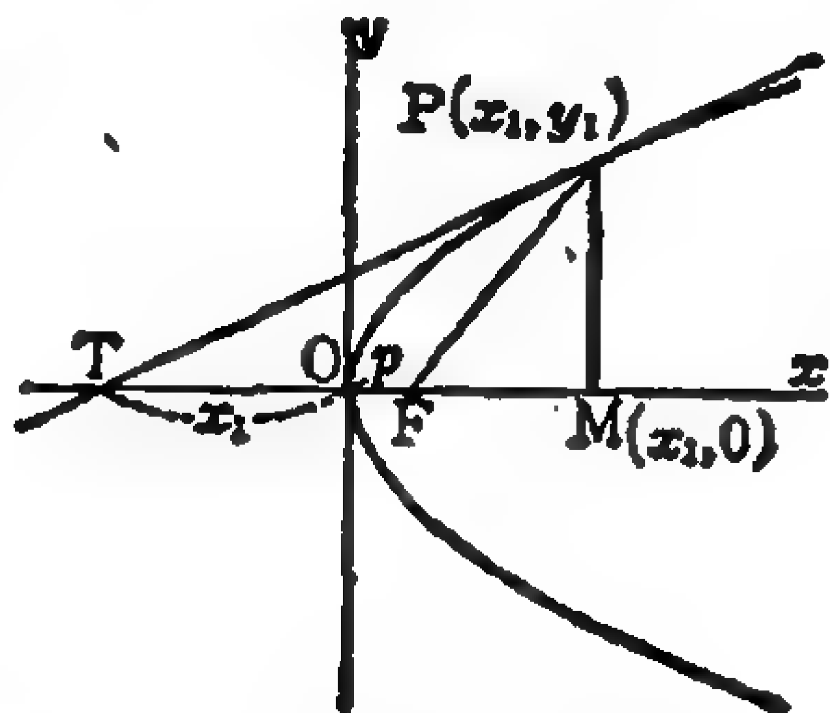
把从 ③ 得到的两个 m 值代入 ①，就得到过点 $P(x_1, y_1)$ 的两条切线方程。

我们考虑 ③ 的判别式。如果 $y_1^2-4px_1>0$，则从 ③ 可得到 m 的两个不同实数值；如果 $y_1^2-4px_1=0$，则从 ③ 可得到 m 的两个相等的实数值；如果 $y_1^2-4px_1<0$，则从 ③ 可得到 m 的两个虚数值。

但是 $y_1^2-4px_1>0$ 的条件是点 $P(x_1, y_1)$ 在抛物线的外部，$y_1^2-4px_1=0$ 的条件是点 P 在抛物线上，$y_1^2-4px_1<0$ 的条件是点 P 在抛物线的内部。因此当点 P 在抛物线外部时，从点 P 可引两条切线；当点 P 在抛物线上时，从点 P 可引一条切线；当点 P 在抛物线内部时，从点 P 不能引切线。

3650. 设抛物线 $y^2=4px\ (p>0)$ 上点 P 处的切线和 x 轴的交点为 T，F 是焦点，则

$$PF=TF.$$



解　从点 $P(x_1, y_1)$ 作 x 轴的垂线，M 为垂足，则点 M 的坐标是 $(x_1, 0)$。由于在点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线方程是 $y_1y=2p(x+x_1)$，在此式中令 $y=0$，则得 $x=-x_1$，这就是点 T 的横坐标。因为 O 是 MT 的中点且 $OF=p$，所以

$$PF^2=PM^2+FM^2=y_1^2+(x_1-p)^2$$
$$=y_1^2+x_1^2-2px_1+p^2.$$

把 $y_1^2=4px_1$ 代入，则

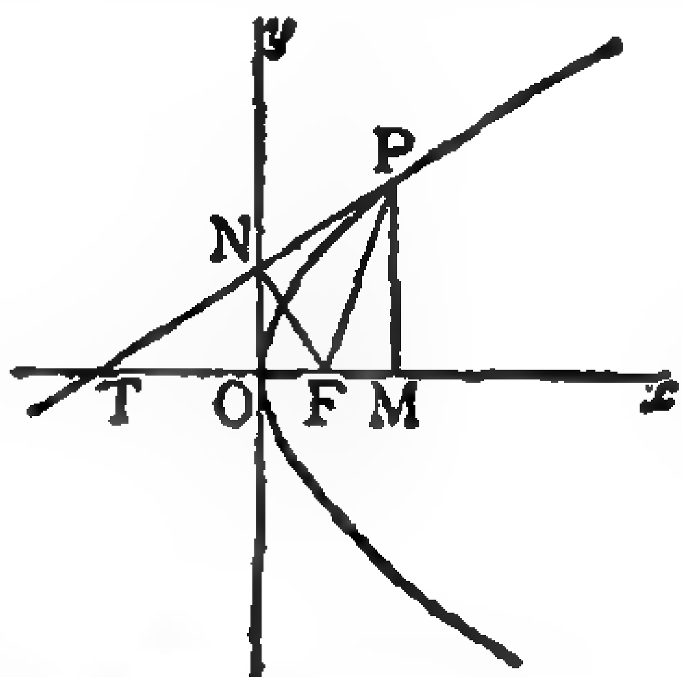
$$PF^2=(x_1+p)^2.$$

又

$$TF=OT+OF=x_1+p,$$

$$\therefore\ PF=TF.$$

3651. 已知抛物线 $y^2=4px$ 上点 P 处的切线 PT 和 y 轴相交于 N，抛物线的焦点为 F，证明直线 FN 和 PT 成直角。



解　从点 $P(x_1, y_1)$ 向 x 轴作垂线 PM，M 为垂足，则点 M 的坐标是 $(x_1, 0)$。又由上题知 $T(-x_1, 0)$，所以 O 是线段 TM 的中点。在 $\triangle TPM$ 中，

$MP \parallel ON$，因而 N 是线段 TP 的中点. 又由上题知 $\triangle FPT$ 是等腰三角形，所以

$$FN \perp TP.$$

3652. 过抛物线焦点 F 的任意弦 PQ 的两端分别作这条抛物线的切线，则这两条切线互相垂直。

解 设抛物线为 $y^2=4px$，焦点 F 的坐标为 $(p, 0)$。过焦点 F 的弦的两端 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$ 的切线方程分别是

$$y_1y=2p(x+x_1),\ y_2y=2p(x+x_2),$$

其斜率分别是 $\frac{2p}{y_1}$，$\frac{2p}{y_2}$。因而它们的积是 $\frac{4p^2}{y_1y_2}$。

把直线 PQ 的方程用 $y=m(x-p)$ 表示，此式和 $y^2=4px$ 消去 x，从所得的方程求得 y_1、y_2 的值。即

$$y=m\left(\frac{y^2}{4p}-p\right),$$

$$\therefore\quad my^2-4py-4p^2m=0,$$

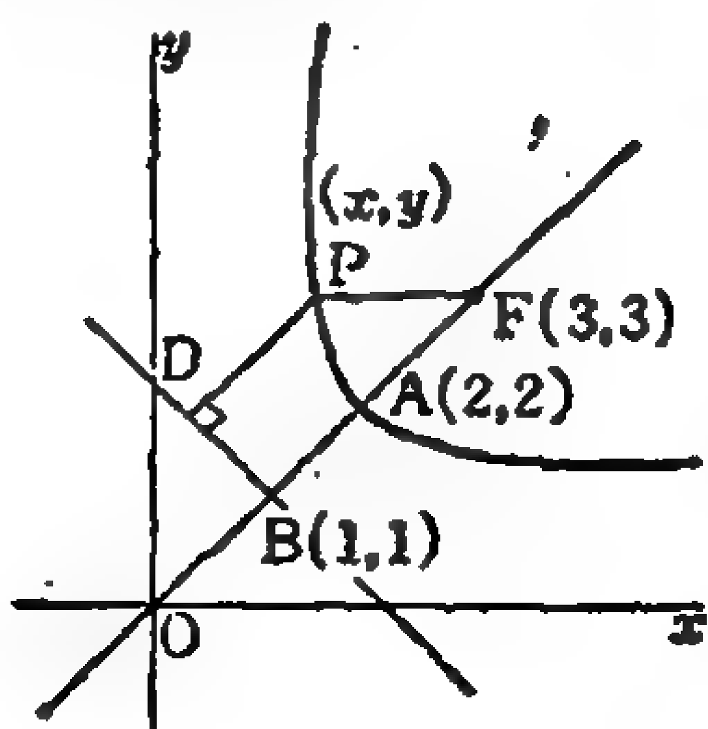
y_1、y_2 是此方程的两根，所以 $y_1y_2=-4p^2$。因而这两条切线的斜率之积为

$$\frac{4p^2}{y_1y_2}=-\frac{4p^2}{4p^2}=-1.$$

故这两条切线互相垂直.

4. 抛物线的方程

3653. 求以点 $(2, 2)$ 为顶点，点 $(3, 3)$ 为焦点的抛物线方程。



解 设 $A(2, 2)$ 为顶点，$F(3, 3)$ 为焦点，则准线 D 是过 FA 延长线的点 $B(1, 1)$ 且垂直于 AF 的直线，其方程是 $x+y-2=0$. 又因点 $P(x, y)$ 到 F 和 D 的距离相等，所以

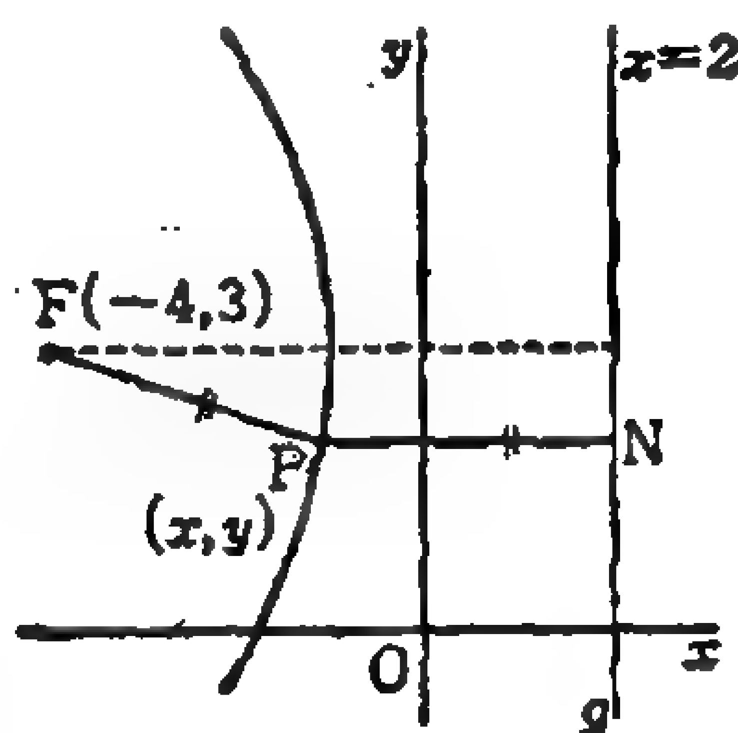
$$(x-3)^2+(y-3)^2=\frac{(x+y-2)^2}{2},$$

即 $\quad x^2-2xy+y^2-8x-8y+32=0.$

3654. 求以 $(-4, 3)$ 为焦点，直线 $x=2$ 为准线的抛物线方程。

解 设 $F(-4, 3)$，直线 $x=2$ 为 g，和 F、g 等距离的点为 $P(x, y)$，从 P 引 g 的垂线，垂足为 N，则

$$PF=PN.$$



即

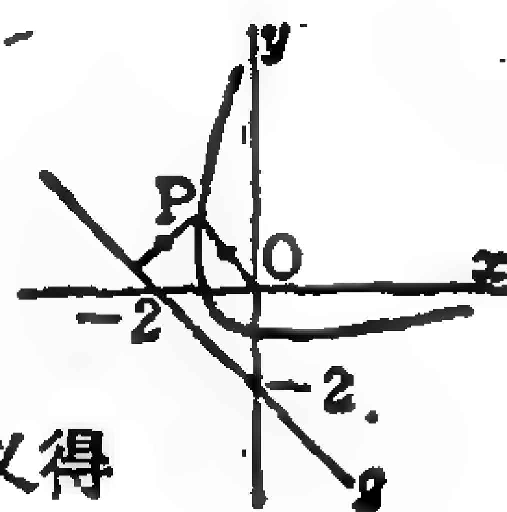
$$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}=|x-2|,$$

$$\therefore\ (x+4)^2+(y-3)^2=(x-2)^2,$$

即

$$y^2+12x-6y+21=0.$$

3655. 求以原点为焦点，直线 $x+y+2=0$ 为准线的抛物线方程。



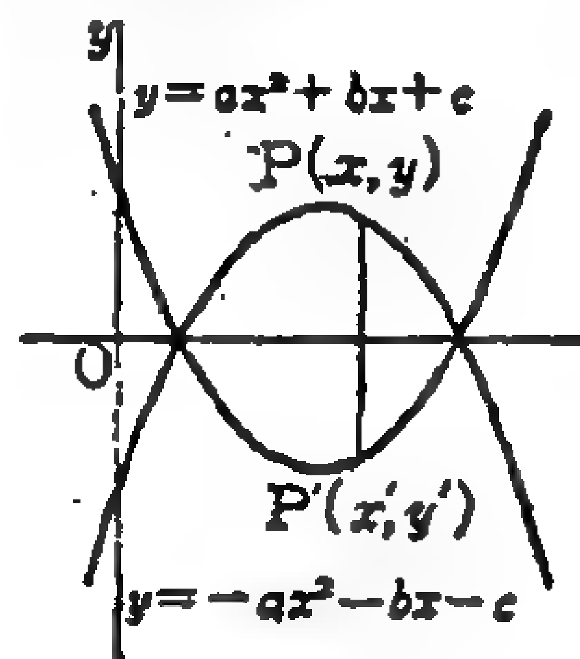
解 点 P 和原点的距离是 $\sqrt{x^2+y^2}$，点 P 和直线 $x+y+2=0$ 的距离是 $\frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$，根据抛物线定义得

$$x^2+y^2=\frac{(x+y+2)^2}{2},$$

即 $\quad x^2+y^2-2xy-4x-4y-4=0.$

这就是所求的抛物线方程.

3656. 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 关于 x 轴对称的图形的方程. 关于 y 轴对称呢？



解 设抛物线

$$y=ax^2+bx+c$$

上任意一点 $P(x, y)$ 关于 x 轴的对称点 P' 的坐标为 (x', y')，则

$$x'=x,\ y'=-y.$$

即抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的所有点 (x, y) 关于 x 轴对称点的坐标是 $(x, -y)$，因而所求抛物线方程是

$$-y=ax^2+bx+c$$

即 $\quad y=-ax^2-bx-c.$

同样，求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 关于 y 轴对称图形的方程可以把 (x, y) 换成 $(-x, y)$，因此得

$$y=a(-x)^2+b(-x)+c,$$

即 $\quad y=ax^2-bx+c.$

3657. 把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+5x-1$ 移动到和它关于 x 轴的对称位置时，求该曲线的方程。关于 y 轴对称呢？

解 由上题知，关于 x 轴对称时，方程为

$$-y=-\frac{1}{2}x^2+5x-1,$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{2}x^2-5x+1.$$

关于 y 轴对称时，其方程为

$$y=-\frac{1}{2}(-x)^2+5(-x)-1,$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}x^2-5x-1.$$

3658. 求把抛物线 $y=ax^2$ 移到和它关于直线 $y=x$ 的对称位置时该曲线的方程。

解 设抛物线 $y=ax^2$ 上任意点 $P(x, y)$ 关于直线 $y=x$ 对称点的坐标为 (x', y')，则

$$x'=y,\ y'=x.$$

因此曲线 $y=ax^2$ 移动到和它关于直线 $y=x$ 对称的位置时，该曲线的方程就是把原方程中 x、y 互换所得到的方程 $x=ay^2$ 即

$$y^2=\frac{1}{a}x.$$

3659. 求把抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 移动到和它关于直线 $y=-x$ 的对称位置时该曲线的方程。

解 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的任意点 $P(x, y)$ 关于直线 $y=-x$ 的对称点 P' 的坐标为 (x', y')，则 $x'=-y,\ y'=-x$。因此把方程 $y=ax^2+bx+c$ 中的 x 改写成 $-y$，y 改写成 $-x$，就得所求方程为

$$-x=a(-y)^2+b(-y)+c,$$

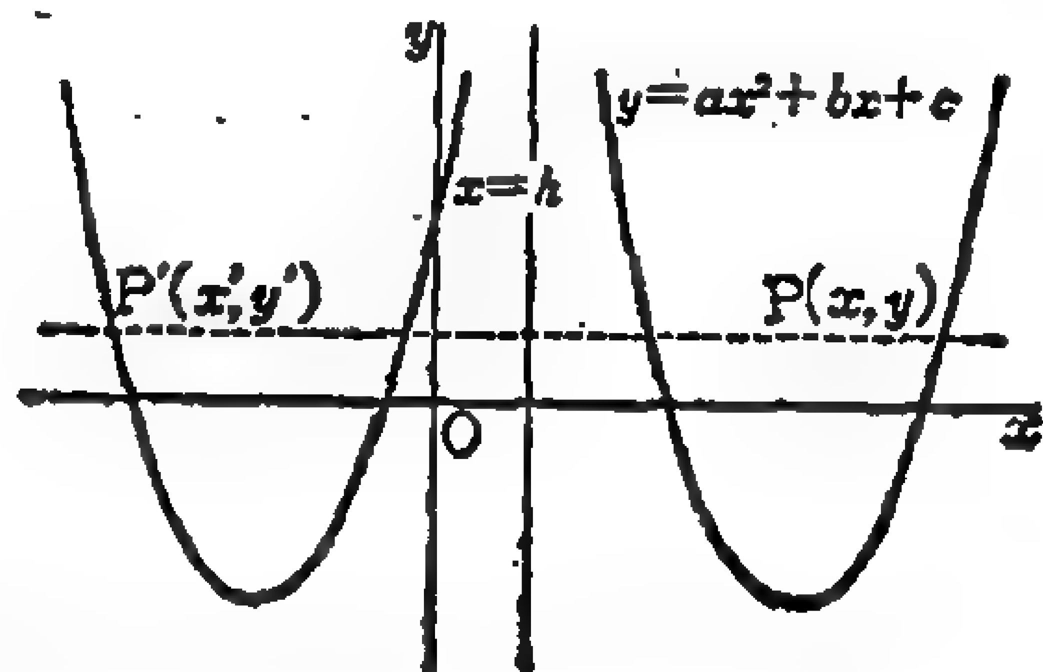
即 $$x=-ay^2+by-c.$$

3660. 把抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 分别作关于直线 $x=h$ 和 $y=k$ 的对称移动时，求曲线的方程。

解 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的任意点 $P(x, y)$ 关于直线 $x=h$ 的对称点 P' 的坐标为 (x', y')，则

$$x+x'=2h,\ y'=y,$$

即 $$x=2h-x',\ y=y'.$$



因此所求曲线方程是把原方程中 x 换成 $2h-x$ 所得到的方程，即

$$y=a(2h-x)^2+b(2h-x)+c.$$

同样，关于直线 $y=k$ 对称的曲线方程为

$$2k-y=ax^2+bx+c,$$

即 $$y=-ax^2-bx+2k-c.$$

3661. 求把抛物线 $y=3x^2-7x-5$，分别作关于直线 $x=4$ 和 $y=-5$ 的对称移动时所得曲线的方程。

解 由上题知，求抛物线 $y=3x^2-7x-5$ 作关于直线 $x=4$ 对称移动时所得曲线的方程，只须把原方程中的 x 改写成 $8-x$，于是得

$$y=3(8-x)^2-7(8-x)-5,$$

即 $$y=3x^2-41x+131.$$

由上题知，求抛物线作关于直线 $y=-5$ 对称移动所得曲线的方程，只须把原方程中的 y 改写成 $-10-y$，于是得

$$-10-y=3x^2-7x-5,$$

即 $$y=-3x^2+7x-5.$$

3662. 把抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 作关于点 (α, β) 的对称移动，求所得曲线的方程。

解 设点 $P(x, y)$ 关于点 (α, β) 的对称点 P' 的坐标为 (x', y')，则

$$x+x'=2\alpha,\ y+y'=2\beta.$$

即 $$x=2\alpha-x',\ y=2\beta-y'.$$

因此，曲线 $y=ax^2+bx+c$ 关于点 (α, β) 对称移动时所得曲线的方程是把原方程中的 x、y 分别改写成 $2\alpha-x$、$2\beta-y$ 所得的方程，于是得

$$2\beta-y=a(2\alpha-x)^2+b(2\alpha-x)+c,$$

即 $$y=-a(2\alpha-x)^2-b(2\alpha-x)+2\beta-c.$$

3663. 把抛物线 $y=3x^2-2x+5$ 移动到和它关于点 $(3, -2)$ 的对称位置，求所得曲线的方程。

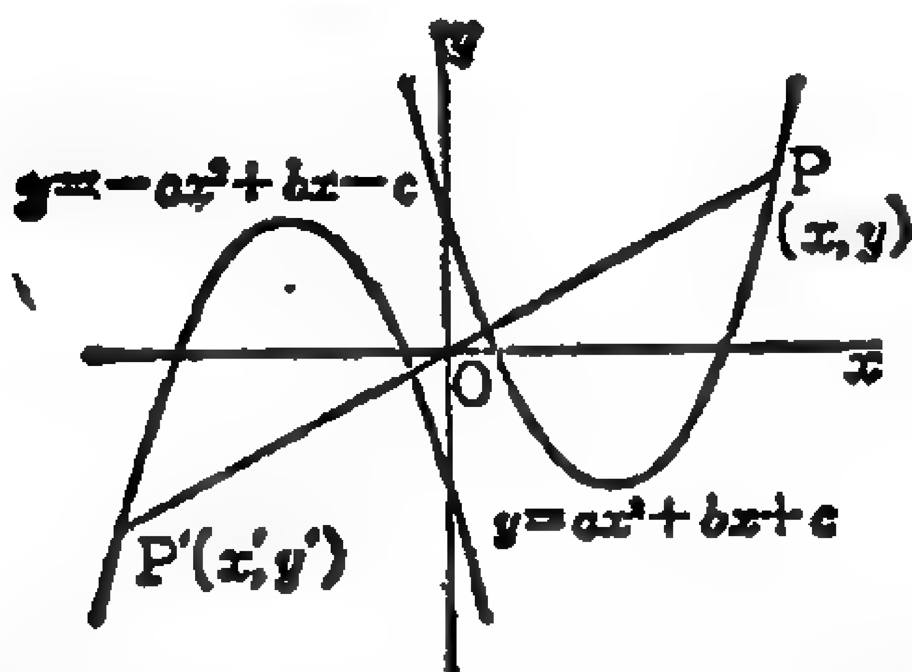
解 由上题知，分别把 $2\times3-x$ 和 $2\times(-2)-y$ 即 $6-x$，$-4-y$。代换原方程中的 x、y，

就可得所求方程为

$$-4-y=3(6-x)^2-2(6-x)+5,$$

即 $$y=-3x^2+34x-105.$$

3664. 把曲线 $y=ax^2+bx+c$ 移动到和它关于原点的对称位置，求所得曲线的方程.



解 设曲线 $y=ax^2+bx+c$ 上任意一点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点 P' 的坐标为 (x', y')，则

$$x'=-x,\ y'=-y.$$

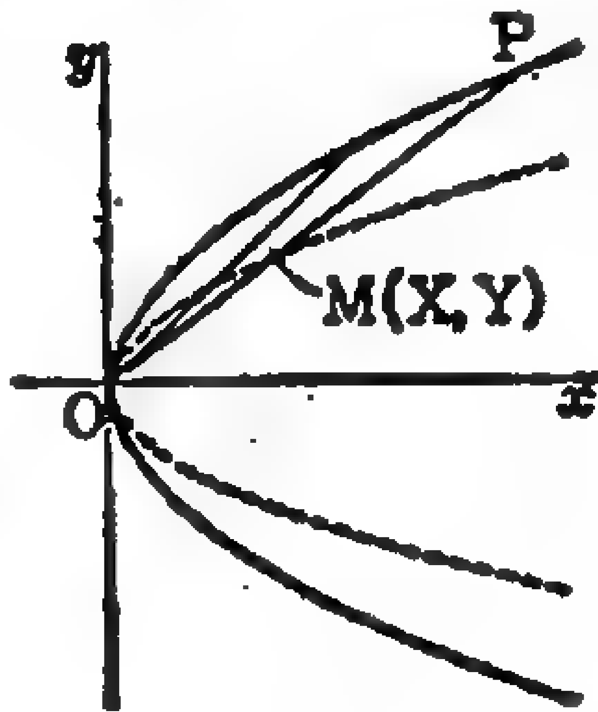
因此，所求曲线方程是把 $y=ax^2+bx+c$ 中的 x、y 分别换成 $-x$、$-y$ 所得的方程，即

$$-y=a(-x)^2+b(-x)+c,$$

$$\therefore\quad y=-ax^2+bx-c.$$

5. 轨迹

3665. 求过抛物线 $y^2=4px$ 顶点的弦中点的轨迹，并作出其图形.



解 设过抛物线 $y^2=4px$ 顶点 O 的任意弦 OP 中点 M 的坐标为 (X, Y)，则点 P 的坐标是 $(2X, 2Y)$. 因点 P 在抛物线 $y^2=4px$ 上，所以 X、Y 之间有 $4Y^2=8pX$，即 $Y^2=2pX$，这就是点 M 的轨迹方程. 如果把 (X, Y) 用 (x, y) 表示就是 $y^2=2px$. 它的图象与原抛物线的顶点和对称轴相同，且焦点到顶点的距离是 $\frac{p}{2}$，准线方程是 $x=-\frac{p}{2}$ 的抛物线.

3666. 求抛物线 $y^2=4px$ 的方向一定的弦 $y=mx+b$ ($m\neq0$, b 是任意数)，它的中点的轨迹.

解 抛物线 $y^2=4px$ 和弦 $y=mx+b$ (b 是参数) 的交点坐标是其方程的公共解. 所以交点的纵坐标满足

$$y^2=4p\cdot\frac{y-b}{m},$$

即

$$my^2-4py+4bp=0.$$

设此方程的两个根为 y_1、y_2，则该弦中点的纵坐标为

$$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{2p}{m}.$$

此式说明，虽 b 取不同的值，平行弦的位置可以改变，但是这些弦的中点的纵坐标总是定值. 因此平行弦中点的轨迹是平行 x 轴的直线 $y=\frac{2p}{m}$.

注 平行弦中点轨迹的直线叫做含有这些平行弦的抛物线的通径.

3667. 作抛物线 $y^2=4px$ 的相互垂直的两切线，求这两条切线交点的轨迹.

解 由问题 **3646** 知，抛物线 $y^2=4px$ 的相互垂直的两切线方程分别为

$$y=mx+\frac{p}{m}, \qquad ①$$

$$y=-\frac{1}{m}x-mp. \qquad ②$$

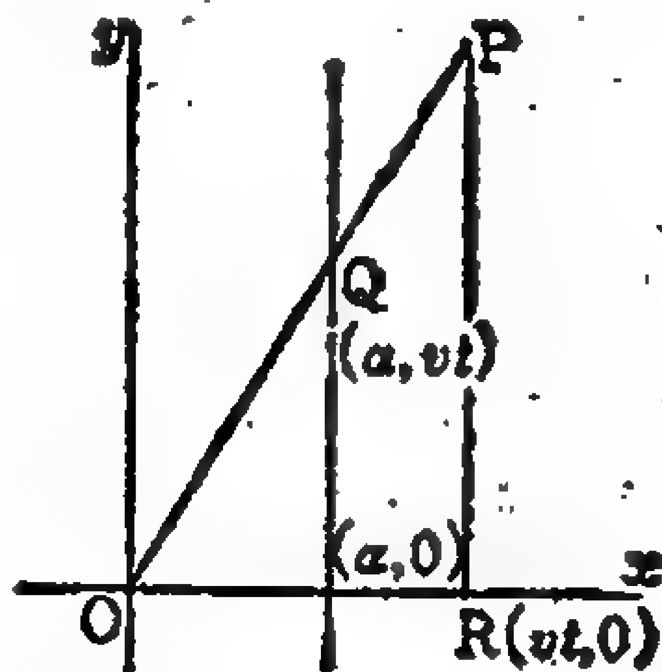
要求 ①、② 交点的轨迹，就要从 ①、② 中消去 m. 为此 ①－②，得

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)x+\left(m+\frac{1}{m}\right)p=0,$$

$$\therefore\quad x+p=0.$$

这就是所求的轨迹方程，是该抛物线的准线.

3668. 已知 x 轴上的动点 R 和定直线 $x=a$ 上的动点 Q. 运动开始时 R、Q 分别在 $(0, 0)$，$(a, 0)$. 当 R 向右方、Q 向上方同时以等速运动时，过 R 的垂线和 OQ 的交点 P 的轨迹是什么?



解 设 R、Q 的运动速度都是 v，R、Q 分别在 $(0, 0)$、$(a, 0)$ 时的时刻记为 0，则 t 时后 R、Q 的坐标分别是 $(vt, 0)$，(a, vt). OQ 的方程为

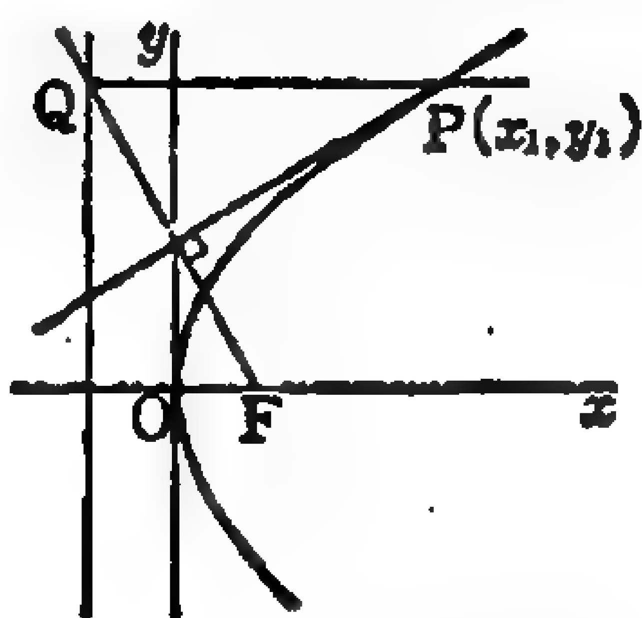
$$y=\frac{vt}{a}x. \quad ①$$

过 R 且垂直于 x 轴的直线方程为

$$x=vt. \quad ②$$

从①、②消去 vt，得 $y=\frac{x^2}{a}$. 这就是点 P 的轨迹方程，它是一条抛物线。

3669. 从焦点 F 引抛物线上点 P 处的切线的垂线，过 P 引平行于 x 轴的直线，求此二直线的交点 Q 的轨迹。



解 抛物线 $y^2=4px$ 上点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线方程为

$$y_1y=2p(x+x_1),$$

从焦点 $F(p, 0)$ 作这条切线的垂线的方程为

$$y=-\frac{y_1}{2p}(x-p), \quad ①$$

过点 P 且平行于 x 轴的直线方程为

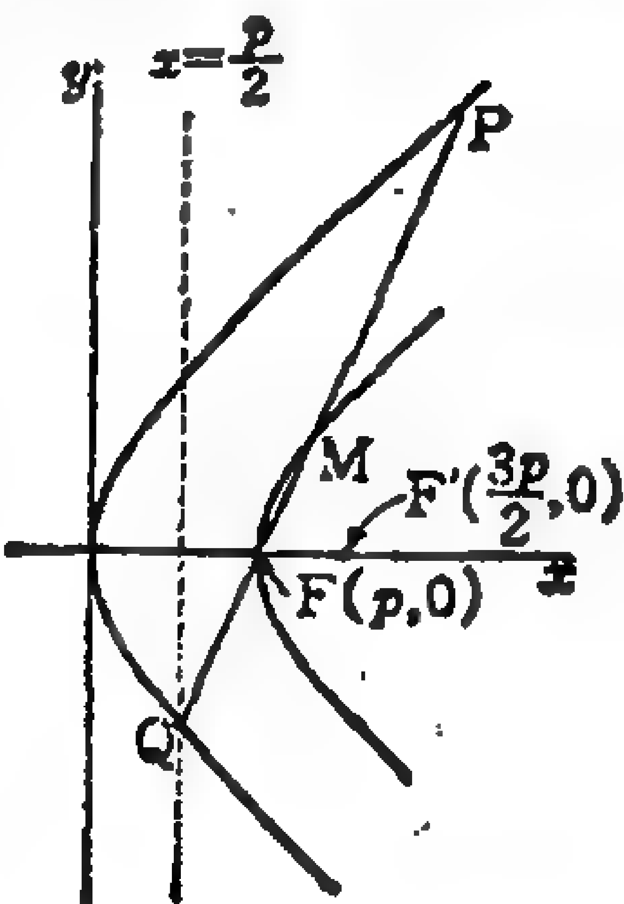
$$y=y_1. \quad ②$$

故直线①、②的交点 Q 的轨迹方程就是从方程①、②中消去 y_1 所得的方程

$$2p=-(x-p), \quad 即 \quad x=-p.$$

它表示该抛物线的准线。

3670. 已知点 F 是抛物线 $y^2=4px$ 的焦点，过 F 作弦 PQ，求 PQ 中点 M 的轨迹并作图。



解 设过抛物线 $y^2=4px$ 焦点 $F(p,0)$ 的弦的方程为

$$y=m(x-p),$$

则 P、Q 的坐标是下列联立方程的解。

$$y^2=4px, \quad ①$$
$$y=m(x-p). \quad ②$$

从①把 x 代入②，得

$$y=m\cdot\left(\frac{y^2}{4p}-p\right),$$

即 $$my^2-4py-4pm=0.$$

设其两根为 y_1、y_2，则

$$y_1+y_2=\frac{4p}{m}.$$

因此 PQ 中点 M 的纵坐标为

$$y=\frac{2p}{m}. \quad ③$$

又从②把 y 代入①，得

$$m^2(x-p)^2=4px,$$

即 $$m^2x^2-2p(m^2+2)x+m^2p^2=0.$$

设其两根为 x_1、x_2，则

$$x_1+x_2=\frac{2p(m^2+2)}{m^2}.$$

因此点 M 的横坐标为

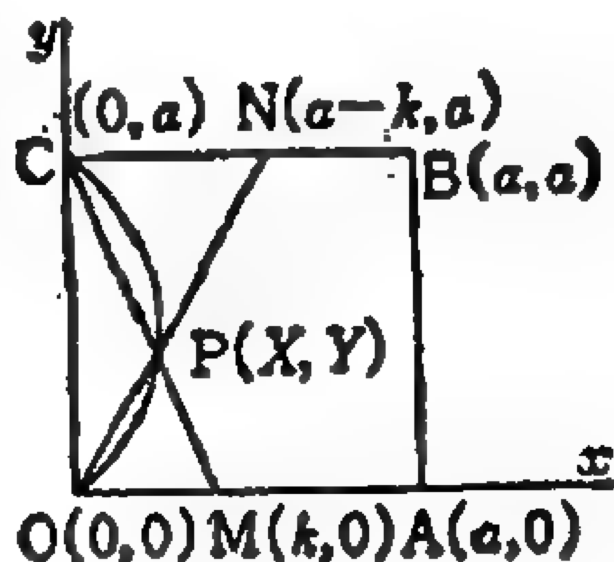
$$x=\frac{p(m^2+2)}{m^2}. \quad ④$$

从③、④消去 m，得

$$y^2=2p(x-p). \quad ⑤$$

⑤就是 PQ 中点 M 的轨迹方程．所以点 M 的轨迹是顶点在原抛物线的焦点、与原抛物线共对称轴、从焦点到顶点的距离是 $\frac{p}{2}$、焦点为 $\left(\frac{3}{2}p, 0\right)$、准线方程是 $x=\frac{p}{2}$ 的抛物线。

3671. 正方形的四个顶点分别为 $O(0,0)$，$A(a, 0)$，$B(a, a)$，$C(0, a)$．在边 OA 和 BC 上分别取 M、N，使 $OM=BN$．设 ON 和 CM 的交点为 $P(X, Y)$，当点 M 从 O 向 A 运动时，求点 P 的轨迹方程并作出其略图。



解 设 $OM=BN=k$，则由 $M(k, 0)$、$N(a-k,a)$ 知 CM 的方程为

$$\frac{x}{k}+\frac{y}{a}=1, \quad ①$$

ON 的方程为

$$y=\frac{a}{a-k}x. \quad ②$$

因 P 是 CM 和 ON 的交点，所以联立方程①、②的解是 X、Y，

$$\therefore \quad X=\frac{k(a-k)}{a}, \; Y=k.$$

消去 k 得所求轨迹方程为

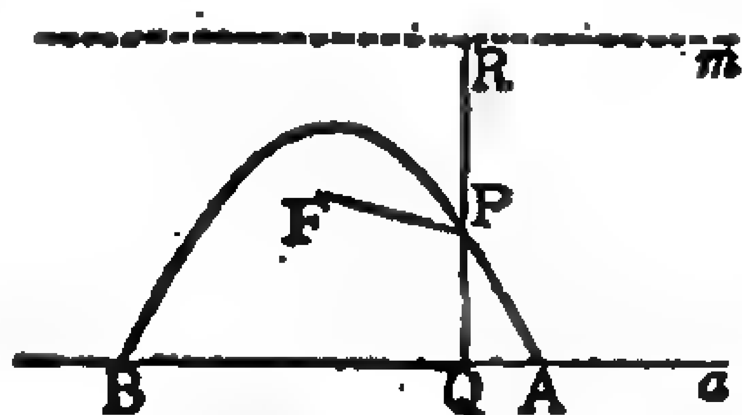
$$aX=Y(a-Y),$$

即 $$\left(Y-\frac{a}{2}\right)^2=-a\left(X-\frac{a}{4}\right),$$

它表示顶点为 $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right)$ 的抛物线，所求轨迹

就是这条抛物线在正方形内的部分.

3672. 已知一点 F 和直线 a,在直线 a 上含有点 F 的一侧,求与点 F 及直线 a 的距离之和等于 d 的点的轨迹.

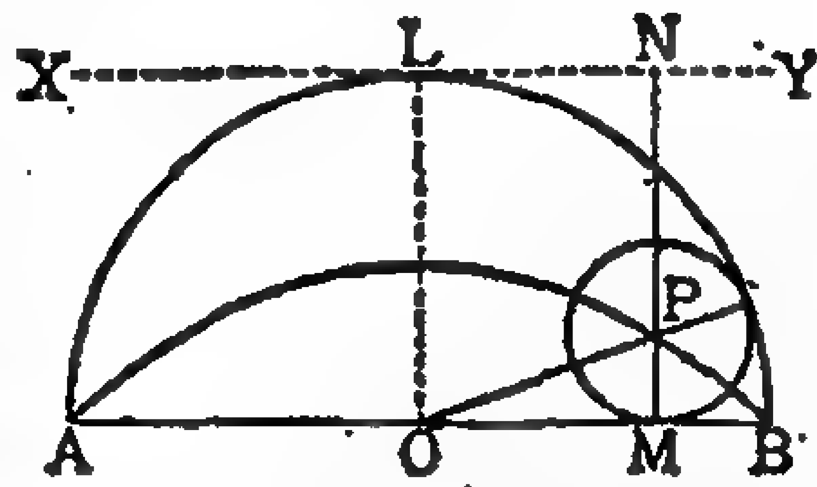


解 设适合条件的点为 P, 过 P 作直线 a 的垂线 PQ,Q 为垂足,则 $FP+PQ=d$. 在直线 a 上含有 F 的一侧,作和直线 a 平行且和直线 a 的距离为 d 的直线 m. 设 QP 的延长线和 m 的交点为 R, 则

$$PR=QR-PQ=d-PQ=PF.$$

这就是说,从 P 到直线 m 的距离 PR 和到定点 F 的距离 PF 相等,所以点 P 在以 F 为焦点,m 为准线的抛物线上. 因此所求的轨迹就是这条抛物线.

3673. 如下图. 内切于半圆 $AOBL$ 的圆的圆心 P 的轨迹是什么? (不用坐标法时可考虑在 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 L 处作切线)



解 设圆 O 的半径为 r, 过弧 AB 的中点 L 作直径 AB 的平行线 XY. 从 P 向 AB、XY 引垂线,其垂足分别为 M、N, 则 $OP=PN$. 故 P 在以 O 为焦点、以 XY 为准线的抛物线夹在平行直线 AB 和 XY 之间的弧 APB 上.

反过来,取这条弧上的任意点 P, 画以 P 为圆心且切于 AB 的圆,设切点为 M,则 $OP=r-PM$, 因而圆 P 也内切于圆 O. 即圆 P 内切于半圆 $AOBL$.

因此所求的轨迹是以 O 为焦点、XY 为准线的抛物线夹在 AB 和 XY 之间的弧.

6. 无理方程、无理不等式的应用

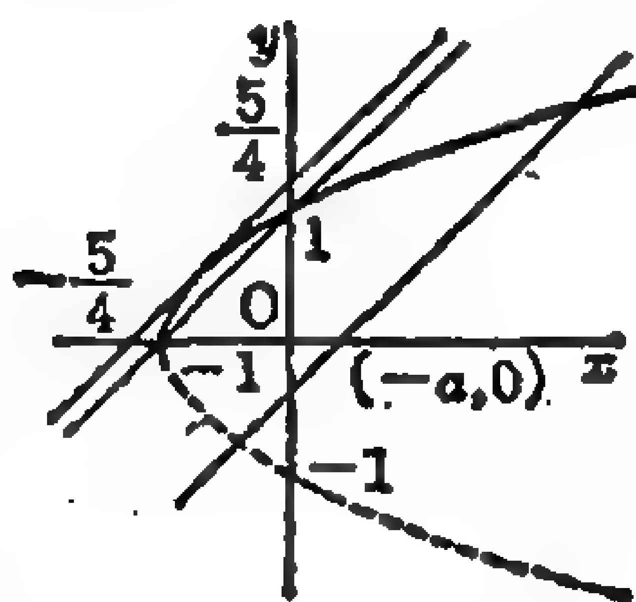
3674. 对于函数 $y=\sqrt{x+1}$ 和 $y=x+a$(a 为定数),

(1) 作出它们的图象;

(2) 指出这些图象的名称;

(3) 说明: 当 a 值变化时两图象交点个数的变化.

解 (1)、(2) $y=\sqrt{x+1}$ 的图象是顶点在$(-1,\ 0)$, 对称轴是 x 轴, 开口向右的抛物线 $y^2=x+1$ 的上半部分. $y=x+a$ 的图象是和 x 轴的交点为 $(-a,\ 0)$, 倾角为 45° 的直线.



(3) 求曲线 $y=\sqrt{x+1}$ 和 $y=x+a$ 交点的坐标,解此两联立方程. 从两式消去 y, 得

$$x+a=\sqrt{x+1},$$

其中 $x+1\geqq 0$ 即 $x\geqq -1$,且 $x\geqq -a$. 两边平方,

$$x^2+2ax+a^2=x+1,$$

即 $$x^2+(2a-1)x+a^2-1=0.$$

此方程有实数解的条件是

$$(2a-1)^2-4(a^2-1)\geqq 0,$$

解之得 $a\leqq \frac{5}{4}$. 由于直线 $y=x+a$ 和 x 轴的交点是$(-a,\ 0)$,如图讨论于下:

如果 $-a<-\frac{5}{4}$ 即 $a>\frac{5}{4}$, 则直线和抛物线上半部没有公共点; 如果 $-a=-\frac{5}{4}$ 即 $a=\frac{5}{4}$, 则直线与抛物线上半部相切; 如果 $-\frac{5}{4}<-a\leqq -1$ 即 $1\leqq a<\frac{5}{4}$,则直线和抛物线上半部有两个交点; 如果 $-a>-1$ 即 $a<1$,则直线和抛物线上半部交于一点.

这些关系可用下表列出:

a 的 值	$a>\frac{5}{4}$	$a=\frac{5}{4}$	$1\leqq a<\frac{5}{4}$	$a<1$
交点数	无	1(相切)	2	1

3675. (1) 作函数 $y=x^2-x-2$ 及 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的图象.

(2) 从图象观察方程

$$x^2-x-2=\sqrt{a^2-x^2} \qquad ①$$

的根,其个数是

$0<a<1$	$1\leqq a<2$	$2\leqq a$
[ ]个	[ ]个	[ ]个

(3) 特别地,当 $a=2$ 时,方程 ① 变形为

$$(x-2)(x+1)=\sqrt{(2-x)(2+x)}.$$

满足此方程的实根是 $x=$[ ]。

(4) 适合不等式

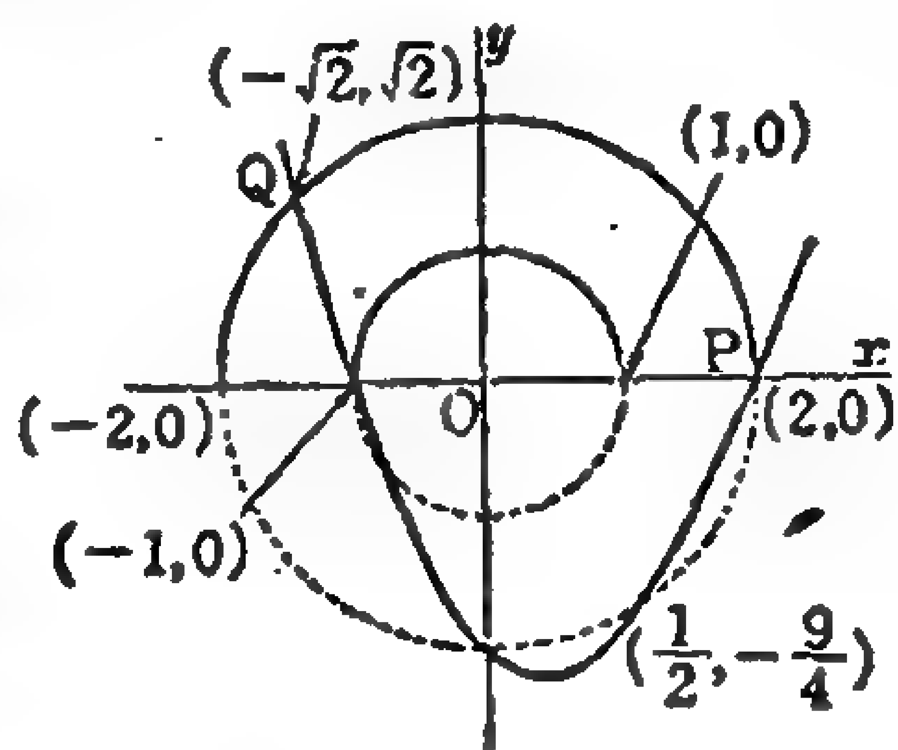
$$x^2-x-2>\sqrt{4-x^2}$$

的 x 值的范围是[ ]$<x<$[ ]。

解 (1) 把函数 $y=x^2-x-2$ 变形为

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}.$$

它的图象是顶点为$\left(\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$，直线 $x=\frac{1}{2}$ 为对称轴，开口向上的抛物线。它和 x 轴的交点是(2, 0)，(−1, 0)。



把方程 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的两边平方，得

$$y^2=a^2-x^2 \quad 即 \quad x^2+y^2=a^2.$$

因此 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的图象是以原点为圆心，a 为半径的圆在 x 轴的上半部分。该半圆和 x 轴的交点是 $(a, 0)$ 和 $(-a, 0)$。

(2) 从图象可以看出方程

$$x^2-x-2=\sqrt{a^2-x^2}$$

的实根个数：

当 $0<a<1$ 时，是 0 个；当 $1\leq a<2$ 时，是 1 个；当 $a\geq 2$ 时，是 2 个。如下表：

$0<a<1$	$1\leq a<2$	$2\leq a$
0 个	1 个	2 个

(3) 当 $a=2$ 时，

$$x^2-x-2=\sqrt{4-x^2}.$$

即 $(x-2)(x+1)=\sqrt{(2+x)(2-x)}$，

$$\therefore \quad (x-2)^2(x+1)^2=(2+x)(2-x),$$

$$(x-2)[(x-2)(x+1)^2+(2+x)]=0,$$

整理，得 $x(x-2)(x^2-2)=0$.

$$\therefore \quad x=0,\ x=2,\ x=\sqrt{2},\ x=-\sqrt{2}.$$

经检验，$x=0$、$x=\sqrt{2}$ 是增根，因此方程的根是 $x=2$，$x=-\sqrt{2}$。如图。它们是点 P、Q 的横坐标。

(4) 适合不等式 $x^2-x-2>\sqrt{4-x^2}$ 的 x 值的范围是，使半圆 $y=\sqrt{4-x^2}$ 在抛物线 $y=x^2-x-2$ 下面的 x 值。所以

$$-2<x<-\sqrt{2}.$$

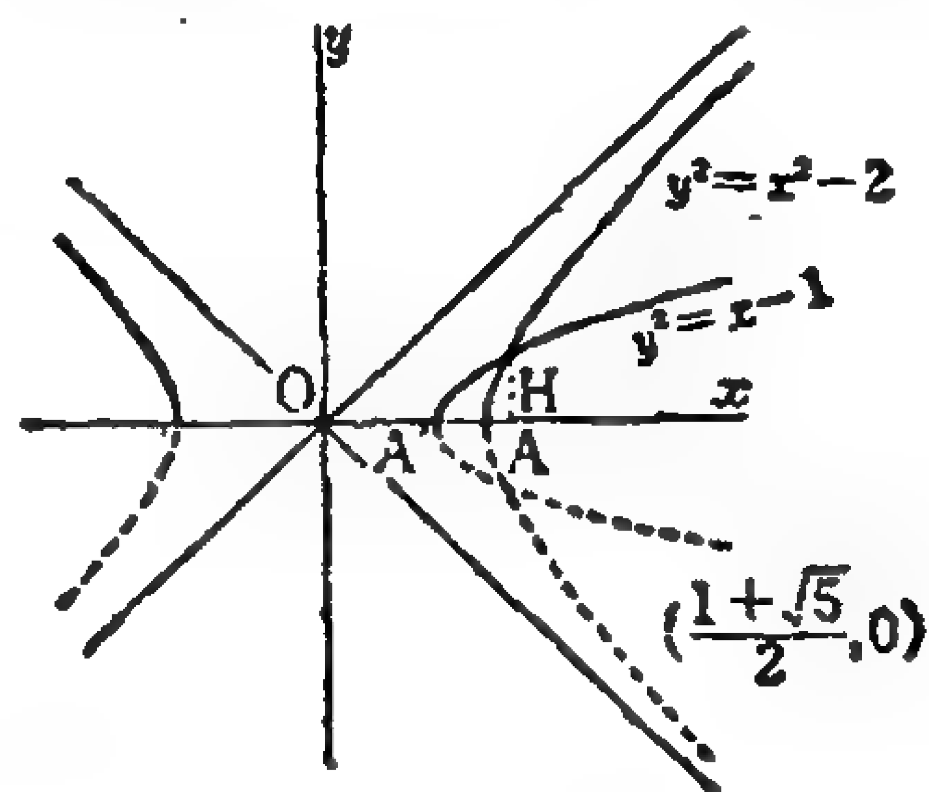
3676. (1) 在同一坐标系里，作出两个函数

$$y=\sqrt{x-1}$$

及

$$y=\sqrt{x^2-2}$$

的图象。



(2) 解 $\sqrt{x^2-2}>\sqrt{x-1}$.

解 设 $y=\sqrt{x^2-2}$, ①

$y=\sqrt{x-1}$. ②

(1) 把①两边平方，$y^2=x^2-2$，即

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1.$$

所以①的图象是顶点为$(\sqrt{2}, 0)$、$(-\sqrt{2}, 0)$，以 x 轴为实轴的双曲线 $y\geq 0$ 的部分。

又 $y=\sqrt{x-1}$ 即 $y^2=x-1$，

所以②的图象是顶点在(1, 0)，对称轴是 x 轴的抛物线 $y\geq 0$ 的部分。

(2) 在①、②同时成立的范围，即 $x>\sqrt{2}$，解不等式

$$\sqrt{x^2-2}>\sqrt{x-1},$$

$$x^2-2>x-1, \quad 即 \quad x^2-x-1>0.$$

$$\therefore \quad \left(x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)>0.$$

由于

$$x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}>0,$$

$$\therefore \quad x>\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

3677. 用图象法解下列不等式。

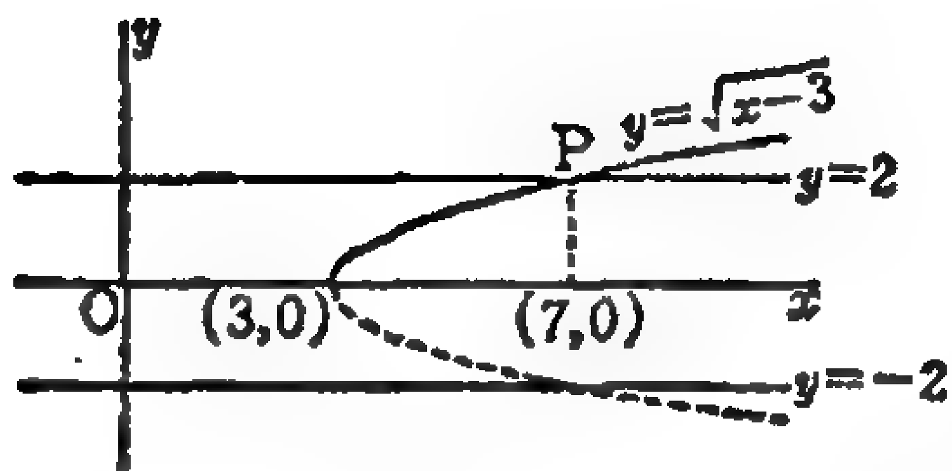
(1) $\sqrt{x-3}<2$, (2) $\sqrt{x-3}>2$,

(3) $\sqrt{x-3}<-2$, (4) $\sqrt{x-3}>-2$.

解 (1) $y=\sqrt{x-3}$ 的图象是以(3, 0)为顶点，x 轴为对称轴的抛物线的上半部分。观察图象可知它和直线 $y=2$ 交点 P 的横坐标是 $x=7$。故适合不等式(1)的 x 值在 3 和 7 之间，即 $3\leq x<7$。

(2) 同样可得 $x>7$。

(3) 根据算术根概念 $\sqrt{x-3}\geq 0$，无论 x 取



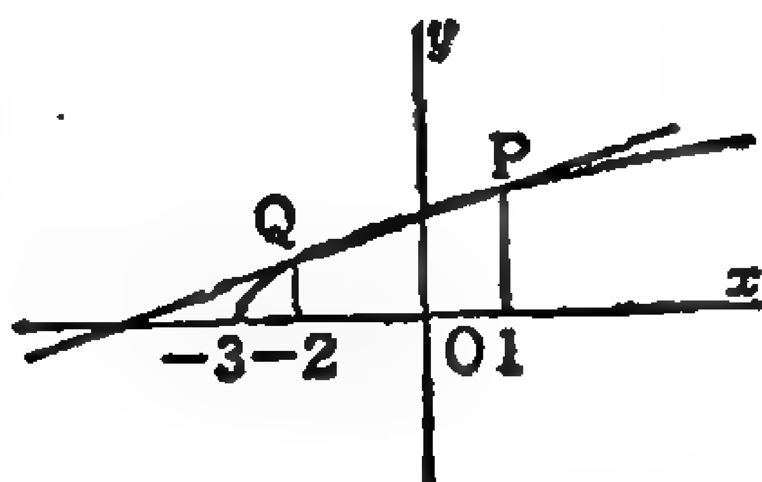
何值 $\sqrt{x-3}<-2$ 不能成立，所以它无解。

(4) $\sqrt{x-3}>-2$，当 $x\geqq3$ 时总是成立的，所以它的解是 $x\geqq3$。

3678. 作函数 $y=\sqrt{x+3}$ 的图象，并用它解不等式

$$\sqrt{x+3}<\frac{x+5}{3}.$$

解 $y=\sqrt{x+3}$ 的图象是抛物线 $y^2=x+3$ 的上半部分。这条抛物线和直线 $y=\frac{x+5}{3}$ 的交点的横坐标满足方程



$$\sqrt{x+3}=\frac{x+5}{3}.$$

两边平方

$$x+3=\frac{1}{9}(x^2+10x+25),$$

$$9x+27=x^2+10x+25,$$

$$x^2+x-2=0,$$

$$(x+2)(x-1)=0,$$

$$\therefore\quad x=1,\ x=-2.$$

故 P、Q 的横坐标分别是 1、−2，因而不等式的解为

$$x>1\quad 和\quad -3\leqq x<-2.$$

3679. 为了使抛物线 $y_1=\sqrt{x+3}$ 和直线 $y_2=3-x$ 之间有 $y_1<y_2$ 的关系，x 的取值范围怎样?

解 (i) 用计算的方法。

在 $\sqrt{x+3}<3-x$ 中，因 $\sqrt{x+3}$ 是实数，须 $x+3\geqq0$ 即 $x\geqq-3$。又因 $\sqrt{x+3}$ 是非负数，可知 $3-x\geqq0$ 即 $x\leqq3$。因此这个不等式在 $-3\leqq x\leqq3$ 的范围内讨论。

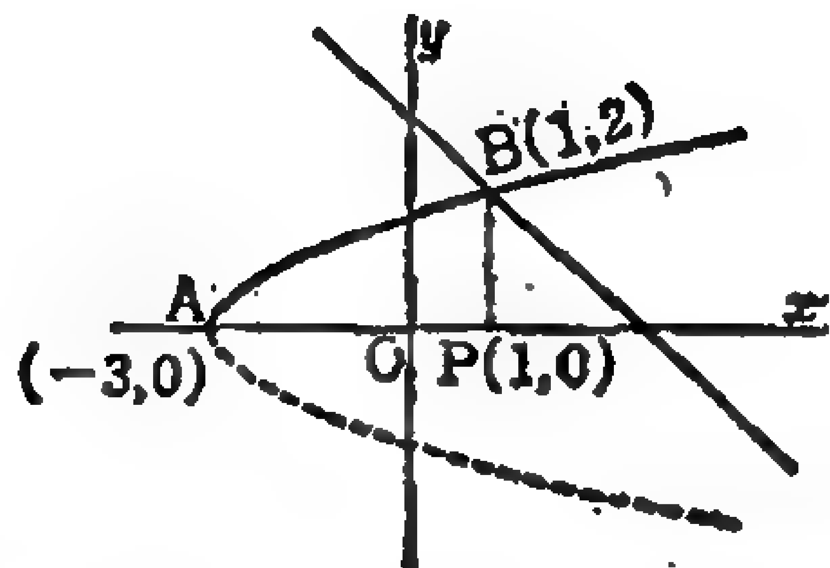
两边平方，

$$x+3<9-6x+x^2,\ x^2-7x+6>0,$$

$$(x-1)(x-6)>0,$$

$$\therefore\quad x<1\quad 或\quad x>6.$$

把它和 $-3\leqq x\leqq3$ 组合，可知不等式的解是 $-3\leqq x<1$。



(ii) 图象法。$y_1=\sqrt{x+3}$ 的图象是抛物线 $y_1^2=x+3$ 的上半部分，$y_2=3-x$ 的图象是过两点(3, 0)和(0, 3)的直线。设 y_1、y_2 的交点 $B(1, 2)$ 在 x 轴上的射影为 P，则对于在抛物线顶点(−3, 0)和 $P(1, 0)$ 之间的 x 值，有 $y_1<y_2$。故所求不等式的解是 $-3\leqq x<1$。

3680. (1) 用计算法解方程

$$x+\sqrt{5x+10}=8.$$

(2) 作 $y=\sqrt{5x+10}$ 和 $y=8-x$ 的图象，并指出方程(1)的根的几何意义。

解 (1) 已知方程可变形为

$$\sqrt{5x+10}=8-x,$$

两边平方，

$$5x+10=64-16x+x^2,$$

$$x^2-21x+54=0,$$

$$(x-3)(x-18)=0,\quad \therefore\ x=3,\ x=18.$$

(i) 当 $x=3$ 时，

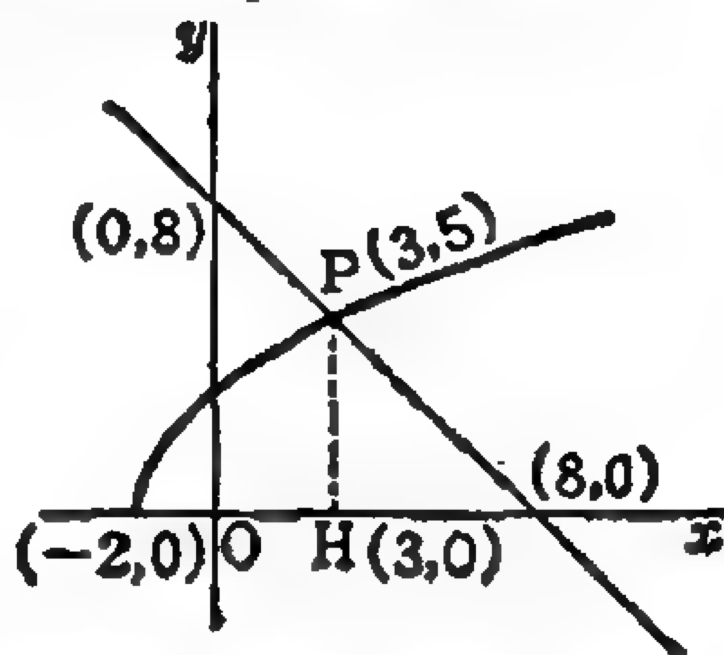
$$x+\sqrt{5x+10}=3+5=8.$$

(ii) 当 $x=18$ 时，

$$x+\sqrt{5x+10}\neq8,$$

$\therefore$ $x=3$ 是方程的根，$x=18$ 是增根。

(2) $y=\sqrt{5x+10}$ 的图象是顶点在(−2, 0)，以 x 轴为对称轴的抛物线 $y^2=5(x+2)$ 的 $y\geqq0$ 的部分；$y=8-x$ 的图象是经过两点(8, 0)和(0, 8)的直线，它们的交点(3, 5)的横坐标 3 就是方程 $x+\sqrt{5x+10}=8$ 的根。



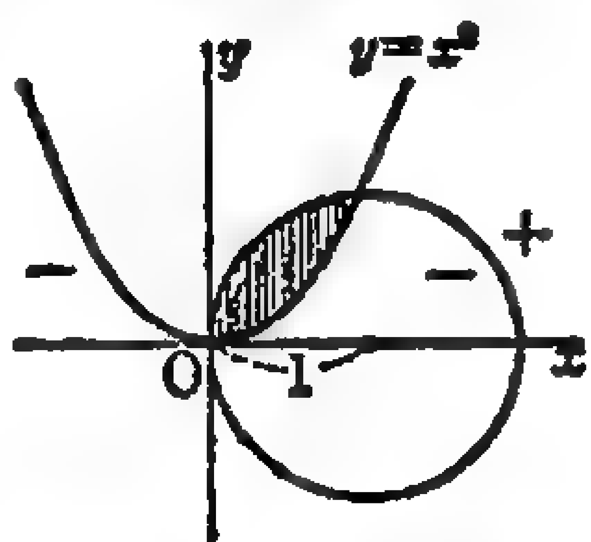
3681. 图示坐标满足下面不等式的点的存在范围。

$$(x-1)^2+y^2<1,\ y>x^2.$$

解 $(x-1)^2+y^2=1$ 的图象是以(1, 0)为圆心，半径为 1 的圆，因此坐标满足不等式

$(x-1)^2+y^2<1$ 的点的存在范围，是圆

$(x-1)^2+y^2=1$



的内部。同样，坐标满足不等式 $y>x^2$ 的点的范围是抛物线 $y=x^2$ 的内部。因此坐标同时满足这两个不等式的点的存在范围，就是图中斜线所示的部分(不包括边界)。

7. 杂题

3682. 函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，当 x 取什么值时，y 的值最大或最小。

解 把 $y=ax^2+bx+c$ 变形为

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

它的图象是顶点在$\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 的抛物线。$a>0$ 时开口向上，$a<0$ 时开口向下。因此，如果 $a>0$，则当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$；如果 $a<0$，则当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$。

注 $a>0$ 时，因为上述抛物线开口向上，随着$|x|$的增大，y 的值也随着无限增大。$a<0$ 时，因为上述抛物线开口向下，随着$|x|$的增大，y 值随着无限变小。这里不把无限增大的值和无限减少的值称为 y 的最大值和最小值，我们所说的最大值和最小值都是指有限的值。

3683. (1) 求 $y=x^2-4x-5$ 的最小值。

(2) 求 $y=-2x^2+12x-13$ 的最大值。

解 (1) $y=(x-2)^2-9$.

当 $x=2$ 时，y 的最小值是 -9。

(2) $y=-2(x-3)^2+5$.

当 $x=3$ 时，y 的最大值是 5。

3684. 求下列二次函数的最大值和最小值。

(1) $y=-2x^2-6x+3$,

(2) $y=3(x+3)^2-10$,

(3) $y=8+4x-5x^2$,

(4) $y=(x+4)(x+6)$.

解 (1) $y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}$.

因为 x^2 的系数是负值，所以当 $x=\frac{3}{2}$ 时，y 有最大值 $\frac{15}{2}$。

(2) $y=2(x+3)^2-10$.

因为 x^2 的系数是正值，所以当 $x=-3$ 时，y 有最小值 -10。

(3) $y=-5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{44}{5}$.

当 $x=\frac{2}{5}$ 时，y 有最大值 $\frac{44}{5}$。

(4) $y=(x+5)^2-1$.

当 $x=-5$ 时，y 有最小值 -1。

3685. 当 x 从 0 变到 2 时，求关于 x 的函数 $x(2a-x)$ 的最大值和最小值。

解
$$\begin{aligned} y=x(2a-x)&=-x^2+2ax\\ &=-(x^2-2ax+a^2)+a^2\\ &=-(x-a)^2+a^2. \quad ① \end{aligned}$$

在 ① 中，因为 x^2 的系数是负值，一般地当 $x=a$ 时，y 有最大值 a^2。但是在本题中，x 是从 0 变化到 2，所以把 a 的值作如下划分进行讨论。

(1) $a\geqq 2$.

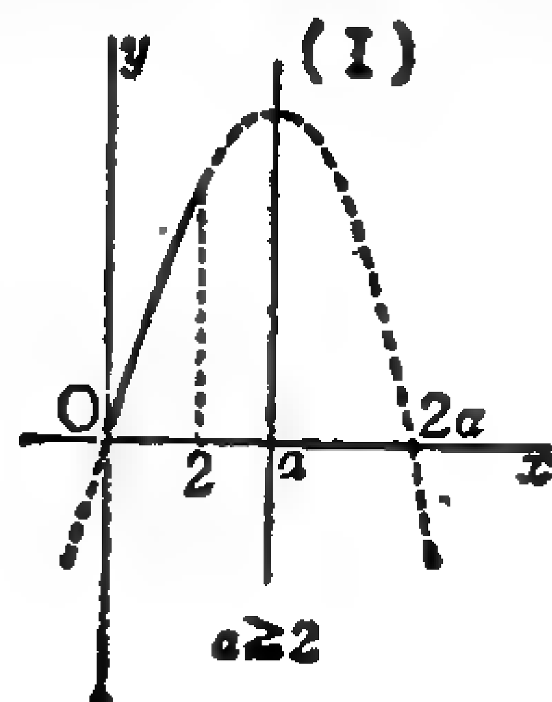
$y=x(2a-x)$的图象过原点 O，以直线 $x=a$ 为对称轴，顶点为(a, a^2)的抛物线。当 $0\leqq x\leqq 2$ 时，它是图(1)中的实线部分。所以当 $x=0$ 时，y 有最小值 0；当 $x=2$ 时，y 有最大值 $y=-2^2+2a\cdot 2=-4+4a$。如图(I)。

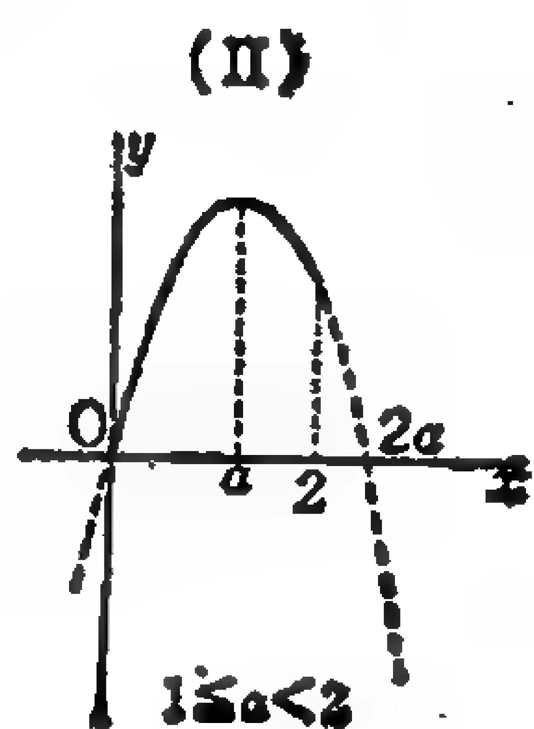
(2) $1\leqq a<2$.

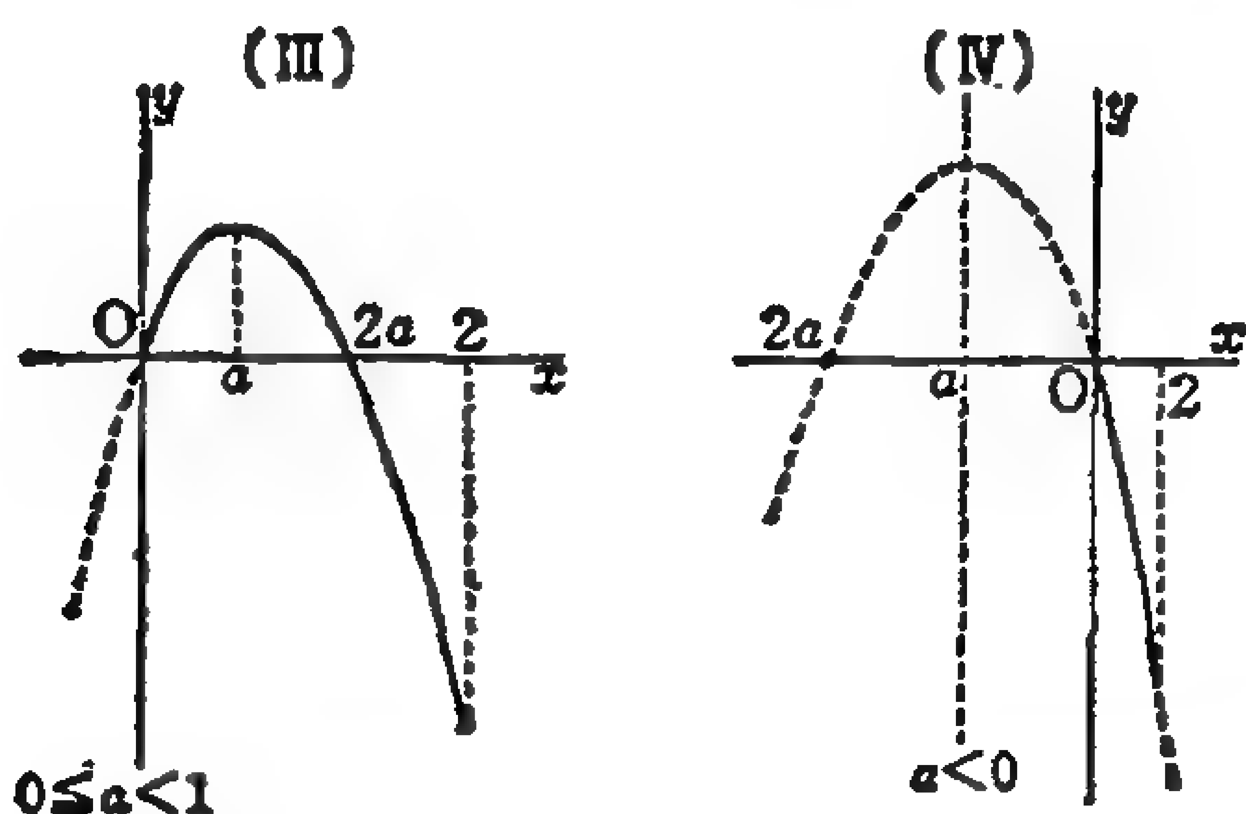
与(1)一样，当 $x=0$ 时，y 有最小值 0；当 $x=a$ 时，y 有最大值 a^2。如图(II)。

(3) $0\leqq a\leqq 1$.

如图(III)所示，$x=a$ 时 y 有最大值 a^2；$x=2$时 y 有最小值 $-4+4a$。







(4) $a<0$。

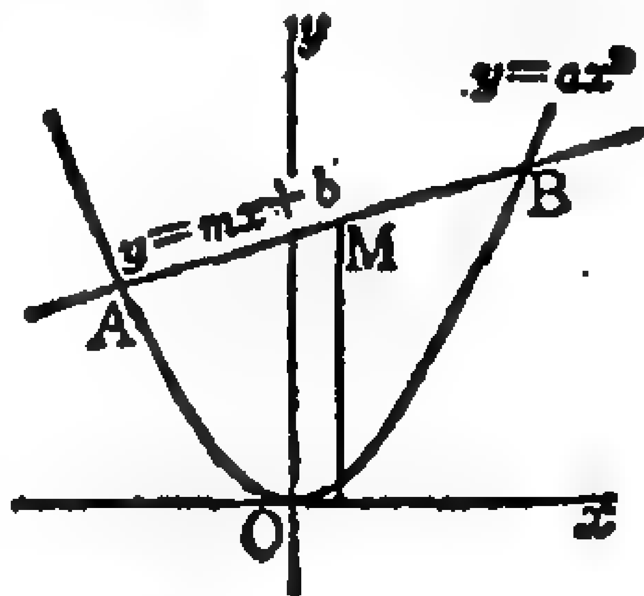
如图(Ⅳ)所示，在 $0\leqq x\leqq 2$ 的范围里 $y\leqq 0$，当 $x=0$ 时，y 有最大值 0；$x=2$ 时 y 有最小值 $-4+4a$。

3686. 求 $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$ 的反函数。

解　把 $y=x^2$ 的 x、y 交换，则得 $x=y^2$。这是以原点为顶点，x 轴为对称轴的抛物线，它的方程可以写成 $y=\pm\sqrt{x}$，因而 $y=x^2$ 的反函数是 $y=\pm\sqrt{x}$。$y=\sqrt{x}$ 的反函数是 $x=\sqrt{y}$，即 $y=x^2$(其中 $x\geqq 0$)。

注　在 $y=x^2$ 中，x 的定义域是全体实数，y 的值域是 $y\geqq 0$，因此其反函数 $y=\pm\sqrt{x}$ 中，x 的定义域是 $x\geqq 0$，y 的值域是全体实数。同样，在 $y=\sqrt{x}$ 中，x 的定义域是 $x\geqq 0$，y 的值域是 $y\geqq 0$，因此其反函数 $y=x^2$ 中，x 的定义域也是 $x\geqq 0$，y 的值域也是 $y\geqq 0$。

3687. 抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=mx+b$ 的交点为 A、B，求线段 AB 中点 M 的横坐标，证明它与 b 无关。当 m 的值一定时，与定直线平行的抛物线弦的中点，在与抛物线对称轴平行的直线上。



解　直线 $y=mx+b$ 和抛物线 $y=ax^2$ 的交点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，它的中点 M 的坐标是$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$。由于方程

$$ax^2=mx+b,$$

即

$$ax^2-mx+b=0$$

的两根是 x_1、x_2，所以 $x_1+x_2=\dfrac{m}{a}$，$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m}{2a}$，即知点 M 的横坐标与 b 无关。当 m 的值一定时，无论 b 取怎样的值，AB 的中点 M 必在与 y 轴平行的定直线 $x=\dfrac{m}{2a}$ 上。

3688. (1) 如图，已知抛物线 $y_1=x^2+ax+b$ 和直线 $y_2=\dfrac{1}{2}x+c$ 相交。

(a) 求交点 P 的横坐标；

(b) 求直线和 x 轴的交点 Q 的横坐标 x_2；

(c) 把斜线所示范围用不等式表示。

(2) 要使直线

$$y_3=\frac{1}{2}x+d$$

和抛物线

$$y_1=x^2+ax+b$$

相切，试求 d 的值。

解　(1) (a) 交点的横坐标可从 $y_1=y_2$ 求得。

$$\frac{1}{2}x+c=x^2+ax+b,$$

$$2x^2+(2a-1)x+2(b-c)=0,$$

$$\therefore\quad x=\frac{(1-2a)\pm\sqrt{(2a-1)^2-16(b-c)}}{4}.$$

因此，

$$x_1=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-a-\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-4(b-c)}\right].$$

(b) $x_2=-2c$。

(c) $x^2+ax+b<y<\dfrac{1}{2}x+c$。

(2) $\dfrac{1}{2}x+d=x^2+ax+b$，

即　$2x^2+(2a-1)x+2(b-d)=0$。

由于直线与抛物线相切，此方程具有等根，因而

$$(2a-1)^2-16(b-d)=0,$$

$$\therefore\quad d=b-\frac{1}{16}(2a-1)^2.$$

3689. 过抛物线的顶点作互相垂直的两弦，连结两弦和抛物线交点的直线，必过抛物线对称轴上某定点。

解　设抛物线的方程为

$$y^2=4px. \qquad ①$$

过顶点互相垂直的两直线方程分别为

$$y=mx, \qquad ②$$

$$y=-\frac{1}{m}x. \qquad ③$$

①、② 交点 P 的坐标为

$\left(\frac{4p}{m^2}, \frac{4p}{m}\right)$.

①、③交点 Q 的坐标为

$(4pm^2, -4pm)$。

故 PQ 的方程为

$$y+4pm=\frac{\frac{4p}{m}+4pm}{\frac{4p}{m^2}-4pm^2}(x-4pm^2),$$

整理得 $y(1-m^2)-m(x-4p)=0$,

即 $ym^2+(x-4p)m-y=0$.

为使这个等式对于任意的 m 都成立，其条件是

$$y=0,\ x=4p.$$

所以 PQ 必过定点 $(4p, 0)$，该点在抛物线对称轴上。

3690. 在下列 x、y 的关系中，以 t 作中间变数，试消去 t，写出 x、y 的关系。

(1) $x=\frac{p}{t^2},\ y=\frac{2p}{t}$;

(2) $x=1+t,\ y=1+t^2$.

解 (1) 由第二式 $t=\frac{2p}{y}$ 代入第一式，得

$$x=p\cdot\frac{y^2}{4p^2},\quad \therefore\quad y^2=4px.$$

它表示一条抛物线。

(2) 由第一式 $t=x-1$ 代入第二式，得

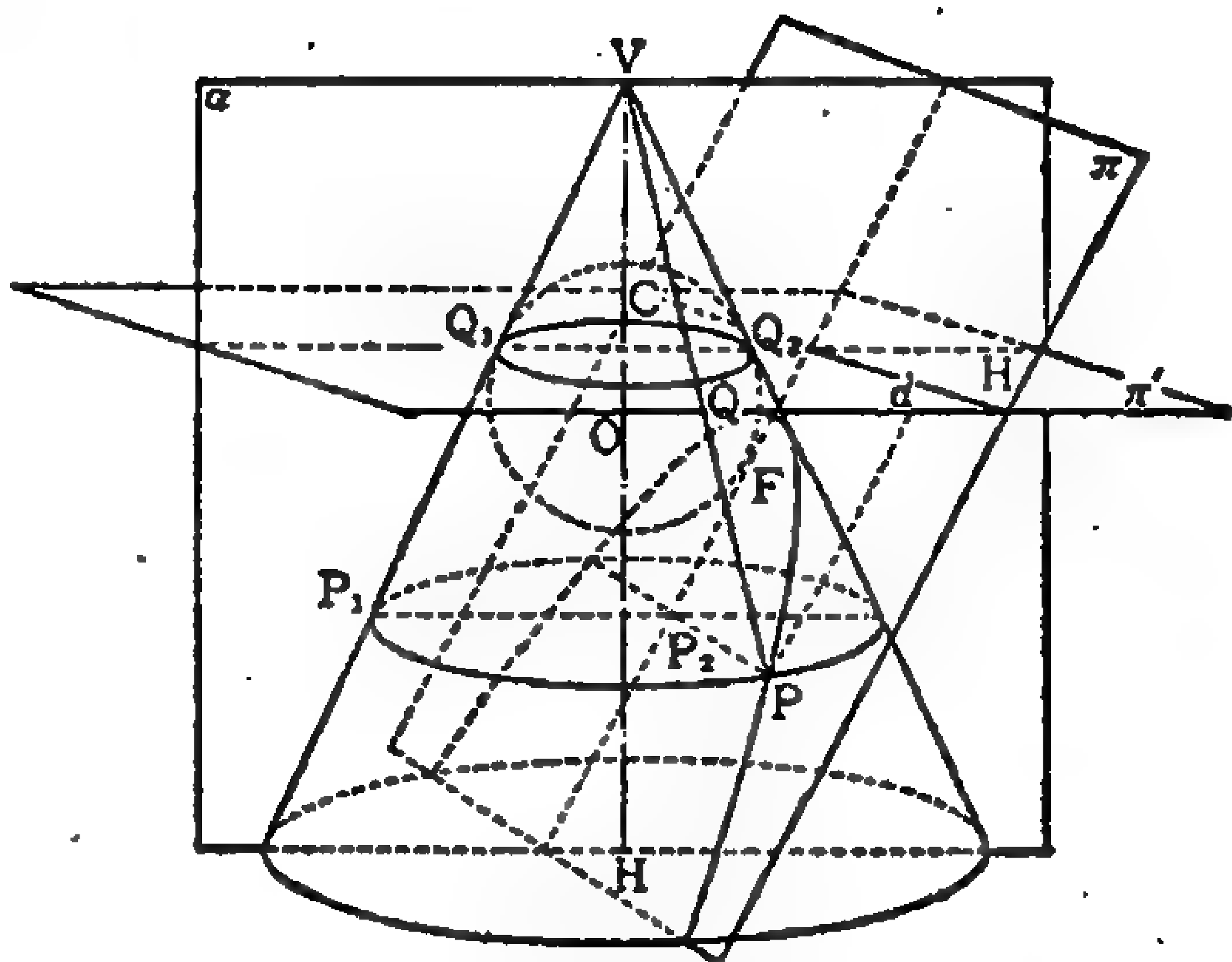
$$y=1+(x-1)^2,\quad 即\quad y-1=(x-1)^2.$$

它表示把抛物线 $x^2=y$ 向右平移 1，再向上平移 1 所得的抛物线。

3691. 把直圆锥用与其母线平行的平面截开，证明截口是抛物线。

解 如图。设平面 π 平行于母线 VQ_1P_1，作切于圆锥且切于平面 π 的球 O。设含有球 O 和圆锥的公共圆的平面为 π'，设圆锥的高为 VH，则 $\pi'\perp VH$。设含有 VP_1 和 VH 的平面为 α，则 $\alpha\perp\pi'$ 且 $\alpha\perp\pi$，所以 α 也垂直于两平面 π 和 π' 的交线 d，因而平面 α 上的直线 P_2Q_2 和 d 垂直。

设平面 π 和直圆锥交线上的任意点为 P，π 和球的切点为 F，从 P 向 d 作垂线 PH，则 PF、PQ 都是从 P 向球所作的切线，所以 $PF=PQ$。但是，$PQ=P_1Q_1=P_2Q_2$，且

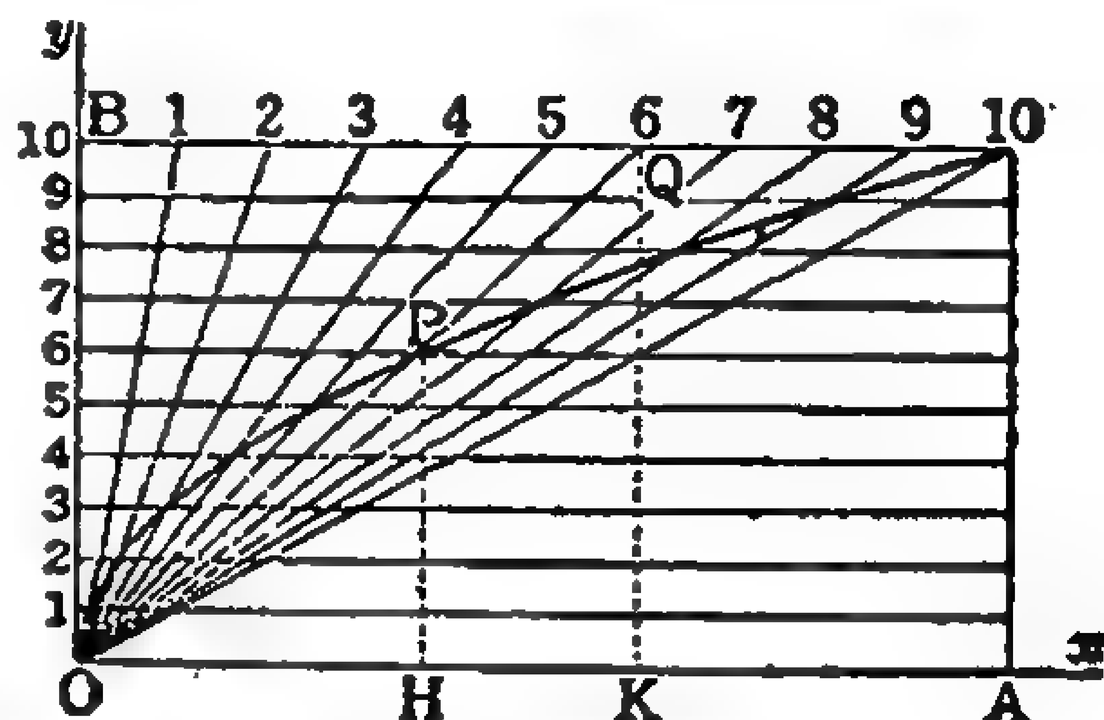


$$P_2Q_2=PH,$$

$$\therefore\quad PF=PH.$$

因为 F 是定点，d 是定直线，根据抛物线的定义，点 P 的轨迹（即截口）为抛物线。

3692. 把矩形各边 n 等分，如图引直线，则其对应直线的交点都在一条抛物线上。



解 如图。设矩形的两边 OA、OB 分别在坐标轴上，点 A、B 的坐标分别为 $(a, 0)$, $(0, b)$。设第 m 条对应直线的交点为 $P(x, y)$，则有

$$\triangle OPH\backsim\triangle OQK,$$

$$\therefore\quad \frac{OH}{OK}=\frac{PH}{QK}=\frac{m}{n},$$

即 $$\frac{x}{\frac{m}{n}a}=\frac{y}{b}=\frac{m}{n}.$$

因而 $$\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{nx}{ma}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{x}{a},$$

$$\therefore\quad y^2=\frac{b^2}{a}x.$$

这就是说，P 无论是第几条对应直线的交点，它都在以 O 为顶点，OA 为对称轴，顶点和焦点的距离为 $\frac{b^2}{4a}$ 的抛物线上。

第四章　椭　　圆

1. 图象

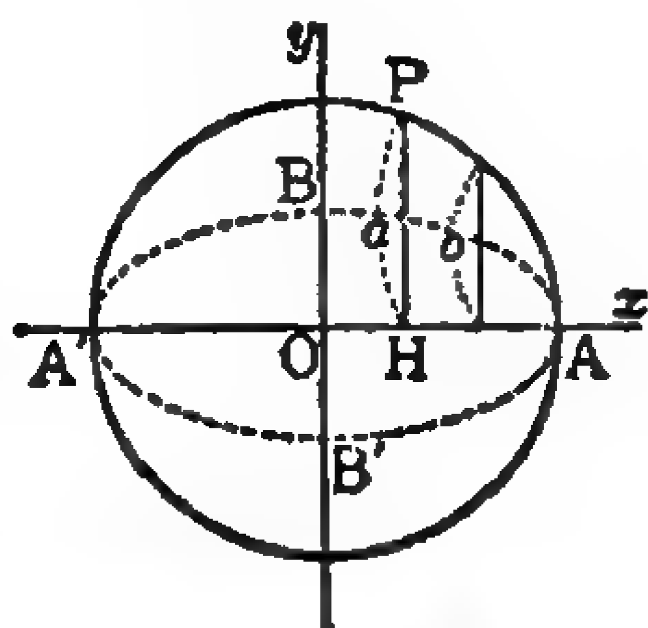
3693. 作方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的图象。

解　解关于 y 的方程，得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \quad ①$$

解关于 y 的圆的方程 $x^2+y^2=a^2$，得

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}. \quad ②$$



比较①、②可知，把②的圆中垂直于 x 轴的弦缩小到 $\frac{b}{a}$ 倍(或扩大)所得到的图象，就是①的图象，即图中的椭圆。其中 AA' 叫做椭圆的长轴，BB' 叫做椭圆的短轴。

3694. 作方程 $x^2+4y^2=4$ 的图象。

解　就 y 解之，得

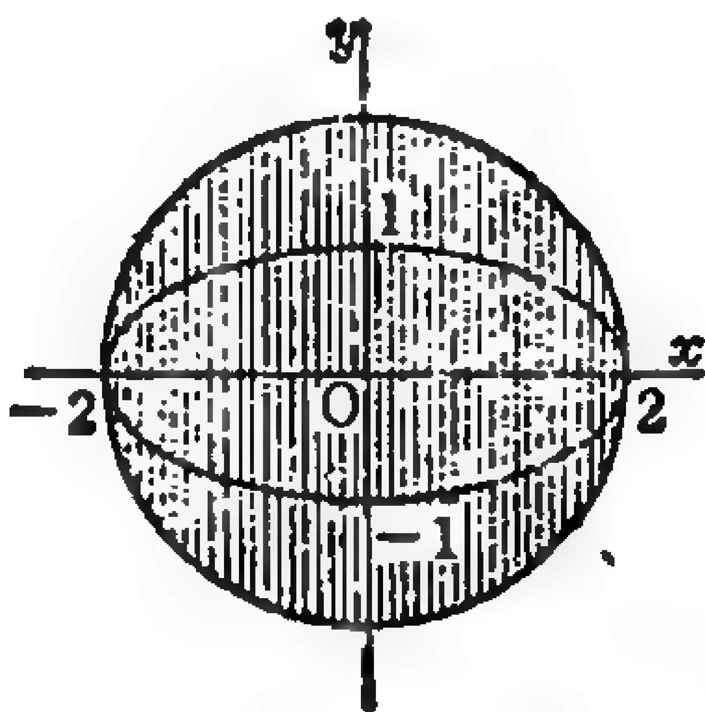
$$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}. \quad ①$$

又把圆的方程

$$x^2+y^2=4$$

就 y 解之，得

$$y=\pm\sqrt{4-x^2}. \quad ②$$



比较①、②可知，①的图象就是把②的圆中垂直于 x 轴的弦缩小到一半所得到的图形，它就是图中的椭圆。

3695. 指出下列各方程的图象的位置关系。即怎样平移曲线 (a) 就得到曲线 (b)、(c)、(d)。

(a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$,

(b) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$,

(c) $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$,

(d) $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$.

解　(a) 方程(a)的图象是长轴为 6，短轴为 4，且长轴在 x 轴上，中心为原点的椭圆。

(b) 曲线(b)是把椭圆(a)沿 x 轴正向平行移动 2 所得到的椭圆。

(c) 曲线(c)是把椭圆(a)沿 y 轴正向平行移动 3 所得到的椭圆。

(d) 曲线(d)是把椭圆(a)沿 x 轴正向平行移动 -5，再沿 y 轴正向平行移动 -4，所得到的椭圆。

3696. 作方程 $4x^2+9y^2-40x+18y+73=0$ 的图象。

解　把方程变形为

$$(4x^2-40x+\square)+(9y^2+18y+\triangle)$$
$$+73-\square-\triangle=0$$

的形式，即

$$(\quad)^2+(\quad)^2=(\quad)^2.$$

可得

$$4(x^2-10x+5^2)+9(y^2+2y+1)$$
$$+73-4\cdot5^2-9=0,$$

即　$$4(x-5)^2+9(y+1)^2=36.$$

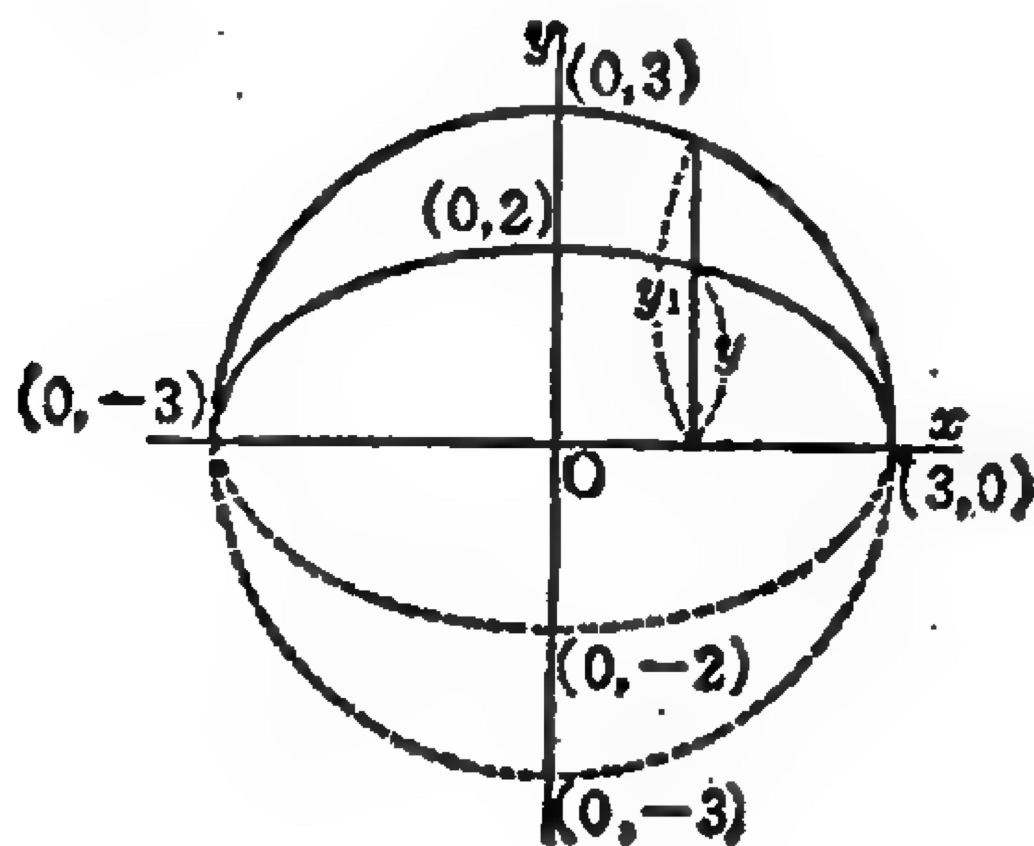
两边同除以 36，得

$$\frac{(x-5)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2}=1.$$

这是中心为$(5, -1)$，长轴为 6，短轴为 4 的椭圆。

3697. 作函数 $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ 的图象。

解　考虑函数 $y_1=\sqrt{9-x^2}$ 的图象是以点$(0, 0)$为圆心、3 为半径的圆 $x^2+y_1^2=3^2$ 在 x 轴的上方部分。对于 x 的同一值，所对应的 y_1 和题设函数 y 的值之间有 $y=\frac{2}{3}y_1$。因此



所求图象就是把圆上各点的纵坐标缩小到 $\frac{2}{3}$ 倍所得到的椭圆。

别解　把题设方程的两边平方，则

$$y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2(3^2-x^2),$$

即
$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1.$$

它的图象是以(0, 0)为中心，长短轴分别为6、4的椭圆。因此所求函数的图象是该椭圆在 x 轴上方的部分。

3698. 作下列函数的图象。

(1) $y=\sqrt{1+8x-2x^2}$,

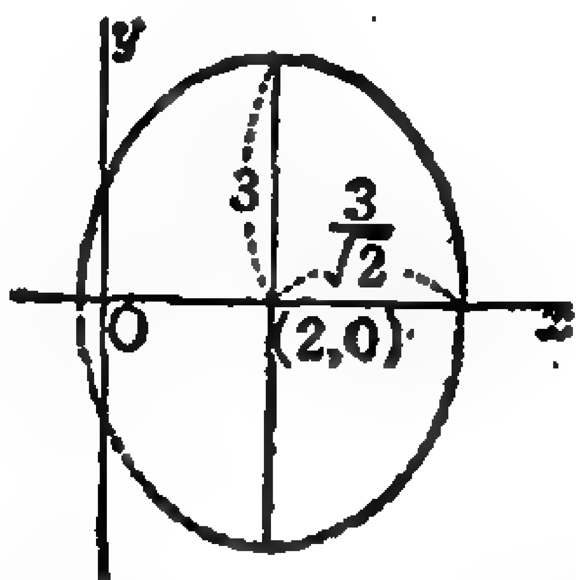
(2) $y=-\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\right)$.

解　(1) 两边平方，

$$2(x^2-4x+4)+y^2=9,$$

即

$$\frac{(x-2)^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

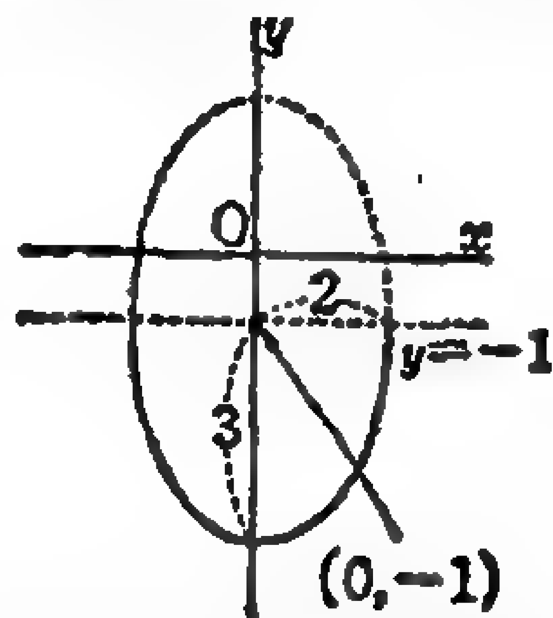


它的图象是以(2, 0)为中心的椭圆。因此所求函数的图象是这个椭圆在 x 轴上方的部分，即图中的实线部分。

(2) 把题设方程变形为

$$y+1=-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2},$$

即 $$\frac{x^2}{2^2}+\frac{(y+1)^2}{3^2}=1.$$



这个图象是以点(0, −1)为中心的椭圆。在题设函数中 $y+1\leq 0$，因此它的图象是椭圆在直线 $y+1=0$ 下侧的部分。

3699. 设把点 $P(x, y)$ 所在的坐标系绕其原点 O 旋转角 θ 得新的坐标系，点 P 在新坐标系里的坐标为 (X, Y)，证明：

$$x=X\cos\theta-Y\sin\theta,$$
$$y=X\sin\theta+Y\cos\theta.$$

解　设 $\angle XOx=\theta$, $\angle POX=\theta'$，则

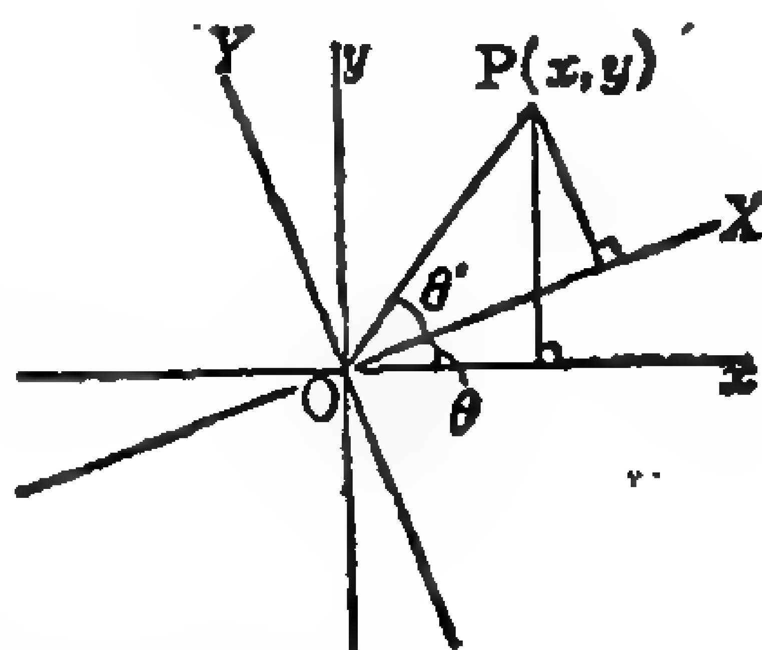
$$x=PO\cos(\theta+\theta'), \quad ①$$
$$y=PO\sin(\theta+\theta'). \quad ②$$

由于
$$X=PO\cos\theta',$$
$$Y=PO\sin\theta',$$

由①可得

$$x=PO\cos\theta\cos\theta'-PO\sin\theta\sin\theta',$$

$$\therefore\ x=X\cos\theta-Y\sin\theta.$$



由②可得

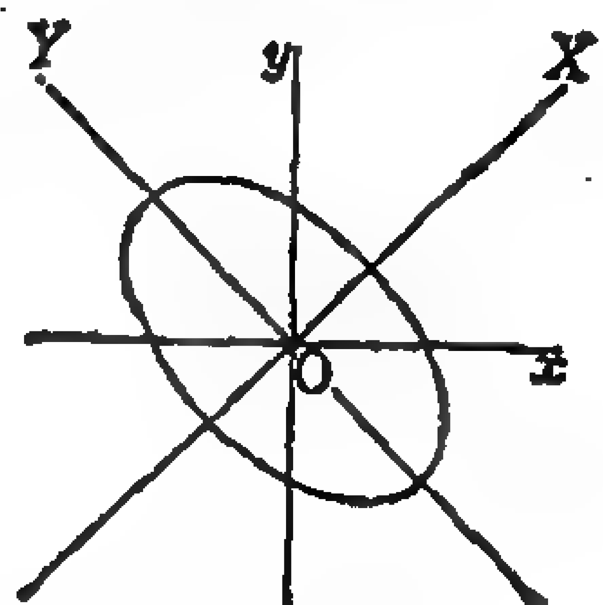
$$y=PO\sin\theta\cos\theta'+PO\cos\theta\sin\theta',$$

$$\therefore\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta.$$

3700　作方程 $x^2+xy+y^2=1$ 的图象。

解　设把坐标轴旋转45°时，这条曲线上的点 $P(x, y)$ 成为 $P(X, Y)$，由上题知

$$\begin{cases} x=\frac{X}{\sqrt{2}}-\frac{Y}{\sqrt{2}}, \\ y=\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$



把它代入方程

$$x^2+xy+y^2=1$$

得

$$\frac{(X-Y)^2}{2}+\frac{(X-Y)(X+Y)}{2}+\frac{(X+Y)^2}{2}=1,$$

即
$$3X^2+Y^2=2.$$

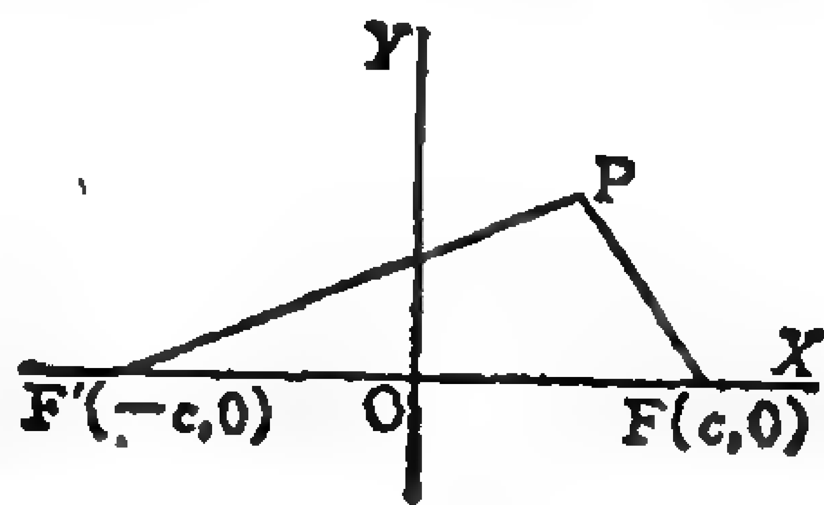
$$\therefore\ \frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2}=1.$$

它的图象就是上图中的椭圆。因此该椭圆就是所求方程的图象。

2. 轨迹

3701. 求到两个定点 F、F' 的距离之和等于定长 $2a$ 的点 P 的轨迹。

解　取直线 FF' 为 x 轴，线段 FF' 的垂直平分线为 y 轴，



点 F、F' 的坐标分别是 $(c, 0)$、$(-c, 0)$。设点 P 的坐标为 (x, y)，则

$$PF^2=(x-c)^2+y^2, \quad ①$$
$$PF'^2=(x+c)^2+y^2. \quad ②$$

①−②，　$PF^2-PF'^2=-4cx$,

$$(PF+PF')(PF-PF')=-4cx.$$

由于 $PF+PF'=2a$，所以

$$PF-PF'=-\frac{2cx}{a}.$$

把它和 $PF+PF'=2a$ 相加，得

$$PF=a-\frac{c}{a}x.$$

把它代入①，

$$\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2=(x-c)^2+y^2,$$

整理，$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2,$$

即 $$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2.$$

由于 $a>c$，以 a^2-c^2 除两边，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

设 $a^2-c^2=b^2$，则得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这就是所求轨迹的方程。

注　(i) 它的图象是两轴为 $2a$、$2b$ 的椭圆。

(ii) 由前述知 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，设 $\frac{c}{a}=e$，则 $c=ea$。

$$\therefore\quad e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\quad(0<e<1).$$

(iii) 方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 说明到两定点 F、F' 的距离和为定值 $2a$ 的点的轨迹是椭圆。其中 $F(ae, 0)$，$F'(-ae, 0)$ 叫做椭圆的焦点。$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 叫做椭圆的离心率。

3702. 求以两点 $F(\sqrt{3}, 0)$、$F'(-\sqrt{3}, 0)$ 为焦点且过点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的椭圆方程。

解　设所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad ①$$

其焦点的坐标是 $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$。当焦点在 $(\pm\sqrt{3}, 0)$ 时可知 $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，即

$$a^2-b^2=3. \qquad ②$$

由于这个椭圆过点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以在①中可设 $x=1$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得

$$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1. \qquad ③$$

解②和③求 a、b：从②得 $a^2=3+b^2$，把它代入③，

$$\frac{1}{3+b^2}+\frac{3}{4b^2}=1,$$

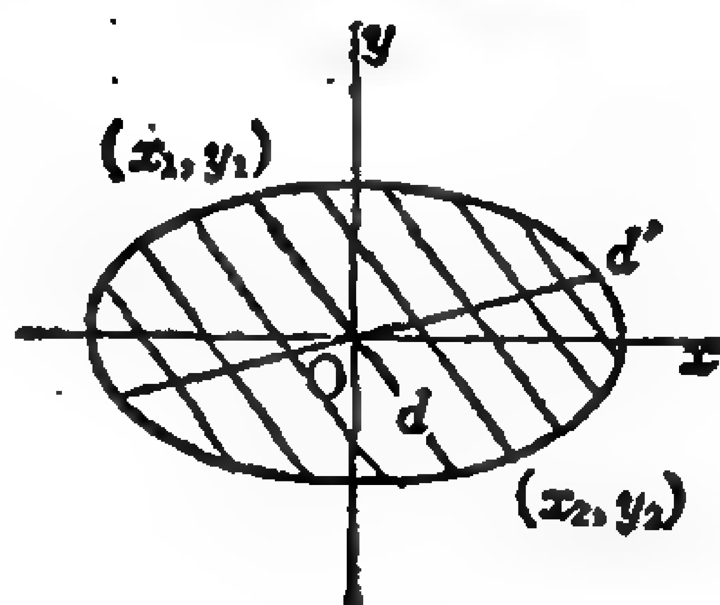
$$4b^2+3(3+b^2)=4b^2(3+b^2),$$

$$4b^4+5b^2-9=0,\ (b^2-1)(4b^2+9)=0.$$

$$\therefore\quad b^2=1,\quad 从而\quad a^2=4.$$

故所求椭圆方程是 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

3703. 求与椭圆 $Ax^2+By^2=1$ 定直径 d 平行的弦的中点的轨迹。



解　如图。设 d 为定直径，与它平行弦的斜率是定值。设这组平行弦的方程为

$$y=mx+\beta. \qquad ①$$

从①和

$$Ax^2+By^2=1, \qquad ②$$

消去 y，得

$$Ax^2+B(mx+\beta)^2=1,$$

即

$$(A+Bm^2)x^2+2B\beta mx+(B\beta^2-1)=0. \qquad ③$$

弦的两端点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 的横坐标是③的两个根，由根与系数的关系知

$$x_1+x_2=-\frac{2B\beta m}{A+Bm^2},$$

从而弦的中点的横坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{B\beta m}{A+Bm^2}.$$

从此式和 $y=mx+\beta$ 中消去 β，得

$$(A+Bm^2)x=-Bm(y-mx),$$

即 $$Ax=-Bmy.$$

这是一条过椭圆中心的直线。因此所求平行弦中点的轨迹，就是这条直线在椭圆内部的线段。

注　设表示上述轨迹的线段为 d'，类似地可以知道，与 d' 平行的弦的中点轨迹为 d，这两条直径 d、d' 叫做互为共轭的直径。

3704. 求在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中方向一定的弦的中点轨迹。

解　由上题知，在椭圆 $Ax^2+By^2=1$ 中平行弦中点的轨迹是直径 $Ax=-Bmy$．已知 $A=\frac{1}{a^2}$、$B=\frac{1}{b^2}$，所以有 $\frac{x}{a^2}=-\frac{m}{b^2}y$ 即 $y=-\frac{b^2}{ma^2}x$．这就是所求的轨迹方程．

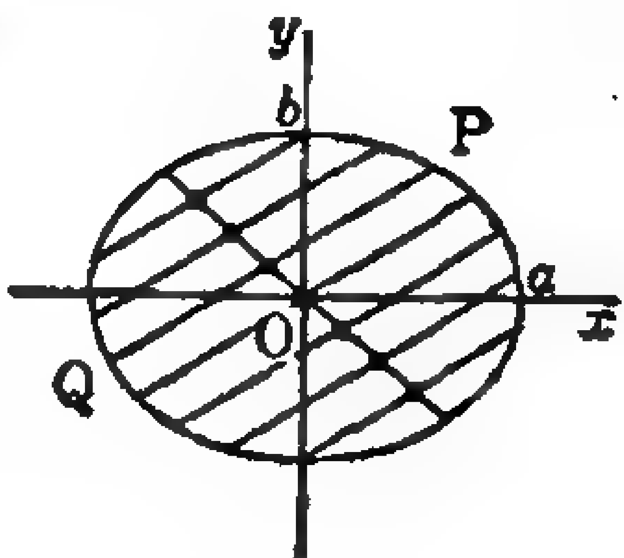
别解　设椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ①$$

和具有确定方向的直线

$$y=mx+\beta \qquad ②$$

的交点为 P、Q，其坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)．从①、②消去 y 所得方程



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+\beta)^2}{b^2}=1$$

即　$(a^2m^2+b^2)x^2+2ma^2\beta x+a^2\beta^2-a^2b^2=0$，

x_1、x_2 是这个方程的两个根．设 PQ 的中点为 $M(x, y)$，则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{ma^2\beta}{a^2m^2+b^2}. \qquad ③$$

同理，y_1、y_2 是从①、②消去 x 所得方程

$$(a^2m^2+b^2)y^2-2b^2\beta y+b^2\beta^2-a^2b^2m^2=0$$

的两个根，所以点 M 的纵坐标

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{b^2\beta}{a^2m^2+b^2}. \qquad ④$$

从③、④消去 β，得

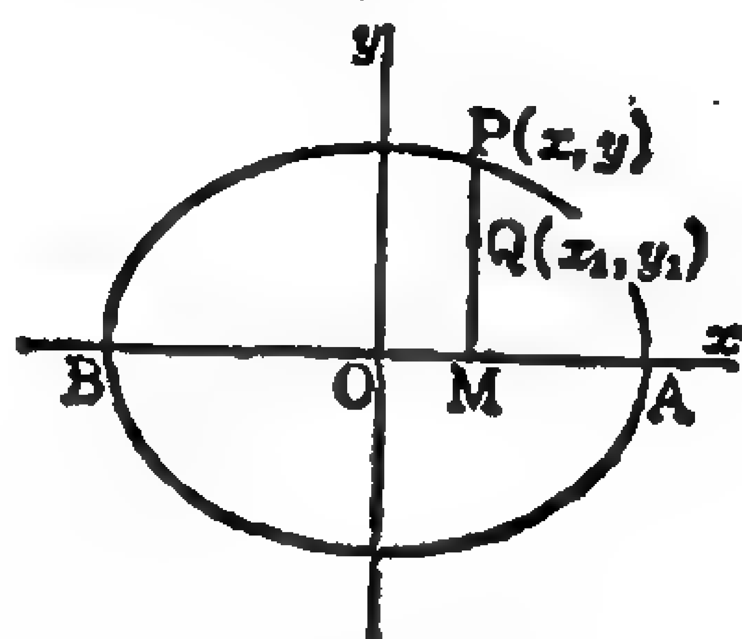
$$y=-\frac{b^2}{ma^2}x. \qquad ⑤$$

⑤就是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中斜率为定值 m 的平行弦的中点轨迹方程．

注　椭圆的斜率是 m 的平行弦中点的轨迹是该椭圆的直径．我们把斜率是 $-\frac{b^2}{ma^2}$ 的直径 $y=-\frac{b^2}{ma^2}x$ 叫做直径 $y=mx$ 的共轭直径．设 $y=mx$ 的共轭直径的斜率为 m'，则 $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$．

设椭圆互为共轭的两直径和 x 轴正向所成的角分别为 θ_1、θ_2，则 $\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2<0$，所以在 θ_1、θ_2 中一个是锐角、一个是钝角．

3705. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与 x 轴的交点为 A、B，从椭圆上的点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，在直线 PM 上取一点 Q，使



$MA\cdot MQ=PM^2$，当点 P 在椭圆上运动时，求点 Q 的轨迹．

解　设点 $P(x, y)$，点 $Q(x, y_1)$，则

$$MA=a-x,\ MQ=y_1.$$

因 MQ 是有向线段，由题设条件知

$$\pm(a-x)y_1=y^2. \qquad ①$$

即点 P 在 x 轴上方时 $y_1>0$，在下方时 $y_1<0$，$a-x>0$．因点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，所以 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$．把它代入①，则

$$\pm(a-x)y_1=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

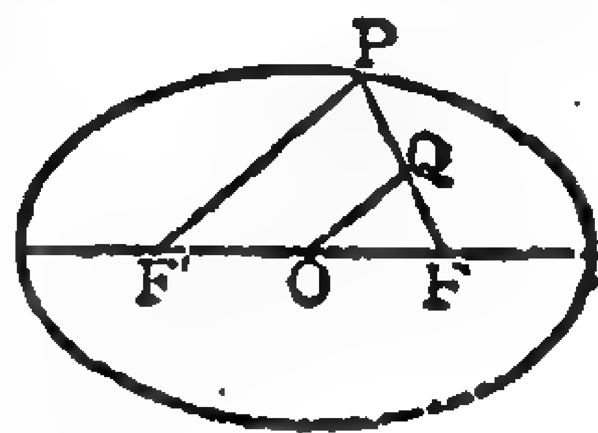
$$\therefore\quad y_1=\pm\frac{b^2}{a^2}(a+x).$$

在上式中把 y_1 换成 y，则

$$y=\pm\frac{b^2}{a^2}(a+x).$$

因为 $-a<x<a$，故所求轨迹是两条线段 $y=\frac{b^2}{a^2}(a+x)$ 及 $y=-\frac{b^2}{a^2}(a+x)$，其中 $-a<x<a$．

3706. 已知椭圆的一个焦点 F．连结 F 和这个椭圆上任意点 P，证明线段 FP 中点 Q 的轨迹是一个椭圆．



解　设椭圆的中心为 O，另一焦点为 F'，连结 QO，则

$$QO=\frac{1}{2}PF'.$$

从而　$$QF+QO=\frac{1}{2}(PF+PF').$$

由于 F、F' 是已知椭圆的焦点，所以

$$PF+PF'=l\ (\text{一定}),$$

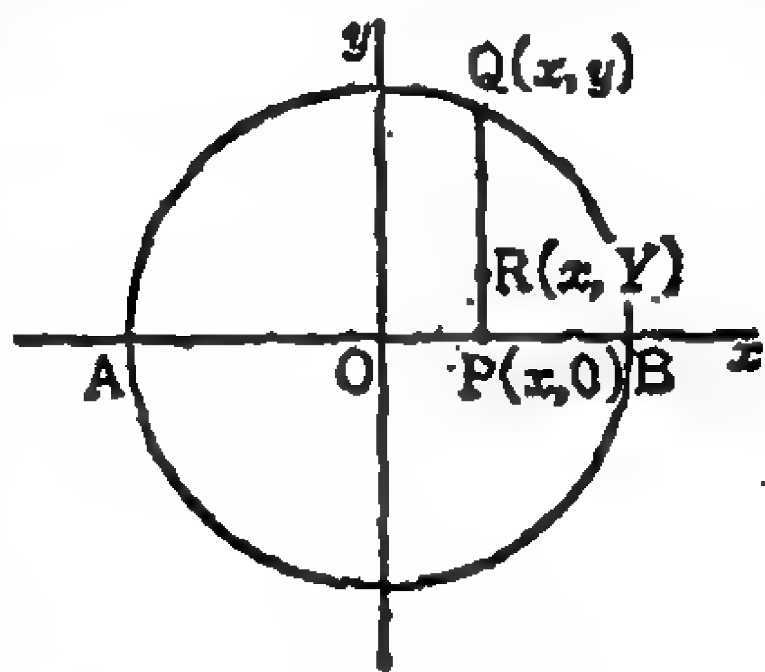
从而　$$QF+QO=\frac{l}{2}\ (\text{一定}).$$

因此点 Q 在以 O、F 为焦点的椭圆上．

反之也成立．故所求轨迹是以 F、O 为焦

点，$QO+QF=\frac{l}{2}$ 的椭圆。

3707. 过圆 O 的定直径 AB 上的任意点 P，作与 AB 垂直的直线和圆相交于 Q，证明：把 PQ 内分为 $m:n$ 的点 R 的轨迹，是以 AB 为长轴的一个椭圆。



解 取直线 AB 为 x 轴，过圆心 O 且垂直于 AB 的直线为 y 轴。设圆的半径为 a，$Q(x, y)$，$P(x, 0)$，$R(x, Y)$，则

$$Y=\frac{my}{m+n},\quad \therefore\ y=\frac{(m+n)Y}{m}.$$

已知 $x^2+y^2=a^2$，所以

$$x^2+\left(\frac{m+n}{m}Y\right)^2=a^2,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{ma}{m+n}\right)^2}=1.$$

把其中的 Y 用 y 表示，并设 $\frac{ma}{m+n}=b$，则

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这就是所求轨迹方程，它表示长轴为 $2a$ 即 AB 的椭圆。

3708. 求过椭圆焦点的弦中点的轨迹。

解 求过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 焦点 $F(ae, 0)$ 的弦中点的轨迹。设 PQ 的方程为 $y=m(x-ae)$，则 P、Q 的坐标为方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad ①$$

与

$$y=m(x-ae) \qquad ②$$

的解。把②代入①得

$$(a^2m^2+b^2)x^2-2a^3m^2ex+a^4m^2e^2-a^2b^2=0. \qquad ③$$

设 P、Q 的坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，PQ 中点 M 的坐标为 (X, Y)，则

$$X=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a^3m^2e}{a^2m^2+b^2}. \qquad ④$$

再把由②解得的 x 代入①，

$$Y=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{ab^2em}{a^2m^2+b^2}. \qquad ⑤$$

因此 PQ 中点 M 轨迹方程可从④、⑤消去 m 而得到。④÷⑤，

$$\frac{X}{Y}=-\frac{a^2m}{b^2},$$

$$\therefore\ m=-\frac{b^2X}{a^2Y}. \qquad ⑥$$

把⑥代入⑤，

$$Y=\frac{ab^2e}{a^2\left(\frac{b^4X^2}{a^4Y^2}\right)+b^2}\cdot\frac{b^2X}{a^2Y},$$

整理，得 $b^2X^2+a^2Y^2-ab^2eX=0$。

用 x，y 分别代换 X，Y，则得所求轨迹方程为

$$b^2x^2+a^2y^2-ab^2ex=0.$$

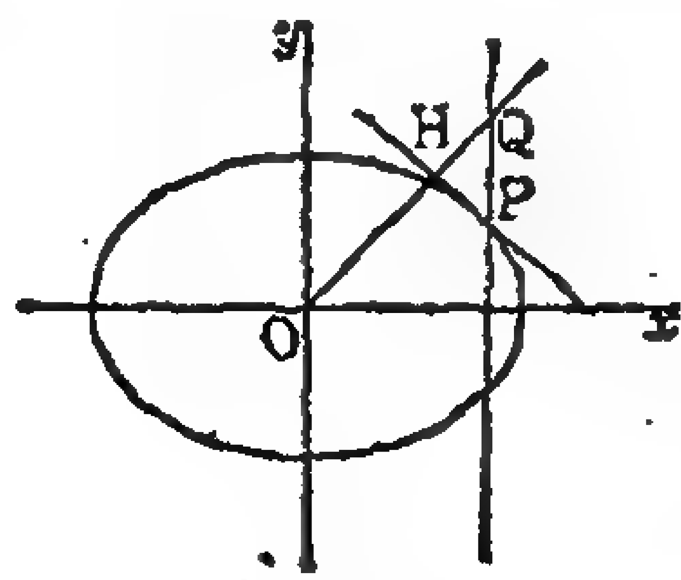
即

$$b^2\left(x-\frac{ae}{2}\right)^2+a^2y^2=\frac{1}{4}a^2b^2e^2,$$

$$\therefore\ \frac{\left(x-\frac{ae}{2}\right)^2}{\left(\frac{ae}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{be}{2}\right)^2}=1.$$

它表示中心在 $\left(\frac{ae}{2}, 0\right)$，长轴为 ae，短轴为 be 的椭圆。

3709. 过椭圆上一点 P 作平行于短轴的直线，再过椭圆的中心作直线垂直于点 P 处的切线，证明此两直线交点 Q 的轨迹是一个椭圆。



解 由问题 3718 知，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上点 P 处的切线方程为

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

过中心 O 且与此切线垂直的直线方程为

$$y=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}x, \qquad ①$$

又过 P 且平行于短轴的直线方程为

$$x=x_1, \qquad ②$$

已知 $P(x_1, y_1)$ 是椭圆上的点，所以

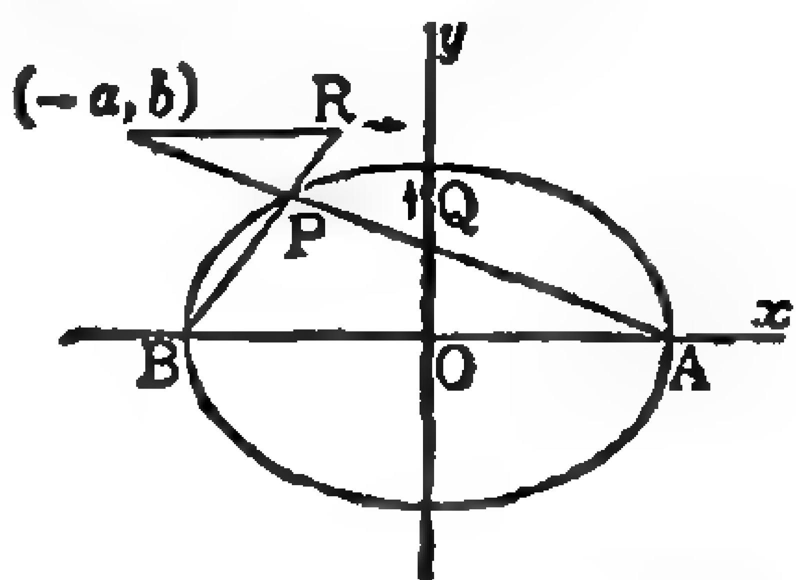
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1。\qquad ③$$

故所求轨迹方程可从①、②、③消去 x_1、y_1 而得到．从①、②求 x_1、y_1，把它代入③，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{a^4}{b^2}}=1。$$

这就是所求的轨迹方程，它表示椭圆。

3710　已知从原点出发，以每秒 b cm 的速度向上方运动的点 Q，另外由点 $(-a, b)$ 出发，以每秒 a cm 的速度向右运动的点 R，求连结点 $A(a,0)$、Q 的直线与连结点 $B(-a, 0)$、R 的直线的交点 P 的轨迹。



解　Q、R 开始运动 t 秒后，点 Q 在 $(0, bt)$，R 在 $(-a+at, b)$，故直线 AQ、BR 的方程分别为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{bt}=1,\qquad ①$$

$$y=\frac{b}{at}(x+a)。\qquad ②$$

从①、②消去 t，就可得到 AQ、BR 的交点 P 的轨迹方程．从①、②分别得

$$\frac{y}{bt}=\frac{a-x}{a},\qquad ①'$$

$$\frac{b}{at}=\frac{y}{a+x}。\qquad ②'$$

①′÷②′，得　$\dfrac{ay}{b^2}=\dfrac{a^2-x^2}{ay}$，

即　$a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$，

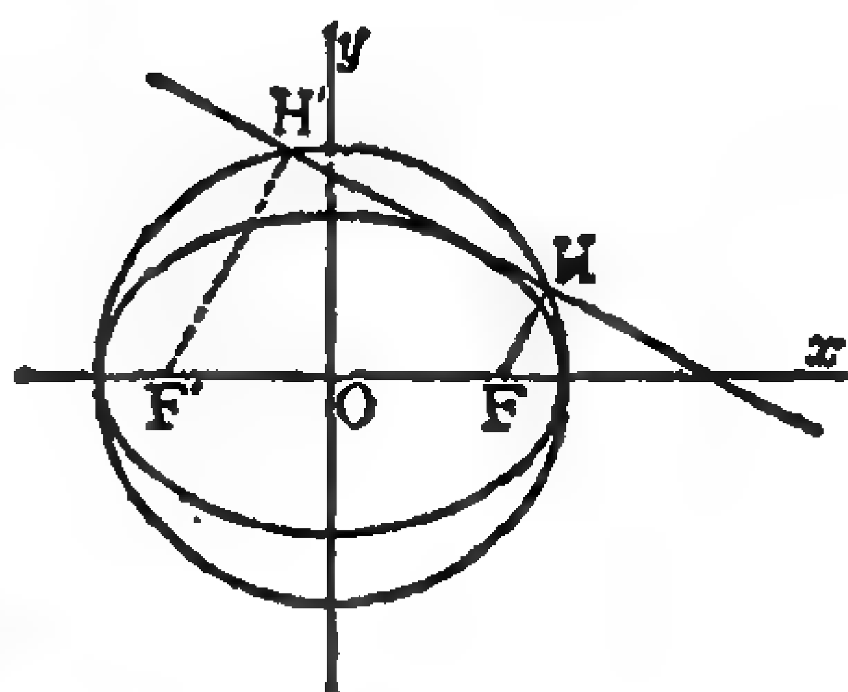
$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。$$

故点 P 的轨迹是椭圆。

3711. 证明：从焦点 F（或 F'）向椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的任意切线作垂线，其垂足的轨迹是以椭圆长轴为直径的圆。



解　设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (a>b>0),$$

则其焦点为 $F(ae, 0)$，$F'(-ae, 0)$。由问题 **3717** 知，其斜率为 m 的切线方程为

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2},$$

即

$$(y-mx)^2=a^2m^2+b^2。\qquad ①$$

从 F、F' 向此切线所引的垂线方程为

$$y=-\frac{1}{m}(x\pm ae),$$

即

$$(my+x)^2=a^2-b^2。\qquad ②$$

①+②，$(1+m^2)(x^2+y^2)=(1+m^2)a^2$，

即

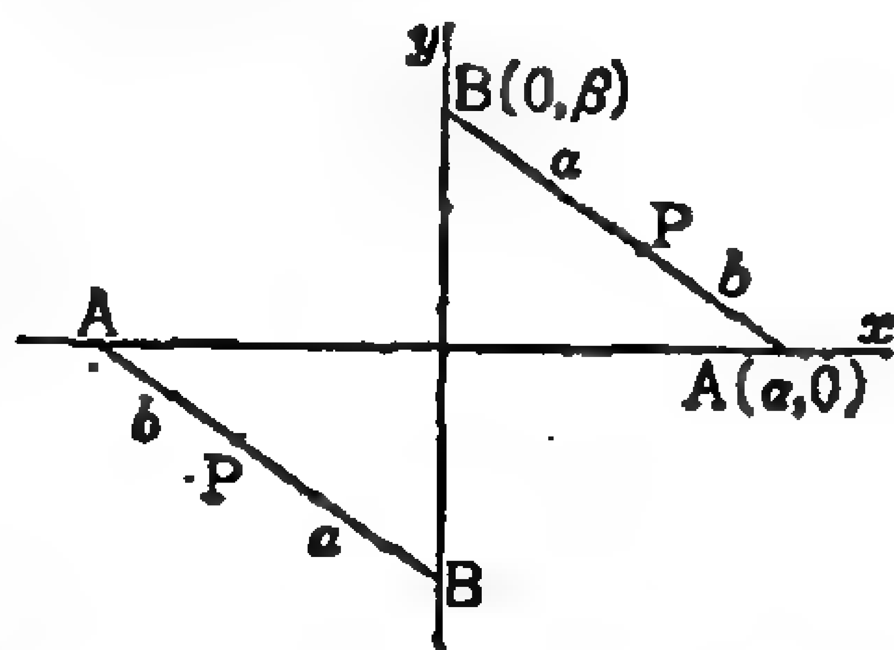
$$x^2+y^2=a^2。\qquad ③$$

③就是①、②交点的轨迹方程，它表示以椭圆长轴为直径的圆。

注　(i) 以椭圆长轴为直径的圆叫做椭圆的辅助圆。

(ii) 从椭圆外一点 P 向椭圆引切线时，可以先求以 PF 为直径的圆和辅助圆的交点 H，然后连结 PH 即是所求切线。

3712. 已知连结 x 轴上的点 A 和 y 轴上的点 B 的线段是定长 $a+b$，求在线段 AB 上距 B 为 a 的点 P 的轨迹。



解　设 $A(\alpha, 0)$，$B(0, \beta)$，$P(x, y)$，则

$$x=\frac{a\alpha}{a+b},\quad y=\frac{b\beta}{a+b},$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{a+b}{a}x,\ \beta=\frac{a+b}{b}y。$$

由于 $\alpha^2+\beta^2=(a+b)^2$，所以

$$\left(\frac{a+b}{a}x\right)^2+\left(\frac{a+b}{b}y\right)^2=(a+b)^2,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。$$

这就是所求点 P 的轨迹方程。

3713. 已知从焦点 F 作直线垂直椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上点 $T(x_1, y_1)$ 处的切线，和连

结 OT 的直线相交于 P，求点 P 的轨迹。

解　由问题 **3718** 知，点 $T(x_1, y_1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

其斜率为 $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. 所以从焦点 $F(ae, 0)$ 所作此切线的垂线方程为

$$y=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-ae), \qquad ①$$

又连结中心 O 和 T 的直线方程为

$$y=\frac{y_1}{x_1}x, \qquad ②$$

从①、②消去 x_1、y_1，得

$$x=\frac{a^2}{b^2}(x-ae),$$

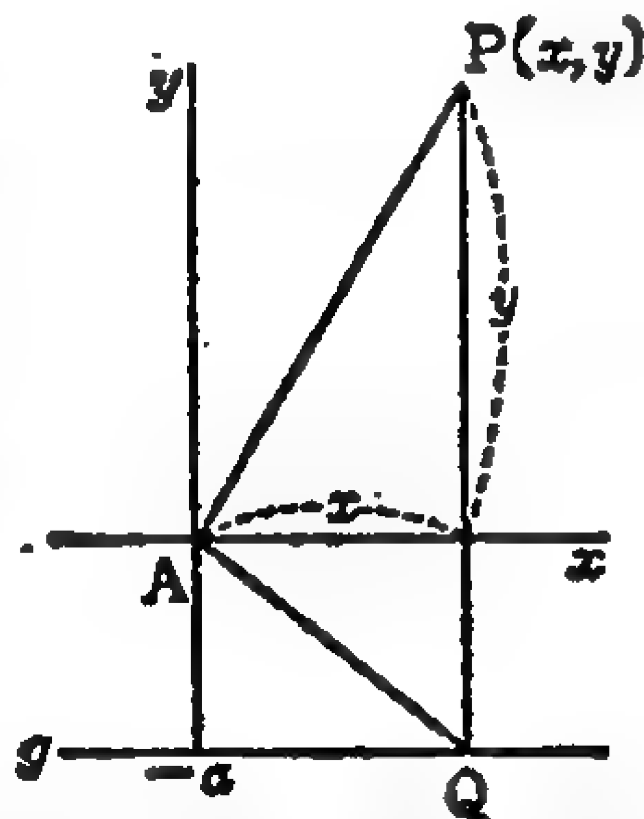
即　　$$(a^2-b^2)x=a^2e.$$

$$\therefore\quad a^2e^2x=a^2e,\quad 即\quad x=\frac{a}{e}.$$

这就是所求的轨迹方程．它表示这个椭圆对应于焦点 F 的准线．

注　关于准线，参照问题 **3728**.

3714. 已知平面上的点 A 和不过点 A 的直线 g. 如果在这个平面上取点 P，从点 P 向 g 引垂线，垂足为 Q，且 $AP:AQ$ 为定值 $(k>1)$，求点 P 的轨迹并画出其图形．



解　如图．取过 A 且与 g 平行的直线为 x 轴，过 A 且垂直于 g 的直线为 y 轴．设直线 g 的方程为 $y=-a$，适合条件的点为 $P(x, y)$，则

$$AP:AQ=1:k\quad (k>1),$$

即　　$$AQ=k\cdot AP.$$

因为　$AP^2=x^2+y^2$，$AQ^2=x^2+a^2$，

所以　$$x^2+a^2=k^2(x^2+y^2),$$

$$(k^2-1)x^2+k^2y^2=a^2.$$

$$\therefore\quad \frac{(k^2-1)x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{a^2}=1.$$

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{k^2-1}}+\frac{y^2}{\frac{a^2}{k^2}}=1.$$

这就是所求的轨迹方程，它表示中心为 A，长轴是 $\frac{2a}{\sqrt{k^2-1}}$，短轴是 $\frac{2a}{k}$ 的椭圆．

注　$k=1$ 时 $AP=AQ$，则点 P 的轨迹是直线 g 关于 x 轴对称的直线 $y=a$；当 $k<1$ 时方程

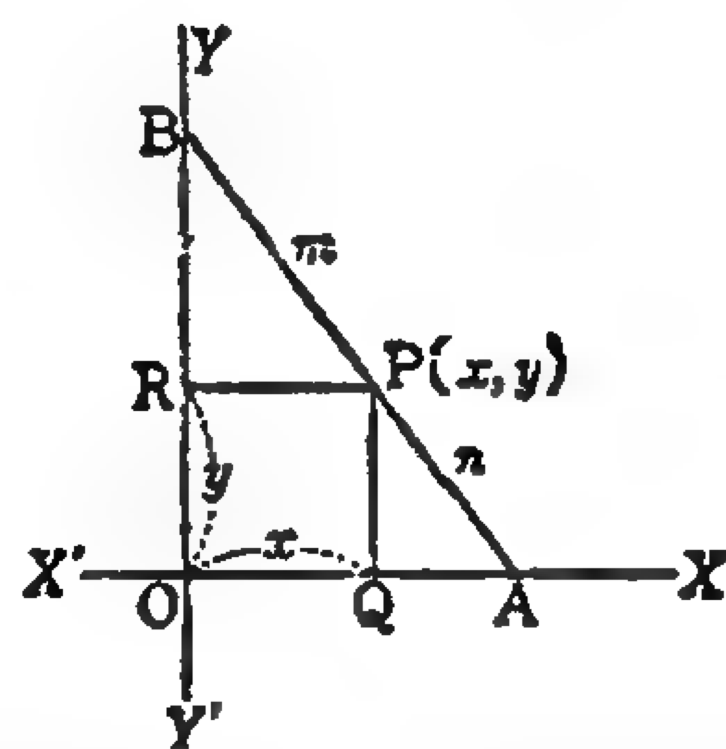
$$(k^2-1)x^2+k^2y^2=a^2$$

可写成 $-(1-k^2)x^2+k^2y^2=a^2$，它表示以 y 轴为实轴的双曲线．其渐近线方程为

$$k^2y^2-(1-k^2)x^2=0,$$

即　　$$ky=\pm\sqrt{1-k^2}\,x.$$

3715. 定长线段的两端点分别在互相垂直的两直线 XX'、YY' 上，求把 AB 内分为定比 $m:n$ 的点 P 的轨迹．



解　取 XX'、YY' 为坐标轴．设点 P 的坐标为 (x, y)，如图，有

$$\frac{OA}{OQ}=\frac{m+n}{m},$$

$$\therefore\quad OA=\frac{m+n}{m}x; \qquad ①$$

$$\frac{OB}{OR}=\frac{m+n}{n},$$

$$\therefore\quad OB=\frac{m+n}{n}y. \qquad ②$$

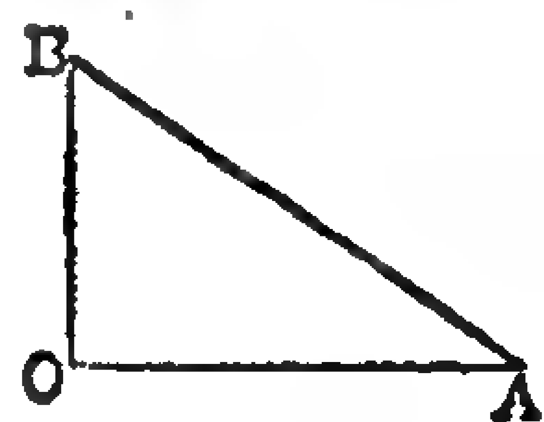
因为 $OA^2+OB^2=AB^2$，设 $AB=l$，则

$$\left(\frac{m+n}{m}\right)^2x^2+\left(\frac{m+n}{n}\right)^2y^2=l^2,$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{\left(\frac{ml}{m+n}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{nl}{m+n}\right)^2}=1.$$

这就是所求的轨迹方程，它表示中心在原点、长短轴分别在两坐标轴上的椭圆．长轴为 $\frac{2ml}{m+n}$，短轴为 $\frac{2nl}{m+n}$.

3716. 已知以 AB 为斜边的直角 $\triangle OAB$，过其内部的点 P 且平行于 OA 的直线和边 OB、AB 的交点分别为 M、R，过 P 且平行于



OB 的直线和边 OA、AB 的交点分别为 L、Q，求使矩形 $OLPM$ 的面积和三角形 PQR 的面积相等的点 P 的轨迹，并画出其图形。

解 如图。取 OA、OB 分别在 x 轴、y 轴上，设 $A(a,0)$，$B(0,b)$，$P(x,y)$，$Q(x,Y)$，$R(X,y)$，则 AB 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

因而有 $\frac{X}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{x}{a}+\frac{Y}{b}=1,$

$$\therefore\quad X=a\left(1-\frac{y}{b}\right),\ Y=b\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

从而　$PQ=Y-y=b-\frac{b}{a}x-y,$

$$PR=X-x=a-x-\frac{a}{b}y.$$

又因 $OL\cdot PL=\frac{1}{2}PQ\cdot PR$，所以

$$2xy=\left(a-x-\frac{a}{b}y\right)\left(b-\frac{b}{a}x-y\right).$$

$$\therefore\quad \frac{b}{a}x^2+\frac{a}{b}y^2-2bx-2ay+ab=0,$$

即　$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1.$$

它表示中心在 (a,b)，两轴长分别是 $2a$，$2b$ 的椭圆。它和 x、y 轴分别切于 A，B。因此，所求的轨迹是该椭圆在 $\triangle OAB$ 内部的部分。

3. 切线、切点

3717. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的斜率为 m 的切线方程。

解　$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad ①$$

设 ① 的斜率为 m 的切线方程为

$$y=mx+\beta. \qquad ②$$

把 ② 代入 ①，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+\beta)^2}{b^2}=1,$$

即

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2ma^2\beta x+a^2\beta^2-a^2b^2=0. \qquad ③$$

② 是 ① 的切线，③ 须有等根，所以 ③ 的判别式为零：

$$m^2a^4\beta^2-(a^2m^2+b^2)(a^2\beta^2-a^2b^2)=0.$$

整理，得　$\beta^2=a^2m^2+b^2,$

$$\therefore\quad \beta=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

故所求切线方程为

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

3718. 证明：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

解 过题设椭圆上两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 的直线方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1), \qquad ①$$

因点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，所以

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, \qquad ②$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1. \qquad ③$$

③－②，　$$\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0,$$

$$\therefore\quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}. \qquad ④$$

把 ④ 代入 ①，

$$y-y_1=-\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}(x-x_1).$$

如点 Q 在曲线上无限地接近点 P，(x_2,y_2) 就无限地接近于 (x_1,y_1)，从而割线 PQ 就无限地接近在点 P 处的切线。故切线方程为

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),$$

$$\therefore\quad b^2x_1x+a^2y_1y=a^2y_1^2+b^2x_1^2.$$

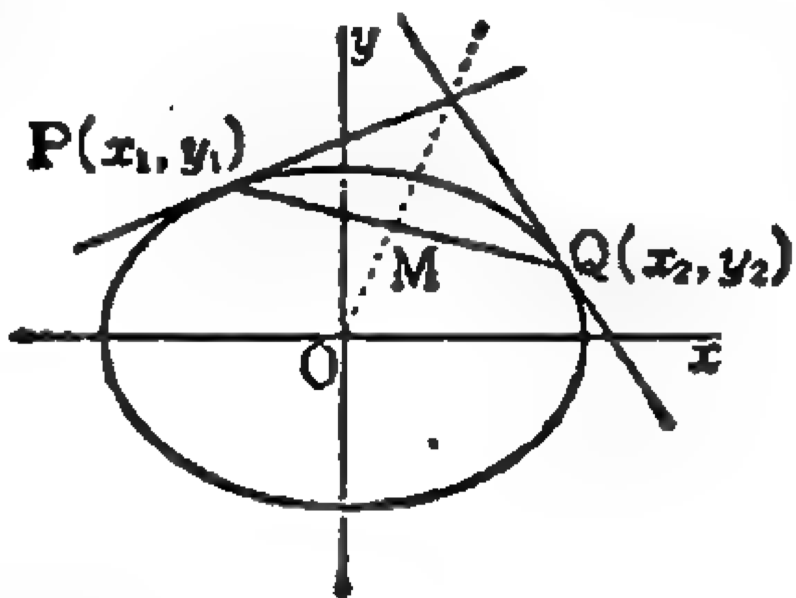
由 ②，上式可写成

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$$

即　$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

3719. 求过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的两点 P、Q 所连线段 PQ 中点的直径方程，并由此证明在 P、Q 两点处的切线的交点在这条直径上。

解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的两点 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$ 所连线段的中点 M 的坐标是 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$,



所以过点 M 的直径方程为

$$y=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}x. \quad ①$$

由于 P、Q 是椭圆上的点，所以

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, \quad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1.$$

两式相减，

$$\frac{1}{a^2}(x_1^2-x_2^2)+\frac{1}{b^2}(y_1^2-y_2^2)=0,$$

$$\therefore \quad \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{b^2(x_1-x_2)}{a^2(y_1-y_2)}.$$

把它代入①，得过点 M 的直径方程为

$$y=-\frac{b^2(x_1-x_2)}{a^2(y_1-y_2)}x,$$

即

$$\frac{1}{a^2}(x_1-x_2)x+\frac{1}{b^2}(y_1-y_2)y=0. \quad ②$$

由上题知椭圆在 P、Q 处的切线方程分别为

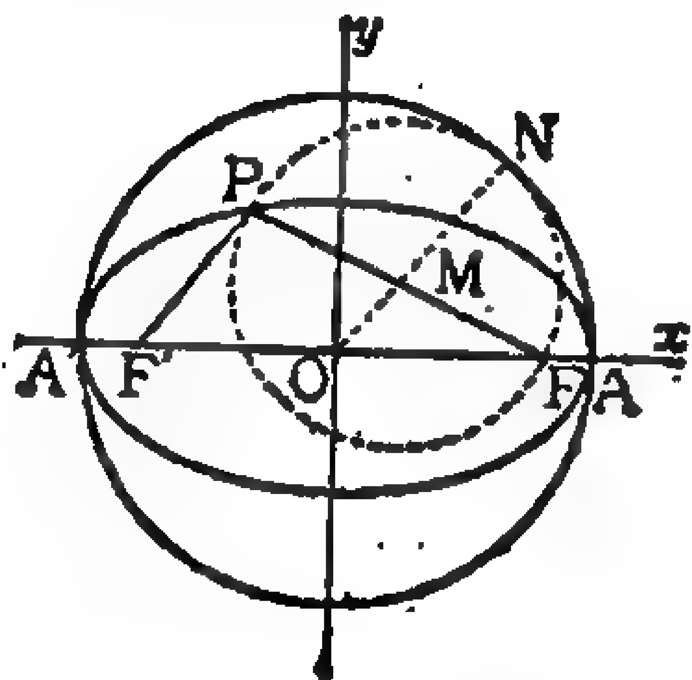
$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1, \quad \frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1.$$

相减得

$$\frac{1}{a^2}(x_1-x_2)x+\frac{1}{b^2}(y_1-y_2)y=0.$$

这就是说，P、Q 两点处的切线的交点在过 M 的直径上。

3720. 证明：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的一点 P 和焦点 F 所连线段为直径的圆与以椭圆中心为圆心，a 为半径的圆相切。



解 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点为 $P(x_1, y_1)$，焦点为 $F(ae, 0)$，$F'(-ae, 0)$，FP 的中点为 M，在 OM 的延长线上圆 M 的半径为 MN，则

$$OM=\frac{1}{2}F'P=\frac{1}{2}(a+ex_1),$$

$$MN=\frac{1}{2}FP=\frac{1}{2}(a-ex_1),$$

$$\therefore \quad ON=OM+MN=a.$$

故以 FP 为直径的圆与以 O 为圆心，a 为半径的圆(椭圆的辅助圆)相切。

注 $F'P^2=(x_1+ae)^2+y_1^2$
$=x_1^2+2aex_1+a^2e^2+y_1^2,$

又 $$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

即 $$y_1^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_1^2.$$

把它代入上式，且注意到 $a^2e^2=a^2-b^2$，则

$$F'P^2=e^2x_1^2+2aex_1+a^2,$$

$$\therefore \quad F'P=a+ex_1.$$

同理， $FP=a-ex_1,$

其中 $0<e<1, \ |x_1|\leqq a.$

3721. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 互相垂直的切线交点的轨迹。

解 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条切线的斜率为 m，另一条切线的斜率为 $-\frac{1}{m}$，由问题3717知这两条切线方程分别为

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}, \quad ①$$

$$y=-\frac{1}{m}x\pm\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}. \quad ②$$

从①，

$$(y-mx)^2=a^2m^2+b^2, \quad ③$$

从②，

$$(my+x)^2=a^2+b^2m^2, \quad ④$$

③+④，

$$(1+m^2)(x^2+y^2)=(1+m^2)(a^2+b^2),$$

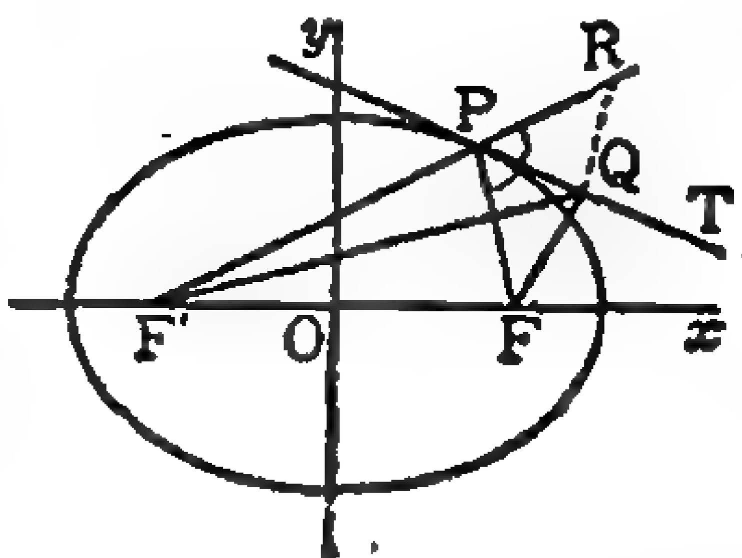
$$\therefore \quad x^2+y^2=a^2+b^2.$$

这就是所求的轨迹方程，它表示以原点为圆心，$\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的圆。这个圆叫做椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的准圆。

3722. 设以 F、F' 为焦点的椭圆上任意点为 P，则 $\triangle FPF'$ 的顶点 P 的外角平分线是这个椭圆的切线。

解 设 $\triangle FPF'$ 顶点 P 的外角平分线 PT

上的任意点为 Q，连结 QF、QF'，在 $F'P$ 的延长线上取等于 PF 的线段 PR，则可证明点 Q 不在椭圆上。



事实上，

$$PF'+PF=PF'+PR$$
$$=F'R<QF'+QR=QF'+QF,$$

因而　　$PF'+PF<QF'+QF$，

故点 Q 不在椭圆上。

这就是说，在 $\angle FPF'$ 的外角平分线 PT 上除 P 以外的任意点 Q 都不在椭圆上，即 PT 和椭圆只有一个公共点，所以 PT 是椭圆上点 P 处的切线。

注　从这个性质可知，在点 P 处的切线和 PF，PF' 成等角。

3723. 求垂直于直线 $y+4x=0$，且切于椭圆 $x^2+4y^2=5$ 的直线方程，并求切点的坐标。

解　已知与直线 $y+4x=0$ 垂直的直线斜率是 $\frac{1}{4}$，故设所求切线方程为

$$y=\frac{1}{4}x+m.$$

由它和 $x^2+4y^2=5$ 消去 y，得

$$5x^2+8mx+(16m^2-20)=0. \quad ①$$

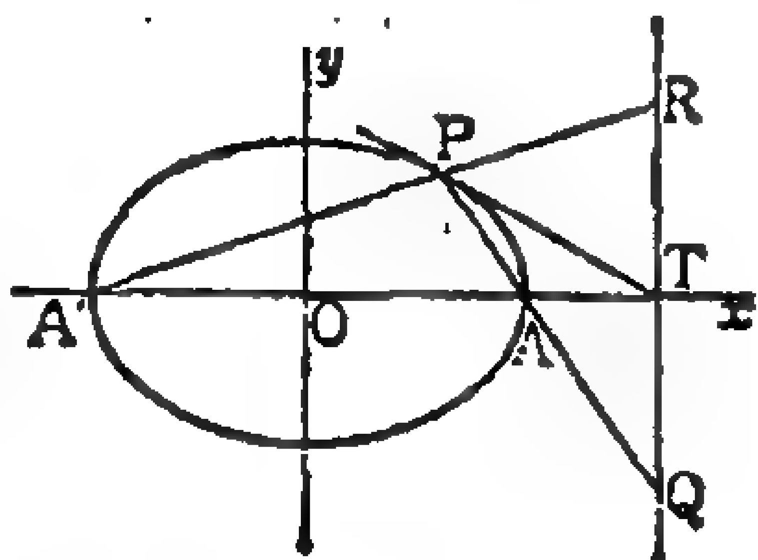
① 具有等根的条件是

$$m=\pm\frac{5}{4}.$$

故所求切线方程为 $4y=x\pm5$，切点坐标分别为 $(1, -1)$，$(-1, 1)$。

3724. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上点 P 处的切线和 x 轴的交点为 T，长轴的两端点分别为 A、A'，过 T 作 x 轴的垂线和 PA、PA' 的交点分别为 Q、R，则

$$TR=TQ.$$



解　由问题 3718 知，在点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

T 的横坐标为 $\frac{a^2}{x_1}$，所以过 T 且与 x 轴垂直的直线方程为

$$x=\frac{a^2}{x_1}, \quad ①$$

PA 的方程为

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1-a}(x-x_1). \quad ②$$

把 ① 代入 ② 得点 Q 的纵坐标为 $-\frac{ay_1}{x_1}$。

又 PA' 的方程为

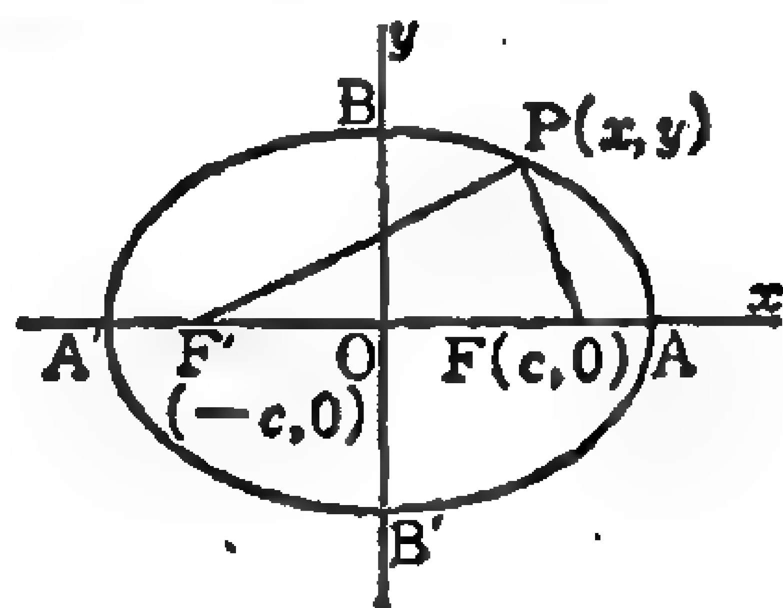
$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1+a}(x-x_1), \quad ③$$

把 ① 代入 ③ 得点 R 的纵坐标为 $\frac{ay_1}{x_1}$。

$$\therefore\quad QT=TR.$$

4．轴、顶点、焦点、离心率

3725　根据椭圆的定义求椭圆的方程，并说明椭圆的轴、顶点、焦点和离心率的意义。



解　距两定点的距离之和为定值的点的轨迹叫做椭圆。这两个定点叫做椭圆的焦点。

取连结焦点 F、F' 线段的中点 O 为原点，直线 FF' 为 x 轴，过 O 且与 FF' 垂直的直线为 y 轴。设 FF' 的坐标分别为 $(c, 0)$，$(-c, 0)$，即 $FF'=2c$。设适合条件的任意点为 $P(x, y)$，且 $PF+PF'=2a$，则由三角形的性质知

$$FF'<PF+PF',$$

即　　$2c<2a,\ c<a.$

根据 $PF+PF'=2a$ 可得

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a, \quad ①$$

$$\therefore\quad (x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2$$
$$-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2, \quad ②$$

即　　$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx.$

两边平方，

$$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$=a^4+2a^2cx+c^2x^2,$$

即　　$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$

因 $a>c$，设 $a^2-c^2=b^2(b>0)$，于是

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这就是椭圆方程的标准式．这个椭圆和 x 轴的交点是 $A(a,\ 0)$ 和 $A'(-a,\ 0)$，和 y 轴的交点是 $B(0,\ b)$ 和 $B'(0,\ -b)$．因此得

$$AA'=2a,\ BB'=2b.$$

AA' 叫做椭圆的长轴，BB' 叫做椭圆的短轴．把长轴和短轴总称为椭圆的轴．两轴的端点 A、A'，B、B' 叫做椭圆的顶点．长轴和短轴的交点 O 叫做椭圆的中心．过中心且两端在椭圆上的线段叫做椭圆的直径．

椭圆的中心 O 到焦点的距离是 c，由 $a^2-c^2=b^2$ 可知 $c=\sqrt{a^2-b^2}$．

$$\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

叫做椭圆的离心率．把它用 e 表示，即

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},\quad 0<e<1.$$

如用 e 表示椭圆的焦点，则 $F(ae,0)$，$F'(-ae,\ 0)$．在 x 轴上取满足条件 $OF\cdot OE=OA^2=a^2$ 的点，则

$$OE=\frac{a^2}{OF}=\frac{a^2}{ae}=\frac{a}{e},$$

我们把直线 $x=\frac{a}{e}$ 和 $x=-\frac{a}{e}$ 叫做椭圆的准线．

3726． 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的通径(通过焦点且垂直于长轴的弦长)的长．

解　设过椭圆的焦点 $F(ae,\ 0)$ 通径的上端为 $P(ae,\ l)$，则

$$\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1\quad 即\quad e^2+\frac{l^2}{b^2}=1,$$

$$\therefore\quad l^2=b^2(1-e^2).\qquad ①$$

e 是椭圆的离心率，$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$，把它代入①，

$$l^2=b^2\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=\frac{b^4}{a^2},$$

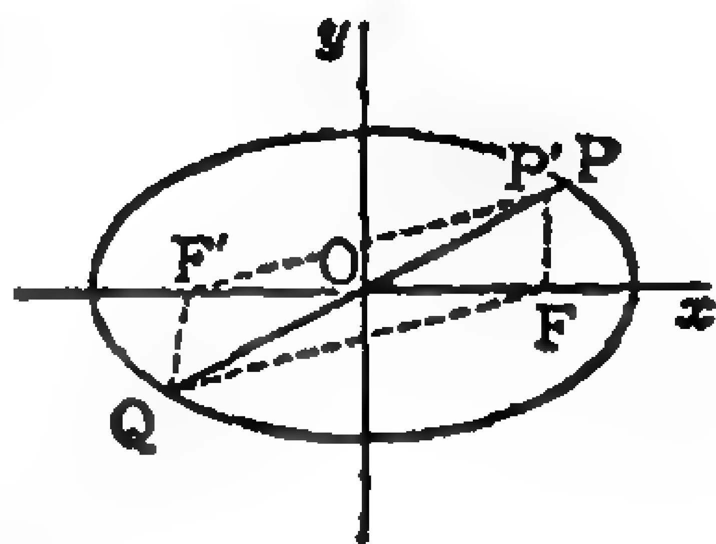
$$\therefore\quad l=\frac{b^2}{a}.$$

因而所求通径的长是

$$2l=\frac{2b^2}{a}.$$

3727． (1) 证明：过椭圆中心 O 的所有弦，都被点 O 所平分；

(2) 证明过点 O 的弦中，以垂直于 FF' 的弦最短．



解　(1) 设过点 O 的任意弦为 PQ，在 OP 上取点 P'，使 $OQ=OP'$．设 F、F' 为焦点，则 $P'F'QF$ 成平行四边形，

$$P'F'+P'F=QF'+QF.$$

由于 Q 是椭圆上的点，F、F' 是焦点，所以 $QF+QF'$ 是一定的，设它为 $2a$，则

$$QF+QF'=2a,$$

即点 P' 在椭圆上，从而 P' 与 P 重合．

$$\therefore\quad PO=OQ.$$

(2) 设 $PF=x$，$PF'=y$，则

$$x+y=PF+PF'=2a.$$

但是

$$(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$$
$$=4PO^2+4FO^2,$$

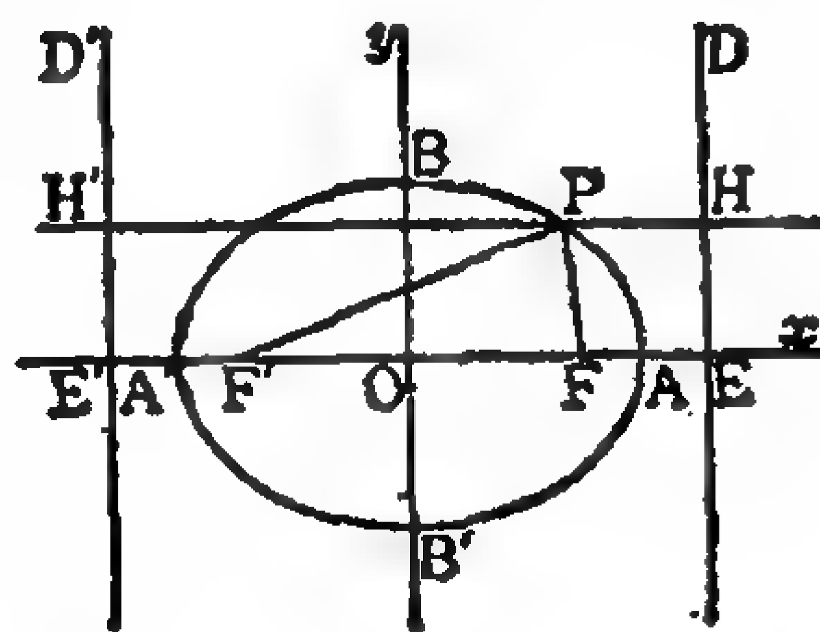
即

$$4PO^2=(x+y)^2+(x-y)^2-4FO^2$$
$$=4a^2+(x-y)^2-4FO^2.$$

此式中因 a 及 FO 都是定值，所以当 $x=y$ 时 $4PO^2$ 的值最小，即 PO 最小．这就是说，当 $PO\perp FF'$ 时弦 PQ 最小．即垂直于 FF' 的弦最短．

3728． 叙述椭圆准线的定义，并指出其性质．

解　对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$，



在 x 轴上取点 E，使 $OF\cdot OE=OA^2=a^2$ (F、F' 是焦点)，再取 E' 使

$$OF'\cdot OE'=a^2,$$

过 E、E' 分别作 x 轴的垂线 ED、$E'D'$，则它们的方程分别为 $x=\frac{a}{e}$，$x=-\frac{a}{e}$．此两直线叫做椭圆的准线．

设椭圆上的任意点为$P(x_1, y_1)$，从P分别作两准线的垂线，设其垂足分别为H, H'。由于点$P(x_1, y_1)$在椭圆上，所以

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

$$\therefore\quad y_1^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_1^2)=(1-e^2)(a^2-x_1^2)$$
$$=a^2-x_1^2-a^2e^2+e^2x_1^2.$$

由于 $FP^2=(x_1-ae)^2+y_1^2$
$$=x_1^2-2aex_1+a^2e^2+a^2-x_1^2-a^2e^2+e^2x_1^2$$
$$=a^2-2aex_1+e^2x_1^2=(a-ex_1)^2.$$

同理，$F'P^2=(x_1+ae)^2+y_1^2=(a+ex_1)^2$。

$$\therefore\quad FP=a-ex_1,\ F'P=a+ex_1$$
$$(\because\quad |x|<a,\ 0<e<1).$$

又 $$PH=\frac{a}{e}-x_1=\frac{a-ex_1}{e},$$

$$\therefore\quad FP:PH=a-ex_1:\frac{a-ex_1}{e}$$
$$=1:\frac{1}{e}=e:1,$$

$$PH'=x_1+\frac{a}{e}=\frac{a+ex_1}{e},$$

$$\therefore\quad F'P:PH'=a+ex_1:\frac{a+ex_1}{e}$$
$$=1:\frac{1}{e}=e:1.$$

故从椭圆上的任意点P到焦点的距离和到准线的距离之比是一定的，即$e:1(0<e<1)$。即P到焦点的距离较小。

如取短轴在x轴上，长轴在y轴上，则椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(b>a>0),$$

其焦点的坐标是$(0, \pm be)$，准线的方程是$y=\pm\frac{b}{e}$，其中$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$。

3729. 求椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$的长轴、短轴、焦点、准线和离心率。

解 在椭圆方程$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$中，令$y=0$，则$x=\pm\sqrt{5}$；令$x=0$，则$y=\pm\sqrt{3}$。设长轴为$2a$，短轴为$2b$，则

$$2a=2\sqrt{5},\quad 2b=2\sqrt{3}.$$

离心率

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

中心到焦点的距离$ae=\sqrt{2}$，故焦点的坐标分别为$(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$。准线的方程是

$$x=\frac{a}{e}=\frac{5}{\sqrt{2}},\quad x=-\frac{a}{e}=-\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

3730. 已知椭圆中心和焦点的距离是2，$e=\frac{1}{3}$，求其长轴和短轴。

解 设长轴、短轴分别为$2a$、$2b$，则有

$$ae=2,\quad e=\frac{1}{3},\quad\therefore\quad a=6.$$

又 $$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore\quad 1-\frac{b^2}{36}=\frac{1}{9},\quad\therefore\quad b^2=32,$$

从而 $b=4\sqrt{2}$。因此，

$$2a=12,\quad 2b=8\sqrt{2}.$$

3731. 求下列椭圆的长轴、短轴、离心率、焦点坐标和准线方程。

(1) $4x^2+9y^2=1$,

(2) $25x^2+36y=100$,

(3) $x^2+25y^2-2x-24=0$,

(4) $4x^2+y^2=16x$。

解 长轴和短轴分别用$2a$、$2b$表示，离心率用e表示。

(1) $4x^2+9y^2=1$ 即

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=1,$$

故$2a$、$2b$分别是1，$\frac{2}{3}$。

离心率$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$。

因$ae=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{6}$，故焦点坐标为$\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{6},0\right)$。

因$\frac{a}{e}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$，故准线方程是

$$x=\pm\frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

(2) $25x^2+36y^2=100$ 即

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}=1.$$

故 $2a$、$2b$ 分别是 4, $\frac{10}{3}$。

离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{11}}{6}$.

因 $ae=\frac{\sqrt{11}}{3}$, 故焦点为 $\left(\pm\frac{\sqrt{11}}{3},0\right)$.

因 $\frac{a}{e}=\frac{12}{\sqrt{11}}$, 故准线方程是 $x=\pm\frac{12}{\sqrt{11}}$.

(3) $x^2+25y^2-2x-24=0$

即 $$(x-1)^2+25y^2=25,$$

$$\therefore\ \frac{(x-1)^2}{5^2}+y^2=1,$$

故它的图象是把椭圆 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$ 向右平移1所得的椭圆。其长轴短轴分别为10, 2, 离心率

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}, ae=2\sqrt{6}.$$

所以焦点坐标为 $(\pm2\sqrt{6}+1,0)$.

$$\frac{a}{e}=\frac{25\sqrt{6}}{12},$$

所以准线方程为

$$x=\pm\frac{25\sqrt{6}}{12}+1.$$

(4) $4x^2+y^2=16x$ 即

$$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}=1,$$

故它的图象是把椭圆 $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}$ 向右平移2所得到的椭圆。它的长轴在 y 轴上，短轴和 x 轴平行。其长轴、短轴即 $2a$、$2b$ 分别为 8, 4。

离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$ae=2\sqrt{3}$, 所以焦点坐标是 $(2,\pm2\sqrt{3})$.

$\frac{a}{e}=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$, 因而准线方程是

$$y=\pm\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

3732. 证明：过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 的焦点且与长轴垂直的弦长是 $2a(1-e^2)$.

解　在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，令 $x=ae$，则

$$\frac{y^2}{b^2}=1-e^2,\quad\therefore\ y=\pm b\sqrt{1-e^2}.$$

故所求弦长是

$$2b\sqrt{1-e^2}=\frac{2b^2}{a}=2a\cdot\frac{b^2}{a^2}=2a(1-e^2).$$

注　把这条弦叫做椭圆的通径。

设 DE 为准线，由问题 **3728** 知

$$OD=\frac{a}{e}$$

且 $$OF=ae,$$

$$\therefore\ DF=\frac{a(1-e^2)}{e};$$

因而 $$DF\cdot e=a(1-e^2)=LF$$

即 $$DF:LF=1:e.$$

3733. 求以 (1, 2) 为焦点，准线方程为 $x+y=-1$，离心率为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆方程。

解　设椭圆上的任意点为 $P(x, y)$，则点 P 和焦点 (1, 2) 的距离为

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}.$$

又点 P 和准线 $x+y+1=0$ 的距离为

$$\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}},$$

因此，由问题 **3728** 知

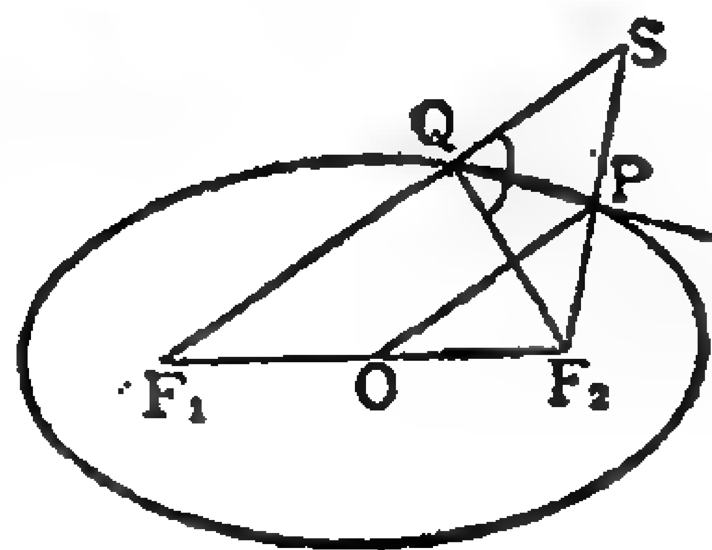
$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore\ x^2+y^2-2x-4y+5=\frac{1}{8}(x^2+y^2+2xy+2x+2y+1),$$

即 $7x^2-2xy+7y^2-18x-34y+39=0$.

5. 杂题

3734. 已知椭圆的焦点为 F_1、F_2，椭圆上一点 Q，证明由焦点作 $\triangle F_1QF_2$ 顶点 Q 的外角平分线的垂线，其垂足 P 在一定圆上。



解　在 F_1Q 的延

长线上取 QS 等于 QF_2，设顶点 Q 的外角平分线和 SF_2 的交点为 P，则 P 是 SF_2 的中点。

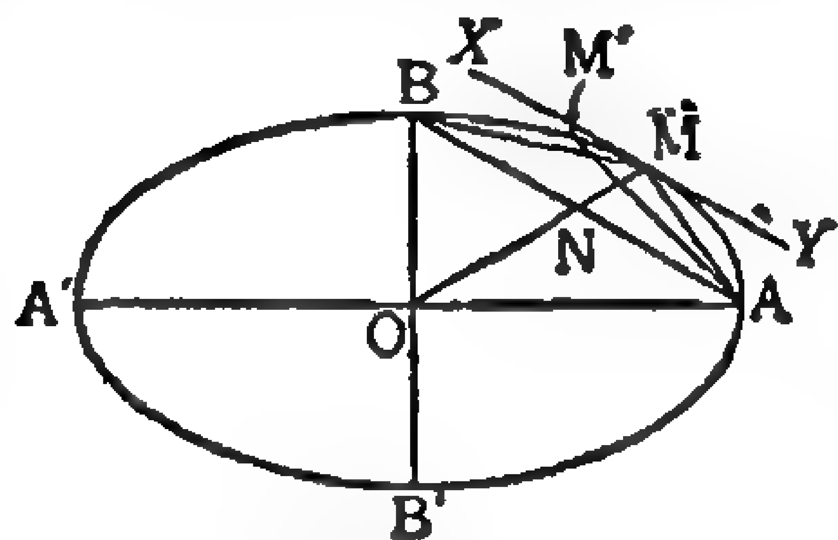
如设 F_1F_2 的中点为 O，则

$$OP \parallel F_1S,$$

且 $$OP=\frac{1}{2}F_1S=\frac{1}{2}(QF_1+QF_2).$$

因点 Q 在椭圆上，所以 QF_1+QF_2 一定，从而 OP 也一定。O 是椭圆的中心，它是定点，故 P 在以 O 为圆心，定值 $\frac{1}{2}(QF_1+QF_2)$ 为半径的圆上。

3735. 在中心为 O，长轴为 AA'，短轴为 BB' 的椭圆弧 AB 上求一点 M，使四边形 $MAOB$ 的面积最大。



解 ［分析］要四边形 $MAOB$ 的面积最大，只须 $\triangle MAB$ 的面积最大。如果 $\triangle MAB$ 的面积最大，则过 M 且与 AB 平行的直线和椭圆除 M 外不再有交点，即该直线是椭圆的切线。因此，M 一定是与 AB 平行的切线的切点。这时，可利用与 AB 平行的弦的中点轨迹是直径的道理，作出点 M。

［作法］ 取 AB 的中点 N，ON 的延长线和椭圆交于 M，则 M 就是所求的点。

［证明］ 由问题 **3704**，与 AB 平行的弦中点的轨迹是过 AB 中点的直径，所以点 M 处的切线 XY 平行于 AB。

设弧 AB 上点 M 以外的任意一点 M'，则 M' 在两平行线 AB 和 XY 之间，因此

$$S_{\triangle M'AB}<S_{\triangle MAB},$$

从而　　四边形 $M'AOB$ 面积

$<$四边形 $MAOB$ 面积，

即四边形 $MAOB$ 的面积最大。

3736. 设过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上点 $P(x_1, y_1)$ 的直径的共轭直径和椭圆的交点为 $D(x_2, y_2)$，则

$$x_2=\pm\frac{a}{b}y_1,\quad y_2=\mp\frac{b}{a}x_1.$$

解 已知 $P(x_1, y_1)$ 为椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ①$$

上的一点，直径 OP 的共轭直径的一端为 $D(x_2, y_2)$。直径 OP 的方程是 $y=\frac{y_1}{x_1}x$，由问题 **3704** 知，OP 的共轭直径 OD 的方程为

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x, \qquad ②$$

求 ①、② 的交点可得 D 的坐标。

从 ②，　$$\frac{ay}{bx}=-\frac{bx_1}{ay_1},$$

两边平方并加上 1，得

$$\frac{a^2y^2+b^2x^2}{b^2x^2}=\frac{b^2x_1^2+a^2y_1^2}{a^2y_1^2}. \qquad ③$$

由 ①，　$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

又因 $P(x_1, y_1)$ 在 ① 上，所以

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2,$$

故由 ③ 得

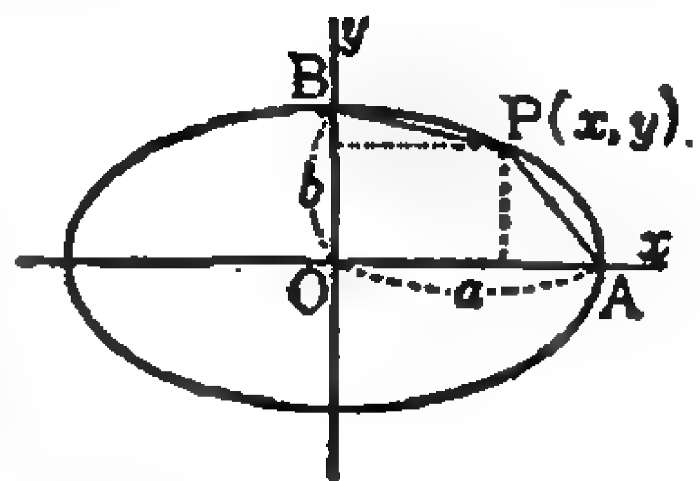
$$b^2x^2=a^2y_1^2,\quad \therefore\ x=\pm\frac{a}{b}y_1,$$

从而　　$$y=\mp\frac{b}{a}x_1.$$

$$\therefore \begin{cases} x_2=\frac{a}{b}y_1, \\ y_2=-\frac{b}{a}x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{a}{b}y_1, \\ y=\frac{b}{a}x_1. \end{cases}$$

这就是直径 OP 的共轭直径端点 D、D' 的坐标。

3737. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和 x 轴正向的交点为 A，和 y 轴正向的交点为 B，在弧 AB 上求一点 P，使四边形 $OAPB$ 的面积最大。



解 设适合条件的点为 $P(x, y)$，则

$$四边形\ OAPB\ 面积=S_{\triangle OPB}+S_{\triangle OPA}$$

$$=\frac{1}{2}(bx+ay).$$

又由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 知 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$。

因

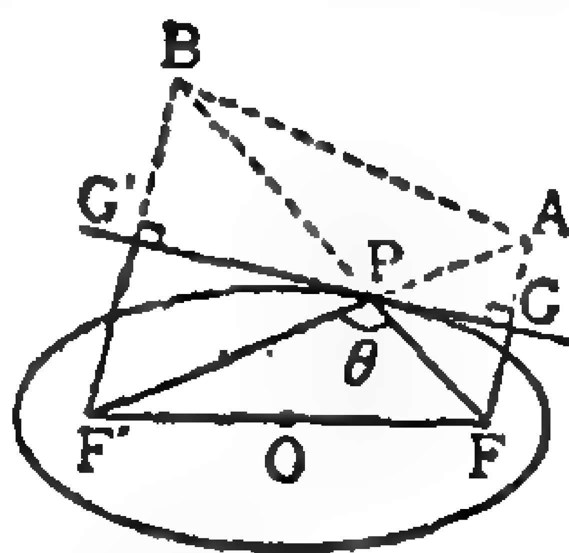
$$(bx+ay)^2+(bx-ay)^2$$

$$=2(b^2x^2+a^2y^2)=2a^2b^2,$$

故当 $bx-ay=0$ 时 $bx+ay$ 最大，其最大值为 $\sqrt{2}ab$。因而四边形 $OAPB$ 的面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}ab$.

注 当四边形 $OAPB$ 的面积最大时，点 P 的坐标满足 $bx=ay$，即 $S_{\triangle OPB}=S_{\triangle OPA}$。因此 OP 把 AB 二等分(参照问题 **3735**).

3738. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点，分别作这个椭圆上点 P 处的切线的垂线，其垂足分别为 G、G'，如果 $\angle FPF'=\theta$，则梯形 $FF'G'G$ 的面积是 $a^2\sin\theta$。



解 GG' 把 $\angle FPF'$ 的外角平分. 设 $F'P$ 和 FG 的交点为 A，FP 和 $F'G'$ 的交点为 B，则 F、A，F'、B 关于 GG' 对称.

$$\therefore\quad PA=PF,PB=PF',$$

从而 $$F'A=FB=PF+PF'=2a.$$

设梯形 $FGG'F'$ 的面积为 S，由于

梯形 $FF'G'G$ 面积＝梯形 $GG'BA$ 面积，

$$\therefore\quad 2S=\text{梯形 } FF'BA \text{ 面积}$$

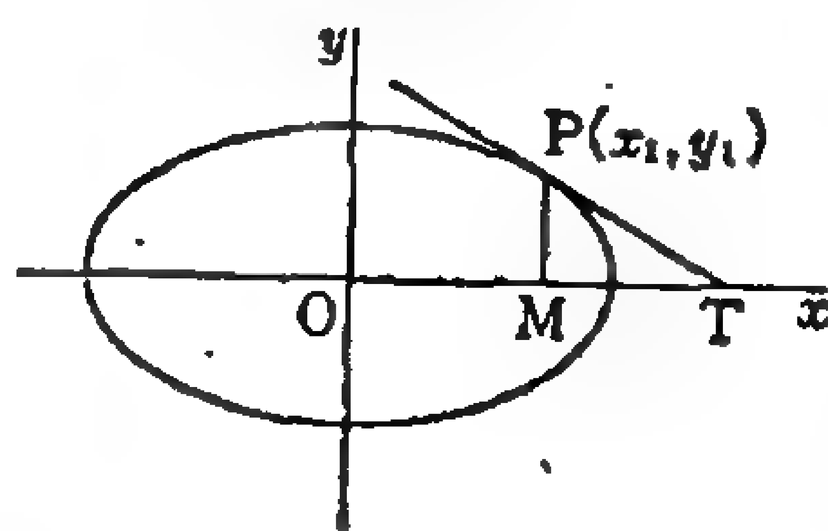
$$=\frac{1}{2}F'A\cdot FB\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a\sin\theta,$$

故 $$S=a^2\sin\theta.$$

注 $a>b$ 的条件是必要的.

3739. 从中心是 O 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 P 向 x 轴所作垂线的足为 M，又点 P 处的切线和 x 轴的交点为 T，则 $OM\cdot OT$ 是一定的.



解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上点 P 处的切线方程为

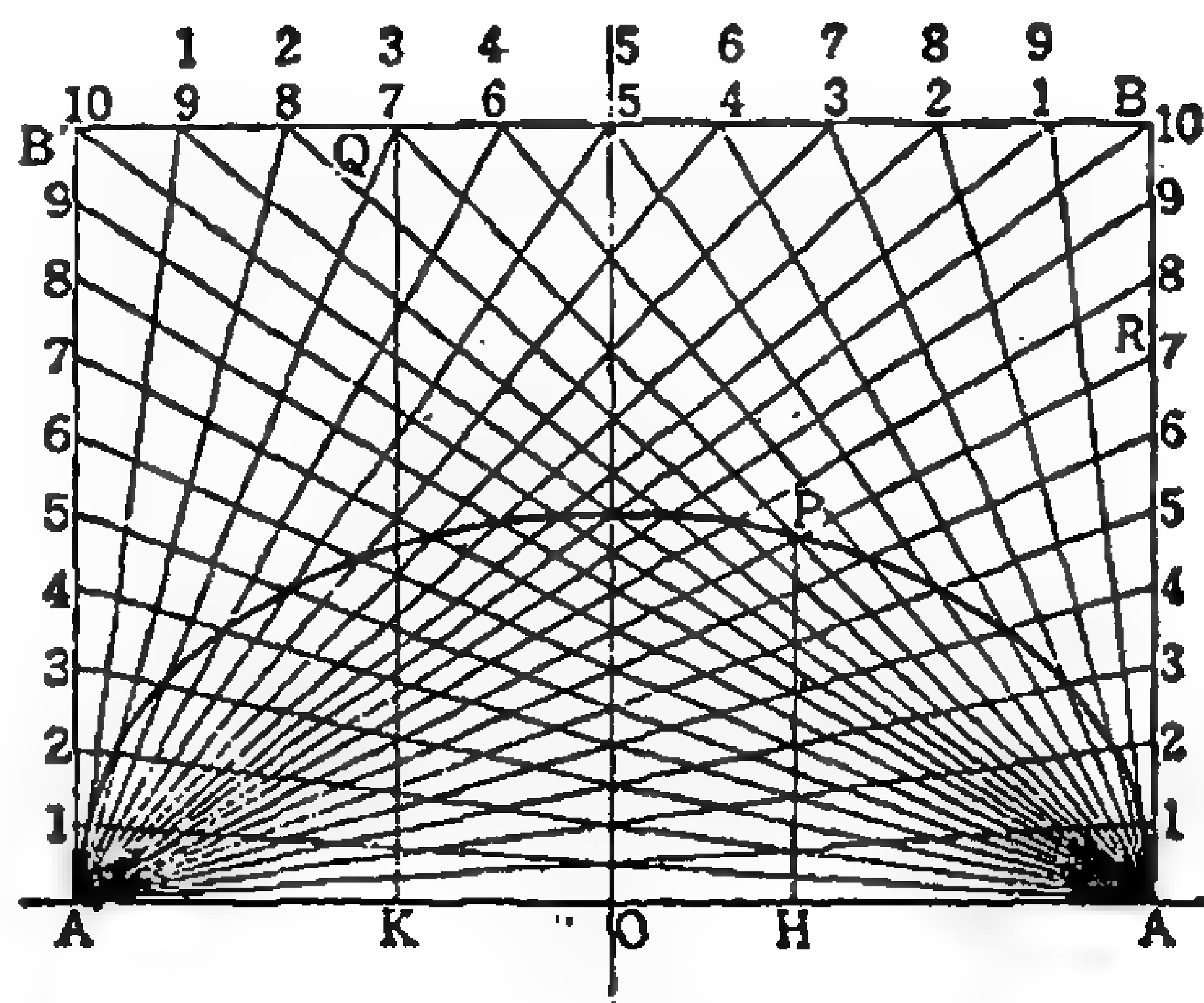
$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (\text{问题 } \mathbf{3718}).$$

在此式中，令 $y=0$，则 $x=\frac{a^2}{x_1}$.

$$\therefore\quad OT=\frac{a^2}{x_1},\quad \text{又 } OM=x_1,$$

故 $$OM\cdot OT=a^2\ (\text{定值}).$$

3740. 把矩形的各边 n 等分，如图连接直线，证明对应直线的交点都在一个椭圆上。



解 设矩形两邻边的长分别为 $2a$、$2b$. 取其一边 AA' 为 x 轴，AA' 的垂直平分线为 y 轴. 设第 m 条对应直线的交点为 $P(x, y)$，则

$$\triangle APH\backsim\triangle AQK,\ \therefore\quad \frac{HP}{HA}=\frac{KQ}{KA},$$

即 $$\frac{y}{a-x}=\frac{2b}{2a\cdot\frac{m}{n}}=\frac{nb}{ma}. \qquad ①$$

又 $$\triangle A'PH\backsim\triangle A'RA,\ \therefore\quad \frac{HP}{A'H}=\frac{AR}{A'A},$$

即 $$\frac{y}{a+x}=\frac{2b\cdot\frac{m}{n}}{2a}=\frac{mb}{na}. \qquad ②$$

①×② 消去 m、n， $$\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

即 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

此式说明对应直线的交点 P 都在以 $2a$、$2b$ 为两轴的椭圆上.

3741. 下面 x、y 都是 t 的函数，消去 t 求 x、y 间的关系.

(1) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$;

(2) $x=\frac{2at}{1+t^2},\ y=\frac{b(1-t^2)}{1+t^2}$.

解 (1) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$

即 $$\frac{x}{a}=\cos t,\quad \frac{y}{b}=\sin t;$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2t+\sin^2t=1,$$

即
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

它的图象是椭圆。

(2) $x=\dfrac{2at}{1+t^2},\ y=\dfrac{b(1-t^2)}{1+t^2}.$

因而 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \dfrac{y}{b}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}.$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2=1,$$

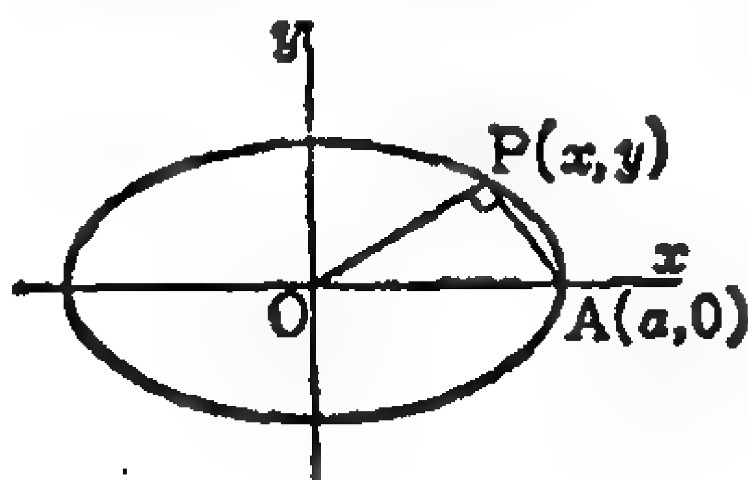
即
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

它的图象是椭圆。

注　(1)、(2) 都是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程，可作公式使用。

3742. 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上取一点 P，如果 O 是原点，A 的坐标是 $(a,\ 0)$ 且 $\angle OPA$ 为直角，a、b 间有什么关系。

解　设点 P 的坐标为 $P(x,y)$，则由



$OP^2+PA^2=OA^2$

知
$$x^2+y^2+(x-a)^2+y^2=a^2,$$

即
$$y^2=x(a-x).$$

把它代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x(a-x)}{b^2}=1,$$
$$b^2x^2+a^2x(a-x)=a^2b^2,$$
$$b^2(x^2-a^2)+a^2x(a-x)=0,$$
$$(x-a)[(b^2-a^2)x+ab^2]=0.$$

由于 $x<a$，所以 $x-a\neq0$，因此

$$x=\frac{ab^2}{a^2-b^2}.$$

再由 $x<a$，得 $\dfrac{ab^2}{a^2-b^2}<a$，

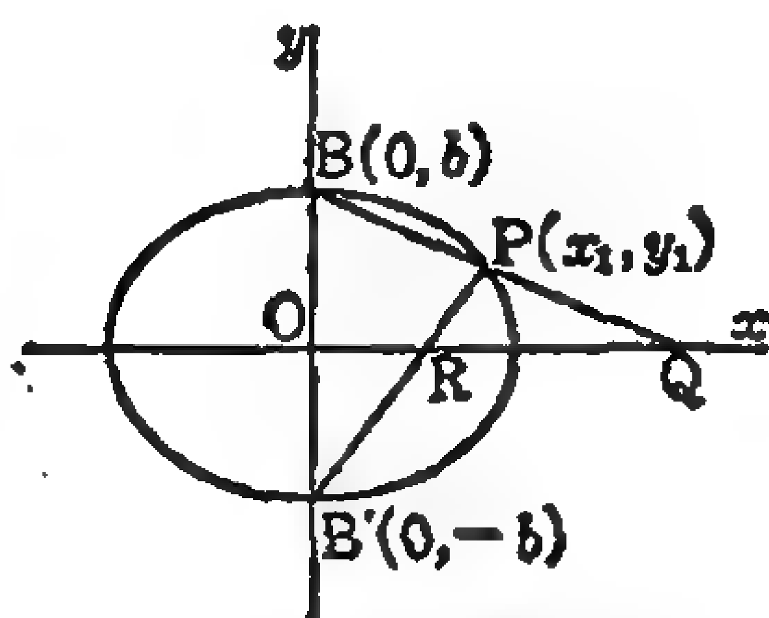
$$\therefore\quad a^2>2b^2,\quad 即\quad a>\sqrt{2}\,b.$$

3743. 中心是 O 的椭圆上的一点和短轴两端点所连结的两直线和长轴(或其延长线)分别交于 Q、R，则 $OQ\cdot OR$ 一定。

解　设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (a>b>0),$$

椭圆上的一点为 $P(x_1,\ y_1)$，短轴的两端点分别为 $B(0,\ b)$、$B'(0,\ -b)$，BP、$B'P$ 和长轴(或其延长线)分别交于点 Q、R，则直线 BPQ 的方程为



$$y-b=\frac{y_1-b}{x_1}x,$$

$$\therefore\quad OQ=\left|-\frac{bx_1}{y_1-b}\right|.$$

又 $B'RP$ 的方程为

$$y+b=\frac{y_1+b}{x_1}x,$$

$$\therefore\quad OR=\left|\frac{bx_1}{y_1+b}\right|.$$

因而
$$OQ\cdot OR=\left|-\frac{b^2x_1^2}{y_1^2-b^2}\right|.$$

但知
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

即
$$b^2x_1^2=a^2(b^2-y_1^2).$$

$$\therefore\quad OQ\cdot OR=a^2(定值).$$

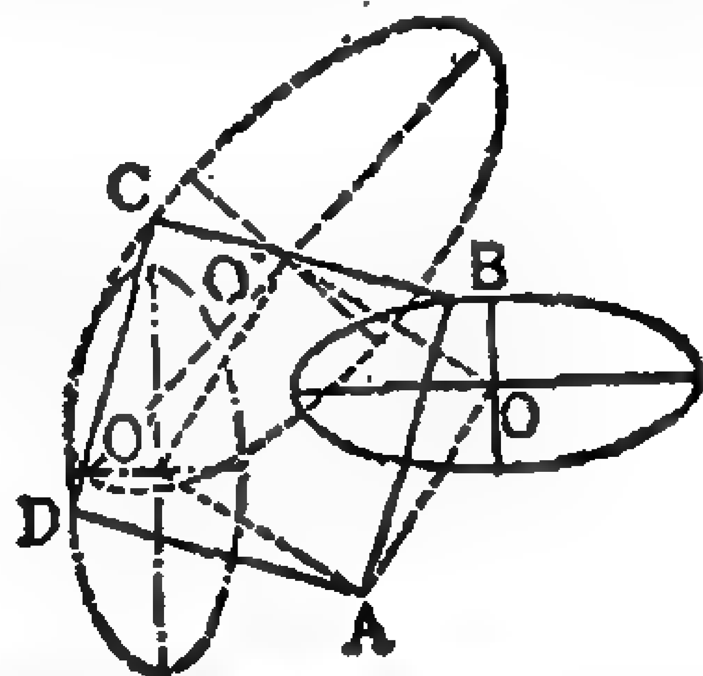
3744. 在 $\triangle ABC$ 中，顶点 B、C 是定点，顶点 A 是动点。过 B 作顶点 A 的外角平分线的垂线，垂足为 P，BC 的中点为 O。当 OP 是定长时，问顶点 A 在什么曲线上。

解　设 BP 延长线和 CA 延长线的交点为 C'，则

$$AB=AC',$$
$$BP=PC',$$
$$AB+AC=AC'+AC=2OP=定值,$$

故顶点 A 在以 B、C 为焦点，长轴为 $2OP$ 的椭圆上。

3745. 已知 A 为定点，B 为在椭圆上运动的点，如以 AB 为正方形 $ABCD$ 的一边，分别求出其余两顶点 C、D 的轨迹(只叙述形状及位置，不加证明)。



解　$ABCD$是正方形，所以$AB=AD$，$\angle BAD=90°$。因此当点B在椭圆O上运动时，则D在以A为旋转中心把椭圆O旋转$90°$所得的椭圆O'上运动。又

$$\angle BAC=45°,\ AB:AC=1:\sqrt{2},$$

所以C在以A为旋转中心把椭圆O旋转$45°$，并以A为位似中心，扩大$\sqrt{2}$倍所得的椭圆O''上运动。如果正方形$ABCD$的顶点C、D的取法与前述的取法关于AB对称时，则作为C、D轨迹的椭圆和前面求得的椭圆关于轴OA对称。

3746. 如右图。已知椭圆的焦点为F、F'，O为中心，AA'为长轴，BB'为短轴。证明

$$OA=FB,\ OB^2=AF\cdot AF'.$$

解　设$OA=a$，$OB=b$，F是椭圆的焦点，则

$$OF=ae,\quad e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}},$$

因而
$$OF=\sqrt{a^2-b^2}.$$

$$\therefore\ BF^2=b^2+(\sqrt{a^2-b^2})^2=a^2,$$
$$BF=a=OA.$$

又
$$FA=OA-OF=a-OF,$$
$$F'A=A'O+OF=a+OF,$$
$$\therefore\ FA\cdot F'A=a^2-OF^2$$
$$=a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2=b^2=OB^2.$$

3747. 在直圆锥顶点的一侧作与其内切的两个球O、O'，在这两个球之间作切于这两个球的平面π，则这个平面截圆锥的切口是椭圆或圆。

解　设圆锥的顶点为V，两个球O、O'与平面π的切点为F、F'，平面π截圆锥的切口上的任意点为P。母线VP和两个球O、O'的切点分别为Q、R，则PF、PQ都是球O的切线，所以

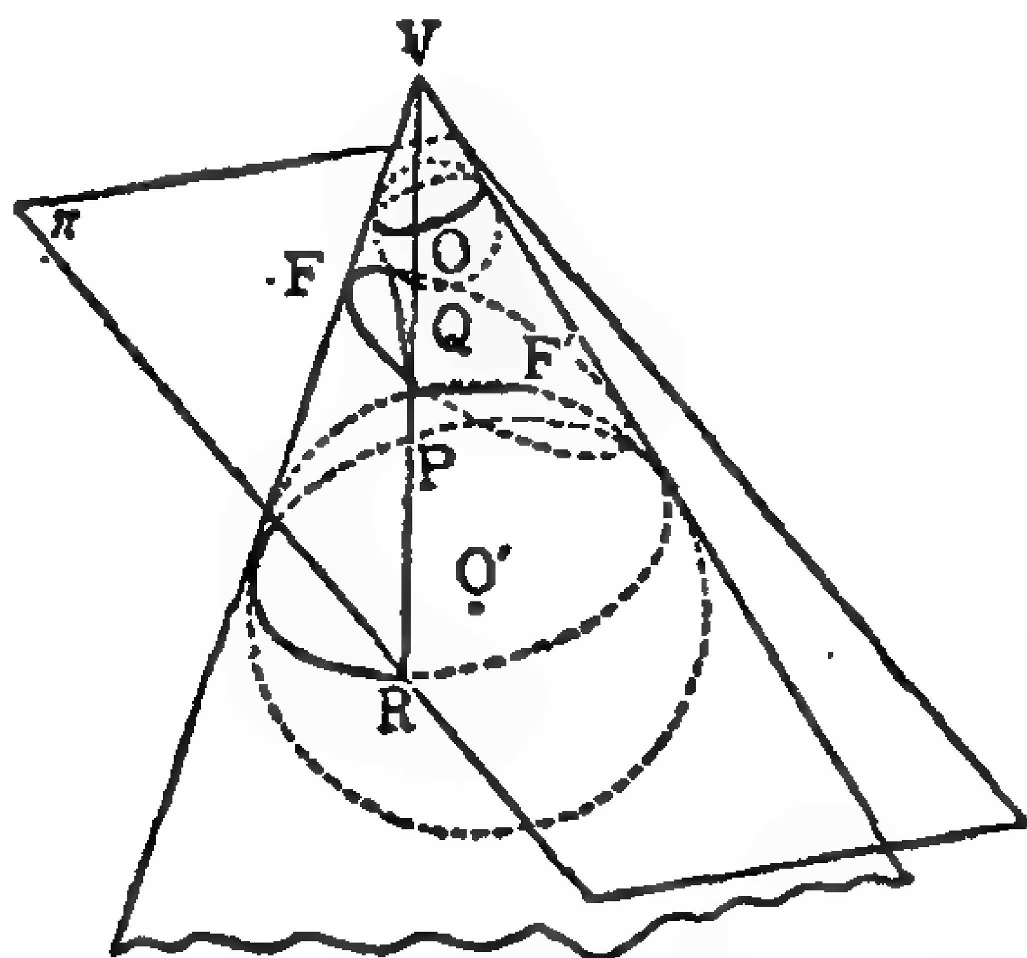
$$PF=PQ.$$

同理，
$$PF'=PR,$$
$$\therefore\ PF+PF'=PQ+PR=QR.$$

由于QR的长是一定的，设它为$2a$，则

$$PF+PF'=2a.$$

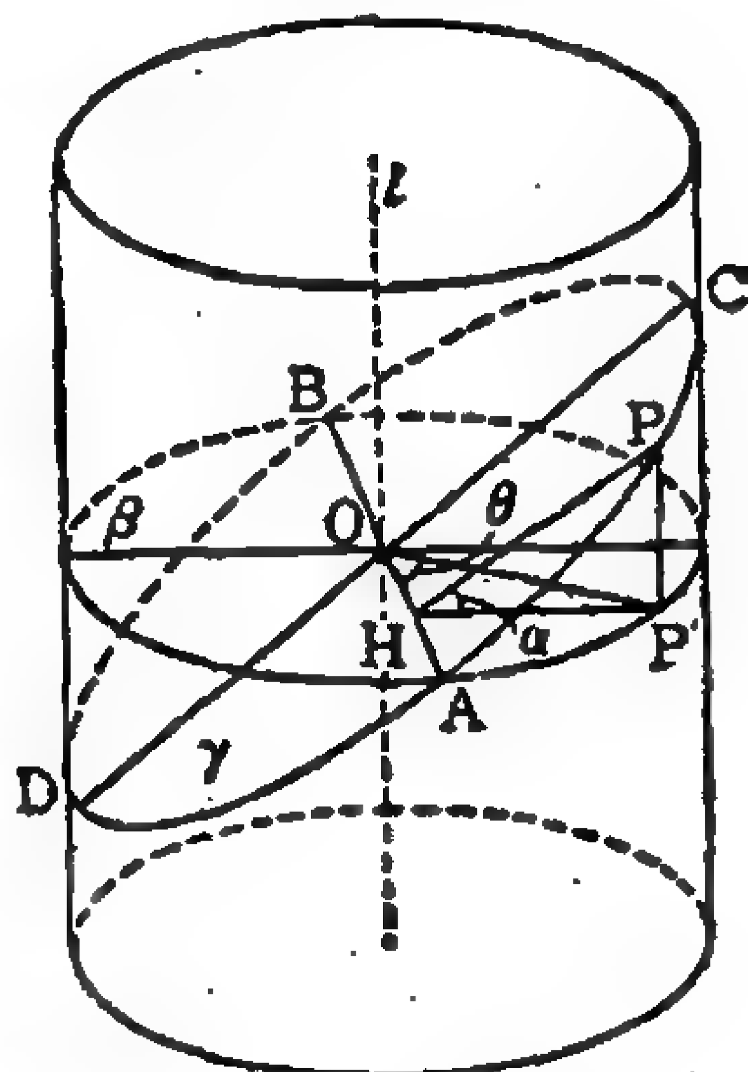
因而点P的轨迹是以F、F'为焦点的椭圆。



当切点F、F'在平面π上重合时，则点P的轨迹为圆。

注　QR是过R、V、O'的平面截两球时所得两圆的外公切线的长，所以是一定的。

3748. 底面半径为r的直圆柱，用与其轴不垂直的平面截时，则其截口为椭圆。



解　设与直圆柱的轴l不垂直的平面为γ，P是平面γ截这个直圆柱的截口上任意一点，过γ和l的交点O且垂直于l的平面为β。从P作平面β的垂线PP'，再从P向两平面β和γ的交线AB作垂线PH，则由三垂线定理知$P'H\perp AB$。

设
$$\angle PHP'=\alpha,\ \angle P'OH=\theta.$$

取AB在x轴上，AB的垂直平分线CD在y轴上，建立坐标系。设点P的坐标为(x, y)，则

$$x=OH=OP'\cos\theta=r\cos\theta,$$
$$y=HP=P'H\sec\alpha=r\sin\theta\sec\alpha,$$
$$\therefore\ \frac{x}{r}=\cos\theta,\quad \frac{y}{r\sec\alpha}=\sin\theta.$$

从两式消去θ，

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2\sec^2\alpha}=1.$$

这就是截口曲线的方程，它表示长轴为$2r\sec\alpha$，短轴为$2r$的椭圆。

注　α是平面β和γ的交角，当平面γ确定时，α是一定的。

第五章　双　曲　线

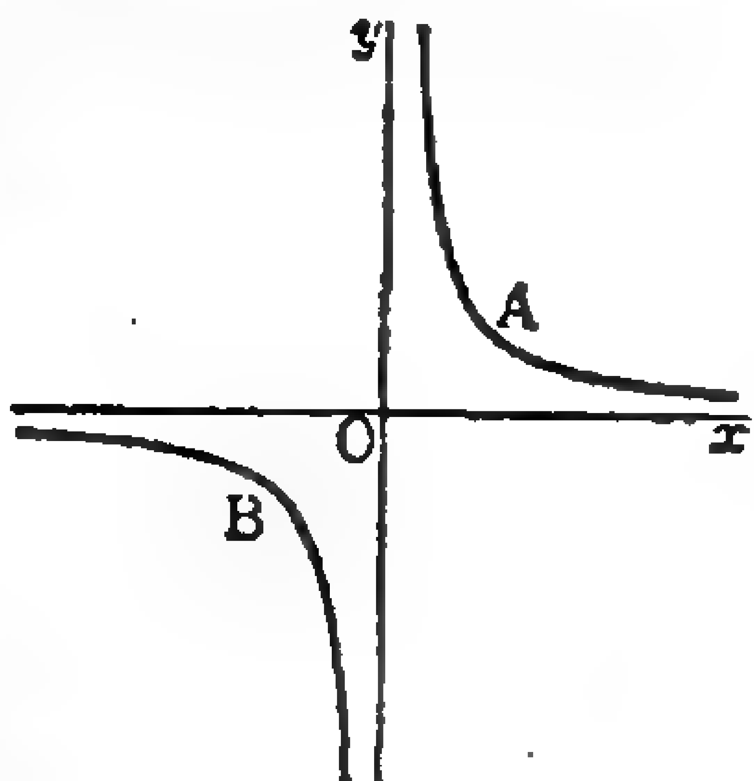
1. 图象

3749. 分别作出方程 $xy=16$ 和 $xy=-16$ 的图象。

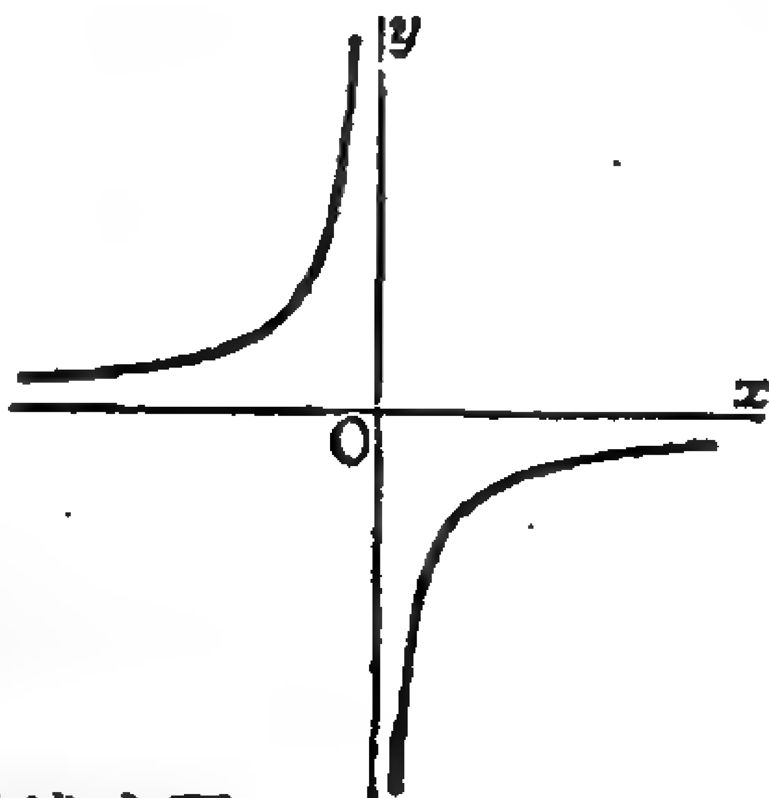
解 把 x, y 的对应值列表如下:

x	-16	-8	-4	-2	-1	0	1	2	4	8	16	32	64	$\cdots$
y	-1	-2	-4	-8	-16	∞	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$

以表中各组对应值为坐标描点,用平滑的曲线连结,就得到所求的图形,它就是双曲线。其顶点 A、B 的坐标是 $(4, 4)$, $(-4, -4)$,渐近线方程是 $x=0$, $y=0$,即两坐标轴。两条渐近线互相垂直的双曲线叫做等轴双曲线。



同理,方程 $xy=-16$ 的图象是双曲线 $xy=16$ 关于 y 轴对称的双曲线。



3750. 作出下列各分式函数的图象,并指出它们相互的位置关系和渐近线方程:

(1) $y=\dfrac{12}{x}$,　　(2) $y=\dfrac{12}{x-3}$,

(3) $y=\dfrac{12}{x-3}+4$.

解 (1) 求适合(1)的点 (x, y) 的坐标得下表:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	-4	-6	-12	$\pm\infty$	12	6	4	$\cdots$

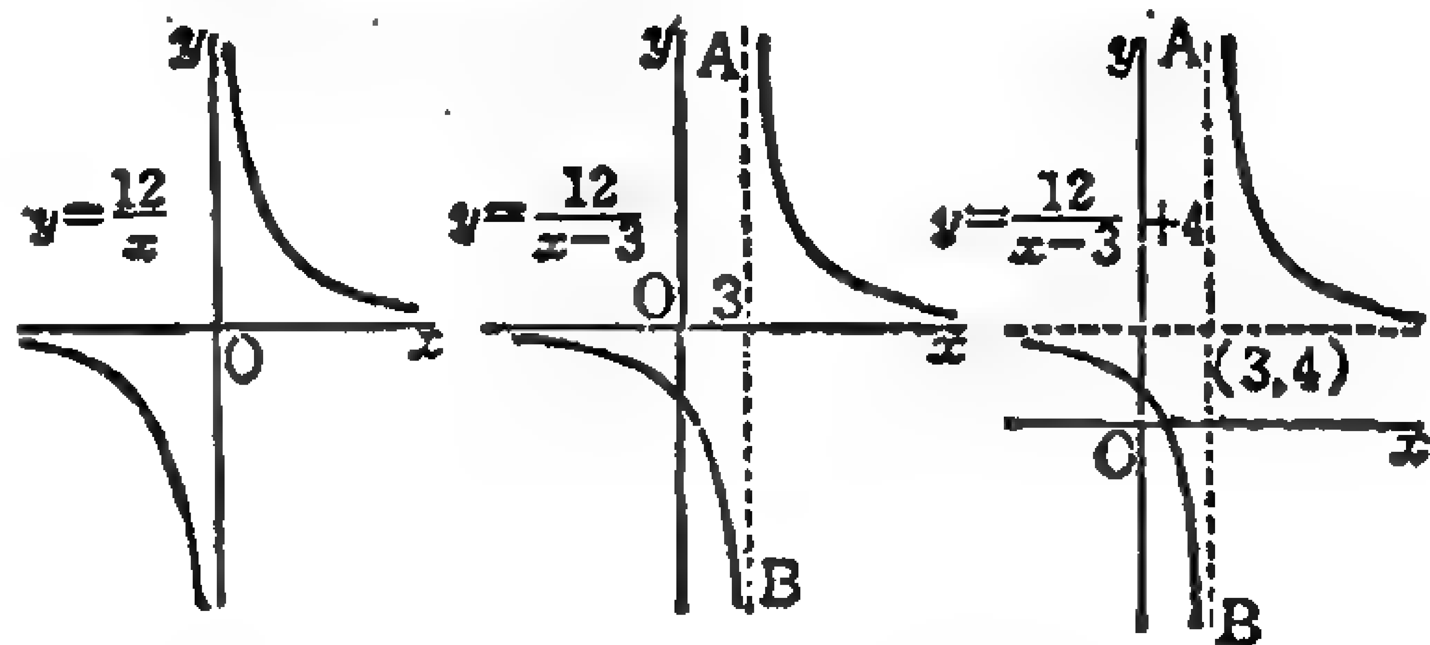
由此可得(1)的图象。它是以两直线 $x=0$, $y=0$ 为渐近线的等轴双曲线(图1)。

(2) $y=\dfrac{12}{x-3}$ 即 $(x-3)y=12$,它的图象是把双曲线 $xy=12$ 沿 x 轴方向平行移动3(向右移3)所得的双曲线,其渐近线是 $x=3$, $y=0$。双曲线中心(渐近线的交点)的坐标是 $(3, 0)$(图2)。

(3) $y=\dfrac{12}{x-3}+4$,即 $(x-3)(y-4)=12$,它的图象是把双曲线 $xy=12$ 沿 x 轴正向平行移动3,再沿 y 轴正向平行移动4(向上移动4)所得的双曲线,其渐近线方程是 $x=3$, $y=4$,中心的坐标是 $(3, 4)$(图3)。

从本题的研究可知下列问题:

分式函数 $y=\dfrac{a}{x-p}+q$ 即 $(x-p)(y-q)=a$,它的图象是把等轴双曲线 $xy=a$ 沿 x 轴正向平行移动 p,再沿 y 轴正向平行移动 q 所得到的双曲线。其渐近线是两直线 $x=p$, $y=q$,中心坐标是 (p, q)。



(1)　　(2)　　(3)

3751. 对于下列分式函数:

(1) 作图象。　　(2) 求渐近线方程。

(3) 哪些平行移动能重合,应作怎样的移动。

(i) $y=\dfrac{1}{x+2}$,　　(ii) $y=-\dfrac{1}{x}+2$,

(iii) $y=\dfrac{-1}{x-2}$,　　(iv) $y=\dfrac{1}{x-1}+1$,

(v) $y=\dfrac{1-2x}{x-1}$,　　(vi) $y+\dfrac{1}{x}+1=0$.

解 (1) (图象略)。

(2) (i) $y=\dfrac{1}{x+2}$ 的图象是把双曲线 $y=$

$\frac{1}{x}$ 沿 x 轴向左平行移动 2 所得的图象，它的渐近线是 $x=-2$, $y=0$。

(ii) $y=-\frac{1}{x}+2$ 即 $x(y-2)=-1$, 它的图象是把双曲线 $xy=-1$ 沿 y 轴正向平行移动 2(向上平移)所得的图象，渐近线是 $x=0$, $y=2$。

(iii) $y=-\frac{1}{x-2}$ 即 $(x-2)y=-1$ 的图象是把双曲线 $xy=-1$ 向右平行移动 2 所得的图象，渐近线是 $x=2$, $y=0$。

(iv) $(x-1)(y-1)=1$ 的图象是把双曲线 $xy=1$ 向右平行移动1，再向上平行移动 1 所得的图象，渐近线是 $x=1$, $y=1$。

(v) 把 $\frac{1-2x}{x-1}$ 的分子除以分母，得

$$y=-2-\frac{1}{x-1}.$$

即 $(x-1)(y+2)=-1$, 它的图象是把双曲线 $xy=-1$ 向右平行移动 1, 再向下平行移动 2 所得的图象，渐近线的方程是 $x=1$, $y=-2$。

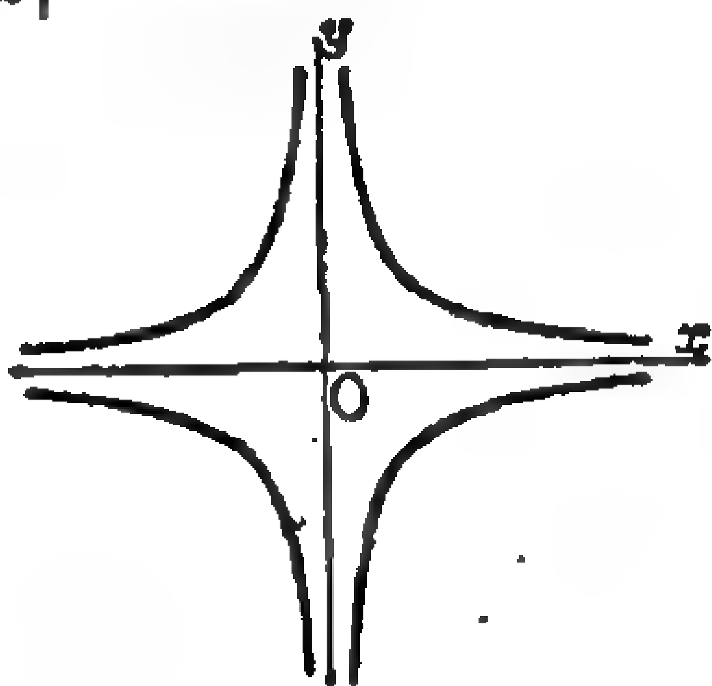
(vi) $y+\frac{1}{x}+1=0$, 即 $y+1=-\frac{1}{x}$, 亦即 $x(y+1)=-1$. 它的图象是把双曲线 $xy=-1$ 向下平行移动 1 所得的图象，渐近线的方程是 $x=0$, $y=-1$。

(3) (i)和(iv)平行移动能重合，即把(i)平行移动 1 就成为 (iv)。(ii)、(iii)、(v)、(vi)平行移动能重合，即把(ii)的图象向右平行移动 2, 再向下平行移动 2, 即和(iii)重合。把(iii) 向左平行移动 1, 再向下平行移动 2 就和(v)重合。把(v)向左平行移动 1, 再向上平行移动 1 就和(vi)重合。

3752. 作 $|y|=\frac{1}{|x|}$ 的图象。

解　两边平方，得

$$y^2=\frac{1}{x^2}.$$



$$\therefore\quad y^2-\frac{1}{x^2}=0,$$

从而

$$\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{x}\right)=0.$$

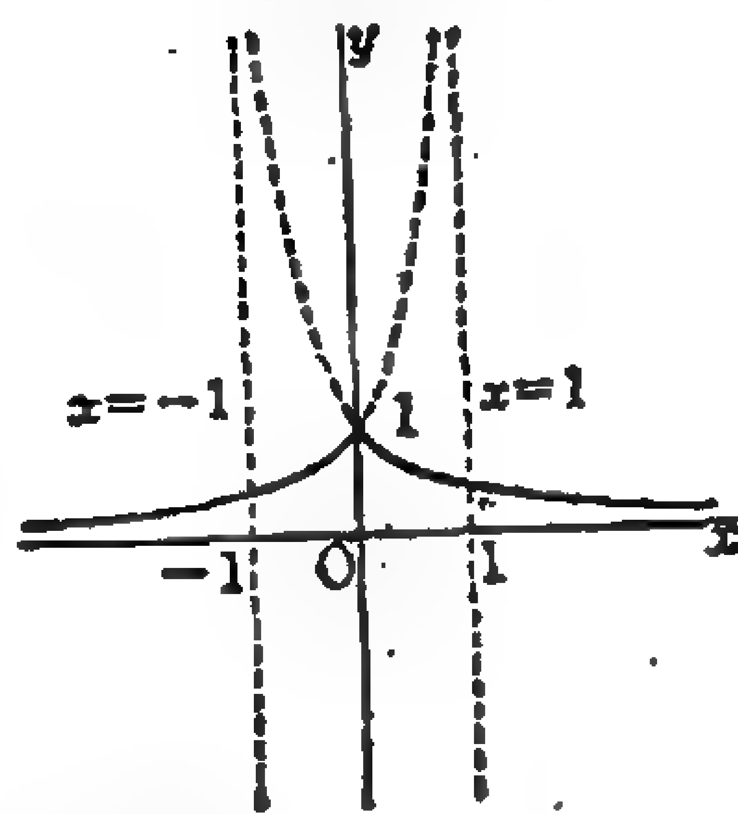
它的图象是两条双曲线：

$$y=-\frac{1}{x}\quad 和\quad y=\frac{1}{x}.$$

3753. 作 $y=\frac{1}{1+|x|}$ 的图象。

解　如 $x>0$ 时，则

$$y=\frac{1}{1+|x|}=\frac{1}{1+x}.$$



它的图象是以 $y=0$, $x+1=0$ 为渐近线的双曲线。

当 $x>0$ 时，$\frac{1}{1+x}>0$, 所以 $y>0$。　①

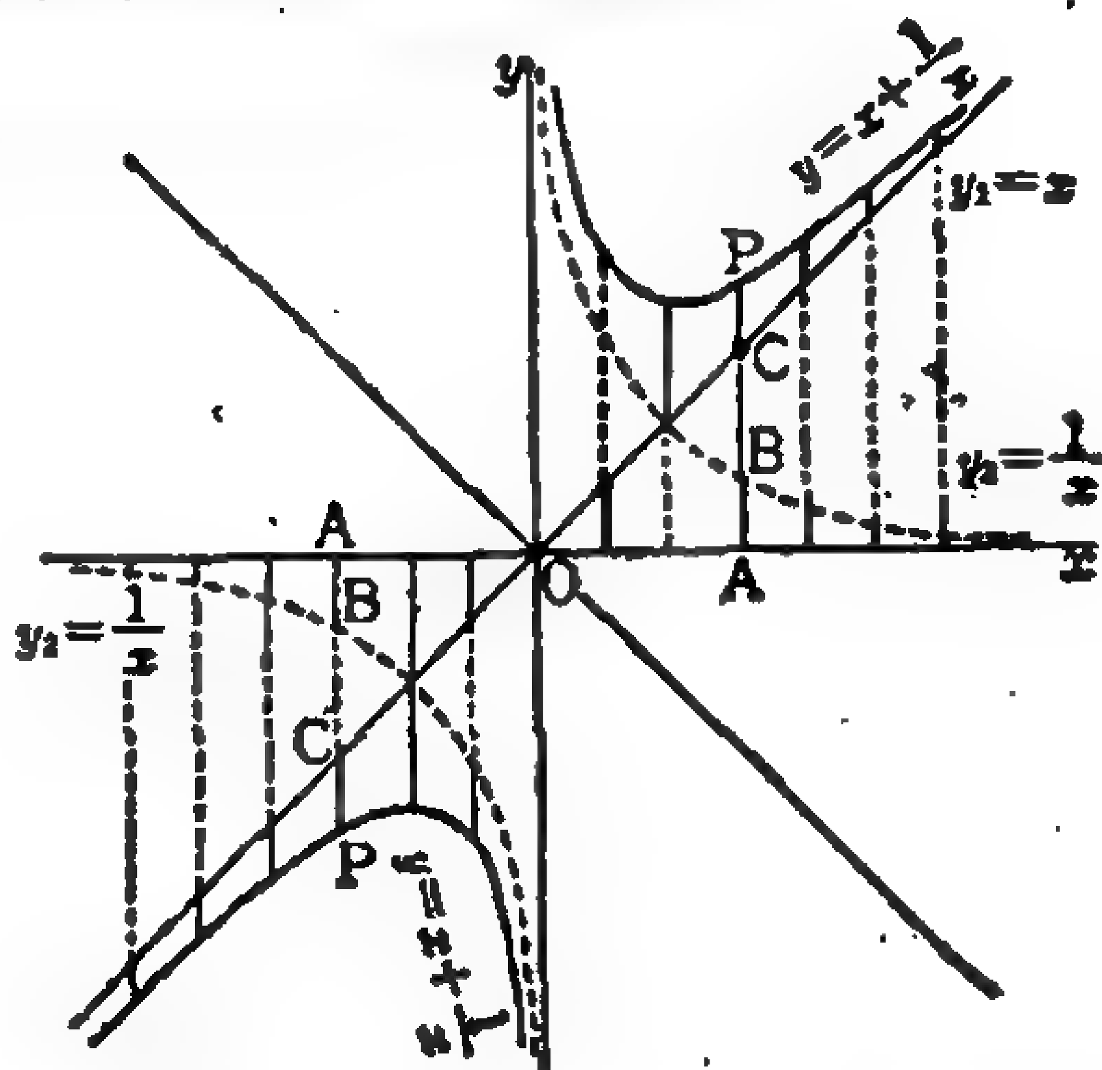
当 $x<0$ 时，则 $y=\frac{1}{1+|x|}=\frac{1}{1-x}$. 它的图象是以 $y=0$, $x=1$ 为渐近线的双曲线。

当 $x<0$ 时，$\frac{1}{1-x}>0$, $\therefore y>0$.　②

由 ①、② 的条件可知所求图象是图中实线部分。

3754. 作 $y_1=x$, $y_2=\frac{1}{x}$ 的图象。并利用该图象作 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象。

解　$y_1=x$ 的图象是过原点 O 和 x 轴成 45° 角的直线。$y_2=\frac{1}{x}$ 是以原点 O 为中心，x 轴、y 轴为渐近线的等轴双曲线。



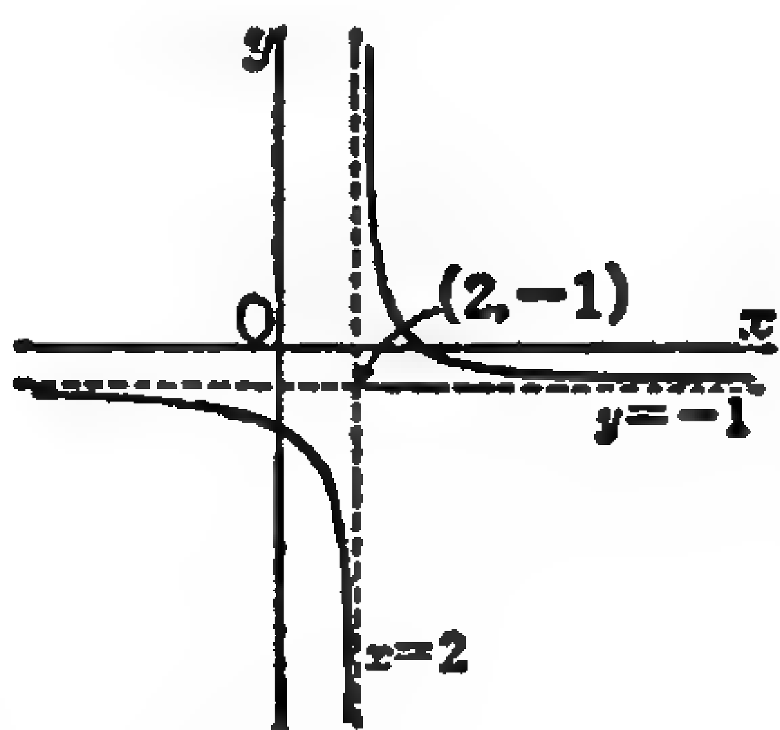
如图，在 x 轴上取任意点 A, 过点 A 作 x 轴的垂线与双曲线 $y_2=\frac{1}{x}$、直线 $y_1=x$ 分别交于 B、C。在 AC 的延长线上取 CP 等于 AB。设 $OA=x$, 则 $AC=y_1$, $AB=CP=y_2$。所以

$$AP=AC+AB=y_1+y_2.$$

因此 $y=y_1+y_2=x+\frac{1}{x}$ 的图象，是把对应于 x 轴上所有的点 A 的 P 点所连成的光滑曲线。

注 $|x|$ 无限大时，所求曲线无限接近于直线 $y=x$，$|x|$ 无限趋近于 0 时，这条曲线无限接近于 y 轴。因而曲线 $y=x+\frac{1}{x}$ 的渐近线是 $y=x$ 和 $x=0$（即 y 轴）。

3755. 作 $xy+x-2y=6$ 的图象。



解 把上式变形为 $(x-a)(y-b)=c$ 的形式：

$$xy+x-2y-2=4,$$

即 $$x(y+1)-2(y+1)=4,$$

$$\therefore\quad (x-2)(y+1)=4.$$

它的图象是把双曲线 $xy=4$ 的中心平行移动到点 $(2,\ -1)$，两直线 $x=2$，$y=-1$ 为渐近线的等轴双曲线。

3756. 作方程 $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=1$ 的图象。

解 去分母，

$3y+2x=xy$，

即 $$xy-2x-3y=0.$$

$$\therefore\quad (x-3)(y-2)=6.$$

因而它的图象是以 $x=3$，$y=2$ 为渐近线的等轴双曲线，但应除去原点。

3757. 作下列方程的图象。

(1) $x^2-y^2=4$，　　(2) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$。

解 (1) 就 y 解之，得

$$y=\pm\sqrt{x^2-4}.$$

由于 y 是实数，所以 $x^2-4\geqq0$，即 $x\geqq2$ 或 $x\leqq-2$。计算 x、y 的对应值，列表如下：

x	-4	-3	-2	2	3	4	…
y	±3.5	±2.2	0	0	±2.2	±3.5	…

描点作图可得下左图的双曲线。图中虚线表示渐近线。

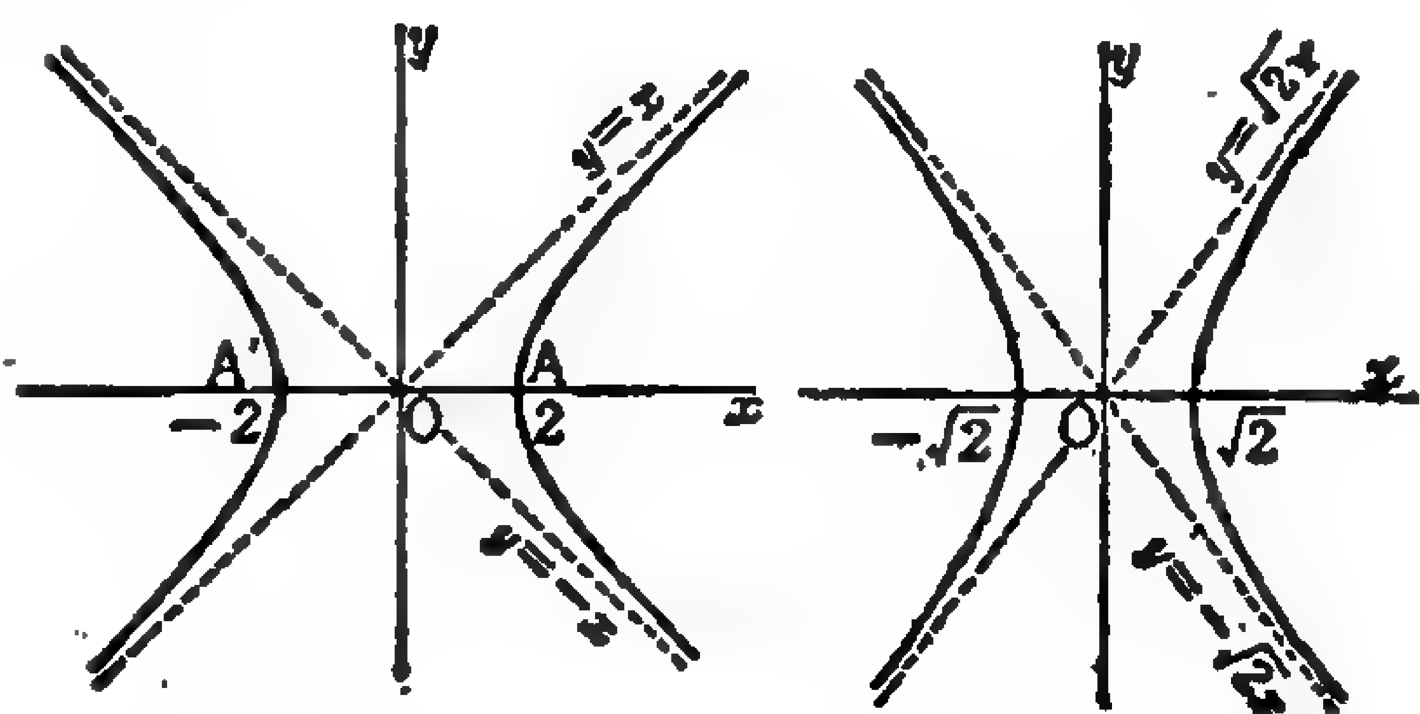
(2) 就 y 解之，得

$$y=\pm\sqrt{2(x^2-2)}.$$

由于 y 是实数，所以 $x^2-2\geqq0$ 即 $x\geqq\sqrt{2}$ 或 $x\leqq-\sqrt{2}$。计算 x、y 的对应值，列表如下：

x	-3	-2	$-\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$	2	3	…
y	±3.7	±2	0	0	±2	±3.7	…

描点作图可得下右图的双曲线。图中虚线是渐近线。



注 在(1)中，取 $x^2-y^2=0$ 时，$y=\pm x$ 为渐近线方程；在(2)中，取 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=0$ 时，$y=\pm\sqrt{2}x$ 为渐近线方程。参照问题 **3773**。

3758. 指出双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 与下列双曲线的位置关系。

(1) $(x+1)^2-\frac{y^2}{4}=1$，

(2) $x^2-\frac{(y-3)^2}{4}=1$，

(3) $(x-3)^2-\frac{(y+2)^2}{4}=1$。

解 $$x^2-\frac{y^2}{4}=1. \qquad ①$$

(1) 的图象是把双曲线 ① 的中心平移到 $(-1,\ 0)$ 所得的双曲线。

(2) (2)的图象是把双曲线 ① 的中心平移到 $(0,\ 3)$ 所得的双曲线。

(3) (3)的图象是把双曲线 ① 的中心平移到 $(3,\ -2)$ 所得的双曲线。

3759. 作下列函数的图象。

(1) $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$，

(2) $3x^2-2y^2-12x+12y-12=0$，

解 (1) 把 $9(x^2-2x)-4(y^2+4y)=43$ 变

形，得

$$9(x^2-2x+1)-4(y^2+4y+4)$$
$$=43+9-16,$$
$$9(x-1)^2-4(y+2)^2=36,$$

即
$$\frac{(x-1)^2}{2^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1.$$

它的图象是以(1, −2)为中心，以

$$\frac{x-1}{2}=\pm\frac{y+2}{3}$$

即 $y=\frac{3x-7}{2}$ 及 $y=\frac{-1-3x}{2}$ 为渐近线的双曲线。

(2) 与(1)一样，得

$$3(x^2-4x+4)-2(y^2-6y+9)$$
$$=12+12-18,$$
$$3(x-2)^2-2(y-3)^2=6.$$

两边同除以6，得

$$\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{(y-3)^2}{(\sqrt{3})^2}=1.$$

因而它的图象是以点(2, 3)为中心，以

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}}=\pm\frac{y-3}{\sqrt{3}}$$

即两直线 $y=\sqrt{\frac{3}{2}}x+(3-\sqrt{6})$

及
$$y=-\sqrt{\frac{3}{2}}x+3+\sqrt{6}$$

为渐近线的双曲线。

3760. 作下列函数的图象。

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$，　(2) $y=-\sqrt{x^2-1}$.

解

(1) $x^2-1\geqq0$

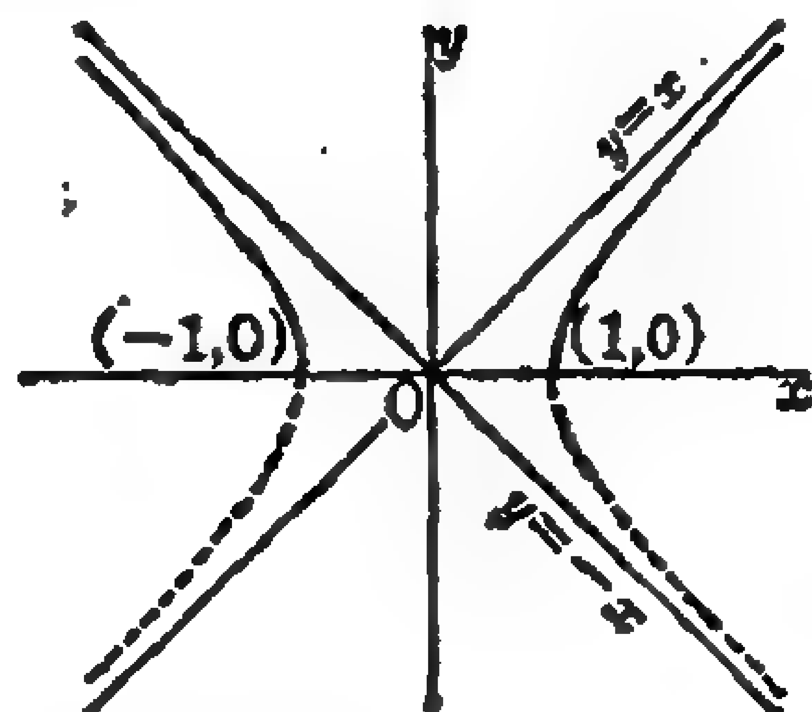
即

$(x-1)(x+1)\geqq0$.

因而

$x\leqq-1$, $x\geqq1$.

在上述范围内，取 x、y 的对应值并作图，可得上图的实线部分。



如果把两边平方，变形，得

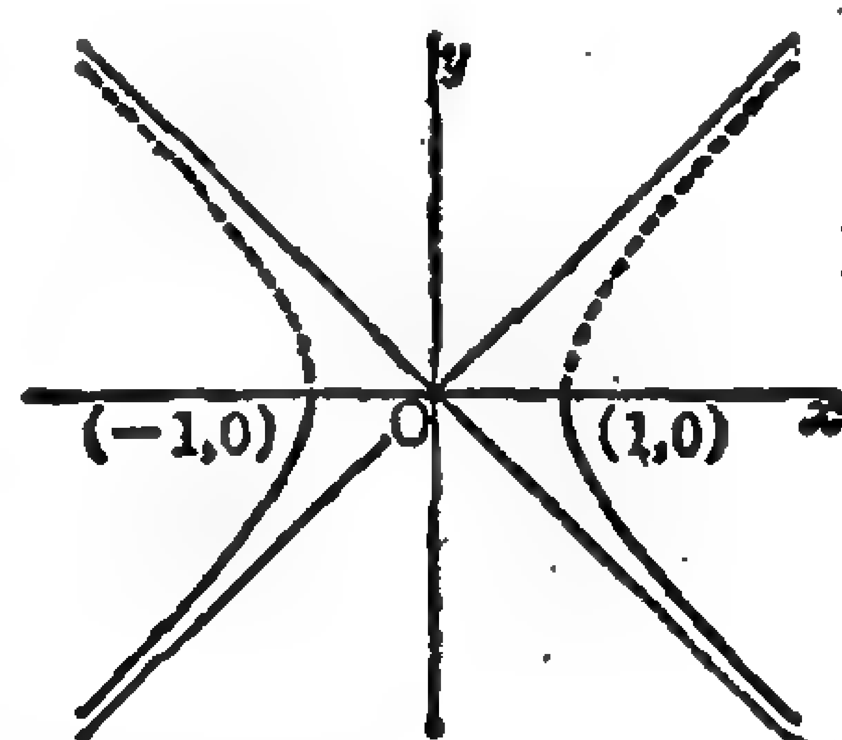
$$y^2=x^2-1 \quad 即 \quad x^2-y^2=1.$$

这是以原点为中心，直线 $y=x$ 及 $y=-x$ 为渐近线的等轴双曲线。因此所求的图象是这条双曲线在 x 轴上方的部分。

(2) 它与(1)仅右边的符号不同，所以它的图象是双曲线

$$x^2-y^2=1$$

在 x 轴的下方部分。



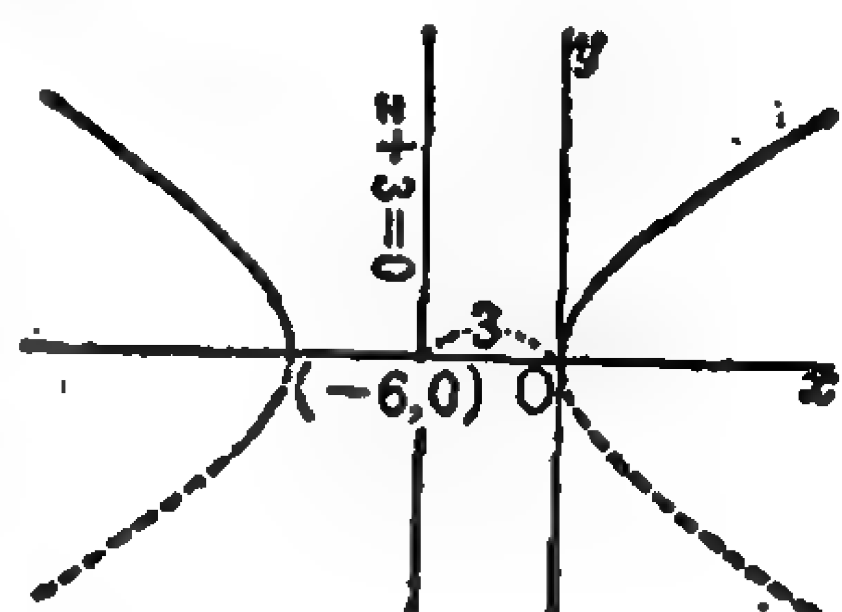
3761. 作

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2+6x}$$

的图象。

解　把函数变形为 $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^2-3^2}$，

即



$$\frac{(x+3)^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1.$$

这是以点(−3, 0)为中心，$y=\pm\frac{2}{3}(x+3)$ 为渐近线的双曲线。由于 $y>0$，故所求的图象是双曲线在 x 轴上方的部分。

3762. 作下列函数的图象。

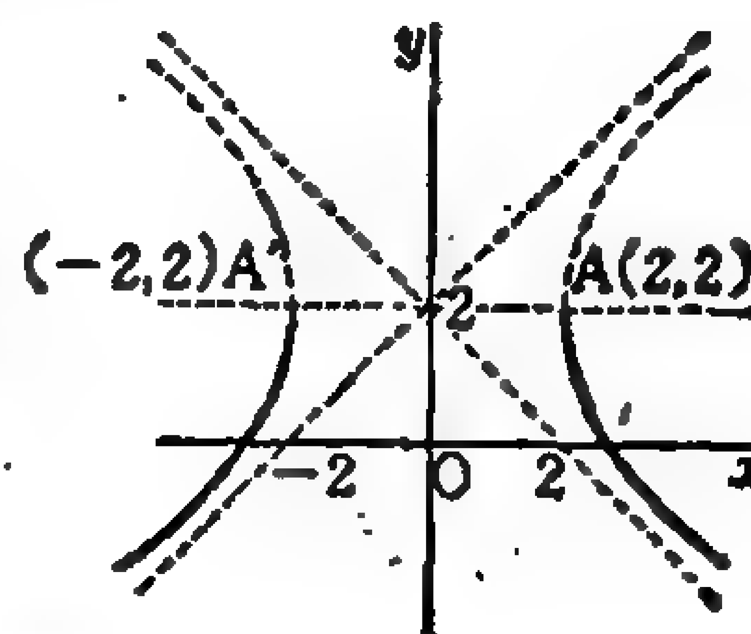
(1) $y=2-\sqrt{x^2-4}$,

(2) $y=1+\sqrt{x^2+4x+3}$.

解　(1) 因

$$x^2-4\geqq0,$$

所以 $x\geqq2$ 或 $x\leqq-2$. 在这个范围内取 x 的值，计算对应的 y 值，作图象，得右图的实线部分。



如果把题设函数变形，得

$$y-2=-\sqrt{x^2-4x}.$$

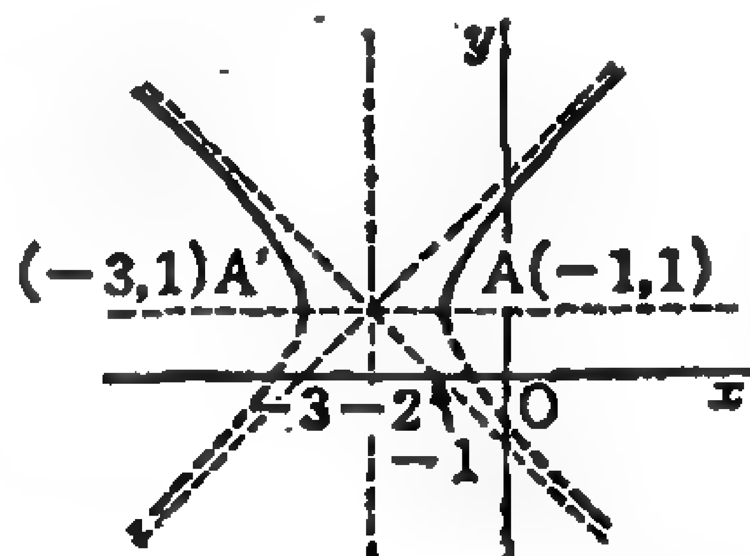
两边平方并整理，得

$$\frac{x^2}{2^2}-\frac{(y-2)^2}{2^2}=1.$$

这是以点(0, 2)为中心，$y=\pm x+2$ 为渐近线的等轴双曲线，它的图象就是在直线 $y=2$ 的下方部分。

(2) 因 $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)\geqq0$，所以 $x\leqq-3$ 或 $x\geqq-1$. 在这个范围内取 x 的值，计算对应的 y 值，可得所求函数的图象是

图中的实线部分。



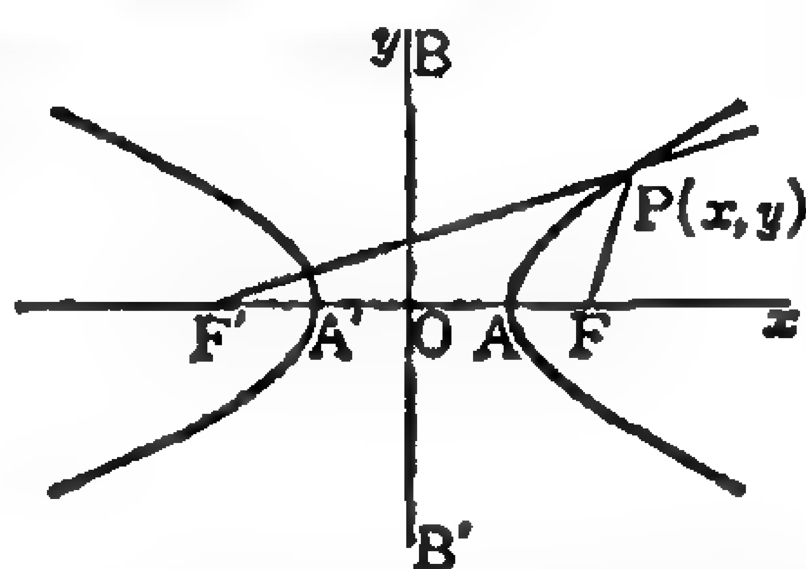
如果和(1)一样，把题设函数变形为

$(x+2)^2-(y-1)^2=1,$

这是以点 $(-2, 1)$ 为中心，以 $y-1=\pm(x+2)$ 即 $y=x+3$, $y=-x-1$ 为渐近线的等轴双曲线。所求图象是这条双曲线在直线 $y=1$ 的上方部分。

2. 轨迹

3763. 求坐标平面上到两定点 $F(c, 0)$、$F'(-c, 0)$ 距离的差是定值 $2a(a<c)$ 的点 P 的轨迹。



解 取过 F、F' 的直线为 x 轴，线段 FF' 的垂直平分线为 y 轴。设适合条件的点 P 的坐标为 (x, y)，则

$$PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$PF'-PF=2a.$$

所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

移项，得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

将两边平方，化简，得

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2.$$

两边再平方，得

$$a^2[(x-c)^2+y^2]=c^2x^2-2ca^2x+a^4.$$

整理，得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \quad ①$$

令 $c^2-a^2=b^2$ 代入①，得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

两边除以 a^2b^2，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

这就是双曲线方程的标准形式。

注 关于双曲线应注意以下几点：

(i) F、F' 称为双曲线的焦点(FOCUS)，坐标是 $F(c, 0)$、$F'(-c, 0)$。由 $c^2-a^2=b^2$ 知 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，故焦点坐标亦可写成 $F(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$，$F'(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$。

(ii) FF' 的中点 O 称为双曲线的中心，曲线截 x 轴上两点间的线段 $AA'=2a$，称为主轴(或实轴)，截 y 轴上两点间的线段 $BB'=2b$，称为虚轴，主轴的两端点 A、A' 称为顶点。

(iii) 从中心 O 到焦点的距离 c，

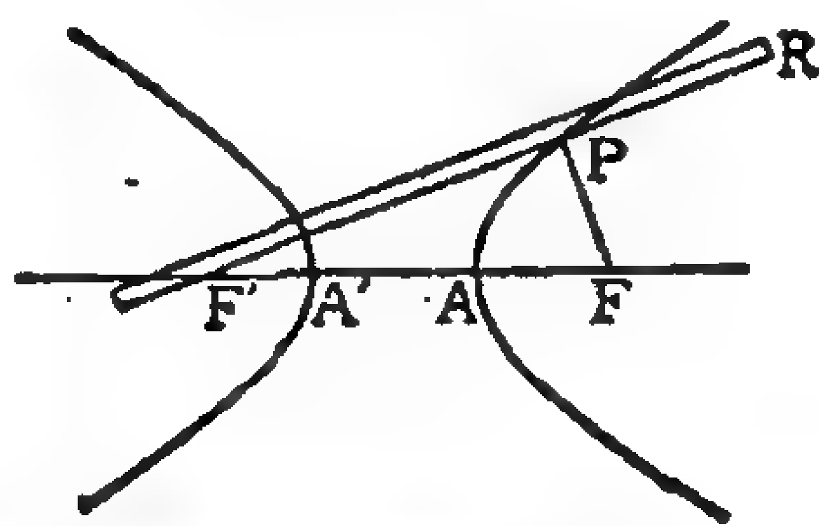
$$c=\sqrt{a^2+b^2},$$

所以

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

设 $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，则 e 称为双曲线的离心率。因而焦点还可用 $F(ae, 0)$，$F'(-ae, 0)$ 表示。

(iv) 定规 $F'R$ 可绕定点 F' 自由旋转。取比 $F'R$ 短 $2a$ 的细线，一端连结 F，另一端连结 R。如图，用铅笔尖 P 把线绷紧并且紧靠定规的边，当定规转动时，铅笔 P 就画出以 F、F' 为焦点的双曲线的一枝。这是因为，线的长度 $RP+PF'$ 比规定的长度 $F'R$ 短 $2a$，所以



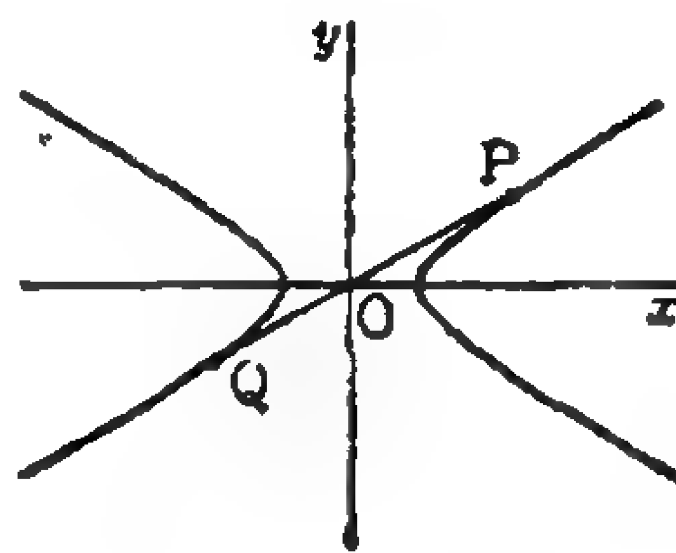
$$(RP+PF')-(RP+PF)=2a,$$

即

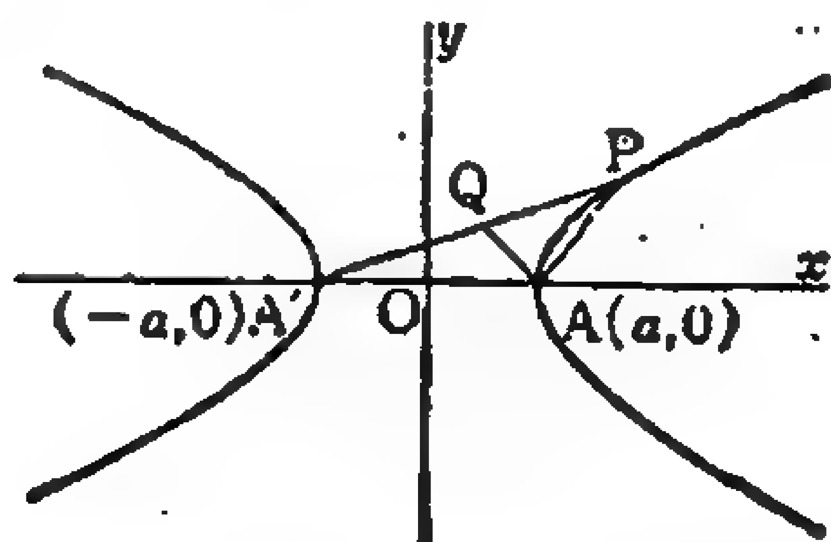
$$PF'-PF=2a.$$

交换 F 和 F' 的位置，就可画出双曲线的另一枝。

(v) 设过中心的直线和双曲线的交点为 P、Q，则线段 PQ 叫做双曲线的直径。



3764. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的顶点为 A、A'，P 为双曲线上任意一点。求过 A 且与 AP 垂直的直线和直线 $A'P$ 的交点 Q 的轨迹。



解 顶点 A、A' 的坐标分别是 $(a, 0)$ 和 $(-a, 0)$。设点 P 的坐标为 (α, β)，则 AP

的方程为 $y=\frac{\beta}{\alpha-a}(x-a)$，其斜率为 $\frac{\beta}{\alpha-a}$。所以过 A 且与 AP 垂直的直线方程为

$$y=-\frac{\alpha-a}{\beta}(x-a). \qquad ①$$

又直线 $A'P$ 的方程为

$$y=\frac{\beta}{\alpha+a}(x+a). \qquad ②$$

①÷②，得

$$1=\frac{a^2-\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{x-a}{x+a}.$$

因点 P 在双曲线上，

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}=1, \quad \therefore \quad \frac{a^2-\alpha^2}{\beta^2}=-\frac{a^2}{b^2}.$$

把它代入上式，则

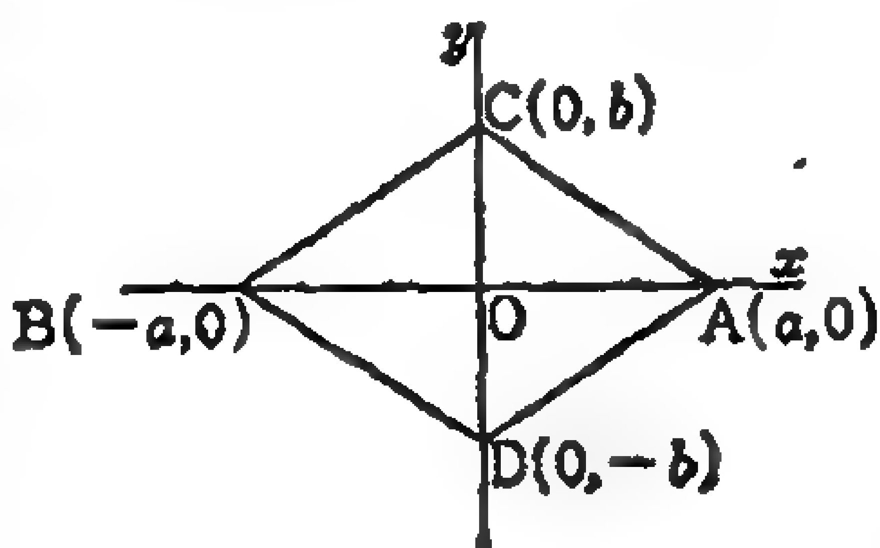
$$1=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{x-a}{x+a},$$

即 $$(a^2+b^2)x=a(a^2-b^2),$$

$$\therefore \quad x=\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}.$$

故所求轨迹是与 x 轴垂直的直线。

3765. 在已知菱形 $ABCD$ 所在的平面上取点 P，连结 PA、PB、PC、PD，使 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，求点 P 的轨迹。



解 如图。取 AOB、COD 分别为 x 轴和 y 轴，则可取 A、B、C、D 的坐标分别为 $(a, 0)$，$(-a, 0)$，$(0, b)$，$(0, -b)$。设点 P 的坐标为 $P(x, y)$，则由 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$ 知，

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-b)^2}\cdot\sqrt{x^2+(y+b)^2},$$

即

$$[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]=[x^2+(y-b)^2][x^2+(y+b)^2],$$

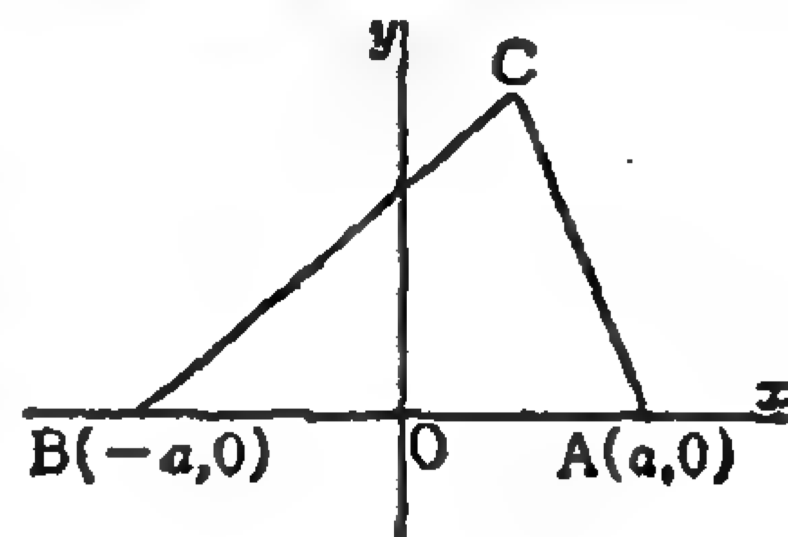
$$(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=(x^2+y^2+b^2)^2-4b^2y^2,$$

$$(x^2+y^2+a^2)^2-(x^2+y^2+b^2)^2=4(a^2x^2-b^2y^2),$$

$$\therefore \quad x^2-y^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2),$$

这就是所求轨迹方程，如 $a\neq b$，它表示等轴双曲线。如 $a=b$，它表示两条相交直线 $y=\pm x$。

3766. 在 $\triangle ABC$ 中，底边 AB 的长和积 $\operatorname{tg}\angle BAC\cdot\operatorname{tg}\angle CBA$ 都是定值，求顶点 C 的轨迹。



解 取 $\triangle ABC$ 的底边在 x 轴上，边 AB 的垂直平分线为 y 轴，设 $A(a, 0)$，$B(-a, 0)$，$C(x, y)$，则直线 AC 的方程为

$$y=-\operatorname{tg}\angle BAC\cdot(x-a); \qquad ①$$

直线 BC 的方程为

$$y=\operatorname{tg}\angle CBA\cdot(x+a). \qquad ②$$

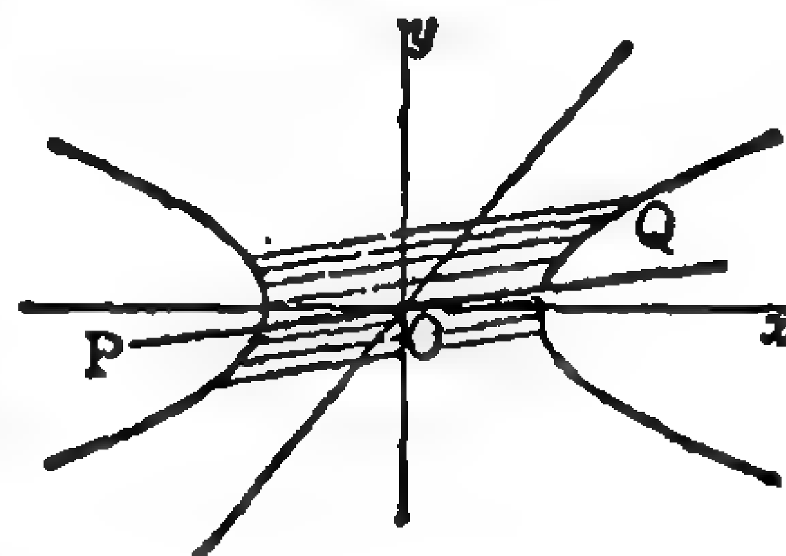
设 $\operatorname{tg}\angle BAC\cdot\operatorname{tg}\angle CBA=k$，由 ①×② 得

$$y^2=-k(x^2-a^2)$$

即 $$kx^2+y^2=a^2k,$$

这就是顶点 C 的轨迹方程。如 $k>0$，它表示椭圆；如 $k<0$，它表示双曲线。

3767. 求双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 定向弦中点的轨迹。



解 设双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ①$$

和定向直线

$$y=mx+\beta \qquad ②$$

的交点分别为 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，则从①、②消去 y 得方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+\beta)^2}{b^2}=1,$$

即 $$(a^2m^2-b^2)x^2+2ma^2\beta x+a^2\beta^2+a^2b^2=0,$$

x_1、x_2 是这个方程的两个根。故 PQ 的中点 (x, y) 的横坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{ma^2\beta}{a^2m^2-b^2}. \qquad ③$$

同样，y_1、y_2 是从①、②消去 x 所得方程

$$(a^2m^2-b^2)y^2+2b^2\beta y-b^2\beta^2+a^2b^2m^2=0$$

的两个根，故 PQ 的中点 (x, y) 的纵坐标为

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{b^2\beta}{a^2m^2-b^2}. \qquad ④$$

从③、④消去 β，得

$$y=\frac{b^2}{ma^2}x.$$

这就是双曲线斜率为定值m的弦中点的轨迹方程，它表示通过双曲线中心的直线。

注 设具有确定方向的直径为PQ，点P的坐标为(x_1, y_1)，则直径PQ的方程为$y=\frac{y_1}{x_1}x$. 由本题可知与这条直径平行的弦中点的轨迹是直线$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x$.

3768. 在定圆中，设与定直线平行的弦为PQ，在弦PQ上取点T，使

$$PT^2+QT^2=k^2$$

（定值），求点T的轨迹方程。

解 设与定直线平行的直径在x轴上，与此直径垂直的直径在y轴上，定圆的半径为r，PQ与y轴的交点为R，则

$$\begin{aligned}PT^2+QT^2&=(PR-RT)^2+(QR+RT)^2\\&=2(PR^2+RT^2)\\&=2(OP^2-OR^2+RT^2).\end{aligned}$$

设点T的坐标为(x, y)，则得所求轨迹方程为

$$2(r^2-y^2+x^2)=k^2,$$

$$\therefore\quad x^2-y^2=\frac{k^2-2r^2}{2}\quad(|x|\leq r).$$

它的图象为等轴双曲线，因此所求轨迹是该双曲线在圆内的部分。

3769. 已知点Q从原点O出发，在y轴上以秒速$b$cm向下运动。同时点R从点$(-a, b)$出发，以秒速$a$cm向右运动。设点$A(a, 0)$和Q的连线与点$A'(-a, 0)$和R的连线相交于点P，求点P的轨迹。

解 设点Q、R运动t秒后，Q在$(0, -bt)$、R在$(-a+at, b)$的位置，这时直线AQ、$A'R$的方程分别为

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{bt}=1, \qquad ①$$

$$y=\frac{b}{at}(x+a). \qquad ②$$

从这两式消去t，就可得到直线AQ、$A'R$的交点P的轨迹方程。从①、②分别得

$$\frac{y}{bt}=\frac{x-a}{a}, \qquad ①'$$

$$\frac{b}{at}=\frac{y}{x+a}. \qquad ②'$$

①'÷②'，得

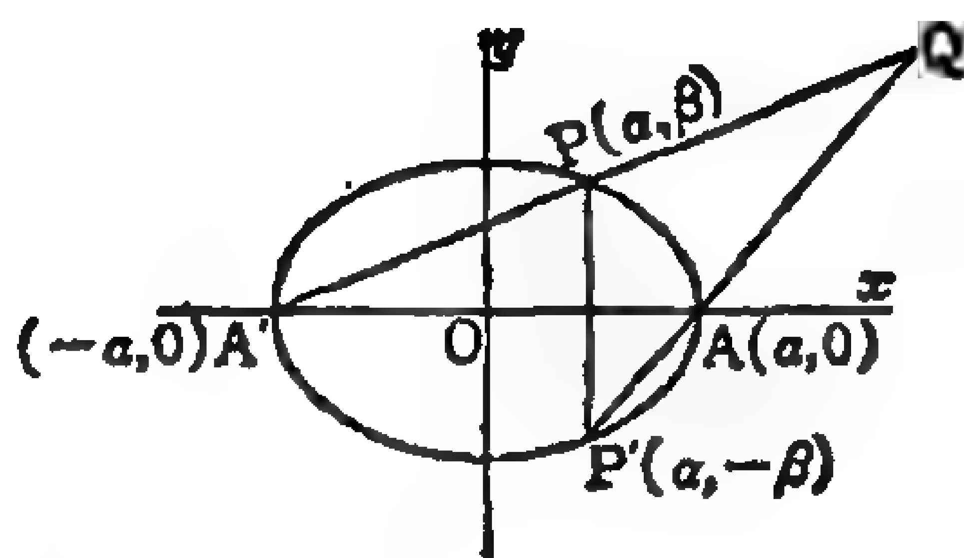
$$\frac{ay}{b^2}=\frac{x^2-a^2}{ay}$$

即
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2),$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

故所求点P的轨迹是双曲线。

3770. 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在$x$轴上的顶点为$A$、$A'$，与$y$轴平行的任意弦为$PP'$。证明$A'P$和$AP'$的交点$Q$的轨迹是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.



解 设$P(\alpha, \beta)$，$P'(\alpha, -\beta)$，则直线$A'P$的方程为

$$y=\frac{\beta}{\alpha+a}(x+a), \qquad ①$$

直线AP'的方程为

$$y=\frac{-\beta}{\alpha-a}(x-a). \qquad ②$$

①×②，得

$$y^2=-\frac{\beta^2}{\alpha^2-a^2}(x^2-a^2),$$

即
$$y^2=\frac{\beta^2}{a^2-\alpha^2}(x^2-a^2).$$

由于点$P(\alpha, \beta)$在椭圆上，

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1,\quad \therefore\quad \frac{\beta^2}{a^2-\alpha^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

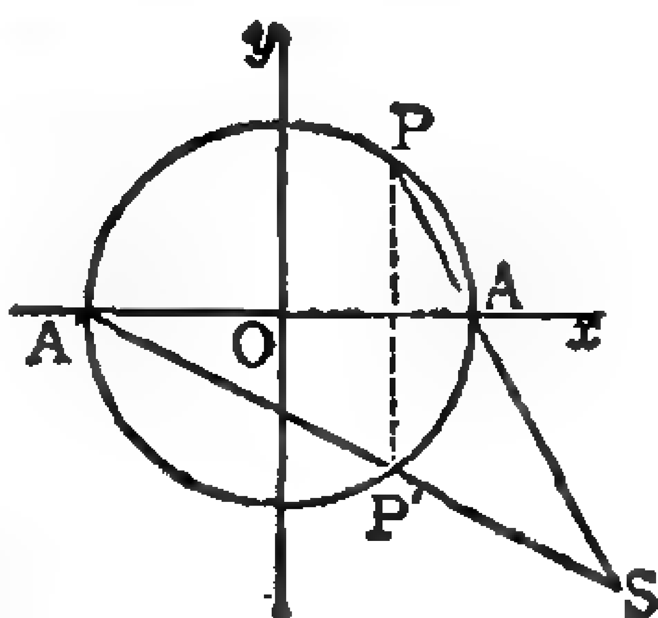
因而
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

即
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这就是直线$A'P$、AP'的交点Q的轨迹方程，

它表示以椭圆长轴为实轴的双曲线。

3771. 在定圆 O 中，PP' 为与定直径 AA' 垂直的任意弦，求两直线 AP 和 $A'P'$ 的交点 S 的轨迹。



解 取定直径 AA' 在 x 轴上，它的垂直平分线为 y 轴，定圆方程为 $x^2+y^2=r^2$。设 P、P' 的坐标分别为 (x_1, y_1)，$(x_1, -y_1)$，则直线 AP 和 $A'P'$ 的方程分别为

$$y=\frac{y_1}{x_1-a}(x-a), \qquad ①$$

$$y=-\frac{y_1}{x_1+a}(x+a). \qquad ②$$

①×② 得

$$y^2=-\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}(x^2-a^2).$$

由于点 $P(x_1, y_1)$ 在定圆上，$x_1^2+y_1^2=a^2$，

$$\therefore\quad -\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=1.$$

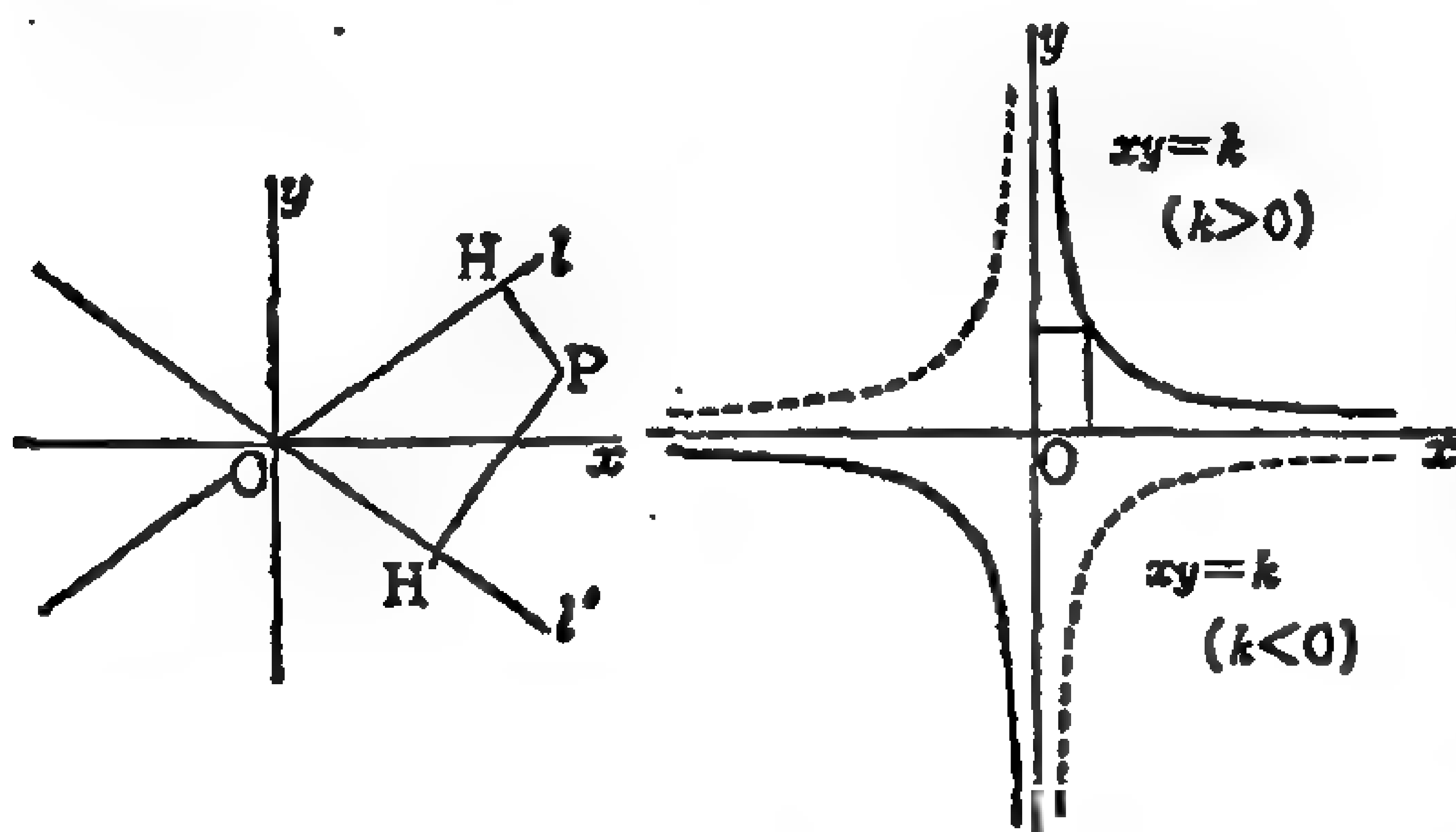
把它代入上式，得

$$y^2=x^2-a^2, \quad 即 \quad x^2-y^2=a^2.$$

这就是所求点 S 的轨迹方程，它表示实轴为 $2a$ 的等轴双曲线。

3772. 证明：到两定直线 l、l' 的距离之积是定值的点的轨迹，是把这两条定直线作为渐近线的双曲线。

解 取两定直线 l 和 l' 夹角的两条角平分线分别为 x 轴和 y 轴，设 l 和 l' 的方程为 $y=mx$ 和 $y=-mx$。



设适合条件的点为 $P(x, y)$，则点 P 到两直线 l 和 l' 的距离分别为

$$PH=\frac{|y-mx|}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$PH'=\frac{|y+mx|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

如设 $PH\cdot PH'=k$（$k>0$，定值），则

$$\frac{y-mx}{\sqrt{1+m^2}}\cdot\frac{y+mx}{\sqrt{1+m^2}}=\pm k,$$

即

$$\frac{y^2-m^2x^2}{1+m^2}=\pm k,$$

$$\therefore\quad y^2-m^2x^2=\pm k(1+m^2).$$

这就是所求的轨迹方程，它表示以直线 $y=\pm mx$ 为渐近线的两组双曲线。因此所求轨迹是以两定直线 l 和 l' 为渐近线的两组双曲线。

注 双曲线的另一定义：到两定直线的距离（有正负符号）的积为定值的点的轨迹叫做双曲线。这两条定直线叫做双曲线的渐近线。由此可见，到 x 轴和 y 轴的距离（有正负符号）的积为定值的点的轨迹方程为 $xy=k$，它是以 x 轴和 y 轴为渐近线的等轴双曲线。

3. 渐近线、切线

3773. 叙述双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的渐近线的意义。

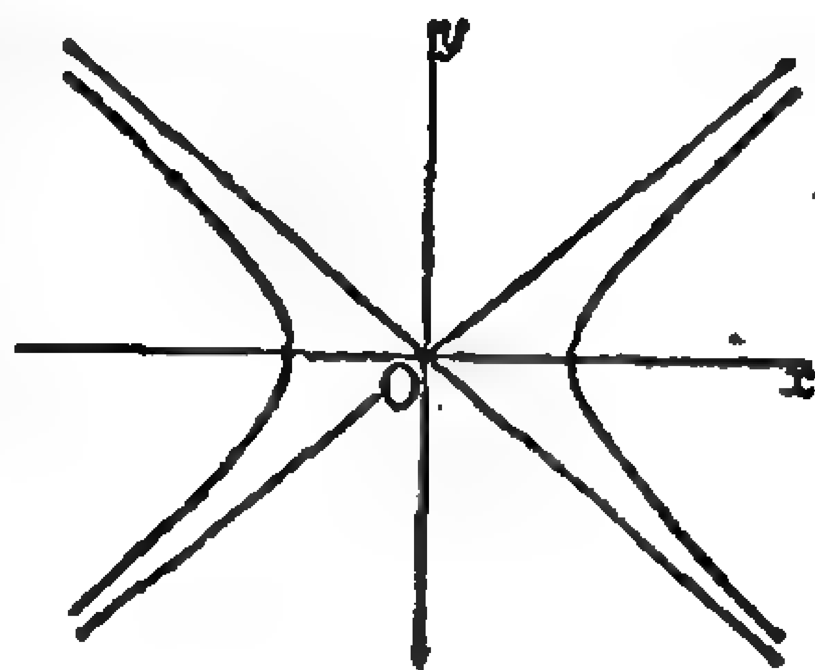
解 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 中，把 y 用 x 表示为

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

可知随着 $|x|$ 的增大，$|y|$ 也逐渐增大。再把它改写为

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}},$$

可知随着 $|x|$ 的逐渐增大，$\frac{a^2}{x^2}$ 逐渐减小而越来越接近于 0，$\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ 逐渐减小而越来越接近于 1，因而 $|y|$ 越来越接近于 $\frac{b}{a}x$。由此可知：



在第 I，III 象限中，x、y 的符号相同，双曲线中 $|x|$ 越大，$|y|$ 也越大，并无限接近于直线 $y=\frac{b}{a}x$。

在第 II、IV 象限中，x、y 的符号相反，双曲线中 $|x|$ 越大，$|y|$ 也越大，并且无限接近于直线 $y=-\frac{b}{a}x$.

这两条直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$ 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线。两条渐近线的方程也可写成 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$。

3774. 求下列双曲线的渐近线方程.

(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, (2) $x^2-y^2=2x$,

(3) $4x^2-y^2+8x+2y+4=0$,

(4) $8x^2-4y^2+8x+12y+3=0$.

解 (1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 它的渐近线方程为

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=0, \quad 即 \quad y=\pm\frac{3}{4}x.$$

(2) $x^2-y^2=2x$ 即

$$(x-1)^2-y^2=1,$$

它的渐近线方程为

$$(x-1)^2-y^2=0$$

即

$$y=\pm(x-1),$$

$$\therefore \ y=x-1 \quad 及 \quad y=-x+1.$$

(3) $4x^2-y^2+8x+2y+4=0$,

即

$$(y-1)^2-\frac{(x+1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1,$$

它的渐近线方程为

$$(y-1)^2-\frac{(x+1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=0,$$

即

$$y-1=\pm2(x+1),$$

$$\therefore \ y=2x+3 \quad 及 \quad y=-2x-1.$$

(4) $8x^2-4y^2+8x+12y+3=0$,

即

$$8\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-10,$$

它的渐近线方程是

$$2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=0$$

即

$$y=\sqrt{2}x+\frac{3+\sqrt{2}}{2}$$

及

$$y=-\sqrt{2}x+\frac{3-\sqrt{2}}{2}.$$

3775. 求双曲线 $x^2-3y^2=3$ 的渐近线方程和两渐近线的夹角.

解 原方程可以写成

$$\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2}-y^2=1,$$

它的渐近线方程是

$$\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2}-y^2=0 \quad 即 \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

这两条渐近线的斜率分别是 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以它们和 x 轴的夹角分别是 $\pm30°$. 因而两渐近线的夹角是 $60°$.

3776. 证明：双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意点 P 到该双曲线的两条渐近线的距离之积一定，即它和点 P 在双曲线上的位置无关.

解 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线是

$$y=\pm\frac{b}{a}x \quad 或 \quad bx\pm ay=0,$$

所以从双曲线上一点 $P(x_1, y_1)$ 到渐近线的距离分别是

$$\frac{|bx_1+ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

因此，其积是

$$\frac{|(bx_1+ay_1)(bx_1-ay_1)|}{a^2+b^2}=\frac{|b^2x_1^2-a^2y_1^2|}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left|\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right|.$$

因为点 $P(x_1, y_1)$ 在双曲线上，$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，所以上式可写成 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，它是一个定值.

3777. 已知从双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点 P 向 y 轴所作的垂线和两渐近线的交点分别为 Q、R，证明 PQ 和 PR 的积与点 P 的位置无关，且是一个定值。设从 P 向 x 轴所作的垂线和两渐近线的交点分别为 Q'、R'，证明 PQ' 和 PR' 的积也是一定的.

解 双曲线的渐近线方程为

$$y=\frac{b}{a}x, \ y=-\frac{b}{a}x.$$

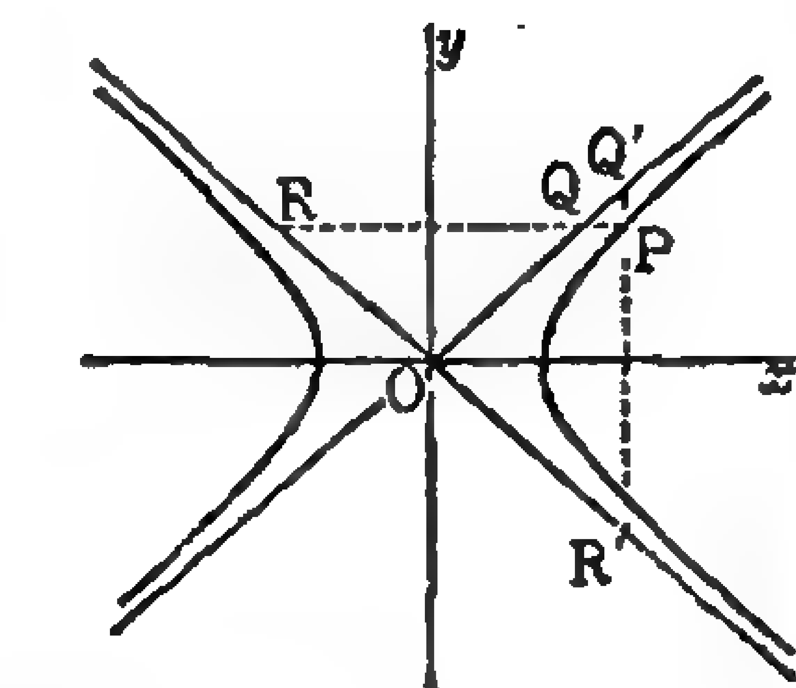
设点 P 的坐标为 (x_1, y_1)，则 Q、R 的横坐标分别是 $\frac{a}{b}y_1$, $-\frac{a}{b}y_1$. 所以

$PQ\cdot PR$

$$=\left(x_1-\frac{a}{b}y_1\right)\cdot\left(x_1+\frac{a}{b}y_1\right)$$

$$=x_1^2-\frac{a^2}{b^2}y_1^2$$

$$=a^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right).$$



由于点$P(x_1, y_1)$在双曲线上，

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

所以 $PQ\cdot PR=a^2$.

又Q'、R'的纵坐标分别是$\frac{b}{a}x_1$, $-\frac{b}{a}x_1$, 所以

$$PQ'\cdot PR'=\left(\frac{b}{a}x_1-y_1\right)\left(y_1+\frac{b}{a}x_1\right)$$

$$=\frac{b^2}{a^2}x_1^2-y_1^2=b^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right)$$

$$=b^2.$$

3778. 已知从点P到两定直线l_1、l_2的距离之积是定值的点的轨迹是，以l_1、l_2为渐近线的双曲线。试求以两直线$a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$为渐近线的双曲线方程。

解 从点$P(x, y)$到两直线$a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$的距离分别是

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}},\quad \frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

因为以这两条直线为渐近线的双曲线是，到这两条直线的距离之积为定值的点P的轨迹，设这个定值为

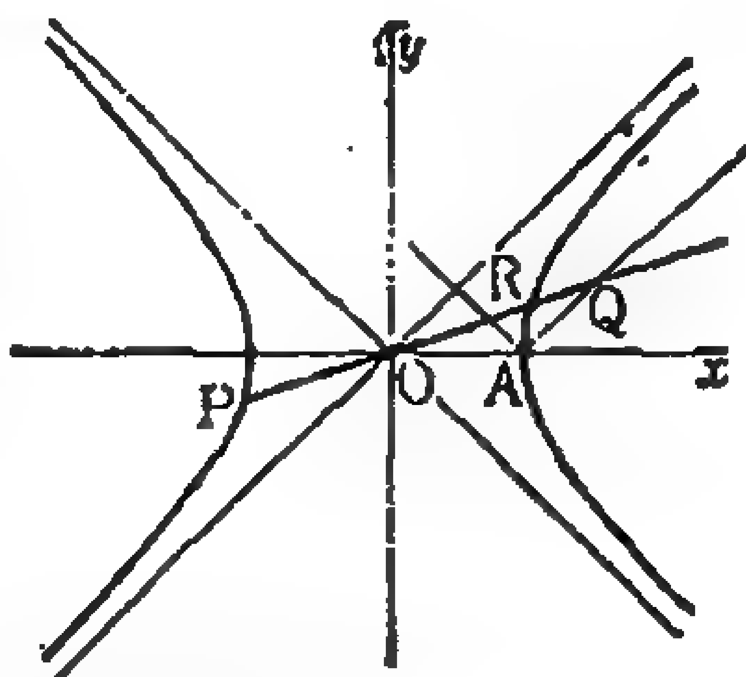
$$\frac{k}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}>0,$$

则方程

$$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=\pm k,$$

就是所求的两组双曲线方程。

3779. 如右图，已知P为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上的一点，$A$为顶点，$O$为原点，直线$PO$和过点$A$且与渐近线平行的两直线的交点分别为$Q$、$R$，证明$OQ\cdot QR=OP^2$.



解 设点P的坐标为(x_1, y_1)，则直线OP的方程为

$$y=\frac{y_1}{x_1}x,$$

与渐近线$y=\frac{b}{a}x$平行的直线AQ的方程为

$$y=\frac{b}{a}(x-a),$$

解这两个方程可得直线OP和AQ的交点Q的坐标为

$$x=\frac{abx_1}{bx_1-ay_1},\quad y=\frac{aby_1}{bx_1-ay_1}.$$

所以线段OQ的长为

$$OQ=\frac{ab}{|bx_1-ay_1|}\sqrt{x_1^2+y_1^2}.$$

同理，线段OR的长为

$$OR=\frac{ab}{|bx_1+ay_1|}\sqrt{x_1^2+y_1^2},$$

$$\therefore\quad OQ\cdot OR=\frac{a^2b^2}{|b^2x_1^2-a^2y_1^2|}(x_1^2+y_1^2)$$

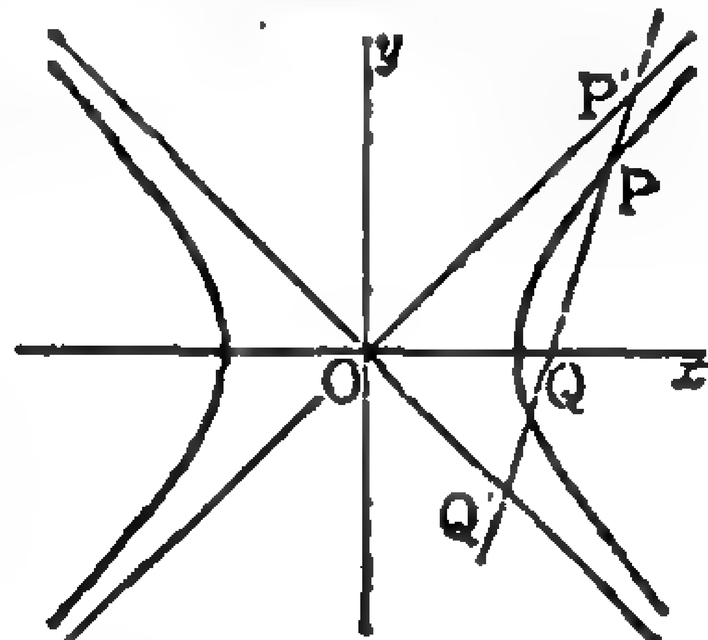
$$=\frac{1}{\left|\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right|}(x_1^2+y_1^2).$$

因点$P(x_1, y_1)$在双曲线上，$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$. 因此，

$$OQ\cdot OR=x_1^2+y_1^2=OP^2.$$

3780. 已知一条直线和双曲线的交点为P、Q，和两条渐近线的交点分别为P'、Q'，证明

$$PP'=QQ'.$$



解 设双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad ①$$

它的渐近线方程是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0. \qquad ②$$

设和双曲线相交的直线方程为

$$y=mx+n, \qquad ③$$

则①和③交点的横坐标就是从这两个方程中消去y所得方程

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+b^2)=0$$

的两根．设此两根分别为 x_1、x_2，线段 PQ 的中点为 $M(\alpha,\beta)$，则

$$\alpha=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a^2mn}{b^2-a^2m^2},$$

代入⑧，得　$\beta=\dfrac{b^2n}{b^2-a^2m^2}$.

又从②、③中消去 y 所得方程

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2n^2=0,$$

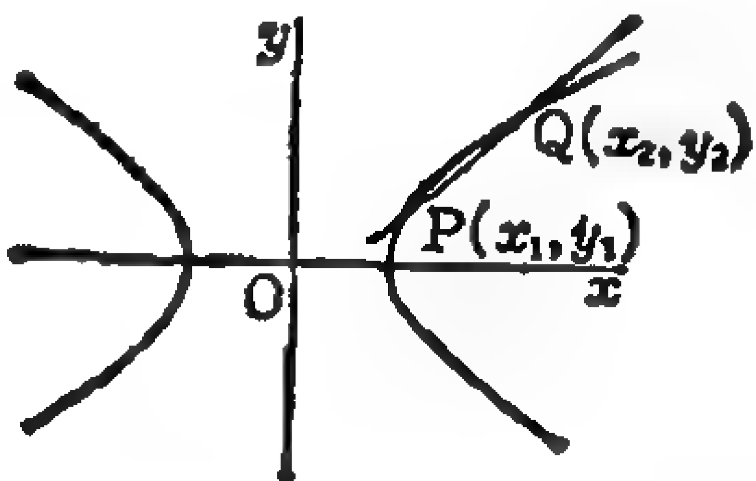
这个方程的两个根就是②和③交点的横坐标．设此两根分别为 x_1'、x_2'，线段 $P'Q'$ 的中点为 $M'(\alpha',\beta')$，则

$$\alpha'=\frac{x_1'+x_2'}{2}=\frac{a^2mn}{b^2-a^2m^2}.$$

代入③，得　$\beta'=\dfrac{b^2n}{b^2-a^2m^2}$.

由上可见，线段 PQ 的中点 M 和线段 $P'Q'$ 的中点 M' 是重合的，所以 $PP'=QQ'$.

3781. 求双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线方程。



解　在双曲线上取点 P 附近的点 Q，则过两点 $P(x_1,y_1)$ 和 $Q(x_2,y_2)$ 的直线方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).\qquad ①$$

由于点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 在双曲线上，

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\qquad ②$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1.\qquad ③$$

③－②得　$\dfrac{x_2^2-x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0$,

$$\therefore\quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}.\qquad ④$$

把④代入①得

$$y-y_1=\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}(x-x_1).$$

如点 Q 在双曲线上无限地接近于点 P，(x_2,y_2) 就无限地接近于 (x_1,y_1)，割线 PQ 就无限地接近于点 P 处的切线．故点 P 处的切线方程为

$$y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

即　$a^2y_1y-a^2y_1^2=b^2x_1x-b^2x_1^2$,

$$\therefore\quad b^2x_1x-a^2y_1y=b^2x_1^2-a^2y_1^2.$$

但由②知　$\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$

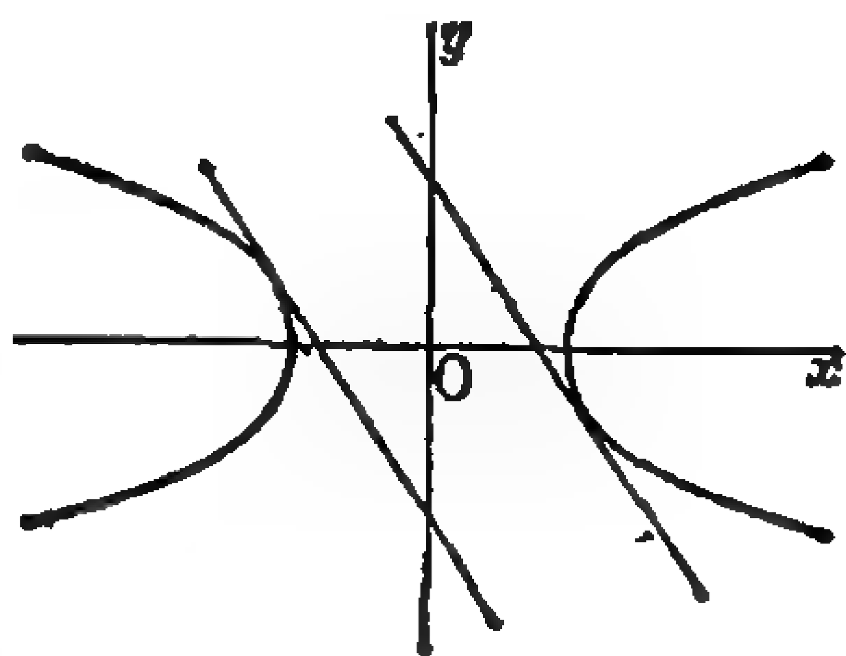
即　$b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$,

故切线方程可以写成

$$b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$$

即　$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$.

3782. 求双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的斜率为 m 的切线方程。



解　设双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\qquad ①$$

的斜率为 m 的切线方程为

$$y=mx+\beta.\qquad ②$$

把②代入①得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+\beta)^2}{b^2}=1$$

即

$$(a^2m^2-b^2)x^2+2ma^2\beta x+a^2\beta^2+a^2b^2=0.\qquad ③$$

因为直线②是①的切线，则方程⑧必有两等根，它的判别式必为0，所以

$$m^2a^4\beta^2-(a^2m^2-b^2)(a^2\beta^2+a^2b^2)=0.$$

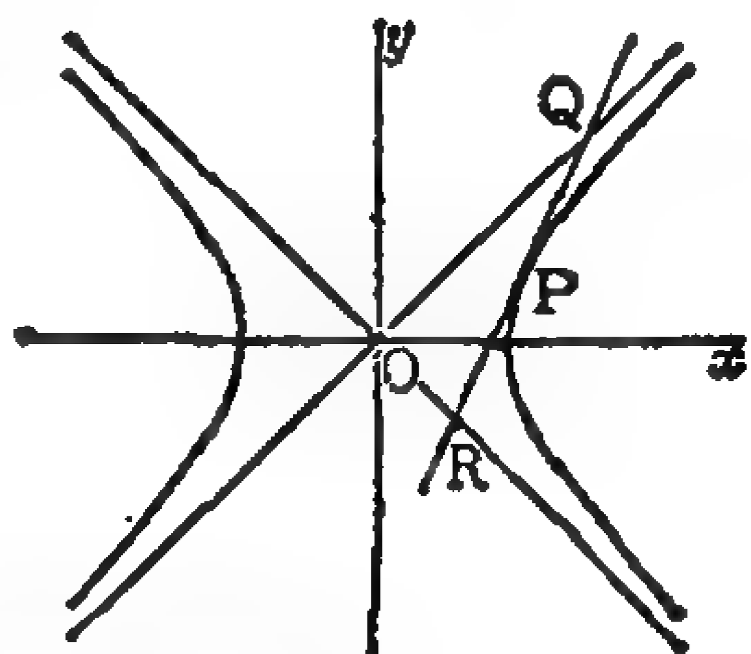
整理得　$\beta^2=a^2m^2-b^2$,

$$\therefore\quad \beta=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2},$$

故得所求切线方程为

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

3783. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上点 P 处的切线和两条渐近线的交点分别为 Q、R，则 $PQ=PR$.



解　由问题3781知，在双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

上点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

它和渐近线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

的交点 Q、R 的横坐标，就是从这两个方程中消去 y 所得方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{b^2}\cdot\frac{b^4(x_1x-a^2)^2}{a^4y_1^2}=0,$$

即 $(b^2x_1^2-a^2y_1^2)x^2-2a^2b^2x_1x+a^4b^2=0$

的两个根。由于点 $P(x_1, y_1)$ 在双曲线上，$b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$，上面方程又可写成

$$x^2-2x_1x+a^2=0.$$

设它的两根为 x'、x''，则线段 QR 中点的横坐标为

$$\frac{x'+x''}{2}=x_1.$$

同理，线段 QR 中点的纵坐标为 y_1。因此线段 QR 的中点和点 P 重合。即

$$PQ=PR.$$

3784. 求双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上相互垂直的切线交点的轨迹。

解 由问题 **3782** 知，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的斜率为 m 的切线方程为

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}, \qquad ①$$

则与它垂直的切线方程为

$$y=-\frac{x}{m}\pm\sqrt{\frac{a^2}{m^2}-b^2}. \qquad ②$$

① 变形为

$$(y-mx)^2=a^2m^2-b^2, \qquad ③$$

② 变形为

$$(my+x)^2=a^2-b^2m^2. \qquad ④$$

从 ③、④ 消去 m 可得两切线交点的轨迹方程。③+④，得

$$(1+m^2)(x^2+y^2)=(1+m^2)(a^2-b^2),$$

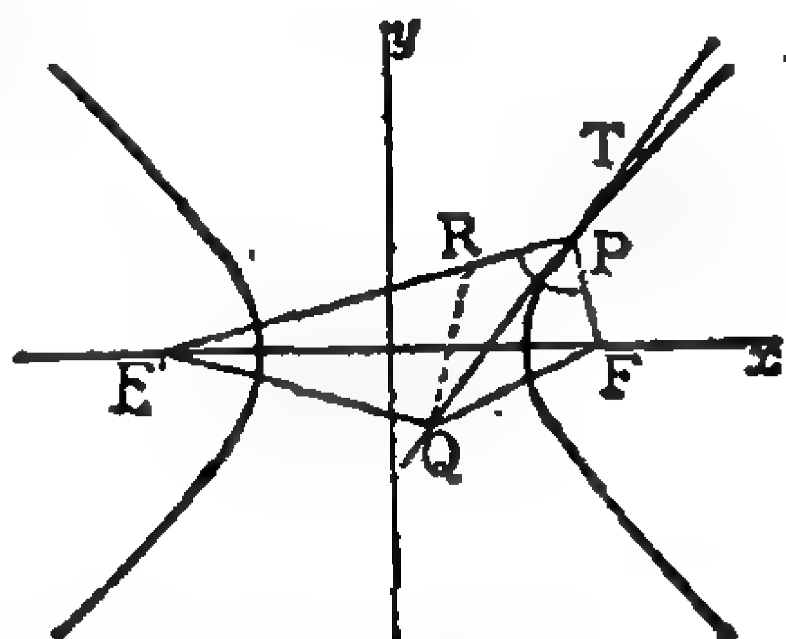
$$\therefore\quad x^2+y^2=a^2-b^2.$$

由此可知，当 $a>b$ 时，所求轨迹是实圆；当 $a=b$ 时，所求轨迹是点圆(原点)；当 $a<b$ 时，所求轨迹是虚圆，即无轨迹。

注 这个圆叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的准圆。

3785. 设 P 为以 F、F' 为焦点双曲线上的一点，证明 $\angle FPF'$ 的平分线是该双曲线的切线。

解 设点 Q 为 $\triangle FPF'$ 中 $\angle FPF'$ 平分线上不在 P 处的任意一点，连结 QF、QF'，在 PF' 上取 $PR=PF$，则

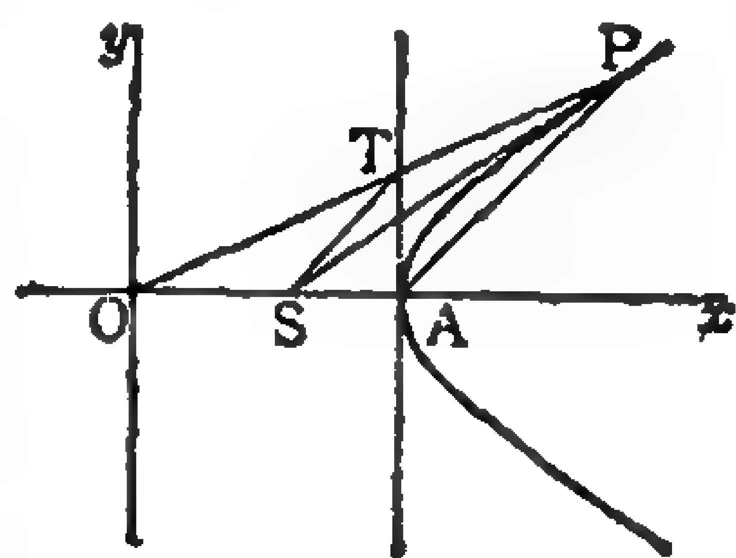


$$TF'\sim PF$$
$$=PF'\sim PR$$
$$=F'R>QF'\sim QR=QF'\sim QF$$
$$(\because\quad \triangle PRQ\cong\triangle PFQ),$$

即 $\qquad PF'\sim PF>QF'\sim QF,$

故点 Q 不在双曲线上。即 $\angle FPF'$ 的平分线 PT 上除点 P 外的任意点都不在双曲线上，因此直线 PT 和双曲线仅有一点 P 是公共的，即 PT 是双曲线上点 P 处的切线。

3786. 设双曲线上点 P 处的切线和主轴的交点为 S，点 P 和双曲线中心的连线 OP 与顶点 A 处切线的交点为 T，证明



$$ST\parallel PA.$$

解 设双曲线为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

则其上点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1. \qquad ①$$

在此式中，令 $y=0$，则 $x=\frac{a^2}{x_1}$，故切线①和主轴的交点为 $S\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$。

又顶点 A 处的切线方程为 $x=a$，直线 OP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$，它们的交点为 $T\left(a, \frac{y_1}{x_1}a\right)$。因而直线 ST 的斜率是

$$\frac{\frac{ay_1}{x_1}}{a-\frac{a^2}{x_1}}=\frac{y_1}{x_1-a},$$

直线 AP 的斜率是 $\frac{y_1}{x_1-a}$，所以 $ST\parallel AP$。

3787. 已知从原点O向双曲线$x^2-y^2=a^2$上点$P(x_1, y_1)$处的切线作垂线，其垂足为H。又OH的延长线和双曲线的交点为M，证明积$OH\cdot OM$与点P的位置无关。

解　双曲线$x^2-y^2=a^2$上点$P(x_1, y_1)$处的切线方程为

$$x_1x-y_1y=a^2,$$

所以
$$OH=\frac{a^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}.$$

又直线OH的方程是$y=-\frac{y_1}{x_1}x$，它和双曲线的交点M的坐标为$(x_1, -y_1)$、$(-x_1, y_1)$，因而

$$OM=\sqrt{x_1^2+y_1^2},$$

$$\therefore\ OH\cdot OM=\frac{a^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2}=a^2\ (\text{定值}).$$

即$OH\cdot OM$与点P的位置无关。

3788. 求双曲线$xy=k$上点$P(x_1, y_1)$处的切线方程。

解　设双曲线

$$xy=k \qquad ①$$

上点$P(x_1, y_1)$处的切线方程为

$$y-y_1=m(x-x_1). \qquad ②$$

为求①、②交点的横坐标，从①、②消去y，得

$$mx^2+(y_1-mx_1)x-k=0. \qquad ③$$

因为①、②相切，③必有等根，所以

$$(y_1-mx_1)^2+4mk=0,$$
$$m^2x_1^2-2mx_1y_1+4mk+y_1^2=0.$$

因为点$P(x_1, y_1)$在双曲线$xy=k$上，$x_1y_1=k$，所以上式可以写成

$$(mx_1+y_1)^2=0\quad\text{即}\quad mx_1+y_1=0,$$

$$\therefore\quad m=-\frac{y_1}{x_1}.$$

故所求切线方程为

$$y-y_1=-\frac{y_1}{x_1}(x-x_1),$$

即
$$xy_1+yx_1=2x_1y_1=2k.$$
$$\therefore\ y_1x+x_1y=2k.$$

3789. 已知椭圆的两条切线和x轴正向夹角的正切之积一定，证明这两条切线交点的轨迹是椭圆或双曲线。

解　椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的斜率为$m$的切线方程是

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2},$$

即
$$(y-mx)^2=a^2m^2+b^2,$$

$$\therefore\ (a^2-x^2)m^2+2xym+(b^2-y^2)=0.$$

设含m的二次方程的两个根为m_1、m_2，则

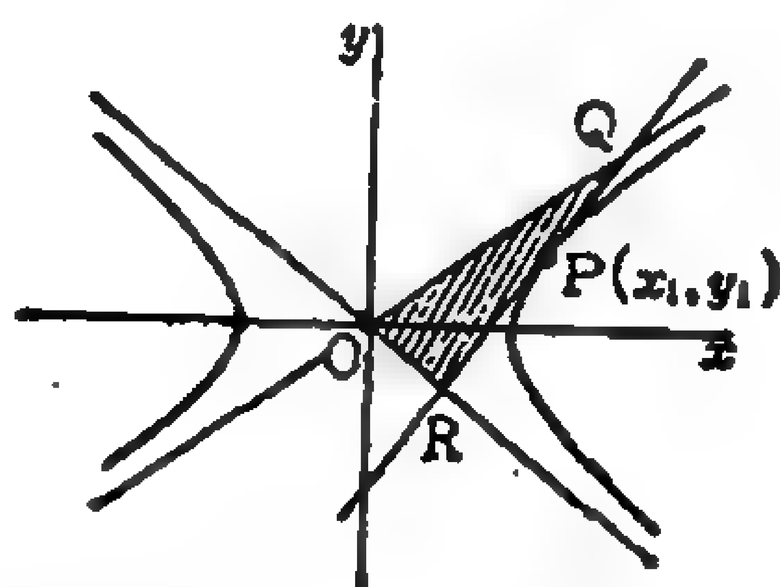
$$m_1m_2=\frac{b^2-y^2}{a^2-x^2}.$$

已知$m_1m_2=k$（k是定值），上式可写成

$$\frac{b^2-y^2}{a^2-x^2}=k,\quad\therefore\ kx^2-y^2=ka^2-b^2,$$

这就是所求的轨迹方程，随着k的符号不同它可以表示椭圆或双曲线。

3790. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上点$P$处的切线和渐近线的交点分别为$Q$、$R$，证明$\triangle OQR$的面积与点$P$的位置无关，即它是一个定值。



解　在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上点$P(x_1, y_1)$处的切线

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

与渐近线$y=\pm\frac{b}{a}x$的交点分别为

$$Q\left(\frac{a^2b}{bx_1-ay_1},\ \frac{ab^2}{bx_1-ay_1}\right),$$
$$R\left(\frac{a^2b}{bx_1+ay_1},\ -\frac{ab^2}{bx_1+ay_1}\right).$$

因而
$$OQ=\frac{ab}{|bx_1-ay_1|}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$OR=\frac{ab}{|bx_1+ay_1|}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\therefore\ OQ\cdot OR=\frac{a^2b^2}{|b^2x_1^2-a^2y_1^2|}(a^2+b^2)$$
$$=\frac{1}{\left|\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right|}(a^2+b^2).$$

由于点$P(x_1, y_1)$是双曲线上的点，

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

所以 $$OQ\cdot OR=a^2+b^2,$$

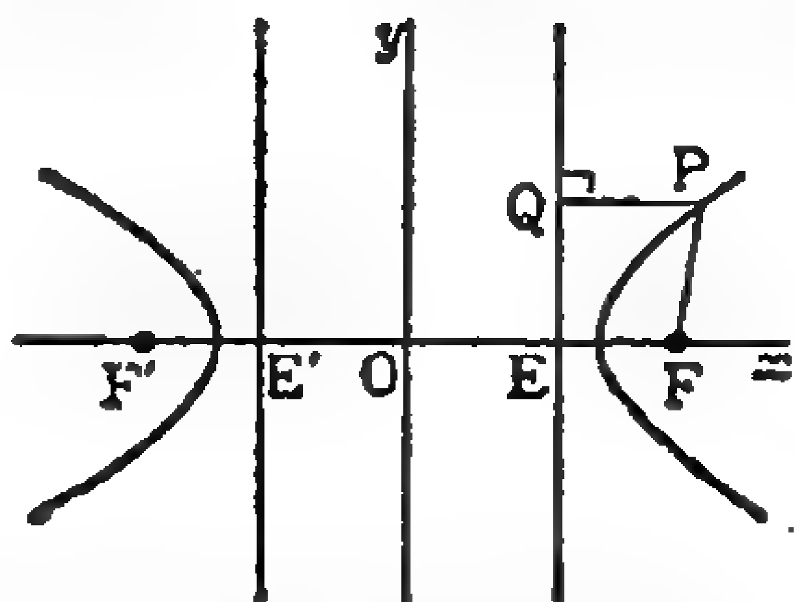
$$S_{\triangle OQR}=\frac{1}{2}OQ\cdot OR\sin\angle QOR$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)\sin\angle QOR.$$

因为 a、b、$\angle QOR$ 都与点 P 在双曲线上的位置无关，所以 $S_{\triangle OQR}$ 也与点 P 的位置无关，它是一个定值。

4. 准线、焦点、离心率、共轭双曲线、共轭直径

3791. 叙述双曲线的定义，并说明双曲线的主轴、虚轴、直径、焦点、准线、离心率、共轭双曲线、共轭直径的意义。



解　平面内到两定点距离的差为定长的点的轨迹叫做双曲线，这两个定点叫做双曲线的焦点。关于主轴、虚轴、直径和离心率的具体说明可参照问题 **3763**. 这里只说明准线、共轭双曲线和共轭直径的意义。

设双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ①$$

的焦点为 F、F'，则有 $F(ae,\ 0)$，$F'(-ae, 0)$，其中 $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$. 在 x 轴上取点 E，使 $OF\cdot OE=a^2$，则

$$OE=\frac{a^2}{ae}=\frac{a}{e}.$$

我们把直线 $x=\frac{a}{e}$ 和 $x=-\frac{a}{e}$ 叫做双曲线的准线。

设从双曲线上的点 $P(x,y)$ 作准线的垂线，垂足为 Q，如图，则

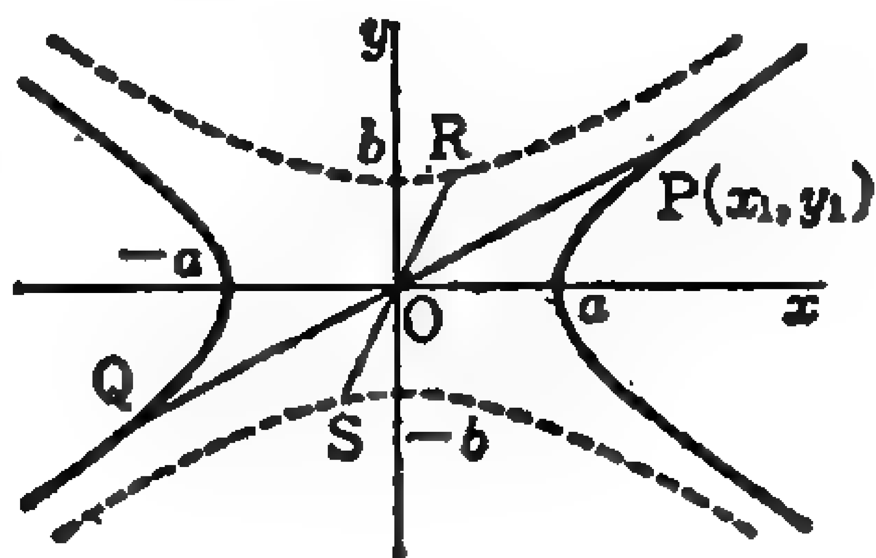
$$\frac{PQ}{PF}=\frac{x-\frac{a}{e}}{\sqrt{(x-ae)^2+y^2}}.$$

由 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得 $y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)$，把它代入上式并整理，得

$$\frac{PQ}{PF}=\frac{ex-a}{e(ex-a)}=\frac{1}{e},$$

这是准线的重要性质。

双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的共轭双曲线。设过双曲线 ① 上的点 $P(x_1, y_1)$ 的直径为 PQ，如图，则与 PQ 平行的弦中点的轨迹，由问题 **3767** 知为直线 $y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x$. 它和 ① 的共轭双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 的交点为 $R\left(\frac{a}{b}y_1, \frac{b}{a}x_1\right)$，$S\left(-\frac{a}{b}y_1,\ -\frac{b}{a}x_1\right)$，则线段 RS 叫做直径 PQ 的共轭直径。



3792. 求双曲线 $8x^2-4y^2=32$ 的焦点坐标、焦点间的距离和离心率。

解　方程两边同除以 32，得

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$$

即 $$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2}=1.$$

把它和双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 比较，后者的焦点坐标为

$$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0),\ (-\sqrt{a^2+b^2},\ 0).$$

所以前者的焦点坐标为

$$(\sqrt{4+8},\ 0),\ (-\sqrt{4+8},\ 0)$$

即 $$(2\sqrt{3},\ 0),\ (-2\sqrt{3},\ 0).$$

从而焦点间的距离为 $4\sqrt{3}$，

$$离心率\ e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

3793. 求下列双曲线的主轴、虚轴、离心率、焦点坐标和准线方程。

(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，　(2) $x^2-y^2=2x$，

(3) $4x^2-y^2+8x+2y+4=0$.

解　主轴、虚轴分别用 $2a$、$2b$，离心率用 e，焦点用 F、F'，准线用 D、D' 表示。

(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

即 $$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1,$$

故 $2a$、$2b$ 分别是 8, 6;

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{5}{4}.$$

$\because\ ae=5,\ \therefore\ F(5,0),\ F'(-5,0).$

$\because\ \frac{a}{e}=\frac{16}{5},\ \therefore D$、$D'$ 是 $x=\pm\frac{16}{5}$.

(2) $x^2-y^2=2x$

即 $$(x-1)^2-y^2=1,$$

这是把双曲线 $x^2-y^2=1$ 向右平移 1 所得的双曲线。故 $2a$、$2b$ 都是 2。

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}.$$

$$\because\ ae=\sqrt{2},$$

$$\therefore\ F(\sqrt{2}+1,0),\ F'(-\sqrt{2}+1,0).$$

$$\because\ \frac{a}{e}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore\ D:\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}+1,\ D':\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}}+1.$$

(3) $4x^2-y^2+8x+2y+4=0$,

即 $$4(x+1)^2-(y-1)^2=-1,$$

$$\therefore\ (y-1)^2-\frac{(x+1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1.$$

这是把双曲线 $y^2-\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$ 向左平移 1，再向上平移 1 所得的双曲线。它的主轴和 y 轴平行，虚轴和 x 轴平行。故主轴和虚轴分别是 2、1。

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\because\ ae=\frac{1}{2}\sqrt{5},$$

$$\therefore\ F\left(-1,\ \frac{\sqrt{5}}{2}+1\right),$$

$$F'\left(-1,\ -\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right).$$

$$\because\ \frac{a}{e}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore\ D:\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}+1,$$

$$D':\ y=-\frac{2}{\sqrt{5}}+1.$$

3794. 证明：过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点且与主轴垂直的弦长为 $2a(e^2-1)$。

解 在 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，令 $x=ae$，则

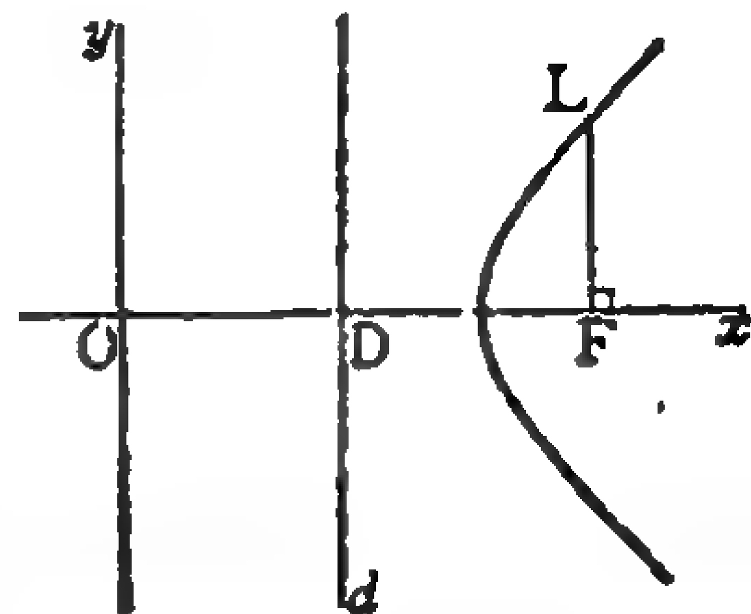
$$\frac{y^2}{b^2}=e^2-1,\ \therefore\ y=\pm b\sqrt{e^2-1}.$$

因此所求弦长为

$$2b\sqrt{e^2-1}=2\cdot\frac{b^2}{a}$$

$$=2a\cdot\frac{b^2}{a^2}$$

$$=2a(e^2-1).$$

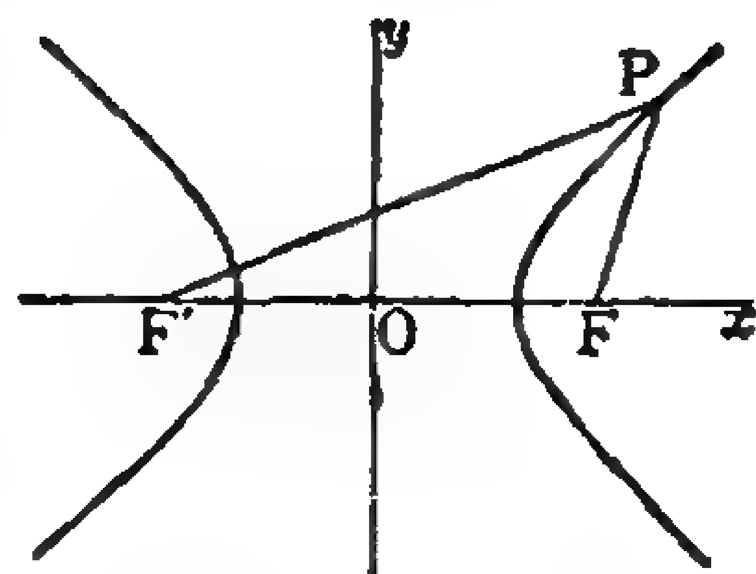


注 这条弦叫做双曲线的通径。由问题 **3791** 知，如 F 为焦点，d 为准线，则

$$OF=ae,\quad OD=\frac{a}{e},$$

$$\therefore\ DF=\frac{a(e^2-1)}{e}\quad \text{即}\quad DF\cdot e=FL.$$

3795. 设 P 是中心为 O、焦点为 F、F' 的等轴双曲线上任意一点，证明 $PF\cdot PF'=OP^2$。



解 取等轴双曲线为 $x^2-y^2=a^2$，则它的离心率 $e=\sqrt{2}$，焦点为 $F(\sqrt{2}a,0)$，$F'(-\sqrt{2}a,0)$。设双曲线上的点为 $P(x_1,y_1)$，则

$$PF\cdot PF'=\sqrt{(x_1-\sqrt{2}a)^2+y_1^2}$$

$$\times\sqrt{(x_1+\sqrt{2}a)^2+y_1^2}$$

$$=\sqrt{(x_1^2+y_1^2+2a^2)^2-8a^2x_1^2}$$

$$=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)^2-4a^2(x_1^2-y_1^2-a^2)}.$$

因为点 $P(x_1,y_1)$ 是双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 上的点，

$$x_1^2-y_1^2-a^2=0,$$

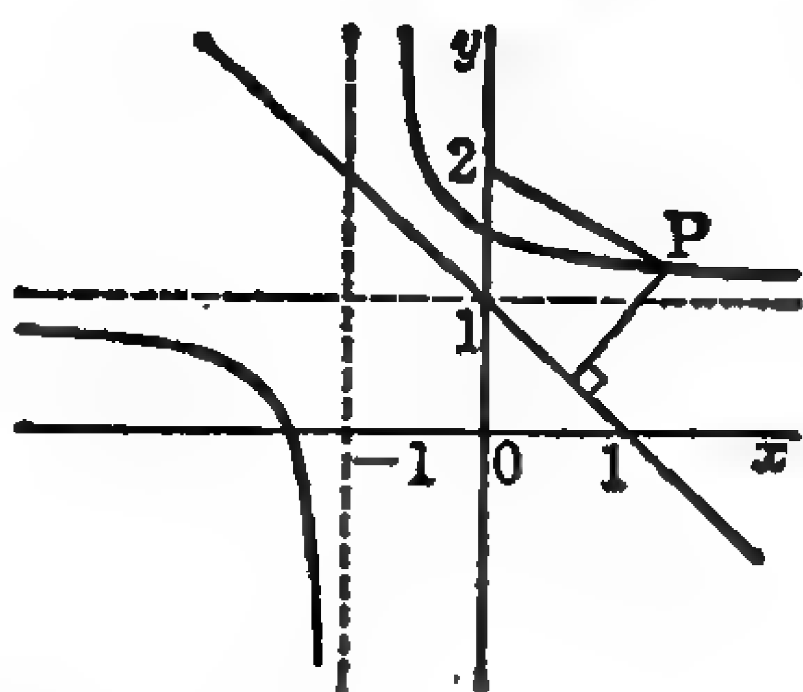
所以

$$PF\cdot PF'=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)^2}=x_1^2+y_1^2$$

$$=OP^2.$$

3796. 求以(0, 2)为焦点，直线 $x+y=1$

为准线，离心率为$\sqrt{2}$的双曲线。



解　焦点(0, 2)到所求双曲线上点$P(x, y)$的距离为

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}.$$

从点P到准线$x+y=1$的距离是

$$\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$$

且知离心率为$\sqrt{2}$，故由问题**3791**知

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{2}\cdot\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}.$$

平方，得 $x^2+(y-2)^2=(x+y-1)^2$，

整理，得　$2xy-2x+2y-3=0$，

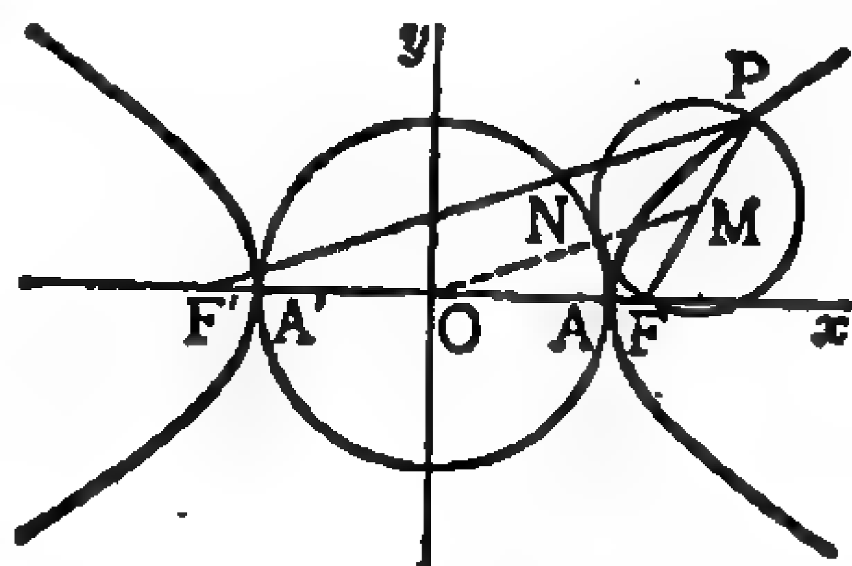
$$\therefore\quad (x+1)(y-1)=\frac{1}{2},$$

这就是所求双曲线方程。

3797. 设双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

的焦点为F、F'，顶点为A、A'，证明以这条双曲线上的任意点P和焦点F所连线段为直径的圆，切于这条双曲线的辅助圆(以AA'为直径的圆)。



解　取焦点为$F(ae, 0)$、$F'(-ae, 0)$，FP的中点为M，线段MO和以线段FP为直径的圆相交于N，则参照注可知

$$OM=\frac{1}{2}F'P=\frac{1}{2}(ex+a),$$

$$MN=\frac{1}{2}FP=\frac{1}{2}(ex-a),$$

$$\therefore\quad ON=OM-MN=a,$$

故以FP为直径的圆和双曲线的辅助圆相切。

注　设$P(x, y)$为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上的点，则

$$FP^2=(x-ae)^2+y^2.$$

由于$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，所以

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2,$$

从而

$$FP^2=(x-ae)^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a}x^2-2aex+a^2e^2-b^2.$$

又因$a^2e^2=a^2+b^2$，所以$FP^2=(ex-a)^2$，

$$\therefore\ FP=ex-a\quad(\because\ e>1,\ x>a).$$

同样，　　$F'P=ex+a$.

3798. 设双曲线的渐近线夹角为2θ，证明$\cos\theta=\frac{1}{e}$，其中e为离心率。

解　双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线为

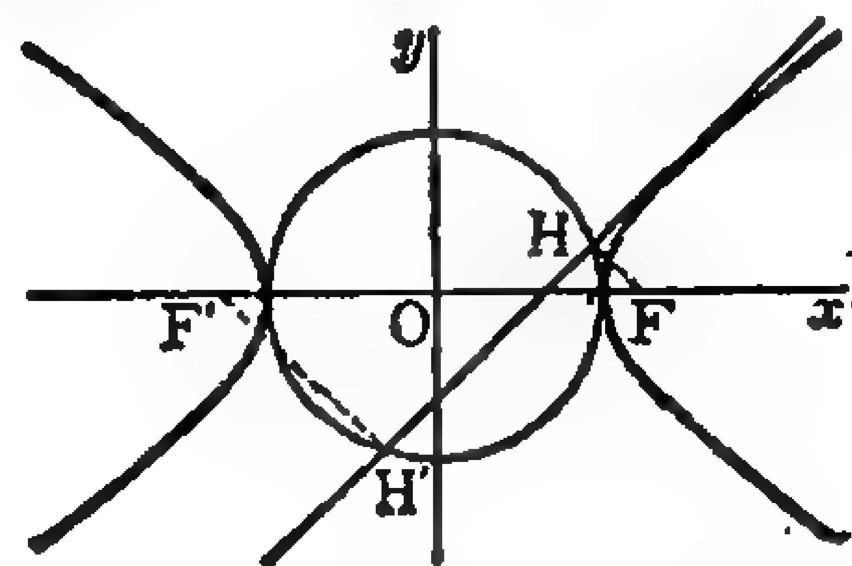
$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x,$$

所以$\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}$，因而

$$1+\operatorname{tg}^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\frac{b^2}{a^2}=e^2,$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{1}{e}.$$

3799. 过双曲线的焦点向其切线引垂线，则垂足的轨迹是以双曲线的主轴为直径的圆。



解　设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点为$F(ae, 0)$，$F'(-ae, 0)$。又由问题**3782**知，双曲线斜率为$m$的切线方程为

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

即

$$(y-mx)^2=a^2m^2-b^2, \qquad ①$$

则从点F、F'向切线所引垂线的方程为

$$y=-\frac{1}{m}(x\pm ae),$$

即

$$(my+x)^2=a^2e^2=a^2+b^2. \qquad ②$$

从①、②消去m，得到所求轨迹方程为

$$(m^2+1)(x^2+y^2)=(1+m^2)a^2,$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=a^2.$$

它表示以题设双曲线主轴为直径的圆。

注　这个圆叫做原双曲线的辅助圆。

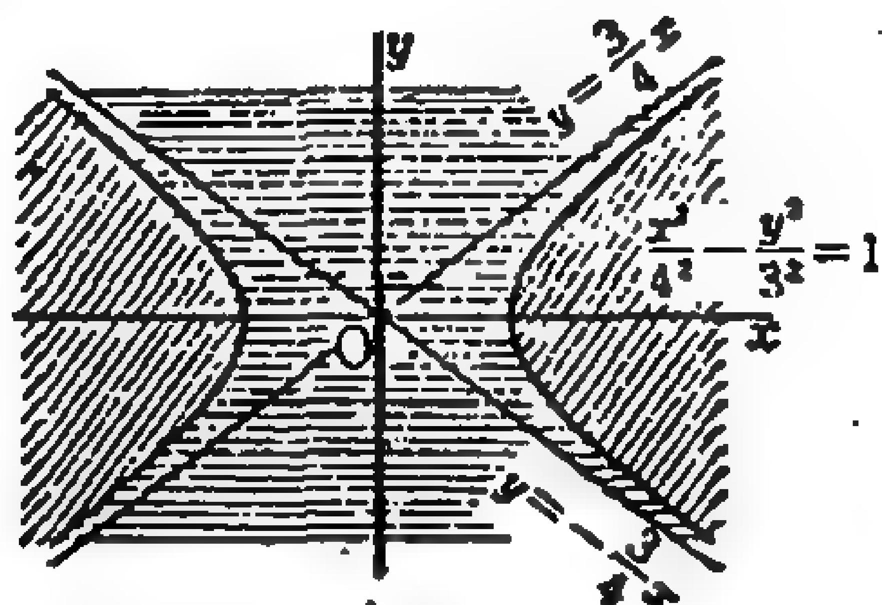
5. 不等式和区域

3800. 用图象表示坐标分别满足不等式

$$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}<1,\quad \frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}>1$$

的点的存在范围。

解 方程 $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ 的图象是以直线 $y=\pm\frac{3}{4}x$ 为渐近线的双曲线。所以坐标满足不等式 $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}<1$ 的点，在双曲线把坐标平面划成三个部分中包括原点的部分(即横线部分)。坐标满足不等式 $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}>1$ 的点，在不包括原点的部分(即斜线部分)。注意，它们都不包括边界。



3801. 用斜线表示坐标满足下列不等式的点的存在范围:

(a) $xy>1$, (b) $xy<1$,

(c) $y>\frac{1}{x}$, (d) $y<\frac{1}{x}$.

解 (a) 方程 $xy=1$ 的图象是以原点 O 为中心，x 轴、y 轴为渐近线的等轴双曲线。把原点的坐标(0, 0)代入不等式 $xy>1$ 中，得 $0>1$，它不成立，所以坐标满足不等式 $xy>1$ 的点，在双曲线把坐标平面划成三个部分中不包括原点的部分(不包括边界)。

(b) 对于 $xy<1$，同(a)一样讨论，可知坐标满足 $xy<1$ 的点的存在范围，是双曲线 $xy=1$ 把坐标平面划分的三个部分中含有原点的部分(不包括边界)。

(c) $y>\frac{1}{x}$.

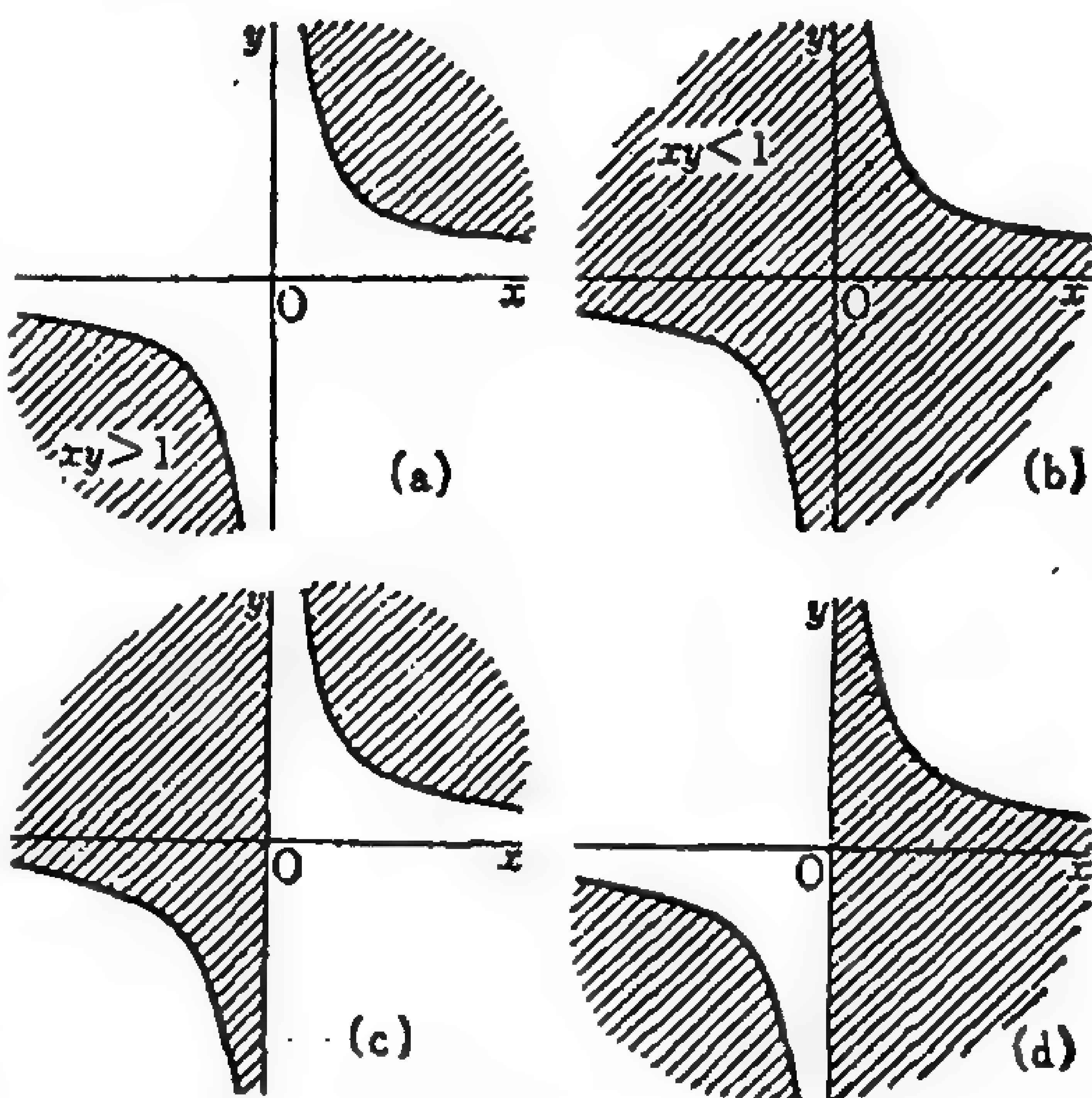
(i) 当 $x>0$ 时，$y>\frac{1}{x}$ 可写成 $xy>1$，所以在第I、IV 象限内，坐标满足 $y>\frac{1}{x}$ 的点的存在范围和(a)一样。

(ii) 当 $x<0$ 时，$y>\frac{1}{x}$ 可写成 $xy<1$，所以在第II、III 象限内，坐标满足 $y>\frac{1}{x}$ 的点的存在范围和(b)一样。

(d) $y<\frac{1}{x}$.

(i) 当 $x>0$ 时，$y<\frac{1}{x}$ 可以写成 $xy<1$，所以在I、IV 第象限内，坐标满足 $y<\frac{1}{x}$ 的点的存在范围和(b)一样。

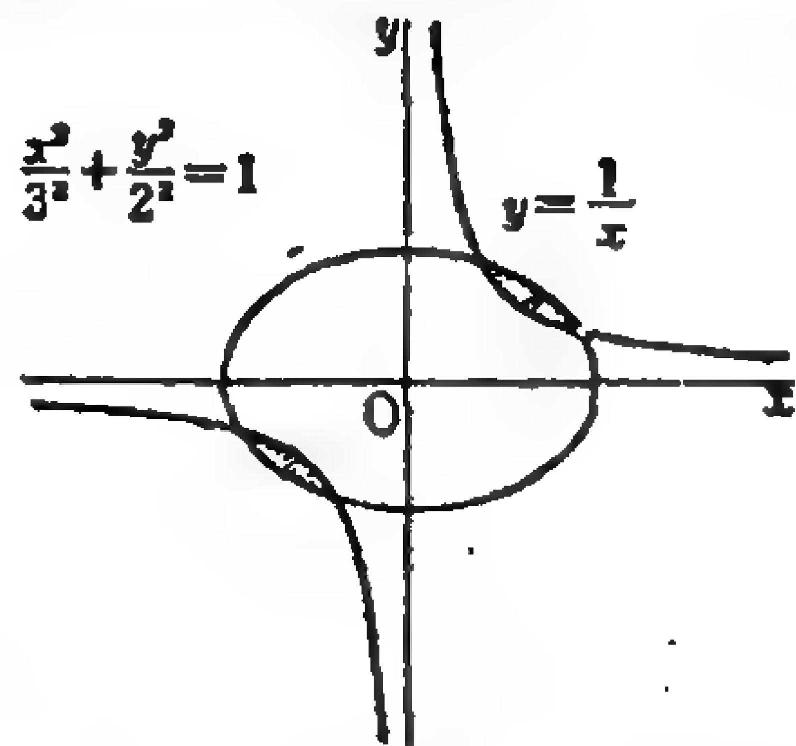
(ii) 当 $x<0$ 时，$y<\frac{1}{x}$ 可以写成 $xy>1$，所以在第II、III 象限内，坐标满足 $y<\frac{1}{x}$ 的点的存在范围和(a)一样。



3802. 用图表示坐标同时满足下列不等式的点的存在范围:

$4x^2+9y^2<36$,

$xy>1$.



解 把 $4x^2+9y^2<36$ 写成 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}-1<0$，可知坐标满足不等式 $4x^2+9y^2<36$ 的点的存在范围是在椭圆 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ 的内部。

对于不等式 $xy>1$，可分以下情况讨论:

当 $x>0$ 时，不等式可写成 $y>\frac{1}{x}$;

当 $x<0$ 时，不等式可写成 $y<\frac{1}{x}$.

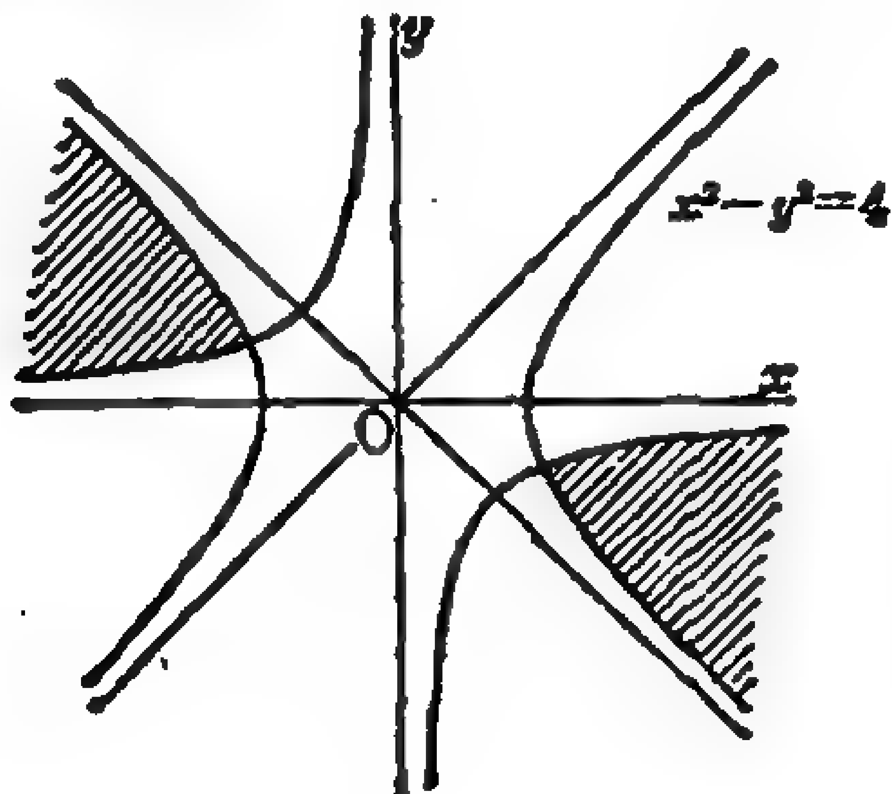
由此可知，坐标满足 $xy>1$ 的点的存在范围，在 y 轴的右侧时在双曲线 $xy=1$ 的上方，在 y 轴的左侧时在双曲线的下方.

综上所述，坐标满足 $4x^2+9y^2<36$ 和 $xy>1$ 的点的存在范围是图中斜线部分(不包括边界).

3803. 用图表示坐标同时满足下列不等式的点的存在范围:

$$x^2-y^2>4,\ xy<-1.$$

解 坐标满足 $x^2-y^2>4$ 即 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{2^2}>1$ 的点的存在范围是，双曲线 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$ 把坐标平面划分成三个部分中不包括原点的两部分(不包括边界).



又不等式 $xy<-1$，即

$$\begin{cases}\text{当 } x>0 \text{ 时，} y<-\frac{1}{x};\\ \text{当 } x<0 \text{ 时，} y>-\frac{1}{x}.\end{cases}$$

因此，坐标满足不等式 $xy<-1$ 的点的存在范围，在 y 轴的右侧是双曲线 $xy=-1$ 的下方；在 y 轴的左侧是双曲线 $xy=-1$ 的上方.

综上所述，所求点的存在范围就是图中斜线部分(不包括边界).

3804. 图示坐标满足不等式

$$x^2+y^2-2x<0, \quad ①$$

$$x^2-y^2+2y<2 \quad ②$$

的点 (x, y) 的存在范围.

解 从①，

$$(x^2-2x+1)+y^2<1$$

即

$$(x-1)^2+y^2<1. \quad ③$$

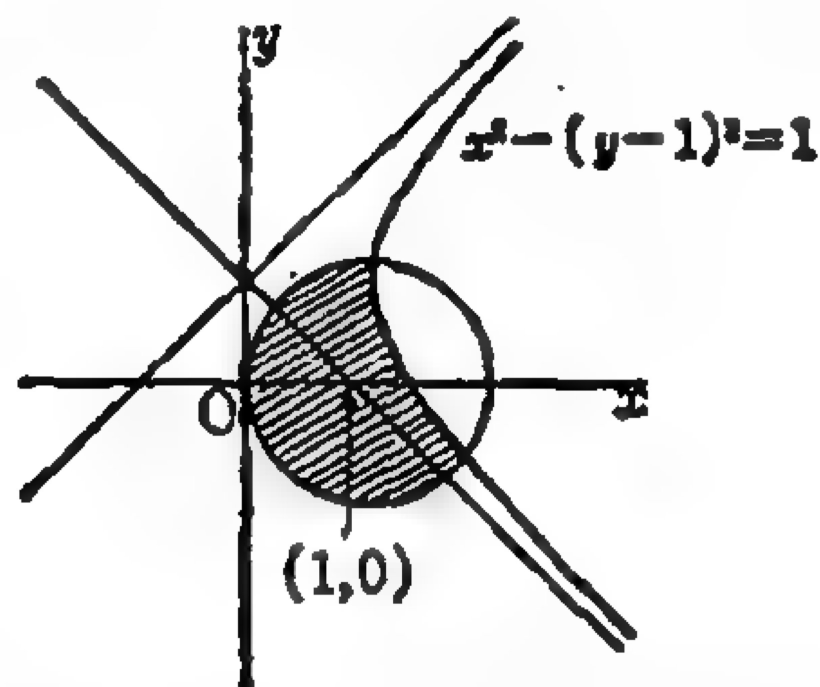
从②，

$$x^2-(y^2-2y+1)<1$$

即

$$x^2-(y-1)^2<1, \quad ④$$

故坐标满足③的点在圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的内部，坐标满足④的点在双曲线 $x^2-(y-1)^2=1$ 外包含原点的部分. 因此，所求的范围就是图中斜线部分，但不包括边界.



6. 杂题

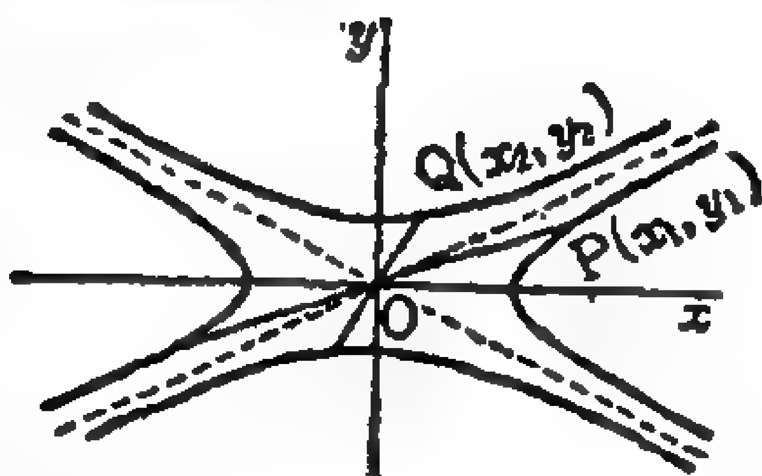
3805. 设过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上点 $P(x_1, y_1)$ 的直径的共轭直径，和双曲线的共轭双曲线的交点为 $Q(x_2, y_2)$，证明

$$x_2=\pm\frac{a}{b}y_1,\quad y_2=\pm\frac{b}{a}x_1.$$

解 设 $P(x_1, y_1)$ 为双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ①$$

上的一点. 设直径 OP 的共轭直径和①的共轭双曲线



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ②$$

的交点为 $Q(x_2, y_2)$，则直径 OP 的方程为

$$y=\frac{y_1}{x_1}x.$$

由问题 3767 知，直径 OP 的共轭直径 OQ 的方程为

$$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x. \quad ③$$

解②、③可得交点 Q 的坐标. 把③代入②，得

$$\frac{b^2x_1^2-a^2y_1^2}{a^4y_1^2}\cdot x^2=1. \quad ④$$

因为 $P(x_1, y_1)$ 在①上，

$$b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2,$$

所以④可以写成

$$b^2x^2=a^2y_1^2,\quad \therefore\ x=\pm\frac{a}{b}y_1.$$

把它代入③，得 $y=\pm\frac{b}{a}x_1$，所以点 Q 的坐标为

$$\begin{cases}x_2=\dfrac{a}{b}y_1,\\ y_2=\dfrac{b}{a}x_1;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=-\dfrac{a}{b}y_1,\\ y_2=-\dfrac{b}{a}x_1.\end{cases}$$

3806. 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 或双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的任意点 $P(x, y)$，证明 $\frac{y^2}{a^2-x^2}$ 是定值。

解 已知 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，即

$$x^2+\frac{a^2y^2}{b^2}=a^2,$$

$$a^2-x^2=\frac{a^2y^2}{b^2},$$

$$\therefore\quad \frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{b^2}{a^2}.$$

因此对于椭圆上的点 $P(x, y)$，$\frac{y^2}{a^2-b^2}$ 是定值。

又知 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

即 $$x^2-\frac{a^2y^2}{b^2}=a^2,$$

$$a^2-x^2=-\frac{a^2y^2}{b^2},$$

$$\therefore\quad \frac{y^2}{a^2-x^2}=-\frac{b^2}{a^2}.$$

因此对于双曲线上的点 $P(x, y)$，$\frac{y^2}{a^2-x^2}$ 是定值。

3807. 两个变数 x、y 有如下关系：

$$x=\frac{a}{\cos t},\ y=b\,\mathrm{tg}\,t.$$

求点 $P(x, y)$ 的轨迹。

解 $x=\frac{a}{\cos t}$，$y=b\,\mathrm{tg}\,t$，

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{\cos^2 t}=1+\mathrm{tg}^2 t=1+\frac{y^2}{b^2},$$

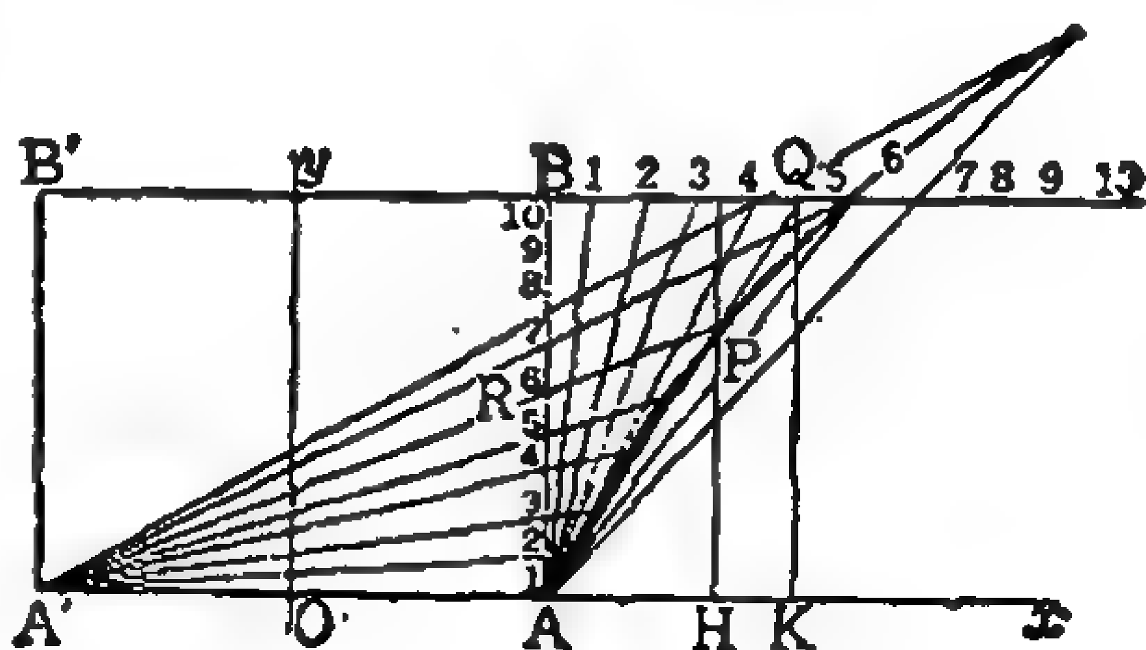
从而 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

故所求点 $P(x, y)$ 的轨迹是双曲线。

注 这是双曲线的参数方程，可作公式使用。

3808. 如下图。在矩形 $ABB'A'$ 中，把边 AB 分成 n 等分记为 1, 2, 3, … 等。在边 $B'B$ 的延长线上，以 BB' 的 n 分之一为单位长度，记为 1, 2, 3, …等．设把边 AB 上各分点和点 A' 连结，把 $B'B$ 延长线上的对应分点和点 A 连结，这两条直线的交点为 P，问 P 在什么曲线上？

解 设 $A'A$、AB 的长分别为 $2a$、$2b$，取 AA' 在 x 轴上，边 $A'A$ 的垂直平分线为 y 轴．设第 m 条对应直线的交点为 $P(x, y)$，则由图可知



$$\triangle A'PH\backsim\triangle A'RA,$$

$$\therefore\quad \frac{HP}{A'H}=\frac{AR}{A'A}$$

即 $$\frac{y}{x+a}=\frac{2b\cdot\frac{m}{n}}{2a}=\frac{mb}{na}. \qquad ①$$

又 $$\triangle APH\backsim\triangle AQK,$$

$$\therefore\quad \frac{HP}{AH}=\frac{KQ}{AK},$$

即

$$\frac{y}{x-a}=\frac{2b}{2a\cdot\frac{m}{n}}=\frac{nb}{ma}. \qquad ②$$

①×②， $$\frac{y^2}{x^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这就是点 P 的轨迹方程，它表示双曲线。

3809. 设两圆 A、B 的半径分别为 a、b $(a>b)$，

(1) 图示两圆的位置关系。

(2) 有一圆与两圆 A、B 相切，求该圆心的轨迹，指出它的名称并画图，简单叙述其理由。

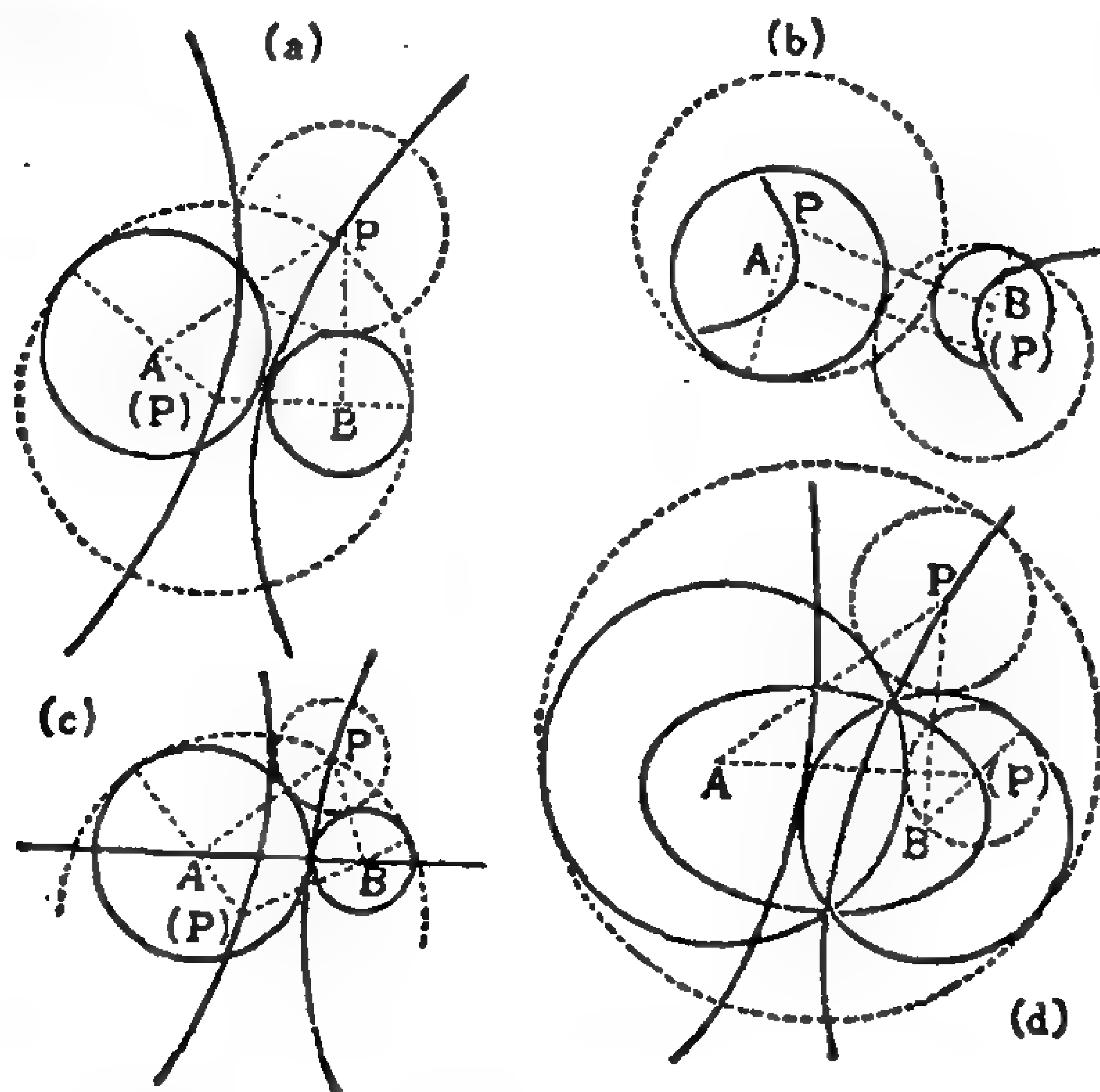
解 (1) 有外离、外切、相交、内切、内离等五种情况。图省略。

(2) 设适合轨迹条件的圆心为 P，讨论如下：

(i) 两圆外离。

(a) 圆 P 与两圆 A、B 同时外切(或内切)，则 $PA\sim PB=a-b$，所以点 P 的轨迹是双曲线。如图(a)。

(b) 圆 P 外切于一圆且内切于另一圆，则 $PA\sim PB=a+b$，所以点 P 的轨迹是双曲线。如图(b)。



(ii) 两圆外切。

(a) 圆 P 与两圆 A、B 同时外切(或内切)，则 $PA\sim PB=a-b$，所以点 P 的轨迹是双曲线。如图(c)。

(b) 圆 P 外切于一圆且内切于另一圆，点 P 的轨迹是连结圆心 A、B 的直线，但应除去两圆 A、B 的切点和点 A、B。图省略。

(iii) 两圆相交。

(a) 圆 P 与两圆 A、B 同时外切或内切，则 $PA\sim PB=a-b$，所以点 P 的轨迹是双曲线。如图(d)。

(b) 圆 P 内切于一圆且外切于另一圆，则 $PA+PB=a+b$，所以点 P 的轨迹是椭圆。如图(d)。

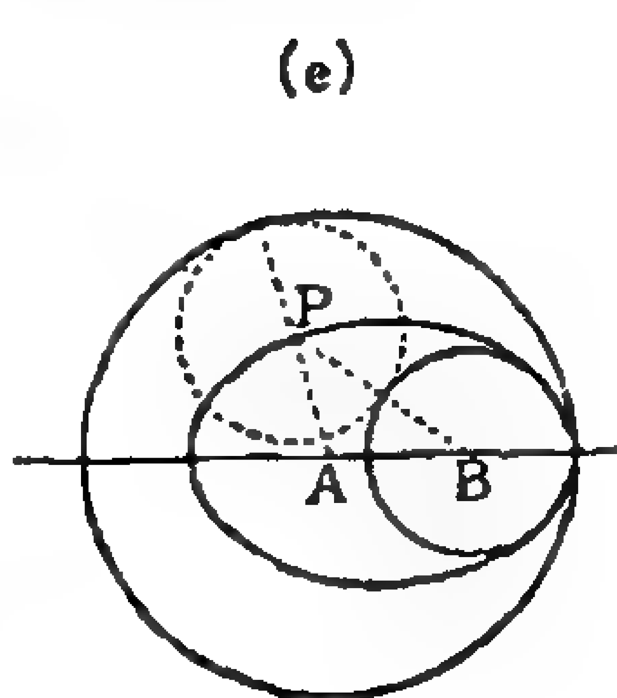
(iv) 两圆内切。

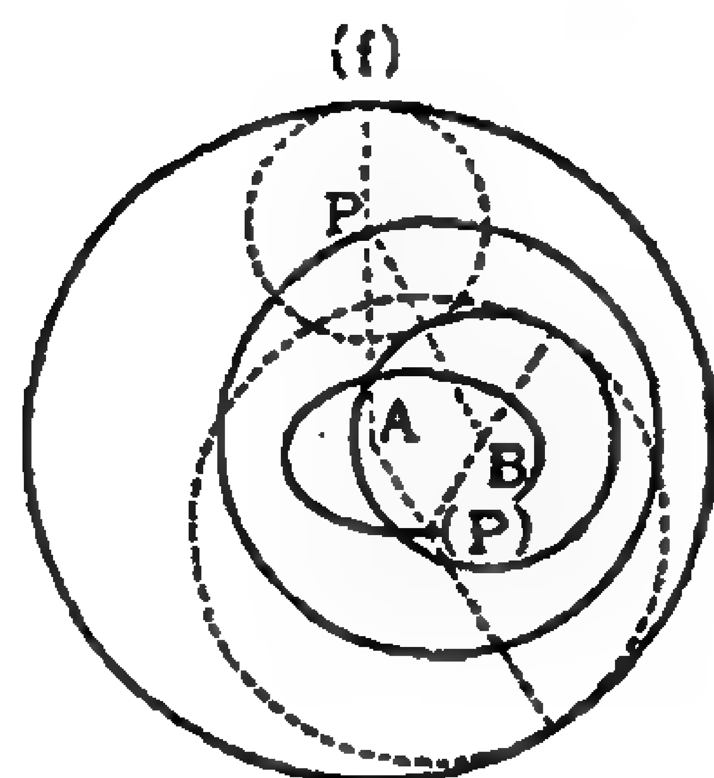
(a) 圆 P 内切于圆 A 且外切于圆 B，则 $PA+PB=a+b$，所以点 P 的轨迹是椭圆。如图(e)。

(b) 圆 P 同时内切或外切于圆 A、B，点 P 的轨迹是连结圆心 A、B 的直线，但须除去 A、B 两点和两圆 A、B 的切点。图省略。

(v) 两圆内离。

(a) 圆 P 内切于圆 A 且外切于圆 B，则





$PA+PB=a+b$，所以点 P 的轨迹是椭圆。如图(f)。

(b) 圆 P 同时内切于两圆 A、B，则 $PA+PB=a-b$，所以点 P 的轨迹是椭圆。如图(f)。

(vi) 两圆是同心圆。

(a) 圆 P 内切于圆 A 且外切于圆 B，则

$$PA=\frac{1}{2}(a+b),$$

所以点 P 的轨迹是以 $\frac{1}{2}(a+b)$ 为半径的同心圆。图略。

(b) 圆 P 同时内切于圆 A、B，则

$$PA=\frac{1}{2}(a-b),$$

所以点 P 的轨迹是半径为 $\frac{1}{2}(a-b)$ 的同心圆。图略。

3810. 二次方程

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

的图象是一点或两直线的情况除外，则

$$h^2-ab<0 \rightleftarrows \text{椭圆(包括圆)},$$
$$h^2-ab=0 \rightleftarrows \text{抛物线},$$
$$h^2-ab>0 \rightleftarrows \text{双曲线}.$$

解 设把原点平移到 (x_0, y_0) 时，曲线上点 P 的坐标 (x, y) 变为 (X, Y)，则

$$x=X+x_0,\quad y=Y+y_0.$$

则把它代入所给方程并整理，得

$$\begin{aligned}&aX^2+2hXY+bY^2+2(ax_0+hy_0+g)X\\&\quad+2(hx_0+by_0+f)Y\\&\quad+(ax_0^2+2hx_0y_0+by_0^2+2gx_0+2fy_0+c)\\&=0,\end{aligned} \qquad ①$$

如设 $ax_0+hy_0+g=0$, $hx_0+by_0+f=0$, 以决定 x_0、y_0，且设

$$ax_0^2+2hx_0y_0+by_0^2+2gx_0+2fy_0+c=-k,$$

则 ① 可写成

$$aX^2+2hXY+bY^2=k. \quad ②$$

再把坐标轴绕(x_0, y_0)旋转角θ，设点P的坐标(X, Y)又变为(u, v)，则

$$X=u\cos\theta-v\sin\theta,\ Y=u\sin\theta+v\cos\theta,$$

把它代入②并整理，得

$$(a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta)u^2$$
$$+[2h\cos2\theta-(a-b)\sin2\theta]uv$$
$$+(a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta)v^2$$
$$=k. \quad ③$$

设

$$2h\cos2\theta=(a-b)\sin2\theta \quad ④$$

求θ值，代入③并计算u^2、v^2的系数．设

$$a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta=A,$$
$$a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta=B,$$

则③可写成

$$Au^2+Bv^2=k. \quad ⑤$$

又

$$A+B$$
$$=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+b(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=a+b,$$
$$A-B=a\cos2\theta+2h\sin2\theta-b\cos2\theta$$
$$=(a-b)\cos2\theta+2h\sin2\theta,$$
$$4AB=(A+B)^2-(A-B)^2$$
$$=(a+b)^2-(a-b)^2\cos^2 2\theta$$
$$-4h(a-b)\cos2\theta\sin2\theta-4h^2\sin^2 2\theta$$
$$=(a+b)^2-(a-b)^2(1-\sin^2 2\theta)$$
$$-4h(a-b)\cos2\theta\sin2\theta$$
$$-4h^2(1-\cos 2\theta)$$
$$=(a+b)^2-(a-b)^2-4h^2$$
$$+[(a-b)\sin2\theta-2h\cos2\theta]^2,$$

由④知上式[　]中的值为0，所以

$$AB=ab-h^2.$$

因此在⑤中，如$AB>0$且$Ak>0$，则⑤表示椭圆或圆；如$AB<0$，则⑤表示双曲线；如$AB=0$，则⑤表示抛物线（参照问题**3829**）．这个结果也可另外叙述如下：

如$h^2-ab<0$，则⑤表示椭圆或圆；

如$h^2-ab=0$，则⑤表示抛物线；

如$h^2-ab>0$，则⑤表示双曲线．

注　如果二次方程

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

的左边能分解为两个关于x、y的一次因式，则它表示两条直线．当$ab>0$，且方程能变形为$a(x+p)^2+b(y+q)^2=0$，则它表示一个点．

3811． 证明：以原点为焦点，以直线

$$x+2y-2=0$$

为准线，且过点(1, 3)的二次曲线为双曲线，并求它的方程．

解　已知焦点是$F(0, 0)$，准线D:

$$x+2y-2=0.$$

设离心率为e，二次曲线上的任意一点为$P(x, y)$，则由问题**3728**、**3790**知，所求二次曲线方程为

$$\sqrt{x^2+y^2}=e\cdot\frac{|x+2y-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}.$$

又因点(1, 3)在该二次曲线上，

$$\sqrt{1+9}=e\frac{|1+6-2|}{\sqrt{5}},$$

即

$$\sqrt{10}=\frac{5}{\sqrt{5}}e,$$

$$\therefore\ e=\sqrt{2}>1.$$

因此，所求二次曲线为双曲线．

把双曲线方程

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}\cdot\frac{|x+2y-2}{\sqrt{1+2^2}}$$

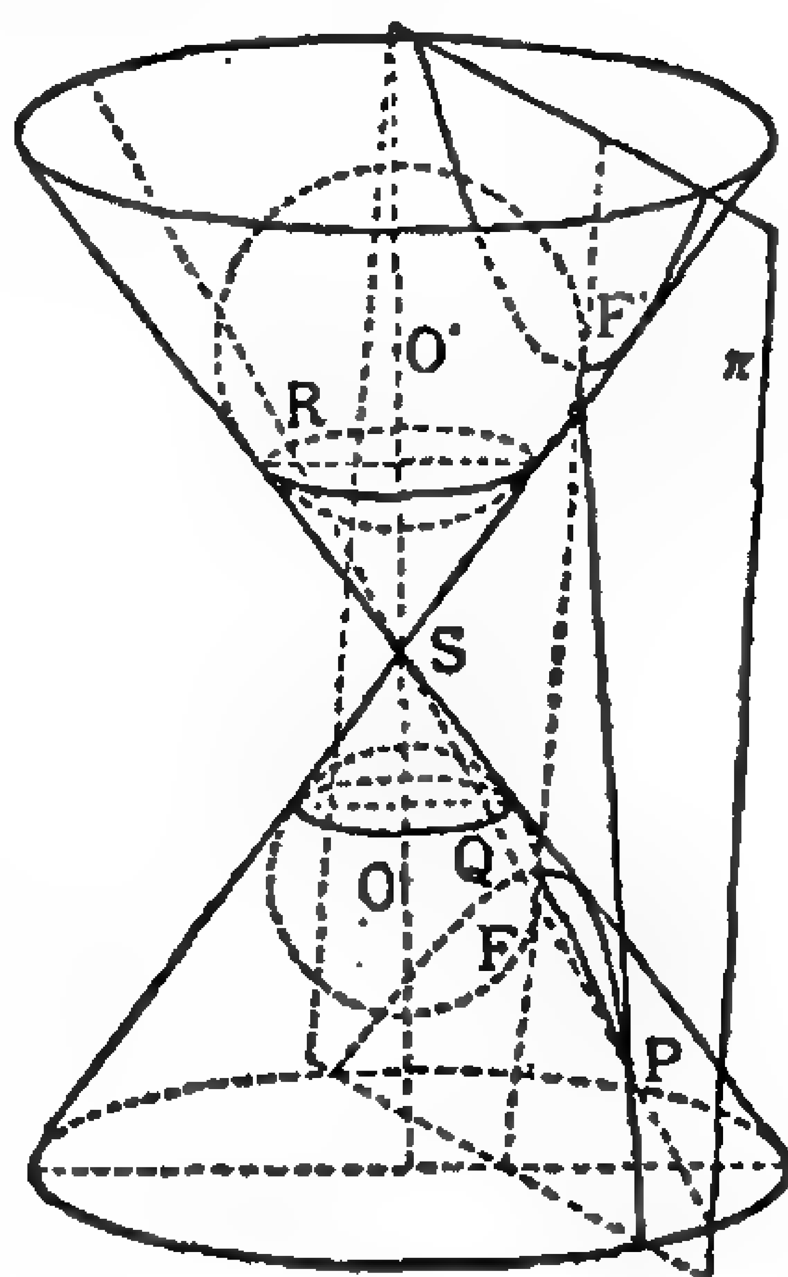
的两边平方，得

$$x^2+y^2=\frac{2}{5}(x^2+4y^2+4+4xy-4x-8y),$$

即　$3x^2-8xy-3y^2+8x+16y-8=0,$

这就是所求的双曲线方程．

3812． 把直圆锥用在其顶点的两侧和母线相交的平面截开，证明该截口是双曲线．



解　如图．作内切于直圆锥且和含有截口的平面π相切的两个球O、O'，它们和平面π的切点分别为F, F'.

设圆锥的顶点为S，平面π和圆锥交线上任意一点为P，SP切于两个球O、O'的切点为Q、R，则PF、QF都是球O的切线，所以

$$PF=PQ,$$

同理 $$PF'=PR.$$

$$\therefore\ PF\sim PF'=PQ\sim PR=QR.$$

但是 QR 是定值，设它为 $2a$，则

$$PF\sim PF'=2a,$$

因此点 P 的轨迹是以 F、F' 为焦点的双曲线。

注 以包含两相交直线 QSR 和 OSO' 的平面截两个球 O、O'，则 QSR 为两个截口圆的内公切线，所以 QR 是定值。

第六章 坐标轴的平移和旋转

1. 坐标轴的平移

3813. 把坐标轴平移，使直线 $ax+by+c=0$ 上的点 $A(x_1, y_1)$ 成为新的原点，那么这条直线的方程怎样？

解 把坐标轴平移使 $A(x_1, y_1)$ 成为新的原点，就是把坐标轴沿 x 轴正向平移 x_1，再沿 y 轴正向平移 y_1。这种情况与坐标轴不变，而把图象沿 x 轴正向平移 $-x_1$，再沿 y 轴正向平移 $-y_1$，所得的结果完全一样。因此，把坐标轴平移使 $A(x_1, y_1)$ 成为新的原点时，设点 (x, y) 用 (X, Y) 表示，则有

$$x=X+x_1,\ y=Y+y_1.$$

把它代入 $ax+by+c=0$，得

$$a(X+x_1)+b(Y+y_1)+c=0$$

即 $$aX+bY+(ax_1+by_1+c)=0.$$

由于点 $A(x_1, y_1)$ 在直线 $ax+by+c=0$ 上，所以

$$ax_1+by_1+c=0,$$

故所求直线方程为 $aX+bY=0$。把 X、Y 改写为 x、y，则得 $ax+by=0$。

注 把图象沿 x 轴正向平移 α，可用 $x-\alpha$ 代换 x。把图象沿 y 轴正向平移 β，可用 $y-\beta$ 代换 y。由于坐标轴平移和把图象沿其相反方向平移所得的结果一样，所以常着眼于图象的平移。

3814. 以点 $(2, -1)$ 为新的原点平移坐标轴，把下列方程变换成平移后的方程。

(1) $y^2-4x+2y+9=0$,

(2) $2x^2+3y^2-8x+6y+5=0$.

解 (1) 用 $x+2$ 代换 x，$y-1$ 代换 y，则所给方程变为

$$(y-1)^2-4(x+2)+2(y-1)+9=0$$

即 $$y^2=4x.$$

(2) 用 $x+2$ 代换 x，$y-1$ 代换 y，则所给方程变为

$$2(x+2)^2+3(y-1)^2-8(x+2)+6(y-1)+5=0,$$

即 $$2x^2+3y^2=6,$$

$$\therefore\ \frac{x^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1.$$

3815. 把坐标轴适当地平移，使下列方程变成 $xy=k$ 的形式。

(1) $xy+2x-3y+4=0$,

(2) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$.

解 (1) 把所给方程变形为

$$(x-3)(y+2)+10=0.$$

设 $$x-3=X,\ y+2=Y,$$

则得 $$XY+10=0,\quad \therefore\ XY=-10.$$

这就是说，以 $(3, -2)$ 为新的原点平移坐标轴，则所给方程变成 $xy=-10$。

(2) 把所给方程变形，

$$y=2+\frac{1}{x+1},\quad \therefore\ y-2=\frac{1}{x+1}.$$

设 $x+1=X$，$y-2=Y$，则上式写成

$$Y=\frac{1}{X}\quad 即\quad XY=1.$$

这就是说，以 $(-1, 2)$ 为新原点平移坐标轴，则所给方程变成 $xy=1$。

3816. 已知把坐标轴平移使新的原点为 $A(a, b)$ 时，两定点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 的新坐标分别为 $P_1(X_1, Y_1)$，$P_2(X_2, Y_2)$，证明差 X_2-X_1，Y_2-Y_1 和点 (a, b) 的位置无关。

解 由平移公式

$$X_1=x_1-a,\ Y_1=y_1-b;$$

$$X_2=x_2-a,\ Y_2=y_2-b,$$

$$\therefore\ X_2-X_1=x_2-x_1,\ Y_2-Y_1=y_2-y_1.$$

这些结果中不含有 a、b，因此和点 (a, b) 的位

置无关.

3817. 如果 $h^2-ab\neq0$，则二次曲线

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

的中心坐标，是联立方程 $ax+hy+g=0$，$hx+by+f=0$ 的解.

解　设 $f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$，把坐标轴平移到新原点 $A(x_0,y_0)$. 以 $x=X+x_0$，$y=Y+y_0$ 代入 $f(x,y)$，则

$$\begin{aligned}&f(X+x_0,Y+y_0)\\&=a(X+x_0)^2+2h(X+x_0)(Y+y_0)\\&\quad+b(Y+y_0)^2+2g(X+x_0)\\&\quad+2f(Y+y_0)+c\\&=aX^2+2hXY+bY^2\\&\quad+2(ax_0+hy_0+g)X\\&\quad+2(hx_0+by_0+f)Y+f(x_0,y_0).\end{aligned}$$

令　$ax_0+hy_0+g=0$，$hx_0+by_0+f=0$，

则原方程可写成

$$aX^2+2hXY+bY^2+f(x_0,y_0)=0.$$

这条曲线关于新原点对称，所以新原点 (x_0,y_0) 是这条曲线的中心. 但是联立方程

$$ax_0+hy_0+g=0,\quad hx_0+by_0+f=0$$

当且仅当 $h^2-ab\neq0$ 时才有唯一解. 所以当 $h^2-ab\neq0$ 时所给曲线 $f(x,y)=0$ 的中心坐标是方程

$$ax+by+g=0,\quad hx+by+f=0$$

的解，其中 $h^2-ab\neq0$.

3818. 求曲线 $x^2+4xy+3y^2+6x+8y+7=0$ 的中心坐标，把原点平移到该曲线的中心，求这条曲线的方程.

解　设中心坐标为 (x_0,y_0)，由上题知

$$x_0+2y_0+3=0,\quad 2x_0+3y_0+4=0.$$

解之，得　$x_0=1$，$y_0=-2$，

因此所给曲线的中心坐标是 $(1,-2)$.

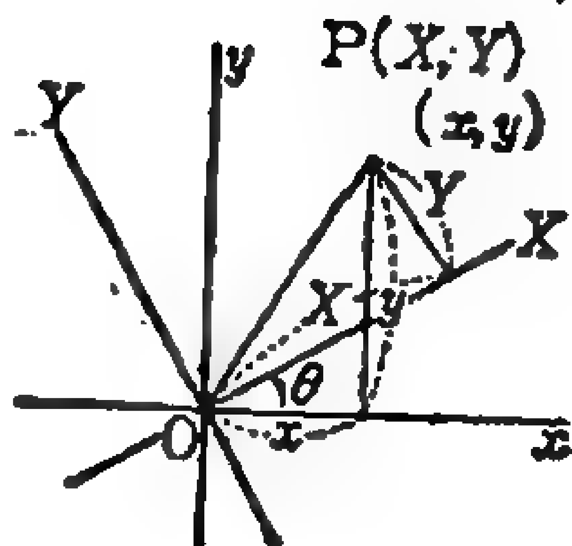
把坐标轴平移到新原点 $(1,-2)$，以 $x+1$ 代 x，$y-2$ 代 y，则所给方程变为

$$\begin{aligned}&(x+1)^2+4(x+1)(y-2)+3(y-2)^2\\&\quad+6(x+1)+8(y-2)+7=0,\\&\therefore\quad x^2+4xy+3y^2+2=0.\end{aligned}$$

这就是说，把坐标轴平移到曲线中心 $(1,-2)$ 时，该曲线的方程为 $x^2+4xy+3y^2+2=0$.

2. 坐标轴的旋转

3819. 把坐标轴 Oxy 绕原点 O 旋转角 θ，得新坐标轴 OXY，如果点 $P(x,y)$ 变成点 $P(X,Y)$，则 x、y 和 X、Y 之间有下列关系：



$$\begin{cases}x=X\cos\theta-Y\sin\theta,\\y=X\sin\theta+Y\cos\theta;\end{cases}$$

$$\begin{cases}X=x\cos\theta+y\sin\theta,\\Y=-x\sin\theta+y\cos\theta;\end{cases}$$

$$x^2+y^2=X^2+Y^2.$$

解　设 $\angle XOP=\alpha$，则对 $P(X,Y)$ 有

$$X=OP\cos\alpha,\quad Y=OP\sin\alpha.$$

又，对 $P(x,y)$ 有

$$x=OP\cos(\alpha+\theta),\ y=OP\sin(\alpha+\theta).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x&=OP(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)\\&=(OP\cos\alpha)\cos\theta-(OP\sin\alpha)\sin\theta\\&=X\cos\theta-Y\sin\theta,\\y&=OP(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)\\&=(OP\sin\alpha)\cos\theta+(OP\cos\alpha)\sin\theta\\&=X\sin\theta+Y\cos\theta.\end{aligned}$$

再设 $\angle xOP=\beta$，则对 $P(x,y)$ 有

$$x=OP\cos\beta,\ y=OP\sin\beta;$$

又，对 $P(X,Y)$ 有

$$X=OP\cos(\beta-\theta),\ Y=OP\sin(\beta-\theta),$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad X&=OP(\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\sin\theta)\\&=(OP\cos\beta)\cos\theta+(OP\sin\beta)\sin\theta\\&=x\cos\theta+y\sin\theta,\\Y&=OP(\sin\beta\cos\theta-\cos\beta\sin\theta)\\&=(OP\sin\beta)\cos\theta-(OP\cos\beta)\sin\theta\\&=-x\sin\theta+y\cos\theta.\end{aligned}$$

因为　$x^2+y^2=OP^2$，$X^2+Y^2=OP^2$，

所以　　$x^2+y^2=X^2+Y^2$.

3820. 如果把坐标轴绕原点旋转 45°，求下列曲线的方程.

(1) $xy=k$，　　(2) $3x^2-2xy+3y^2=5$.

解　把 $\theta=45°$ 代入上题中的转轴公式，则

$$\begin{aligned}x&=X\cos45°-Y\sin45°\\&=\frac{1}{\sqrt2}(X-Y),\\y&=X\sin45°+Y\cos45°\\&=\frac{1}{\sqrt2}(X+Y).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}2xy&=2\cdot\frac{1}{\sqrt2}(X-Y)\cdot\frac{1}{\sqrt2}(X+Y)\\&=X^2-Y^2,\end{aligned}$$

又　　$x^2+y^2=X^2+Y^2$,

(1) $xy=k$ 即 $2xy=2k$,

$$\therefore\quad X^2-Y^2=2k.$$

这就是曲线 $xy=k$ 在新坐标系里的方程.

(2) $3x^2-2xy+3y^2=3(x^2+y^2)-2xy$

$$=3(X^2+Y^2)-(X^2-Y^2)$$

$$=2X^2+4Y^2,$$

故曲线 $3x^2-2xy+3y^2=5$ 在新坐标系的方程为 $2X^2+4Y^2=5$.

3821. 证明: 曲线 $x^2+4xy+y^2=3$ 是双曲线, 并求它的焦点坐标.

解 绕原点把坐标轴旋转 45°, 由上题得

$$x^2+y^2=X^2+Y^2,\ 2xy=X^2-Y^2.$$

把它代入方程 $x^2+y^2+4xy=3$ 中, 得

$$X^2+Y^2+2(X^2-Y^2)=3$$

即

$$3X^2-Y^2=3,$$

$$\therefore\quad \frac{X^2}{1^2}-\frac{Y^2}{(\sqrt{3})^2}=1.$$

它表示一条双曲线. 其焦点在新坐标系的坐标为 $X=\pm2$, $Y=0$. 由此, 它在原坐标系里焦点的坐标是

$$x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}X=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm2)=\pm\sqrt{2},$$

即 $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$.

3822. 绕原点把坐标轴旋转 30°, 变换椭圆 $2x^2+6y^2=7$ 的方程.

解 $2x^2+6y^2=2(x^2+y^2)+4y^2=7$,

由于

$$2(x^2+y^2)=2(X^2+Y^2),$$

$$4y^2=4(X\sin30°+Y\cos30°)^2$$

$$=(X+\sqrt{3}Y)^2$$

$$=X^2+2\sqrt{3}XY+3Y^2,$$

把它们代入原方程, 就得到新坐标系的椭圆方程为

$$2(X^2+Y^2)+X^2+2\sqrt{3}XY+3Y^2=7,$$

即

$$3X^2+2\sqrt{3}XY+5Y^2=7.$$

3823. 证明: 如果把坐标轴绕原点任意旋转, $\triangle ABC$ 各顶点的横坐标之和一定, 则原点必为 $\triangle ABC$ 的重心.

解 取 A、B、C 的坐标分别为 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). 设把坐标轴绕原点旋转角 θ 时, 各顶点的横坐标分别为 X_1、X_2、X_3. 由问题 **3819** 知

$$X_1=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta,$$

$$X_2=x_2\cos\theta+y_2\sin\theta,$$

$$X_3=x_3\cos\theta+y_3\sin\theta,$$

$$\therefore\quad X_1+X_2+X_3=(x_1+x_2+x_3)\cos\theta+(y_1+y_2+y_3)\sin\theta.$$

如果 $X_1+X_2+X_3$ 与 θ 无关, 则须

$$x_1+x_2+x_3=0,\ y_1+y_2+y_3=0.$$

但是 $\triangle ABC$ 重心的坐标是

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right),$$

所以 $\triangle ABC$ 的重心必是原点.

3824. 已知把坐标轴绕原点旋转角 θ 时, 两点坐标分别从 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 变为 (X_1, Y_1)、(X_2, Y_2), 证明下列两式与 θ 无关:

(1) $X_1Y_2-X_2Y_1$,　(2) $X_1X_2+Y_1Y_2$.

解 由问题 **3819** 知

$$X_1=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta,$$

$$Y_1=-x_1\sin\theta+y_1\cos\theta;$$

$$X_2=x_2\cos\theta+y_2\sin\theta,$$

$$Y_2=-x_2\sin\theta+y_2\cos\theta.$$

(1) 把 X_1、Y_1、X_2、Y_2 的值代入 $X_1Y_2-X_2Y_1$ 中, 可以算出 $\cos^2\theta$、$\sin^2\theta$ 的系数都是 $x_1y_2-x_2y_1$, $\sin\theta\cos\theta$ 的系数是 0, 所以

$$X_1Y_2-X_2Y_1$$

$$=(x_1y_2-x_2y_1)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$=x_1y_2-x_2y_1=\text{定值}.$$

(2) 把 X_1、Y_1, X_2、Y_2 的值代入 $X_1X_2+Y_1Y_2$ 中, 可以算出 $\cos^2\theta$、$\sin^2\theta$ 的系数都是 $x_1x_2+y_1y_2$, $\sin\theta\cos\theta$ 的系数是 0, 所以

$$X_1X_2+Y_1Y_2$$

$$=(x_1x_2+y_1y_2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$=x_1x_2+y_1y_2=\text{定值}.$$

3825. 绕原点把坐标轴旋转角 θ 时, 二次曲线

$$ax^2+2hxy+by^2+c=0$$

变为 $a'X^2+b'Y^2+c'=0$ 的形状, 求 θ.

解 绕原点把坐标轴旋转角 θ, 则由问题 **3819** 知

$$x=X\cos\theta-Y\sin\theta,$$

$$y=X\sin\theta+Y\cos\theta.$$

把它代入 $ax^2+2hxy+by^2$,

$$ax^2+2hxy+by^2=a(X\cos\theta-Y\sin\theta)^2+2h(X\cos\theta-Y\sin\theta)(X\sin\theta+Y\cos\theta)+b(X\sin\theta+Y\cos\theta)^2.\qquad ①$$

① 式右边 XY 的系数为

$$-2(a-b)\sin\theta\cos\theta+2h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$=-(a-b)\sin2\theta+2h\cos2\theta.\qquad ②$$

令②的值为0，则可求得θ值：

当$a=b$时，

$$\cos 2\theta=0, \quad \therefore \quad \theta=\pm 45^\circ;$$

当$a\neq b$时，

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{2h}{a-b}.$$

3826. 把坐标轴绕原点旋转30°，变换方程

$$3x^2+2\sqrt{3}\,xy+y^2+x-\sqrt{3}\,y=0.$$

解 把坐标轴绕原点旋转30°，则有

$$x=X\cos 30^\circ-Y\sin 30^\circ$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,X-Y),$$
$$y=X\sin 30^\circ+Y\cos 30^\circ$$
$$=\frac{1}{2}(X+\sqrt{3}\,Y).$$

把所给曲线方程变形为

$$(\sqrt{3}\,x+y)^2+(x-\sqrt{3}\,y)=0,$$

则由$\sqrt{3}\,x+y=2X$, $x-\sqrt{3}\,y=-2Y$，可得

$$4X^2-2Y=0.$$

这就是在新坐标系里的题设曲线方程。

3827. 先把原点移到$A(1, 0)$，再把坐标轴绕A旋转45°，变换曲线方程

$$x^2+6xy+y^2-2x-6y-2=0.$$

解 设把原点平移到$A(1, 0)$，点(x, y)变为(X, Y)，则由平移公式知$x=X+1$, $y=Y$，所给曲线方程变成

$$(X+1)^2+6(X+1)Y+Y^2-2(X+1)$$
$$-6Y-2=0$$

即 $$X^2+6XY+Y^2-3=0.$$

再把坐标轴绕A旋转45°，设旋转前的点$P(X, Y)$变为旋转后的$P(x, y)$，则由问题3821知

$$X^2+Y^2=x^2+y^2,\ 2XY=x^2-y^2,$$

所给曲线方程又变为

$$x^2+y^2+3(x^2-y^2)-3=0,$$

即 $$4x^2-2y^2-3=0.$$

3828. 已知把坐标轴绕原点旋转角θ, $ax^2+2hxy+by^2$变为$a'X^2+2h'XY+b'Y^2$，证明

(1) $a'+b'=a+b$,

(2) $h'^2-a'b'=h^2-ab$.

解 把 $x=X\cos\theta-Y\sin\theta$,

$y=X\sin\theta+Y\cos\theta$,

代入$ax^2+2hxy+by^2$中，则

(1) 求X^2, Y^2的系数：

$$a'=a\cos^2\theta+2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta,$$
$$b'=a\sin^2\theta-2h\cos\theta\sin\theta+b\cos^2\theta,$$
$$\therefore \quad a'+b'=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$+b(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=a+b.$$

(2) 把(1)求得的两式相减，

$$a'-b'=(a-b)\cos 2\theta+2h\sin 2\theta.$$

又求XY的系数为

$$2h'=-(a-b)\sin 2\theta+2h\cos 2\theta.$$

把此两式分别平方后相加，得

$$(a'-b')^2+4h'^2=(a-b)^2+4h^2.$$

又由(1)，得 $(a'+b')^2=(a+b)^2$.

上面两式相减，

$$h'-a'b'=h^2-ab.$$

3829. 关于x、y的二次方程

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad ①$$

的图象，证明

(1) 当$h^2-ab=0$时，①表示抛物线或两平行直线；

(2) 当$h^2-ab>0$时，①表示双曲线或两相交直线；

(3) 当$h^2-ab<0$时，①表示椭圆。

解 把坐标轴绕原点旋转角θ，设①变成

$$a'X^2+2h'XY+b'Y^2+2g'X+2f'Y+c'$$
$$=0. \quad ②$$

适当地选择旋转角θ，使XY的系数h'为0，则$ax^2+2hxy+by^2$变成

$$a'X^2+2h'XY+b'Y^2(=a'X^2+b'Y^2),$$

由上题知 $h^2-ab=h'^2-a'b'=-a'b'$.

(1) 当$h^2-ab=0$时，$a'b'=0$,

$$\therefore \quad b'=0 \quad 或 \quad a'=0.$$

分别讨论如下：

(i) 当$b'=0$, $a'\neq 0$时，如$f'\neq 0$，②可写成

$$a'X^2+2g'X+2f'Y+c'=0,$$

即 $$Y=-\frac{a'}{2f'}X^2-\frac{g'}{f'}X-\frac{c'}{2f'},$$

此式表示抛物线。

如$f'=0$，②可写成

$$a'X^2+2g'X+c'=0.$$

此式如有图象，则是与y轴平行的两直线。

(ii) 当$b'\neq 0$, $a'=0$时，如$g\neq 0$，②可写成

$$b'Y^2+2g'X+2f'Y+c'=0,$$

即　　$X=-\frac{b'}{2g'}Y^2-\frac{f'}{g'}Y-\frac{c'}{2g'}$,

此式表示一条抛物线。

如 $g'=0$, ② 可写成

$$b'Y^2+2f'Y+c'=0,$$

此式如有图象,则是与 x 轴平行的两直线。

因此,当 $h^2-ab=0$ 时,① 表示抛物线或两平行直线。

(2) 当 $h^2-ab>0$ 时, 因为 $h^2-ab\neq0$, 所以 ① 有中心(问题 **3817**),设其中心为 $A(x_0, y_0)$,把原点平移到 $A(x_0, y_0)$,则 ① 变成

$$ax^2+2hxy+by^2+c'=0. \quad ③$$

再把坐标轴绕 $A(x_0, y_0)$旋转角 θ, 使 XY 的系数为 0, 则 ③ 又可变为

$$a'X^2+b'Y^2+c''=0. \quad ③'$$

由问题 **3828** 知

$$h'^2-a'b'=h^2-ab>0,$$

因 $h'=0$, 所以 $-a'b'>0$ 即 $a'b'<0$。这就是说,a' 与 b' 异号。当 $c''\neq0$ 时, ③' 表示双曲线;当 $c''=0$ 时,③' 表示两相交直线。

因此,当 $h^2-ab>0$ 时,① 表示双曲线或两相交直线。

(3) 当 $h^2-ab<0$ 时, 与(2)一样,因 $h^2-ab\neq0$,所以 ① 有中心,设中心为 $A(x_0, y_0)$. 把坐标轴平移, 使中心 $A(x_0, y_0)$为新原点,则 ① 变成 ③。再把坐标轴绕 A 旋转角 θ,使 XY 的系数为 0, 则可得到 ③'。由于 $h'^2-a'b'=h^2-ab<0$ 且 $h'=0$, 所以 $-a'b'<0$ 即 $a'b'>0$. 这就是说,a'、b' 同号。因此, 如 a'、b' 与 c'' 不同号, 则 ③' 表示椭圆, 如 a'、b' 与 c'' 同号, 则 ③' 无图象。

故当 $h^2-ab<0$ 时, ① 如有图象, 即为椭圆。

3830. 下列曲线如是椭圆, 试求其长轴和短轴;如是双曲线,试求其渐近线方程。

(1) $5x^2+4xy+8y^2-36=0$,

(2) $7x^2-6xy-y^2-8=0$.

解　(1) $h^2-ab=2^2-5\times8=-36<0$, 所以(1)如有图象,则是椭圆. 在坐标轴绕原点旋转角 θ 后,所得新方程的系数 a'、h'、b' 中,使 $h'=0$,则有

$$a'+b'=a+b=5+8=13,$$

$$a'b'=-(h'^2-a'b')=-(h^2-ab)$$
$$=-(2^2-5\times8)=36,$$

因而 a'、b' 是方程 $t^2-13t+36=0$ 的两个根。

$$\therefore\quad a'=9,\ b'=4\quad 或\quad a'=4,\ b'=9.$$

故旋转后所得新方程为

$$9X^2+4Y^2=36\quad 或\quad 4X^2+9Y^2=36,$$

即　$\frac{X^2}{2^2}+\frac{Y^2}{3^2}=1$　或　$\frac{X^2}{3^2}+\frac{Y^2}{2^2}=1$.

所以其长轴为 6,短轴为 4。

(2) $h^2-ab=(-3)^2-7(-1)=16>0$, 所以(2)的图象是双曲线或两相交直线。把曲线方程变形为

$$(x-y)(7x+y)=8,$$

所以它是双曲线,其渐近线方程为

$$(x-y)(7x+y)=0.$$

即　　$y=x$　及　$y=-7x$.

3831. 证明方程

$$x^2-4xy+4y^2-18x+16y+10=0$$

的图象是抛物线,并求其对称轴方程。

解　$h^2-ab=(-2)^2-1\times4=0$, 所以原方程的图象是抛物线或平行于坐标轴的两平行直线。把原方程变形为

$$(x-2y)^2-18x+16y+10=0. \quad ①$$

考虑曲线 ① 和直线

$$x-2y=0 \quad ②$$

的交点,把 ② 代入 ① 消去 y, 得

$$-10x+10=0\quad 即\quad x=1. \quad ③$$

因此 ③ 和 ② 即 ① 和 ② 仅交于一点, 所以 ① 不是平行于坐标轴的两平行直线, 而是抛物线,且其对称轴平行于直线 ②。

如取与直线 ② (即对称轴)垂直的直线为

$$y=-2x, \quad ④$$

由于直线 ④ 垂直于抛物线 ① 的对称轴, 所以 ④ 和 ① 如果有交点, 则两交点所连线段的中点 M 必在对称轴上。把 ④ 代入 ①, 得

$$25x^2-50x+10=0\quad 即\quad 5x^2-10x+2=0,$$

$$\therefore\quad x=\frac{5\pm\sqrt{15}}{5}.$$

从而点 M 的横坐标为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5+\sqrt{15}}{5}+\frac{5-\sqrt{15}}{5}\right)=1,$$

点 M 的纵坐标为 -2, 因此所求抛物线的对称轴是过 $M(1, -2)$且与 ② 平行的直线. 即

$$(x-1)-2(y+2)=0,$$

$$\therefore\quad x-2y-5=0.$$

第七章　参数方程

3832. 求参数方程

$$\begin{cases} x=pt^2, \\ y=2pt \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty)$$

所表示的曲线，并讨论参数 t 的几何意义。

解　在参数方程中消去 t，则得

$$y^2=4px,$$

它表示以原点为顶点，x 轴为对称轴的抛物线。

在抛物线上点 $P(pt^2, 2pt)$ 处的切线方程是

$$2pty=2p(x+pt^2)$$

即
$$y=\frac{1}{t}(x+pt^2).$$

所以参数 t 表示抛物线在点 $P(pt^2, 2pt)$ 处切线斜率的倒数。设点 P 处的切线和 x 轴正向的夹角为 α，则 $t=\operatorname{ctg}\alpha$。

3833. 求以 θ 为参数的参数方程

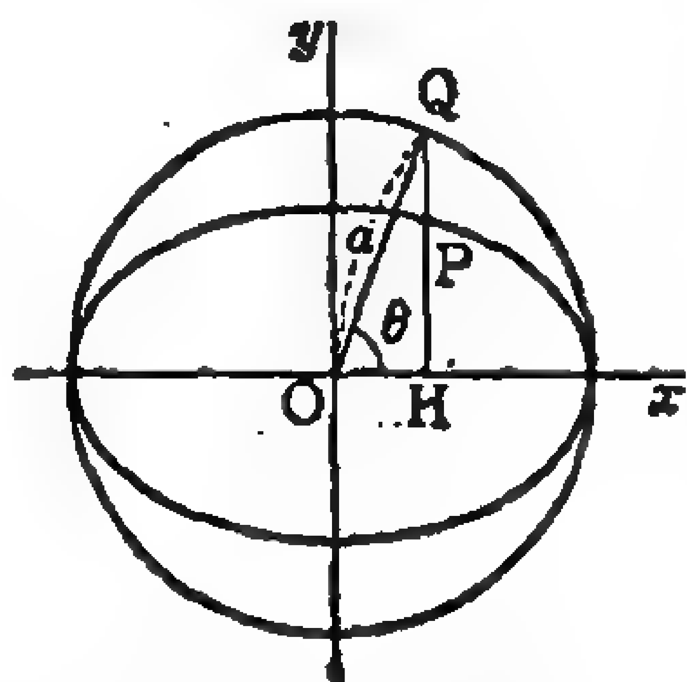
$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta \end{cases} \quad (a>b>0)$$

所表示的曲线，并讨论参数 θ 的几何意义。

解　由参数方程消去 θ，

$$\frac{x}{a}=\cos\theta, \quad \frac{y}{b}=\sin\theta,$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,$$



它所表示的曲线是以原点 O 为中心的椭圆。取这个椭圆上的任意一点 $P(x, y)$，从 P 向 x 轴引垂线，垂足为 H，再作以原点 O 为圆心、a 为半径的圆。设这个圆和 HP 的延长线的交点为 Q，用 θ 表示 $\angle xOQ$，则 Q 的坐标为 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$，点 $P(x, y)$ 和 Q 的横坐标是相同的，所以

$$x=a\cos\theta.$$

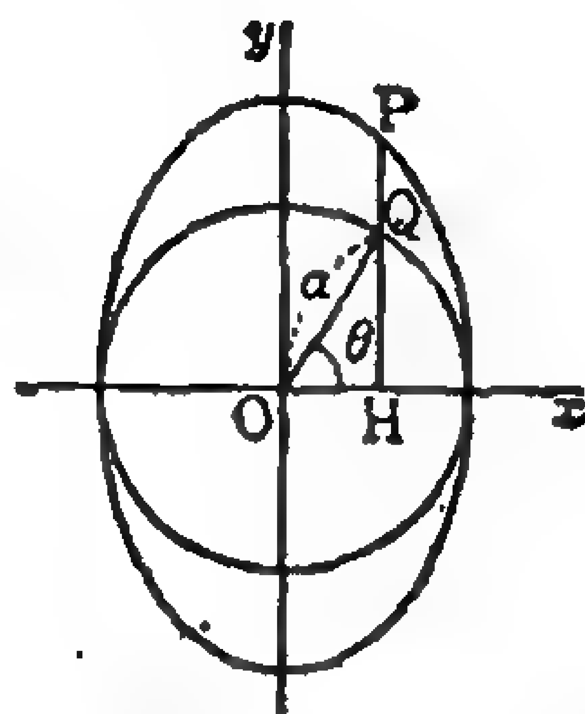
由于点 P 在椭圆上，因而

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

$$\therefore \quad \left|\frac{y}{b}\right|=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{\sin^2\theta}=|\sin\theta|,$$

从而
$$y=b\sin\theta.$$

参数 θ 叫做椭圆的离心角。



注　当 $0<a<b$ 时，所给参数方程仍表示椭圆。这时以原点为圆心、半径为 a 的圆在椭圆的内部且和椭圆相切。因而点 Q 不在 PH 的延长线而在线段 PH 上。离心角 θ 如图所示。

3834. 求以 θ 为参数的参数方程

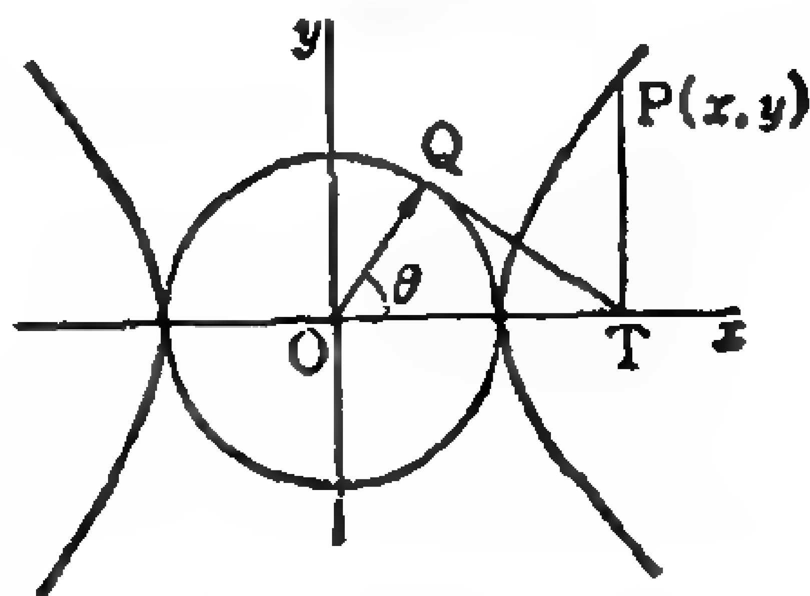
$$\begin{cases} x=a\sec\theta, \\ y=b\operatorname{tg}\theta \end{cases}$$

所表示的曲线，并讨论参数 θ 的几何意义。

解
$$\frac{x}{a}=\sec\theta, \quad \frac{y}{b}=\operatorname{tg}\theta,$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\sec^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta=1,$$

它表示以原点 O 为中心的双曲线。



从双曲线上任意一点 $P(x, y)$ 向 x 轴引垂线，垂足为 T。再作以 O 为圆心、a 为半径的圆，从 T 引这个圆的切线 TQ，切点为 Q(P、Q 都在 x 轴的同侧)。设 $\angle TOQ=\theta$，则

$$x=OT=a\sec\theta.$$

因点 $P(x, y)$ 在双曲线上，所以

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1=\sec^2\theta-1=\operatorname{tg}^2\theta,$$

因而 $\left|\frac{y}{b}\right|=|\operatorname{tg}\theta|$,

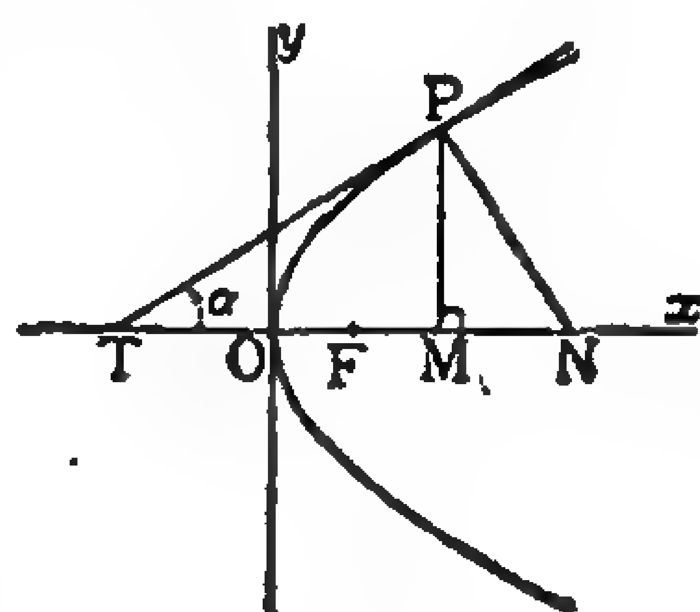
$$y=b\operatorname{tg}\theta.$$

参数 θ 叫做双曲线的离心角.

3835. 设抛物线 $y^2=4px$ 上点 P 处的法线和 x 轴的交点为 N，从 P 引 x 轴的垂线，垂足为 M，证明 MN 的长度一定.

解 把抛物线 $y^2=4px$ 用参数方程表示，得

$$\begin{cases}x=pt^2,\\ y=2pt.\end{cases}$$



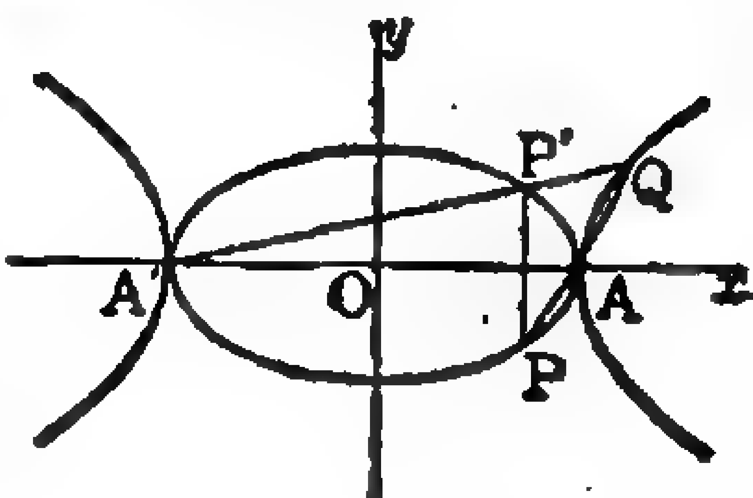
设抛物线上点 P 处的切线和 x 轴的交点为 T，并设 $\angle xTP=\alpha$，则 $t=\operatorname{ctg}\alpha$(问题 3832). 因此点 P 处的法线斜率为 $-t$，法线方程为 $y-2pt=-t(x-pt^2)$.

在此式中，令 $y=0$，则 $x=2p+pt^2$，所以点 N 的横坐标为 $2p+pt^2$. 点 M 和点 P 的横坐标相同，都是 pt^2. 因此

$$MN=(2p+pt^2)-(pt^2)=2p=2\cdot OF,$$

其中 F 为抛物线的焦点，故 MN 的长为定值.

3836. 如图，在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，A、A' 为顶点，PP' 是垂直于 AA' 的弦. 试求直线 AP 和 $A'P'$ 的交点 Q 的轨迹.



解 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta.\end{cases}$$

设点 P、P' 的坐标分别为 $P(a\cos\theta, -b\sin\theta)$，$P'(a\cos\theta, b\sin\theta)$，则直线 AP 和 $A'P'$ 的方程分别为

$$AP:\ a(\cos\theta-1)y=-b\sin\theta\cdot(x-a),$$
$$A'P':\ a(\cos\theta+1)y=b\sin\theta\cdot(x+a).$$

两式相加，得

$$2a\cos\theta\cdot y=2ab\sin\theta,$$
$$\therefore\ y=b\operatorname{tg}\theta,\quad 从而\quad x=a\sec\theta.$$

故由问题 3834 知，所求点 Q 的轨迹为双曲线

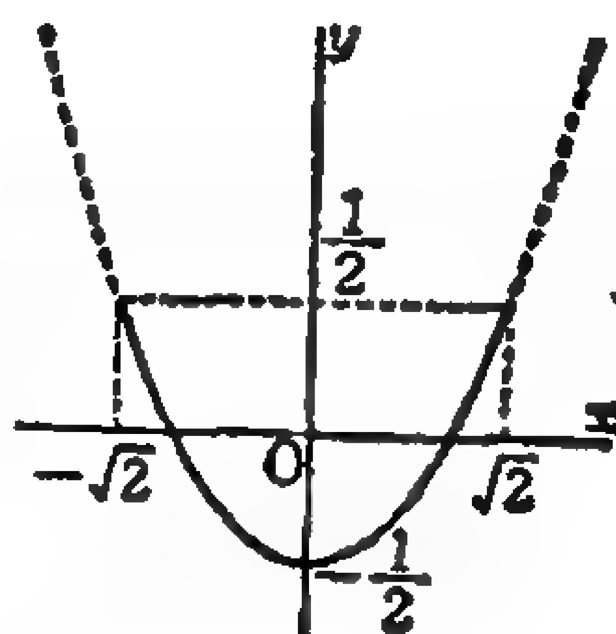
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

3837. 下面的参数方程表示什么曲线:

$$\begin{cases}x=\cos\theta+\sin\theta,\\ y=\sin\theta\cos\theta.\end{cases}$$

解 $x^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta$
$=1+2y$,

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}.$$



它的图象是一条抛物线. 但由已给参数方程知

$$x=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ),$$
$$\therefore\ -2\leqq x\leqq\sqrt{2}.$$

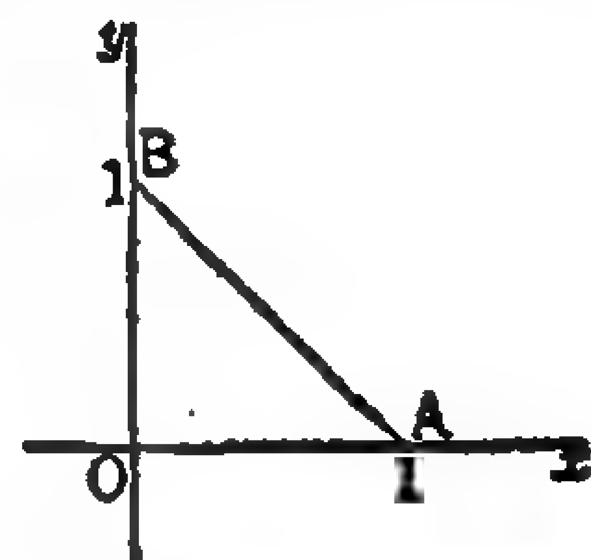
又 $2y=\sin 2\theta$，$\therefore\ -\frac{1}{2}\leqq y\leqq\frac{1}{2}$.

故参数方程所表示的曲线是上图中的实线部分.

3838. $x=\cos^2\theta$, $y=\sin^2\theta$ 表示什么曲线?

解 从参数方程中消去 θ,

$$x+y=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$



即 $x+y=1$.

但由 $x=\cos^2\theta$ 知 $0\leqq x\leqq 1$，所以参数方程表示线段 AB(如图).

3839.

$$\begin{cases}x=t^2+t, & ①\\ y=t^2-t, & ②\end{cases}$$

表示什么曲线?

解 ①−②,

$$x-y=2t, \qquad ③$$

①+②, $$x+y=2t^2, \qquad ④$$

从 ③、④ 消去 t,

$$(x-y)^2=4t^2=2(x+y),$$

即

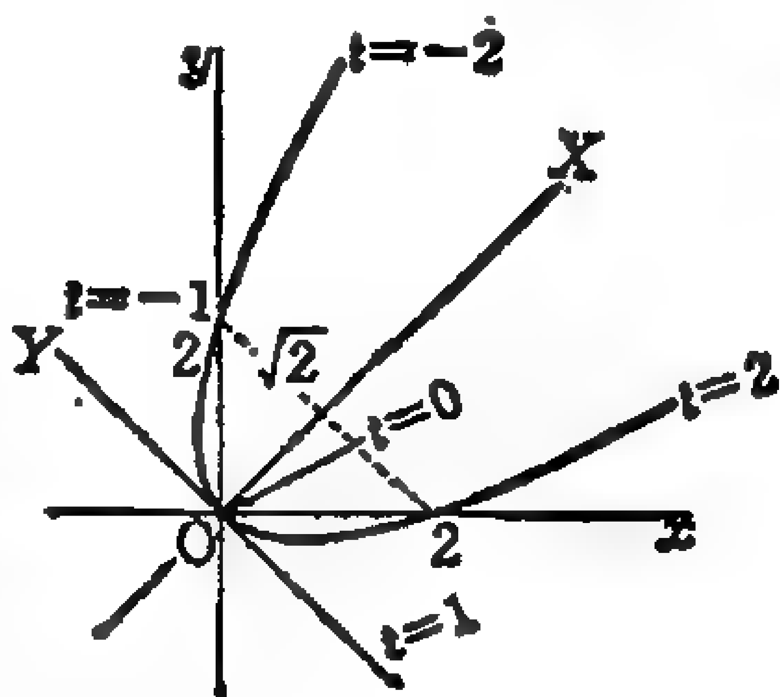
$$(x-y)^2=2(x+y), \qquad ⑤$$
$$\therefore\ x^2-2xy+y^2-2x-2y=0. \qquad ⑤'$$

把此式与方程

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

比较，可知

h^2-ab
$=(-1)^2-1\times1$
$=0.$



又直线 $x-y=0$ 和⑥的交点只有一点(0,0),所以⑥不是两平行直线而是抛物线(问题 **3829**)。

将坐标轴绕原点旋转 45°, 则

$$\begin{cases}x=X\cos45°-Y\sin45°,\\ y=X\sin45°+Y\cos45°\text{(问题 3819)},\end{cases}$$

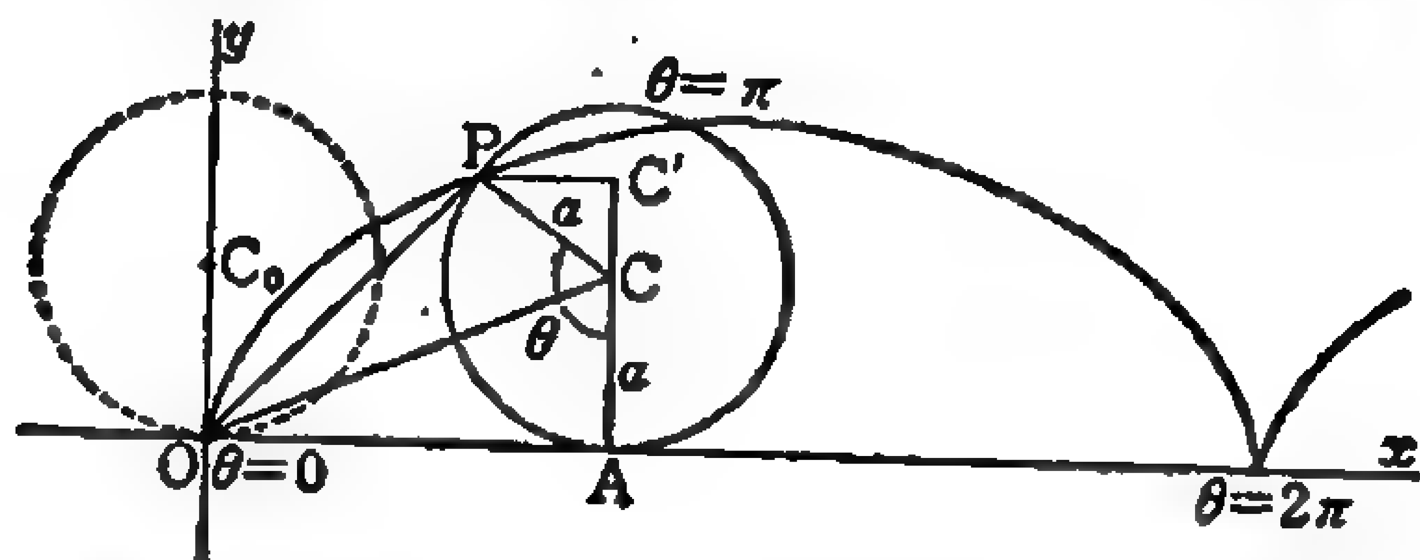
$$\therefore\quad x+y=\sqrt{2}X,\quad x-y=-\sqrt{2}Y.$$

把它代入⑤, 得

$$Y^2=\sqrt{2}X.$$

故题设参数方程的图象是图中的抛物线.

3840. 半径为 a 的圆 C 沿 x 轴滚动时,求该圆上定点 P 的轨迹(旋轮线或摆线)方程. 设当开始滚动时,点 P 在原点的位置.



解 如上图. 当圆 C 旋转角 θ 时, 该圆与 x 轴相切于点 A. 设点 P 的坐标为(x, y), 由于圆 C 滚动前进, 所以

$$OA=\widehat{AP}=a\theta.$$

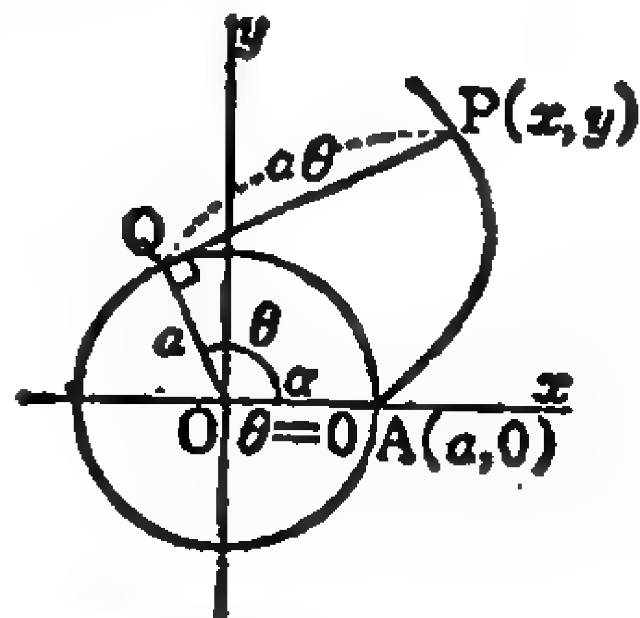
从点 P 引 x 轴的平行线和 AC(或其延长线)的交点为 C', 则

$$PC'=a\sin\theta,\ CC'=a\cos\theta.$$

$$\therefore\quad\begin{cases}x=a\theta-a\sin\theta=a(\theta-\sin\theta),\\ y=a-a\cos\theta=a(1-\cos\theta).\end{cases}$$

这就是所求轨迹的参数方程(θ 为参数).

3841. 如右图. 设有缠在以原点为圆心、a 为半径的圆上的细线, 其一端为 P. 如果执端点 P, 一边拉紧线、一边解开时, 求点 P 的轨迹(圆的渐伸线)的方程. 设点 P 开始时在点 $A(a, 0)$ 的位置.



解 如图. 设张紧的线与圆 O 的切点 Q 在圆上旋转. 设 $\angle AOQ=\theta$, 点 P 的坐标为 (x, y), 则

$$QP=\widehat{AQ}\text{ 的长}=a\theta,$$

从而 $\overrightarrow{QP}$ 在两坐标轴上的分量是 $(a\theta\sin\theta, -a\theta\cos\theta)$.

$\overrightarrow{OQ}$ 在两坐标轴上的分量是 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$,

$$\therefore\quad\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$$
$$=(a\cos\theta,\ a\sin\theta)+(a\theta\sin\theta,\ -a\theta\cos\theta).$$

由此可知 $\overrightarrow{OP}$ 在两坐标轴上的分量分别是

$$\begin{cases}x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta),\\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta).\end{cases}$$

这就是所求轨迹的参数方程, 其中 θ 为参数.

3842. 求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的三角形的面积的最大值.

解 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内接三角形的顶点为 P_1、P_2、P_3, 各顶点的离心角分别为 α、β、γ, 则它们的坐标为

$$P_1:\ (a\cos\alpha,\ b\sin\alpha),$$
$$P_2:\ (a\cos\beta,\ b\sin\beta),$$
$$P_3:\ (a\cos\gamma,\ b\sin\gamma).$$

再设以原点为圆心、a 为半径的圆的内接三角形 $Q_1Q_2Q_3$, 各顶点坐标为

$$Q_1:\ (a\cos\alpha,\ a\sin\alpha),$$
$$Q_2:\ (a\cos\beta,\ a\sin\beta),$$
$$Q_3:\ (a\cos\gamma,\ a\sin\gamma),$$

可以看出: P_1、P_2、P_3 和 Q_1、Q_2、Q_3 的横坐标分别相等, 纵坐标分别成定比, 因此

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{b}{a}S_{\triangle Q_1Q_2Q_3}.$$

这就是说 $S_{\triangle P_1P_2P_3}$ 和 $S_{\triangle Q_1Q_2Q_3}$ 同时取得最大值.

今知 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 是定圆的内接三角形, 当且仅当此三角形为正三角形时其面积最大. 设 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 为正三角形, 则

$$\angle Q_1OQ_2=\angle Q_2OQ_3=\angle Q_3OQ_1=120°.$$

$$\therefore\quad S_{\triangle Q_1Q_2Q_3}=S_{\triangle Q_1OQ_2}+S_{\triangle Q_2OQ_3}+S_{\triangle Q_3OQ_1}$$
$$=3S_{\triangle Q_1OQ_2}=3\left(\frac{1}{2}a^2\sin120°\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

因此, $S_{\triangle P_1P_2P_3}$ 的最大值是

$$\frac{b}{a}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

第八章　极坐标方程

1. 直线的极坐标方程

3843. 把下列曲线用极坐标方程表示：

(1) $x+\sqrt{3}y=2$;　(2) $x^2+y^2-2ax=0$;

(3) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

解 (1) 以 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 代入原方程，则得

$$r\cos\theta+\sqrt{3}r\sin\theta=2.$$

因为 $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$,

所以所求的极坐标方程为

$$r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

(2) 和(1)同理可得，所求极坐标方程为

$$r^2-2ar\cos\theta=0, \quad 即 \quad r=2a\cos\theta.$$

此式包括 $r=0$ 的情况。

(3) 把 $x^2+y^2=r^2$, $x^2-y^2=r^2\cos 2\theta$ 代入原方程，则得

$$r^4=2a^2r^2\cos 2\theta, \quad 即 \quad r^2=2a^2\cos 2\theta.$$

此式包括 $r=0$ 的情况。

3844. 把下列极坐标方程用直角坐标方程表示，并指出它们各表示什么曲线。

(1) $r\cos(\theta-\alpha)=0$;

(2) $r=2a(\cos\theta+\sin\theta)$;

(3) $r^2\sin 2\theta=2\operatorname{tg}\theta$.

解 (1) 把原方程写成

$$r\cos\theta\cos\alpha+r\sin\theta\sin\alpha=0.$$

以 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 代入上式，则得所求方程为

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=0.$$

它表示一条经过原点的直线。

(2) 因为此式不包括 $r=0$ 的情况，以 r 乘方程的两边，得

$$r^2=2a(r\cos\theta+r\sin\theta).$$

因 $r^2=x^2+y^2$, $r\cos\theta=x$, $r\sin\theta=y$, 故所求方程为

$$x^2+y^2=2a(x+y),$$

即 $$(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2.$$

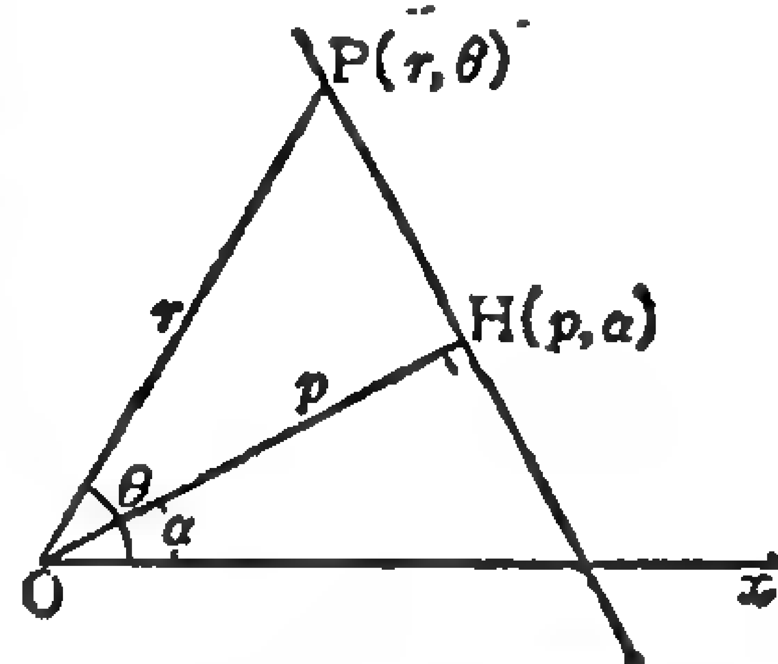
它表示圆心为 (a, a)，半径为 $\sqrt{2}a$ 的圆。

(3) 把 $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$ 代入原方程，则得所求方程为

$$2xy=2\cdot\frac{y}{x}, \quad 即 \quad y(x^2-1)=0.$$

它表示三条直线 $y=0$, $x=1$, $x=-1$.

3845. 已知从极点作某直线垂线的垂足为 $H(p, \alpha)$，求这条直线的极坐标方程。

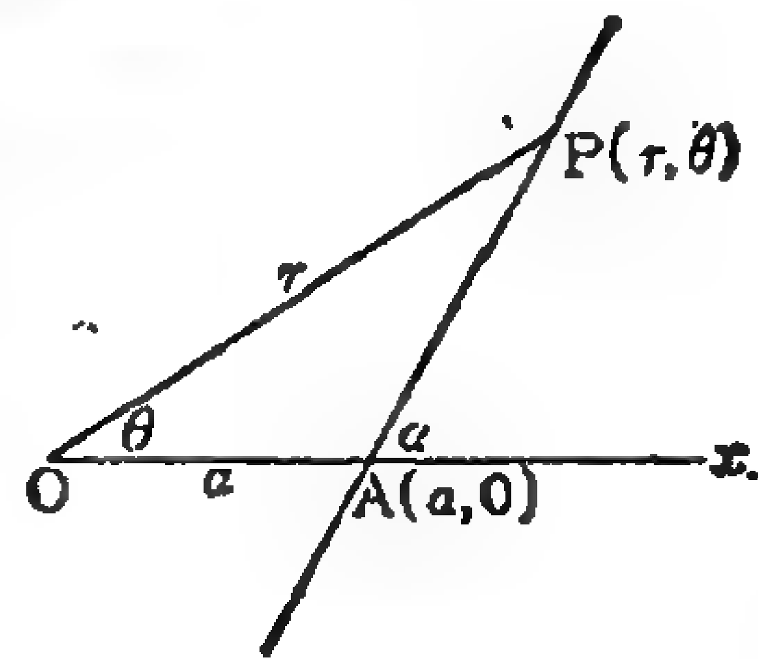


解 设 $P(r, \theta)$ 为这条直线上的任意一点，则在直角三角形 POH 中，可得

$$r\cos(\theta-\alpha)=p.$$

这就是所求的极坐标方程。

3846. 求通过极轴上的点 $A(a, 0)$ 且和极轴夹角为 α 的直线的极坐标方程。



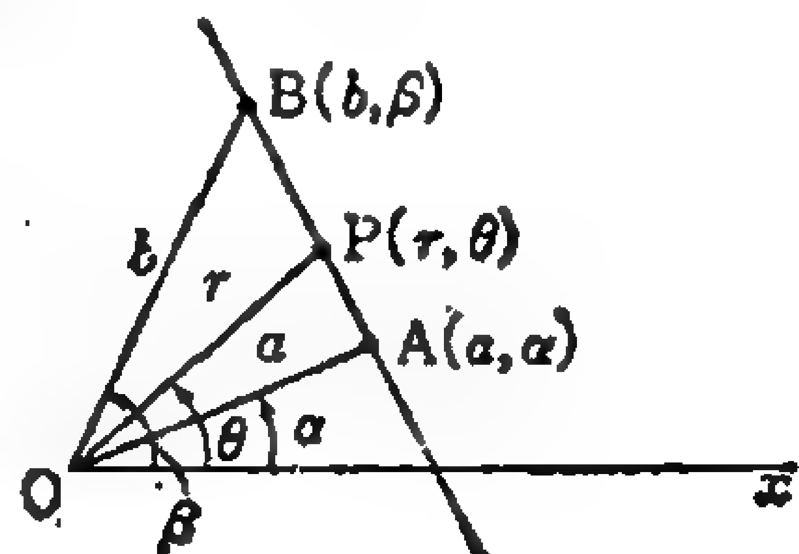
解 设 $P(r, \theta)$ 为这条直线上的任意一点，则在 $\triangle AOP$ 中，应用正弦定理，得

$$\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin(\alpha-\theta)}.$$

$$\therefore \quad r\sin(\alpha-\theta)=a\sin\alpha,$$

这就是所求的极坐标方程。

3847. 求经过两点 $A(a, \alpha)$、$B(b, \beta)$ 的直线的极坐标方程。



解 设 $P(r, \theta)$ 为这条直线上的任意一点，则

$$S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}ar\sin(\theta-\alpha),$$

$$S_{\triangle OPB}=\frac{1}{2}br\sin(\beta-\theta),$$

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}ab\sin(\beta-\alpha).$$

因为 $S_{\triangle OAP}+S_{\triangle OPB}=S_{\triangle OAB}$,
所以所求的极坐标方程为

$$ar\sin(\theta-\alpha)+br\sin(\beta-\theta)=ab\sin(\beta-\alpha).$$

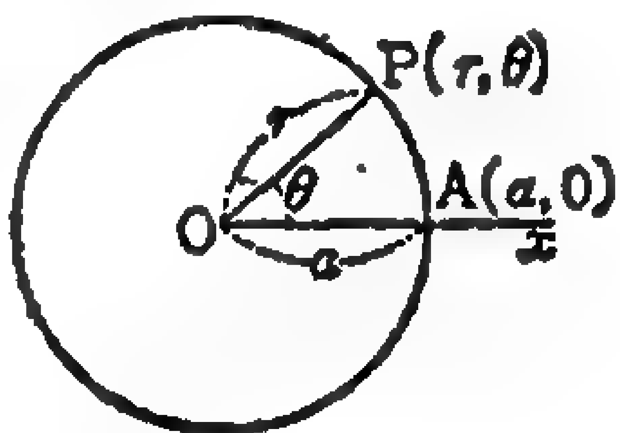
特别地，当 $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$ 时，则有

$$r(a\sin\theta+b\cos\theta)=ab.$$

2. 二次曲线的极坐标方程

3848. 求以极点为圆心、a 为半径的圆的极方程.

解 设 $P(r,\theta)$ 为圆上任意一点，则



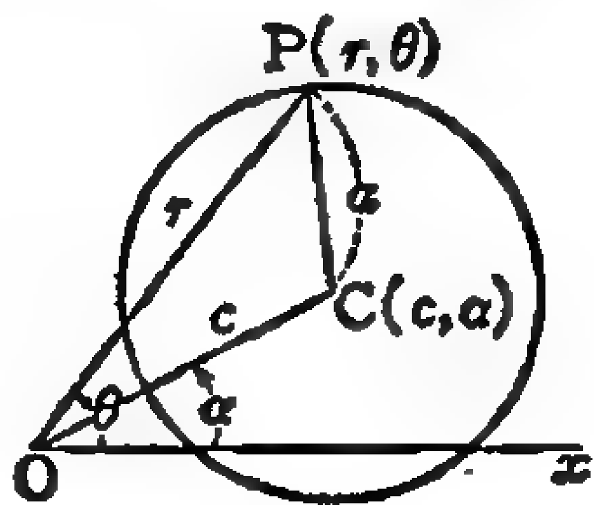
$$PA=a.$$

用极坐标表示，则得所求极坐标方程为

$$r=a.$$

3849. 求圆心为 $C(c,\alpha)$，半径为 a 的圆的极坐标方程.

解 设 $P(r,\theta)$ 为圆上的任意一点，把 $CP=a$ 用 r、θ 表示.在 $\triangle OCP$ 中因为



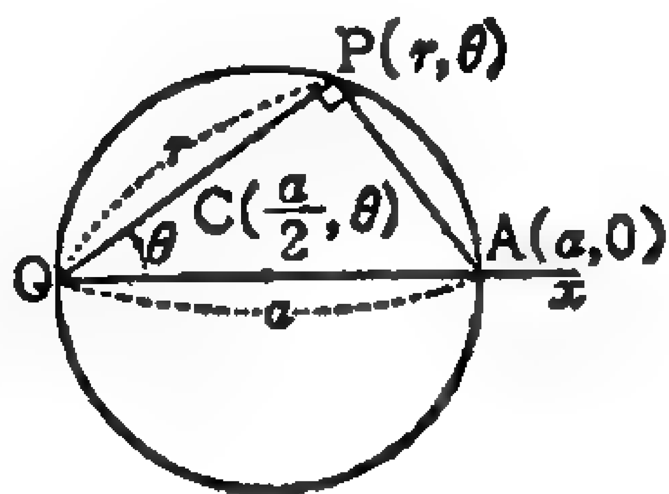
$$\angle COP=\theta-\alpha,$$

应用余弦定理，则得所求的极坐标方程为

$$r^2+c^2-2cr\cos(\theta-\alpha)=a^2.$$

3850. 已知极轴上的定点 $A(a,0)$，求以 OA 为直径的圆的极坐标方程.

解 设 $P(r,\theta)$ 是已知圆上任意一点，那么 OP 可以看作是 OA 的正投影.所以



$$OP=OA\cos\theta,\quad 即\quad r=a\cos\theta.$$

别解 在直角坐标系中，中心为 $\left(\frac{a}{2},0\right)$，半径为 $\frac{a}{2}$ 的圆的方程是

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

即 $$x^2+y^2-ax=0.$$

把它变换为极坐标方程，则得

$$r=a\cos\theta.$$

3851. 设圆心为 $C(c,0)$，半径为 a 的定圆上的动点为 P，在连结 P 和极点 O 的直线上取点 Q，使 $OQ=k\cdot OP$，求点 Q 的轨迹的极坐标方程.

解 设动点 P 的极坐标为 (r,θ)，那么圆心为 $C(c,0)$，半径为 a 的圆的极坐标方程为

$$r^2+c^2-2rc\cos\theta=a^2. \quad ①$$

设点 Q 的坐标为 (r_1,θ)，则点 P 的坐标为 $\left(\frac{r_1}{k},\theta\right)$. 所以，为了求点 Q 的极坐标方程，可以在方程 ① 中以 $\frac{r}{k}$ 代换 r，由此可得，点 Q 的极坐标方程为

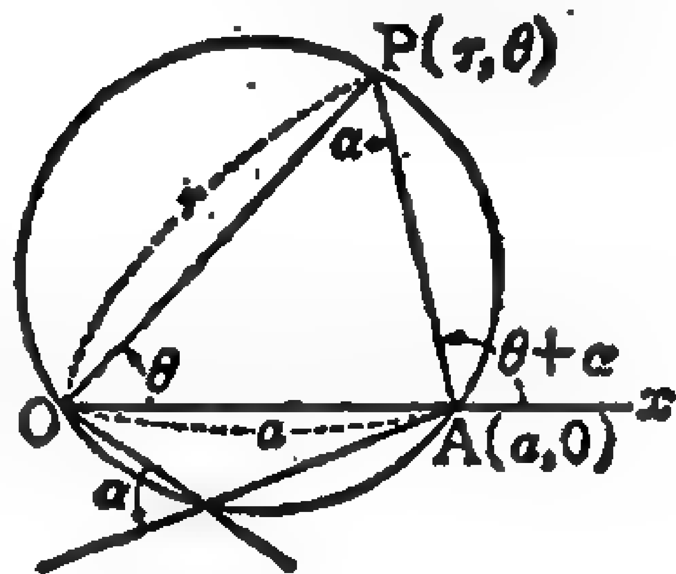
$$\left(\frac{r}{k}\right)^2+c^2-2\left(\frac{r}{k}\right)c\cos\theta=a^2$$

即 $$r^2+(kc)^2-2r(kc)\cos\theta=(ka)^2.$$

它表示圆心为 $(kc,0)$、半径是 ka 的圆.

3852. 已知 O 为极点，$A(a,0)$ 为极轴上的定点，P 为动点且 $\angle OPA=\alpha$（α 是定角），求点 P 的轨迹.

解 设点 $P(r,\theta)$ 为适合条件的点，则在 $\triangle OAP$ 中用正弦定理，得



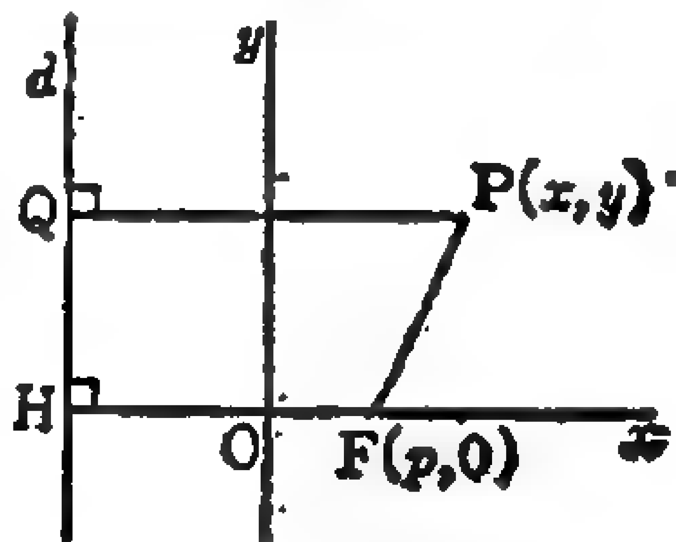
$$\frac{OP}{\sin\angle OAP}=\frac{OA}{\sin\angle OPA}.$$

$$\therefore\quad \frac{r}{\sin(\theta+\alpha)}=\frac{a}{\sin\alpha},$$

即 $$r=\frac{a}{\sin\alpha}\sin(\theta+\alpha).$$

3853. 说明二次曲线的焦点、准线、离心率的关系.

解 已知定直线 d 和不在 d 上的定点 F. 设从动点 P 向定直线所作垂线的垂足为 Q，且



$$|PF|:|PQ|=e:1,\quad (e 为定值)$$

则点 P 的轨迹是：

当 $0<e<1$ 时，点 P 的轨迹为椭圆；
当 $e=1$ 时，点 P 的轨迹为抛物线；
当 $e>1$ 时，点 P 的轨迹为双曲线.

兹证明如下:

设过 F 作 d 的垂线的垂足为 H,内分 HF 比是 $1:e$ 的点为 O,取它为原点, OF 为 x 轴的正向,过 O 作 OF 的垂线为 y 轴,则由

$HO:OF=1:e$, 得 $|OF|:|OH|=e:1$.

故 O 是轨迹上的点.

设 F 的坐标为 $(p, 0)$, 则 $OF=p$, 从而得出

$$p:|OH|=e:1. \quad \therefore \quad |OH|=\frac{p}{e}.$$

因为 F 和 H 分别在点 O 的两侧, 所以 H 的坐标为 $\left(-\frac{p}{e}, 0\right)$, 直线 d 的方程为

$$x=-\frac{p}{e}. \qquad ①$$

设动点 P 的坐标为 (x, y), 则

$$|PF|=\sqrt{(x-p)^2+y^2}, \quad |PQ|=\left|x+\frac{p}{e}\right|.$$

由题设条件 $|PF|:|PQ|=e:1$, 得

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}; \left|x+\frac{p}{e}\right|=e:1.$$

$$\therefore \quad (x-p)^2+y^2; \left(x+\frac{p}{e}\right)^2=e^2:1,$$

$$(x-p)^2+y^2=e^2\left(x+\frac{p}{e}\right)^2,$$

$$(x-p)^2+y^2=(ex+p)^2.$$

$$\therefore \quad (1-e^2)x^2-2p(1+e)x+y^2=0. \qquad ②$$

当 $0<e<1$ 时, ② 可写成

$$x^2-\frac{2px}{1-e}+\frac{y^2}{1-e^2}=0,$$

即 $$\left(x-\frac{p}{1-e}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\left(\frac{p}{1-e}\right)^2.$$

$$\therefore \quad \frac{\left(x-\frac{p}{1-e}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-e}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}p\right)^2}=1. \qquad ③$$

这就是点 P 的轨迹方程, 它表示一个椭圆.

当 $e=1$ 时, ② 可写成

$$y^2=4px, \qquad ④$$

这就是点 P 的轨迹, 它表示一条抛物线.

当 $e>1$ 时, ② 可写成

$$\left(x+\frac{p}{e-1}\right)^2-\frac{y^2}{e^2-1}=\left(\frac{p}{e-1}\right)^2$$

$$\therefore \quad \frac{\left(x+\frac{p}{e-1}\right)^2}{\left(\frac{p}{e-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}p\right)^2}=1. \qquad ⑤$$

这就是点 P 的轨迹, 它表示一双曲线.

不论何种情况, e 都是点 P 的轨迹, 这条曲线的离心率, 定点 F 叫做这条曲线的焦点, 定直线 d 叫做这条曲线的准线.

3854. 取焦点为极点, 主轴为极轴, 则二次曲线(椭圆、双曲线、抛物线)的极坐标方程为

$$r=\frac{l}{1-e\cos\theta} \quad 或 \quad r=\frac{l}{1+e\cos\theta},$$

其中 e 为离心率(在椭圆中 $0<e<1$; 在双曲线中 $e>1$; 在抛物线中 $e=1$), l 为通径(过焦点且与主轴垂直的弦)的一半.

解 过焦点 F 作准线 d 的垂线, 设垂足为 H, 从曲线上的点 $P(r, \theta)$ 作准线 d 的垂线, 设垂足为 Q, 从 P 作极轴的垂线, 设垂足为 M. 经过 F 且垂直于主轴的弦的一端为 L, 设 $|LF|=l$. 过 L 作准线 d 的垂线, 设垂足为 L', 则

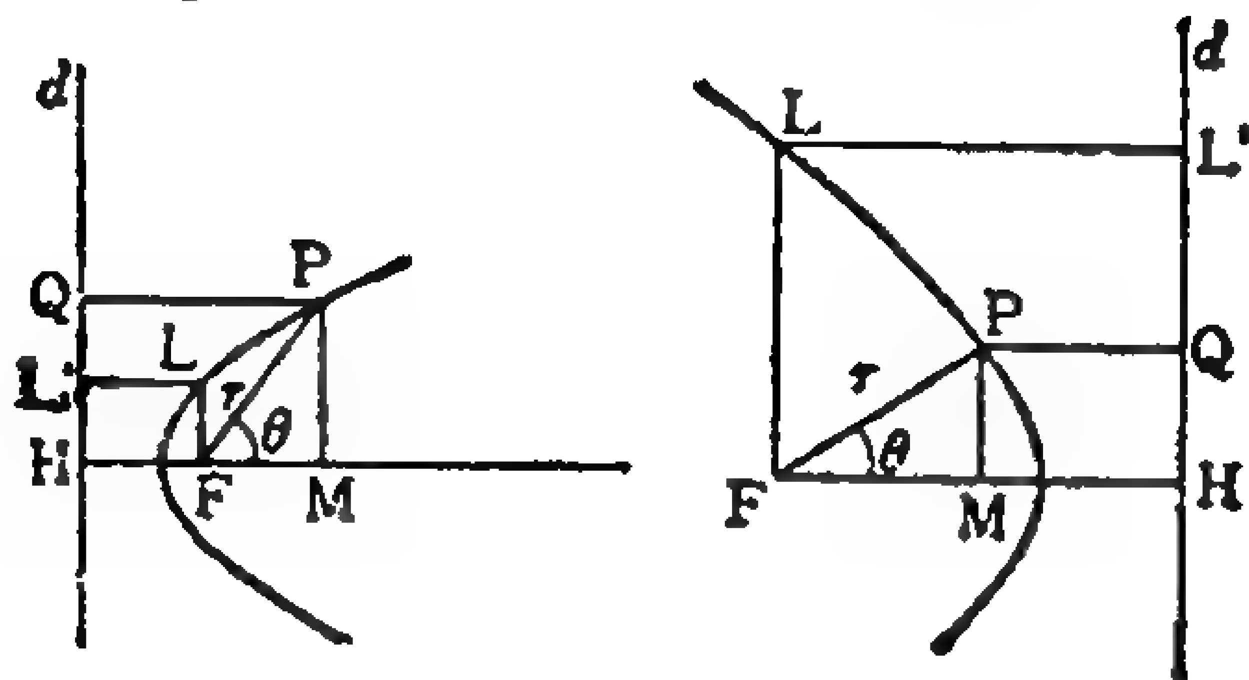
$$r=|FP|=e|PQ|. \quad (参照上题)$$

但是

$$|PQ|=|HM|=|HF|\pm|FM|$$
$$=|HF|\pm r\cos\theta.$$
$$\therefore \quad r=e(|HF|\pm r\cos\theta).$$

即

$$r(1\mp e\cos\theta)=e|HF|=e|LL'|$$
$$=|FL|=l.$$



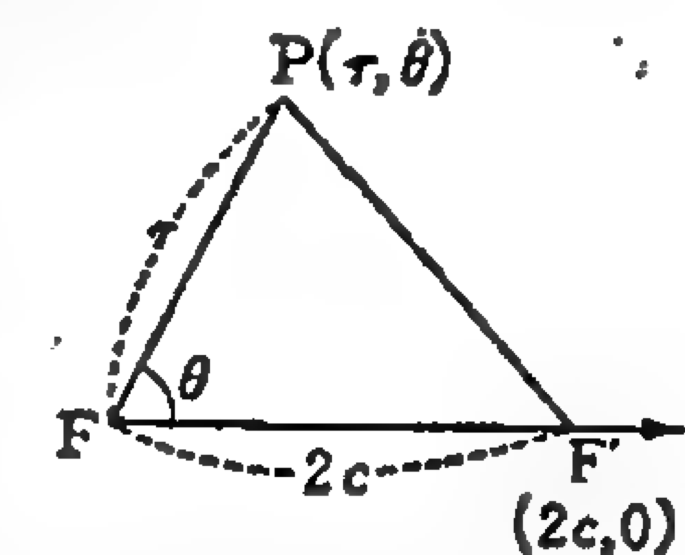
故 $$r=\frac{l}{1\mp e\cos\theta}.$$

3855. 到两定点的距离的和一定的点的轨迹叫做椭圆, 到两定点的距离的差一定的点的轨迹叫做双曲线. 根据定义, 求椭圆和双曲线的极坐标方程.

解 设两定点为 F、F'(焦点), 则

$$FF'=2c.$$

以 F 为极点，FF' 为极轴，建立极坐标系。设 P 是椭圆上的点，它的极坐标是(r,θ),则 $FP+F'P=2a$(一定)。



在 $\triangle FF'P$ 中

$$F'P^2=FP^2+FF'^2-2FP\cdot FF'\cos\theta$$
$$=r^2+(2c)^2-2r(2c)\cos\theta$$
$$=r^2+4c^2-4rc\cos\theta. \quad ①$$

又由 $FP+F'P=2a$,知

$$F'P=2a-FP=2a-r.$$

$$\therefore\ F'P^2=(2a-r)^2=4a^2-4ar+r^2.$$

把它代入 ① 式，则

$$r^2+4c^2-4rc\cos\theta=4a^2-4ar+r^2,$$
$$4ar-4rc\cos\theta=4a^2-4c^2,$$

即 $$r(a-c\cos\theta)=a^2-c^2.$$

但是 $c=ae$, $a^2-c^2=al$,所以

$$r(a-ae\cos\theta)=al,$$

即 $$r=\frac{l}{1-e\cos\theta}.$$

这就是所求椭圆的极坐标方程。

其次，设两定点为 F、F', $FF'=2c$。以 F 为极点，FF' 为极轴，建立极坐标系。设 $P(r,\theta)$为双曲线上任意一点，则 $F'P-FP=2a$(一定)。在 $\triangle FF'P$ 中，

$$F'P^2=FP^2+FF'^2-2\cdot FP\cdot FF'\cos\theta$$
$$=r^2+(2c)^2-2r(2c)\cos\theta$$
$$=r^2+4c^2-4rc\cos\theta.$$

由 $F'P-FP=2a$,知 $F'P=2a+r$.

$$\therefore\ (2a+r)^2=r^2+4c^2-4rc\cos\theta,$$
$$4ar+4rc\cos\theta=4c^2-4a^2,$$

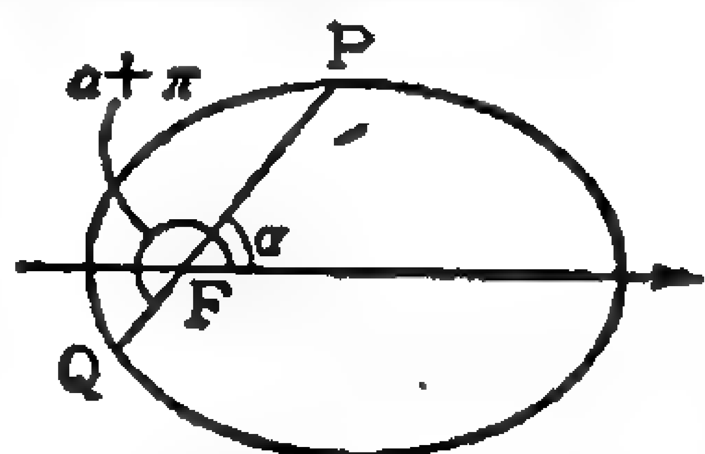
即 $$r(a+c\cos\theta)=c^2-a^2.$$

但是 $c=ae$, $c^2-a^2=al$,所以

$$r(a+ae\cos\theta)=al.$$

$$\therefore\ r=\frac{l}{1+e\cos\theta}.$$

3856. 椭圆、双曲线和抛物线统称为圆锥曲线。设圆锥曲线经过焦点的动弦为 PFQ,则 $\frac{1}{FP}+\frac{1}{FQ}$ 具有定值。



解 取焦点 F 为极点，主轴为极轴，则圆锥曲线的极坐标方程是(由问题 **3854**)

$$r=\frac{l}{1\pm e\cos\theta}.$$

设点 P 的极角为 α,则点 Q 的极角为 $\alpha+\pi$。

(i) 当 $r=\frac{l}{1-e\cos\theta}$ 时，

$$FP=\frac{l}{1-e\cos\alpha},$$

$$FQ=\frac{l}{1-e\cos(\alpha+\pi)}$$
$$=\frac{l}{1+e\cos\alpha}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{FP}+\frac{1}{FQ}$$
$$=\frac{1-e\cos\alpha}{l}+\frac{1+e\cos\alpha}{l}$$
$$=\frac{2}{l}.$$

(ii) 当 $r=\frac{l}{1+e\cos\theta}$ 时，

$$FP=\frac{l}{1+e\cos\alpha},$$

$$FQ=\frac{l}{1+e\cos(\alpha+\pi)}$$
$$=\frac{l}{1-e\cos\alpha}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{FP}+\frac{1}{FQ}$$
$$=\frac{1+e\cos\alpha}{l}+\frac{1-e\cos\alpha}{l}$$
$$=\frac{2}{l}.$$

因此 $\frac{1}{FP}+\frac{1}{FQ}$ 总有定值 $\frac{2}{l}$.

3857. 求直角双曲线

$$2hxy=1 \quad ①$$

的极坐标方程，并利用这个极坐标方程证明方程

$$\frac{1}{r^2}=a\cos 2\theta+b\sin 2\theta \quad ②$$

也表示直角双曲线。

解 设在直角坐标系里的点(x, y)，在以

原点为极点、x 轴的正向为极轴的极坐标系里的坐标是(r, θ)，则

$$x=r\cos\theta,$$
$$y=r\sin\theta,$$
$$2xy=2(r\cos\theta)(r\sin\theta)$$
$$=r^2(2\sin\theta\cos\theta)$$
$$=r^2\sin 2\theta,$$

故 $h(2xy)=1$ 的极坐标方程为

$$hr^2\sin 2\theta=1.$$

$$\therefore\ \frac{1}{r^2}=h\sin 2\theta. \qquad ③$$

其次，因为 ② 的右边可写成

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin 2(\theta+\alpha),$$

所以 ② 可写成

$$\frac{1}{r^2}=\sqrt{a^2+b^2}\sin 2(\theta+\alpha).$$

在此式中以 $\theta-\alpha$ 代换 θ（即把极轴绕极点旋转角 α），则得

$$\frac{1}{r^2}=\sqrt{a^2+b^2}\sin 2\theta. \qquad ④$$

这样 ④ 和 ③，即和 ① 的形式完全相同，故 ② 表示直角双曲线。

3858. 设在椭圆 $ax^2+by^2=1$ 中相互垂直的半径分别为 OA、OB，求证：

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$$

是定值。

解 把椭圆 $ax^2+by^2=1$ 用极坐标方程表示。以

$$x=r\cos\theta,$$
$$y=r\sin\theta$$

代入原方程，则得

$$ar^2\cos^2\theta+br^2\sin^2\theta=1.$$

$$\therefore\ \frac{1}{r^2}=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta.$$

设 OA、OB 的极角分别为 α、$\alpha+\frac{\pi}{2}$，则

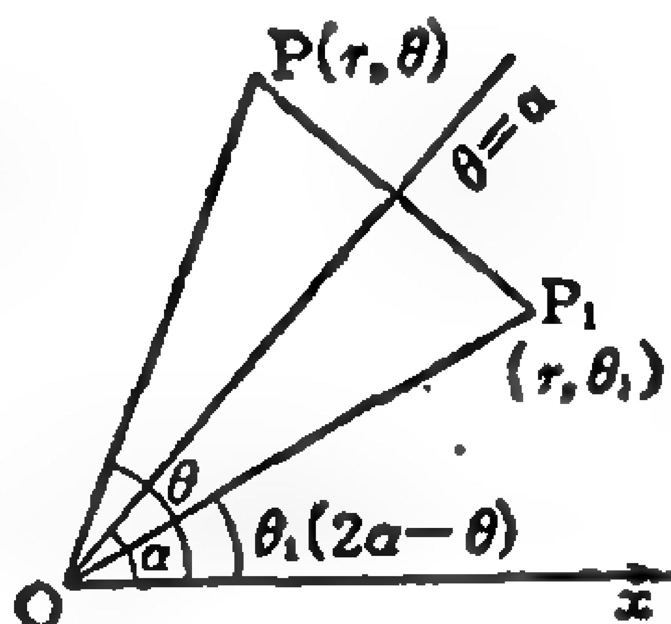
$$\frac{1}{OA^2}=a\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha,$$

$$\frac{1}{OB^2}=a\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+b\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=a\sin^2\alpha+b\cos^2\alpha.$$

$$\therefore\ \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$$
$$=a(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+b(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$=a+b=\text{定值}.$$

3. 极坐标方程的对称性和其他

3859. 证明点 $P(r, \theta)$ 关于过极点的定直线 $\theta=\alpha$ 的对称点的坐标可用 $(r, 2\alpha-\theta)$，$(-r, 2\alpha+\pi-\theta)$，$(-r, 2\alpha-\pi-\theta)$ 中的任何一个表示。



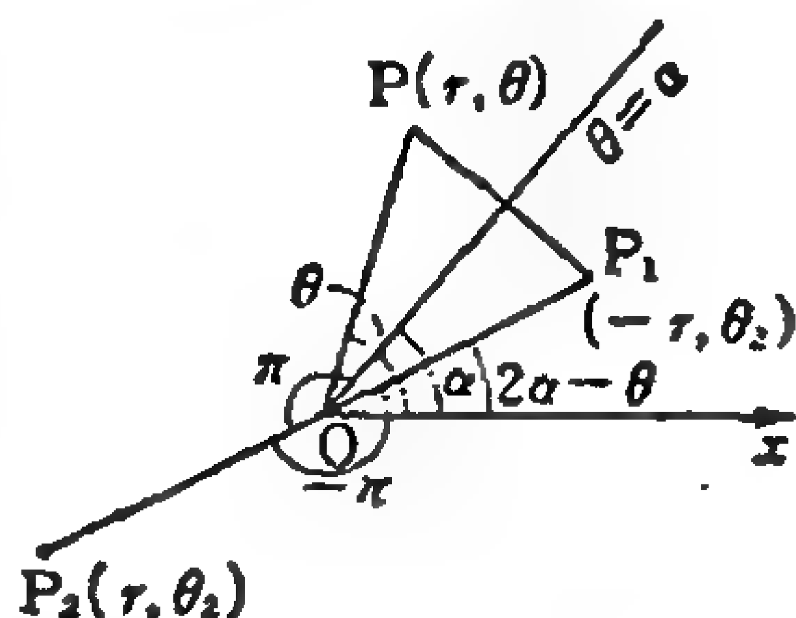
解 设 $P(r, \theta)$ 关于定直线 $\theta=\alpha$ 的对称点为 $P_1(r_1, \theta_1)$，如右图，则

$$\theta+\theta_1=2\alpha.$$

$$\therefore\ \theta_1=2\alpha-\theta.$$

故点 $P(r, \theta)$ 关于直线 $\theta=\alpha$ 的对称点 P_1 的坐标是 $(r, 2\alpha-\theta)$。

如果设 $P(r, \theta)$关于直线 $\theta=\alpha$ 的对称点 P_1 的坐标为 $(-r, \theta_2)$，则点 P_1、极点和 $P_2(r, \theta_2)$ 三点在一直线上，且以极点为中点，所以



$$\theta_2=\theta_1\pm\pi$$
$$=2\alpha-\theta\pm\pi.$$

因此所求对称点的坐标为$(-r, 2\alpha+\pi-\theta)$或$(-r, 2\alpha-\pi-\theta)$。

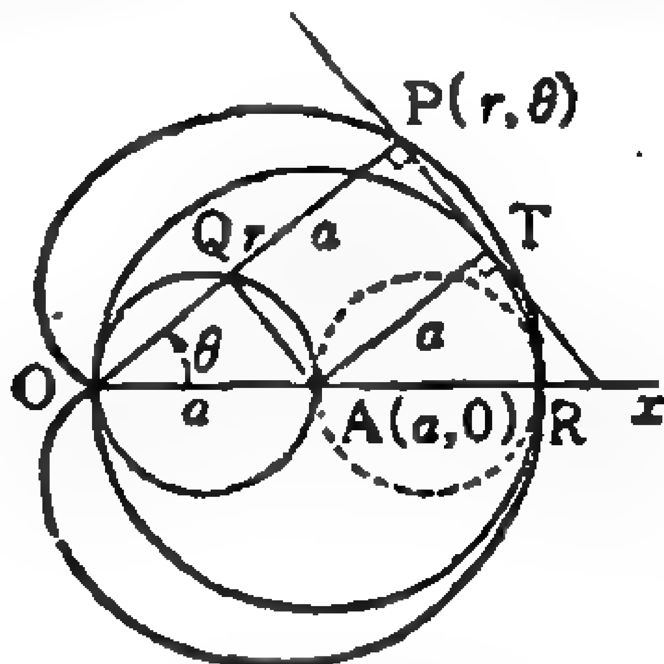
3860. 在极坐标系中，如果以$(r, -\theta)$或$(-r, \pi-\theta)$或$(-r, -\pi-\theta)$代换(r, θ)，曲线的方程不变，则这条曲线关于极轴对称。

解 在上题中，令 $\alpha=0$，则定直线 $\theta=\alpha$ 为极轴 $\theta=0$，且点 $P(r, \theta)$关于极轴的对称点为$(r, -\theta)$或$(-r, \pi-\theta)$或$(-r, -\pi-\theta)$。因此，如用$(r, -\theta)$ 或 $(-r, \pi-\theta)$ 或 $(-r, -\pi-\theta)$代换(r, θ)时，曲线的方程不变，则这条曲线关于极轴 $\theta=0$ 对称。

3861. 在曲线的极坐标方程中，如用$\left(r, \frac{\pi}{2}-\theta\right)$或$\left(-r, \frac{3\pi}{2}-\theta\right)$或$\left(-r, -\frac{\pi}{2}-\theta\right)$代换$(r, \theta)$时方程不变，则这个曲线关于直线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 对称。

解 在问题 **3859** 中，令 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，则点 $P(r,\theta)$ 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 的对称点的坐标可用 $\left(r,\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 或 $\left(-r,\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$ 或 $\left(-r,-\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 表示。因此如用这些值代换曲线方程中的 (r,θ) 时方程不变，则这条曲线是关于 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 对称的。

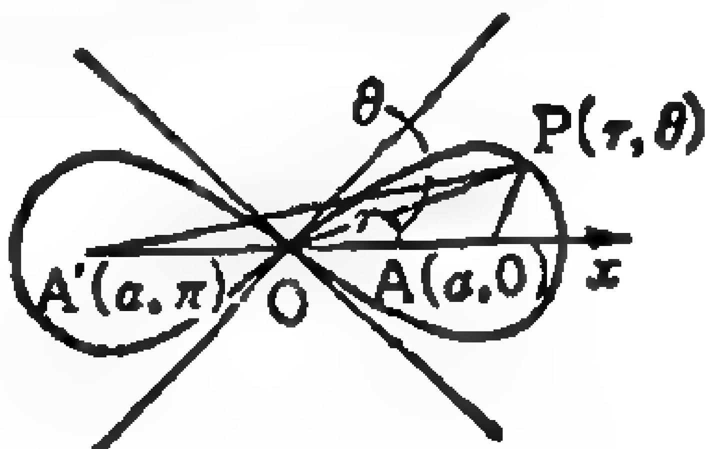
3862. 已知圆的圆心为 $A(a,0)$、半径为 a，过极点 O 作该圆上点 T 处的切线的垂线，其垂足为 P，求点 P 的轨迹（心脏线）的极坐标方程。



解 如图。从 A 作 OP 的垂线，设垂足为 Q，切点为 T，则 $ATPQ$ 为矩形，所以

$$r=OP=OQ+QP$$
$$=a\cos\theta+a,$$
$$\therefore\quad r=a(\cos\theta+1).$$

3863. 在极坐标系里，求到两定点 $A(a,0)$、$A'(a,\pi)$ 的距离的积等于 a^2 的点 P 的轨迹（双纽线）方程。并讨论其对称性。



解 设满足条件

$$AP\cdot AP'=a^2$$

的点为 $P(r,\theta)$，则

$$\because\quad AP^2=a^2+r^2-2ar\cos\theta,$$
$$A'P^2=a^2+r^2+2ar\cos\theta,$$
$$\therefore\quad AP^2\cdot A'P^2$$
$$=(a^2+r^2-2ar\cos\theta)$$
$$\times(a^2+r^2+2ar\cos\theta)$$
$$=(a^2+r^2)^2-4a^2r^2\cos^2\theta$$
$$=a^4+2a^2r^2+r^4-4a^2r^2\cos^2\theta.$$

从 $AP^2\cdot A'P^2=a^4$ 得

$$r^2=2a^2(2\cos^2\theta-1),$$

或

$$r=0.$$

$$\therefore\quad r^2=2a^2\cos 2\theta, \qquad ①$$

（$r=0$ 包括在此式中）

其次，再来讨论 ① 的对称性。

把 $-\theta$, $\pi-\theta$, $\pi+\theta$ 代换方程中的 θ 方程不变，所以由问题 **3859, 3860** 可知，该曲线关于极轴，直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 和极点是对称的。

3864. 已知抛物线

$$r=\frac{l}{1+\cos\theta} \qquad ①$$

上的动点为 P，在连结极点 O 与点 P 的直线上取点 Q，使 $OQ\cdot OP=k$，求点 Q 的轨迹的极坐标方程。

解 设 Q 的坐标为 (r_1,θ_1)，则 P 的坐标为 $\left(\frac{k}{r_1},\ \theta_1\right)$。为了求点 Q 的轨迹的极坐标方程，可以在 ① 中以 $\frac{k}{r}$ 代换 r。

$$\therefore\quad \frac{k}{r}=\frac{l}{1+\cos\theta}.$$

即

$$r=\frac{k}{l}(1+\cos\theta).$$

它表示问题 **3862** 所示的心脏线。

3865. 求原点 O 关于双曲线

$$xy=1 \qquad ①$$

的动切线的对称点 P 的轨迹的极坐标方程。

解 设点 P 的极坐标为 (r,θ)，则它的直角坐标为 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$。$OP$ 的垂直平分线是到两端点 O、P 距离相等的点的轨迹，所以它的方程为

$$x^2+y^2=(x-r\cos\theta)^2+(y-r\sin\theta)^2.$$

即

$$2rx\cos\theta+2ry\sin\theta=r^2,$$
$$\therefore\quad 2x\cos\theta+2y\sin\theta=r. \qquad ②$$

如此直线与双曲线相切，则从 ①、② 消去 y 所得的二次方程

$$2x^2\cos\theta-rx+2\sin\theta=0$$

具有等根，所以其判别式等于零。

$$\therefore\quad r^2=16\cos\theta\sin\theta.$$

即

$$r^2=8\sin 2\theta.$$

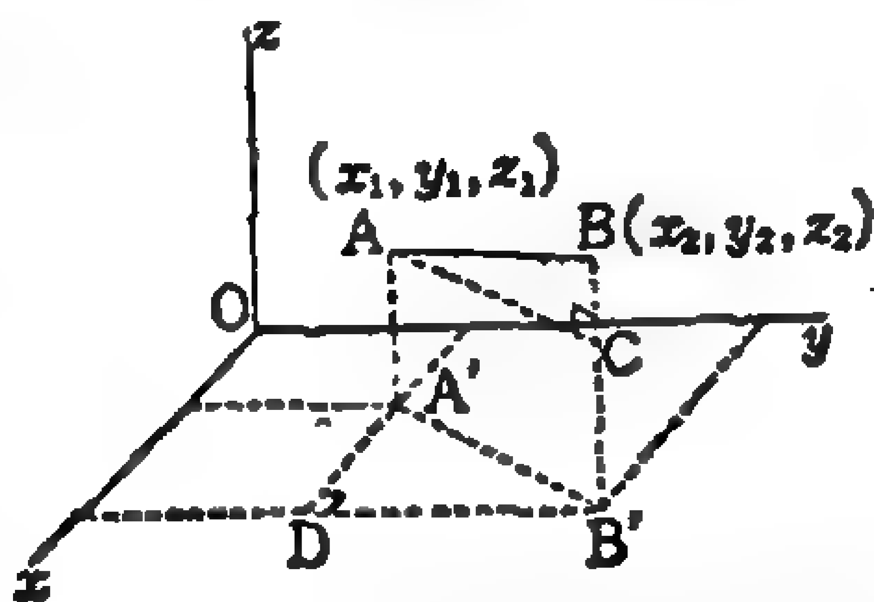
这是把问题 **3863** 中的双纽线旋转 $\frac{\pi}{4}$ 所得的曲线方程，即所求的轨迹方程。

第九章　空间坐标

（点、直线、平面、球面）

1. 点、方向余弦、两直线的夹角

3866. 求空间两点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离.



解 从点 A、B 分别作 xy 面的垂线，其垂足分别为 A'、B'. 设过 A' 作 x 轴的平行线，过 B' 作 y 轴的平行线，它们相交于点 D，则

$$\angle A'DB'=\angle R,$$

且　$A'D=|x_1-x_2|$, $B'D=|y_1-y_2|$.

再设过 A 且与 xy 面平行的平面和 BB' 的交点为 C，则

$$BC=|z_1-z_2|,$$

且　$AC\perp A'B'$, $\angle ACB=\angle R$.

$$\therefore\ AB^2=AC^2+BC^2=A'B'^2+BC^2$$
$$=A'D^2+DB'^2+BC^2$$
$$=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$

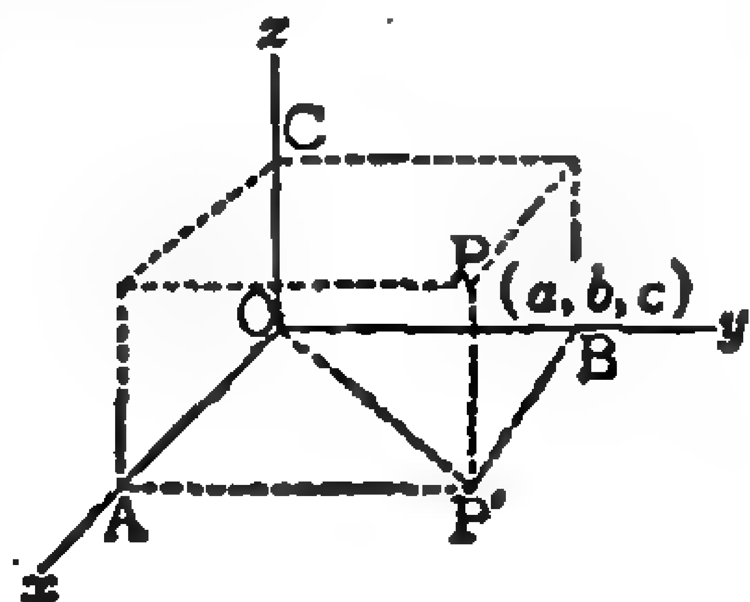
故

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

注　原点 O 和点 $P(a, b, c)$ 间的距离为

$$OP=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

3867. 说明方向余弦的意义.



解　设过一点 $P(a, b, c)$ 作 xy 面的垂线 PP'，其垂足为 P'，过 P' 引 y 轴的平行线，交 x 轴于 A，过 P' 引 x 轴的平行线，交 y 轴于 B，过 P 作 xy 面的平行平面与 z 轴相交于 C. 设

$$\angle POA=\alpha,\ \angle POB=\beta,\ \angle POC=\gamma,$$

则 α, β, γ 分别为 OP 和 x 轴、y 轴、z 轴的正方向的夹角. 我们就把 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 叫做 OP 的方向余弦.

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 通常分别用 l、m、n 表示.

3868. 设方向余弦为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 时，证明

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

解　如上题的图，取点 $P(a, b, c)$，由于 $\angle OAP$, $\angle OBP$, $\angle OCP$ 都是直角，所以

$$a=OP\cos\alpha,\ b=OP\cos\beta,\ c=OP\cos\gamma,$$

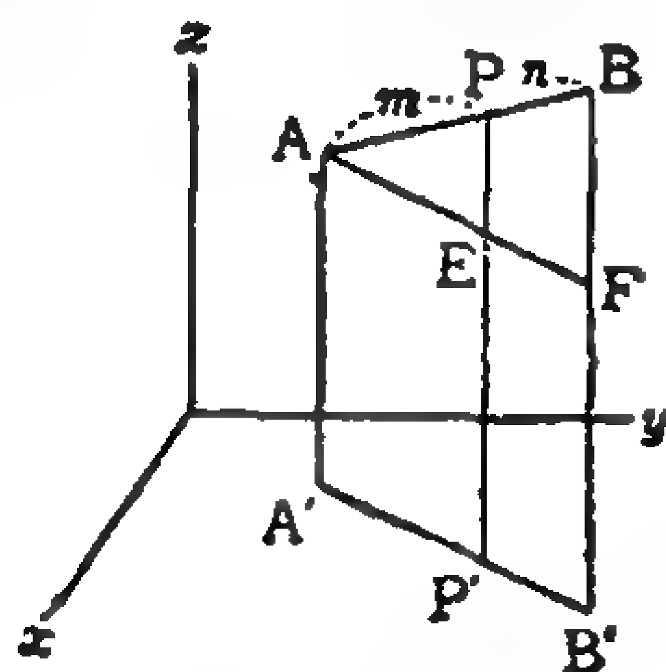
且　$OP^2=a^2+b^2+c^2$.

$$\therefore\ OP^2=OP^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma),$$

故　$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,

或　$l^2+m^2+n^2=1$.

3869. 求把连结两点 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$ 的线段内分为 $m:n$ 的点 P 的坐标及外分为 $m:n$ 的点 Q 的坐标.



解　从 A、P、B 分别作 xy 面的垂线，其垂足分别为 A'、P'、B'. 这些点都在包含 AB 且与 z 轴平行的平面和 xy 面的交线上. 过 A 作 $A'B'$ 的平行线 AF，它和 PP'、BB' 的交点分别为 E、F. 设 P 的坐标为 (X, Y, Z)，则

$$\frac{PE}{BF}=\frac{AP}{AB}=\frac{m}{m+n}.$$

$$\therefore\ \frac{Z-z_1}{z_2-z_1}=\frac{m}{m+n},$$

$$\therefore\ Z=\frac{nz_1+mz_2}{m+n}.$$

其次，点 P' 的坐标是 (X, Y, O)，但作为 xy 平面上的点，则它的坐标是 (X, Y). 因为它是把 $A'(x_1, y_1)$ 和 $B'(x_2, y_2)$ 所连线段内分为 $m:n$ 的点，所以

$$X=\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\quad Y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}.$$

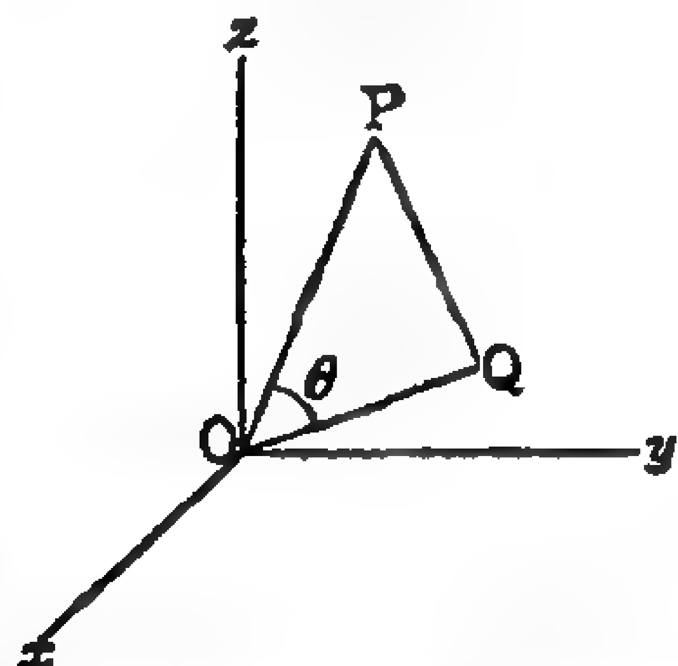
同理，设把 AB 外分为 $m:n$ 的点为 Q 的坐标为 (X', Y', Z')，则

$$X'=\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ Y'=\frac{-ny_1+my_2}{m-n},$$

$$Z'=\frac{-nz_1+mz_2}{m-n};$$

或 $X'=\dfrac{nx_1-mx_2}{-m+n},\quad Y'=\dfrac{ny_1-my_2}{-m+n},$

$$Z'=\frac{nz_1-mz_2}{-m+n}.$$



3870. 已知两条直线的方向余弦分别为 l、m、n 及 l'、m'、n'，求这两直线夹角的余弦。

解 经过原点作与已知两直线平行的直线 OP、OQ，并在 OP、OQ 上分别取任意点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 及 $Q(x_2, y_2, z_2)$。设 OP 的方向余弦为 l、m、n，OQ 的方向余弦为 l'、m'、n'，已知两直线的夹角为 θ，则 $\angle POQ=\theta$。因而在 $\triangle OPQ$ 中，

$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP\cdot OQ\cos\theta,$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{OP^2+OQ^2-PQ^2}{2\cdot OP\cdot OQ}.$$

$$\because\quad OP^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,$$

$$OQ^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,$$

$$PQ^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$

且 $x_1=OP\cdot l,\ y_1=OP\cdot m,\ z_1=OP\cdot n,$

$$x_2=OQ\cdot l',\ y_2=OQ\cdot m',\ z_2=OQ\cdot n',$$

$$\therefore\quad \cos\theta=l\cdot l'+m\cdot m'+n\cdot n'.$$

3871. 已知两条直线的方向余弦分别为 l、m、n 及 l'、m'、n'，如果它们的夹角是直角，则

$$l\cdot l'+m\cdot m'+n\cdot n'=0.$$

解 设两直线夹角为 θ，则由上题可知

$$\cos\theta=l\cdot l'+m\cdot m'+n\cdot n'.$$

如果 $\theta=90°$，则 $\cos\theta=0$。

$$\therefore\quad l\cdot l'+m\cdot m'+n\cdot n'=0.$$

3872. 已知一条直线的方向余弦的比是 2:3:6，求它的方向余弦。

解 设已知直线的方向余弦为 l、m、n，则可设

$$\frac{l}{2}=\frac{m}{3}=\frac{n}{6}=k,$$

$$\therefore\quad l=2k,\ m=3k,\ n=6k.$$

但是由问题 **3868** 知

$$l^2+m^2+n^2=1.$$

$$\therefore\quad 4k^2+9k^2+36k^2=1\quad 即\quad 49k^2=1.$$

$$\therefore\quad k=\pm\frac{1}{7}.$$

故这条直线的方向余弦为

$$l=\frac{2}{7},\quad m=\frac{3}{7},\quad n=\frac{6}{7},$$

或 $\quad l=-\dfrac{2}{7},\quad m=-\dfrac{3}{7},\quad n=-\dfrac{6}{7}.$

3873. 已知两直线的方向余弦的比分别是 1:2:3 及 5:−4:1，求它们的夹角。

解 设两直线的方向余弦分别为 l、m、n 及 l'、m'、n'，则可设

$$l=k,\ m=2k,\ n=3k,$$

因而有 $\qquad k^2+4k^2+9k^2=1.$

$$\therefore\quad k^2=\frac{1}{14}.$$

同样，设 $\quad l'=5k',\ m'=-4k',\ n'=k',$

因而有 $\qquad 25k'^2+16k'^2+k'^2=1.$

$$\therefore\quad k'^2=\frac{1}{42},$$

$$\therefore\quad kk'=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{1}{\sqrt{42}}=\pm\frac{1}{14\sqrt{3}}.$$

设两直线的夹角为 θ，则

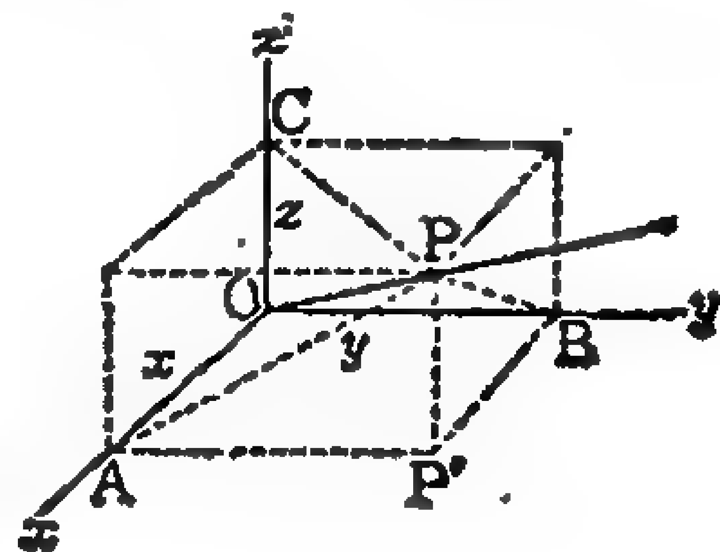
$$\cos\theta=l\cdot l'+m\cdot m'+n\cdot n'$$

$$=5kk'-8kk'+3kk'=0\times kk'=0.$$

$$\therefore\quad \theta=90°.$$

2. 直线、平面、球

3874. 求过原点且方向余弦是 l、m、n 的直线的方程。

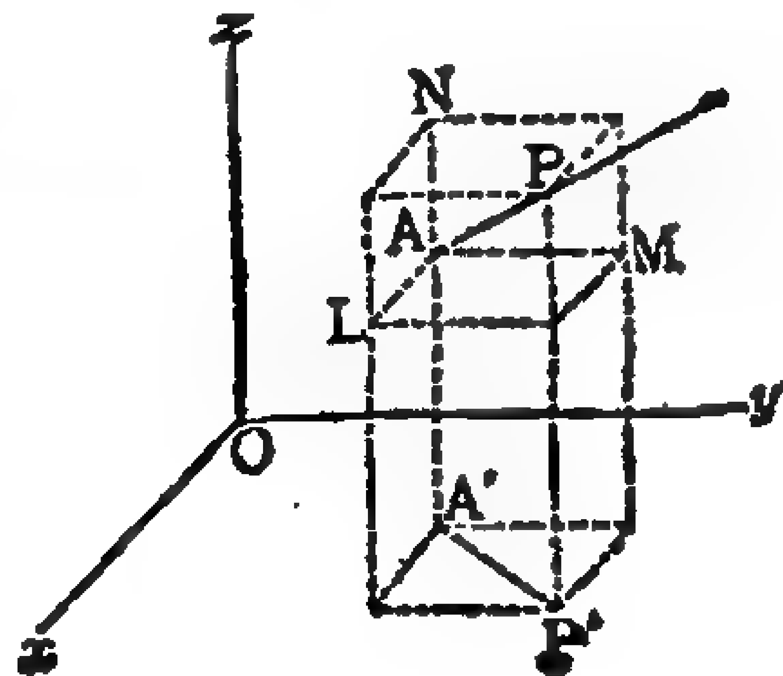


解 在过原点且方向余弦是 l、m、n 的直线上，任意取一点 $P(x, y, z)$，设 $OP=r$，则由问题 **3868** 可知

$$x=r\cdot l,\ y=r\cdot m,\ z=r\cdot n.$$

$$\therefore\quad \frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}.$$

这就是所求的直线方程。



3875. 求过点 $A(a, b, c)$ 且方向余弦是 l、m、n 的直线的方程。

解　过 A 作直线 AL、AM、AN，分别平行于 x 轴、y 轴、z 轴，则题设直线和 AL、AM、AN 所成的方向余弦为 l、m、n。在题设直线上取任意点 $P(x, y, z)$，并设

$$AP=r,$$

则和上题一样可知

$$x-a=r\cdot l,\ y-b=r\cdot m,\ z-c=r\cdot n.$$

$$\therefore\quad \frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}.$$

这就是所求的直线方程。

3876. 求过两点 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2) 的直线方程。

解　由上题可知，过点 (x_1, y_1, z_1) 且方向余弦是 l、m、n 的直线的方程为

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}.\qquad ①$$

因为该直线过点 (x_2, y_2, z_2)，所以

$$\frac{x_2-x_1}{l}=\frac{y_2-y_1}{m}=\frac{z_2-z_1}{n}.\qquad ②$$

由①、②可得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

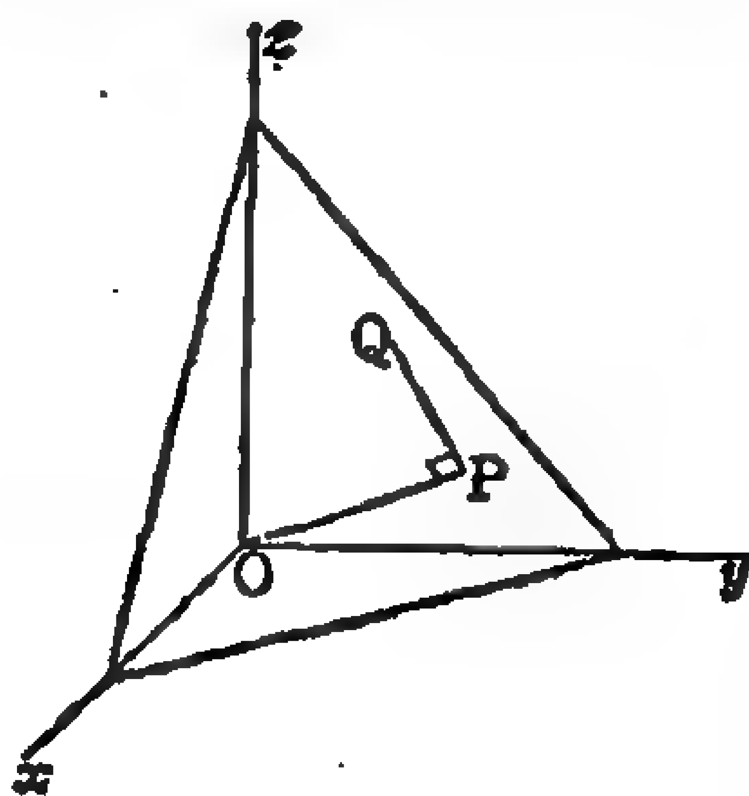
这就是所求的直线方程。

3877. 过原点作一平面的垂线，其方向余弦是 l、m、n，其长度是 p，求该平面的方程。

解　设从原点作题设平面的垂线，其垂足为 P，则

$$OP=p.$$

又知该垂线的方向余弦是 l、m、n，所以点 P 的坐标是 (pl, pm, pn)（问题 3868）。



设平面上的任意点 Q 的坐标为 (x, y, z)，QP 的方向余弦为 l'、m'、n'，$QP=r$，则

$$x-pl=rl',\ y-pm=rm',\ z-pn=rn'.$$

$$\therefore\quad l(x-pl)=rll',$$

$$m(y-pm)=rmm',$$

$$n(z-pn)=rnn'.$$

各式相加，得

$$lx+my+nz-p(l^2+m^2+n^2)$$

$$=r(ll'+mm'+nn').\qquad ①$$

但已知　$OP\perp QP$.

$$\therefore\quad ll'+mm'+nn'=0.$$

又　$l^2+m^2+n^2=1,$

所以①式可写成

$$lx+my+nz-p=0,$$

即　$lx+my+nz=p.$

这就是所求的平面方程。

3878. 求从原点所作平面 $Ax+By+Cz=D$ 的垂线的长度及其方向余弦。

解　由上题可知，如从原点作一平面的垂线的长度为 p，方向余弦为 l、m、n，则这个平面的方程是

$$lx+my+nz=p.$$

因为此式和 $Ax+By+Cz=D$ 一致，所以

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}=\frac{p}{D}.$$

设这个比值为 k，则

$$l=Ak,\ m=Bk,\ n=Ck,\ p=Dk.$$

由 $l^2+m^2+n^2=1$，可知

$$k^2(A^2+B^2+C^2)=1.$$

$$\therefore\quad k=\frac{\pm1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

因此，垂线长为

$$p=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

垂线的方向余弦为

$$\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \text{（符号同顺序）}.$$

3879. 求点 (a, b, c) 到平面 $Ax+By+Cz=D$ 的距离。

解　设把原点移到点 (a, b, c) 时，点 (x, y, z) 变成点 (X, Y, Z)，则

$$x=a+X,\ y=b+Y,\ z=c+Z.$$

因而在新坐标系里，平面方程

$$Ax+By+Cz=D.$$

可写成

$$A(a+X)+B(b+Y)+C(c+Z)=D,$$

即　$AX+BY+CZ=D-Aa-Bb-Cc.$

于是，由上题知从新原点所作该平面的垂线长为

$$p=\frac{|Aa+Bb+Cc-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

这就是点(a, b, c)到平面$Ax+By+Cz=0$的距离。

3880. 求直线和平面平行的条件.

解　设直线的方程为

$$\frac{x-\alpha}{A}=\frac{y-\beta}{B}=\frac{z-\gamma}{C},\quad ①$$

则　　$A:B:C=l:m:n.$

设平面的方程为

$$A'x+B'y+C'z=D,\quad ②$$

则由问题**3878**知

$$A':B':C'=l':m':n',$$

其中l'、m'、n'是从原点所作这个平面的垂线的方向余弦。如果直线①和平面②平行,则从原点所作平面②的垂线,一定和直线①垂直。因此,根据问题**3871**可知

$$ll'+mm'+nn'=0.$$

$$\therefore\quad AA'+BB'+CC'=0.\quad ③$$

③就是直线①和平面②平行的条件.

3881. 求直线和平面垂直的条件.

解　设直线方程为

$$\frac{x-\alpha}{A}=\frac{y-\beta}{B}=\frac{z-\gamma}{C},\quad ①$$

平面的方程为

$$A'x+B'y+C'z=D,\quad ②$$

则由上题可知,$A':B':C'$为从原点所引这个平面的垂线的各方向余弦的比。

因此,如果直线①垂直于平面②,则直线①和从原点作平面②的垂线平行.

$$\therefore\quad A:B:C=A':B':C',\quad ③$$

或

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.\quad ③'$$

③或③′就是直线①和平面②垂直的条件。

3882. 求两个平面的夹角的余弦.

解　设两个平面方程分别为

$$Ax+By+Cz=D,\quad ①$$

$$A'x+B'y+C'z=D'.\quad ②$$

因为两平面①、②的夹角,就是从原点所作这两个平面的垂线间的夹角。由问题**3878**知,从原点所作两平面①、②的垂线的方向余弦分别是

$$\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

和

$$\frac{\pm A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},\ \frac{\pm B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},\ \frac{\pm C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

由问题**3871**可知,这两条垂线的夹角θ的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\pm(AA'+BB'+CC')}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

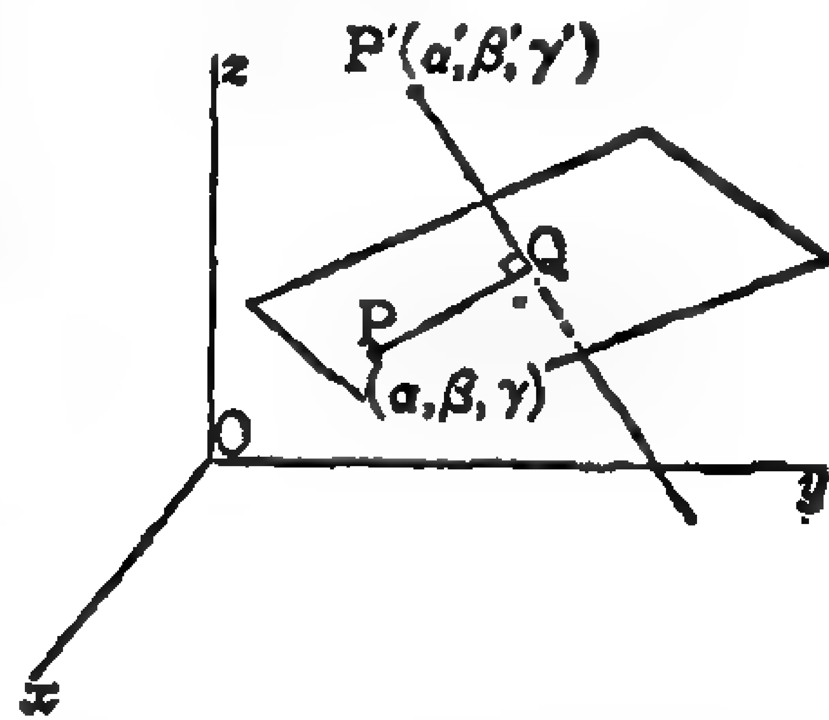
这就是已知两平面夹角的余弦.

注　两平面①、②互相垂直时,

$$AA'+BB'+CC'=0.$$

3883. 求从一点到一直线的距离.

解　设已知点为$P(\alpha, \beta, \gamma)$,已知直线的方程为



$$\frac{x-\alpha'}{A}=\frac{y-\beta'}{B}=\frac{z-\gamma'}{C},$$

则过点P且垂直于已知直线的平面方程为

$$A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma)=0$$

(参照问题**3881**).

设这个平面和已知直线的交点为Q,则PQ的长就是所求垂线的长度.

在已知直线上取不在点Q处的点$P'(\alpha', \beta', \gamma')$,则

$$PP'^2=(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2.$$

又

$$P'Q^2=\frac{[A(\alpha'-\alpha)+B(\beta'-\beta)+C(\gamma'-\gamma)]^2}{A^2+B^2+C^2},$$

(参照问题**3879**).

因此,由$PQ^2=PP'^2-P'Q^2$可求出PQ.

3884. 求直线$\frac{x-\alpha}{A}=\frac{y-\beta}{B}=\frac{z-\gamma}{C}$在平面$A'x+B'y+C'z=D$上的条件.

解　设$\frac{x-\alpha}{A}=\frac{y-\beta}{B}=\frac{z-\gamma}{C}=k$,则

$$x=Ak+\alpha,\ y=Bk+\beta,\ z=Ck+\gamma.$$

要使点(x, y, z)在平面上，则必须使

$$A'(Ak+\alpha)+B'(Bk+\beta)+C'(Ck+\gamma)=D.$$

$$\therefore\quad k(AA'+BB'+CC')+(A'\alpha+B'\beta+C'\gamma-D)=0.$$

此式对于所有的k值成立的充要条件是

$$\begin{cases} AA'+BB'+CC'=0, & ① \\ A'\alpha+B'\beta+C'\gamma=D. & ② \end{cases}$$

这就是使直线包含于平面的条件。其中①是直线平行于平面的条件，②是点(α, β, γ)在平面上的条件。

3885. 求含有直线$\dfrac{x-\alpha}{A}=\dfrac{y-\beta}{B}=\dfrac{z-\gamma}{C}$和点$(\alpha'、\beta'、\gamma')$的平面方程。

解 设过点$(\alpha', \beta', \gamma')$的平面方程为

$$A'(x-\alpha')+B'(y-\beta')+C'(z-\gamma')=0,$$

因为所给直线在这个平面上，则由上题可知

$$\begin{cases} AA'+BB'+CC'=0, & ① \\ (\alpha-\alpha')A'+(\beta-\beta')B'+(\gamma-\gamma')C'=0. & ② \end{cases}$$

从①和②，得

$$\frac{A'}{B(\gamma-\gamma')-C(\beta-\beta')}=\frac{B'}{C(\alpha-\alpha')-A(\gamma-\gamma')}=\frac{C'}{A(\beta-\beta')-B(\alpha-\alpha')}.$$

故所求平面的方程为

$$[B(\gamma-\gamma')-C(\beta-\beta')](x-\alpha')+[C(\alpha-\alpha')-A(\gamma-\gamma')](y-\beta')+[A(\beta-\beta')-B(\alpha-\alpha')](z-\gamma')=0.$$

3886. 求三点$P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$及$R(x_3, y_3, z_3)$所决定的平面的方程。

解 直线PQ的方程是(问题**3876**)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

由上题可知，包含这条直线和点$R(x_3, y_3, z_3)$的平面的方程为

$$[(y_2-y_1)(z_1-z_3)-(z_2-z_1)(y_1-y_3)](x-x_3)+[(z_2-z_1)(x_1-x_3)-(x_2-x_1)(z_1-z_3)](y-y_3)+[(x_2-x_1)(y_1-y_3)-(y_2-y_1)(x_1-x_3)](z-z_3)=0,$$

此式是在上题的平面方程中以

$$A=x_2-x_1,\ B=y_2-y_1,\ C=z_2-z_1$$

及 $$\alpha=x_1,\ \beta=y_1,\ \gamma=z_1,\ \alpha'=x_3,\ \beta'=y_3,\ \gamma'=z_3$$

代换后所得的方程。

注 用下列行列式来记忆这个平面方程的公式是很方便的，就是

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

3887. 求过两点$(1, 2, 3)$、$(2, 3, 1)$的直线的方程。

解 由问题**3876**可知，所求方程是

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{3-2}=\frac{z-3}{1-3}.$$

$$\therefore\quad x-1=y-2=-\frac{1}{2}(z-3).$$

3888. 求经过两点$(1, 2, 3)$、$(3, 2, 1)$的直线方程。

解 这两点在y轴上的截距都是2，所以连结这两点的直线在$y=2$的平面上。

又 $$\frac{x-1}{3-1}=\frac{z-3}{1-3},\quad 即\quad x+z=4,$$

因而所求直线的方程，就是平面$y=2$和平面$x+z=4$的交线的方程。

3889. 求以$A(1, 2, 3)$、$B(3, 2, 1)$、$C(2, 3, 1)$为顶点的三角形的各边方程和各内角的值。

解 由上题可知直线AB的方程为

$$y=2,\ x+z=4.$$

同理可得，直线BC的方程为

$$z=1,\ x+y=5.$$

由问题**3876**可知，直线AC的方程为

$$x-1=y-2=-\frac{z-3}{2}.$$

设$\overrightarrow{BA}$的方向余弦为$l、m、n$，它们所成的比为$-2:0:2$，所以

$$l=-2k,\ m=0,\ n=2k.$$

又由$l^2+m^2+n^2=1$，得$k=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

$$\therefore\quad l=\frac{-1}{\sqrt{2}},\ m=0,\ n=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

同样，设$\overrightarrow{CB}$的方向余弦为l'、m'、n'，它们所成的比为$1:-1:0$。

$$\therefore\quad l'=\frac{1}{\sqrt{2}},\ m'=\frac{-1}{\sqrt{2}},\ n'=0.$$

又设$\overrightarrow{CA}$的方向余弦为l''、m''、n''，它们所成的比为$-1:-1:+2$，

$$\therefore\quad l''=\frac{-1}{\sqrt{6}},\ m''=\frac{-1}{\sqrt{6}},\ n''=\frac{+2}{\sqrt{6}}.$$

因而

$$\cos\angle BAC=ll''+mm''+nn''=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\angle ABC=ll'+mm'+nn'=-\frac{1}{2},$$

($\angle B$的补角的余弦)

$$\cos\angle BCA=l''l'+m''m'+n''n'=0,$$

$$\therefore\quad \angle A=30°,\ \angle B=60°,\ \angle C=90°.$$

注　在这里所求的方向余弦的方向如图所示。



AB是$\overrightarrow{BA}$，BC是$\overrightarrow{CB}$，AC是$\overrightarrow{CA}$的方向。因而所求的内角为$\angle A$、$\angle C$，外角为$\angle B$。

3890. 求经过三点(1, 2, 3)、(3, 2, 1)、(2, 3, 1)的平面的方程，并求原点到这个平面的距离。

解　设所求平面的方程为$Ax+By+Cz=D$，则

$$A+2B+3C=D, \quad ①$$
$$3A+2B+C=D, \quad ②$$
$$2A+3B+C=D. \quad ③$$

解①、②、③，得

$$A=\frac{D}{6},\quad B=\frac{D}{6},\quad C=\frac{D}{6}.$$

故所求平面的方程是

$$x+y+z=6,$$

从原点到这个平面的距离是

$$\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=2\sqrt{3}.$$

(参照问题 **3879**)

3891. 求过点(1, 2, 3)且与平面$x+2y+3z=6$垂直的直线的方程。

解　设所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{A}=\frac{y-2}{B}=\frac{z-3}{C},$$

由问题**3881**可知，$A:B:C=1:2:3$。故所求直线的方程为

$$x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3},$$

即
$$x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

3892. 求过两点(x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2)，且与已知平面$Ax+By+Cz=D$垂直的平面的方程。

解　设过点(x_1, y_1, z_1)的平面的方程为

$$A'(x-x_1)+B'(y-y_1)+C'(z-z_1)=0,$$

因为这个平面经过点(x_2, y_2, z_2)，所以

$$A'(x_2-x_1)+B'(y_2-y_1)+C'(z_2-z_1)=0. \quad ①$$

又这个平面垂直于已知平面

$$Ax+By+Cz=D,$$

所以，由问题**3882**可知

$$A'\cdot A+B'\cdot B+C'\cdot C=0. \quad ②$$

由①、②，可得

$$\frac{A'}{C(y_2-y_1)-B(z_2-z_1)}=\frac{B'}{A(z_2-z_1)-C(x_2-x_1)}=\frac{C'}{B(x_2-x_1)-A(y_2-y_1)}.$$

故所求平面的方程是

$$[C(y_2-y_1)-B(z_2-z_1)](x-x_1)+[A(z_2-z_1)-C(x_2-x_1)](y-y_1)+[B(x_2-x_1)-A(y_2-y_1)](z-z_1)=0.$$

3893. 求过一点(1, 2, 3)，且同时平行于xy面和平面$x+y+z=6$的直线的方程。

解　设所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-3}{n},$$

因为这直线平行于xy平面，所以

$$n=0.$$

从而得出

$$z-3=0. \quad ①$$

又这直线平行于平面$x+y+z=6$，由问题**3880**可知

$$l\times1+m\times1+n\times1=0.$$

又$n=0$，所以$l+m=0$。

$$\therefore\quad l:m=1:-1.$$

由此可得 $x-1=2-y$. 即

$$x+y=3. \qquad ②$$

因而所求直线的方程是

$$z=3,\ x+y=3.$$

3894. 求以原点为球心，半径为 r 的球面的方程.

解 设到原点的距离为 r 的点的坐标为 (x, y, z)，则

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

这就是所求球面的方程.

3895. 求以点 (a, b, c) 为球心，半径为 r 的球面的方程.

解 设到点 (a, b, c) 的距离为 r 的任意点的坐标为 (x, y, z)，则

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

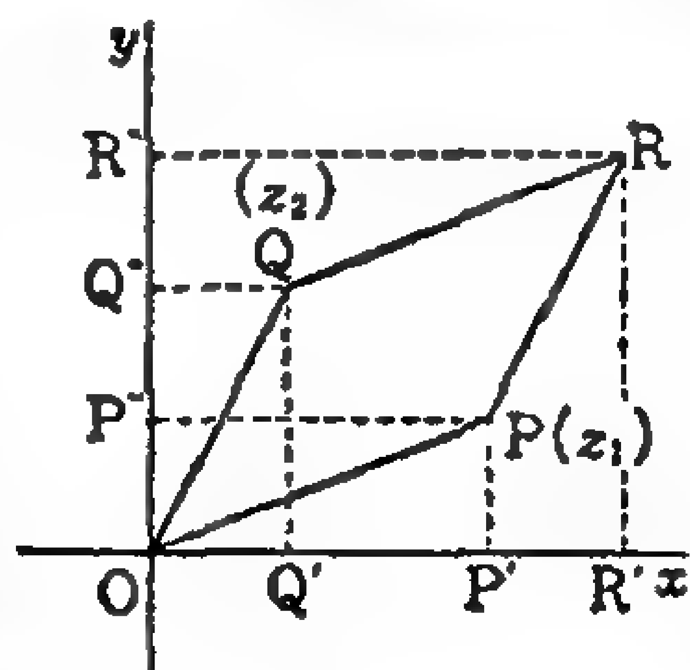
这就是以 (a, b, c) 为球心，半径为 r 的球面方程.

第十章 复数、矢量在初等几何里的应用

1. 应用复数的解法

3896. 已知两个复数 z_1、z_2，求 z_1+z_2、z_1-z_2、$z_1\cdot z_2$、$z_1\div z_2$ 在复平面上所表示的点.

解 在普通平面直角坐标系里，横坐标是 a、纵坐标是 b 的点，即坐标是 (a, b) 的点。但在表示复数的平面，即复平面里，点 P 表示 $a+bi$，即横坐标仍表示实数 a，纵坐标 b 表示 b 的 i 倍的 bi. 在复平面上，把横轴称实轴，纵轴称虚轴.



现取 O 为原点，点 P 表示 $z_1=a_1+b_1i$，点 Q 表示 $z_2=a_2+b_2i$，设从 P、Q 作实轴的垂线，设垂足分别为 P'、Q'，从 P、Q 作虚轴的垂线，设垂足分别为 P''、Q''，则

$$OP'=a_1,\ OP''=b_1,\ OQ'=a_2,\ OQ''=b_2.$$

再作以 OP、OQ 为两邻边的平行四边形 $OPRQ$. 设从 R 作实轴的垂线，设垂足为 R'，从 R 作虚轴的垂线，设垂足为 R''，因 $PR \mathrel{\underline{\parallel}} OQ$，则

$$P'R'=OQ'=a_2,\ P''R''=OQ''=b_2.$$

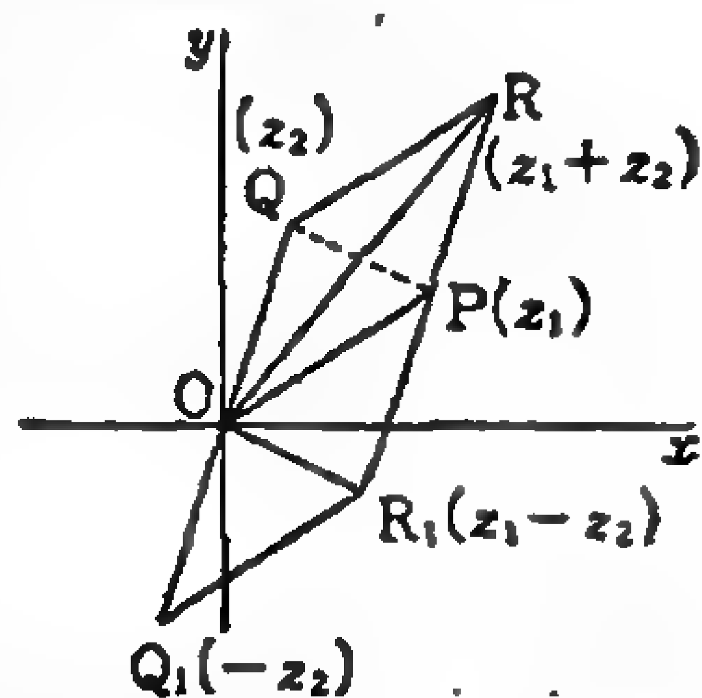
因而 $OR'=OP'+P'R'=a_1+a_2$,

$$OR''=OP''+P''R''=b_1+b_2.$$

故如在普通直角坐标平面里，R 是表示坐标为 $(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$ 的点，那么在复平面，R 就表示

$$a_1+a_2+(b_1+b_2)i=(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=z_1+z_2.$$

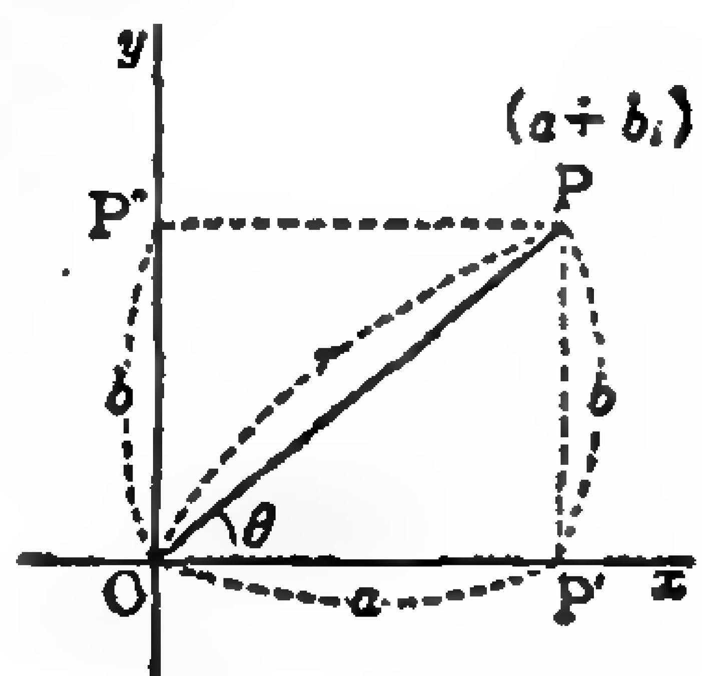
因此，设表示 z_1、z_2 的点分别为 P、Q，则表示 z_1+z_2 的点是以 OP、OQ 为两邻边所作平行四边形 $OPRQ$ 的顶点 R.



z_1-z_2 和 $z_1+(-z_2)$ 是一样的. 设表示 z_1 的点为 P，表示 $-z_2$ 即 $-a_2-b_2i$ 的点为 Q_1，则以 OP、OQ_1 为两邻边所作平行四边形 OPR_1Q_1 的顶点 R_1 为表示 z_1-z_2 的点. 因为原点 O 为 QQ_1 的中点，且 OPR_1Q_1 是平行四边形，所以 $OQPR_1$ 也是平行四边形(由 $PR_1 \mathrel{\underline{\parallel}} OQ_1$ 得 $PR_1 \mathrel{\underline{\parallel}} QO$). 因此，在平行四边形 $OQPR_1$ 中取 R_1，则 R_1 也是表示 z_1-z_2 的点. 这样，从原点到表示 z_1-z_2 的点 R_1 的距离 OR_1，等于表示两复数 z_1、z_2 的两点 P、Q 间的距离 PQ (因为 $OQPR_1$ 是平行四边形).

在复平面上，设点 P 表示复数 $z=a+bi$，从原点到 P 的距离(设距离为 r，则 r 与其方向无关，$r\geqq 0$)称为复数 $z=a+bi$ 的绝对值，用 $|z|$ 表示. 即

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}=\overline{OP}=r.$$



而实轴的正方向和 OP 的夹角 $\angle xOP$ 称为这个复数的幅角，用 $\arg(a+bi)$ 表示. 设这个幅角为 θ，则

$$a=r\cos\theta,$$
$$b=r\sin\theta.$$

$$\therefore\ a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

这样复数 $a+bi$ 可表示为 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，它叫做复数的极形式表示或三角函数式。

设 $|z_1|=r_1$, $\arg z_1=\theta_1$, $|z_2|=r_2$, $\arg z_2=\theta_2$, 则

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

所以

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1\cdot r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+i\sin\theta_1\cos\theta_2\\&\quad+i\cos\theta_1\sin\theta_2+i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&=r_1\cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

由此可得，两个复数的积，是以其绝对值的积为绝对值，其幅角的和为幅角的复数。

设在复平面上，点 P 表示复数 $z_1=a_1+b_1i$, 则

$$|z_1|=\overline{OP}=r_1,\quad \arg z_1=\angle xOP=\theta_1.$$

又设点 Q 表示复数 $z_2=a_2+b_2i$, 则

$$|z_2|=\overline{OQ}=r_2,\quad \arg z_2=\angle xOQ=\theta_2.$$

在实轴上取点 A 使 $OA=1$, 作 $\triangle OQR$ 相似于 $\triangle OAP$, 得到点 R (也可以说取点 R 使 $\triangle OPR\backsim\triangle OAQ$), 可知

$$\overline{OR}:\overline{OP}=\overline{OQ}:\overline{OA},$$

$\therefore\ \overline{OR}:r_1=r_2:1$, 即 $OR=r_1\cdot r_2$.

而 $\angle xOR=\theta_1+\theta_2=\arg z_1+\arg z_2$, 故 R 是表示 $z_1\cdot z_2$ 的点。

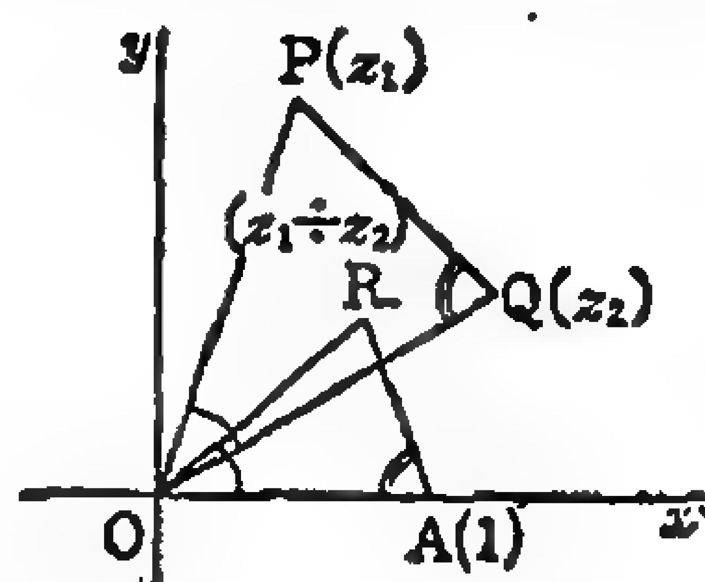
又

$$\begin{aligned}z_1\div z_2&=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)}\\&=\frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].\end{aligned}$$

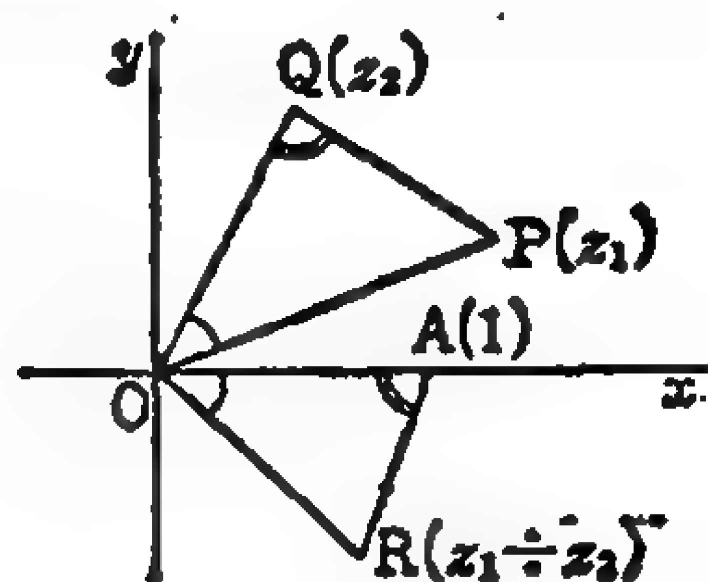
$$\therefore\quad |z_1\div z_2|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

而 $\arg(z_1\div z_2)=\theta_1-\theta_2=\arg z_1-\arg z_2$,

因而复数除以复数所得的商是以被除数的绝对值除以除数的绝对值为其绝对值，从被除数的幅角减去除数幅角所得的差为其幅角所得的复数。



(1)



(2)

设点 P 表示 z_1, 点 Q 表示 z_2, 在实轴上取 A 使 $OA=1$, 再取 R, 使

$$\angle AOR=\angle QOP=\theta_1-\theta_2,$$

且 $\quad\triangle OAR\backsim\triangle OQP,$

则 $\quad\overline{OR}:\overline{OP}=\overline{OA}:\overline{OQ}.$

$\therefore\quad\overline{OR}\cdot\overline{OQ}=\overline{OP}\cdot\overline{OA},$

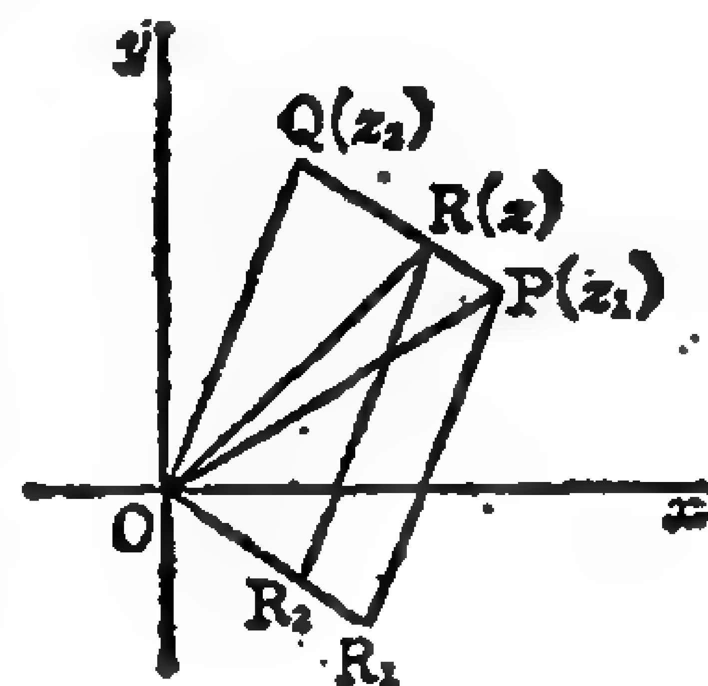
即 $\quad\overline{OR}\cdot r_2=r_1\cdot 1,$

$$\overline{OR}=\frac{r_1}{r_2}.$$

而
$$\begin{aligned}\angle xOR&=\angle xOP-\angle ROP\\&=\angle xOP-\angle AOQ\\&=\theta_1-\theta_2=\arg z_1-\arg z_2.\end{aligned}$$

所以，点 R 表示复数 $z_1\div z_2$(图(1)表示 $\theta_1>\theta_2$ 的情形，图(2)表示 $\theta_1<\theta_2$ 即 $\theta_1-\theta_2<0$ 的情形)。

3897. 在复平面上，设表示复数 z_1 的点为 P, 表示复数 z_2 的点为 Q, 点 R 在直线 PQ 上，并表示复数 z, 则 $z=tz_1+(1-t)z_2$(其中 t 是实数)。反过来也成立。



解　如上题所示，设 O 为原点，R_1 是平行四边形 $OQPR_1$ 的顶点，则表示 R_1 的复数是 z_1-z_2. 在直线 PQ 上任取一点 R, R 表示的复数是 z. 设过 R 且平行于 PR_1 的直线和直线 OR_1 的交点为 R_2, 则 $OQRR_2$ 是平行四边形，因 R 表示 z, Q 表示 z_2, 所以 R_2 表示 $z-z_2$. 因此，如设 $OR_2:OR_1=t:1$, 则

$$OR_2 = t \cdot OR_1.$$

$$\therefore \quad z - z_2 = t(z_1 - z_2).$$

从而得出

$$z = z_2 + t(z_1 - z_2) = tz_1 + (1-t)z_2.$$

这就是说，对于直线 PQ 上任意一点 R 所表示的复数 z，等式 $z = tz_1 + (1-t)z_2$ 总是成立的。

反过来，对满足关系式 $z = tz_1 + (1-t)z_2$ 的复数 z，作平行四边形 $OQPR_1$，则 R_1 表示的复数是 $z_1 - z_2$。再在直线 OR_1 上取 R_2，使 $OR_2 : OR_1 = t : 1$，则 $OR_2 = t \cdot OR_1$。过 R_2 作 R_1P 的平行线，和直线 PQ 的交点为 R_3，设 R_3 表示的复数为 z_3，则因为 OQR_3R_2 是平行四边形，所以 R_2 表示 $z_3 - z_2$。

故 $$z_3 - z_2 = t(z_1 - z_2).$$

$$\therefore \quad z_3 = z_2 + t(z_1 - z_2) = tz_1 + (1-t)z_2.$$

$$\therefore \quad z = z_3.$$

这就是说，z 就是在直线 PQ 上的点 R_3 所表示的复数 z_3。因此复数 z 如满足关系式 $z = tz_1 + (1-t)z_2$，则表示 z 的点一定在直线 PQ 上。

3898. 以三角形 ABC 的边 AB、AC 分别为一边，在三角形的外侧作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$，设线段 EG 的中点为 M，则 $2AM = BC$，且 $AM \perp BC$。

解 在复平面上，以 A 为原点，建立坐标系。设 B 表示的复数为 z_1，C 表示的复数为 z_2，E 表示的复数为 z_e，G 表示的复数为 z_g，则由问题 **3896**，得

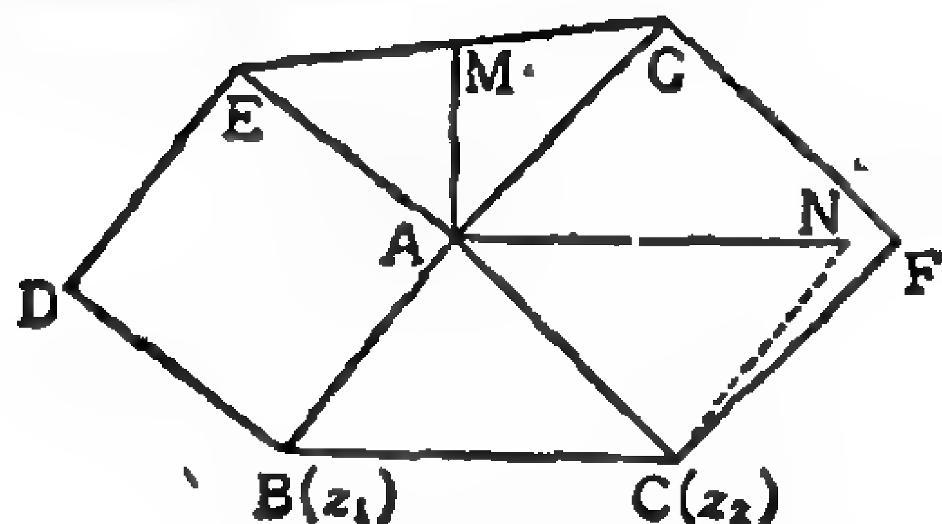
$$z_e = z_1[\cos(-90^\circ) + i\sin(-90^\circ)] = -z_1 i,$$

$$z_g = z_2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = z_2 i.$$

设线段 EG 的中点 M 表示的复数为 z_m，则

$$z_m = \frac{z_e + z_g}{2} = \frac{-z_1 i + z_2 i}{2} = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)i.$$

过 A 作 BC 的平行线，并在其上取 AN 等于 BC，设 N 表示的复数为 z_n，则由 $ABCN$ 是平行四边形可知



$$z_n = z_2 - z_1. \quad \text{(参照上题)}$$

$$\therefore \quad z_m = \frac{1}{2} z_n i = \frac{1}{2} z_n (\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ).$$

因而 $$|z_m| = \frac{1}{2}|z_n|.$$

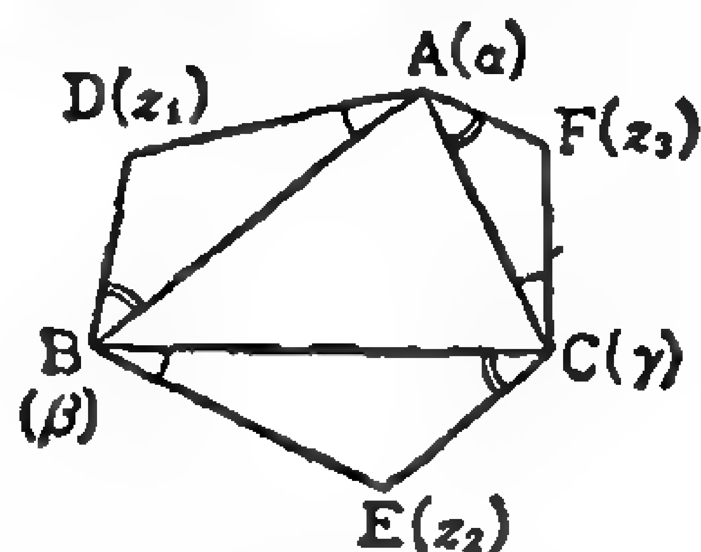
即 $$AM = \frac{1}{2}AN, \quad \text{且} \quad AM \perp AN.$$

从而得出，

$$AM = \frac{1}{2}BC, \quad \text{且} \quad AM \perp BC.$$

3899. 以三角形 ABC 的各边为对应边，在三角形的外侧作 $\triangle ABD \backsim \triangle BCE \backsim \triangle CAF$，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的重心重合。

解 以 $\triangle ABC$ 所在的平面为复平面，取原点为 O，作实轴、虚轴，建立坐标系。设各点表示的复数是：A 为 α，B 为 β，C 为 γ，D 为 z_1，E 为 z_2，F 为 z_3。



取 A' 使 $OBAA'$ 为平行四边形，取 D' 使 $OBDD'$ 为平行四边形，则 A' 表示 $\alpha - \beta$，D' 表示 $z_1 - \beta$。设 $\angle ABD = \theta$，则 $\angle A'OD' = \theta$，$OD' : OA' = BD : BA$。如设 $BD : BA = \gamma : 1$，则

$$z_1 - \beta = (\alpha - \beta) \cdot \gamma(\cos\theta + i\sin\theta).$$

又设 $\gamma(\cos\theta + i\sin\theta) = k$，则

$$z_1 - \beta = (\alpha - \beta)k. \quad ①$$

同理可得，即 $\angle ABD = \angle BCE = \angle CAF = \theta$，$BD : BA = CE : CB = AF : AC = \gamma : 1$，并设 $\gamma(\cos\theta + i\sin\theta) = k$，

$$z_2 - \gamma = (\beta - \gamma)k, \quad ②$$

$$z_3 - \alpha = (\gamma - \alpha)k. \quad ③$$

①+②+③，得

$$(z_1 - \beta) + (z_2 - \gamma) + (z_3 - \alpha) = 0.$$

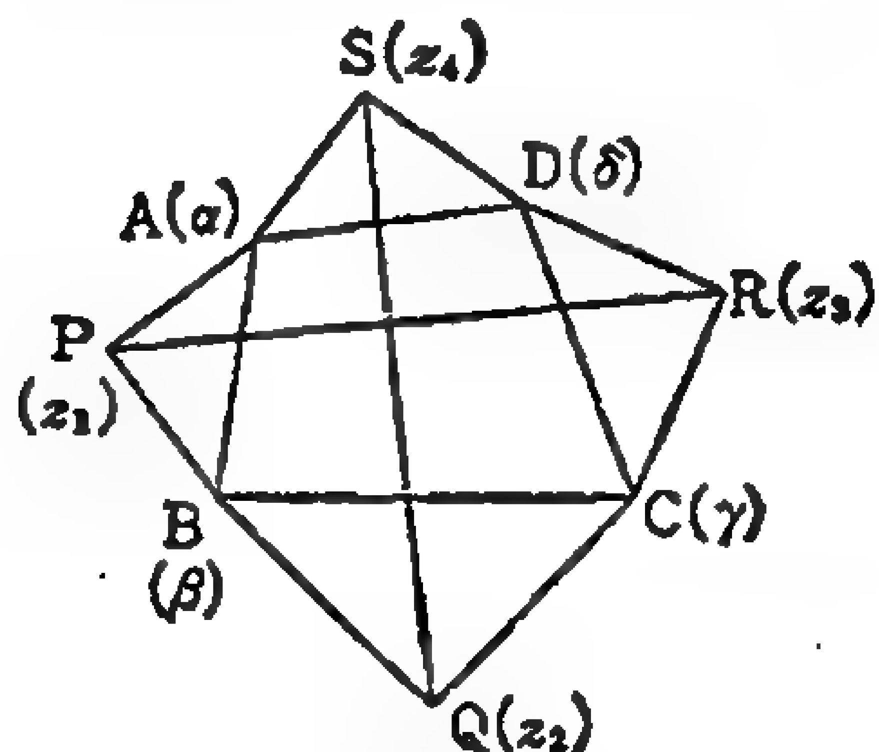
$$\therefore \quad z_1 + z_2 + z_3 = \alpha + \beta + \gamma,$$

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}. \quad ④$$

此式的左边表示 $\triangle DEF$ 的重心，右边表示 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $\triangle ABC$ 的重心和 $\triangle DEF$ 的重心是重合的。

3900. 在四边形 $ABCD$ 的外侧，以各边为斜边作等腰直角三角形 $\triangle ABP$，$\triangle BCQ$，$\triangle CDR$，$\triangle DAS$，证明 $PR = SQ$，且 $PR \perp SQ$。

解　设各点表示的复数是：A 为 α，B 为 β，C 为 γ，D 为 δ，P 为 z_1，Q 为 z_2，R 为 z_3，S 为 z_4。



$\because\ \angle ABP=\angle BCQ=\angle CDR=\angle DAS=45°$，

$\therefore\ BP:BA=CQ:CB=DR:DC=AS:AD=1:\sqrt{2}$。

又设

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45°+i\sin 45°)=\frac{1}{2}(1+i)=k.$$

和上题同样道理，可知

$$z_1-\beta=(\alpha-\beta)k,\quad z_2-\gamma=(\beta-\gamma)k,$$
$$z_3-\delta=(\gamma-\delta)k,\quad z_4-\alpha=(\delta-\alpha)k.$$

$$\therefore\quad z_1-\beta=(\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{2}(1+i)$$

即

$$z_1=\beta+(\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{2}(1+i)=\frac{\alpha}{2}(1+i)+\frac{\beta}{2}(1-i).$$

同理可得，

$$z_2=\frac{\beta}{2}(1+i)+\frac{\gamma}{2}(1-i),$$
$$z_3=\frac{\gamma}{2}(1+i)+\frac{\delta}{2}(1-i),$$
$$z_4=\frac{\delta}{2}(1+i)+\frac{\alpha}{2}(1-i).$$

$$\therefore\ z_1-z_3=\frac{\alpha-\gamma}{2}(1+i)+\frac{\beta-\delta}{2}(1-i),$$
$$z_4-z_2=\frac{\delta-\beta}{2}(1+i)+\frac{\alpha-\gamma}{2}(1-i).$$

因而

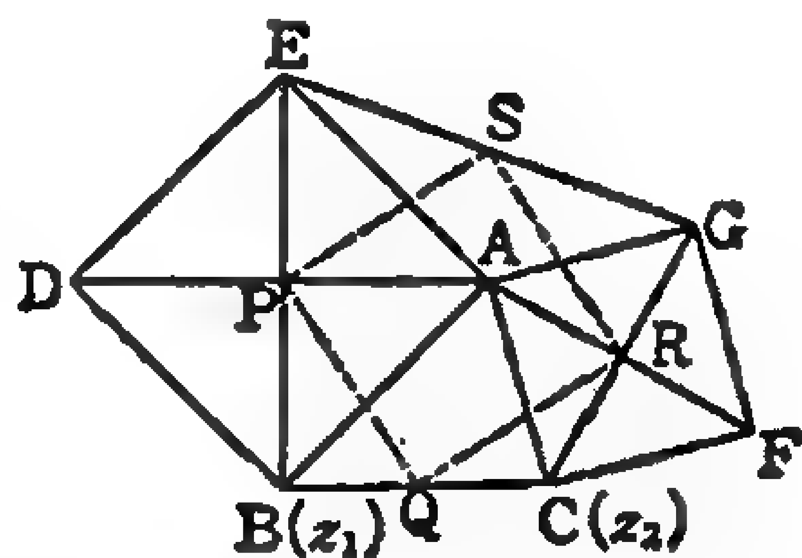
$$(z_4-z_2)i=\frac{\delta-\beta}{2}(i-1)+\frac{\alpha-\gamma}{2}(i+1)=\frac{\alpha-\gamma}{2}(1+i)+\frac{\beta-\delta}{2}(1-i)=z_1-z_3.$$

即　$(z_4-z_2)(\cos 90°+i\sin 90°)=z_1-z_3$。

$\therefore\ |z_1-z_3|=|z_4-z_2|$，

即　$PR=SQ$，且　$PR\perp SQ$。

3901. 以三角形 ABC 的边 AB、AC 分别为一边，在三角形 ABC 的外侧作两个正方形 $ABDE$，$ACFG$。设它们的中心分别为 P、R。又 BC 的中点为 Q，EG 的中点为 S，证明四边形 $PQRS$ 是正方形。



解　以 A 为原点，作实轴、虚轴，设 B 表示的复数为 z_1，C 表示的复数为 z_2，于是 E 表示的复数是

$$z_1[\cos(-90°)+i\sin(-90°)]=z_1(-i)=-z_1i.$$

G 表示的复数是

$$z_2\cdot(\cos 90°+i\sin 90°)=z_2i.$$

因为 P 是 BE 的中点，所以 P 表示的复数是

$$\frac{z_1+(-z_1i)}{2}=\frac{1-i}{2}z_1.$$

又 R 是 CG 的中点，所以 R 表示的复数是

$$\frac{z_2+z_2i}{2}=\frac{1+i}{2}z_2.$$

从而得出，PR 的中点表示的复数是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-i}{2}z_1+\frac{1+i}{2}z_2\right)=\frac{1-i}{4}z_1+\frac{1+i}{4}z_2.$$

又由于 BC 中点 Q 表示的复数是 $\frac{z_1+z_2}{2}$，EG 中点 S 表示的复数是 $\frac{-z_1i+z_2i}{2}$，所以 QS 中点表示的复数是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z_1+z_2}{2}+\frac{-z_1i+z_2i}{2}\right)=\frac{1-i}{4}z_1+\frac{1+i}{4}z_2.$$

因此，PR 的中点和 QS 的中点是同一点，即 PR 和 QS 互相平分。从而得出，$PQRS$ 是平行四边形。

其次，因为 $P\left(\frac{1-i}{2}z_1\right)$，$Q\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)$，所以

$$PQ=\frac{z_1+z_2}{2}-\frac{1-i}{2}z_1=\frac{i}{2}z_1+\frac{1}{2}z_2.$$

又因为 $P\left(\frac{1-i}{2}z_1\right)$, $S\left(\frac{-z_1i+z_2i}{2}\right)$, 所以

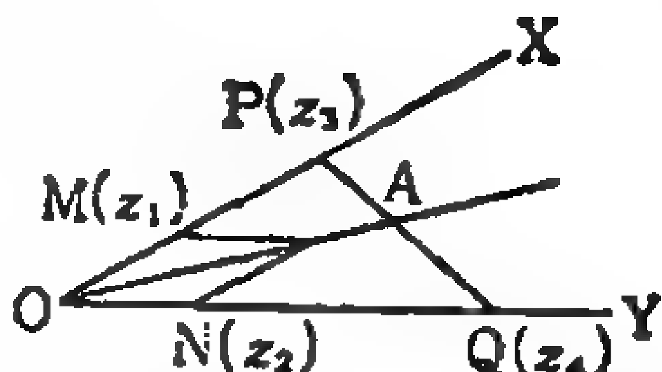
$$PS=\frac{-z_1i+z_2i}{2}-\frac{1-i}{2}z_1$$
$$=-\frac{1}{2}z_1+\frac{i}{2}z_2=\left(\frac{i}{2}z_1+\frac{1}{2}z_2\right)i$$
$$=PQ\cdot i=PQ(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ).$$

因此，　$PQ=PS$,　且　$PQ\perp PS$.

因两邻边相等且相互垂直的平行四边形是正方形，所以 $PQRS$ 是正方形。

3902. 在 $\angle XOY$ 的平分线上，取定点 A，过 A 的任意直线和边 OX、OY 分别交于 P、Q，证明 $\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$ 是定值。

解　平面 (OX, OY) 为复平面，O 为原点，在 OX 上取一点 M，使 M 表示的复数为 $z_1(|z_1|=1)$，在 OY 上取点 N，使 N 表示的复数为 $z_2(|z_2|=1)$。作点 B 使 $OMBN$ 为平行四边形，则 B 在 $\angle XOY$ 的平分线上，从而得出 B 表示的复数是 z_1+z_2。已知 A 为 $\angle XOY$ 的平分线上的定点，设 $OA:OB=k:1$，k 是定数，则 $OA=k\cdot OB$，所以 A 表示的复数是 $k(z_1+z_2)$。又知过 A 的直线和 OX、OY 分别交于 P、Q，所以 A 在直线 PQ 上。设 P 表示的复数为 z_3，Q 表示的复数为 z_4，则



$$k(z_1+z_2)=tz_3+(1-t)z_4.\ \text{(问题 3897)}$$

设 OP、OQ 表示其长度，则

$$z_3:z_1=OP:1,\quad \therefore\quad z_3=z_1\cdot OP,$$

又　$z_4:z_2=OQ:1$,　即　$z_4=z_2\cdot OQ$.

$$\therefore\quad k(z_1+z_2)=t(z_1\cdot OP)+(1-t)(z_2\cdot OQ),$$
$$(k-t\cdot OP)z_1=[(1-t)OQ-k]z_2.$$

因为　$|z_1|=|z_2|$,　但　$z_1\neq z_2$,

所以　$k-t\cdot OP=0$　和　$(1-t)OQ-k=0$.

由此可得，　$OP=\frac{k}{t}$　和　$OQ=\frac{k}{1-t}$.

从而得出，　$\frac{1}{OP}=\frac{t}{k}$, $\frac{1}{OQ}=\frac{1-t}{k}$.

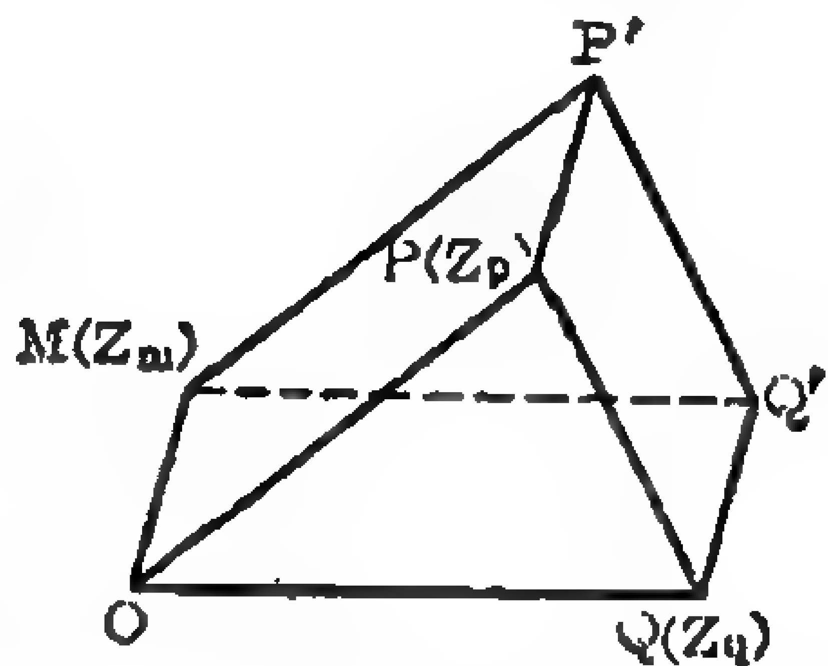
$$\therefore\ \frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{t}{k}+\frac{1-t}{k}=\frac{1}{k}\ \text{(定值)}.$$

3903. 在复平面上，设 $\triangle ABC$ 的顶点 A 表示的复数为 α，顶点 B 表示的复数为 β，顶点 C 表示的复数为 γ，证明 $\triangle ABC$ 是正三角形的充要条件是

$$\alpha+\beta\omega+\gamma\omega^2=0,\ \text{或}\quad \alpha+\beta\omega^2+\gamma\omega=0.$$

其中 ω 为 1 的虚立方根 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

解　首先，看以下命题：设在复平面上，原点为 O，点 M、P、Q 表示的复数分别为 z_m、z_p、z_q。若把点 P 和点 Q 在 OM 的方向上分别平行移动 OM 的长度，这时 P 移到 P'，Q 移到 Q'，则 $OPP'M$ 是平行四边形，P' 表示的复数是 z_p+z_m，$OQQ'M$ 也是平行四边形，Q' 表示的复数是 z_q+z_m。因此，线段 $P'Q'$ 表示的复数是



$$P'Q'=(z_q+z_m)-(z_p+z_m)=z_q-z_p.$$

但线段 PQ 表示的复数也是

$$PQ=z_q-z_p.$$
$$\therefore\quad P'Q'=PQ=z_q-z_p.$$

由此可知，无论把线段沿什么方向，平行移动多少长度（线段的方向、长度都不变）这条线段表示的复数不变。

其次，看另一命题：设点 R 表示的复数为 z_r，点 S 表示的复数为 z_s，则 $RS=z_s-z_r$.

现在考虑　$\frac{PQ}{RS}=\frac{z_q-z_p}{z_s-z_r}$.

设　$z_q-z_p=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,

$z_s-z_r=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,

$\frac{z_q-z_p}{z_s-z_r}=r_3(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)$,

则　$$\frac{PQ}{RS}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$
$$=r_3(\cos\theta_3+i\sin\theta_3).$$

$$\therefore\quad \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$
$$=r_3(\cos\theta_3+\sin\theta_3).$$

由此可得，　$\frac{r_1}{r_2}=r_3$,　$\theta_1-\theta_2=\theta_3$,

即　　$r_1=r_2r_3$,　$\theta_1=\theta_2+\theta_3$.

这就是说，要把 $|RS|$（即复数 RS 的绝对值，线段 RS 的长度）乘以一个数（即扩大若

干倍)使等于 $|PQ|$(这里的倍数是 γ_3)，并且把 RS 旋转一角度使和 PQ 的方向相同(这里旋转角是 θ_3)，这时可用 PQ 除以 RS 来解决。

现在来看 1 的立方根在复平面上的几何表示。

设 $x^3=1$，则 $x^3-1=0$,

$$\therefore\ (x-1)(x^2+x+1)=0,$$

于是 $x-1=0$，或 $x^2+x+1=0$。

从而得出，$x=1$ 或 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$。

设 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，则

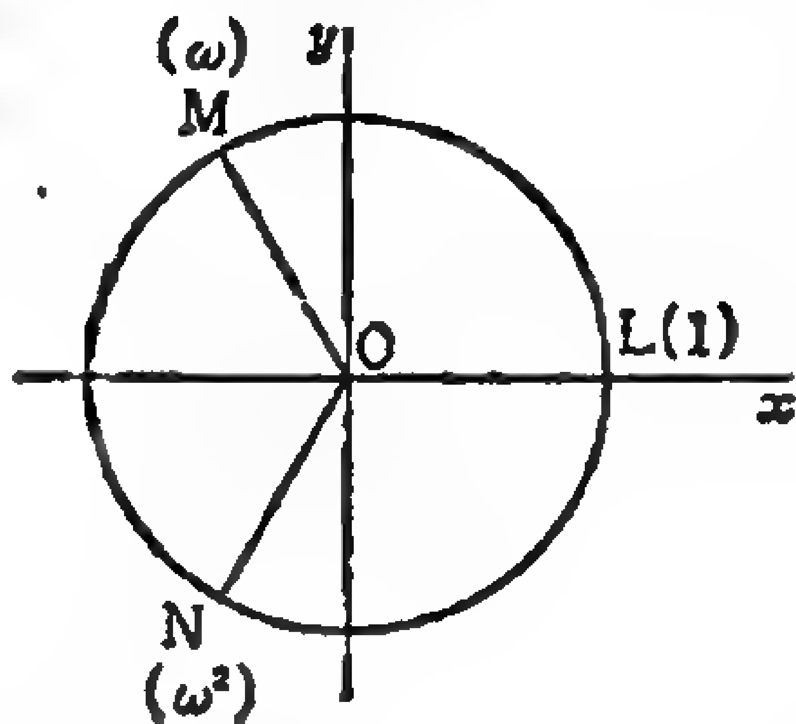
$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

也可写成 $\omega=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$,

$$\omega^2=\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ),$$

$$1=\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ.$$

设表示 1 的点为 L，表示 ω 的点为 M，表示 ω^2 的点为 N，则 $\triangle LMN$ 是正三角形。



要使 $\triangle ABC$ 是正三角形的必要充分条件是(见注)

$$\frac{AB}{LM}=\frac{BC}{MN}=\frac{CA}{NL},$$

即 $$\frac{\beta-\alpha}{\omega-1}=\frac{\gamma-\beta}{\omega^2-\omega}=\frac{\alpha-\gamma}{1-\omega^2},\qquad ①$$

或 $$\frac{AB}{LN}=\frac{BC}{NM}=\frac{CA}{ML},$$

即 $$\frac{\beta-\alpha}{\omega^2-1}=\frac{\gamma-\beta}{\omega-\omega^2}=\frac{\alpha-\gamma}{1-\omega}.\qquad ①'$$

设 ① 的比值等于 k，可得

$$\beta-\alpha=k(\omega-1),$$
$$\gamma-\beta=k(\omega^2-\omega),$$
$$\alpha-\gamma=k(1-\omega^2).$$

把前两个等式的两边分别相加，得

$$\gamma-\alpha=k(\omega^2-1),$$

即 $$\alpha-\gamma=k(1-\omega^2).$$

这就是说，在 ① 中若

$$\frac{\beta-\alpha}{\omega-1}=\frac{\gamma-\beta}{\omega^2-\omega},\qquad ②$$

则这个等式两边的值都等于 $\dfrac{\alpha-\gamma}{1-\omega^2}$。从而得出 ① 式成立。

同样，再设 ①′ 的比值等于 k'，得

$$\beta-\alpha=k'(\omega^2-1),$$
$$\gamma-\beta=k'(\omega-\omega^2),$$
$$\alpha-\gamma=k'(1-\omega).$$

把前两个等式的两边分别相加，得

$$\gamma-\alpha=k'(\omega-1),\quad 即\quad \alpha-\gamma=k'(1-\omega).$$

这就是说，在 ①′ 中若

$$\frac{\beta-\alpha}{\omega^2-1}=\frac{\gamma-\beta}{\omega-\omega^2},\qquad ②'$$

则这个等式两边的值都等于 $\dfrac{\alpha-\gamma}{1-\omega}$。从而得出，①′ 式成立。

因此，$\triangle ABC$ 是正三角形的充要条件又可写成 ② 或 ②′。

我们再来把 ② 和 ②′ 变形。如 ② 成立，则

$$(\alpha-\beta)(\omega-\omega^2)=(\beta-\gamma)(1-\omega),$$

即 $$(\alpha-\beta)\omega(1-\omega)=(\beta-\gamma)(1-\omega).$$

但是 $1-\omega\neq0$。$\therefore\ (\alpha-\beta)\omega=\beta-\gamma$。

即 $$\alpha\omega-\beta(\omega+1)+\gamma=0.$$

而 $\omega^2+\omega+1=0$，$\omega^3=1$。

$$\therefore\ \omega+1=-\omega^2,\ 1=\omega^3.$$

所以上式又可写成

$$\alpha\omega-\beta(-\omega^2)+\gamma\omega^3=0.$$

$$\therefore\ \alpha+\beta\omega+\gamma\omega^2=0.\qquad ③$$

如 ②′ 成立，则

$$(\alpha-\beta)(\omega^2-\omega)=(\beta-\gamma)(1-\omega^2),$$

即

$$(\alpha-\beta)\omega(\omega-1)=(\beta-\gamma)(1+\omega)(1-\omega).$$

$$\therefore\ (\alpha-\beta)\omega=-(\beta-\gamma)(1+\omega),$$

$$(\alpha-\beta)\omega+(\beta-\gamma)(-\omega^2)=0,$$

$$\alpha\omega-\beta(\omega+\omega^2)+\gamma\omega^2=0,$$

$$\alpha\omega-\beta(-1)+\gamma\omega^2=0.\quad (\because\ \omega^2+\omega+1=0)$$

两边同乘以 ω^2,

$$\alpha\omega^3+\beta\omega^2+\gamma\omega^4=0.$$

$$\therefore\ \alpha+\beta\omega^2+\gamma\omega=0.\qquad ③'$$

这就是说，如 ② 成立，则 ③ 成立；如 ②′ 成立，则 ③′ 成立。

相反，设 ③ 成立，则

$$\alpha\omega+\beta\omega^2+\gamma\omega^3=0.$$

$$\therefore\quad \alpha\omega+\beta(-\omega-1)+\gamma=0,$$

即 $$(\alpha-\beta)\omega=\beta-\gamma,$$

$$(\alpha-\beta)\omega(1-\omega)=(\beta-\gamma)(1-\omega).$$

$$\therefore\quad \frac{\alpha-\beta}{1-\omega}=\frac{\beta-\gamma}{\omega-\omega^2}. \qquad ②$$

设③′成立，则

$$\alpha\omega^3+\beta\omega^2+\gamma\omega^4=0.$$

$$\therefore\quad \alpha\omega+\beta+\gamma\omega^2=0,$$

即 $$\alpha\omega-\beta\omega+\beta\omega+\beta+\gamma(-\omega-1)=0,$$

$$(\alpha-\beta)\omega+(\beta-\gamma)(\omega+1)=0.$$

$$\therefore\quad (\alpha-\beta)\omega(\omega-1)=(\gamma-\beta)(\omega+1)(\omega-1).$$

$$\therefore\quad (\beta-\alpha)(\omega-\omega^2)=(\gamma-\beta)(\omega^2-1).$$

由此可得，

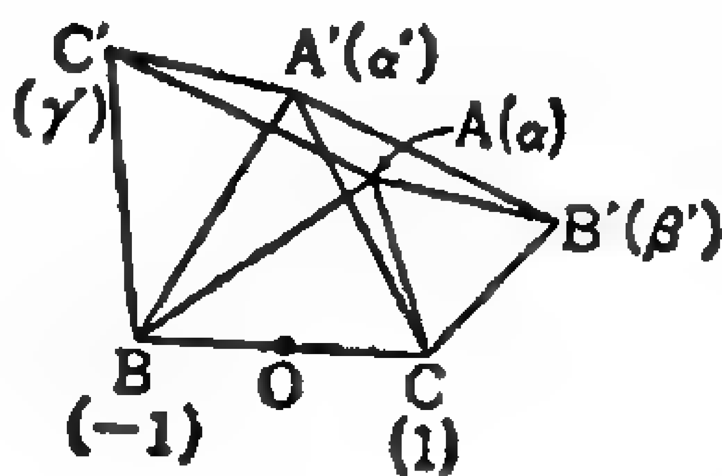
$$\frac{\beta-\alpha}{\omega^2-1}=\frac{\gamma-\beta}{\omega-\omega^2}. \qquad ②'$$

这就是说，如果③成立，则②成立；如果③′成立，则②′成立。

综上所述可知，$\triangle ABC$ 是正三角形的充分必要条件是③或③′成立。

注 $\triangle ABC$ 和 $\triangle LMN$ 的顶点的旋转顺序相同，则 $\triangle ABC$ 是正三角形的充分必要条件是③。如 $\triangle ABC$ 和 $\triangle LMN$ 的顶点旋转顺序相反，则 $\triangle ABC$ 是正三角形的充分必要条件是③′。

3904. 如在 $\triangle ABC$ 的外侧，以 AB、AC 为边分别作正三角形 ABC'、ACB'. 在关于 BC 和 A 的同侧，作以 BC 为边的正三角形 BCA'，则 $A'C'AB'$ 是平行四边形。



解 设以 BC 的中点 O 为原点，各顶点 A、B、C、A'、B'、C' 表示的复数分别为 α、-1、1、α'、β'、γ'，则 $\triangle C'BA$, $\triangle B'AC$, $\triangle A'BC$ 都是各顶点的旋转顺序相同的正三角形，所以由上题可知，

$$\gamma'+(-1)\omega+\alpha\omega^2=0, \qquad ①$$

$$\beta'+\alpha\omega+1\cdot\omega^2=0, \qquad ②$$

$$\alpha'+(-1)\omega+1\cdot\omega^2=0, \qquad ③$$

或

$$\gamma'+(-1)\omega^2+\alpha\omega=0, \qquad ①'$$

$$\beta'+\alpha\omega^2+1\cdot\omega=0, \qquad ②'$$

$$\alpha'+(-1)\omega^2+1\cdot\omega=0. \qquad ③'$$

当①、②、③成立时，

③−①，得 $\alpha'-\gamma'+(1-\alpha)\omega^2=0.$

$$\therefore\quad \alpha'-\gamma'=(\alpha-1)\omega^2. \qquad ④$$

从②，得 $\beta'=-\alpha\omega-\omega^2.$

$$\therefore\quad \beta'-\alpha=-\alpha-\alpha\omega-\omega^2=\alpha(-1-\omega)-\omega^2=\alpha\omega^2-\omega^2=(\alpha-1)\omega^2. \qquad ⑤$$

从④、⑤可知，$\alpha'-\gamma'=\beta'-\alpha.$

$$\therefore\quad C'A' \mathrel{\underline{\parallel}} AB',$$

故 $A'C'AB'$ 为平行四边形。

当①′、②′、③′成立时，

③′−①′，得 $\alpha'-\gamma'+(1-\alpha)\omega=0.$

$$\therefore\quad \alpha'-\gamma'=(\alpha-1)\omega. \qquad ④'$$

从②′，得 $\beta'=-\alpha\omega^2-\omega.$

$$\therefore\quad \beta'-\alpha=-\alpha-\alpha\omega^2-\omega=\alpha(-1-\omega^2)-\omega=\alpha\omega-\omega=(\alpha-1)\omega. \qquad ⑤'$$

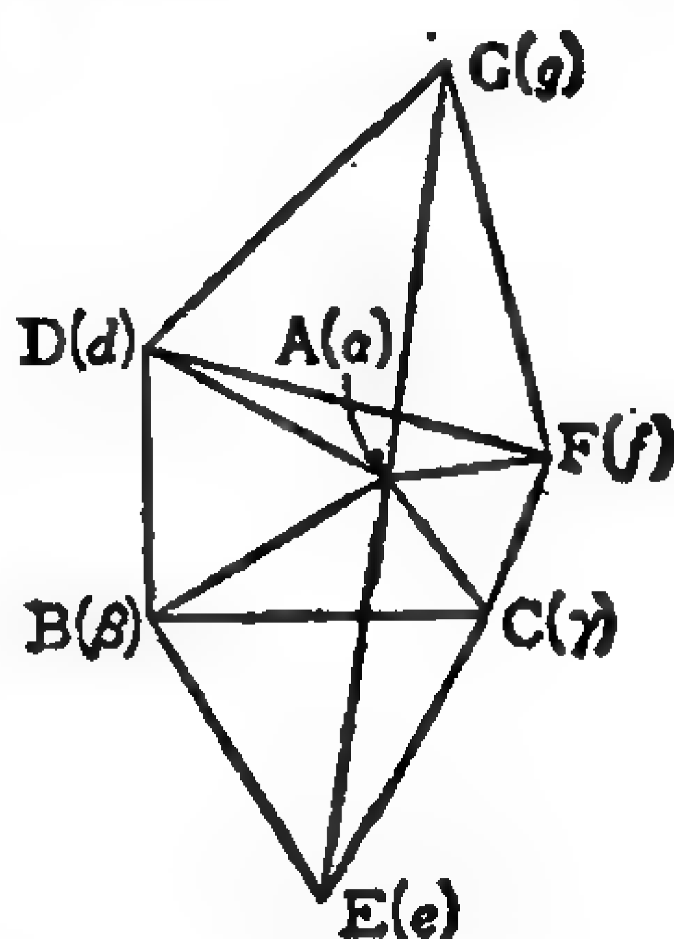
从④′、⑤′可知，$\alpha'-\gamma'=\beta'-\alpha.$

$$\therefore\quad C'A' \mathrel{\underline{\parallel}} AB',$$

故这时 $A'C'AB'$ 为平行四边形。

注 正三角形 $C'BA$, $B'AC$, $A'BC$ 如向左旋转（与时针旋转方向相反，即逆时针方向旋转），则①、②、③成立。向右旋转（与时针旋转方向相同，即按顺时针方向旋转），则①′、②′、③′成立。（如图所示，是向左旋转，①、②、③式成立。）

3905. 在 $\triangle ABC$ 的外侧，以 $\triangle ABC$ 的各边为边分别作正三角形 ABD、BCE、CAF。又和上题一样，按右旋转作以 FD 为边的正三角形 FDG，证明点 G、A、E 共线，且 $GA=AE$。



解 设 $\triangle ABC$ 所决定的平面为复平面，各顶点表示的复数分别是：A 为 α，B 为 β，C 为 γ，D 为 d，E 为 e，F 为 f，G 为 g。因为 $\triangle ABD$、$\triangle BCE$、$\triangle CAF$、$\triangle FDG$ 都是右旋转的正三角形，所以

$$\alpha+\beta\omega^2+d\omega=0,\quad \beta+\gamma\omega^2+e\omega=0,$$

$$\gamma+\alpha\omega^2+f\omega=0,\quad f+d\omega^2+g\omega=0.$$

在这些式子的两边同乘以 ω^2，则得

$$\alpha\omega^3+\beta\omega^4+d\omega^3=0,\quad \beta\omega^2+\gamma\omega^4+e\omega^3=0,$$

$\gamma\omega^2+\alpha\omega^4+f\omega^3=0$, $f\omega^2+d\omega^4+g\omega^3=0$.

因为 $\omega^3=1$，所以这些式子又可写成

$$d+\beta\omega+\alpha\omega^2=0, \quad ①$$
$$e+\gamma\omega+\beta\omega^2=0, \quad ②$$
$$f+\alpha\omega+\gamma\omega^2=0, \quad ③$$
$$g+d\omega+f\omega^2=0. \quad ④$$

如果 $\triangle DBA$, $\triangle ECB$, $\triangle FAC$, $\triangle GDF$ 都是左旋转的正三角形，从 **3903** 可直接得 ①、②、③、④.

从 ④，得 $g=-d\omega-f\omega^2$,

从 ①，得 $-d=\beta\omega+\alpha\omega^2$,

从 ③，得 $-f=\alpha\omega+\gamma\omega^2$.

$$\therefore\ g=(\beta\omega+\alpha\omega^2)\omega+(\alpha\omega+\gamma\omega^2)\omega^2$$
$$=\beta\omega^2+\alpha\omega^3+\alpha\omega^3+\gamma\omega^4$$
$$=2\alpha+\gamma\omega+\beta\omega^2. \quad ⑤$$

从 ②，得

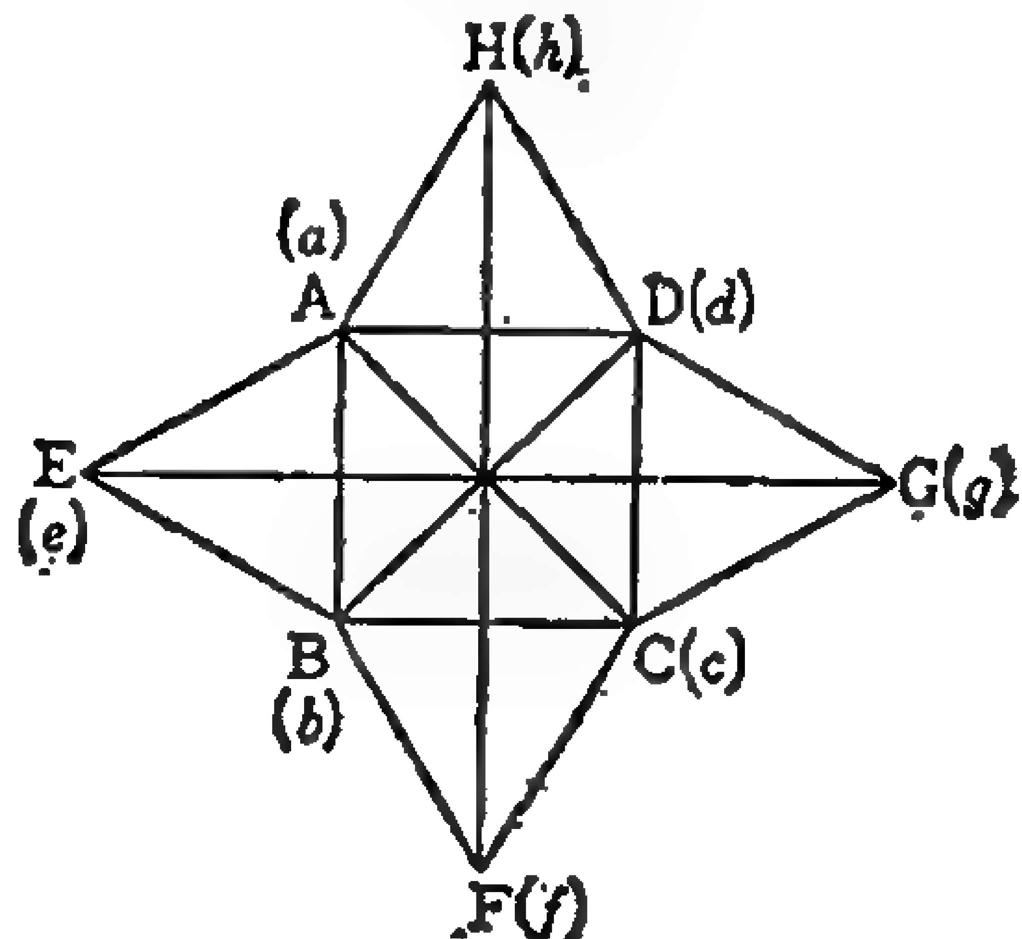
$$e=-\gamma\omega-\beta\omega^2. \quad ⑥$$

⑤+⑥，$g+e=2\alpha$,

$$\therefore\ \alpha=\frac{g+e}{2}. \quad ⑦$$

由此可知，A 是 GE 的中点，因而 G、A、E 共线，且 $GA=AE$.

3906. 在四边形 $ABCD$ 的外侧，以四边形的各边为一边作正三角形 ABE, BCF, CDG, DAH. 如果 $EFGH$ 为正方形，则原来的四边形 $ABCD$ 也是正方形.



解 设四边形 $ABCD$ 所在的平面为复平面，各顶点表示的复数分别是: A 为 a, B 为 b, C 为 c, D 为 d, E 为 e, F 为 f, G 为 g, H 为 h. 因为 $\triangle EBA$、$\triangle FCB$、$\triangle GDC$、$\triangle HAD$ 都是左旋转的正三角形，所以

$$e+b\omega+a\omega^2=0, \quad ①$$
$$f+c\omega+b\omega^2=0, \quad ②$$
$$g+d\omega+c\omega^2=0, \quad ③$$
$$h+a\omega+d\omega^2=0. \quad ④$$

$$\therefore\ e+g=-b\omega-a\omega^2-d\omega-c\omega^2,$$
$$f+h=-c\omega-b\omega^2-a\omega-d\omega^2.$$

设 $EFGH$ 是正方形，则 EG 的中点和 FH 的中点是同一个点.

$$\therefore\ \frac{e+g}{2}=\frac{f+h}{2},$$

即 $e+g=f+h$.

从而得出，

$$-b\omega-a\omega^2-d\omega-c\omega^2$$
$$=-c\omega-b\omega^2-a\omega-d\omega^2,$$

即 $(a+c)(\omega-\omega^2)=(b+d)(\omega-\omega^2)$.

因为 $\omega-\omega^2\neq0$，所以 $a+c=b+d$.

$$\therefore\ \frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2}.$$

这就是说，AC 的中点和 BD 的中点是同一个点，所以 $ABCD$ 是平行四边形.

因为 $EFGH$ 是正方形，$EG=FH$，且 $EG\perp FH$,

$$\therefore\ g-e=(h-f)i.$$

而

$$g-e=(-d\omega-c\omega^2)-(-b\omega-a\omega^2)$$
$$=a\omega^2+b\omega-c\omega^2-d\omega,$$
$$h-f=(-a\omega-d\omega^2)-(-c\omega-b\omega^2)$$
$$=-a\omega+b\omega^2+c\omega-d\omega^2,$$
$$\therefore\ a\omega^2+b\omega-c\omega^2-d\omega$$
$$=(-a\omega+b\omega^2+c\omega-d\omega^2)i,$$

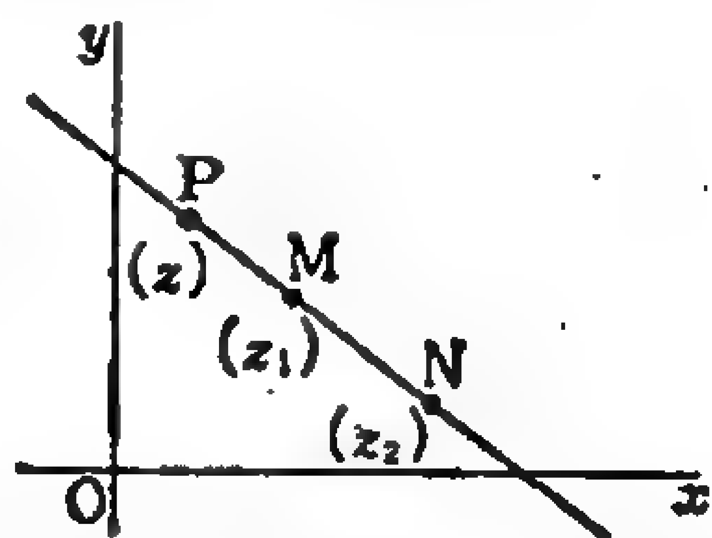
即 $(a-c)(\omega^2+\omega i)=(b-d)(\omega^2 i-\omega)$.

$$\therefore\ (c-a)(\omega^2+\omega i)=(d-b)(\omega^2 i+\omega i^2),$$
$$c-a=(d-b)i.$$

由此可得，$AC=BD$，且 $AC\perp BD$,

所以，平行四边形 $ABCD$ 是正方形.

3907. 在复平面上有两定点 M、N，设 M 表示的复数为 z_1，N 表示的复数为 z_2，在连结两点 M、N 的直线上，任取一点 P，P 表示的复数为 z，证明下列关系成立:



$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}.$$

解 z、z_1、z_2 在一条直线上，所以

$$\arg\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=0 \quad 或 \quad \pm\pi.$$

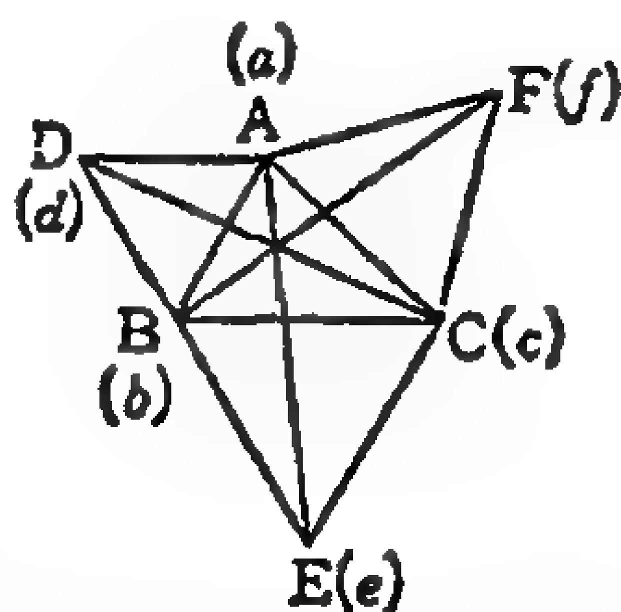
由此可知，$\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ 是实数。

$$\therefore \quad \frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\left(\overline{\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}\right)=\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}.$$

注 连结表示复数 z_1、z_2 的两点的直线方程是

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}.$$

3908. 以三角形各边为一边，在 $\triangle ABC$ 的外侧分别作正三角形 ABD、BCE、CAF，证明三直线 AE、BF、CD 共点。



解 设以 $\triangle ABC$ 所在的平面为复平面，各顶点表示的复数是：A 为 a，B 为 b，C 为 c，D 为 d，E 为 e，F 为 f。$\triangle DBA$，$\triangle ECB$，$\triangle FAC$ 都是左旋转的正三角形，则

$$d+b\omega+a\omega^2=0, \quad ①$$
$$e+c\omega+b\omega^2=0, \quad ②$$
$$f+a\omega+c\omega^2=0. \quad ③$$

又直线 AE 的方程为 $\frac{z-a}{e-a}=\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{e}-\bar{a}}$.

$$\because \quad e-a=(-c\omega-b\omega^2)-a$$
$$=-a-b\omega^2-c\omega,$$
$$\therefore \quad \bar{e}-\bar{a}=-\bar{a}-\bar{b}\omega^2-\bar{c}\omega$$
$$=-\bar{a}-\bar{b}\omega-\bar{c}\omega^2.$$

由此可得，

$$\frac{z-a}{-a-b\omega^2-c\omega}=\frac{\bar{z}-\bar{a}}{-\bar{a}-\bar{b}\omega-\bar{c}\omega^2},$$

即
$$\frac{z-a}{a+b\omega^2+c\omega}=\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{a}+\bar{b}\omega+\bar{c}\omega^2}.$$

$$\therefore \quad (z-a)(\bar{a}+\bar{b}\omega+\bar{c}\omega^2)$$
$$=(\bar{z}-\bar{a})(a+b\omega^2+c\omega).$$

$$z(\bar{a}+\bar{b}\omega+\bar{c}\omega^2)-\bar{z}(a+b\omega^2+c\omega)$$
$$-a(\bar{a}+\bar{b}\omega+\bar{c}\omega^2)+\bar{a}(a+b\omega^2+c\omega)$$
$$=0.$$

$$\therefore \quad z(\bar{a}+\bar{b}\omega+\bar{c}\omega^2)-\bar{z}(a+b\omega^2+c\omega)$$
$$+(\bar{a}b-a\bar{c})\omega^2+(\bar{a}c-a\bar{b})\omega$$
$$=0. \quad ④$$

同理可得，直线 BF 的方程为

$$\frac{z-b}{f-b}=\frac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{f}-\bar{b}}.$$

$$\therefore \quad \frac{z-b}{b+c\omega^2+a\omega}=\frac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{b}+\bar{c}\omega+\bar{a}\omega^2}.$$

$$\therefore \quad z(\bar{b}+\bar{c}\omega+\bar{a}\omega^2)-\bar{z}(b+c\omega^2+a\omega)$$
$$+(\bar{b}c-b\bar{a})\omega^2+(\bar{b}a-b\bar{c})\omega$$
$$=0. \quad ⑤$$

直线 CD 的方程为

$$\frac{z-c}{d-c}=\frac{\bar{z}-\bar{c}}{\bar{d}-\bar{c}}.$$

$$\therefore \quad z(\bar{c}+\bar{a}\omega+\bar{b}\omega^2)-\bar{z}(c+a\omega^2+b\omega)$$
$$+(\bar{c}a-c\bar{b})\omega^2+(\bar{c}b-c\bar{a})\omega$$
$$=0. \quad ⑥$$

设④、⑤、⑥的左边分别为 $f_1(z)$、$f_2(z)$、$f_3(z)$，④、⑤、⑥就是直线 AE、BF、CD 的方程 $f_1(z)=0$，$f_2(z)=0$，$f_3(z)=0$。

因为

$$f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)$$
$$=z(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\omega^2+\omega+1)$$
$$-\bar{z}(a+b+c)(\omega^2+\omega+1),$$

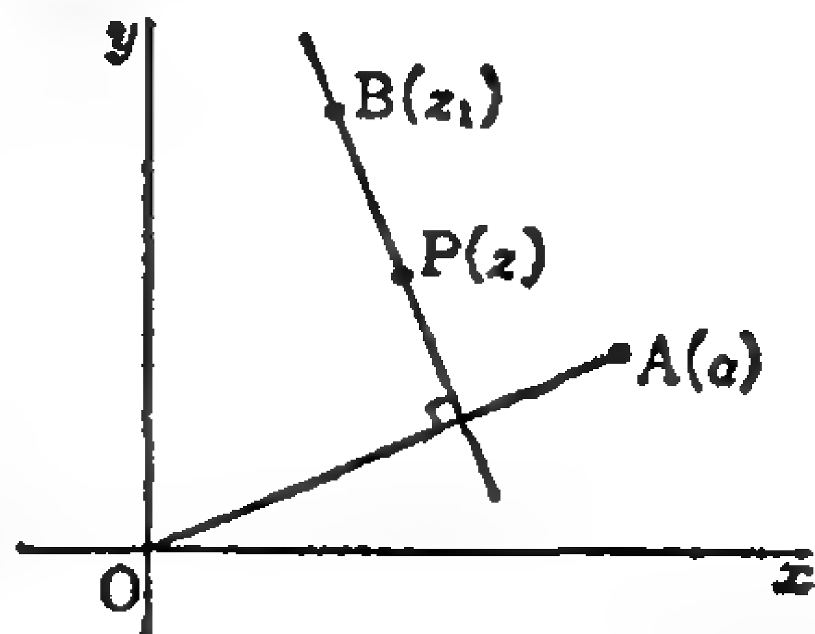
且 $\omega^2+\omega+1=0$，所以

$$f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)=0.$$

这个等式为恒等式（z 无论取什么值等式总成立）。由此可知，对于使 $f_1(z)=0$ 及 $f_2(z)=0$ 成立的 z，$f_3(z)=0$ 也成立。所以三直线 AE，BF，CD 共点。

3909. 证明在复平面上，若一直线垂直于原点 O 和表示定复数 α 的点 A 的连结线 OA，且经过表示定复数 z_1 的定点 B，则它的方程为

$$\frac{z-z_1}{\alpha}+\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{\alpha}}=0.$$



解 设经过定点 $B(z_1)$ 与定直线 OA 垂直的直线上任取一点 P，P 表示的复数为 z，则 $BP\perp OA$。

$$\therefore \quad z-z_1=k\alpha i, \quad (k 是实数)$$

即
$$\frac{z-z_1}{\alpha i}=k, \quad (实数)$$

从而得出，
$$\frac{z-z_1}{\alpha i}=\left(\overline{\frac{z-z_1}{\alpha i}}\right)=\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{\alpha}(-i)},$$

即
$$\frac{z-z_1}{\alpha i}=\frac{\bar z-\bar z_1}{-\bar\alpha i}.$$
$$\therefore\quad \frac{z-z_1}{\alpha}=\frac{\bar z-\bar z_1}{-\bar\alpha},$$
即
$$\frac{z-z_1}{\alpha}+\frac{\bar z-\bar z_1}{\bar\alpha}=0.$$

3910. 在复平面上，以原点为圆心作单位圆．在该圆上取三点 A、B、C，它们表示的复数分别为 α、β、γ．证明 $\triangle ABC$ 的垂心 H 所表示的复数是 $\alpha+\beta+\gamma$.

解　从原点 O 引 OL，使 $OL \underline{\parallel} BC$，$L$ 是定点，L 表示的复数为 $\gamma-\beta$．因为从 A 引 BC 的垂线 AD 的方程，就是经过定点 A 且与直线 OL 垂直的直线的方程．设 AD 上的任意一点表示的复数为 z，则由上题知 AD 的方程为
$$\frac{z-\alpha}{\gamma-\beta}+\frac{\bar z-\bar\alpha}{\bar\gamma-\bar\beta}=0.$$
但是，
$$\frac{\bar z-\bar\alpha}{\bar\gamma-\bar\beta}=\frac{\alpha\beta\gamma(\bar z-\bar\alpha)}{\alpha\beta\gamma(\bar\gamma-\bar\beta)}=\frac{\alpha\beta\gamma\bar z-\beta\gamma}{\alpha\beta-\alpha\gamma}=\frac{\alpha\beta\gamma\bar z-\beta\gamma}{\alpha(\beta-\gamma)},$$
$$(\because\quad \alpha\bar\alpha=\beta\bar\beta=\gamma\bar\gamma=1)$$
$$\therefore\quad \frac{z-\alpha}{\gamma-\beta}+\frac{\alpha\beta\gamma\bar z-\beta\gamma}{\alpha(\beta-\gamma)}=0,$$
$$z-\alpha-\frac{\alpha\beta\gamma\bar z-\beta\gamma}{\alpha}=0.$$
即
$$\alpha z-\alpha^2-\alpha\beta\gamma\bar z+\beta\gamma=0.\qquad ①$$

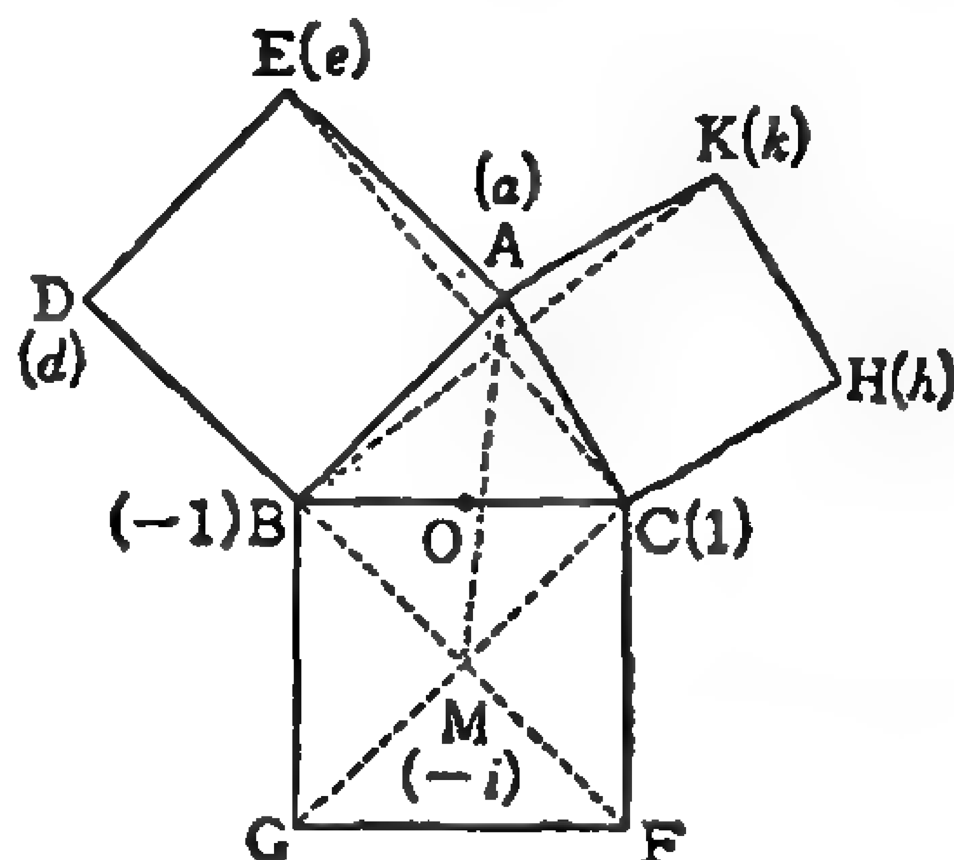
同理，从原点 O 引 OM，使 $OM \underline{\parallel} CA$，$M$ 是定点，M 表示的复数为 $\alpha-\gamma$．因为过 B 作与 CA 的垂直的直线 BE 的方程，就是过定点 B，并与定直线 OM 垂直的直线的方程．设 BE 上任意一点表示的复数为 z，则 BE 的方程为
$$\frac{z-\beta}{\alpha-\gamma}+\frac{\bar z-\bar\beta}{\bar\alpha-\bar\gamma}=0.$$
完全类似于 ① 的简化，可得
$$\beta z-\beta^2-\alpha\beta\gamma\bar z+\gamma\alpha=0.\qquad ②$$
直线 ①、② 的交点就是垂心 H.

由 ①－②，得
$$(\alpha-\beta)z-(\alpha^2-\beta^2)+\gamma(\beta-\alpha)=0.$$
$$\therefore\quad (\alpha-\beta)(z-\alpha-\beta-\gamma)=0.$$
因为 $\alpha-\beta\neq 0$，所以 $z-\alpha-\beta-\gamma=0$,
$$\therefore\quad z=\alpha+\beta+\gamma.\qquad ③$$
这就是说，垂心 H 表示的复数是 $\alpha+\beta+\gamma$.

注　设 $\triangle ABC$ 的重心为 G，则 G 表示的复数是 $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$．今知垂心 H 表示的复数是 $\alpha+\beta+\gamma$，所以 $\triangle ABC$ 的外心 O、重心 G、垂心 H 在一直线上，并 $OG:OH=1:3$.

3911. 在 $\triangle ABC$ 的外侧，以其各边为一边分别作正方形 $ABDE$、$BCFG$、$ACHK$，设正方形 $BCFG$ 的中心为 M，证明三直线 BK、CE、AM 共点．

解　设 $\triangle ABC$ 所在的平面为复平面，BC 的中点 O 为原点，BC 为实轴，B 表示的复数为 -1，C 表示的复数为 1，则 M 表示的复数为 $-i$．设 A、D、E、H、K 表示的复数分别为 a、d、e、h、k．把正方形 $ABDE$ 向实轴方向平行移动 1，则 A 移到 A'，B 移到 B'，D 移到 D'，E 移到 E'，于是 $B'A' \underline{\parallel} BA$，$B'D' \underline{\parallel} BD$，$B'D'\perp B'A'$．由于这时 B' 与原点 O 重合，所以 $OA' \underline{\parallel} BA$，$OD' \underline{\parallel} BD$，$OD'\perp OA'$．故设 A'、D'、E' 表示的复数分别为 a'、d'、e'，则
$$a'=a+1,\quad d'=(a+1)i.$$
$$\therefore\quad e'=a'+d'=a+1+(a+1)i.$$
从而得出，
$$e=e'-1=a+(a+1)i=(1+i)a+i.$$



其次，把正方形 $ACHK$ 在实轴方向平行移动 -1，A 移到 A''，C 移到 C''，H 移到 H''，K 移到 K''，所以 $C''A'' \underline{\parallel} CA$，$C''H'' \underline{\parallel} CH$，$C''H''\perp C''A''$．由于这时 C'' 与原点 O 重合，因而 $OA'' \underline{\parallel} CA$，$OH'' \underline{\parallel} CH$，$OH''\perp OA''$．故设 A''、H''、K'' 表示的复数分别为 a''、h''、k''，则
$$a''=a-1,$$

$h''=(a-1)(-i)=-(a-1)i.$

$\therefore\ k''=a''+h''=a-1-(a-1)i.$

从而得出，

$k=k''+1=a-(a-1)i=(1-i)a+i.$

于是得直线 BK 的方程(由问题 **3907**) 为

$$\frac{z-(-1)}{(1-i)a+i-(-1)}=\frac{\bar{z}-(-1)}{(1+i)\bar{a}-i-(-1)},$$

即

$$\frac{z+1}{(1-i)a+i(1-i)}=\frac{\bar{z}+1}{i(1-i)\bar{a}+1-i},$$

$$\frac{z+1}{(1-i)(a+i)}=\frac{\bar{z}+1}{(1-i)(\bar{a}i+1)},$$

$$\frac{z+1}{a+i}=\frac{\bar{z}+1}{\bar{a}i+1}.$$

$\therefore\ (z+1)(\bar{a}i+1)-(\bar{z}+1)(a+i)=0,$

$z(\bar{a}i+1)-\bar{z}(a+i)+\bar{a}i+1-a-i=0.$ ①

同样，直线 CE 的方程为

$$\frac{z-1}{(1+i)a+i-1}=\frac{\bar{z}-1}{(1-i)\bar{a}-i-1},$$

即

$$\frac{z-1}{(1+i)a+i(1+i)}=\frac{\bar{z}-1}{-i(1+i)\bar{a}-(1+i)},$$

$$\frac{z-1}{(1+i)(a+i)}=\frac{\bar{z}-1}{-(1+i)(\bar{a}i+1)},$$

$$\frac{z-1}{a+i}=-\frac{\bar{z}-1}{\bar{a}i+1}.$$

$\therefore\ (z-1)(\bar{a}i+1)+(\bar{z}-1)(a+i)=0,$

$z(\bar{a}i+1)+\bar{z}(a+i)-(\bar{a}i+1)-(a+i)=0.$ ②

由 ①－②，得

$$2\bar{z}(a+i)-2(\bar{a}i+1)=0,$$

即 $\bar{z}(a+i)=\bar{a}i+1.$

$$\therefore\ z=\frac{\bar{a}i+1}{a+i},$$

或 $$z=\frac{1-\bar{a}i}{\bar{a}-i}.$$

因此，两直线 BK、CE 的交点表示的复数为 $\dfrac{1-ai}{\bar{a}-i}$.

又，直线 AM 的方程为

$$\frac{z-a}{-i-a}=\frac{\bar{z}-\bar{a}}{i-\bar{a}}.\qquad ③$$

以 $z=\dfrac{1-ai}{\bar{a}-i}$，$\bar{z}=\dfrac{\bar{a}i+1}{a+i}$ 代入，则

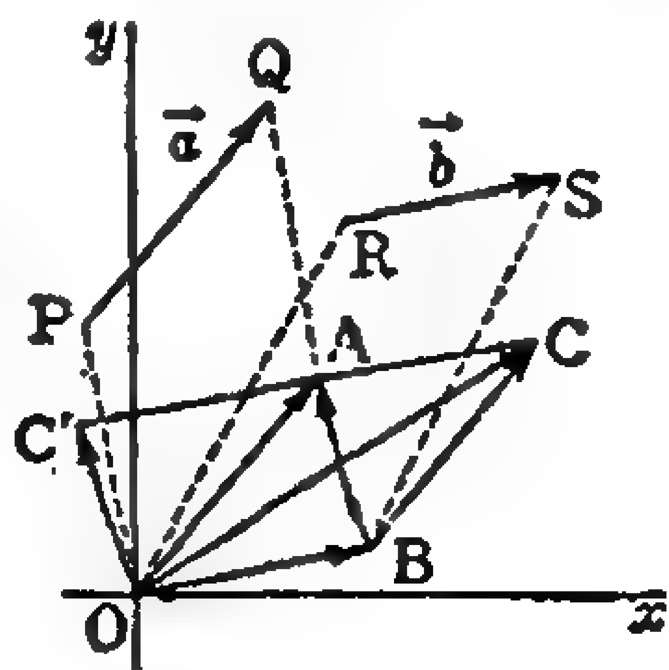
$$\text{左端}=\frac{z-a}{-i-a}=\frac{\dfrac{1-ai}{\bar{a}-i}-a}{-i-a}=\frac{1-ai-a(\bar{a}-i)}{(-i-a)(\bar{a}-i)}=\frac{1-ai-a\bar{a}+ai}{-(a+i)(\bar{a}-i)}=\frac{a\bar{a}-1}{(a+i)(\bar{a}-i)},$$

$$\text{右端}=\frac{\bar{z}-\bar{a}}{i-\bar{a}}=\frac{\dfrac{\bar{a}i+1}{a+i}-\bar{a}}{i-\bar{a}}=\frac{\bar{a}i+1-\bar{a}(a+i)}{(a+i)(i-\bar{a})}=\frac{\bar{a}i+1-a\bar{a}-\bar{a}i}{(a+i)[-(\bar{a}-i)]}=\frac{a\bar{a}-1}{(a+i)(\bar{a}-i)}.$$

由此可知，$z=\dfrac{1-ai}{\bar{a}-i}\left(\bar{z}=\dfrac{\bar{a}i+1}{a+i}\right)$适合于③。这就是说，两直线 BK、CE 的交点在直线 AM 上。因而 BK、CE、AM 三直线共点。

2. 应用矢量的解法

3912. 说明在同一平面上的两个矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的和及差的几何表示方法。



解　设所给的矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，如图所示，即 $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$，$\vec{b}=\overrightarrow{RS}$. 把 PQ，RS 分别平行移动，使 P、R 和原点 O 重合，则 $PQ \mathrel{\underline{\parallel}} OA$，$RS \mathrel{\underline{\parallel}} OB$. 以 OA、OB 为两邻边作平行四边形 $OACB$，以 OA 为一对角线，OB 为一边作平行四边形 $OBAC'$，则

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC},\ \vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{BA}.$$

3913. 说明在同一平面上的两矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的内积的计算方法。

解　$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的内积用 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 或 $(\vec{a},\vec{b})$ 表示，并把它定义为

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta.$$

其中 $|\vec{a}|$ 表示不考虑 $\vec{a}$ 的方向，仅考虑其长度。$|\vec{b}|$ 表示 $\vec{b}$ 的长度。

从一点 O 引等于 $\vec{a}$ 的矢量 $\overrightarrow{OA}$，从同一点

O 引等于 $\vec{b}$ 的矢量 $\overrightarrow{OB}$，则 OA、OB 的夹角叫做两个矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夹角，用 θ 表示。如设 $\angle AOB=\theta$，则 $\angle BOA=-\theta$。如设 $\angle BOA=\theta$，则 $\angle AOB=-\theta$。但是 $\cos(-\theta)=\cos\theta$，所以无论 $\theta=\angle AOB$，还是 $\theta=\angle BOA$，$\cos\theta$ 的值不变。

其次，设 $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}=\overrightarrow{OA}$（$O$ 为原点），点 P 的坐标为 $(p_1,\ p_2)$，点 Q 的坐标为 $(q_1,\ q_2)$，点 A 的坐标为 $(a_1,\ a_2)$，则

$$q_1-p_1=a_1,\quad q_2-p_2=a_2.$$

所以，$\vec{a}$ 可用 $(q_1-p_1,\ q_2-p_2)$，即 $(a_1,\ a_2)$ 表示，我们把它叫做为 $\vec{a}$ 的分量表示。

同样，设 $\overrightarrow{RS}=\vec{b}=\overrightarrow{OB}$（$O$ 为原点），点 R 的坐标为 $(r_1,\ r_2)$，点 S 的坐标为 $(s_1,\ s_2)$，点 B 的坐标为 $(b_1,\ b_2)$，则 $s_1-r_1=b_1$，$s_2-r_2=b_2$，所以 $\vec{b}$ 的分量表示为

$$(s_1-r_1,\ s_2-r_2),\quad 即\quad (b_1,\ b_2).$$

又由余弦定理，得

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\theta,$$

即

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}\cdot\cos\theta.$$

$$\therefore\quad |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2.$$

由此可得，$(\vec{a},\ \vec{b})=a_1b_1+a_2b_2$。

这就是说，如果把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的内积用分量表示，则

$$(\vec{a},\ \vec{b})=(a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2)=a_1b_1+a_2b_2.$$

注　两个矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 垂直，其夹角 θ 为 $90°$，则 $\cos\theta=0$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。反过来，如 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $\theta=\pm90°$。所以 $\vec{a}\perp\vec{b}$。

3914. 已知两矢量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$，在直线 AB 上取任意点 P，则 $\overrightarrow{OP}$ 可表示为

$$\overrightarrow{OP}=t\cdot\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}.$$

解　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$，

$$\because\quad \overrightarrow{BP}=t\cdot\overrightarrow{BA}=t(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}),\quad (问题 3912),$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+t(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=t\cdot\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}.$$

注　如果 P 为 AB 的中点，那么

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}).$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$

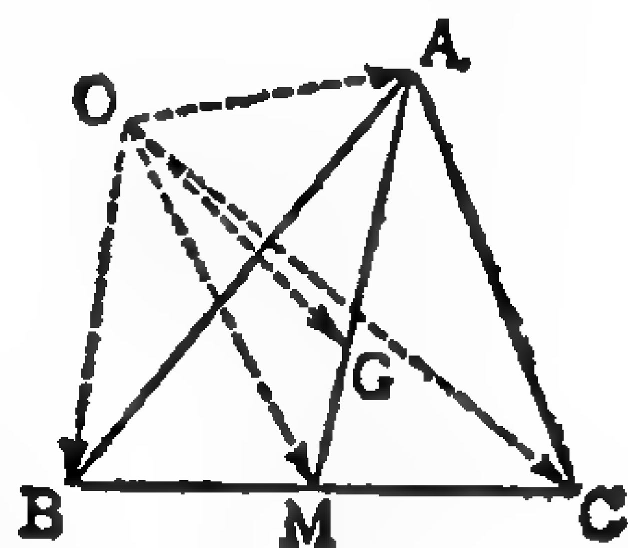
如果 P 是把 AB 内分为 $m:n$ 的点，那么

$$\overrightarrow{BP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}=\frac{n}{m+n}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}).$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\left(1-\frac{n}{m+n}\right)\overrightarrow{OB}=\frac{n\cdot\overrightarrow{OA}+m\cdot\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

3915. 已知 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，设 $\triangle ABC$ 的重心为 G，则

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$



解　设 $\triangle ABC$ 的一边 BC 的中点为 M，则把 AM 内分为 $2:1$ 的点，就是 $\triangle ABC$ 的重心 G，由上题的注可知

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1\cdot\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OM}}{2+1}=\frac{\vec{a}+2\left[\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right]}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

3916. 设把 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 内分为 $m:n$ 的点分别为 A'、B'、C'，证明 $\triangle ABC$ 的重心 G 和 $\triangle A'B'C'$ 的重心 G' 是同一点。

解　设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\triangle ABC$ 的重心为 G，由上题知

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}),$$

又根据问题 **3914** 的注，得

$$\overrightarrow{OA'}=\frac{n\cdot\overrightarrow{OB}+m\cdot\overrightarrow{OC}}{m+n}=\frac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n},$$

$$\overrightarrow{OB'}=\frac{n\cdot\overrightarrow{OC}+m\cdot\overrightarrow{OA}}{m+n}=\frac{n\vec{c}+m\vec{a}}{m+n},$$

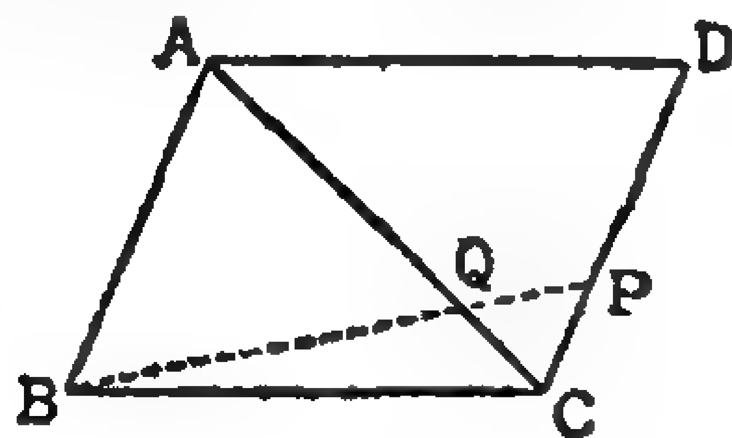
$$\overrightarrow{OC'}=\frac{n\cdot\overrightarrow{OA}+m\cdot\overrightarrow{OB}}{m+n}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},$$

所以，$\triangle A'B'C'$ 的重心 G' 为

$$\overrightarrow{OG'}=\frac{1}{3}\left(\frac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}+\frac{n\vec{c}+m\vec{a}}{m+n}+\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}\right)$$
$$=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG'}.$$

因而 G 和 G' 是同一点。

3917. 若在 □$ABCD$ 的边 CD 上取点 P，使 $CP:PD=1:2$，在对角线 CA 上取点 Q，使 $CQ:QA=1:3$，则三点 P、Q、B 共线。



解　设 $\overrightarrow{CP}=\vec{\alpha}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{\beta}$，$CP:PD=1:2$，则

$$CP:CD=1:3.$$

从而得出，　$\overrightarrow{CP}:\overrightarrow{CD}=1:3.$

$$\therefore\quad \overrightarrow{CD}=3\cdot\overrightarrow{CP}=3\vec{\alpha}.$$

因为 $ABCD$ 是平行四边形，所以

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}.$$

由 $CQ:QA=1:3$，可知 $CQ:CA=1:4$。

从而得出，　$\overrightarrow{CQ}:\overrightarrow{CA}=1:4$，

即　$4\cdot\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CA}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}.$

$$\therefore\quad \overrightarrow{CQ}=\frac{3}{4}\vec{\alpha}+\frac{1}{4}\vec{\beta}.$$

因此

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{CP}=\left(\frac{3}{4}\vec{\alpha}+\frac{1}{4}\vec{\beta}\right)-\vec{\alpha}$$
$$=\frac{1}{4}\vec{\beta}-\frac{1}{4}\vec{\alpha}=\frac{1}{4}(\vec{\beta}-\vec{\alpha}),$$

即　$4\cdot\overrightarrow{PQ}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}.$

又　$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}.$

$$\therefore\quad \overrightarrow{PB}=4\cdot\overrightarrow{PQ}.$$

由此可得，三点 P、Q、B 在一直线上。

3918. 在 □$ABCD$ 的边 BC、CD 上分别取点 E、F，使 $BE:EC=1:3$，$CF:FD=2:1$。设 BF 的中点为 M，证明三点 D、M、E 在一直线上，并且 $DM:ME=2:1$。

解　设 $\overrightarrow{BA}=\vec{\alpha}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{\beta}$，则

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}.$$

因为 $BE:EC=1:3$，所以 $BE:BC=1:4$。

从而得出，　$\overrightarrow{BE}:\overrightarrow{BC}=1:4$，

即　$4\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}=\vec{\beta}.$

$$\therefore\quad \overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\vec{\beta}.$$

又 $CF:FD=2:1$，所以 $CF:CD=2:3$。

从而得出，　$3\cdot\overrightarrow{CF}=2\cdot\overrightarrow{CD}=2\cdot\overrightarrow{BA}$，

即　$\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\vec{\alpha}$，

因此，　$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\vec{\beta}+\frac{2}{3}\vec{\alpha}.$

因为 M 是 BF 的中点，所以

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\left(\vec{\beta}+\frac{2}{3}\vec{\alpha}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\vec{\beta}+\frac{1}{3}\vec{\alpha}.$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{DM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BD}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\vec{\beta}+\frac{1}{3}\vec{\alpha}\right)-(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$$
$$=-\frac{2}{3}\vec{\alpha}-\frac{1}{2}\vec{\beta}=-\frac{2}{3}\left(\vec{\alpha}+\frac{3}{4}\vec{\beta}\right).$$

又　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}\vec{\beta}-(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

$$=-\vec{\alpha}-\frac{3}{4}\vec{\beta}=-\left(\vec{\alpha}+\frac{3}{4}\vec{\beta}\right).$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{DM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DE}.$$

因此，三点 D、M、E 在一直线上，且

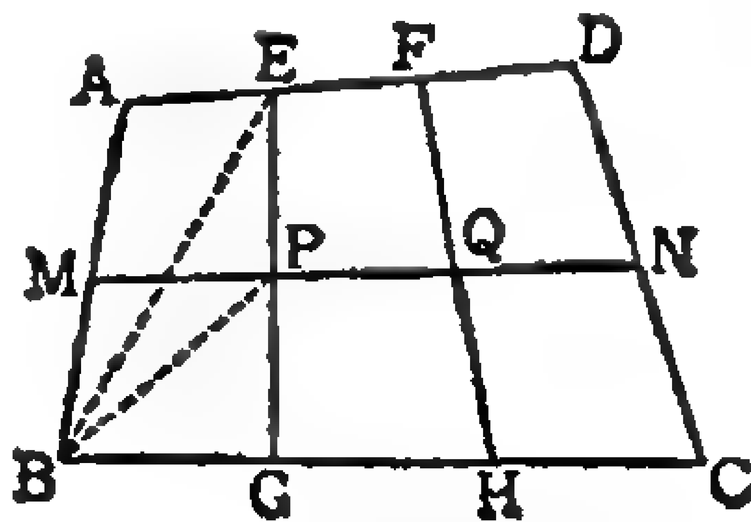
$$\overrightarrow{DM}:\overrightarrow{DE}=2:3.$$

$\because$ $\overrightarrow{DM}:\overrightarrow{DE}=2:3$，$\therefore$ $DM:DE=2:3$。

所以　$DM:(DE-DM)=2:(3-2)$，

即　$DM:ME=2:1.$

3919. 在四边形 $ABCD$ 中，设 AD 的三等分点从 A 向 D 依次为 E、F，BC 的三等分点从 B 向 C 依次为 G、H，AB、CD 的中点分别为 M、N，证明线段 MN 被线段 EG，FH 三等分。



解　设把 MN 三等分的点，从 M 向 N 依次为 P、Q，并设 $\overrightarrow{BA}=\vec{\alpha}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{\beta}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{\gamma}$，则

$$\overrightarrow{BM}=\frac{\overrightarrow{BA}}{2}=\frac{\vec{\alpha}}{2},$$

$$\overrightarrow{BN}=\frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}}{2}=\frac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{2},$$

$$\overrightarrow{BE}=\frac{2\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}}{3}=\frac{2\vec{\alpha}+\vec{\gamma}}{3},$$

$$\overrightarrow{BF}=\frac{\overrightarrow{BA}+2\cdot\overrightarrow{BD}}{3}=\frac{\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}}{3},$$

$$\overrightarrow{BG}=\frac{\overrightarrow{BC}}{3}=\frac{\vec{\beta}}{3},$$

$$\overrightarrow{BH}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{2\vec{\beta}}{3}.$$

所以

$$\overrightarrow{BP}=\frac{2\cdot\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}}{3}=\frac{2\cdot\frac{\vec{\alpha}}{2}+\frac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{2}}{3}=\frac{2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{6},$$

$$\overrightarrow{BQ}=\frac{\overrightarrow{BM}+2\cdot\overrightarrow{BN}}{3}=\frac{\frac{\vec{\alpha}}{2}+2\cdot\frac{\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{2}}{3}=\frac{\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+2\vec{\gamma}}{6}.$$

从而得出,

$$\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BG}=\frac{2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{6}-\frac{\vec{\beta}}{3}=\frac{2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{6},$$

$$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BG}=\frac{2\vec{\alpha}+\vec{\gamma}}{3}-\frac{\vec{\beta}}{3}=\frac{2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{3}=2\cdot\frac{2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}}{6}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{GE}=2\cdot\overrightarrow{GP}.$$

由此可知，三点 G、P、E 在一直线上，即 EG 经过 MN 的三等分点 P。

又

$$\overrightarrow{HQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BH}=\frac{\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+2\vec{\gamma}}{6}-\frac{2\vec{\beta}}{3}=\frac{\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+2\vec{\gamma}}{6},$$

$$\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BH}=\frac{\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}}{3}-\frac{2\vec{\beta}}{3}=\frac{\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+2\vec{\gamma}}{3}=2\cdot\frac{\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+2\vec{\gamma}}{6},$$

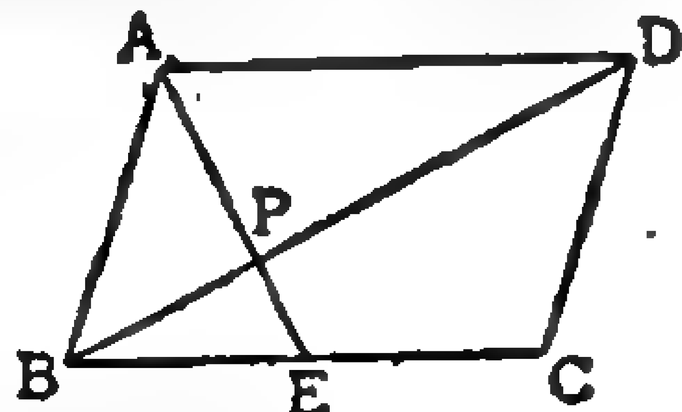
$$\therefore\quad \overrightarrow{HF}=2\cdot\overrightarrow{HQ}.$$

由此可知，三点 H、Q、F 在一直线上，即 FH 经过 MN 的三等分点 Q。

综上所述，可知线段 MN 被 EG、FH 三等分。

注　线段 EG, FH 被线段 MN 二等分.

3920. 设平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 的中点为 E，用矢量法求连结 A、E 的直线 AE，把对角线 BD 所分成的比。



解　设 $\overrightarrow{BA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{\beta}$, 则 $\overrightarrow{BD}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

$$\overrightarrow{BE}=\frac{\vec{\beta}}{2}.$$

设 AE 和 BD 的交点为 P，则 P 是直线 AE 上的点。由问题 **3914** 可知

$$\overrightarrow{BP}=t\cdot\overrightarrow{BA}+(1-t)\overrightarrow{BE}=t\vec{\alpha}+(1-t)\cdot\frac{\vec{\beta}}{2}. \quad ①$$

又, P 是 BD 上的点, 设 $\overrightarrow{BP}=m\cdot\overrightarrow{BD}$,

即
$$\overrightarrow{BP}=m(\vec{\alpha}+\vec{\beta}). \quad ②$$

由 ①、②，得

$$t\vec{\alpha}+(1-t)\cdot\frac{\vec{\beta}}{2}=m(\vec{\alpha}+\vec{\beta}).$$

$$\therefore\quad (t-m)\vec{\alpha}=\left(m-\frac{1-t}{2}\right)\vec{\beta}. \quad ③$$

因为 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 是方向不同的矢量, 所以

$$\begin{cases} t-m=0, & ④\\ m-\dfrac{1-t}{2}=0. & ⑤\end{cases}$$

从 ④，得 $t=m$，把它代入 ⑤，得

$$m-\frac{1-m}{2}=0,$$

$$\therefore\quad m=\frac{1}{3}. \quad ⑥$$

把 ⑥ 代入 ②，得

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.$$

$$\therefore\quad BP:BD=1:3,$$

从而得出,

$$BP:PD=1:2. \quad ⑦$$

因此, AE 把 BD 分成 1:2.

3921. 设经过平行四边形 $ABCD$ 内的一点 P，作边 BC 的平行线和 AB、DC 的交点分别为 E、F，过 P 又作 AB 的平行线和

AD、BC 的交点分别为 G、H，AH 和 CE 的交点为 Q，则三点 D、P、Q 在一直线上。

解　设 $\overrightarrow{BA}=\vec{\alpha}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{\beta}$，则

$$\overrightarrow{BE}=m\vec{\alpha},\ \overrightarrow{BH}=n\vec{\beta}.$$

因为 $ABCD$ 是平行四边形，所以

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}.$$

又 $EBHP$ 也是平行四边形，所以

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BH}=m\vec{\alpha}+n\vec{\beta}.$$

因为 Q 是直线 AH 上的点，所以由问题 **3914** 可知

$$\overrightarrow{BQ}=t_1\vec{\alpha}+(1-t_1)(n\vec{\beta}).\qquad ①$$

同理可得，Q 是直线 EC 上的点，所以

$$\overrightarrow{BQ}=t_2(m\vec{\alpha})+(1-t_2)\vec{\beta}.\qquad ②$$

由①、②，得

$$t_1\vec{\alpha}+(1-t_1)(n\vec{\beta})=t_2(m\vec{\alpha})+(1-t_2)\vec{\beta}.$$

$$\therefore\quad (t_1-mt_2)\vec{\alpha}=[1-t_2-n(1-t_1)]\vec{\beta}.$$

因为 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 是方向不同的矢量，所以

$$\begin{cases} t_1-mt_2=0, & ③\\ 1-t_2-n(1-t_1)=0. & ④\end{cases}$$

从③，得　$t_1=mt_2$.　③′

把③′代入④，得 $1-t_2-n(1-mt_2)=0$.

$$\therefore\quad t_2=\frac{1-n}{1-mn}.\qquad ⑤$$

把⑤代入②，得

$$\overrightarrow{BQ}=\frac{1-n}{1-mn}(m\vec{\alpha})+\left(1-\frac{1-n}{1-mn}\right)\vec{\beta}$$

$$=\frac{m-mn}{1-mn}\vec{\alpha}+\frac{n-mn}{1-mn}\vec{\beta}$$

$$=\frac{1}{1-mn}[(m-mn)\vec{\alpha}+(n-mn)\vec{\beta}]$$

$$=\frac{1}{1-mn}[m\vec{\alpha}+n\vec{\beta}-mn(\vec{\alpha}+\vec{\beta})]$$

$$=\frac{1}{1-mn}(\overrightarrow{BP}-mn\ \overrightarrow{BD}).$$

$$\therefore\quad (1-mn)\cdot\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BP}-mn\cdot\overrightarrow{BD},$$

从而得出，　$\overrightarrow{BP}=mn\overrightarrow{BD}+(1-mn)\overrightarrow{BQ}$.

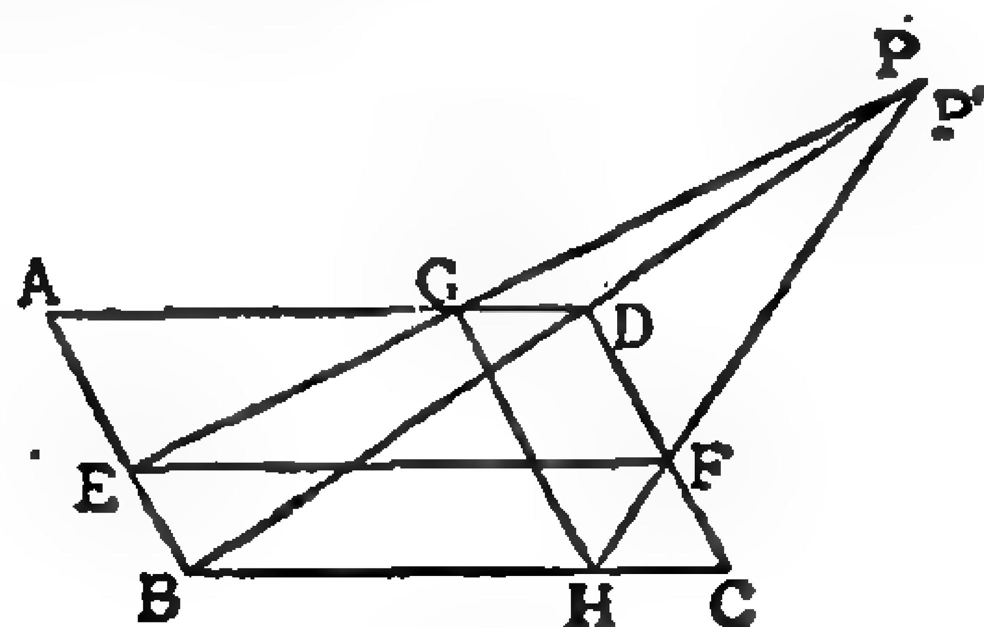
设 $mn=t$，则

$$\overrightarrow{BP}=t\ \overrightarrow{BD}+(1-t)\cdot\overrightarrow{BQ}.\qquad ⑥$$

⑥式表明三点 D、P、Q 在一条直线上(问题 **3914**)。

如果把⑤代入③′，求出 $t_1=\dfrac{m-mn}{1-mn}$，再把它代入②，也可以得出相同的结果。从而得出 D、P、Q 在一直线上。

3922. 作与平行四边形 $ABCD$ 的边 AD 平行的直线，它和 AB、DC 的交点分别为 E、F. 再作与边 AB 平行的直线，它和 AD、BC 的交点分别是 G、H。证明三直线 EG，BD，HF 如不平行就相交于一点。



解　设

$$\overrightarrow{BA}=\vec{\alpha},\ \overrightarrow{BC}=\vec{\beta},\ \overrightarrow{BE}=m\vec{\alpha},\ \overrightarrow{BH}=n\vec{\beta},$$

则由 $ABCD$ 是平行四边形可知

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}.$$

又 $ABHG$ 是平行四边形，所以

$$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}=\vec{\alpha}+n\vec{\beta}.$$

又 $EBCF$ 也是平行四边形，所以

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BC}=m\vec{\alpha}+\vec{\beta}.$$

设 EG 和 BD 相交于点 P，则三点 E、G、P 在一直线上。所以由问题 **3914** 可知

$$\overrightarrow{BP}=t\cdot\overrightarrow{BE}+(1-t)\overrightarrow{BG}$$

$$=t(m\vec{\alpha})+(1-t)(\vec{\alpha}+n\vec{\beta}).\qquad ①$$

又，三点 B、D、P 在一直线上，所以

$$\overrightarrow{BP}=t_1\ \overrightarrow{BD}=t_1(\vec{\alpha}+\vec{\beta}).\qquad ②$$

从①、②，得

$$t(m\vec{\alpha})+(1-t)(\vec{\alpha}+n\vec{\beta})=t_1(\vec{\alpha}+\vec{\beta}).$$

$$\therefore\quad (mt+1-t-t_1)\vec{\alpha}=(t_1-n+nt)\vec{\beta}.\qquad ③$$

因为 α 和 β 是方向不同的矢量，所以

$$\begin{cases} mt+1-t-t_1=0, & ④\\ t_1-n+nt=0. & ⑤\end{cases}$$

从④，得　$t_1=mt+1-t$.　④′

从⑤，得　$t_1=n-nt$,　⑤′

从④′、⑤′，得　$mt+1-t=n-nt$,

即　$1-n=(1-m-n)t$.

$$\therefore\quad t=\frac{1-n}{1-m-n}.\qquad ⑥$$

把⑥代入④′(或⑤′)求 t_1，可得

$$t_1=\frac{-mn}{1-m-n}.\qquad ⑦$$

再设 BD 和 HF 相交于点 P'，则因三点 H、F、P' 在一直线上，所以由问题 **3914** 可知

$$\overrightarrow{BP'}=t'\cdot\overrightarrow{BH}+(1-t')\cdot\overrightarrow{BF}$$
$$=t'(n\vec{\beta})+(1-t')(m\vec{\alpha}+\vec{\beta}).\qquad ⑧$$

又三点 B、D、P' 在一直线上，所以

$$\overrightarrow{BP'}=t_2\cdot\overrightarrow{BD}=t_2(\vec{\alpha}+\vec{\beta}).\qquad ⑨$$

从 ⑧、⑨，得

$$t'(n\vec{\beta})+(1-t')(m\vec{\alpha}+\vec{\beta})=t_2(\vec{\alpha}+\vec{\beta}).$$

$$\therefore\quad (m-mt'-t_2)\vec{\alpha}=(t_2-nt'-1+t')\vec{\beta}.\qquad ⑩$$

因为 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 是方向不同的矢量，所以

$$\begin{cases} m-mt'-t_2=0, & ⑪\\ t_2-nt'-1+t'=0. & ⑫\end{cases}$$

从 ⑪，得　$t_2=m-mt'$.　⑪′

从 ⑫，得　$t_2=nt'+1-t'$.　⑫′

从 ⑪′、⑫′，得

$$m-mt'=nt'+1-t'.$$

$$\therefore\quad (1-m-n)t'=1-m.$$

$$\therefore\quad t'=\frac{1-m}{1-m-n}.\qquad ⑬$$

把 ⑬ 代入 ⑪′（或 ⑫′）求 t_2，可得

$$t_2=\frac{-mn}{1-m-n}.\qquad ⑭$$

因此，从 ②、⑦，可知

$$\overrightarrow{BP}=\frac{-mn}{1-m-n}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}).\qquad ⑮$$

从 ⑨、⑭，可知

$$\overrightarrow{BP'}=\frac{-mn}{1-m-n}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}).\qquad ⑯$$

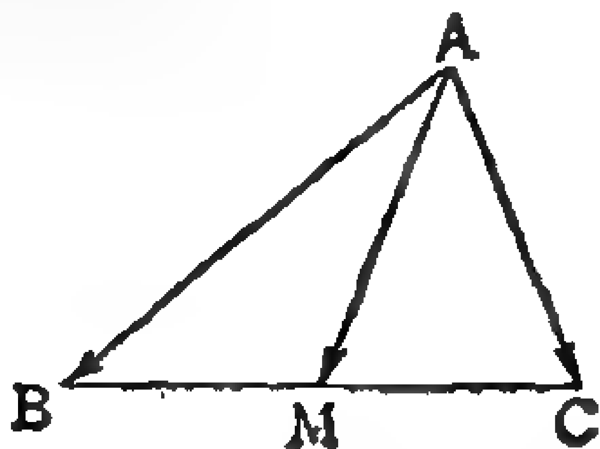
由此可得，　$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BP'}$.

这就是说，P、P' 为同一点，即三直线 EG、BD、HF 共点。

注　当 $m+n=1$ 时，EG、BD、HF 是互相平行的直线，这时无法求出 t_1、t_2。

3923. 设 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点为 M，用矢量证明

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2).$$



解　设 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，则

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},$$

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{b}=\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}.$$

$$\therefore\quad AB^2+AC^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=(\vec{b}\cdot\vec{b})+(\vec{c}\cdot\vec{c}).\qquad ①$$

$$\because\quad AM^2=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}),$$

$$BM^2=\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\cdot\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{c}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{b}),$$

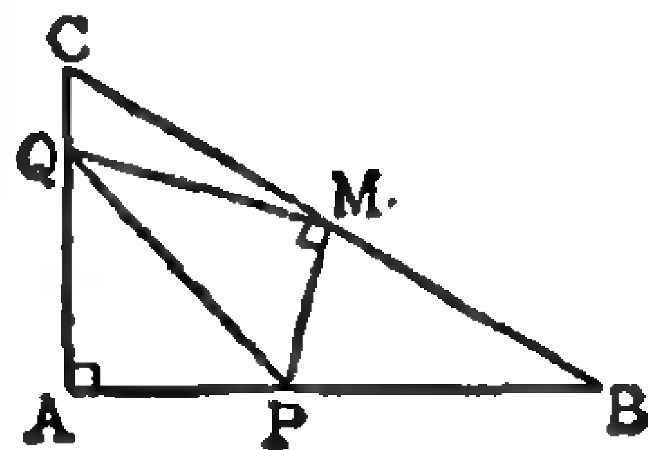
$$\therefore\quad AM^2+BM^2$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c})+\frac{1}{4}(\vec{c}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{b})$$
$$=\frac{1}{4}(2\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{c}\cdot\vec{c})$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}).$$

$$\therefore\quad 2(AM^2+BM^2)=\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{b},\vec{b})+(\vec{c},\vec{c}).\qquad ②$$

从 ①、②，可知

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2).$$

3924. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，BC 的中点为 M，若在 AB、AC 上分别取点 P、Q，使 $\angle PMQ=90°$，则 $PQ^2=BP^2+CQ^2$。



解　设

$$\overrightarrow{MP}=\vec{p},\ \overrightarrow{MQ}=\vec{q},\ \overrightarrow{MB}=\vec{b},$$

则

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{MB}=\vec{p}-\vec{b},$$
$$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{MC}=\vec{q}-(-\vec{b})=\vec{q}+\vec{b},$$
$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{MP}=\vec{q}-\vec{p}.$$

$$\therefore\quad PQ^2=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}=(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}-\vec{p})$$
$$=\vec{q}\cdot\vec{q}-2\vec{p}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{p}.$$

因为 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MQ}$，所以 $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$。

$$\therefore\quad PQ^2=\vec{p}\ \vec{p}+\vec{q}\ \vec{q}. \qquad ①$$

又 $BP^2+CQ^2=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{CQ}$

$$=(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{q}+\vec{b})\cdot(\vec{q}+\vec{b})$$
$$=\vec{p}\cdot\vec{p}+\vec{q}\cdot\vec{q}+2\vec{b}\ \vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{q}-2\vec{b}\cdot\vec{p}$$
$$=\vec{p}\cdot\vec{p}+\vec{q}\ \vec{q}+2\vec{b}\cdot(\vec{b}+\vec{q}-\vec{p}).$$

因为 $AB\perp AC$，所以 $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{CQ}$.

由此可得，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$，

即 $(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{q}+\vec{b})=0$.

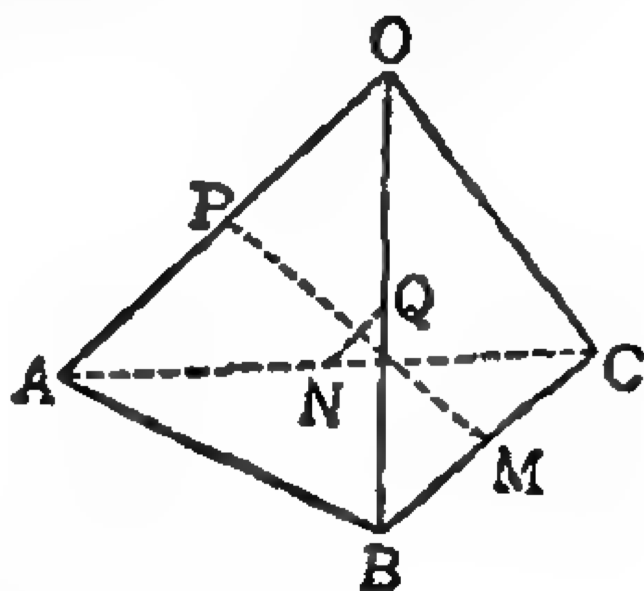
$$\therefore\quad \vec{p}\cdot\vec{q}-\vec{b}\cdot\vec{q}+\vec{b}\cdot\vec{p}-\vec{b}\cdot\vec{b}=0,$$
$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{q}-\vec{b}\cdot\vec{p}=\vec{b}\cdot(\vec{b}+\vec{q}-\vec{p}).$$

而 $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$. $\therefore\ \vec{b}\cdot(\vec{b}+\vec{q}-\vec{p})=0$.

$$\therefore\quad BP^2+CQ^2=\vec{p}\cdot\vec{p}+\vec{q}\cdot\vec{q}. \qquad ②$$

从①、②，得 $PQ^2=BP^2+CQ^2$.

3925. 在四面体 $OABC$ 中，BC 的中点为 M，AC 的中点为 N，OA 的中点为 P，OB 的中点为 Q，且 $AB=OC$，证明 $PM\perp QN$.



解 设

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c},$$

则 $$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{2}=\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2},$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}}{2}=\frac{\vec{a}}{2},\quad \overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{\vec{b}}{2}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}}{2}$$
$$=\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2},$$

$$\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}$$
$$=\frac{\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}}{2},$$

所以，

$$\overrightarrow{PM}\ \overrightarrow{QN}=\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}\cdot\frac{\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}}{2}$$
$$=\frac{1}{4}[\vec{c}+(\vec{b}-\vec{a})]\cdot[\vec{c}-(\vec{b}-\vec{a})]$$
$$=\frac{1}{4}[\vec{c}\cdot\vec{c}-(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})]$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}).$$

因为 $AB=OC$，所以

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AB}=0.$$

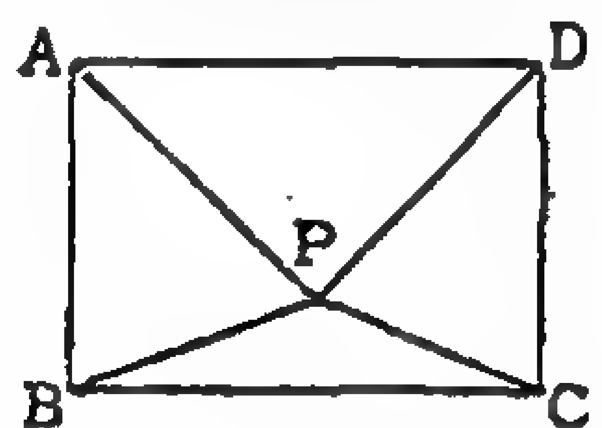
从而得出，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{QN}=0$，$\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{QN}$.

$$\therefore\quad PM\perp QN.$$

3926. 已知四边形 $ABCD$，该平面上的任意点 P 满足

$$AP^2+CP^2=BP^2+DP^2,$$

问四边形 $ABCD$ 是什么样的四边形.



解 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{p}$，则

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\vec{p}-\vec{b},$$
$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\vec{p}-\vec{c},$$
$$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}=\vec{p}-\vec{d}.$$

$$\therefore\quad AP^2+CP^2=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP}$$
$$=\vec{p}\cdot\vec{p}+(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})$$
$$=2\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}, \qquad ①$$

$$BP^2+DP^2=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DP}$$
$$=(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{d})\cdot(\vec{p}-\vec{d})$$
$$=2\vec{p}\ \vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{d}\cdot\vec{d}-2\vec{p}\cdot\vec{b}-2\vec{p}\ \vec{d}. \qquad ②$$

而 $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$. 由①、②，可知

$$2\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}$$
$$=2\vec{p}\cdot\vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{d}\cdot\vec{d}-2\vec{p}\cdot\vec{b}-2\vec{p}\cdot\vec{d}.$$

$$\therefore\quad 2\vec{p}\cdot\vec{b}+2\vec{p}\cdot\vec{d}-2\vec{p}\cdot\vec{c}$$
$$=\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{d}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{c},$$

即 $$2\vec{p}\cdot(\vec{b}+\vec{d}-\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{d}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{c}. \qquad ③$$

设 $\vec{p}$ 与 $\vec{b}+\vec{d}-\vec{c}$ 的夹角用 θ 表示，则由③可知

$$2|\vec{p}|\cdot|\vec{b}+\vec{d}-\vec{c}|\cos\theta=\vec{b}\ \vec{b}+\vec{d}\cdot\vec{d}-\vec{c}\ \vec{c}. \qquad ③'$$

因为点 P 为任意点，$\cos\theta$ 不可能总等于零，又 $\vec{p}\neq 0$，所以③′成立的条件是

$$\begin{cases}\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{d}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{c}=0, & ④\\ \vec{b}+\vec{d}-\vec{c}=0. & ⑤\end{cases}$$

从⑤，$\vec{b}+\vec{d}=\vec{c}$ 可知，在四边形 $ABCD$ 中

$$AD=BC.$$

从④ $\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{d}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{c}$ 可知，

$$AB^2+AD^2=AC^2.$$
$$\therefore\quad AB^2+BC^2=AC^2.$$

由此可知，四边形 $ABCD$ 为矩形.

附　录

重要定理、公式汇集（[ ]内的数字是正文中的题号）

1. 定义、公理、定理

1.1　定义

我们在进行论断时，使用清楚明确的语言来规定它的意义是很重要的。将这种明确规定一事物意义的语言叫做定义。

1.2　公理

以人们无条件承认的事实，作为推理的依据，这称为公理：

一般公理……适用于数学各科的公理．

几何学公理……只适用于几何学的公理．

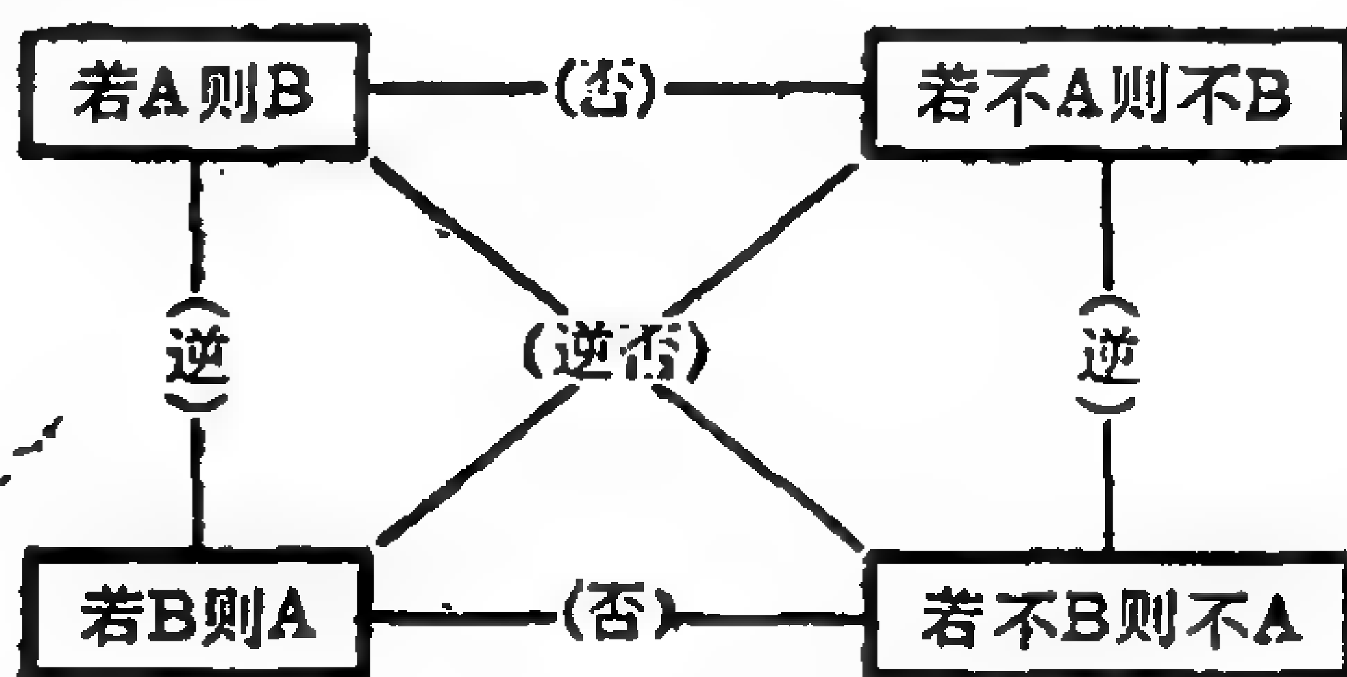
平行线公理：

在一个平面内，过直线外一点，有且只有一条直线和这条直线平行。

1.3　定理

根据公理来论证某命题是正确的叫做证明，已证明是正确的命题叫做定理．　[2]

1.4　原命题、逆命题、否命题、逆否命题的关系



若原命题正确，则其逆否命题一定正确，但逆命题、否命题不一定正确．　[3]

1.5　必要条件、充分条件

如果命题"若 A 则 B"是正确的，则 B 称为 A 成立的必要条件，A 称为 B 成立的充分条件．　[4]

1.6　定理的证明方法

直接证法．

间接证法：

(i) 归谬法(反证法)，(ii) 转换法

(iii) 同一法。　[5]

2. 直线形

2.1　角、平行线

(1) 两条直线相交时，其对顶角相等．[8]

(2) 平行线定理：两条直线被一条直线所截，如果一组内错角相等，那么两条直线平行．

两条平行线与一条直线分别相交，则同位角或内错角分别相等，同旁内角(或同旁外角)互补．　[15, 16]

2.2　三角形的全等条件

(1) 一般的三角形全等

(i) 两边和夹角对应相等；

(ii) 两角和夹边对应相等；

(iii) 三边对应相等．　[28～30]

(2) 直角三角形的全等

(i) 斜边和一个锐角对应相等；

(ii) 斜边和一条直角边对应相等。　[31]

(3) 两意的全等

两边与其一边的对角分别相等的两个三角形中，如果两组对应相等的边中，一组边所对的角相等，则这两个三角形可能全等，或者另一组边所对的角互补．　[35]

2.3　三角形的边与角的大小关系

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB>AC$，则 $\angle C>\angle B$；若 $\angle C>\angle B$，则 $AB>AC$．

(2) 在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中，若 $AB=DE$，$AC=DF$，$BC>EF$，则 $\angle A>\angle D$．若 $AB=DE$，$AC=DF$，$\angle A>\angle D$，则 $BC>EF$．　[40～41]

(3) 三角形的条件

三条线段 a、b、c 构成三角形的三边的必要且充分条件是 $b-c<a<b+c$．　[42]

2.4　三角形的内角与外角

(1) 三角形的三个内角的和等于两直角，

一个外角等于和它不相邻的两个内角的和。

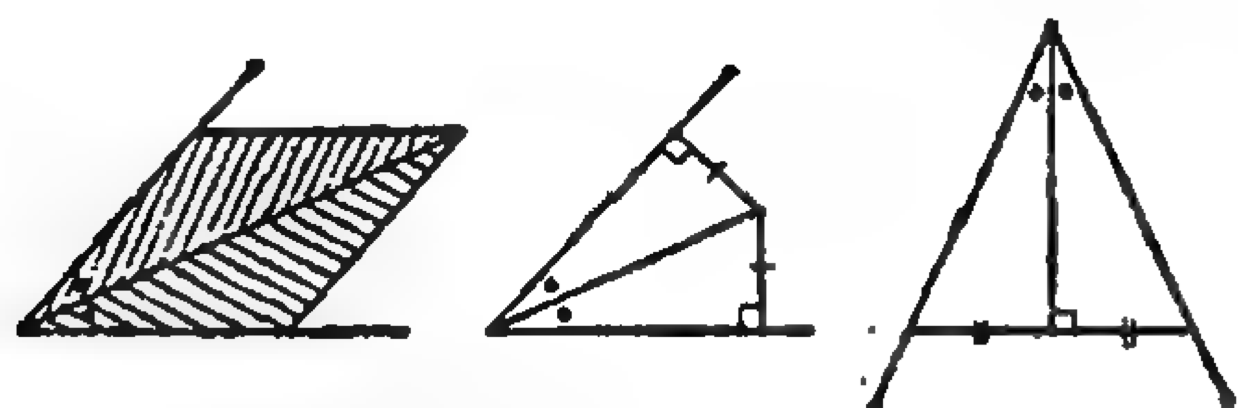
(2) 延长三角形的任意一边，则外角大于任何一个和它不相邻的内角。 [53～55]

2.5 角的平分线

(1) 角的两边上的点关于角的平分线对称。可以沿角平分线对折。

(2) 从角平分线上任一点，向两边作垂线，则垂线的长相等。 [86～95]

(3) 作角平分线的垂线，能够组成等腰三角形。 [86～95]



2.6 中点、中线

(1) 中点连线定理

(i) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AD=DB$，$AE=EC$，则 $DE \parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$。

(ii) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AD=DB$，$DE \parallel BC$ 则 $AE=EC$。 [103]

(2) 直角三角形斜边的中点，到三角形的三个顶点的距离相等。 [120]

2.7 重心的性质

(1) 重心是三角形的三条中线的交点(阿基米德定理)。

(2) 三角形的重心到各顶点的距离，等于相应的中线长的 $\frac{2}{3}$。 [104]

(3) 使 G 为三角形 ABC 的重心的条件:

(i) G 是两条中线的交点。

(ii) 中线 AD 被 G 内分为 2:1。 [106]

(4) 从三角形 ABC 的顶点 A、B、C，向过重心 G 的任意直线 XY 作垂线，设其垂足分别为 A'、B'、C'，则 $AA'=BB'+CC'$。其中 A 与 B、C 关于直线 XY 在异側。 [108]

(5) 如果直线 XY 在 $\triangle ABC$ 的形外，则 $AA'+BB'+CC'=3GG'$，其中 G' 是由重心 G 向 XY 作垂线的垂足。 [107]

(6) 如果直线 XY 与 $\triangle ABC$ 相截，A、B 与 G 在 XY 的同側，C 在异側，则

$$AA'+BB'-CC'=3GG'。$$

2.8 等腰三角形的性质

(1) 等腰三角形的两底角相等。

(2) 两角相等的三角形是等腰三角形。 [137]

(3) 等腰三角形顶角平分线是底边的垂直平分线。

(4) 若顶角 A 的平分线 AD 垂直于底边 BC，则此三角形是等腰三角形。 [138]

2.9 正三角形的性质

(1) 三边相等。

(2) 三个内角都等于 60°。

(3) 一个内角为 60°，且夹此角的两边相等。 [156]

3. 四边形

3.1 平行四边形的条件

(1) 两组对边分别平行。

(2) 两组对角分别相等。

(3) 两组对边分别相等。

(4) 一组对边平行且相等。

(5) 两条对角线互相平分。 [195]

3.2 矩形

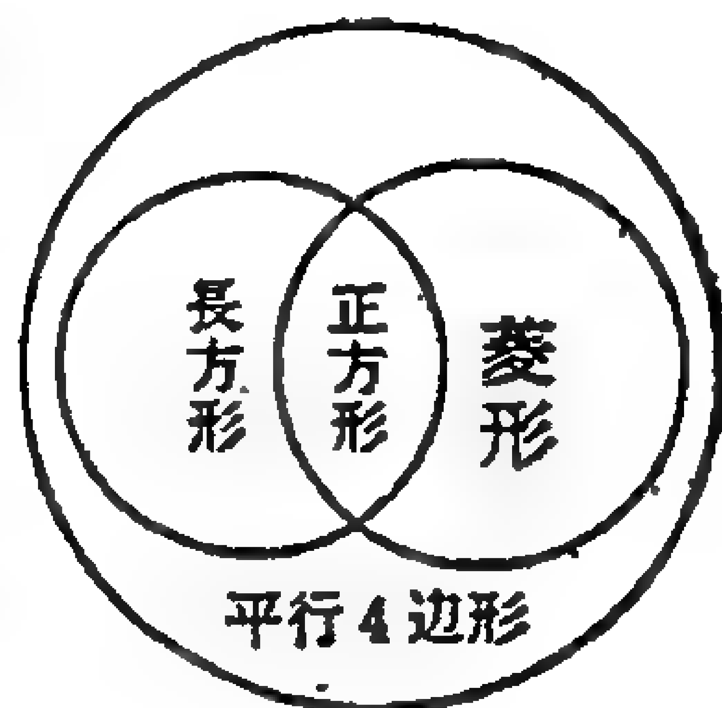
(1) 四个角都是直角。

(2) 对角线相等。 [212]

3.3 菱形

(1) 四边都相等。

(2) 对角线互相垂直。 [213]



3.4 正方形

(1) 四个角相等，四条边相等。

(2) 对角线相等且互相垂直。 [221～247]

3.5 梯形

一组对边平行的四边形叫做梯形。若不平行的两边相等的梯形叫做等腰梯形。

(1) 等腰梯形的两底角相等，对角互补。 [248]

(2) 在凸四边形 $ABCD$ 中，若 $\angle B=\angle C$，$AB=CD$，则它是等腰梯形。 [250]

(3) 连结梯形两腰中点的线段，平行于底边，且等于两底的和的一半。 [251]

(4) 若 AC、BD 为梯形 $ABCD$ 的两条对角线，则连结 AC、BD 的中点的线段 PQ 等于两底的差的一半。 [252]

4. 多边形

(1) 凸 n 边形的内角和等于 $(2n-4)\angle R$. [254]

(2) 正 n 边形的一个内角等于

$$\left(\frac{2n-4}{n}\right)\angle R.$$ [260]

(3) 若依次延长凸多边形的各边，则所得的外角的和等于 $4\angle R$. [255]

(4) 凸多边形的对角线的总数是 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条。 [256]

5. 圆

5.1 圆周角、圆心角

(1) 圆周角是同弧所对的圆心角的一半. [295]

(2) **圆周角的移动定理**

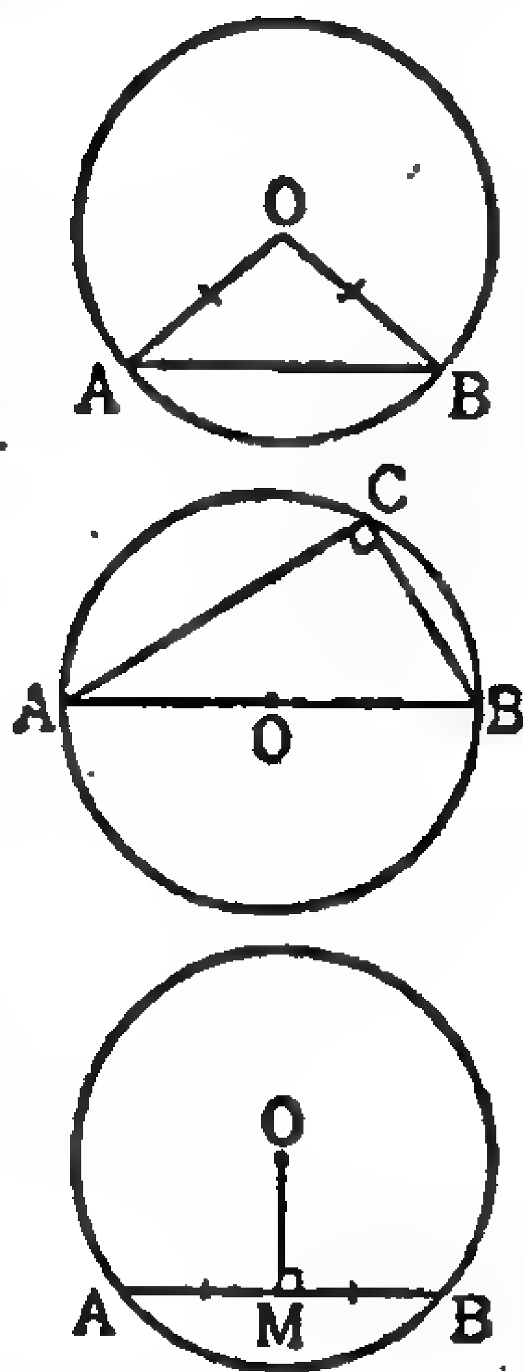
在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等。反之也成立。

弧相等 $\rightleftarrows$ 圆心角相等 $\rightleftarrows$ 圆周角相等.

(3) 半圆的圆周角是直角. [294]

5.2 弧、弦

(1) 弧的四原则



(i) 连结圆心与弦两端构成等腰三角形。

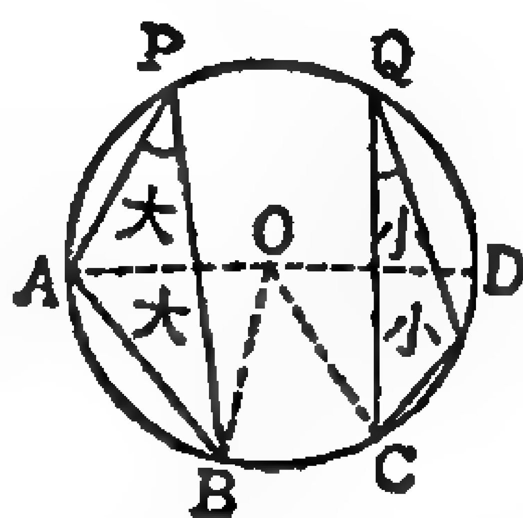
(ii) 过弦的一端作直径，则半圆上的圆周角是直角。

(iii) 从圆心 O 向弦 AB 作垂线，设垂足为 M，则 $OM\perp AB\rightarrow AM=MB$.

(iv) 连结圆心 O 与弦 AB 的中点 M，则

$OM\perp AB$.

(2) 弦大(小)，则圆周角大(小)，从而得出，圆心角亦大(小).



$\angle APB>\angle CQD$

$\rightleftarrows AB>CD$,

$\angle AOB>\angle COD$

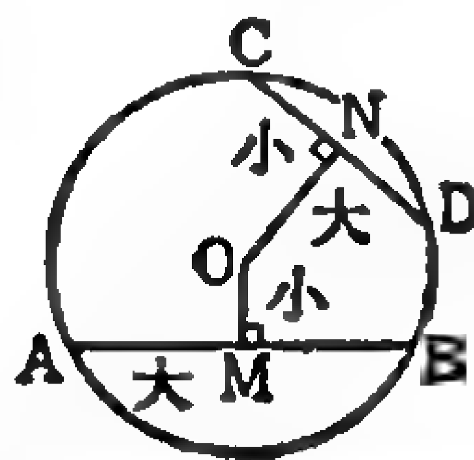
$\rightleftarrows AB>CD$.

(3) 弦的大小与它的弦心距的大小相反。即

$OM<ON\rightleftarrows AB>CD$

[307~315, 320~323]

(4) 夹在两平行弦间的弧相等. [309]



(5) **阿勒哈森定理**

弦 AB、CD 相交于 P，当点 P 在圆内时，则 $\angle APC$ 等于弧 AC 与弧 BD 所对的圆周角的和；当点 P 在圆外时，则 $\angle APC$ 等于弧 AC 与弧 BD 所对的圆周角的差. [325]

(6) 两弦 AB、CD 垂直相交时，则

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=\text{半圆}.$$ [326]

5.3 切线

(1) 连结切点与圆心的直线垂直于切线。

(2) 弦切角等于它所夹的弧上的圆周角。反之也成立. [360~367]

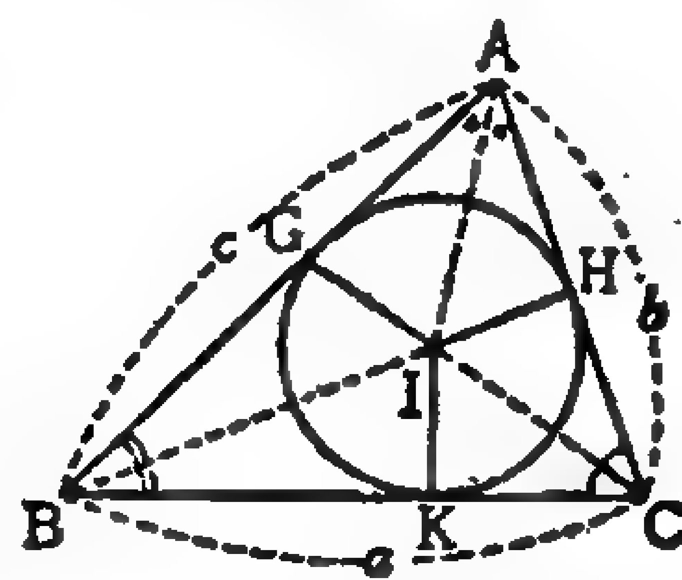
(3) 从圆外一点向圆所作的两条切线相等。 [369]

5.4 内心

(1) 内心是三角形三个内角平分线的交点。

(2) 三角形的内心 I 到各边的距离相等。

(3) 内心是三角形的内切圆的圆心。 [429~434]



(4) 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，则

$\angle BIC$

$=\frac{1}{2}\angle A+90°$. [432]

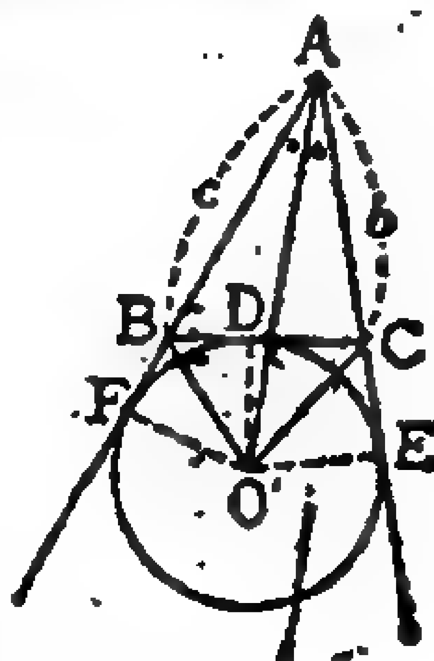
(5) 在 $\triangle ABC$ 中，设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $a+b+c=2p$，则

$AG=p-a$, $BK=p-b$, $CH=p-c$.

[444~450, 472~477]

5.5 旁心

(1) 三角形的旁心是一个内角的平分线与其他两顶点上的外角平分线的交点。



(2) 三角形的旁心到各边的距离相等。

(3) 三角形的旁心是旁切圆的中心。 [430~435, 437]

(4) 设 $\triangle ABC$ 的一个旁心为 O'，则 $\angle BO'C=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

(5) 在 $\triangle ABC$ 中，O' 为一个旁心，设

$AC=b$, $AB=c$, $AE=AF=p$,

则 $BD=BF=p-c$,

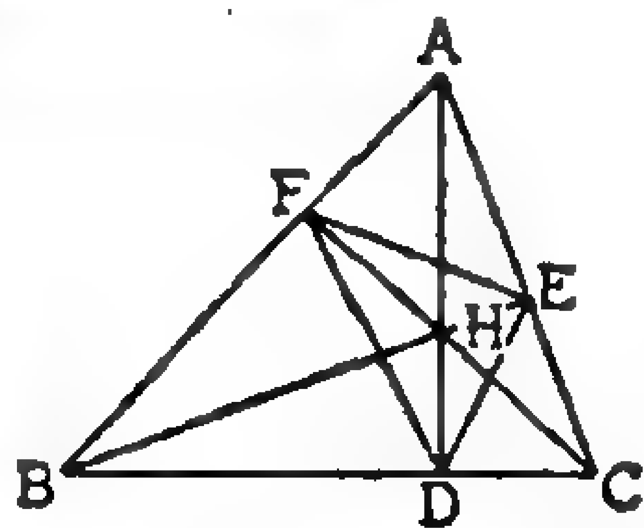
$CD=CE=p-b$.

[446, 447]

5.6 垂心

(1) 三角形的垂心，是从三个顶点分别向对边所作垂线的交点(阿基米德定理)。

(2) 锐角三角形的垂心，是其垂足三角形 DEF 的内心，钝角三角形的垂心，是其垂足三角形的旁心。锐角三角形 ABC 的三个顶点 A、B、C，是其垂足三角形 DEF 的旁心。这里，从三角形的各顶点，向对边所作垂线的垂足连成的三角形，叫垂足三角形。



[492～496]

(3) **卡勒诺定理**

设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，则 $\triangle HBC$、$\triangle HCA$、$\triangle HAB$ 的垂心分别为 A、B、C。

(4) A、B、C 分别是 $\triangle HBC$，$\triangle HCA$，$\triangle HAB$ 的旁心。

(5) 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，则 $\angle BHC=180°-\angle A$，$\angle CHA=180°-\angle B$，$\angle AHB=180°-\angle C$。

(6) 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，若从外心 O 向边 BC 作垂线 OM，则 $AH=2OM$。

[500, 531]

(7) **欧拉定理**

设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，垂心为 H，重心为 G，则 O、H、G 在一直线(叫做欧拉线)上，外心与重心的距离等于垂心与重心的距离的一半。

[501]

(8) 若三角形为锐角三角形，则垂心在形内；若三角形为钝角三角形，则垂心在形外；若三角形为直角三角形，则垂心在直角顶上。

5.7 外心

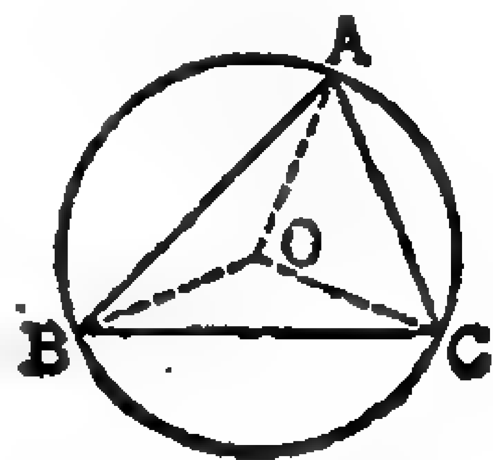
(1) 三角形的外心，是三边的垂直平分线的交点。

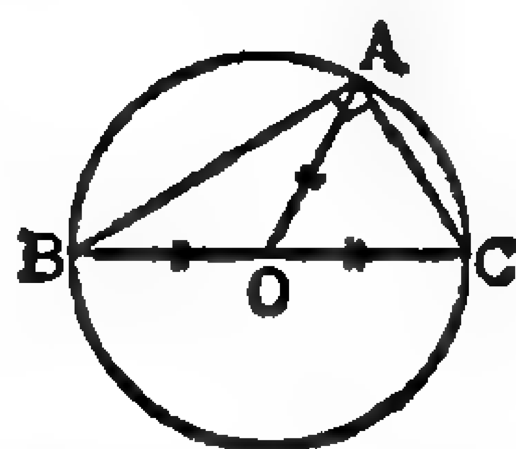
(2) 三角形的外心到各顶点的距离相等。

[524]

(3) 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，则 $\angle BOC=2\angle A$，$\angle COA=2\angle B$，$\angle AOB=2\angle C$ (圆周角、圆心角)。

(4) 若三角形为锐角三角形，则外心在形内；若三角形为钝角三角形，则外心在形外；若三角形是直角三角形，则外心在斜边的中点上。





5.8 圆内接四边形

(1) 圆内接凸四边形(各边及其延长线，与不相邻的边不相交的四边形)的对角互补。反之也成立。

[555]

(2) 四点 A、B、C、D 在同一圆上的条件：

(i) 存在点 O，使 $OA=OB=OC=OD$，(这时 O 是这圆的圆心)。

(ii) $\angle A=\angle D$(圆周角相等)。

(iii) $\angle A+\angle C=2\angle R$ (一组对角互补)。

[555]

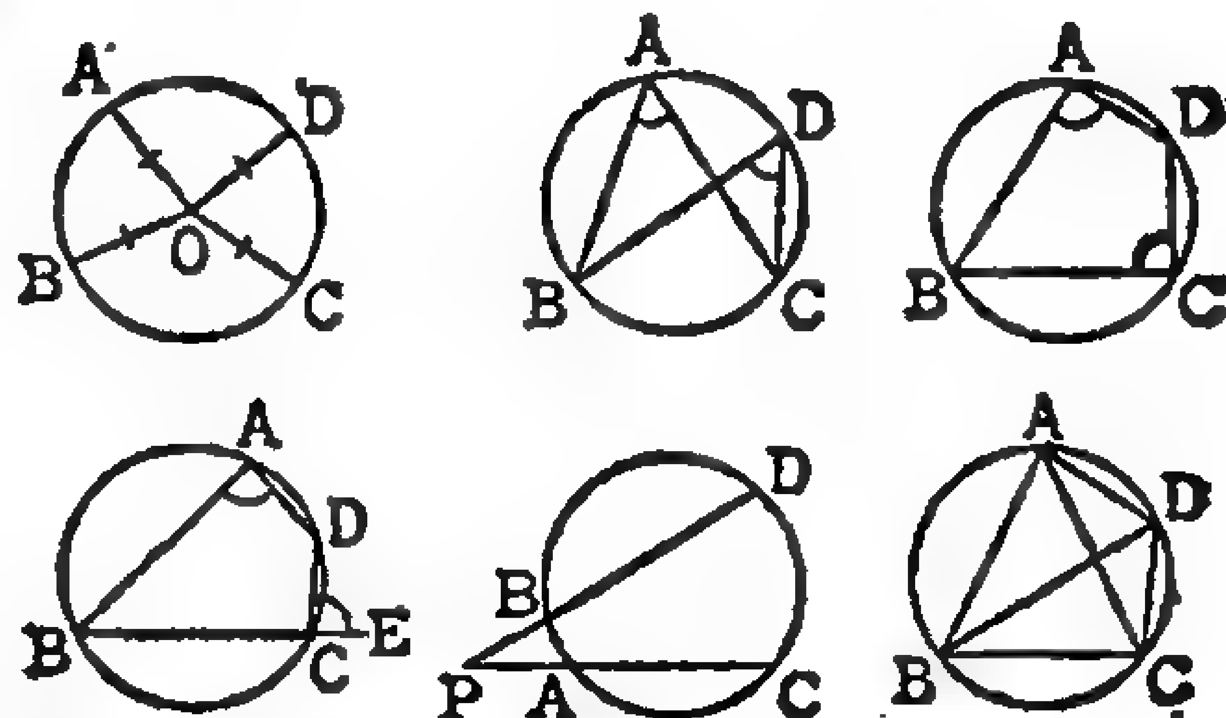
(iv) $\angle A=\angle DCE$(一个外角等于其内对角)。

(v) $PA\cdot PC=PB\cdot PD$(圆幂定理)。

[1248]

(vi) $AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD$ (托勒密定理)。

[1500]



5.9 圆外切四边形

圆外切四边形的对边的和相等。反之也成立。

[558～564]

5.10 两圆

(1) **两圆的关系**

设两圆 O、O' 的半径分别为 r、r'，圆心距 OO' 为 d，那么

(i) 两圆相互外离时，则 $d>r+r'$。

(ii) 两圆外切时，则 $d=r+r'$。

(iii) 两圆相交时，则 $r+r'>d>r\sim r'$。

(iv) 两圆内切时，则 $d=r\sim r'$。

(v) 两圆内离时，$d<r\sim r'$。

这个定理的逆命题也成立。 [596～599]

(2) 两圆相切的条件必须是其公共点在连心线上。 [593]

(3) 两圆相切时，过切点可以作两圆的公切线。此结果是常用于作辅助线。 [601～604, 613～621]

5.11 西摩松线

从 $\triangle ABC$ 的外接圆上的点 P，向三边作垂线，其垂足在一条直线上。这直线叫做西摩松线。反之也成立。 [665～667]

5.12 九点圆

在 $\triangle ABC$ 中，三边的中点，从三顶点向三边作垂线所得的垂足，三个顶点与垂心连线的中点，这九点在同一圆上。此圆称为九点圆。 [675～687]

5.13 米库勒定理

延长五边形 $ABCDE$ 的各边，在其外部作五个三角形 FAB、GBC、HCD、KDE、LEA 的外接圆，若这五个外接圆相交时，则五个交点 A'、B'、C'、D'、E' 在同一圆上。 [729]

5.14 布兰库·毛利定理

$\triangle ABC$ 的各角的三等分线的交点，作成三角形 DEF，则 $\triangle DEF$ 是正三角形。 [724]

5.15 费尔巴哈定理

$\triangle ABC$ 的内切圆及外接圆，与三角形的九点圆相切。 [687]

5.16 布拉美古塔定理

若圆内接四边形的对角线互相垂直，从对角线的交点向一边作垂线，则此垂线平分这一边的对边。 [580]

6. 面积

6.1 面积的基本公式

(1) 三角形的面积

设 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 的长分别为 a、b、c，则

$$S=\frac{1}{2}hb,\ (h \text{ 为底 } AC \text{ 上的高})。$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta,$$

(θ 是 BC 和 AC 间的夹角)。

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$(2p=a+b+c)$。

(海伦公式) [975]

$$S=\frac{abc}{4R},$$ (R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径) [764]

(2) 矩形的面积

$S=ab$，(a、b 分别是相邻的两边的长)

(3) 梯形的面积

$$S=\frac{h}{2}(a+b),$$

(a、b 分别是上、下底的长，h 是高) [808]

(4) 平行四边形的面积

$S=ah$，(a 是底边的长，h 是高)。

$$S=ab\sin\theta,$$

(a、b 是相邻两边的长，θ 是这两边间的夹角) [829]

(5) 圆的面积

$S=\pi r^2$，(r 为半径)。

扇形的面积

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{D\pi}{180}r^2,$$

(θ 是圆心角的弧度，D 是圆心角的度数)。

6.2 三角形的面积

(1) 等积移动定理

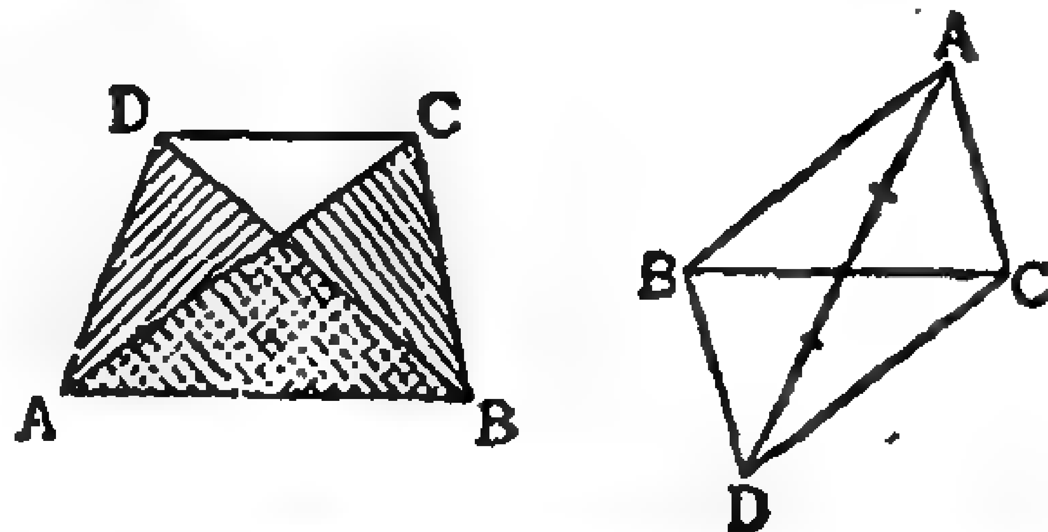
若两个在公共底边 AB 的同旁的三角形 ADB、ACB 等积，则 $AB \parallel DC$。反之也成立。 [737, 749]

(2) 在两个三角形中，两边分别相等，其夹角互补时，则这两个三角形等积。 [738]

(3) 三角形的中线，平分此三角形的面积。 [740～741, 750～751]

(4) 若在 BC 的两旁有两个面积相等的三角形 ABC、DBC，则连结其顶点 A、D 的线段被 BC 或其延长线所平分。 [743～756]

(5) 在同底等积的三角形中，以等腰三角形的周长为最小。 [766～767]

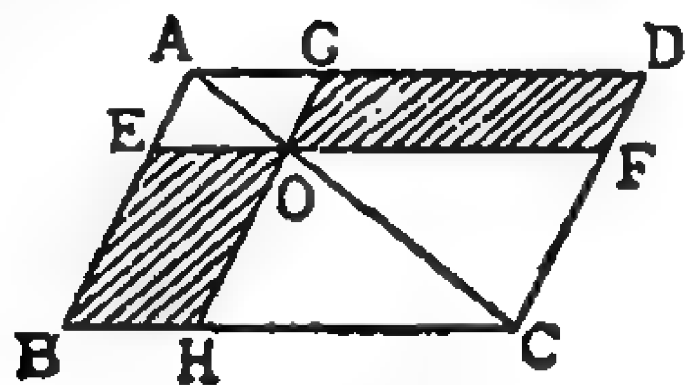


6.3 平行四边形的面积

(1) 平行四边形的两条对角线，将它分为四个等积的三角形。 [782～786]

(2) 余形定理

在平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上任取一点 O，过点 O 作边 AB、BC 的平行线，与边 AD、BC 及 AB、CD 的交点分别为 G、H 及 E、F，则



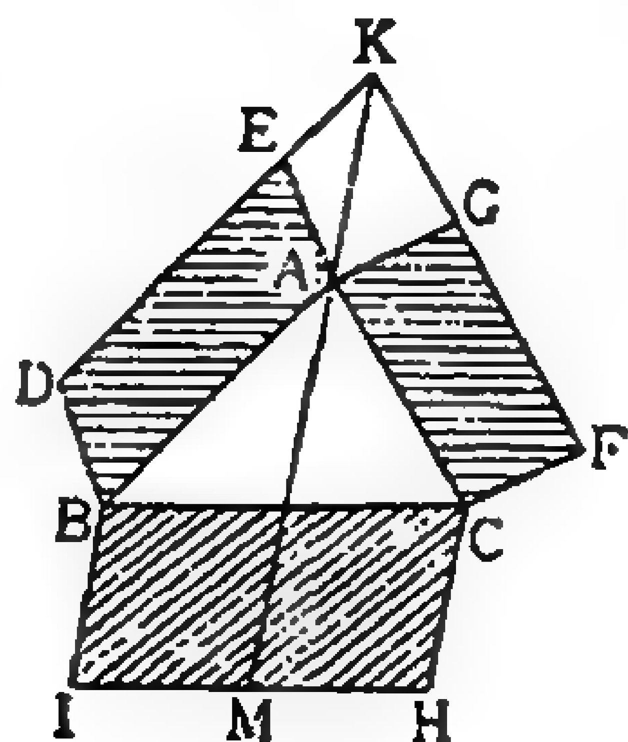
$\square EBHO$ 的面积 $=\square GDFO$ 的面积.

[787, 792]

(3) 设 P 为平行四边形 $ABCD$ 内一点，过点 P 作各边的平行线 EF、GH，若 $\square EBHP$ 的面积 $=\square GPFD$ 的面积，则点 P 在对角线 AC 上。 [788, 797, 799]

(4) 帕普斯定理

在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，向三角形的外侧分别作任意的平行四边形 $ABDE$、$ACFG$，延长 DE、FG，设交点为 K. 又以 BC 为底边，以平行于 KA 且等于 KA 为另一边，作平行四边形 $BCHI$，则



$\square EDBA$ 的面积 $+\square GACF$ 的面积 $=\square BIHC$ 的面积. [807]

6.4 一般四边形

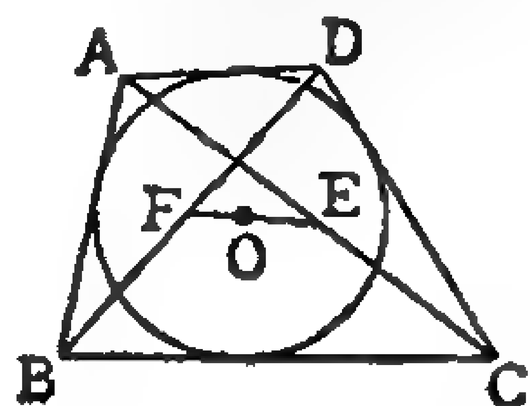
(1) 设四边形 $ABCD$ 的对角线的交点为 O，则其面积等于以 AC、BD 为相邻两边，其夹角为 $\angle DOC$ 的平行四边形面积的一半，即

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta,$$

(其中 a、b 分别表示 AC、BD 的长，θ 为 $\angle DOC$ 的大小)。 [829～833]

(2) 牛顿定理

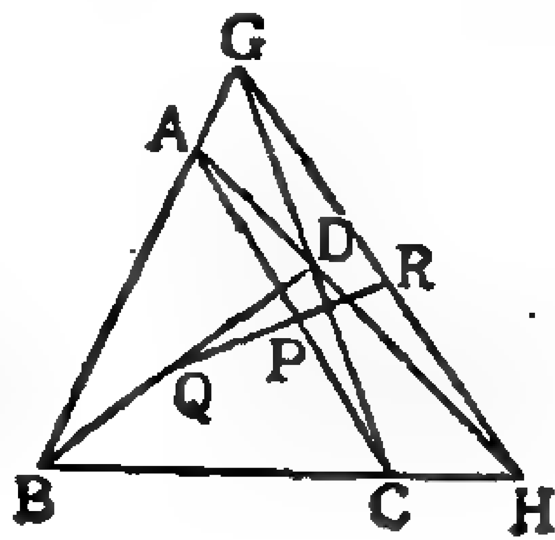
设圆 O 的外切四边形为 $ABCD$，其对角线 AC、BD 的中点分别为 E、F，则 E，O，F 在一条直线上。



[843]

(3) 牛顿线

任意四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC、BD 的中点分别为 P、Q，两组对边的延长线的交点分别为 G、H，线段 GH 的中点为 R，则 Q、P、R 在一条直线上。[845]



6.5 平方关系

(1) 毕达哥拉斯定理(勾股定理)

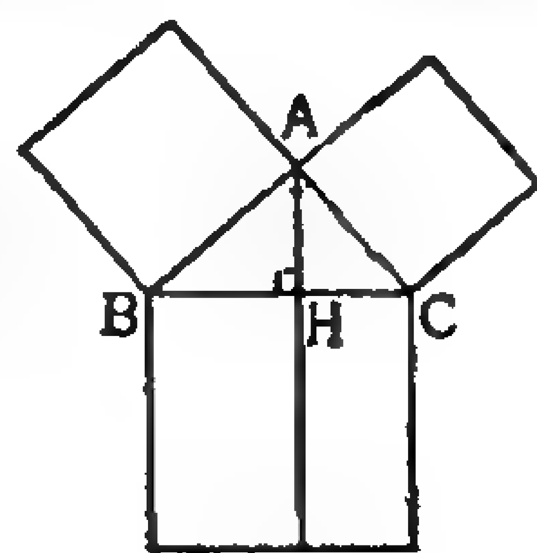
直角三角形斜边上的正方形的面积，等于其他两直角边上的正方形面积的和. 反之也成立。 [846, 854, 856]

(2) 设 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的长分别为 a、b、c，角 A 的大小为 θ，则

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\theta. \quad [847]$$

(3) 阿切塔定理

设从直角三角形的直角顶点 A，向斜边 BC 作垂线 AH，则



$AB^2=BH\cdot BC,$

$AC^2=HC\cdot BC,$

$AH^2=BH\cdot HC.$ [849, 874]

6.6 中线 a^2+b^2 形

(1) 帕普斯定理(中线定理)

在 $\triangle ABC$ 中，作中线 AM，则 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$。一般地，反之不一定成立。 [874～876]

(2) 设 $a^2+b^2=c^2$，则勾股定理成立。

(3) 斯蒂瓦特定理

在 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上取一点 D，使 $BD:DC=m:n$，则 $nAB^2+mAC^2=nBD^2+mDC^2+(m+n)AD^2$。

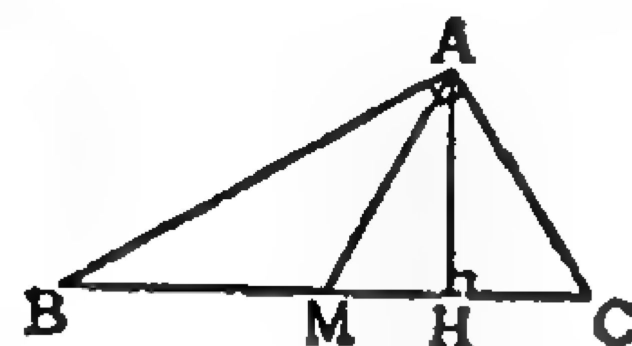
如果 D 为外分点，则

$$nAB^2-mAC^2=(n-m)AD^2+nBD^2-mCD^2.$$

[890, 891]

6.7 垂线 a^2-b^2 形

(1) 设从直角 $\triangle ABC$ 的顶点 A 向对边 BC 作垂线 AH，中线 AM，则



$$AB^2\sim AC^2=BH^2-HC^2=2BC\cdot MH.$$

[894～901]

(2) 设 $a^2-b^2=c^2$，则勾股定理成立。

(3) 线段 BC 的中点为 M，在 BC 上或其延长线上取点 A，则

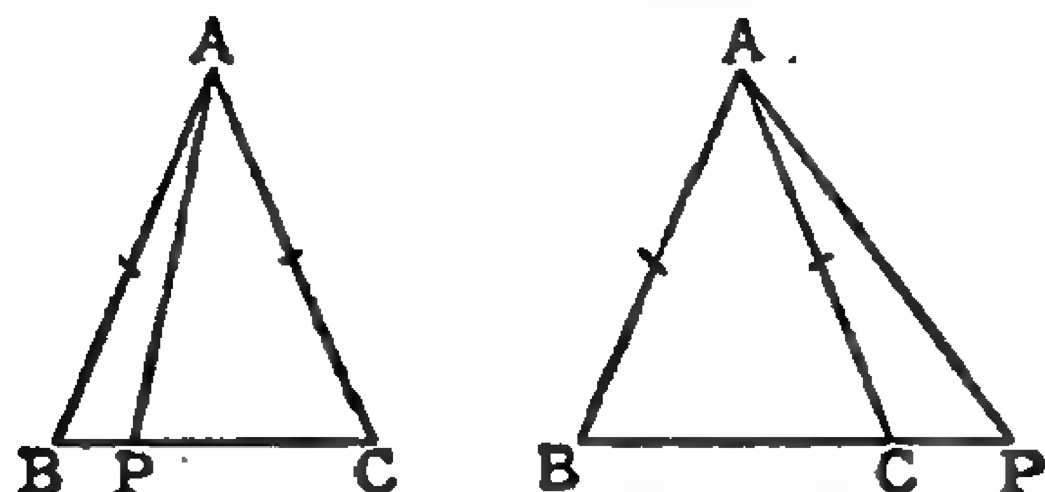
$$AB^2\sim AC^2=2BC\cdot AM.$$

(4) 若在等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上取一点 P，则

$$AP^2\sim AB^2=PB\cdot PC.$$

若在 BC 的延长线上取一点 P，则

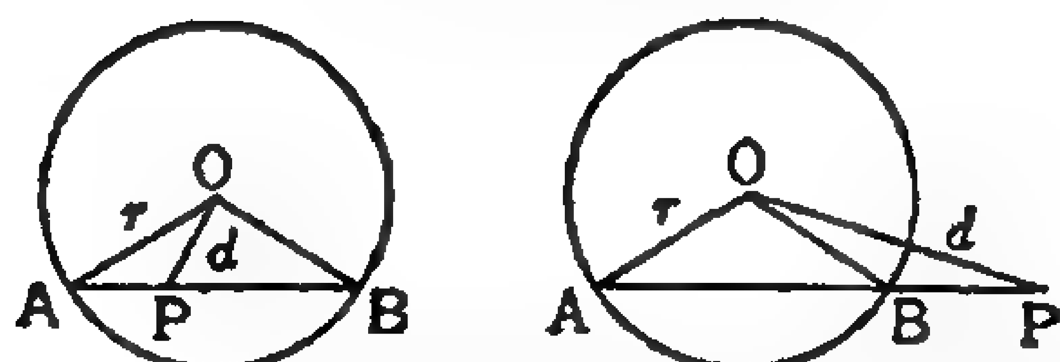
$$AP^2-AB^2=PB\cdot PC.$$



(5) 设半径为 r 的圆 O 的圆心为 O，在弦 AB 或其延长线上取点 P，连结 OP，设线段 OP 的长为 d，则

$$r^2-d^2=PA\cdot PB,$$

或 $$d^2-r^2=PA\cdot PB.$$



(6) 从 $\triangle ABC$ 的顶点 A，向对边 BC 作垂线 AH，则

(i) 当 $\angle C$ 为锐角时，则

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot CH.$$

(ii) 当 $\angle C$ 为钝角时，则

$$AB^2=AC^2+BC^2+2BC\cdot CH.$$ [902]

6.8　四边形

(1) 平行四边形各边上的正方形面积的和，等于两条对角线上的正方形面积的和。 [911]

(2) **欧拉定理**

四边形的各边上的正方形面积的和，大于其对角线上的正方形面积的和，大于两对角线中点连结线段上的正方形面积的4倍。 [918]

6.9　圆

(1) 过点 P 作圆 O 的任意割线，设与圆 O 的交点为 A、B，则

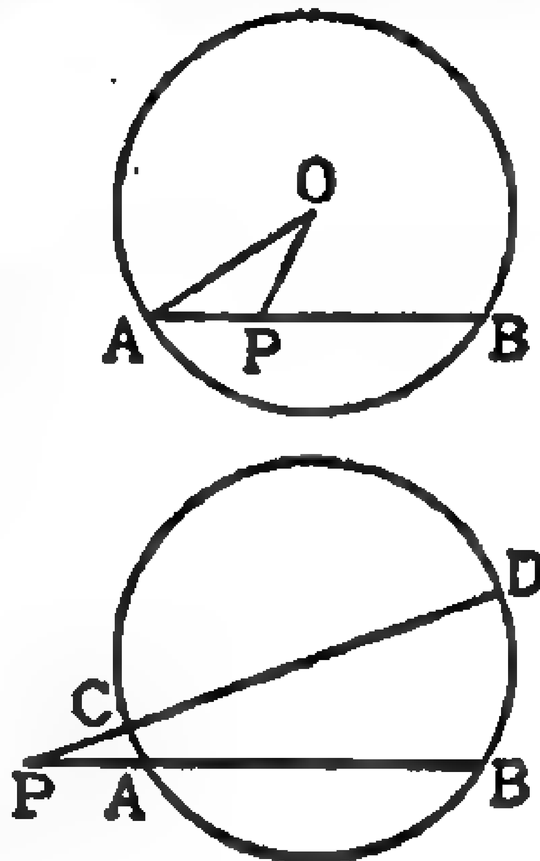
$$PA\cdot PB=OA^2\sim OP^2.$$

(2) **圆幂定理**

经过圆 O 外点 P，作两条直线与圆 O 相交，设交点分别为 A、B 和 C、D，则

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD.$$

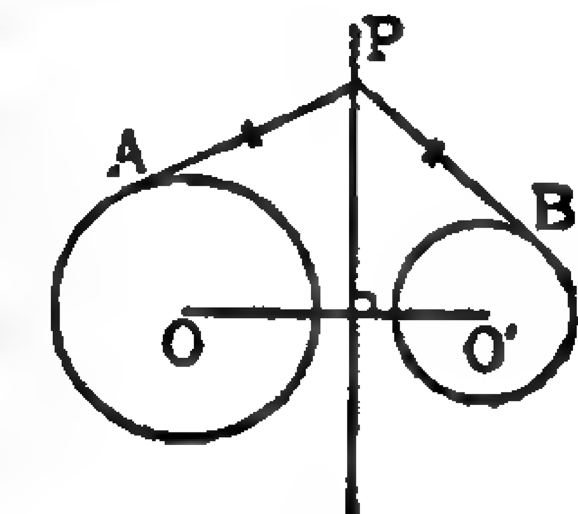
反之也成立。 [931, 948]



(3) 从圆外一点 P，作圆的割线 PAB 和切线 PC，设 C 为切点，则

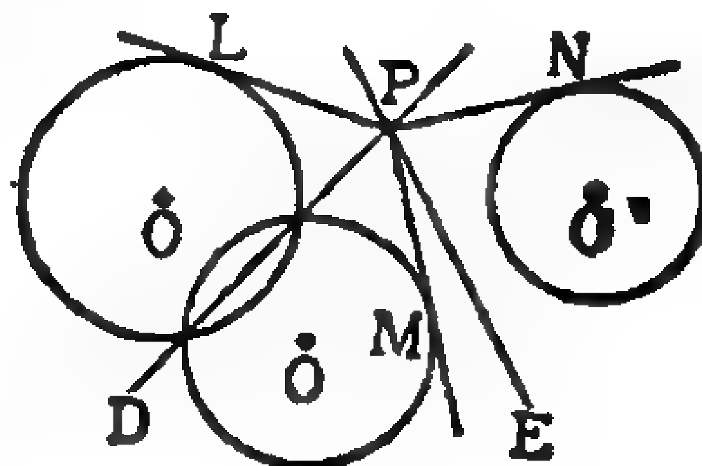
$$PC^2=PA\cdot PB.$$

反之也成立。



6.10　根轴、根心

(1) 设圆 O、圆 O' 为两定圆，从一点 P 向两圆作切线 PA、PB，其切点分别为 A、B，且使 $PA=PB$，则点 P 恒在定直线上。此直线叫做两圆的根轴。 [963, 964]



(2) **蒙日定理**

三个圆中两两的根轴或经过同一点，或平行。若经过同一点时，则称此点为根心。 [969]

6.11　海伦公式

(1) 设三角形三边长为 a、b、c，则其面积 S 为

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 $2p=a+b+c$。 [975]

(2) 设三角形的三边长为 a、b、c，内切圆半径为 r，则

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

[976, 978, 979]

(3) 设三角形的三边长为 a、b、c，其外接圆的半径为 R，面积为 S，边 BC 上的高为 h，则

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{bc}{2h}.$$ [977]

7. 比例

7.1　比例式的计算

① 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $ad=bc$。

② 若 $ad=bc$，则 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

③ 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则

(i) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，　(ii) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，

(iii) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$,

(iv) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$,

(v) 若 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots$ 时，则

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots=\frac{a+b+c+\cdots}{a'+b'+c'+\cdots}.$$

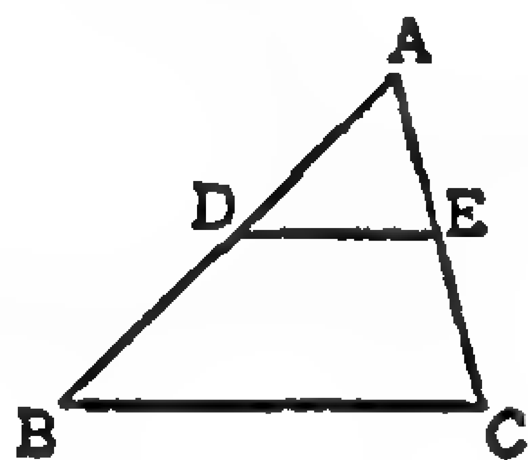
7.2 平行线与比

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，设 $DE\parallel BC$，则

① $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，② $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，

③ $\frac{BD}{AB}=\frac{EC}{AC}$，

④ $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$.



①、②、③ 的逆命题成立，但 ④ 的逆命题不成立。　[1023～1028]

(2) 若两条直线被若干平行线所截，则一条直线所截得的诸部分的比，等于另一条直线所截得的对应的诸部分的比。

(3) 已知线段 AB 的内分点 E，且 $AE:EB=m:n$，如果从点 A、B、E，向不与 AB 相交的任意直线 XY 作垂线，设其垂足分别为 A'、B'、E'，则

$(m+n)EE'=nAA'+mBB'$.　[1031]

7.3 角的平分线

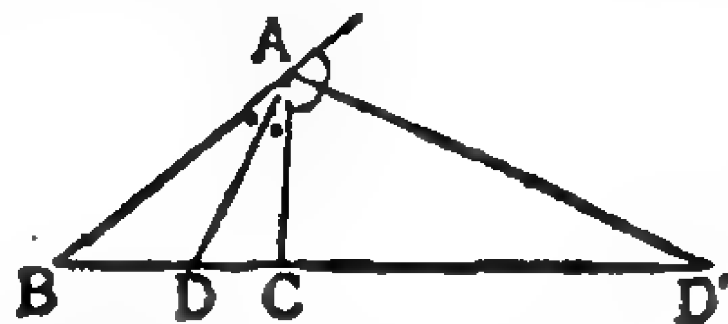
(1) 若 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的平分线与边 BC 交于点 D，则

$$AB:AC=BD:DC.$$

反之也成立。

(2) 若三角形 ABC 的顶角 A 的外角的平分线与边 BC 的延长线交于点 D'，则 $AB:AC=BD':D'C$。反之也成立。　[1059]

(3) 若在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, AD、AD' 分别为 $\angle A$、和 $\angle A$ 相邻的外角的平分线，则



$$BD=\frac{ac}{b+c},\ DC=\frac{ab}{b+c},\ BD'=\frac{ac}{c-b},$$

$$D'C=\frac{ab}{c-b},\ (c>b).\quad [1060]$$

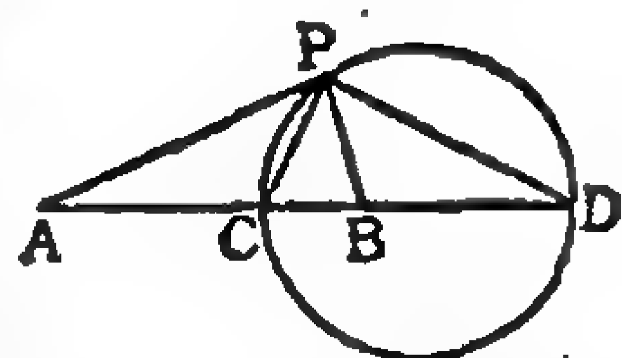
(4) 若三角形 ABC 的顶角 A 的平分线 AD、和 $\angle A$ 相邻的外角的平分线，分别与三角形 ABC 的外接圆相交于 P、Q，则

$$AB\cdot AC=AD\cdot AP,\ AB\cdot AC=AE\cdot AQ.$$

反之也成立。其中 AP 和 BC 的交点为 D，AQ 和 BC 的延长线的交点为 E。

[1074, 1080]

(5) **阿波罗尼斯圆**



设点 P 到两定点 A、B 的距离的比 $PA:PB$，等于两定线段的比 $m:n$，若以定比 $m:n$ 内分和外分定线段 AB，则点 P 总是在以两个分点的连结线段为直径的圆上（其中 $m\neq n$）。反之也成立。　[1071～1072]

7.4 相似三角形，相似多边形

(1) 三角形的相似条件

在 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中，若满足下列条件中的任何一个时，则

$$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'.$$

① $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$;

② $\angle A=\angle A'$, $AB:A'B'=AC:A'C'$;

③ $AB:A'B'=AC:A'C'=BC:B'C'$.

[1091～1093]

(2) 相似三角形的面积的比，等于相似比的平方。

(3) 多边形的相似条件

① 边数相同；

② 对应角分别相等；

③ 对应边的比相等。　[1098]

(4) 相似多边形的面积的比，等于相似比的平方。　[1099]

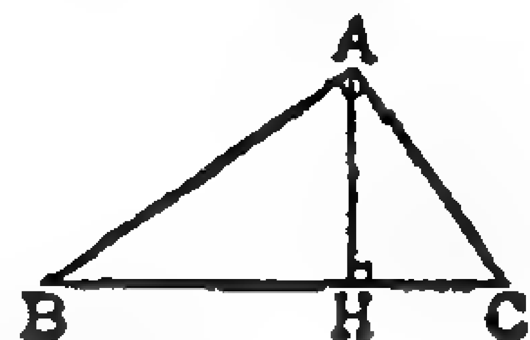
(5) 相似中心

如果在两个图形中，

① 连结对应点的直线都经过同一点 O，

② 从点 O 到对应点的距离的比都相等，则这样的两个图形，称为位似图形，点 O 叫做位似中心。　[1123～1125]

(6) 阿切塔定理



在直角三角形 ABC 中，若从直角顶 A，向斜边 BC 作垂线 AH，则

① $\triangle ABC\backsim\triangle HBA\backsim\triangle HAC$;

② $BA^2=BH\cdot BC$;

③ $CA^2=CH\cdot CB$;

④ $AH^2=BH\cdot CH$;

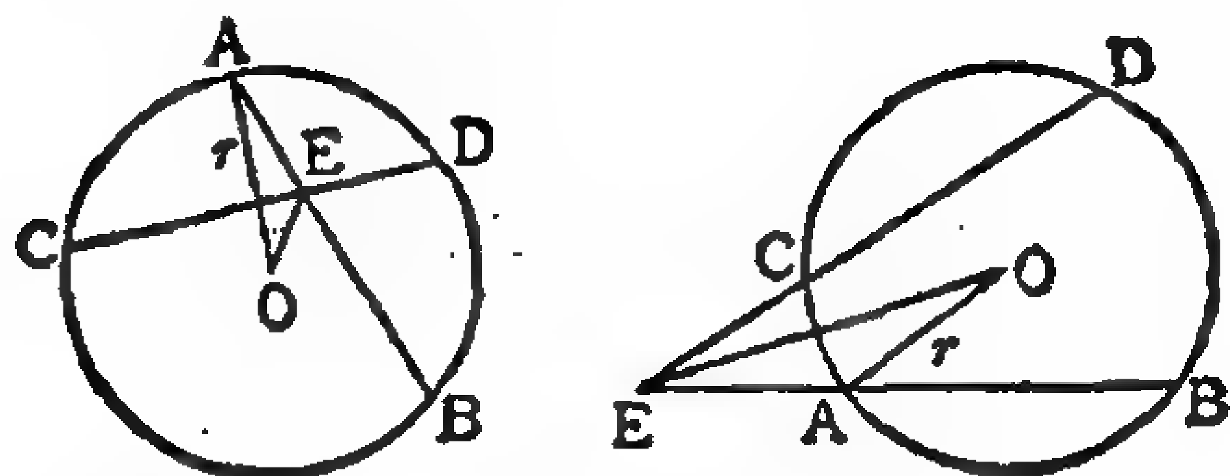
⑤ $AB^2:AC^2=BH:CH$.

[1134, 1137, 1140, 1141]

7.5 切线、割线

(1) 圆幂定理

若圆的两条弦 AB、CD 或它们的延长线相交于一点 E，则 $AE\cdot EB=CE\cdot ED$。反之也成立。



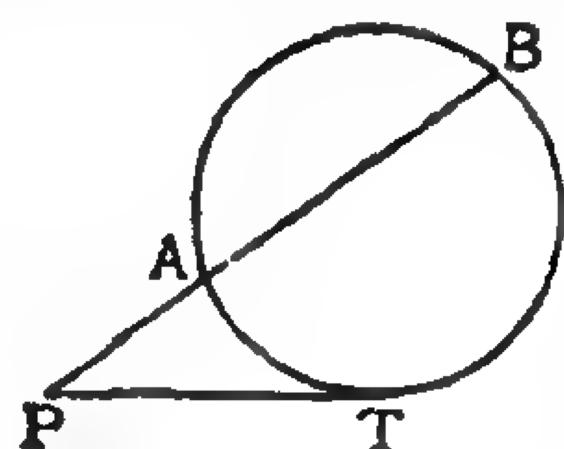
(2) 设圆的半径为 r，则

$AE\cdot EB=r^2-OE^2$，(点 E 在圆内时)；

$AE\cdot EB=OE^2-r^2$，(点 E 在圆外时)。

[1246～1252]

(3) 设 P 为线段 AB 的延长线上一点，过点 P 的线段 PT，与过三点 A、B、T 的圆，在点 T 相切的必要且充分条件是 $PT^2=PA\cdot PB$。反之也成立。



[1248, 1253, 1262]

7.6 面积与比例

(1) 同底(或等底)的两个三角形的面积的比，等于它们的高的比。

(2) 同高(或等高)的两个三角形的面积的比，等于它们的底的比。

(3) 在 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中，若 $\angle A=\angle A'$ 或 $\angle A+\angle A'=180°$，则

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}.\qquad [1456]$$

(4) 两个相似三角形的面积的比，等于相似比的平方。 [1457]

(5) 相似多边形的面积的比，等于相似比的平方。 [1458]

7.7 调和点列

(1) 设两点 P、Q 按相同的比内分和外分线段 AB，即 $\frac{AP}{PB}:\frac{AQ}{QB}=-1$，则称 P、Q 调和分割线段 AB，或称 P、Q 为对于点 A、B 的调和共轭点。称 A、B、P、Q 组成调和点列。 [1476]

(2) 若 P、Q 调和分割线段 AB，则 A、B 也调和分割线段 PQ。

(3) 设 A、B、P、Q 是调和点列，则

$$\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AB}.\qquad [1478]$$

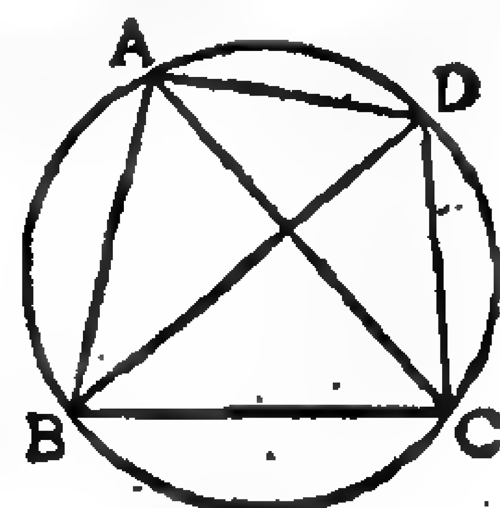
(4) 三角形 ABC 的顶角 A、和它相邻的外角的平分线，与 BC 及其延长线上的交点分别为 P、Q，则 A、B、P、Q 组成调和点列。 [1479～1494]

7.8 托勒密定理

圆内接四边形 $ABCD$ 的两组对边乘积的和等于对角线的积。即

$AB\cdot CD+BC\cdot DA$
$=AC\cdot BD$.

反之也成立。



[1500～1508]

7.9 中外比(黄金分割或中外比)

(1) 若在线段 AB 上取一点 P，使 $AP^2=AB\cdot PB$，则点 P 分 AB 为中外比(黄金分割)，点 P 叫做中外比的内分点。

又在 AB 的延长线上取点 P'，使 $AP'^2=AB\cdot P'B$，则 P' 称为中外比的外分点。

[1510～1515]

(2) 设线段 $AB=a$，P 为 AB 的中外比的内分点(或 P' 为外分点)，则 AP、BP(AP'、BP')的长是

$$AP=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)a,\quad BP=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)a,$$

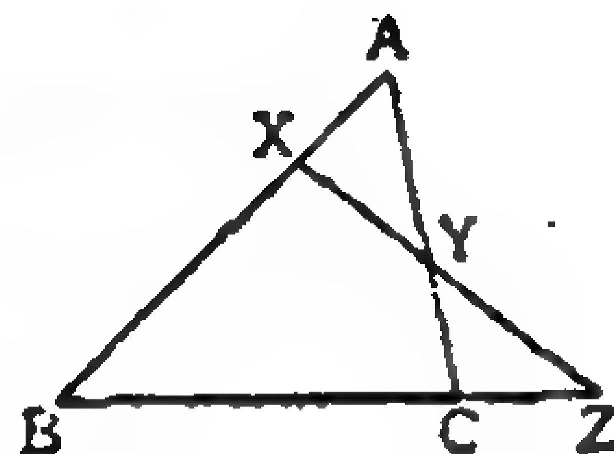
$$AP'=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)a,\quad BP'=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)a.$$

[1512]

7.10 梅涅劳斯及乔巴定理

(1) 梅涅劳斯定理

设 $\triangle ABC$ 被一直线所截，若该直线与 AB、AC、BC (或其延长线)的交点分别为 X、Y、Z，则下列等式成立：



$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZC}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$

反之也成立。 [1518～1526]

(2) 乔巴定理

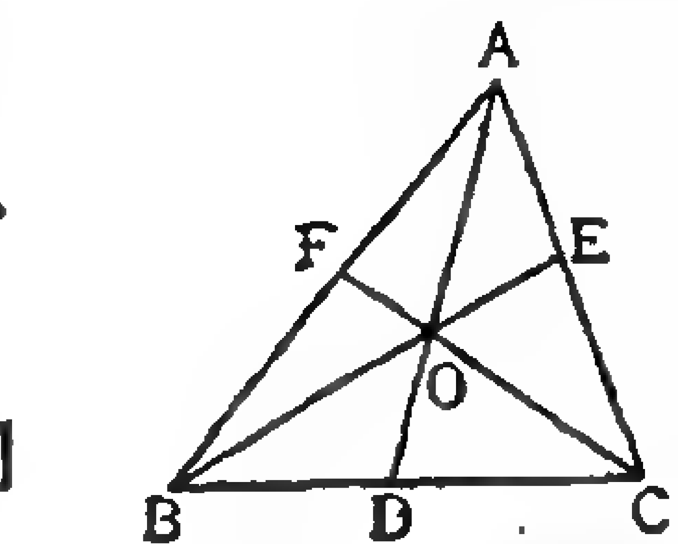
在 $\triangle ABC$ 的所在平面上取一点 O，若 AO、BO、CO 或其延长线与对边的交点分别为 D、

E、F，则

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

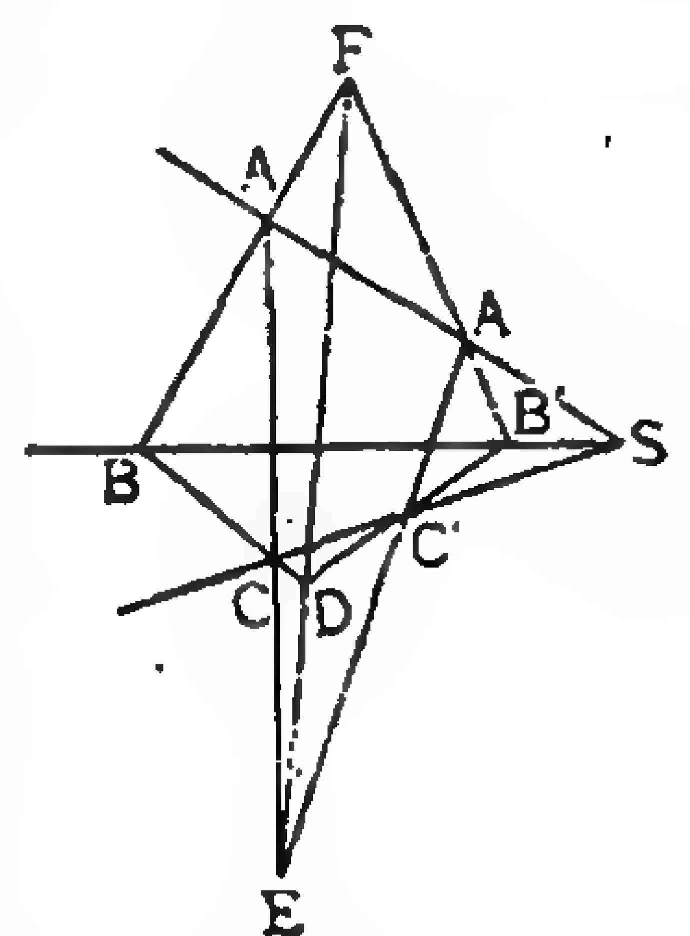
反之也成立。

[1519～1524]



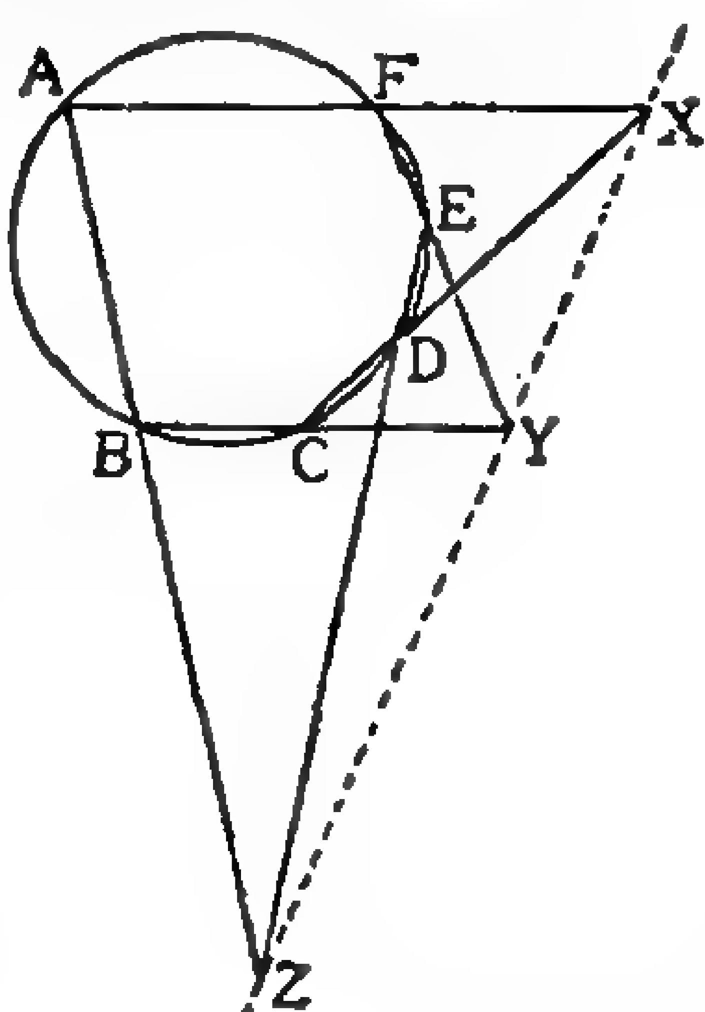
(3) 笛沙格定理

设两个三角形 ABC、$A'B'C'$，若三条直线 AA'、BB'、CC' 相交于一点 S，则 AB 与 $A'B'$，BC 与 $B'C'$，AC 与 $A'C'$ 的交点 F、D、E 在同一直线上。　[1534]



(4) 设两个三角形 ABC、DEF 的边 BC、EF 的交点为 X，边 AC、DF 的交点为 Y，边 AB、DE 的交点为 Z。若 X、Y、Z 在一条直线上，则 AD、BE、CF 相交于一点。

[1535, 1536]



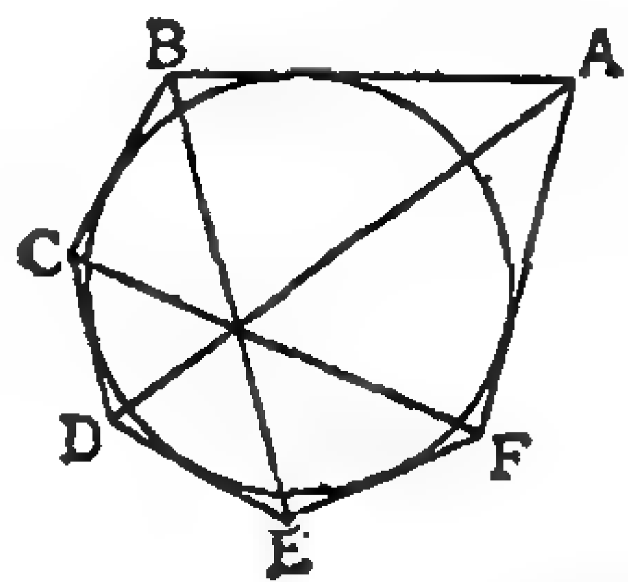
(5) 巴斯卡定理

若 $ABCDEF$ 为圆内接六边形，则它的对边延长线的交点 X、Y、Z 在同一直线上。

[1538]

(6) 布利安深定理

设 $ABCDEF$ 为圆外切六边形，则三对相对的顶点的连结线相交于一点。　[1539]



7.11　圆

(1) 半径相等的两个扇形 OAB、$O'A'B'$ 的面积的比，等于它们的弧长的比或等于它们的圆心角的比。　[1544]

(2) 两个相似弧的比，等于它们的半径的比。两个相似的扇形面积的比，等于它们的半径的平方比。　[1545]

(3) 两个圆的周长的比，等于它们的半径的比。两个圆的面积的比，等于半径的平方比。　[1546～1547]

8. 轨迹

8.1　轨迹的定义

什么是满足一定条件的点的轨迹呢？就是由满足一定条件的所有点组成的图形。因此，这个图形上，必须含有所有适合于条件的点。同时，这个图形上，不能含有任何一个不适合于条件的点。

8.2　轨迹的证明方法

要证明一个图形是适合于某一条件的点的轨迹，必须证明下面两点：

(1) 适合于给定条件的点都在这个图形上（充分条件）。

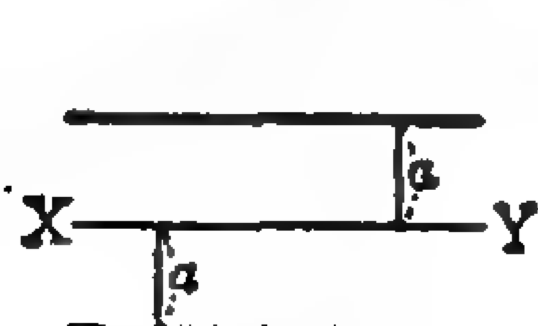
(2) 反之，这个图形上的点都适合于给定条件（必要条件）。

替代(1)、(2)，也可以用它们的逆否命题来证明。　[1615]

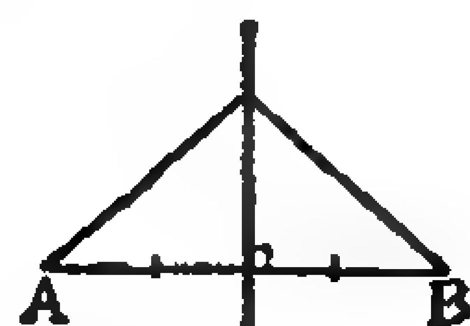
8.3　基本轨迹（形成直线的定理）

(1) 到定直线 XY 的距离等于定长的点的轨迹，是平行于该直线的两条直线。[1617]

(2) 到两定点 A、B 的距离相等的点的轨迹，是线段 AB 的垂直平分线。　[1618]



(1)



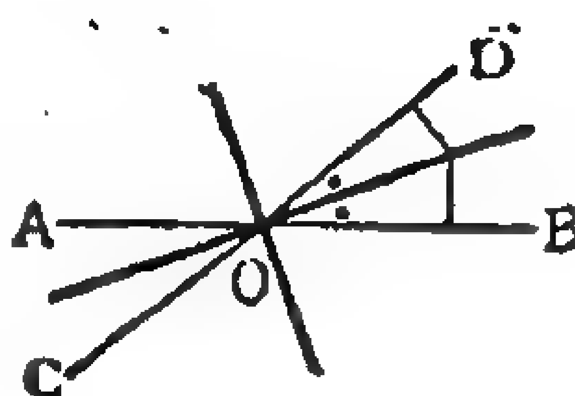
(2)

(3) 到两相交直线 AB、CD 距离相等的点的轨迹，是这两直线的夹角的平分线。

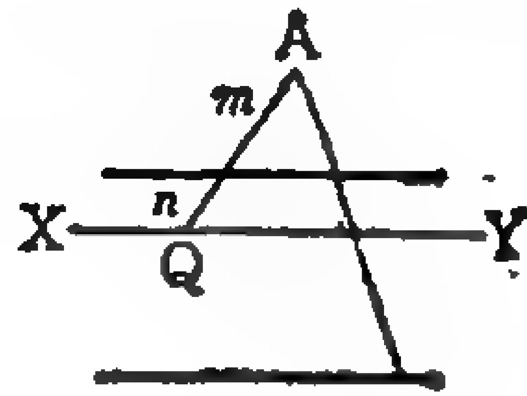
[1619]

(4) 设定直线 XY 和该直线外一定点 A，连结 A 与 XY 上的任意点 Q，以 $m:n$ 内分（或外分）线段 AQ。过定点 A 向 XY 作垂线，且以 $m:n$ 内分（或外分）此垂线，过这个内分（或外分）点，作 XY 的平行线，则此平行线是线段 AQ 的内分（或外分）点的轨迹。

[1624]



(3)



(4)

8.4 轨迹(直线)的探求方法

(1) 从适合于条件的点的特殊位置、极限位置出发，根据上述的基本轨迹，找出定点、定直线。

(2) 以适合于条件的任意点作为定点，连结成直线[如(1)那样考虑]，研究它对于定直线是否平行、垂直和作成定角。

(3) 适合于条件的点，是否在过两定点的直线上。

有时轨迹不是全条直线或整个圆，而只是其中一部分，则这个轨迹是有界限的。

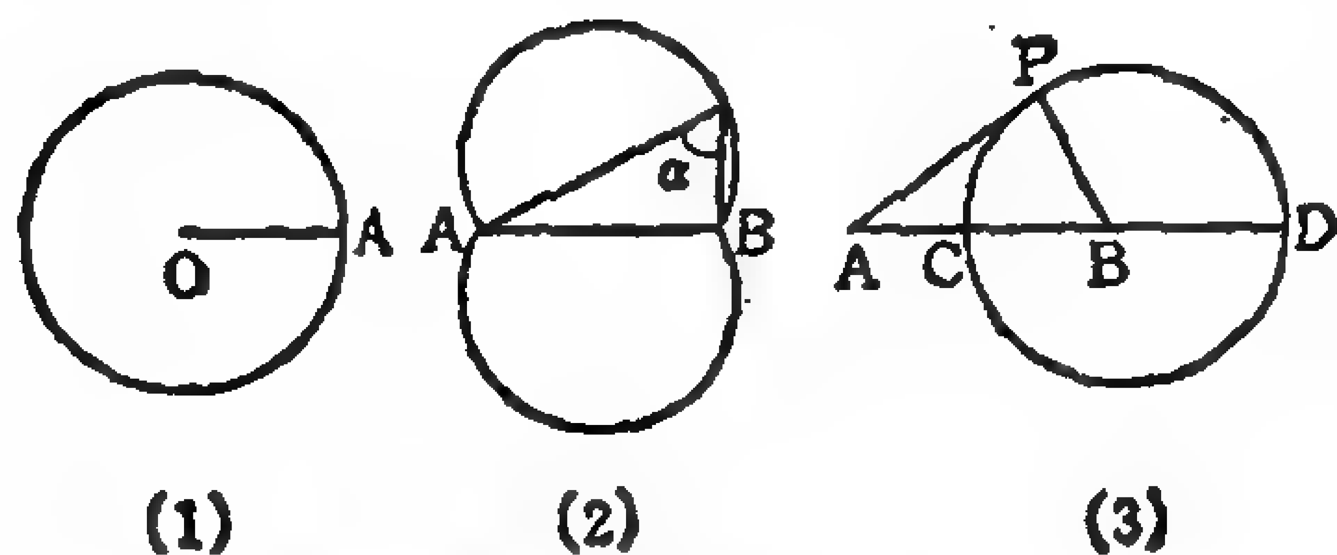
8.5 基本轨迹(形成圆的定理)

(1) 到定点的距离等于定长的点的轨迹，是以该定点为圆心，以定长为半径的圆。 [1616]

(2) 对定线段 AB 张成定角 α 的点的轨迹，是以 AB 为弦，所含圆周角等于 α 的两个弓形弧。 [1620]

(3) 点 P 到两定点的距离的比为定比 $m:n$，若以 $m:n$ 内分和外分此两定点的连结线段，则以这两个分点的连结线段为直径的圆，是到两定点的距离的比为定比 $m:n$ 的点 P 的轨迹。(其中 $m\neq n$)．(阿波罗尼斯圆)

当 $m=n$ 时，点 P 的轨迹，是连结两定点的线段的垂直平分线。 [1856～1861]



8.6 轨迹(圆)的探求方法

(1) 适合条件的点，到将作为圆心的定点的距离，是否等于定长。

(2) 对于定线段(这条定线段，在许多情况下，是以特殊点、极限点等作为两端的)，所张的角是否为定角。

(3) 到两定点的距离的比是否为定值(阿波罗尼斯圆)。

8.7 两种轨迹

(1) 若点 A 到两定点 B、C 的距离的平方和为定值 (m^2)，则点 A 的轨迹，是以 BC 的中点 M 为圆心，以 $\frac{1}{2}\sqrt{2m^2-a^2}$ 为半径的圆．其中 $BC=a$。 [1833]

(2) 若点 A 到两定点 B、C 的距离的平方差为定值 (m^2)，则点 A 的轨迹，是垂直于 BC 的两条直线，此垂线与 BC 的交点 H，到 BC 的中点 M 的距离等于 $\frac{m^2}{2a}$．其中 $BC=a$。 [1834]

8.8 范围

若适合于条件的点的轨迹为平面上的某一部分，我们就把这种轨迹称为适合于条件的点的范围。

满足已知不等式的点的轨迹，在很多情况下，是为平面上的某一部分．此时，我们就把不等式改为等式来求，满足这种关系的点的轨迹所成的线，便是所求的范围的边界。

9．作图问题

按照已知条件作出的几何图形叫做作图问题。

9.1 作图的完全解

(1) 分析

设图形已作出，研究图形所具备的性质(必要条件)。 [1942]

(2) 作图

叙述作出图形的方法。

(3) 证明

证明适合于条件的点在图形上(充分条件)。

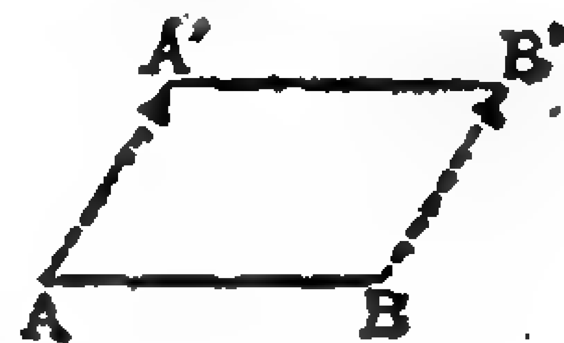
(4) 讨论

讨论作图的可能与否，在可能的情况下其解的个数。 [1956]

一般地，是按(1)、(2)、(3)、(4)四个步骤解作图题，但其中分析、讨论常常可以省略。

9.2 作图方法

(1) 平行移动法



抓住平行移动后的图形与已知图形之间的关系，从中发现作图题的解法。

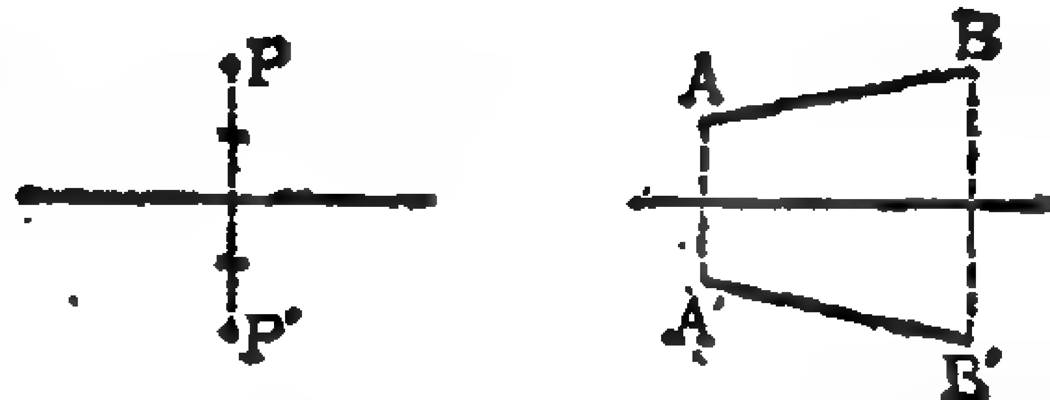
把线段 AB 平行移动到 $A'B'$，则 $AA'B'B$ 是平行四边形。

[1989, 2059～2063, 2112～2118]

(2) 对称移动法

根据图形关于点或直线的对称性，把图形作移动，抓住移动后的图形与已知图形之间

的关系，从中发现作图题的解法。点对称，线对称，对称移动法常用于关于最大、最小的作图题。 [1949～1952]



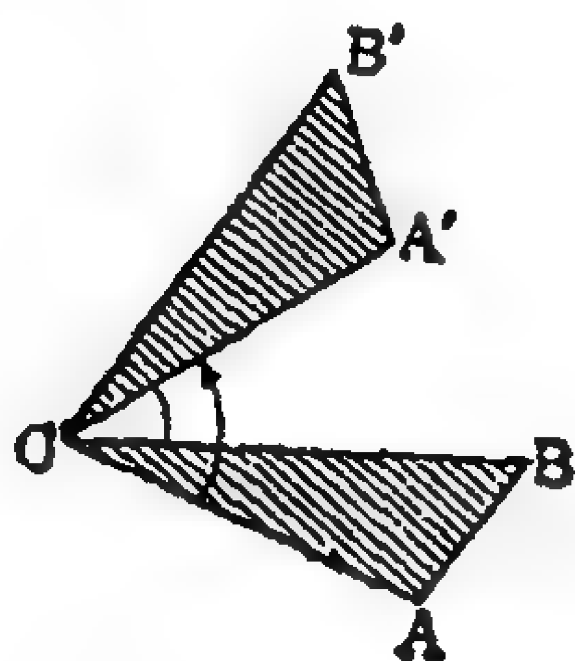
(3) 旋转法

选取适当的点为旋转中心，将已知图形旋转，从中发现其作图法。

等角，等长的量经过旋转后重合。

旋转法常用于正方形，正三角形。

正方形 → 旋转 90°，
正三角形 → 旋转 60°。



(4) 交轨法

根据给定的条件之一求出它的轨迹，再求出适合于另一条件的轨迹，由两轨迹的交点可以得出所求作图题的解。

[1936, 1944～1947, 1964～1965, 1967]

(5) 相似法

作出适合于条件的图形的相似图形，然后按相似比扩大或缩小，得到适合于条件的图形的作法。

[2360, 2417, 2426, 2502, 2506, 2632]

相似法，常常是以定角的顶点、已知点等作为位似中心来考虑作法的。

(6) 逆作图法

在已知的位置之外的任意位置上，作出所求的图形，然后将其移动到已知位置上的解法。 [2245, 2249]

(7) 代数解析法

在许多作图中，往往把问题归结为求线段的长。这时假设线段长为 x，由条件作出含 x 的代数方程，由方程的解得到作图方法。

[2021～2039]

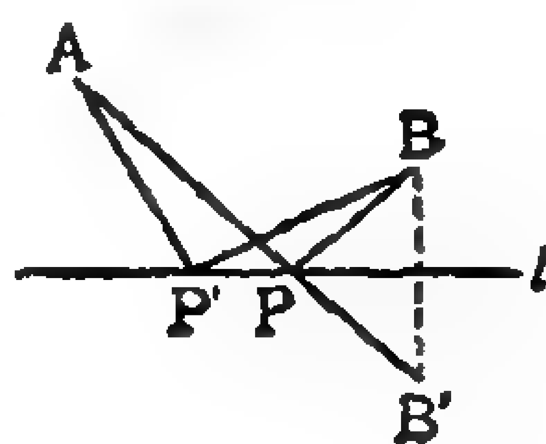
10. 最大、最小

(1) 两定点间的最短距离，是连结这两点间的线段。

(2) 定点 P 到定直线的最短距离，是从 P 向定直线所作的垂线的长。

(3) (i) 两定点在直线 l 的同侧时：

在定直线 l 上求一点 P'，使到两定点 A、B 的距离的和为最小。这时，取 B 的对称点 B'，设 AB' 与 l 的交点为 P，则

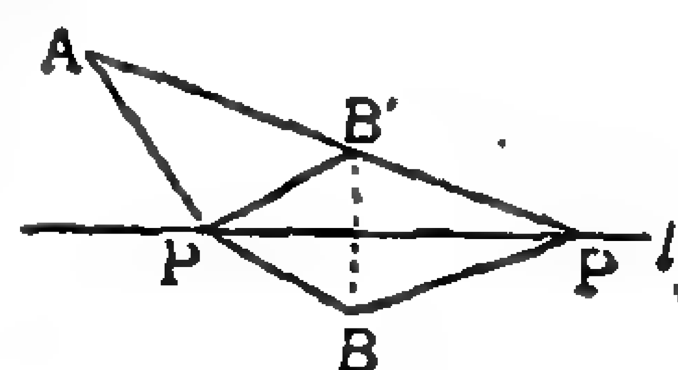


$$P'A+P'B>PA+PB.$$

[2733～2734, 2744～2746, 2786]

(ii) 两定点在 l 的异侧时：

在直线 l 上求一点 P'，使到两定点 A、B 的距离的差为最大。这时，取 B 的对称点 B'，AB' 与 l 的交点为 P，则

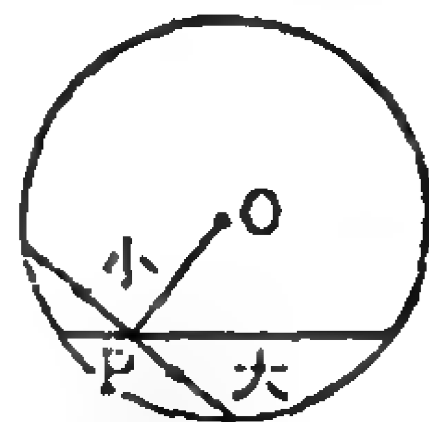


$$P'A\sim P'B<PA\sim PB.$$ [2735]

(4) 圆的直径是最大弦。

[2753]

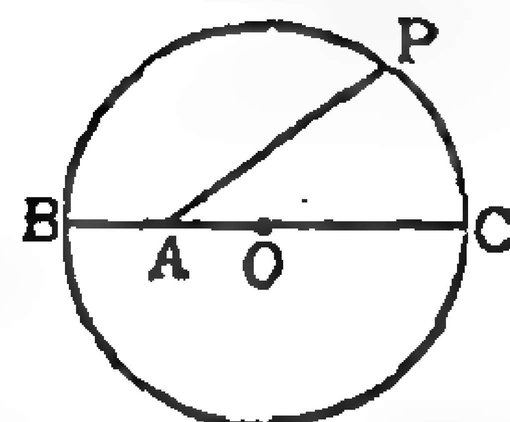
(5) 过圆内一点的弦中，被此点二等分的弦为最小。



(6) 从定点 A 到定圆的最大及最小的距离，是连结过 A 的直径与圆的交点的线段的长，

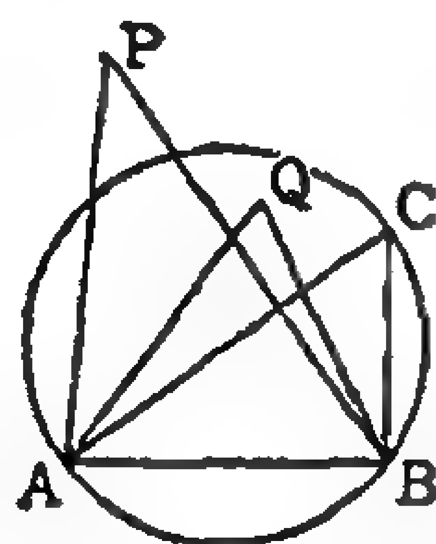
$$AB<AP<AC.$$

[2706]

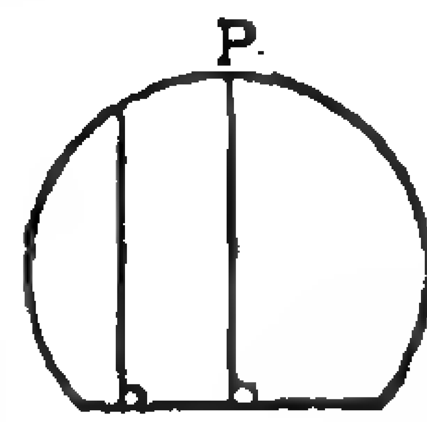


(7) 如图，设 A、B、C 为圆 O 上的点，Q 为圆内的点，P 为圆外的点，则

$$\angle Q>\angle ACB>\angle P.$$



(7)



(8)

(8) 从弓形弧上一点向弦所作的垂线中，以弧的中点向弦所作的垂线为最大。

(9) 两边为一定的三角形中，以两定边的夹角为直角的三角形的面积为最大。[2802]

(10) 周长一定的矩形中，以正方形的面积为最大。 [2804]

(11) 面积一定的矩形中，以正方形的周长为最小。 [2761, 2782]

11. 计算问题

11.1 角

(1) 边数为 n 的凸多边形的内角和为 $(n-2)\cdot 180°$，边数为 n 的凸多边形的外角和为 $2\cdot 180°$。正 n 边形的一个内角为

$$\frac{n-2}{n}\cdot 180°.$$

(2) 对角线数

边数为 n 的凸多边形的对角线数为

$$\frac{1}{2}n(n-3). \quad [2836\sim 2841]$$

11.2 面积

(1) 同高(或等高)的两个三角形的面积的比，等于它们的底边长的比。

(2) 在 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中，若 $\angle A=\angle A'$ 或 $\angle A+\angle A'=180°$，则

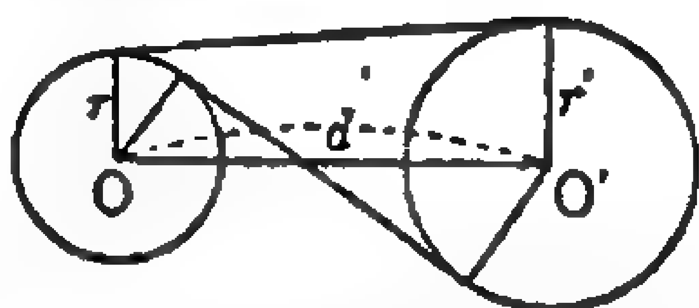
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}. \quad [1456]$$

(3) 相似三角形的面积的比，等于其相似比的平方。 [2851, 2852]

11.3 两圆的公(内、外)切线

内公切线长是

$\sqrt{d^2-(r+r')^2}$；



外公切线长是

$\sqrt{d^2-(r-r')^2}$，

其中 r、r' 是两圆的半径，d 是两圆的圆心距离。 [2864~2865, 2994~2995]

11.4 三角形的角平分线、中线

在 $\triangle ABC$ 中，设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$，则 $\angle A$ 的平分线

$$AD=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}, \quad [2867]$$

中线 $$AM=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}. \quad [2869]$$

11.5 面积

(1) 边长为 a 的正三角形的高是 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，面积是 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。 [2889, 2893]

(2) 三边长分别为 a、b、c 的三角形面积

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

其中 $2s=a+b+c$ (海伦公式)。

[2890, 2899, 2974~2975]

(3) 半径为 r 的圆面积 $S=\pi r^2$。

半径为 r，圆心角为 $\alpha°$ 的扇形面积

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{\pi\alpha r^2}{360}, \quad l=\frac{\pi\alpha r}{180},$$

(l 是扇形的弧长)。

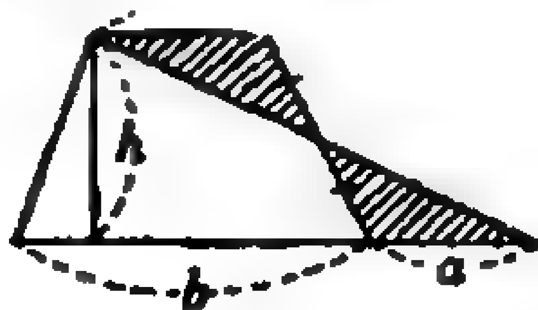
[2902, 2949~2957]

(4) 梯形的面积

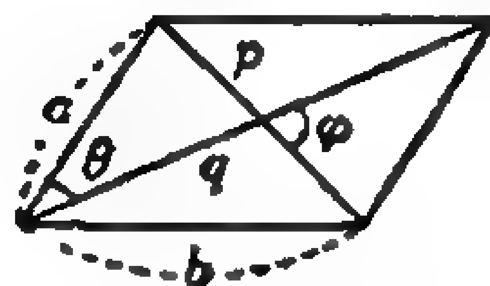
设上底为 a，下底为 b，高为 h，则面积

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

[2908, 2927]



(5) 平行四边形、菱形的面积



设两邻边为 a、b，a、b 的夹角为 θ，两条对角线为 p、q，p、q 的夹角为 φ 时，则面积 S 为

$$S=ab\sin\theta=\frac{1}{2}pq\sin\varphi. \quad [2911, 2917]$$

(6) 设四边形的四边长分别为 a、b、c、d，对角线长为 m、n，则面积

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{2mn+a^2-b^2+c^2-d^2}\times\sqrt{2mn-a^2+b^2-c^2+d^2}.$$

当四边形为圆内接四边形时，设 $2p=a+b+c+d$，则面积

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \quad [2928]$$

11.6 正多边形

(1) 半径为 R 的圆内接正 n 边形的一边长为 a 时，则在同圆的内接正 $2n$ 边形的一边长

$$a'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2R^2+aR}-\sqrt{2R^2-aR}).$$

又圆外切正 n 边形的一边长为 b 时，则外切正 $2n$ 边形的一边长

$$b'=\frac{2bR}{\sqrt{4R^2+b^2}+2R}. \quad [2929]$$

(2) 半径为 R 的圆的内接正 n 边形的一边为 a，外切正 n 边形的一边为 a'，则

$$a'=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}. \quad [2930]$$

(3) 半径为 R 的圆的外切正 n 边形的一边为 a'，内接正 n 边形的一边为 a，则

$$a=\frac{2a'R}{\sqrt{4R^2+a'^2}}. \quad [2931]$$

(4) 半径为 r 的圆的内接正三角形的

面积是 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$，外切正三角形的面积是 $3\sqrt{3}r^2$。 [2934]

12. 立体几何学

12.1 空间图形

在研究空间图形时，以下面公理作为论证的依据。

公理1 当图形的形状和大小不变时，可以移动到任何位置。

公理2 过不同的两点可以引一条直线，且只有一条直线。

公理3 过不在一直线上的三点的平面，有且只有一个。

公理4 过直线外一点，平行于该直线的直线，有且只有一条。

公理5 连结平面上两点的直线在这个平面上。

公理6 不同的两平面若共点，则这两平面共有一条过此点的直线。直线外的点不是公共点。 [3006]

12.2 确定平面的条件

在下列情况下所确定的平面只有一个。

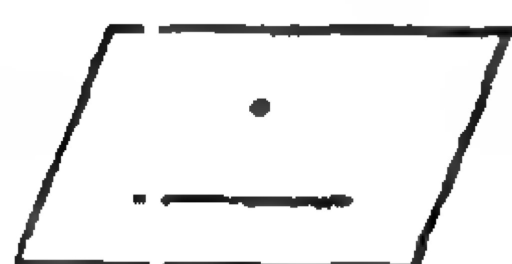
(1) 不在同一直线上的三点。

(2) 一直线和此直线外一点。

(3) 相交的两直线。

(4) 平行的两直线。 [3006]


(1)


(2)


(3)


(4)

12.3 直线与平面(1)

(1) 过两平行线之一而不过其中另一条直线的平面，一定平行于这另一条直线. [3006]

(2) 若一个平面与两平行线中的一条相交，则它与另一条也相交。

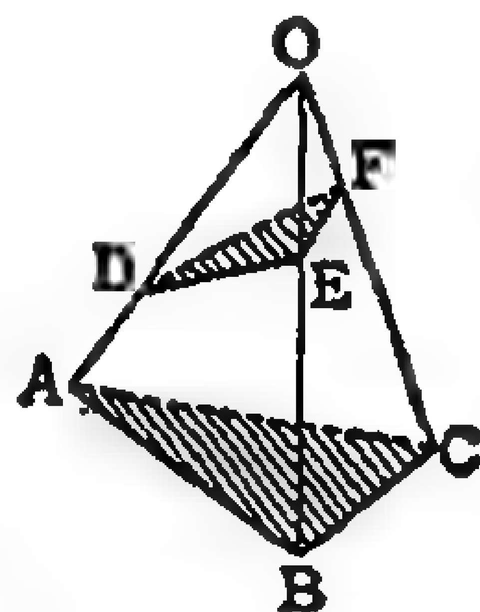
(3) 若两个平面平行于同一直线，则这两个平面的交线平行于这条直线。 [3012]

(4) 若两平行平面与第三个平面相交，则其交线互相平行。 [3014]

(5) 一直线若与互相平行的两平面中的一个相交，则它与另一个平面也相交。 [3015]

(6) 笛沙格定理

对于不在同一平面上的两个三角形 ABC、DEF，若对应顶点 A 与 D、B 与 E、C 与 F 的三条连线相交于一点 O，对应边 AB 与 DE、BC 与 EF、CA 与 FD 的交点分别为 X、Y、Z，则 X、Y、Z 在一直线上。反之也成立。 [3024]

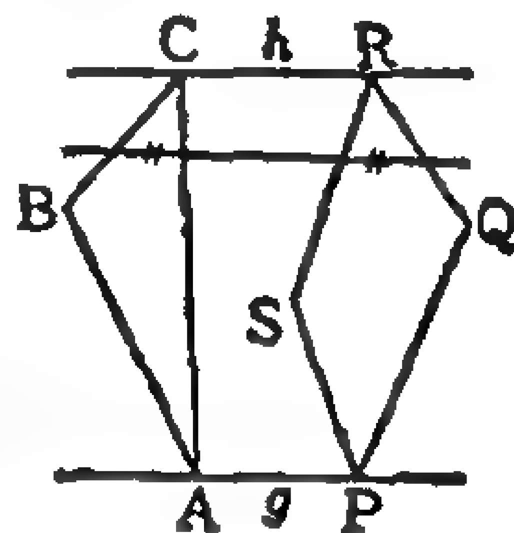


(7) 卡瓦列利定理

设 $\triangle ABC$ 与四边形 $PQRS$ 在同一平面上，过 A、P 的直线 g，平行于过 C、R 的直线 h，如果平行于 g 的直线被这两图形所截取的线段长总相等，则

(i) B、Q、S 在一直线上；

(ii) 两图形的面积相等。 [3028]



(8) 若直线 AO 与平面 α 相交于 O，且垂直于 α 上的两直线 OX、OY，则 AO 垂直于过 α 上的点 O 的一切直线。这时，称 AO 为平面 α 的垂线。 [3035]

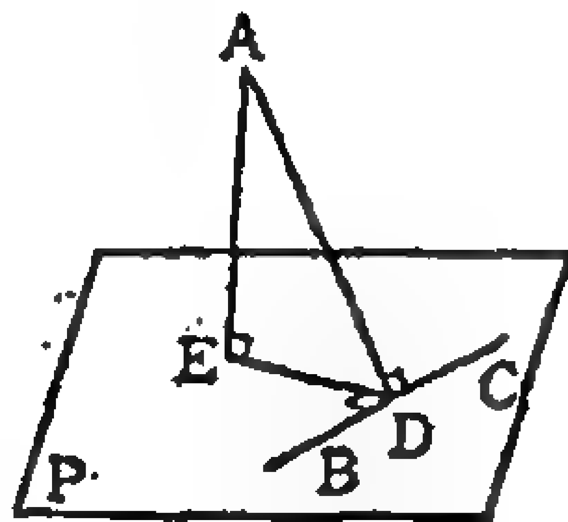
(9) 一直线 l，如果垂直于同一平面 α 上的两相交直线 m、n，则 l 垂直于 α 上的一切直线。从而得出，l 垂直于平面 α。 [3036]

(10) 与两异面直线 a、b 都垂直相交的直线有且只有一条。 [3037]

将此垂线称为两异面直线 a、b 的公垂线，其长度为夹在这两条异面直线间的线段的长度。

(11) 从平面外一点到这个平面的最短线(垂线)有且只有一条。 [3040]

(12) (i) 从一点 A，向不过 A 的平面 P 上的直线 BC 作垂线，其垂足为 D. 在平面 P 上，过 D 作 BC 的垂线 DE，再从 A 作 DE 的垂线 AE，则 AE 垂直于平面 P。



(ii) 如果 $P\perp AE$，$AD\perp BC$，则 $DE\perp BC$。

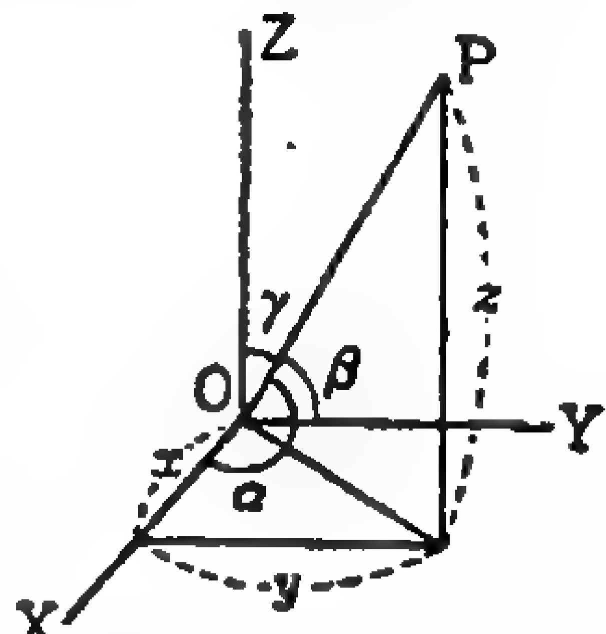
(iii) 如果 $P\perp AE$，$ED\perp BC$，则 $AD\perp BC$。 [3043～3047, 3060～3061]

12.4 直线与平面(2)

(1) 如果一个平面α，垂直于另一个平面β上的一直线l，则α垂直于β。 [3049]

(2) 已知相交的两平面α、β与另一平面γ，若$\alpha\perp\gamma$，α、γ的交线垂直于α、β的交线，则$\beta\perp\gamma$。 [3050]

(3) 如果相交的两平面分别垂直于第三个平面，则这两平面的交线垂直于第三个平面。 [3052]



(4) 三直线OX、OY、OZ相交于O，且两两相互垂直，连结PO，设PO与OX、OY、OZ的夹角分别为α、β、γ，点P到平面YOZ的距离为x，点P到平面ZOX的距离为y，点P到平面XOY的距离为z，则

$$x=OP\cos\alpha,\ y=OP\cos\beta,\ z=OP\cos\gamma,$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

设$l=\cos\alpha$，$m=\cos\beta$，$n=\cos\gamma$，则l，m，n称为直线OP的方向余弦。 [3071～3073]

12.5 二面角、多面角

I. 以同一直线为界限的两个半平面所组成的图形称为二面角。这直线称为二面角的棱，这两个半平面称为二面角的面。

II. 把相交于一点的很多平面限在各相邻平面交线和相交点之间时，这些平面所组成的图形称为多面角。相邻两面的交线称为多面角的棱。相邻的两棱组成的角称为多面角的面角。

(1) 三面角的任意一个面角，小于其他两个面角的和，而大于其他两个面角的差。 [3076]

(2) 任意凸多面角的所有面角的和小于四直角。 [3077]

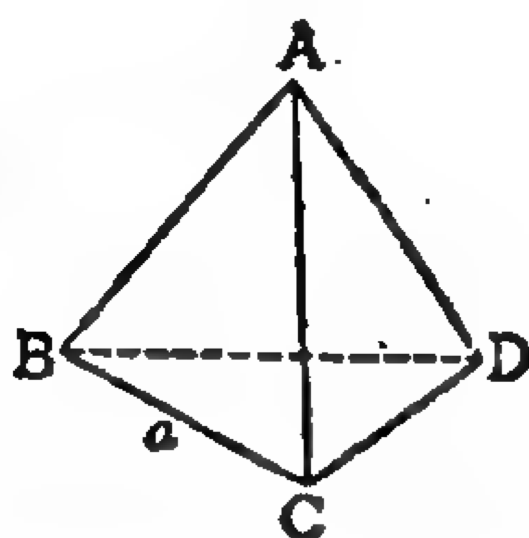
12.6 棱锥、棱柱、多面体

平面上一个多边形和以它的各边作底边，与这平面外一点为公共顶点的三角形所包围的多面体称为棱锥。这个多边形称为棱锥的底面。各个三角形称为棱锥的侧面。其公共顶点称为棱锥的顶点。相邻侧面的交线称为棱锥的侧棱。顶点与底面的距离称为棱锥的高。

有两个面平行，而其他的面都平行于一条直线的多面体称为棱柱。

(1) 边长为a的正八面体的体积

$$V=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3. \quad [3117]$$



(2) 边长为a的正四面体的体积

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3. \quad [3123]$$

(3) 欧拉定理

设凸多面体的棱数为A，顶点数为S，面数为F，则

$$F+S=A+2. \quad [3140～3142]$$

(4) 凸正多面体有且只有五种。

这就是：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体。这里，所谓正多面体，是所有的面都为全等的正多边形，在各顶点相交的面的个数相等的多面体。 [3141]

12.7 旋转体的表面积和体积

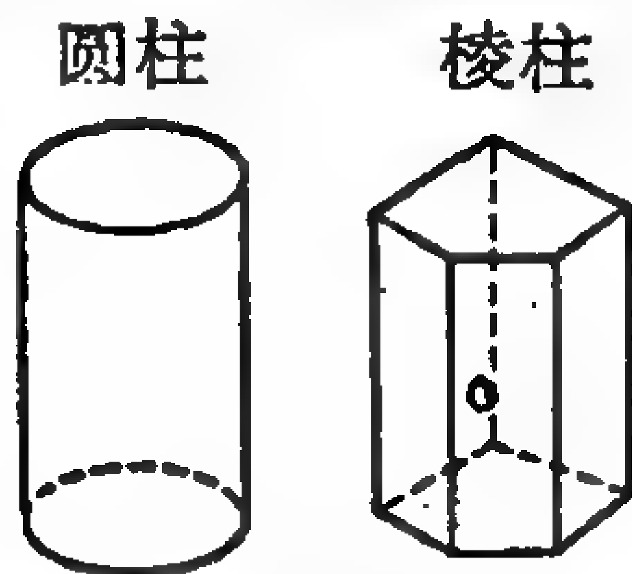
(1) 底面积为S，高为h的柱体的体积

$$V=Sh. \quad [3147]$$

(2) 设锥体的底面积为S，高为h，则它的体积$V=\frac{1}{3}Sh$。 [3148]

12.8 圆柱

以矩形的一边为轴，将矩形旋转一周时所形成的几何体称为直圆柱。作为轴的边的对边称为母线。由母线所形成的曲面称为圆柱的侧面。



以直角三角形的一直角边作为轴，将直角三角形旋转一周所形成的几何体称为直圆锥，把斜边称为直圆锥的母线，由母线所形成的曲面称为直圆锥的侧面。

以平行于直圆锥底面的平面来截直圆锥，得到两个立体图形，其中含有原来底面的几何体称为直圆台。

(1) 直圆柱的侧面积和体积，是这个直圆柱的内接或外切正棱柱的侧面积和体积，当其底面的边数无限增加时的极限值。

侧面积 $S=2\pi rh$,

体积 $V=\pi r^2h$,

其中 r 为直圆柱底面的半径长，h 为高。 [3151]

(2) 设直圆柱底面圆的半径为 r，高为 h，则全表面积 $S=2\pi r(h+r)$。 [3153～3158]

12.9 圆锥、圆台

(1) 直圆锥的侧面积和体积，是这个直圆锥的内接或外切的正棱锥的侧面积和体积，当其底面的边数无限增加时的极限值。

直圆锥的侧面积 $S=\pi rl$，

直圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$。

直圆锥

其中，r 为直圆锥的底面半径长，h 为高，l 为母线长。 [3159]

(2) 设直圆锥的底面半径为 r，斜高为 l，则全表面积 $S=\pi r(l+r)$。 [3161]

(3) 斜圆锥的体积

$$V=\frac{1}{3}Fh,$$

但假设内接于斜圆锥的底面的正 n 边形作为底面，内接于斜圆锥的斜 n 棱锥的底面积为 F_n，高为 h，当 n 无限增大时 F_n 的极限值为 F。[3160]

斜圆锥

(4) 直圆台的侧面积

$$S=\pi(r+r')l,$$

$$S=\frac{1}{2}(p+p')l,$$

其中 r、r' 为圆台的两底面的半径长，p、p' 为两底面的周长，l 为斜高。 [3167～3171]

圆台

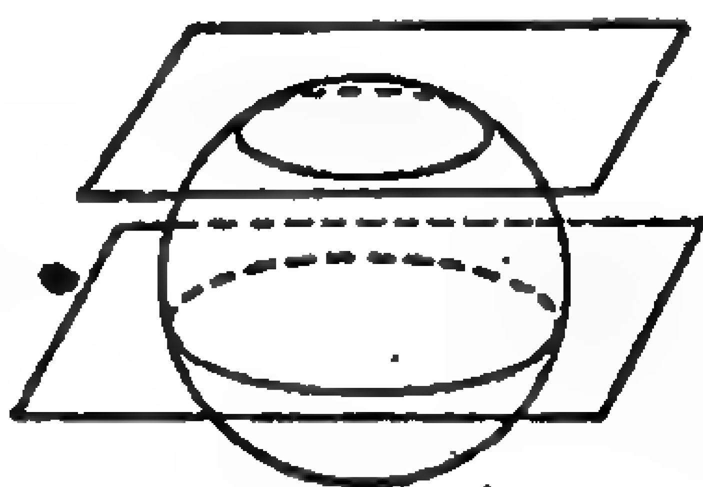
(5) 直圆台的体积

$$V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2),$$

其中 r、r' 为直圆台的上底和下底的半径长，h 为高。 [3172～3175]

12.10 球

用半圆，以它的直径为轴旋转一周所形成的曲面称为球面。由球面所包围的立体称为球，有时也把球面简称为球。



用平行的两平面截球时，把割开的部分称为球冠，球冠连同包含其内面的部分称为球缺。同时，把剩下的部分称为球带，球带连同包含其内面的部分称为球台。

(1) 若用一平面截球时，则其截口曲线即交线是圆或是点。 [3266]

(2) 用过球心的平面截球所得的截口，是用平面截球得到的截口中的最大者。我们把这个最大的截口称为球的大圆。用不过球心的平面截球所得的截口称为球的小圆。 [3267]

(3) 从半径为 r 的球心，向一直线 l 作垂线，设垂线长为 d，则球与直线有如下关系：

① $d<r \Leftrightarrow$ 相交于两点。

② $d=r \Leftrightarrow$ 有一个公共点。

③ $d>r \Leftrightarrow$ 没有公共点。

在 ② 的情况时，称为直线与球相切，把 l 称为切线，公共点称为切点。

又，当平面与球只有一个公共点时，称为平面与球相切，把这个平面称为球的切面，仅有的一个公共点称为切点。

当两球 O、O' 只有一个公共点时，称为两球相切，该公共点称为切点。这时，若两球一个互为另一个之外，则称为外切；若一球在另一球之内部，则称为内切。

若两球的公共点多于一点时，则称为两球相交。 [3284～3294]

(4) 若相异的两个球，在它们的连心线上有一个公共点，则两球相切。 [3293]

(5) 若两球相交时，则交线是一个圆，且这个圆是垂直于两球的连心线，而圆心又在这条直线上。 [3295]

(6) 设两球 O、O' 的半径分别为 r、r'、两球心间的距离 $OO'=d$，则两球有如下关系：

① 相互外离 $\Leftrightarrow d>r+r'$。

② 外切 $\Leftrightarrow d=r+r'$。

③ 相交 $\Leftrightarrow r\sim r'<d<r+r'$。

④ 内切 $\Leftrightarrow d=r\sim r'$。

⑤ 一个在另一个的内部 $\Leftrightarrow d<r\sim r'$。 [3296]

(7) 设球的半径为 r，体积为 V，表面积为 S，则

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,\quad S=4\pi r^2.$$

12.11 球面三角形

以球心为顶点的三个三角形所在的平面，与球面相交得到大圆弧，由三个大圆弧所围成的球面上的一部分称为球面三角形，将三个弧称为它的边，将两边的交点称为它的顶点，在各顶点上两边的夹角称为它的角。

(1) 球面上两个大圆的夹角，等于这两个大圆的平面作成的二面角。 [3317]

(2) 球面三角形任意两边的和大于第三边。 [3318]

(3) 在同一个或相等的球面上，两个球面三角形的三边及三个角，以相同的方向顺次分别相等时，我们称这样的两个球面三角形是全等的。如果以相反的方向顺次分别相等时，我们称这样的两个球面三角形是对称的.

(4) 互为对称的球面三角形，即使是相互等边、等角，也不一定是全等的。

(5) 两个球面三角形全等或对称的条件:

① 两边及其夹角分别相等; [3327]

② 两角及角的夹边分别相等; [3328]

③ 三边分别相等; [3329]

④ 三个角分别相等。

(6) 在球面三角形中，若两边相等，则它们的对角也相等。

(7) 在球面三角形中，若两角相等，则它们的对边也相等。 [3322]

(8) 在球面三角形中，若两角不等时，则大角所对的边大于小角所对的边。

(9) 在球面三角形中，若两边不等时，则大边所对的角大于小边所对的角。

12.12 投影画法

从空间一点 P，向平面 π 作垂线，其垂足为 P'，则 P' 称为点 P 在平面 π 上的正射影或简称为射影。图形 f 上的各个点，在平面 π 上的正射影的集合，称为图形 f 投射在平面 π 上的正射影又简称为射影。 [3341]

(1) 一直线 g，在不与它垂直的平面 π 上的正射影 g' 是一直线。 [3341]

(2) 设两平面 α、β 的交角是 θ，若 α 上的三角形 ABC，在 β 上的正射影为三角形 $A'B'C'$，则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'B'C'}\cdot\cos\theta$。 [3354, 3356]

(3) 在(2)中，若取一个多边形替代 α 上的三角形 ABC，其面积为 S，设这个多边形在 β 上的正射影的多边形的面积为 S'，则 $S'=S\cos\theta$。 [3355]

(4) 要求得线段的实长，必须用

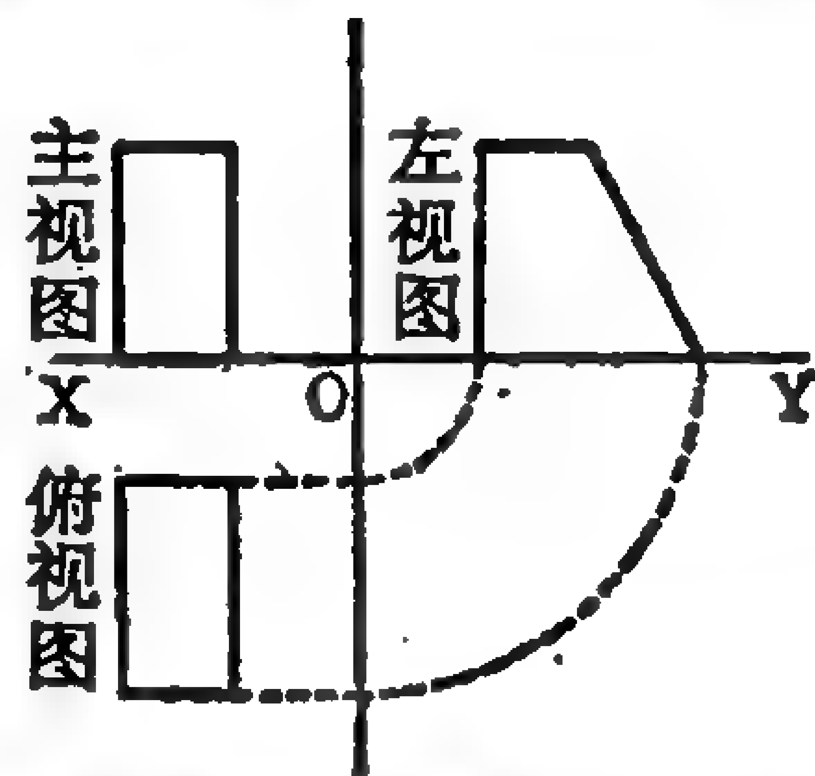
① 旋转法，

② 迭合法。 [3358～3362]

12.13 投影法

两两互相垂直的三平面，把空间分为八个部分。将放置在一个部分中的几何体，向三个平面作这个几何体的正射影所得的图形，称为投影图。

三个平面中，把水平的平面称为水平投影面，垂直于水平投影面而正面放置的平面称为垂直投影面，剩下的一个平面称为侧投影面。同时，把水平投影面与垂直投影面的交线称为基线。



我们把这些平面统称为投影面。把在各投影面上的投影图，分别称为俯视图、主视图和侧视图。

一平面与水平投影面及垂直投影面的交线称为平面的迹。在垂直投影面上的称为垂直迹，在水平投影面上的称为水平迹。

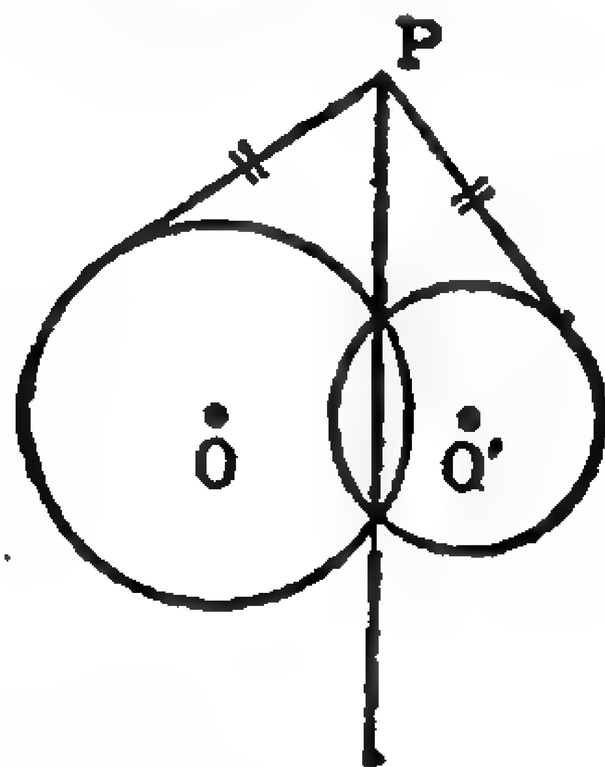
[3371～3375]

13. 近世几何学

13.1 根轴

(1) 由一点 P 向两圆作切线，使切线长相等的点的轨迹，是过两圆交点的直线。这条直线叫做两圆的根轴。

[3392, 3395, 3396]



(2) 三个圆的根轴相交于一点，这点叫做三个圆的根心。

[3393]

13.2 调和点列、调和线束

(1) 线段 AB 被两点 P、Q 按相同的比内分、外分时，即 $\frac{AP}{QB}:\frac{AQ}{QB}=-1$，则称 A、B、P、Q 成调和点列。

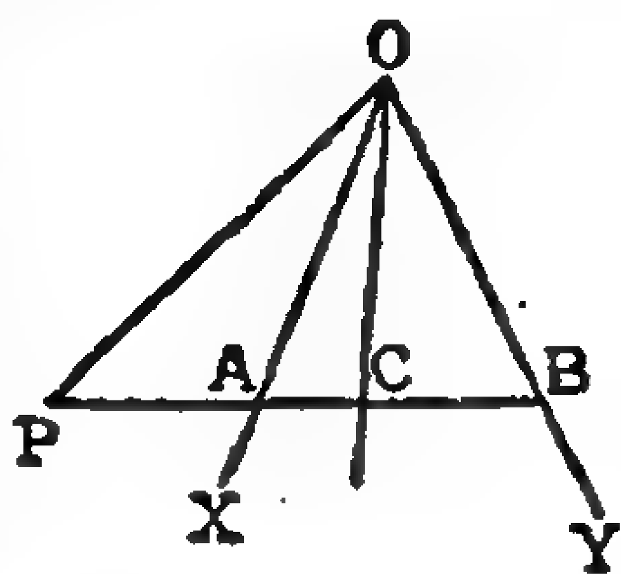
(2) 如果过调和点列的四条直线交于一点，则这四条直线叫做调和线束。

(3) 任意一条直线截调和线束所得的截点，也成调和点列。 [3401]

(4) 设 AB 被点 P、Q 调和分割，AB 的中点为 M，则 $AM^2=MP\cdot MQ$。

13.3 极点、极直线

(1) 若过定点 P 的直线与两条定直线 OX、OY 的交点分别为 A、B，则点 P 关于 AB 的调和共轭点 C 的轨迹是直线 OC。直线 OC 叫做点 P 的极直线，点 P 叫做直线 OC 的极点。 [3405]



(2) 若从圆外一定点 P 向圆作两条切线，则连结两切点的直线是定点 P 的极直线，点 P 是极点。 [3409]

(3) 以两条直线的交点为极点的极直线，是连结各直线的极点的直线。

(4) 连结两点的直线的极点，是这两点的极直线的交点。

(5) 一条定直线上的各点所对应的极直线，都过一定点。这定点是直线的极点。

(6) 过一定点的各条直线的极点，都在一条直线上。这条直线是定点的极直线。

(7) 圆内接四边形的对边的交点，是另外两对边的交点与对角线交点所连结的直线的极点。 [3413]

(8) 若在圆内接四边形 $ABCD$ 中，AB、CD 的交点为 X，AD、BC 的交点为 Y，AC、BD 的交点为 Z，则 $\triangle XYZ$ 是自共轭三角形。 [3422]

(9) 若四点在同一平面上，且任何三点都不共线，则连结四点的六条直线所成的图形，叫做完全四边形。而这四点叫做顶点，连结这些点的六条直线叫做边，不过同一顶点的边叫做对边，对边的交点作成的三角形叫做对角点三角形。

(10) 设完全四边形 $ABCD$ 的对角点为 E、O、F，则线束 $E(A, O, B, F)$ 是调和线束，从而得出 EO 是点 F 的极直线。 [3408]

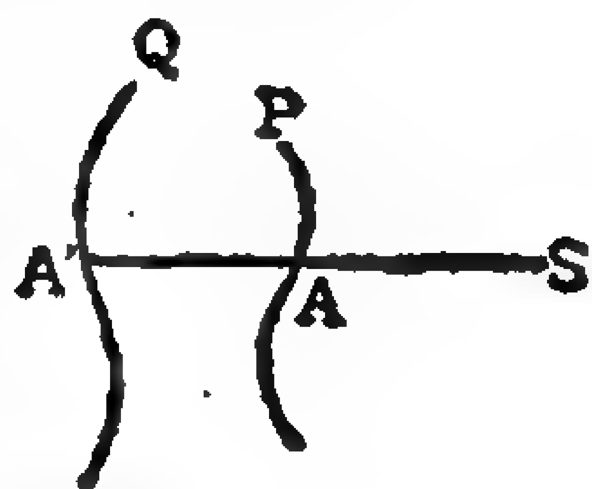
(11) 圆外切六边形 $ABCDEF$ 的三条对角线 AD、BE、CF 相交于一点。(布利安深定理) [3428]

(12) 若关于圆 O 的两点 P、Q 的极直线分别为 X、Y，从点 P、Q 分别向 X、Y 作垂线 PM、QN，则

$$\frac{OP}{OQ}=\frac{PM}{QN}$$ (沙门定理)。 [3430]

13.4 反形

(1) 设有定点 S 及图形 P，连结 P 上一点 A 与 S，在此连线上取点 A'，使 $SA\cdot SA'=i$ (一定)，则点 A' 的轨迹叫做图形 P 的反形。点 S 叫反演中心。i 叫反演幂。 [3431]



(2) 圆的反形是圆或者是直线。 [3435~3439]

(3) 设两条曲线 X、Y 相交于一点 A，X、Y 的反形分别为 X'、Y'，则 X'、Y' 也相交，其两交点互为对应点，且在此点处的交角相等。 [3434]

13.5 十字比、对合

(1) 一条直线上有四点 A、B、C、D，按其顺序作成 $\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD}$ 或 $AB\cdot CD:AD\cdot CB$，这四点叫做十字比，或称非调和比，用 $(ABCD)$ 表示。

(2) 设四条射线为一定线束，被一条直线横截时，其四个截点的十字比与其横截线的位置无关。 [3447]

(3) 点 A 为两组点列 $ABCD$ 与 $AB'C'D'$ 的公共点，若此两组点列的十字比相等，则连结对应点的直线相交于一点。 [3450]

(4) 设点 A, A', B, B', C, C', … 等在一条直线上，在此直线上取一点 O，使

$$OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=OC\cdot OC'=\cdots,$$

则称这些点作成对合，点 O 叫做对合的中心。

又，A、A'，B、B'，C、C'，… 叫做对合的共轭点。若在点 O 的点列线上的两侧取点 E、F，使

$$OE^2=OF^2=OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=\cdots,$$

则点 E、F 叫做重点。

又由点 P 向各点连结的线束叫做对合线束。OE、OF 叫做重射线。

又当共轭点在中心O的同侧，则重点或重射线存在。

(5) 在对合的点群中，任意四点A、B、C、D的交叉比，等于其共轭点A'、B'、C'、D'的交叉比。 [3453～3454]

(6) **帕斯卡定理**

A、B、C、D、E、F是一个圆上的任意六点，从任一点以任意的顺序连续连结这六点得到六条直线，在这六条直线中，第一与第四的交点，第二与第五的交点，第三与第六的交点是共线点。这条直线叫做帕斯卡直线。 [3455～3457]

(7) **米库勒定理**

由五边形$ABCDE$的各边及其各邻边的延长线，作出五个三角形，则这五个三角形的外接圆的五个新交点在同一圆上。 [3468]

14. 解析几何

14.1 直线

(1) $y=ax+b$是斜率为a，在y轴上的截距为b的直线方程。

(2) $y-y_1=a(x-x_1)$是过点(x_1, y_1)，斜率为a的直线方程。

(3) $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$是经过两点$(x_1, y_1)$、$(x_2, y_2)$的直线方程。

(4) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$是在$x$轴上截距为$a$，$y$轴上截距为$b$的直线方程。

(5) $x=m$是与y轴平行的直线方程。

$y=n$是与x轴平行的直线方程。

(6) 设a、b不同时为0，则$ax+by+c=0$表示一切直线，反之，直线的一般方程是用一次方程$ax+by+c=0$表示。 [3474～3483]

(7) **不等式及其表示的区域**

不等式$y>ax+b$，表示满足这不等式的x，y的值为坐标的点$P(x, y)$的存在范围，在直线$y=ax+b$的上侧。满足不等式$y<ax+b$的点$P(x, y)$的存在范围，在直线$y=ax+b$的下侧。

(8) 直线$ax+by+c=0$把平面分成两部分，一部分上的点(x, y)总满足$ax+by+c>0$，另一部分上的点(x, y)总满足$ax+by+c<0$。前者叫做$ax+by+c$的正区域，后者叫负区域。 [3492]

(9) 两条直线$a_1x+b_1y+c_1=0$与$a_2x+b_2y+c_2=0$相交，则过交点的直线束方程为

$$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0.$$

[3493～3495]

(10) 如k为任意常数，则直线

$$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

总经过定点，这个定点是两直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

的交点。 [3499～3505]

(11) 设$P(x_1)$、$Q(x_2)$为直线上的两点，则PQ的距离是$PQ=|x_2-x_1|$。

(12) 平面上两点$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$间的距离是

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$ [3484]

(13) 连结两点$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$的线段AB，若按$m:n$内分AB，则内分点的坐标为

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right);$$

若按$m:n$外分AB，则外分点的坐标为

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right);$$

特别是线段AB的中点坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$ [3485～3486]

(14) 以(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)为顶点的三角形的重心坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

14.2 绝对值符号表示的直线

绝对值符号：$|x-a|=x-a\,(x\geq a)$，

$|x-a|=a-x\,(x\leq a)$。

含有绝对值符号如$|x-a|$，它表示折线。 [3509, 3516]

14.3 两条直线的相交、平行、垂直

(1) 两条直线相交、平行、重合、垂直的条件

设两条直线为$a_1x+b_1y+c_1=0$，

$a_2x+b_2y+c_2=0$，

当$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$时，两直线相交；

当$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$时，两直线平行；

当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ 时，两直线重合；

当 $a_1a_2+b_1b_2=0$ 时，两直线相互垂直。

(2) 设两条直线 $y=m_1x+b_1$ 与 $y=m_2x+b_2$，

当 $m_1=m_2$ 时，它们平行；

当 $m_1m_2=-1$ 时，它们垂直。

[3517～3521]

(3) 点 (x_1, y_1) 到直线 $ax+by+c=0$ 的距离为

$$l=\frac{|ax_1+by_1+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

原点到直线的距离为

$$l=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$ [3522～3523]

14.4 对称

关于 x 轴对称 $y\to -y$；

关于 y 轴对称 $x\to -x$；

关于原点对称 $x\to -x$, $y\to -y$；

关于直线 $x=y$ 对称 $x\to y$, $y\to x$；

关于直线 $x=-y$ 对称 $x\to -y$, $y\to -x$；

关于直线 $x=a$ 对称 $x\to 2a-x$；

关于直线 $y=b$ 对称 $y\to 2b-y$；

关于点 (a, b) 对称 $x\to 2a-x$, $y\to 2b-y$.

[3530～3537]

14.5 圆

(1) **圆的方程**

圆心为原点、半径为 r 的圆的方程是

$$x^2+y^2=r^2;$$

圆心为 (a, b)、半径为 r 的圆的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2;$$

圆的一般方程是 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$.

[3562～3569]

(2) 过两圆 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$ 的交点的圆或直线的方程是

$$f(x, y)+kg(x, y)=0.$$ [3570]

(3) 以两点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 为直径端点的圆的方程是 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)\times(y-y_2)=0$. [3575]

14.6 圆的切线

(1) 过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上的一点 (x_1, y_1) 的切线方程是 $x_1x+y_1y=r^2$. [3581]

(2) 过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上的一点 (x_1, y_1) 的切线方程是 $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$. [3582]

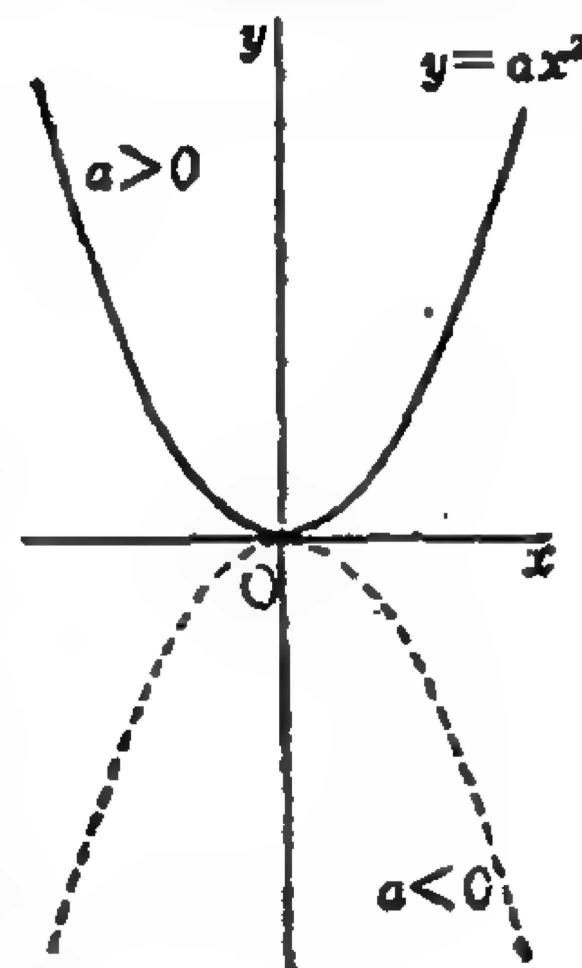
(3) 圆 $x^2+y^2=r^2$ 的斜率为 m 的切线方程是

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}.$$ [3585～3586]

14.7 抛物线

(1) **$y=ax^2$ 的图象**

① 当 $a>0$ 时，是开口向上的抛物线；$a<0$ 时，是开口向下的抛物线。



② 关于 y 轴对称。

③ 顶点在原点上。

④ 当 $|a|$ 越大，抛物线的开口越小。[3619]

(2) **$y=ax^2$ 的图象的平行移动**

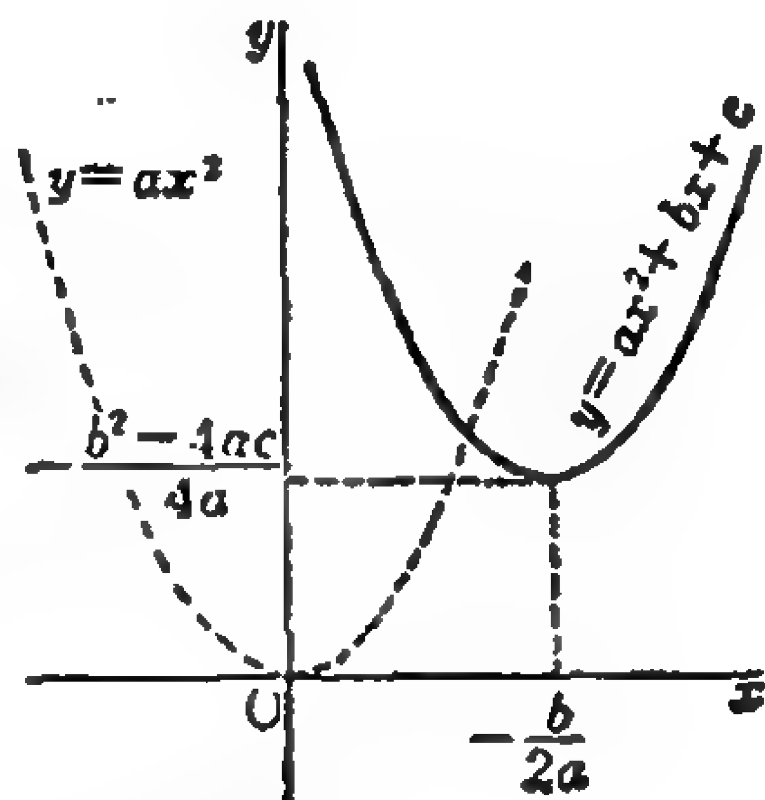
将 $y=ax^2$ 的图形沿 x 轴正向移动 p，沿 y 轴正向移动 q，这时，抛物线的方程为

$$y=a(x-p)^2+q.$$

这条抛物线的对称轴是 $x=p$，顶点在点 (p, q) 上。 [3620～3622]

(3) **$y=ax^2+bx+c$ 的图象**

① 一般地，它的图象是与 $y=ax^2$ 全同的抛物线。



② 它的图象可以通过把 $y=ax^2$ 的图形沿 x 轴正向平行移动 $-\frac{b}{2a}$，沿 y 轴正向平行移动 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 得到。

③ 顶点坐标是

$$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right).$$ [3632～3633]

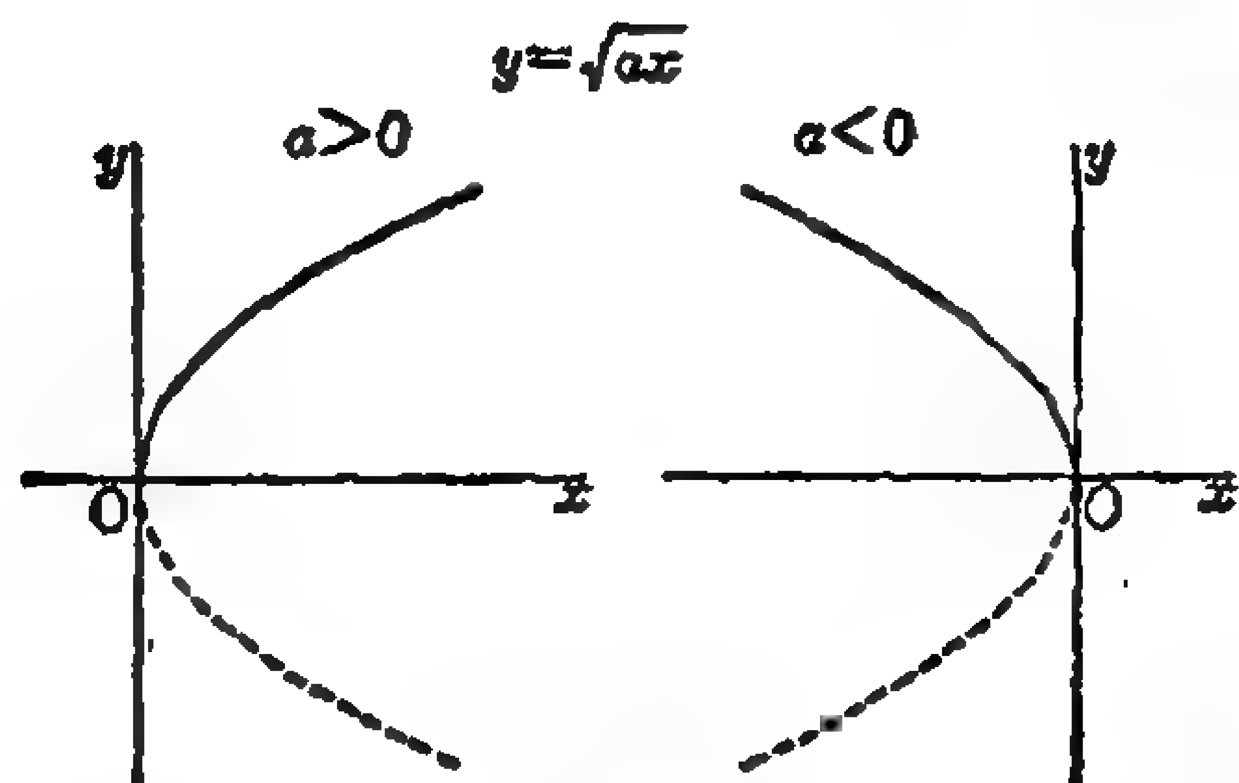
(4) **$y=\sqrt{ax}$ 的图象**

分为 $a>0$ 与 $a<0$ 两种情况。

(5) **$y=\sqrt{ax+b}+c$ 的图象**

它的图象可以通过把 $y=\sqrt{ax}$ 的图象沿 x 轴正向平行移动 $-\frac{b}{a}$，沿 y 轴正向平行移动 c 得到。 [3625～3631]

(6) 若平面上一动点到定点 F 及到定直



线 d(不过 F) 的距离相等，则这个动点的轨迹是抛物线，F 叫做焦点，d 叫做准线。

[3634]

(7) $y^2=4px$ (标准形)。

主轴: x 轴，顶点: 原点，焦点: $F(p, 0)$，准线方程: $x=-p$。

(8) $x^2=4py$。

主轴: y 轴，顶点: 原点，焦点: $F(0, p)$，准线方程: $y=-p$。

(9) $y=ax^2+bx+c$。

主轴: $x=-\dfrac{b}{2a}$,

顶点坐标: $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$,

焦点: $F\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{1}{4a}+\dfrac{-b^2+4ac}{4a}\right)$,

准线方程: $y=-\dfrac{1}{4a}+\dfrac{-b^2+4ac}{4a}$。

[3634～3637]

(10) 抛物线的切线

过抛物线 $y^2=4px$ 上一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程是

$$y_1y=2p(x+x_1).$$

过抛物线 $x^2=4py$ 上一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程是

$$x_1x=2p(y+y_1).$$

(11) 抛物线 $y^2=4px$ 的斜率为 m 的切线方程是

$$y=mx+\frac{p}{m}. \qquad [3646]$$

(12) 反函数

若从函数 $y=f(x)$ 中解出 x，得 $x=g(y)$，再把 x 与 y 交换，即 $y=g(x)$ 叫做 $y=f(x)$ 的反函数。

(13) $y=x^2$ 是 $y=\sqrt{x}$ 的反函数。

(14) 两个互为反函数的函数图象关于直线 $y=x$ 对称。

[3686]

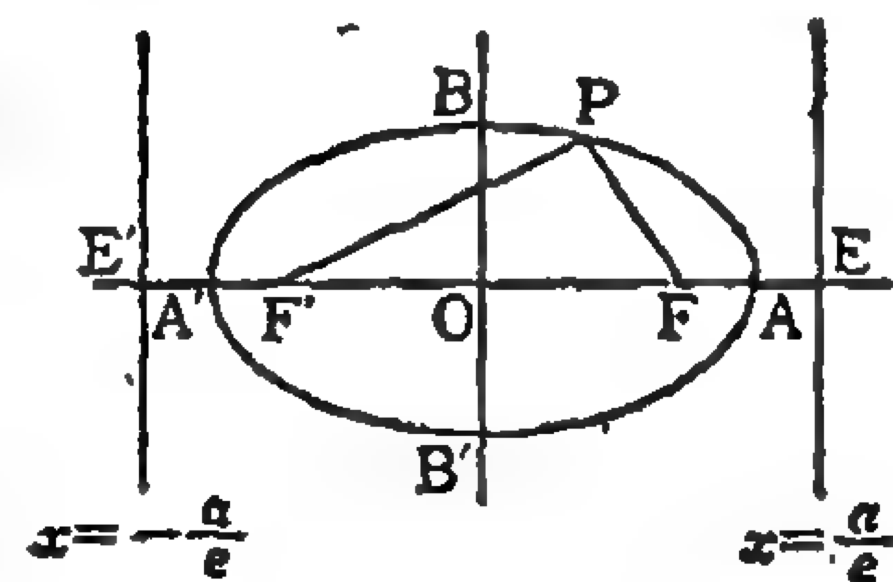
(15) 无理方程、无理不等式的解法

在 $\sqrt{f(x)}=g(x)$ 及 $\sqrt{f(x)}>g(x)$ 中，求出 $y=\sqrt{f(x)}$ 与 $y=g(x)$ 的图象的交点。这时，交点的 x 坐标为从 $\sqrt{f(x)}=g(x)$ 的两端平方求出来，并判断是否为曲线的根。

[3674～3679]

14.8 椭圆

(1) 若平面上一动点 P 到两定点 F、F' 的距离的和为定值 $(2a)$，则这个动点 P 的轨迹叫做椭圆。



椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

(标准形)

它的焦点是 $F(c,0)$、$F'(-c, 0)$。离心率 $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$，$(a>b>0)$，其中 $c^2=a^2-b^2$。AA' 为长轴，BB' 为短轴。A、A'、B、B' 为顶点。$x=\dfrac{a}{e}$ 和 $x=-\dfrac{a}{e}$ 为准线方程。

[3701～3725]

(2) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可由圆 $x^2+y^2=a^2$ 将其纵线压缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍而得到。这时称圆 $x^2+y^2=a^2$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的辅助圆。

[3711]

(3) 椭圆的切线

① 过 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程为

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

② 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的斜率为 m 的切线方程为

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}. \quad [3717～3718]$$

(4) 过一个圆的圆心，作这个圆所在平面的垂线，在此垂线上取一点 A，连结 A 与圆上各点的直线作成的曲面叫做直圆锥。此垂线叫做轴，点 A 叫顶点，这个圆叫做导线，作成直圆锥面的直线叫做母线。

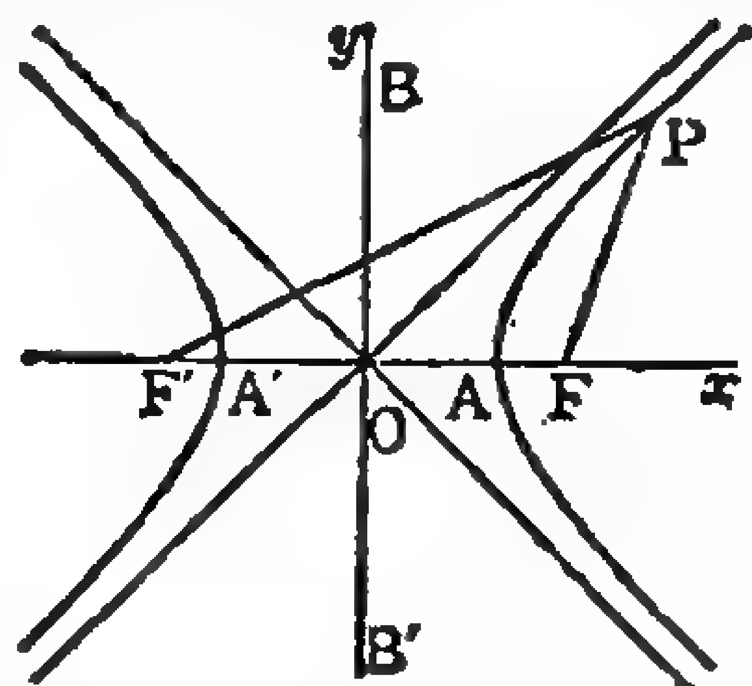
设直圆锥的轴与母线的夹角为 α，若用不

过顶点，又不与导线圆平行，且与轴的夹角为β的平面截这个直圆锥，则平面的截口曲线，当$\alpha>\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$时，分别为双曲线，抛物线和椭圆。

这个事实，是基于直圆锥的平面截口总是二次曲线。因此，二次曲线也叫做圆锥曲线。　[3747～3748, 3812]

14.9　双曲线

(1) 若平面上一动点到两定点F、F'的距离的差为定值($2a$)，则这个动点P的轨迹是双曲线。



双曲线的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

(标准形)

它的焦点是$F(c, 0)$、$F'(-c, 0)$. $A'A$为主轴，$B'B$叫做副轴或共轭轴。A、A'为顶点。$c^2-a^2=b^2$，离心率$\frac{c}{a}>1$.　[3763, 3790～3792]

(2) 双曲线的渐近线

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程是

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

(3) 共轭双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad ①$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1. \quad ②$$

①、②是互为共轭双曲线。①、②的渐近线相同。①是动点到点$F'(-c, 0)$、$F(c, 0)$的距离的差等于$2a$，②是动点到点$F'_1(0, -c)$、$F_1(0, c)$的距离的差等于$2b$.　[3773]

(4) 双曲线的其他定义

到两条定直线的距离(包含符号)的积为一定的点的轨迹。

这两条定直线叫做双曲线的渐近线。特别是，到两坐标轴的距离的积为一定的点的轨迹方程是$xy=k$，这是以x轴、y轴为渐近线的等边双曲线。

(5) 切线

过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上的一点$P(x_1, y_1)$的切线方程为$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$.　[3773]

过等边双曲线$xy=k$上的一点(x_1, y_1)的切线方程为$y_1x+x_1y=2k$.　[3787]

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的斜率为$m$的切线方程为

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.\quad [3782]$$

(6) 无理函数的图象

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}. \quad ①$$

它的图象是在$y^2=ax^2+bx+c$的图象中$y\geqq 0$(x轴的上方)的部分。

函数①的图象，当$a>0$时为双曲线；$a<0$时为椭圆($b^2-4ac>0$)；$a=0$时为抛物线($b\neq 0$)。

(7) 不等式与区域

满足不等式$ax+f(y)>0$时，是以曲线$ax+f(y)=0$为边界的区域。这区域当$a>0$时，在曲线的右侧；当$a<0$时在左侧。

满足不等式$by+g(x)>0$时，是以曲线$by+g(x)=0$为边界的区域。这区域当$b>0$时，在曲线的上侧；当$b<0$时在下侧。

[3799～3803]

(8) 二次方程

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$的图象，若除去退化为一点及两条直线的情形外，则

$h^2-ab<0\rightleftarrows$椭圆(包括圆)，

$h^2-ab=0\rightleftarrows$抛物线，

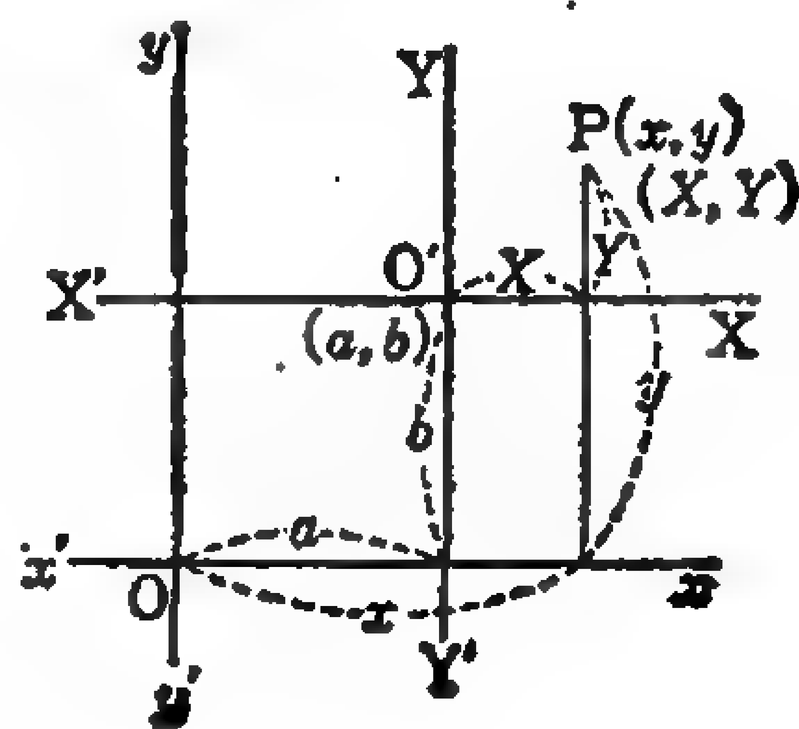
$h^2-ab>0\rightleftarrows$双曲线。[3810～3829]

(9) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$. 当左边的二次式可分解为两个$x$、$y$的一次因式的积时，它的图形为两条直线。

又，左边的二次式中，当$ab>0$，并可以变形为$a(x+p)^2+b(y+q)^2=0$时，它表示一点。　[3810]

14.10　坐标轴的平移与旋转

(1) 坐标轴的平移



把坐标轴$x'x$、$y'y$的原点O平移到点$O'(a, b)$时，设新坐标的两轴为$X'X$、$Y'Y$，点P的旧

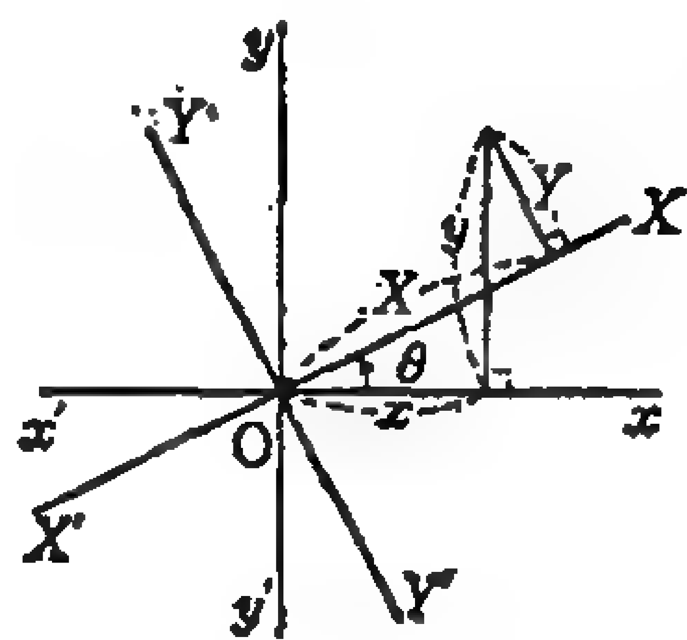
坐标为(x, y)，新坐标为(X, Y)，则其间关系为

$$x=X+a,\ y=Y+b.$$

从而得出

$$X=x-a,$$
$$Y=y-b.$$

[3814～3818]



(2) 坐标轴的旋转

把坐标轴$x'x$、$y'y$绕原点旋转角θ，得新坐标轴$X'X$、$Y'Y$，新旧坐标间的关系是

$$\begin{cases}x=X\cos\theta-Y\sin\theta,\\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta.\end{cases}$$

从而得出 $\begin{cases}X=x\cos\theta+y\sin\theta,\\ Y=-x\sin\theta+y\cos\theta.\end{cases}$

[3819～3827]

14.11 图形的平移与旋转

(1) 图形的平移

把图形$f(x, y)=0$沿x轴正方向移动a，沿y轴正方向移动b，则其方程为

$$f(x-a,\ y-b)=0.$$

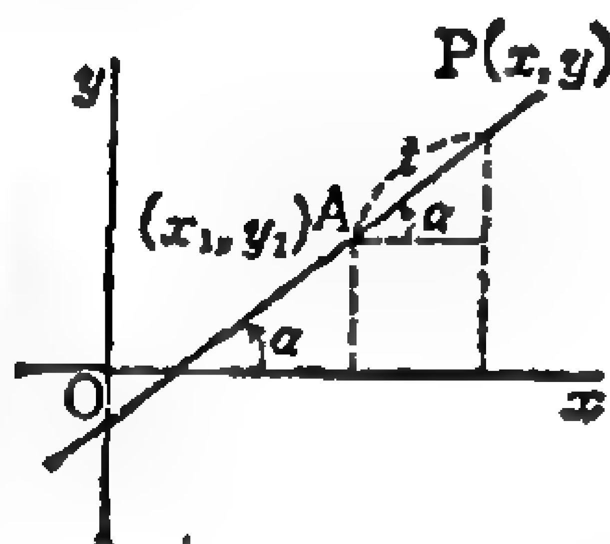
(2) 图形的旋转

在表示图象的方程$f(x, y)=0$中，把

$$\begin{cases}x=X\cos\theta+Y\sin\theta,\\ y=-X\sin\theta+Y\cos\theta\end{cases}$$

代入即可。

14.12 参数方程



(1) 直线的参数方程

① 过点$A(x_1, y_1)$，倾角为α的直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_1+t\cos\alpha,\\ y=y_1+t\sin\alpha.\end{cases}$$

(其中t为参数，$-\infty<t<+\infty$)

$(AP=|t|)$.

② 过两点$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$的直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1),\\ y=y_1+t(y_2-y_1).\end{cases}$$

(2) 圆的参数方程

① 圆心为原点，半径为r的圆的参数方程是

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta.\end{cases}\quad(\theta\text{为参数})$$

② 圆心为(m, n)，半径为r的圆是

$$\begin{cases}x=m+r\cos\theta,\\ y=n+r\sin\theta.\end{cases}\quad(\theta\text{为参数})$$

(3) 椭圆的参数方程

① $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta.\end{cases}$ $(a>0,\ b>0,\ \theta$为参数$)$

② $\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}a,\\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}b.\end{cases}$ $(t$为参数$)$ [3833]

(4) 双曲线的参数方程

① $\begin{cases}x=a\sec\theta,\\ y=b\,\mathrm{tg}\,\theta.\end{cases}$ $(\theta$为参数$)$

② $x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}a,\ y=\dfrac{2t}{1-t^2}b.$ $(t$为参数$)$

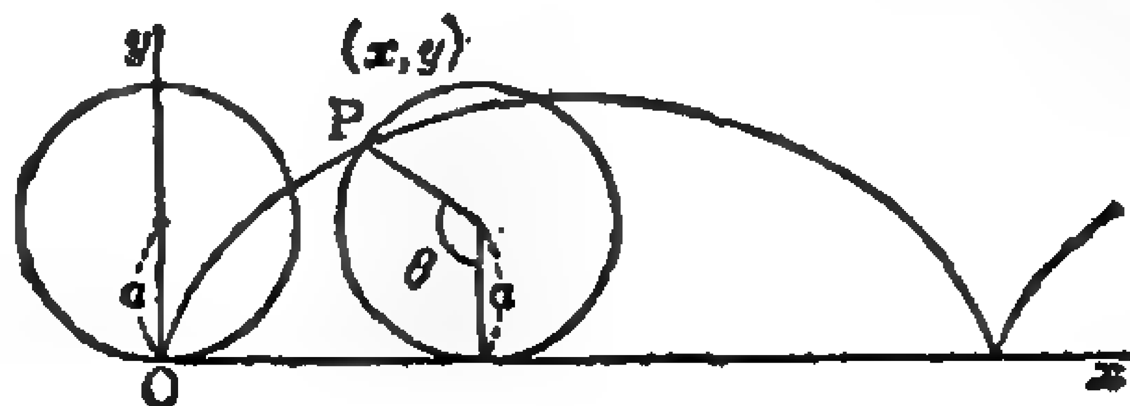
(5) 抛物线的参数方程

$x=pt^2,\ y=2pt.$ $(t$为参数$)$ [3832]

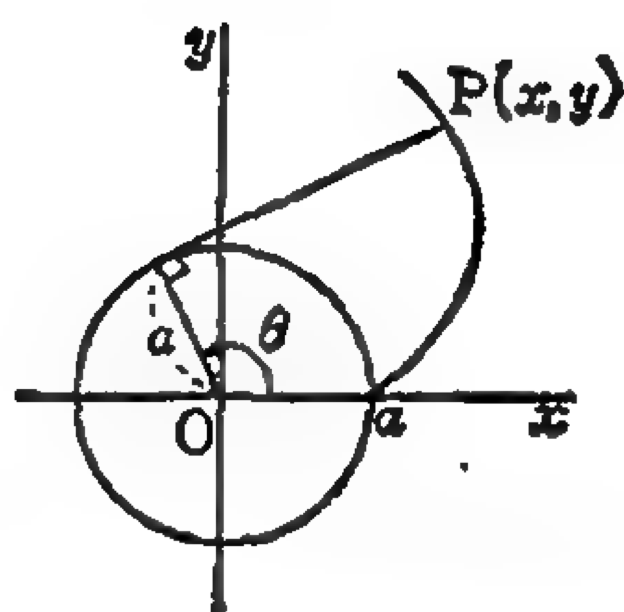
(6) 摆线(旋轮线)的参数方程

$$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta),\\ y=a(1-\cos\theta).\end{cases}\quad(\theta\text{为参数})$$

[3840]



(7) 圆的渐开线



$$\begin{cases}x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta),\\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta).\end{cases}$$

$(\theta$为参数$)$ [3841]

14.13 极坐标方程

(1) 直角坐标与极坐标的关系

设点P的直角坐标为(x, y)，它的极坐标为(r, θ)，则

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}\quad\begin{cases}r^2=x^2+y^2,\\ \mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

(2) 直线的极坐标方程

① 设直线上任意一点的极坐标为(r, θ)，从极点作直线的垂线，设垂足为(p, α)，则这直线的方程为

$r\cos(\theta-\alpha)=p.$ (海赛标准形) [3845]

② 设直线上任意一点的极坐标为(r, θ)，

则过两点 $A(a, \alpha)$、$B(b, \beta)$ 的直线方程为

$$ar\sin(\theta-\alpha)+br\sin(\beta-\alpha)$$
$$=ab\sin(\beta-\alpha). \qquad [3847]$$

当 $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$ 时，直线的极坐标方程为

$$r(a\sin\theta+b\cos\theta)=ab.$$

(3) **圆的极坐标方程**

① 设 $P(r, \theta)$ 为圆上任意一点，则以极点为圆心，a 为半径的圆的方程是

$$r=a.$$

② 设 $P(r, \theta)$ 为圆上任意一点，则圆心为 $C(c, \alpha)$，半径为 a 的圆的方程是

$$r^2+c^2-2cr\cos(\theta-\alpha)=a^2. \qquad [3849]$$

③ 设定点 $A(a, 0)$ 在极轴上，$P(r, \theta)$ 为圆上任意一点，则以 OA 为直径的圆的方程是 $r=a\cos\theta$. [3850]

④ 圆锥曲线的极坐标方程

$$r=\frac{l}{1+e\cos\theta},$$

当 $0<e<1$ 时，是椭圆；

当 $e=1$ 时，是抛物线；

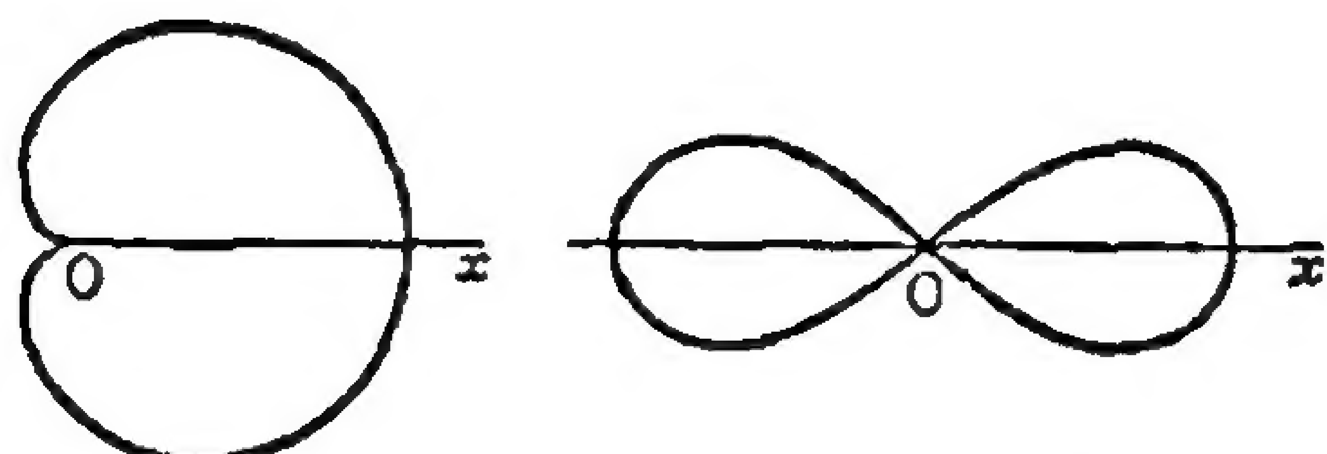
当 $e>1$ 时，是双曲线.

⑤ 心脏线的极坐标方程

$$r=a(\cos\theta+1). \ (a>0) \qquad [3862]$$

⑥ 双纽线的极坐标方程为

$$r^2=2a^2\cos 2\theta. \qquad [3863]$$



心脏线　　　　双纽线

15. 空间坐标

15.1 点、方向余弦、两直线的夹角

(1) 空间的点可以用实数组 (x, y, z) 表示.

(2) 空间两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离为

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

一点 $P(a, b, c)$ 到原点的距离为

$$OP=\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \qquad [3866]$$

(3) 连结两点 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$ 的线段，若按定比 $m:n$ 内分 AB，则内分点坐标为

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}, \frac{nz_1+mz_2}{m+n}\right),$$

又若按定比 $m:n$ 外分 AB，则外分点的坐标为

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1+my_2}{m-n}, \frac{-nz_1+mz_2}{m-n}\right),$$

AB 的中点坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right). \qquad [3869]$$

(4) **方向余弦**

设 $l=\cos\alpha$, $m=\cos\beta$, $n=\cos\gamma$，则 l、m、n 确定直线 g 的方向，且把它们叫做直线 g 的方向余弦.

l、m、n 之间有关系：

$$l^2+m^2+n^2=1. \qquad [3867\sim3868]$$

与方向余弦成比例的三个数叫做方向数.

$$A:B:C=l:m:n.$$

(5) 假设两直线 l、g 的方向余弦分别为 l、m、n, l'、m'、n'，则直线 l、g 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=ll'+mm'+nn'. \qquad [3870]$$

(6) **两直线的垂直条件**

$$ll'+mm'+nn'=0. \qquad [3871]$$

(7) **两直线的平行条件**

$l=\pm l'$, $m=\pm m'$, $n=\pm n'$.（符号一致）[3872～3873]

15.2 直线、平面、球

(1) **直线方程**

① 过原点，方向余弦为 l、m、n 的直线的方程是

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}. \qquad [3874]$$

② 过点 $A(a, b, c)$，方向余弦为 l、m、n 的直线方程是

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}. \qquad [3875]$$

③ 过两点 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2) 的直线方程是 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. [3876]

(2) **平面方程**

设从原点向平面所作垂线的方向余弦（叫做平面的方向余弦）为 l、m、n，其垂线长为 p，则这个平面的方程为 $lx+my+nz=p$.（标准形） [3877]

(3) **两平面的夹角**

设两平面为

$Ax+By+Cz=D,\ A'x+B'y+C'z=D'$,

则这两平面的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\pm(AA'+BB'+CC')}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

[3882]

(4) **两平面的垂直条件和平行条件**

垂直条件为 $AA'+BB'+CC'=0$,

平行条件为 $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$. [3882]

(5) **直线与平面的垂直条件和平行条件**

设直线为 $\frac{x-\alpha}{A}=\frac{y-\beta}{B}=\frac{z-\gamma}{C}$, 平面为 $A'x+B'y+C'z=D$, 则直线与平面的垂直条件为 $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$, 平行条件为 $AA'+BB'+CC'=0$. [3880~3881]

(6) ① 设点 (a, b, c) 到平面 $Ax+By+Cz=D$ 的距离 p, 则

$$p=\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\quad [3879]$$

② 一点(α,β,γ)到直线 $\frac{x-\alpha'}{A}=\frac{y-\beta'}{B}=\frac{z-\gamma'}{C}$ 的距离

$$p=\frac{|A(\alpha'-\alpha)+B(\beta'-\beta)+C(\gamma'-\gamma)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

[3883]

(7) 原点到平面 $Ax+By+Cz=D$ 的距离

$$p=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

原点到平面 $Ax+By+Cz=D$ 的垂线的方向余弦为

$$\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\quad [3878]$$

(8) 过三点 $P(x_1, y_1, z_1)$、$Q(x_2, y_2, z_2)$、$R(x_3, y_3, z_3)$的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0.\quad [3886]$$

(9) **球面方程**

① 球心在原点,半径为 r 的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

② 以点(a, b, c)为球心, 半径为 r 的球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

16. 复数

(1) **复平面(高斯平面)**

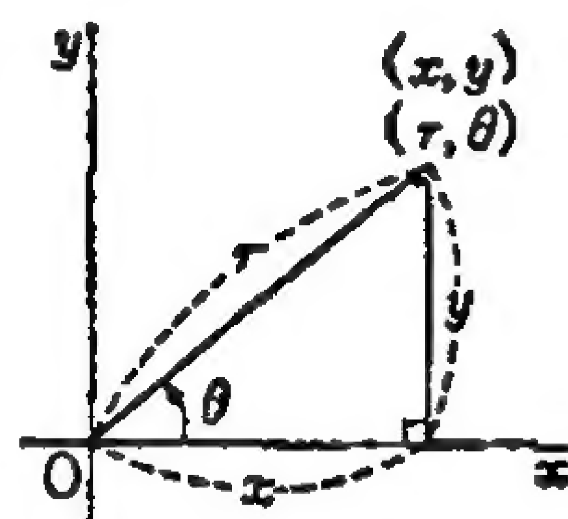
在平面上取直角坐标系, 复数 $a+bi$ 与平面上的点 (a, b) 对应时, 称此平面为复平面或高斯平面.

(2) **复数表示法**

① 直角坐标形式 $z=x+yi$.

② 极坐标形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 叫做复数 $z=x+yi$ 的模或绝对值, $\theta=amp(z)$ 叫做辐角.



(3) **复数的加、减、乘、除**

设 $z_1=x_1+y_1i,\ z_2=x_2+y_2i$, 则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i,$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i.$$

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$, 则

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

[3896]

(4) 设点P表示复数z,则点P绕原点旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的点,表示复数 zi.

复数 $-z$ 对应的是点 P 关于原点对称的点.

$-zi$ 对应的是点 P 绕原点按负的方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的点. [3898~3901]

(5) 设三角形 ABC 的顶点 A、B、C 分别表示复数 α、β、γ, 则三角形 ABC 为正三角形的充分且必要条件是: $\alpha+\beta\omega+\gamma\omega^2=0$, 或 $\alpha+\beta\omega^2+\gamma\omega=0$. 其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

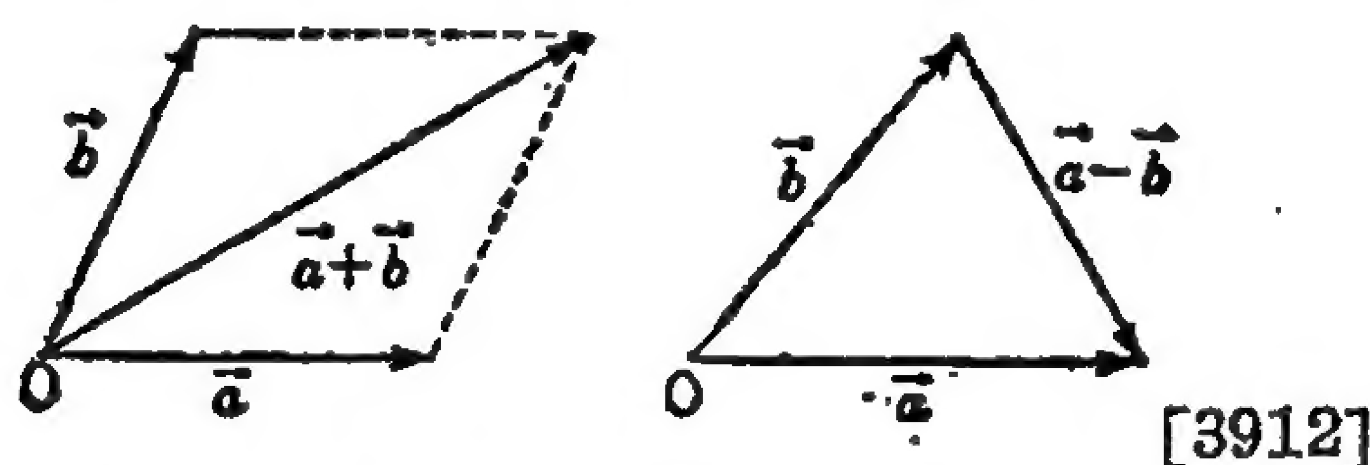
[3903]

(6) 若三角形 ABC 内接于以原点为圆心的单位圆，则其重心的坐标为 $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$，它的垂心坐标是 $\alpha+\beta+\gamma$．[3910]

17．向量

(1) 方向一定，大小一定的有向线段叫做向量．此时向量用 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$ 表示．

(2) 向量的和、差



[3912]

(3) 向量的性质

① $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$．(交换律)

② $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$．(结合律)

③ $l(m\vec{a})=(lm)\vec{a}$．(数乘结合律)

④ $(l+m)\vec{a}=l\vec{a}+m\vec{a}$．(数乘分配律)

(4) 向量的内积(数量积)

设两个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 及其夹角为 θ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的内积为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}, \vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$．这里 $|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$ 分别为 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的大小(模)．

(5) 向量的垂直条件和平行条件

垂直条件为 $(\vec{a}, \vec{b})=0$,

平行条件为 $(\vec{a}, \vec{b})=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$．[3913]

(6) 若 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，线段 AB 被分成定比 $m:n$ 的分点为 P，则

$$\overrightarrow{OP}=\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}.$$

当 m、n 同号时，P 为内分点；m、n 异号时，P 为外分点。

特别，当 P 为 AB 的中点时，$\vec{p}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$．

[3915～3916]

(7) 直线的向量方程

① 过定点 A 且平行于向量 $\vec{b}$ 的直线的向量方程为

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}.$$

② 过两定点 A、B 的直线的向量方程为

$\vec{p}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$　(t 为实数)．

[3914, 3920～3922]

译 后 语

《几何学辞典》是一部好书．它在初等几何方面收集了较丰富而全面的资料，将这本书介绍给读者是大有教益的．

在翻译过程中，曾得到华中师范学院科研处邓宗琦同志，数学系领导等大力支持．特别需要提出的是华中师范学院数学系陈森林副教授校阅了大部分译稿，并对其中部分译稿作了修改整理，吴克乾、孙启标副教授，姬振忠同志等修改了部分译稿．在此谨向这些同志致以衷心的感谢．

由于我们的水平有限，希望读者对书中的缺点和错误不吝赐教。

译 者

于华中师范学院 1984 年 3 月